UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO
CONJUNTO UNIVERSITÁRIO, CX.P. 476, FLORIANÓPOLIS,SC.

DESENVOLVIMENTO DE UMA TÉCNICA DE OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES ESTOCÁSTICOS COM MÚLTIPLOS OBJETIVOS

TESE SUBMETIDA À APRECIAÇÃO COMO REQUISITO
PARCIAL PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

EM ENGENHARIA INDUSTRIAL - OPÇÃO PRODUÇÃO

ROBERTO FRANCISCO KRISCHER

FLORIANÓPOLIS
SANTA CATARINA - BRASIL
DEZEMBRO - 1976

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO ORIENTADOR E PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO.

Prof. Leonardo Ensslin, Ph.D.
Orientador

Prof. Raul Valentim da Silva, M.Sc.
Coordenador dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia Industrial.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Leonardo Ensslin, Ph.D.

Prof. Raul Valentim da Silva, M.Sc.

Paulo Nascimento

Prof. Paulo Renécio Nascimento, M.Sc.

Ao meu filho ROBERT

AGRADECIMENTOS

Por incentivar a realização deste trabalho no decorrer de suas disciplinas , meus agradecimentos ao Professor Orientador Leonardo Enslin, Ph.D.

Pelo decisivo apoio que me foi concedido, agradeço à minha sogra Rita de Cássia Carneiro Falkenbach e em especial ao Centro Exotérico da Comunhão do Pensamento.

R E S U M O

Este trabalho foi desenvolvido para elaborar uma técnica que possibilite a resolução de problemas que necessitem a otimização de várias metas estocásticas e/ou determinísticas simultâneas, sujeitas a uma certa ordem de prioridades, com as mesmas ou diferentes unidades.

Na primeira parte são abordados os aspectos de programação por múltiplos objetivos determinísticos, e ainda uma pequena generalização para metas estocásticas, quando estas estiverem sujeitas a uma mesma prioridade e solução somente para o caso de menor risco.

Na segunda parte está desenvolvido um modelo matemático, computacional, que abrange tanto o caso determinístico como o estocástico, com prioridades diferentes conferidas às metas. As soluções que advém da aplicação desta metodologia a um problema são sempre associadas a um valor individual de risco, possibilitando assim uma decisão pelo maior ou menor "conservadorismo" dos dirigentes.

Uma aplicação prática ilustra o modelo matemático apresentado.

A B S T R A C T

The main purpose of this work was to develop a technique that enables the solution of problems that require the otimization of many satistical and or deterministic goals simultaneously, where each goal may have a different priority.

The first part of this work analyses deterministic Goal Programming as well as the stochastic case with all the goals under the same priority and when only the solution with the lowest risk is required.

The second part of this work develops a computational mathematical model to solve the stochastic and or deterministic Goal Programming problem with many goal priorities and under all possible risks. The solutions generated by this mathematical model allows the decision maker to decide his best solution considering all the risks.

A practical illustration shows the use of the mathematical model.

S U M Á R I O

SIMBOLOGIA

Y = vetor representativo das metas.

y_i = meta i, ou iésimo componente do vetor das metas.

y_i^* = valor ótimo para a meta i .

X = vetor de instrumentos.

x_i = iésimo componente do vetor de instrumentos.

x_i^* = valor ótimo para o iésimo componente de vetor de instrumentos.

λ = multiplicador de Lagrange ou coeficiente de aversão ao risco.

Z = vetor representativo dos desvios.

z_j^+, z_j^- = iésimos componentes do vetor de desvios.

H = vetor correspondente ao termo independente das restrições.

B = matriz formada com os coeficientes das variáveis x_i nas restrições cujos desvios não fazem parte da função objetiva.

R = matriz formada com os coeficientes das variáveis x_i nas restrições cujos desvios fazem parte da função objetiva.

R^+ = inverso generalizado de R.

β = vetor arbitrário de ordem (n-r).

n = número de instrumentos, ou número das variáveis x_i .

q = número de metas.

W = matriz de variância-covariância.

U = vetor de variáveis aleatórias com média zero e variância caracterizada por W .

V = operador variância.

E = operador valor esperado.

EX = representa Y-RX .

Var = variância.

Cov = covariância.

P = vetor de prioridades.

P_i = iésima prioridade.

a_{ij} = componente da linha i e da coluna j de W^{-1}.

L_i = iésima linha da matriz Y-RX.

Θ = variável do dual.

f, ϕ = função

σ_i = desvio padrão do elemento i .

d_i^-, d_i^+ = iésimos componentes do vetor de desvios.

$U(y_i)$ = função utilidade da meta y_i.

a, b, c = constantes dos termos de uma série de Taylor.

C A P Í T U L O 1

INTRODUÇÃO

1.1 - Histórico

O "Goal Programming" (G.P.) proposto por Charles e Cooper, e, mais tarde, estudado por Y. Ijiri, permite resolver problemas que envolvem uma série de metas (goals) simultaneamente. Estas metas devem ser atingidas, segundo uma ordem de prioridades, pela escolha apropriada dos sub-objetivos, aqui designados por "x_i". A solução apontada pelos autores acima pressupõe que exista uma relação linear entre as metas (y_i^*) e os sub-objetivos (x_i).

Bruno Contini, por sua vez, propôs um tratamento para o caso das metas estarem sujeitas a distribuições normais, mas todas com igual prioridade.

1.2 - Propósito do Estudo

O propósito deste estudo é o de formular um procedimento matemático que generalize a solução de problemas de " goal programming" para o caso em que as metas, ainda sujeitas a um critério de prioridades, e os coeficientes dos sub-objetivos, estejam sujeitos a distribuições normais.

1.3 - Importância do Estudo

Observa-se que, em casos práticos, os coeficientes dos sub-objetivos podem representar previsões sujeitas a uma certa variação. O exemplo clássico é a colocação dos sub-objetivos como quantidades e de seus coeficientes como preços unitários pre vistos. Obviamente deve-se ter um conjunto de valores para as metas para cada risco que se vai correr. Desta forma, os resultados para o problema sempre estarão associados com um risco.

Esta forma de oferecer uma solução de problema, fornece sempre mais subsídios para um tomada racional de decisão.

1.4 - Limitações do Estudo

Para a formulação deste modelo fazem-se duas suposições restritivas, a saber:

a) as variações das metas ou coeficientes dos sub-objetivos seguem distribuições normais.

b) o relacionamento entre as metas e os sub-objetivos é linear.

Mesmo com estas limitações, muitos problemas práticos podem ser aproximados à este sistema.

1.5 - Condições de Pesquisa

A pesquisa para estabelecer este modelo foi realizada, pelo autor, na Universidade Federal de Santa Catarina, durante um período de doze meses. As idéias foram se delineando após os inúmeros debates resultantes do curso de "Economia da Engenharia Avançada", com o Dr. Leonardo Ensslin.

1.6 - Definição dos Termos

Na programação por objetivos (goal programming), as metas são conjugadas na mesma função objetiva. Pode-se chamar as metas de um vetor Y^*, que deverão ser atingidas, a menos de um vetor de desvios, pela escolha apropriada de um vetor instrumento que designa-se por X, sujeito a um certo risco caracterizado por um coeficiente λ. Não se pode falar em uma única solução "mais satisfatória", pois que para cada risco, ter-se-á um resul tado ótimo particular.

1.7 - Desenvolvimento do Estudo

No capítulo 2 será apresentado o desenvolvimento do modelo de G.P. para o caso mais simples de relação estocástica entre as metas e os sub-objetivos. Recai-se em um caso de programação quadrática passível de uma rápida e simples resolução, para o ponto de variância mínima, e sem diferenciação de prioridades para as metas.

O capítulo 3 apresenta o mesmo caso de G.P. , agora resolvido supondo uma ordem de prioridades para alcançar os objetivos e, ainda, considerando vários valores de variância. O problema de minimização envolvendo uma forma quadrática será solucionado atendendo as condições de Kuhn-Tucker de otimização.

Um exemplo da aplicação do processo desenvolvido no capítulo 3, será dado no capítulo 4.

O capítulo 5 contém as conclusões em caráter de fechamento deste trabalho.

No apêndice 1 está apresentada a listagem do programa computacional utilizada na ilustração do capítulo 4.

No apêndice 2 está apresentado um novo modo de encarar o G.P. estocástico, a partir do conhecimento da função utilidade do decisor.

CAPÍTULO 2

RETROSPECTO

2.1 - Formulação do "Goal Programming" determinístico

Considerando uma relação linear entre as metas e os sub-objetivos, o problema consiste em calcular um vetor X tal que:

$$Y^* = RX + \text{desvio mínimo} \tag{1}$$

na presença de restrições, também lineares, das variáveis instrumento:

$$BX \leq H \tag{2}$$

$$x_i \geq 0 \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{3}$$

Nesta situação, o vetor Y^* tem dimensão (q x 1) e, portanto, existem q metas na função objetiva, correspondendo esta a soma dos desvios associados a suas respectivas prioridades. A dimensão do vetor X é (n x 1), R é uma matriz de coeficientes conhecidos (q x 1), B é uma matriz (m x n), e H é um vetor (m x 1).

A resolução deste sistema pode ser realizada através de programação linear como segue:

$$\text{Min } (PZ^+ + PZ^-) \quad , \tag{4}$$

$$\text{s.a } RX - IZ^+ + IZ^- = Y^* \tag{5}$$

$$BX \leq H \tag{6}$$

$$x_i,\ z_i^+,\ z_i^- \geq 0 \tag{7}$$

onde P é um vetor de prioridades (1 x q), e I é a matriz identidade de ordem (q x q). A propriedade que obedecem os desvios é $z_j^+ \cdot z_j^- = 0$, para $j = 1,2,\ldots,n$.

Existe ainda uma segunda aproximação para a resolução do sistema (1), (2) e (3), chamada de método dos inversos generalizados, e, prova-se [7]* que a solução pode ser dada por:

$$X = R^{+}Y^{*} + R^{\circ}\beta \quad ,$$

onde R^{+} é o inverso generalizado de R, portanto, de dimensão $(n \times q)$; R° representa uma matriz do espaço base nulo de ordem $(n\ (n-r))$, tal que $RR^{o} = 0$. Finalmente, β é um vetor arbitrário de ordem $(n-r)$.

A resolução do sistema, nestas condições, pode ser realizada através de uma programação linear conforme o modelo:

$$\mathrm{Min}\ (R^{\circ}\beta) \tag{8}$$

$$\text{s.a.}\ R^{+}Y^{*} + R^{\circ}\beta = X \tag{9}$$

$$BR^{+}Y^{*} + BR^{\circ}\beta \leq H \tag{10}$$

$$R^{+}Y^{*} + R^{\circ}\beta \geq 0 \tag{11}$$

Nota-se, imediatamente, uma correspondência perfeita das equações (4), (5), (6) e (7) com as (8), (9), (10) e (11), respectivamente. Pode-se refletir que a matriz R° dará peso ao desvio β, e que a escolha desta matriz será forçada pela imposição das restrições (9), (10) e (11) sobre o instrumento X.

Por outro lado, pode-se provar que a solução expressa por (4), (5), (6) e (7) corresponde a minimização de:

$$\sum_{1}^{q} \left| (R_i X - y_i^{*}) \right| \tag{12}$$

onde R_i representa o vetor componente da linha i da matriz R.

No método dos inversos generalizados, a solução representa a minimização pelo método dos mínimos quadrados[7]:

$$\left| \sum_{1}^{q} (R_i X - y_i^{*}) \right|^{1/2} \tag{13}$$

---

* - O número entre parenteses refere-se à bibliografia citada no fim deste trabalho.

2.2 - Formulação de um Modelo Simplificado de "Goal Programming" Estocástico.

Bruno Contini propôs uma extensão natural do G.P. considerando a relação estocástica correspondente a equação (1), pela seguinte forma:

$$Y = RX + U \tag{14}$$

onde U, de dimensão (q x 1), representa um vetor de variáveis aleatórias, tomado como normalmente distribuído com média zero e variância correspondente a matriz W de covariâncias.

Fazem-se agora, as seguintes suposições:

a) R é uma matriz de coeficientes fixos;

b) O número de instrumentos desconhecidos (x_i), é igual ou maior a q , ou seja, $n \geq q$;

c) A matriz não singular W é conhecida, e, portanto, pode-se afirmar que o vetor Y é distribuído normalmente.

$$E(Y) = E(RX) + E(U) \quad ; \quad \text{logo,} \quad E(Y) = E(RX)$$

$$V(Y) = V(RX + U) \quad ; \quad \text{logo,} \quad V(Y) = V(U).$$

Tomando-se a equação da distribuição multi-normal, pode-se afirmar que:

$$\phi(y_1 \ldots y_q) = (2\pi)^{-q/2}\, W^{-1/2}\, e^{-Q/2} \tag{15}$$

onde Q é definido por:

$$Q = (Y-RX)'W^{-1}(Y-RX) \tag{16}$$

O problema, então, consiste em encontrar o vetor instrumento X para o qual a probabilidade do vetor $Y = RX + U$ cair dentro de uma região Y^{**}, definida por $Y^* \varepsilon\, Y^{**} \varepsilon\, E^q$, seja maximizada. Como consequência da normalidade da distribuição do Y, pode-se concluir pela forma elipsóide da sua vizinhança Y^{**} , e ainda da não singularidade de W , segue-se que a forma quadrática expressa por (16) tem uma distribuição qui-quadrada, com q graus de liberdade[7].

A minimização da forma quadrática pode ser obtida segundo o seguinte procedimento:

$$\Delta = (Y^* - RX)'W^{-1}(Y^* - RX) \quad , \quad \text{ou}$$

$$\Delta = K + X'AX + 2p'X \tag{17}$$

onde,

$$A = R'W^{-1}R \quad , \quad \text{e} \tag{18}$$

$$p = -R'W^{-1}Y^* \ . \tag{19}$$

Para encontrar o valor mínimo basta fazer:

$$d\Delta/\partial X = 2AX + 2p = 0 \tag{20}$$

$$AX = -p \tag{21}$$

Se A for não singular, o que é óbvio se $q < n$, então a solução ótima terá a seguinte forma:

$$X^* = -A^{-1}p \tag{22}$$

$$X^* = (R'W^{-1}R)^{-1}R'W^{-1}Y^* \tag{23}$$

A formulação do G.P. estocástico, com restrições, e que tem a solução apontada em (23), pode ser expressa na (17), ou:

$$\text{Min}(K + XAX' + 2p'X) \tag{24}$$

$$\text{s.a. } BX \leq H$$

$$x_i \geq 0 \quad , \quad \text{para} \quad i = 1,\ldots,n$$

CAPÍTULO 3

MODELO DE "GOAL PROGRAMMING" ESTOCÁSTICO GENERALIZADO

Este capítulo apresenta um modo mais geral de formulação estocástica de problemas como programação por múltiplos objetivos.

As metas y_i^* estão sujeitas a distribuições normais, cada qual com uma média e uma variância própria. Para se atingir estas metas y_i^*, deve-se encontrar um vetor instrumento X apropriado. Supõe-se que exista uma relação linear entre X e Y.

Nas condições acima, o problema consiste em calcular um vetor X^*, tal que:

$$Y^* - RX^* - U = \text{desvio mínimo} \qquad (25)$$

para cada valor da variância. Provar-se-á, mais adiante, que as variações estocásticas de r_{ij} e as de y_j podem ser mensuradas por uma única variação, expressa por U.

Na equação (25), U é um vetor de dimensão (n x 1) de variáveis aleatórias, que será tomado como normalmente distribuído com média igual ao vetor zero e matriz W de variância-covariância.

R é uma matriz de coeficientes conhecidos, na prática, muitas vezes, estimados.

W, matriz de variâncias-covariâncias, deve ser não singular e conhecida.

Se todas restrições forem colocadas na função objetiva, matricialmente enfrentar-se-á o seguinte problema:

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ r_{n1} & \cdots & r_{nm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1^- - d_1^+ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n^- - d_n^+ \end{vmatrix}$$

onde $m = n$, de modo a assegurar, pelo menos, uma solução viável.

Pode-se, agora, reanalisar o problema da seguinte maneira: na expressão (25), Y^*, RX^* e U são vetores com distribuição multi-normal; segue-se daí que o segundo membro desta equação também o será; logo:

$$E(Y) - E(RX) - E(U) = E(\text{desvios})$$

$$Y^* - RX^* = E(\text{desvios}) \qquad (26)$$

e, portanto, pode-se escrever que a solução do problema consiste em encontrar o vetor desvio mínimo, o que, obviamente, será uma função do vetor instrumento X, com um valor médio mais uma variação.

$$V(Y-RX)-V(U) = V(\text{desvios})$$

$$V(Y-RX)-V(U) = V(\text{desvios}) = 0$$

$$V(Y-RX) = V(U) = W \qquad (27)$$

Esta última expressão implica em que seja possível considerar toda variação de Y menos a de RX numa só, ou seja, de U. Na formulação de um problema, se forem considerados os valores RX fixos e transferida toda sua possível variação para Y, ter-se-á finalmente que:

$$V(Y) = V(U) = W$$

Sendo λ o multiplicado de Lagrange, tal que $0=\lambda<\infty$, pode-se assegurar que:

$$f(X) = \lambda EX + (Y^*-RX)'W^{-1}(Y^*-RX) \qquad (28)$$

onde $f(X)$ é uma função côncava e EX representa a soma dos desvios, ou:

$$EX = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \sum_{j=1}^{m} r_{ij}X_j)$$

A fim de facilitar o desenvolvimento desta forma matricial, pode-se adotar a seguinte nomenclatura:

$$Y-RX = \begin{vmatrix} y_1-r_{11}x_1 \;\cdots\; -r_{1m}x_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n-r_{n1}x_1 \;\cdots\; -r_{nm}x_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ L_n \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} Var\ y_1 & Cov\ y_1y_2 & \cdots & Cov\ y_1y_n \\ Cov\ y_2y_1 & Var\ y_2 & \cdots & Cov\ y_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Cov\ y_ny_1 & Cov\ y_ny_2 & \cdots & Var\ y_n \end{vmatrix}$$

$$W^{-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Da análise da primeira parcela da equação (28) em face a esta nova nomenclatura, resulta:

$$\lambda EX = \lambda L_1 + \lambda L_2 + \cdots + \lambda L_n$$

Analogamente, para a segunda parcela da equação (28), em face desta nova nomenclatura,

$$(Y^*-RX)'W^{-1}(Y^*-RX) = |L_1 \ L_2 \ \dots \ L_n| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ L_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} = \ & L_1^2 a_{11} + L_1 L_2 a_{21} + L_1 L_3 a_{31} \dots + L_1 L_n a_{n1} + \\ & + L_1 L_2 a_{12} + L_2^2 a_{22} + L_2 L_3 a_{32} \dots + L_2 L_n a_{n2} + \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ & + L_1 L_n a_{1n} + L_2 L_n a_{2n} + L_3 L_n a_{3n} \dots + L_n^2 a_{nn} \ . \end{aligned}$$

Na programação por objetivos existe uma certa ordem de prioridades para se atingir as metas, expressa pelo vetor P de prioridades. Uma nova abordagem como esta modifica substancialmente o problema, pois a função objetiva passará a ser:

$$\begin{aligned} f(PX) = \ & \lambda L_1 P_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} L_1 L_i a_{i1}\right) P_1 + \lambda L_2 P_2 + \\ & + \left(\sum_{i=1}^{n} L_2 L_i a_{i2}\right) P_2 + \dots + \lambda L_n P_n + \left(\sum_{i=1}^{n} L_n L_i a_{in}\right) P_n \end{aligned} \tag{29}$$

É preciso salientar que a minimização da equação (28) não dará o mesmo resultado da minimização da (29), pois, enquanto a primeira é minimizada considerando todas restrições com mesma prioridade, a segunda o faz atribuindo pesos relativos de preferência para o atendimento destas.

Pode-se escrever finalmente que:

$$f(PX) = \sum_{j=1}^{n} \left(L_j \lambda + \sum_{i=1}^{n} L_j L_i a_{ij}\right) P_j \tag{30}$$

A minimização da equação (30) gera, para cada valor de λ, um conjunto de valores de x. Em outras palavras, obtém-se uma série de resultados eficientes ao se minimizar a equação de forma quadrática (30), para cada valor de risco simbolizado por λ. Quando $\lambda = 0$, o resultado corresponderá a minimização unicamente da variância, assunto já abordado no capítulo 2.

Está-se em presença de um problema de programação quadrática. Para resolvê-lo pode-se valer das regras de otimização de Kuhn-Tucker:

$$\mathrm{Min}(f(PX)) = \sum_{j=1}^{n} (L_j\lambda + \sum_{i=1}^{n} L_j L_i a_i)\, P_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_i \geq 0$$

a) viabilidade do primal:

representa a satisfação das restrições do primal, no presente caso, a excessão de $x_i \geq 0$, não se tem restrições no primal.

b) viabilidade do dual:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \leq \Theta \; ; \quad i = 1,\ldots,m$$

c) folga complementar:

$$x_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \Theta\right) = 0 \quad ; \quad j = 1,\ldots,m$$

Efetuando as operações, e derivando parcialmente a equação (30) em relação a x_i , obtém-se um sistema de equações lineares. Para facilitar a visualização da operação de derivação pode-se desenvolver, por exemplo, $\partial f/\partial x_1$ que apresentará as seguintes parcelas:

$$P_1 \left| -\lambda r_{11} + (-r_{11}L_1 - r_{11}L_1)a_{11} + (-r_{21}L_1 - r_{11}L_2)a_{21} + \ldots + (-r_{n1}L_1 - r_{11}L_n) a_{n1} \right| +$$

$$P_2 \left| -\lambda r_{21} + (-r_{11}L_2 - r_{21}L_1)a_{12} + (-r_{21}L_2 - r_{21}L_2)a_{22} + \ldots + (-r_{n1}L_2 - r_{21}L_n) a_{n2} \right| +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$P_n \left| -\lambda r_{n1} + (-r_{11}L_n - r_{n1}L_1)a_{1n} + (-r_{21}L_n - r_{n1}L_2)a_{3n} + \ldots + (-r_{n1}L_n - r_{n1}L_n) a_{nn} \right| .$$

De uma forma mais sintética pode-se escrever que:

$$\partial f/\partial x_1 = \left|\sum_{i=1}^{n} (-r_{11}L_i - r_{i1}L_1)a_{i1}\right| P_1 - \lambda r_{11}P_1 +$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} (-r_{21}L_i - r_{i1}L_2)a_{i2}\right| P_2 - \lambda r_{21}P_2 +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} (-r_{n1}L_i - r_{i1}L_n)a_{in}\right| P_n - \lambda r_{n1}P_n$$

e, portanto, chega-se a:

$$\partial f/\partial x_1 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (-r_{j1}L_i - r_{i1}L_j)a_{ij}P_j - \lambda \sum_{j=1}^{n} r_{j1}P_j$$

Da mesma forma, para as restantes variáveis x_i , ter-se-á:

$$\partial f/\partial x_2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (-r_{j2}L_i - r_{i2}L_j)a_{ij}P_j - \lambda \sum_{j=1}^{n} r_{j2}P_j$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\partial f/\partial x_m = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (-r_{jm}L_i - r_{im}L_j)a_{ij}P_j - \lambda \sum_{j=1}^{n} r_{jm}P_j$$

Pela condições de Kuhn-Tucker de otimização, ou $x_j = 0$, ou $\partial f/\partial x_j = 0$ para todo j . (31)

Quando $x_j = 0$, o problema fica resolvido quanto a esta variável, mas quando $x_j \neq 0$ exige-se que seja satisfeita a equação (31). Toma-se o caso mais geral para análise, ou seja, $x_j \neq 0$.

É importante notar que cada parcela de $\partial f/\partial x_i = 0$ está contida em um espaço diferente, pois o fator P_i multiplicativo de cada parcela assim o requer. Em outras palavras, não se pode somar um termo do coeficiente P_1 a outro com P_2 , pois eles não pertencem ao mesmo espaço. Na realidade, deve-se considerar que $\partial f/\partial x_i$ é, na otimização, igual ao vetor zero de dimen são (1 x n), onde n é o número de parcelas com prioridades diferentes, ou seja, de existência em espaços diferentes.

Assim sendo, matematicamente, o sistema (31) passa a ter uma nova forma, esta agora considerando a impossibilidade de somar elementos em diferentes espaços. Matricialmente se tem:

$$\partial f/\partial x_1 = \left| \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} (-r_{11}L_i - r_{i1}L_1)a_{i1} \; P_1 - \lambda r_{11}P_1 \\ \sum_{i=1}^{n} (-r_{21}L_i - r_{i1}L_2)a_{i2} \; P_2 - \lambda r_{21}P_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} (-r_{n1}L_i - r_{i1}L_n)a_{in} \; P_n - \lambda r_{n1}P_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{array} \right|$$

$$\partial f/\partial x_2 = \left| \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} (-r_{12}L_i - r_{i2}L_1)a_{i1} \; P_1 - \lambda r_{12}P_1 \\ \sum_{i=1}^{n} (-r_{22}L_i - r_{i2}L_2)a_{i2} \; P_2 - \lambda r_{22}P_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} (-r_{n2}L_i - r_{i2}L_n)a_{in} \; P_n - \lambda r_{n2}P_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{array} \right|$$

....

$$\partial f/\partial x_m = \left| \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} (-r_{1m}L_i - r_{im}L_1)a_{i1} \; P_1 - \lambda r_{1m}P_1 \\ \sum_{i=1}^{n} (-r_{2m}L_i - r_{im}L_2)a_{i2} \; P_2 - \lambda r_{2m}P_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} (-r_{nm}L_i - r_{im}L_n)a_{in} \; P_n - \lambda r_{nm}P_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{array} \right|$$

É fácil notar que se pode rearranjar os elementos destas matrizes, para formar outras matrizes que chamar-se-ão de "matrizes de prioridades", sem perda de exatidão:

$$
\begin{vmatrix}
\sum_{i=1}^{n} (-r_{11}L_i - r_{i1}L_1)a_{i1} & P_1 - \lambda r_{11}P_1 \\
\sum_{i=1}^{n} (-r_{12}L_i - r_{i2}L_1)a_{i1} & P_1 - \lambda r_{12}P_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\sum_{i=1}^{n} (-r_{1m}L_i - r_{im}L_1)a_{i1} & P_1 - \lambda r_{1m}P_1
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix}
\sum_{i=1}^{n} (-r_{21}L_i - r_{i1}L_2)a_{i2} & P_2 - \lambda r_{21}P_2 \\
\sum_{i=1}^{n} (-r_{22}L_i - r_{i2}L_2)a_{i2} & P_2 - \lambda r_{22}P_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\sum_{i=1}^{n} (-r_{2m}L_i - r_{im}L_2)a_{i2} & P_2 - \lambda r_{2m}P_2
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$
\begin{vmatrix}
\sum_{i=1}^{n} (-r_{n1}L_i - r_{i1}L_n)a_{in} & P_n - \lambda r_{n1}P_n \\
\sum_{i=1}^{n} (-r_{n2}L_i - r_{i2}L_n)a_{in} & P_n - \lambda r_{n2}P_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\sum_{i=1}^{n} (-r_{nm}L_i - r_{im}L_n)a_{in} & P_n - \lambda r_{nm}P_n
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix}
\qquad (32)
$$

Chega-se, portanto, a um número n de sistemas de equações. Cada um destes sistemas deverá ser resolvido independentemente dos outros, pois cada qual se desenvolve em espaço próprio.

Nota-se que cada sistema apresenta m equações com m+1 incógnitas, ou seja, m incógnitas do tipo x mais o coeficiente de aversão ao risco λ. Como λ vai assumir valores entre $0 = \lambda < \infty$, haverá um conjunto de soluções ótimas associadas aos diferentes λ.

O procedimento para resolução é o seguinte:

1) fixa-se um valor para λ ;

2) encontra-se a região de soluções possíveis para a matriz de prioridades P_1 ;

3) verifica-se qual sub-região desta atende a matriz de prioridade P_2 ;

4) e assim por diante até P_n ;

5) fixa-se outro valor para λ e repete-se o processo de cálculo.

Se todas as prioridades forem atendidas, ou então, na faixa de valores de λ para a qual todas as prioridades são satisfeitas, pode-se plotar num gráfico,

$$(\lambda \sum_{j=1}^{n} L_j P_j) \quad * \quad (\sum_{j=1}^{n} L_j L_i a_{ij}) \quad ,$$

onde λ será o coeficiente angular conforme a equação (30).

Ao se tomar o multiplicador de Lagrange igual a zero, e ao se conferir a mesma prioridade para todas metas, recai-se no seguinte caso particular:

$$\partial f/\partial x_1 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (-r_{j1}L_i - r_{ij}L_j)a_{ij} = 0$$

....

$$\partial f/\partial x_m = \sum_{j=1}^{n} \sum_{n=1}^{n} (-r_{jm}L_i - r_{im}L_j)a_{ij} = 0$$

ou seja,

$$\begin{vmatrix} \partial f/\partial x_1 \\ \cdots\cdots \\ \partial f/\partial x_m \end{vmatrix} = -R'W^{-1}(Y-RX)-(Y-RX)'W^{-1}R$$

$$= -R'W^{-1}Y+R'W^{-1}RX-Y'W^{-1}R+R'X'W^{-1}R$$

$$= -2R'W^{-1}Y-2R'W^{-1}RX = 0 \qquad (33)$$

sendo 0 um vetor de dimensão (n x 1).

Este sistema de equações (33), corresponde a minimização da variância sem levar em conta os valores esperados, e é exatamente igual ao sistema desenvolvido no capítulo 2 . Este caso, considerado como particularização do modelo generalizado,tem origem na minimização da forma quadrática definida como:

$$Q = (Y^*-RX)\ W^{-1}(Y^*-RX)$$

analisando a relação estocástica mais simples:

$$Y^* = RX + U$$

Pode-se agora apresentar uma ilustração da aplicação deste método para o caso de duas metas e duas variáveis instrumento.

Sejam as metas y_1 e y_2 . Na nomenclatura proposta neste trabalho tem-se:

$$\begin{vmatrix} y_1 - r_{11}x_1 - r_{12}x_2 \\ y_2 - r_{21}x_1 - r_{22}x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{Var}\ y_1 & \mathrm{Cov}\ y_1y_2 \\ \mathrm{Cov}\ y_2y_1 & \mathrm{Var}\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} W \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{Vy_2}{Vy_1Vy_2-\mathrm{Cov}^2y_1y_2} & \dfrac{-\mathrm{Cov}\ y_1y_2}{Vy_1Vy_2-\mathrm{Cov}^2y_1y_2} \\ \dfrac{-\mathrm{Cov}\ y_1y_2}{Vy_1Vy_2-\mathrm{Cov}^2y_1y_2} & \dfrac{Vy_1}{Vy_1Vy_2-\mathrm{Cov}^2y_1y_2} \end{vmatrix} = W^{-1}$$

$$f(PX) = \lambda L_1P_1+(\sum_{i=1}^{2} L_1L_ia_{i1})P_1 + \lambda L_2P_2+(\sum_{i=1}^{2} L_2L_ia_{i2})P_2$$

$$\Big| -\lambda r_{11}+2(\frac{-r_{11}(y_1-r_{11}x_1-r_{12}x_2)Vy_2}{Vy_1Vy_2 - \mathrm{Cov}^2y_1y_2}) + (-r_{11}(y_2-r_{21}x_1-r_{22}x_2) -$$

$$- r_{21}(y_1-r_{11}x_1-r_{12}x_2))\ \frac{-\mathrm{Cov}\ y_1y_2}{Vy_1Vy_2-\mathrm{Cov}^2y_1y_2}\ \Big|\ P_1 = 0$$

$$\Big| -\lambda r_{12}+2(\frac{-r_{12}(y_1-r_{11}x_1-r_{12}x_2)Vy_2}{Vy_1Vy_2 - \mathrm{Cov}^2y_1y_2}) + (-r_{12}(y_2-r_{21}x_1-r_{22}x_2) -$$

$$- r_{22}(y_1-r_{11}x_1-r_{12}x_2))\ \frac{-\mathrm{Cov}\ y_1y_2}{Vy_1Vy_2-\mathrm{Cov}^2y_1y_2}\ \Big|\ P_1 = 0$$

$$\left| -\lambda r_{21} + 2\left(\frac{-r_{21}(y_2 - r_{21}x_1 - r_{22}x_2)Vy_1}{Vy_1y_2 - Cov^2y_1y_2}\right) + (-r_{11}(y_2 - r_{21}x_1 - r_{22}x_2) - \right.$$

$$\left. - r_{21}(y_1 - r_{11}x_1 - r_{12}x_2)) \frac{-Cov\ y_1y_2}{Vy_1Vy_2 - Cov^2y_1y_2} \right| P_2 = 0$$

$$\left| -\lambda r_{22} + 2\left(\frac{-r_{22}(y_2 - r_{21}x_1 - r_{22}x_2)Vy_1}{Vy_1Vy_2 - Cov^2y_1y_2}\right) + (-r_{12}(y_2 - r_{21}x_1 - r_{22}x_2) - \right.$$

$$\left. - r_{22}\ (y_1 - r_{11}x_1 - r_{12}x_2)) \frac{-Cov\ y_1y_2}{Vy_1Vy_2 - Cov^2y_1y_2} \right| P_2 = 0$$

Como já foi dito, a resolução requer agora o cálculo, para diferentes valores de λ, do conjunto x_i para o sistema de duas equações com o fator P_1 e, independentemente para o sistema, também de duas equações, com o fator P_2.

CAPÍTULO 4

EXEMPLO NUMÉRICO

Este capítulo está voltado para a apresentação de um problema real, para exemplificar a mecânica do manuseio do modelo desenvolvido neste trabalho.

4.1 - Apresentação do Problema

Para exemplificar a aplicação da programação estocástica por múltiplos objetivos, foi realizada a programação da produção para as necessidades de uma indústria.

Esta fábrica apresentava, ao público, um total de trinta produtos diferentes codificados como 101; 102; 103; ...; 130 . A maior dificuldade para coordenar um nível de produção, na linha de fabricação, residia no fato das previsões de venda se alterarem com frequência, podendo, inclusive, sofrerem três alterações num período.

A linha de fabricação, tentando sempre se moldar à estas previsões, padecia de uma série de transtornos, como admissão e demissão de pessoal em períodos curtos de tempo, atrazos inesperados na entrega de mercadoria ou formação de estoques excessivos.

Uma programação que levasse em consideração a estocasticidade da previsão de vendas poderia diminuir, radicalmente , os efeitos que tais variações ocasionam na organização, de modo que a linha decisória de ação poderia ser tomada dentro de um senso mais realístico.

As fábricas do gênero, em geral, enfrentam a sazonabilidade para a venda de seus produtos, em parte devido à existência bem delimitada de estações, na maior parte da zona consumidora, e em parte pela própria política de"marketing"que concentra esforços de venda nos meses mais quentes.

As estatísticas de vendas, em anos anteriores, comprovam a existência de três períodos distintos e independentes de vendas durante um ano. Desta forma, pode-se examinar um período, fixando as condições de término do mesmo, porquanto os demais podem sofrer um tratamento rigorosamente semelhante ao que agora propor-se-á.

A administração desta empresa identificou, inicialmente, sete objetivos para seu trabalho. Alguns são facilmente alcançáveis, outros só serão satisfeitos com muito sacrifício. Pode-se enumerá-los como segue:

1. obter o maior lucro possível, considerando que tudo o que fosse fabricado seria vendido.
2. manter o nível máximo de produção atual, evitando-se gastos para a ampliação do parque industrial já existente.
3. não atrazar pedidos de vendas.
4. manter em estoque, especialmente no final do período, um mínimo de 5.000 unidades dos produtos 101 a 114 e 127, considerando a demanda real igual a previsão de vendas.
5. manter em estoque, especialmente ao final do período, um mínimo de 327 unidades dos produtos 115 a 126, também considerando a demanda real igual a previsão de vendas.
6. conseguir um custo mínimo de estoques caso não seja vendida toda produção.
7. manter a linha de produção com um mínimo de ociosidade.

A apuração da viabilidade de atendimento destas metas, deve ser realizada pelo seu confronto com as restrições existentes para sua plena satisfação. Estas, no problema levantado, são restrições relativas a:

- estrangulamentos na linha de produção
- previsão de vendas
- previsão para estoques
- previsão para o lucro

Equacionando convenientemente estas restrições, pode-se evidenciar facilmente o que seria necessário ocorrer para que cada um dos objetivos fosse satisfeito. O método simplex de resolução do "goal-programming", no entanto, se encarrega de apresentar a melhor solução possível para o problema em seu conjunto.

Em continuação da análise, seria necessário a disposição dos objetivos em ordem decrescente de prioridades. A administração da empresa apontou a seguinte ordenação, com a adição de mais uma meta no sistema:

1ª Prioridade : deve-se atender plenamente a demanda de vendas e dos estoques.

2ª Prioridade : o estoque final dos produtos, igual ao estoque médio, deve ter um custo nunca superior a Cr$ 10.000.000,00 .

3ª Prioridade : o estoque médio de produtos deve ter um custo mínimo de Cr$ 10.000.000,00 .

4ª Prioridade : não produzir mais que o necessário para as vendas.

5ª Prioridade : não deixar ociosidade na linha de produção.

6ª Prioridade : o lucro do período não deve ser inferior ao valor estimado de Cr$ 35.373.640,00 .

7ª Prioridade : o lucro do período não deve ser superior ao valor estimado de Cr$ 35.373.640,00 .

8ª Prioridade : as quantidades de estoque médio não devem ser maiores que 5.000 unidades para os produtos 101 a 114 e 127, e de 327 unidades para 115 a 126.

A existência da prioridade nº 3 se prende ao fato de que ela é uma forma de complementar a prioridade nº 2 . Esta última assegura um custo máximo de Cr$ 10.000.000,00 para o estoque médio, mas não diz quanto é, se o for, inferior. Exatamente para se descobrir este valor é que se introduz a prioridade nº3.

Por raciocínio análogo,a prioridade nº 7 complementa a nº 6, e a nº 8 complementa a nº 1 .

Com esta formulação, o método dará todos valores requeridos para análise dos decisores, isto é, o custo dos estoques, ociosidade na linha de produção, lucro no período , quantidades estocadas e, finalmente, a produção aconselhada.

A meta anteriormente descrita como "manter o nível máximo de produção atual", foi considerada não como um objetivo, mas sim como algo taxativo e certo. Desta forma, se torna necessário assegurar que este fato figure como restrição do problema, uma vez que estas são, obviamente, satisfeitas antes de qualquer objetivo.

Pode-se ver agora como são equacionadas as restrições.

Na tabela 1, apresentada no final deste capítulo , as cinco primeiras inequações representam o máximo de produção possível em cinco departamentos, codificados como 01 a 05, da linha de fabricação. Uma análise mostra que não é fácil, em princípio, a detetação daquele que poderá estrangular a produção , mas a solução pelo método G.P. dirá qual ou quais e o quanto cada departamento estará estangulando, se o estiver. Da mesma forma em relação a ociosidade.

Ainda na tabela 1, as inequações de números 06 até 35, representam as previsões de vendas. Estes dados, minuciosamente obtidos junto aos setores de "marketing" e estatística podem , no entanto, sofrer variações.

As inequações 36 e 37 representam as quantidades de estoque médio e final aconselháveis, ou seja, 5.000 unidades dos produtos 101 a 114 e 127, e de 327 unidades para os 115 a 126. Vê-se, pelos termos independentes destas inequações, que o total de vendas para o primeiro ítem é previsto em 162.627 unidades , enquanto que para o segundo é de 6.993 unidades.

A inequação número 38 apresenta o lucro previsto caso toda produção seja realmente vendida. Os coeficientes de cada variável representam o lucro líquido individual, descontando inclusive as perdas eventuais.

Finalmente, a inequação número 39 da tabela 1, representa os custos de estoques. Os coeficientes de cada variável são obtidos multiplicando-se o custo unitário de fabricação do produto pelo custo de capital da empresa, o qual já sabe-se ser de 2,16% ao mês. Como se está num horizonte de planejamento que contém quatro meses, o coeficiente de cada variável terá a seguinte expressão:

$$\text{custo unitário de fabricação } \left| 1 - (1 + 0{,}0216)^4 \right|$$

Para se obter o custo médio dos estoques, basta subtrair do termo independente desta inequação nº 39 o valor de Cr$ 366.073.391,00 que corresponde ao custo de estoque de toda demanda prevista, que se supõe, não fique estocada e sim seja vendida.

De todo este conjunto de restrições apresentadas, somente aquelas referentes a previsão da demanda tem características estocásticas. Isto significa que as inequações de nº 6 até nº 35 tomam a seguinte forma no tratamento analítico:

$$r_i x_i + d_i^- - d_i^+ = y_i + u_i$$

onde u_i tem distribuição normal.

Todas as 30 inequações mencionadas, no entanto, são referentes ao mesmo departamento da organização, e se chegou a conclusão de que a dispersão dos valores em torno de y_i para $i = 6$ a 35 é aproximadamente proporcional ao próprio valor de y_i, isto é,

$$\frac{y_{i-1}}{\sigma_{i-1}} \cong \frac{y_i}{\sigma_i} \cong \frac{y_{i+1}}{\sigma_{i+1}}$$

Este dado simplifica o problema, pois não precisar-se-á do valor de "aversão ao risco", λ, para analisar os resultados. Por outro lado, torna-se também desnecessário a determinação do desvio padrão, σ_i, para os valores de u_i, uma vez que este é proporcional ao valor das respectivas metas, para todas restrições sob efeito da estocasticidade.

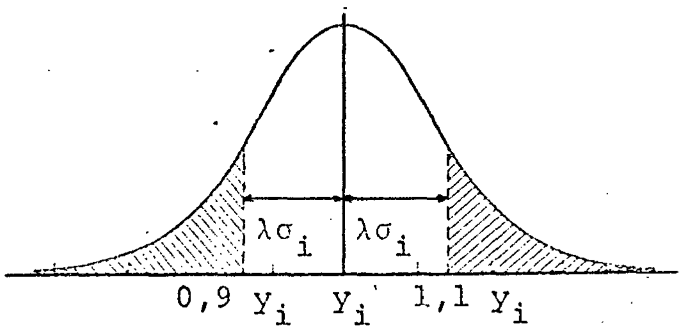
A orientação para resolução do problema proposto foi o da determinação de três pontos de solução, que a direção da em presa via como interessantes para fornecer subsídios para a toma da de ação. São eles:

$(y_i + \lambda\sigma_i)$; para $\lambda\sigma_i = 0$

$(y_i + \lambda\sigma_i)$; para $\lambda\sigma_i = 0{,}1\ y_i$

$(y_i - \lambda\sigma_i)$; para $\lambda\sigma_i = 0{,}1\ y_i$

A fim de se visualizar estes três pontos, plota-se o seguinte gráfico:



4.2 - Solução do Problema

A tabela 2, apresenta a preparação das restrições e do sistema de prioridades para o cálculo computacional de otimização, para o caso de $(y_i + \lambda\sigma_i)$, para $\lambda\sigma_i = 0$.

A função objetiva, nesta formulação, corresponde exatamente a minimização dos desvios das metas, identificados pela diretoria, conforme já anteriormente explicado, segundo a ordem de prioridades fixada.

Após 63 iterações, absorvendo 152 K de memória no computador IBM-370, foi obtido o seguinte resultado:

RESULTADO DA FORMULAÇÃO F-1

EQUAÇÃO Nº	DESVIOS POS.	DESVIOS NEG.
01	0.0	14879.9
02	0.0	30955.6
03	0.0	3417.3
04	0.0	0.0
05	0.0	27325.9
06	0.0	0.0
07	0.0	0.0
08	3709.3	0.0
09	0.0	0.0
10	1290.6	0.0
11	0.0	0.0
12	0.0	0.0
13	0.0	0.0
14	0.0	0.0
15	0.0	0.0
16	0.0	0.0
17	0.0	0.0
18	0.0	0.0
19	0.0	0.0
20	0.0	0.0
21	0.0	0.0
22	0.0	0.0
23	0.0	0.0
24	326.0	0.0
25	0.0	0.0
26	0.0	0.0
27	0.0	0.0
28	0.0	0.0
29	0.0	0.0
30	0.0	0.0
31	0.0	0.0
32	0.0	0.0
33	0.0	0.0
34	0.0	1.0
35	0.0	6861.9
36	0.0	0.0
37	0.0	0.0
38	1594437.0	0.0
39	0.0	0.0

ANÁLISE DA FUNÇÃO OBJETIVA

Prioridade	Atendimento	Valor
01	parcial	6862.0
02	completo	0.0
03	completo	0.0
04	parcial	5326.9
05	parcial	76578.0
06	completo	0.0
07	parcial	1594437.0
08	completo	0.0

Análise dos resultados da formulação F-1:

A. Nota-se que, como as equações 01. 02, 03, 04 e 05 representam as limitações do setor produtivo, o departamento nº 04 está estrangulando a linha de fabricação. E daí resulta que a primeira prioridade, referente ao pleno atendimento de vendas e estoques, não pode ser atendida. Aqui os decisores podem tomar duas posições; a primeira deixando de atender pedidos nas quantidades de 6.863 unidades dos produtos 129 e 130, respectivamente, equações nº 34 e nº 35 ; a segunda alternativa é eliminar o estrangulamento da secção 04, possibilitando que ela passe do nível de 13.330 para 20.193 unidades.

B. As prioridades 02 e 03 satisfeitas, com atendimento completo, traduzem a integral possibilidade de deixar os estoques médios num custo de Cr$ 10.000.000,00 .

C. A prioridade nº 04 não foi satisfeita, como já se poderia esperar, uma vez que, além da produção para vendas, a própria prioridade 01 exigiu uma produção para estoques. Todavia, a existência desta P_4 serve para indicar claramente o excesso de fabricação em relação a demanda, vemos que é exatamente 5.327 unidades, ou seja, 5.000 unidades distribuidas entre 101 a 114 e 127, mais 327 unidades de 115 a 126.

D. O valor de 76.579 unidades em "atendimento", constada na P_5, significa que não foi possível eliminar totalmente a ociosidade da linha de fabricação, e esta quantia é o quantum a mais que ainda poder-se-ia fabricar.

E. A prioridade 06 satisfeita indica que o lucro não é inferior aos Cr$ 35.373.632,00, e a P_7 mostra o quanto a mais se gerou, isto é, houve um lucro resultante adicional de Cr$ 1.594.437,00 .

F. A prioridade 08, plenamente satisfeita, assegura que não se formaram estoques excessivos, ou, em outras palavras, não maiores do que havia sido programado.

De posse destes dados, a direção da empresa alterou um ponto de vista inicial, qual seja o de não fazer novos investimentos. Isto porque foi considerado plenamente viável a alternativa de aumentar em 6.863 unidades a limitação produtiva do setor 04, uma vez que, na verdade, o investimento seria pequeno.

Obviamente, o resultado a ser atingido, após esta modificação, será outro.

Por outro lado, dado a já verificada possibilidade, os decisores aumentaram o lucro mínimo requerido para .... Cr$ 36.425.952,00 .

Assim, a tabela 3 apresenta a nova formulação F-2 com as alterações, em relação a F-1, do termo independente da equação 04 que passa a ser 20.193, e da equação 38, que passa a ser Cr$ 36.425.952,00 .

Os resultados gerados pela aplicação do G.P., programação por múltiplos objetivos, são os seguintes:

RESULTADO DA FORMULAÇÃO F-2

EQUAÇÃO Nº	DESVIOS POS.	DESVIOS NEG.
01	0.0	14879.9
02	0.0	32184.4
03	0.0	2188.5
04	0.0	0.0
05	0.0	27326.0
06	2480.5	0.0
07	0.0	0.0
08	0.0	0.0
09	0.0	0.0
10	2519.4	0.0
11	0.0	0.0
12	0.0	0.0
13	0.0	0.0
14	0.0	0.0
15	0.0	0.0
16	0.0	0.0
17	0.0	0.0
18	0.0	0.0
19	0.0	0.0
20	0.0	0.0
21	0.0	0.0
22	139.6	0.0
23	0.0	0.0
24	187.3	0.0
25	0.0	0.0
26	0.0	0.0
27	0.0	0.0
28	0.0	0.0
29	0.0	0.0
30	0.0	0.0
31	0.0	0.0
32	0.0	0.0
33	0.0	0.0
34	0.0	0.0
35	0.0	0.0
36	0.0	0.0
37	0.0	0.0
38	0.0	0.0
39	0.0	0.0

ANÁLISE DA FUNÇÃO OBJETIVA

Prioridade	Atendimento	Valor
01	completo	0.0
02	completo	0.0
03	completo	0.0
04	parcial	5326.9
05	parcial	76578.9
06	completo	0.0
07	completo	0.0
08	completo	0.0

Análise dos resultados da formulação F-2:

A. A secção 04 continua sendo o "gargalo", para as condições propostas, mas como P_1 foi totalmente satisfeita, depreende-se que esta secção, e também as outras quatro, tem possibilidade de resolver toda previsão de vendas proposta e, inclusive os estoques adicionais requeridos.

B. Tal como já ocorreu em F-1, as prioridades 02 e 03 são integralmente satisfeitas.

C. A meta nº 04 não foi alcançada, e o seu resultado em "atendimento" traduz o excesso de produção em relação a previsão de vendas,.ou seja, aconselha a fabricação, para estoques, de 5.327 unidades distribuídas da seguinte maneira:

- 2.480 para produto 101,
- 2.520 para produto 105,
- 140 para produto 117, e
- 187 para produto 119,

conforme se pode depreender pelos resultados dos desvios d_{06}^{+}, d_{10}^{+}, d_{22}^{+} e d_{24}^{+}, respectivamente.

D. A P_5 sofre a mesma explicação do ocorrido em F-1.

E. As metas 06 e 07, plenamente atingidas, dão a entender que o lucro pré-fixado é exatamente o resultante.

F. A meta de número 08, totalmente satisfeita, tem a mesma explicação do ocorrido em F-1 .

Os decisores, de posse destes novos resultados, aceitaram, na íntegra, sua proposição. A partir deste ponto, pode-se analisar o problema para $(y_i + \lambda\sigma_i)$, onde $\lambda\sigma_i = 0{,}1\ v_i$. É necessário que se saiba, com antecedência, que variações resultantes surgiriam desta outra abordagem e, se possível, que já se contasse com esta possibilidade tanto no setor comercial, como na produção e financeiro.

A tabela 4 apresenta a formulação matemática para o caso de $(y_i + \lambda\sigma_i)$, onde $\lambda\sigma_i = 0{,}1\lambda_i$, ajustada para resolução computacional.

Os resultados gerados pela aplicação da programação por múltiplos objetivos são:

RESULTADO DA FORMULAÇÃO F-3

EQUAÇÃO Nº	DESVIOS POS.	DESVIOS NEG.
01	0.0	14181.9
02	0.0	15430.3
03	0.0	2679.6
04	0.0	0.0
05	0.0	26018.9
06	3712.6	0.0
07	0.0	0.0
08	0.0	0.0
09	0.0	0.0
10	1287.3	0.0
11	0.0	0.0
12	0.0	0.0
13	0.0	0.0
14	0.0	0.0
15	0.0	0.0
16	0.0	0.0
17	0.0	0.0
18	0.0	0.0
19	0.0	0.0
20	0.0	0.0
21	0.0	0.0

EQUAÇÃO Nº	DESVIOS POS.	DESVIOS NEG.
22	0.0	0.0
23	326.9	0.0
24	0.0	0.0
25	0.0	0.0
26	0.0	0.0
27	0.0	0.0
28	0.0	0.0
29	0.0	0.0
30	0.0	0.0
31	0.0	0.0
32	0.0	0.0
33	0.0	1287.0
34	0.0	1.0
35	0.0	731.0
36	0.0	0.0
37	0.0	0.0
38	3656629.0	0.0
39	0.0	0.0

ANÁLISE DA FUNÇÃO OBJETIVA

Prioridade	Atendimento	Valor
01	parcial	2019.0
02	completo	0.0
03	completo	0.0
04	parcial	5326.9
05	parcial	58310.9
06	completo	0.0
07	parcial	3656629.0
08	completo	0.0

Análise dos resultados da formulação F-3:

A. A secção 04 estrangulou o processo de fabricação de forma a impedir o atendimento da prioridade 01 . Vê-se que não foi possível produzir 1287;1 e 731 unidades, respectivamente, dos produtos 128, 129 e 130, conforme se depreende dos desvios negativos das equações de nº 33, 34 e 35 . Resta aqui aos decisores, novamente, duas alternativas, quais sejam:

a) investir nesta secção 04 para que ela passe a produzir as quantidades adicionais desejadas;

b) deixar de atender, de um modo integral, as previsões de vendas e estoques.

B. As prioridades 02 e 03 satisfeitas, traduzem a integral possibilidade de alocar um custo de exatamente .... Cr$ 10.000.000,00 em estoques no período.

C. A meta nº 04 não foi atendida, o que prova a existência de 5.327 unidades em estoque, distribuídas como 3.713, 1.287 e 327 unidades, respectivamente, entre os produtos 101 , 105 e 118, conforme os desvios das equações 06, 10 e 23.

D. O valor de 58130 verificado na prioridade 05 quantifica a ociosidade da linha de produção.

E. A P_6 satisfeita prova que o lucro não ficou abaixo de Cr$ 36.425.952,00 previsto, e a P_7 nos indica qual o adicional que foi gerado, isto é, houve um excesso de .... Cr$ 3.656.629,00 em relação às previsões.

F. A prioridade 08 satisfeita indica que as quantidades de estoques previstas são exatamente iguais àquelas resultantes.

Resta ainda analisar o terceiro ponto solução, qual seja, $(y_i - \lambda\sigma_i)$, onde $\lambda\sigma_i = 0{,}1\ y_i$.

A tabela 5 apresenta a composição matemática do problema para este caso já na forma computacional. Denomina-se esta formulação de F-4 .

RESULTADOS DA FORMULAÇÃO F-4

EQUAÇÃO Nº	DESVIOS POS.	DESVIOS NEG.
01	0.0	15579.9
02	0.0	47625.6
03	0.0	3010.3
04	0.0	2019.0
05	0.0	28633.0
06	2561.3	0.0
07	0.0	0.0
08	0.0	0.0
09	0.0	0.0
10	2438.6	0.0
11	0.0	0.0
12	0.0	0.0
13	0.0	0.0
14	0.0	0.0
15	0.0	0.0
16	0.0	0.0
17	0.0	0.0
18	0.0	0.0
19	0.0	0.0
20	0.0	0.0
21	0.0	0.0
22	0.0	0.0
23	326.9	0.0
24	0.0	0.0
25	0.0	0.0
26	0.0	0.0
27	0.0	0.0
28	0.0	0.0
29	0.0	0.0
30	0.0	0.0
31	0.0	0.0
32	0.0	0.0
33	0.0	0.0
34	0.0	0.0
35	0.0	0.0
36	0.0	0.0
37	0.0	0.0
38	0.0	3572582.0
39	0.0	0.0

ANÁLISE DA FUNÇÃO OBJETIVA

Prioridade	Atendimento	Valor
01	completo	0.0
02	completo	0.0
03	completo	0.0
04	parcial	5326.9
05	parcial	96867.9
06	parcial	3572582.0
07	completo	0.0
08	completo	0.0

Análise dos resultados da formulação F-4:

A. A primeira prioridade foi totalmente satisfeita, consequentemente, foi possível atender a demanda de vendas e estoques.

B. As prioridades 02 e 03 foram atendidas, tal qual já ocorreu em F-1 e F-2.

C. A meta 04 indica a formação de 5327 unidades de estoques. A distribuição desta quantia entre os vários produtos pode ser constatada pelos desvios das equações 06, 10 e 23.

D. A prioridade 05 não foi atendida, o que representa uma ociosidade de 96.868 unidades na linha de produção.

E. A meta 06 não foi atendida por um valor de Cr$3.572.582,00 o que indica um decréscimo, neste mesmo valor, do lucro esperado. Como o lucro ficou abaixo do previsto, a P_7 foi atendida.

F. Com o atendimento da P_8, fica provado que não houve formação de estoques excessivos.

Neste ponto seria interessante saber que resultados adviriam se a P_4, que não foi satisfeita, fosse simplesmente retirada do sistema. Para execução computacional desta formulação vide a tabela 6. Chama-se esta nova formulação de F-5.

RESULTADOS DA FORMULAÇÃO F-5

EQUAÇÃO Nº	DESVIOS POS.	DESVIOS NEG.
01	0.0	15579.9
02	0.0	48634.1
03	0.0	2001.8
04	0.0	0.0
05	0.0	27080.1
06	0.0	0.0
07	0.0	0.0
08	0.0	0.0
09	0.0	0.0
10	3447.1	0.0
11	0.0	0.0
12	0.0	0.0
13	0.0	0.0
14	0.0	0.0
15	1552.8	0.0
16	0.0	0.0
17	0.0	0.0
18	0.0	0.0
19	0.0	0.0
20	326.9	0.0
21	0.0	0.0
22	0.0	0.0
23	0.0	0.0
24	0.0	0.0
25	0.0	0.0
26	0.0	0.0
27	0.0	0.0
28	0.0	0.0
29	0.0	0.0
30	0.0	0.0
31	0.0	0.0
32	0.0	0.0
33	466.1	0.0
34	0.0	0.0
35	0.0	0.0
36	0.0	0.0
37	0.0	0.0
38	0.0	3719514.0
39	0.0	0.0

ANÁLISE DA FUNÇÃO OBJETIVA

Prioridade	Atendimento	Valor
01	completo	0.0
02	completo	0.0
03	completo	0.0
04	parcial	93296.0
05	parcial	3719514.0
06	parcial	0.0
07	parcial	0.0

Análise dos resultados da formulação F-5:

A. A primeira prioridade foi satisfeita, consequentemente, é viável atender toda demanda e estoques propostos.

B. Tal qual já ocorreu na F-4, as metas de nº 02 e 03 foram integralmente atendidas.

C. A meta 04 não atendida representa a existência de uma ociosidade de 93.296 unidades na linha de fabricação. Comparando-se com a F-4, nota-se que a ociosidade decresceu e, obviamente, aumentaram os estoques, que de 5.327 passaram a 5.791.

D. O não atendimento da P_5 implica em um decréscimo no lucro. Como consequência do decréscimo do Lucro, a P_6 foi atendida.

E. A prova da não formação de estoques excessivos está no atendimento da prioridade nº 07.

Com os resultados destas cinco formulações, codificadas como F-1, F-2, F-3, F-4 e F-5, a direção da empresa se achou em condições para se preparar, do ponto de vista econômico, social (contratação, demissão e treinamento de pessoal), de "marketing" e de produção, para enfrentar o período sazonal em análise, da melhor maneira possível.

Contudo, a título de informação, se gostaria de saber que resultados seriam apresentados caso se estabelecesse , como se espera fazer no futuro, certas tendências de estoques, isto é:

Para os produtos 101 a 114 e 127, desejar-se-ia ter a seguinte distribuição de estoques:

E101 + E102	=	68%
E103 + E104	=	12%
E105 + E106 + E111	=	06%
E112 + E113 + E114 + E127	=	09%
E107 + E108 + E109 + E110	=	05%
T O T A L		100%

Para os produtos 115 a 126, desejar-se-ia ter a seguinte distribuição de estoques:

E115 + E116 + E124 + E125	=	43%
E118 + E119	=	11%
E117 + E121 + E123	=	02%
E120 + E122 + E126	=	44%
T O T A L		100%

A formulação passaria a conter nove equações a mais, e uma prioridade adicional para minimizar os desvios destas novas restrições, em relação a F-2 . A tabela 7 corresponde à formulação que contém os aspectos acima mencionados, e que receberá o nome de F-6 .

RESULTADOS DA FORMULAÇÃO F-6

EQUAÇÃO Nº	DESVIOS POS.	DESVIOS NEG.
01	0.0	14879.9
02	0.0	29964.9
03	0.0	4408.0
04	0.0	0.0
05	0.0	27075.0
06	0.0	0.0
07	3400.0	0.0
08	0.0	0.0
09	600.0	0.0
10	300.0	0.0
11	0.0	0.0
12	0.0	0.0
13	0.0	0.0
14	0.0	0.0
15	250.0	0.0
16	0.0	0.0
17	450.0	0.0
18	0.0	0.0
19	0.0	0.0
20	139.9	0.0
21	0.0	0.0
22	6.0	0.0
23	36.0	0.0
24	0.0	0.0
25	0.0	0.0
26	0.0	0.0
27	144.9	0.0
28	0.0	0.0
29	0.0	0.0
30	0.0	0.0
31	0.0	0.0
32	0.0	0.0
33	0.0	0.0
34	0.0	1.0
35	0.0	249.0

EQUAÇÃO Nº	DESVIOS POS.	DESVIOS NEG.
36	0.0	0.0
37	0.0	0.0
38	288728.0	0.0
39	742509.9	0.0
40	0.0	0.0
41	0.0	0.0
42	0.0	0.0
43	0.0	0.0
44	0.0	0.0
45	0.0	0.0
46	0.0	0.0
47	0.0	0.0
48	0.0	0.0

ANÁLISE DA FUNÇÃO OBJETIVA

Prioridade	Atendimento	Valor
01	parcial	250.0
02	completo	0.0
03	parcial	742509.9
04	completo	0.0
05	parcial	5326.9
06	parcial	76328.9
07	completo	0.0
08	parcial	288728.0
09	completo	0.0

Análise dos resultados da formulação F-6:

A. A secção 04 da linha de produção impede o total atendimento da prioridade P_1 . Somente dois do total de trinta produtos não veem alcançadas a proposição de demanda mais estoques; são eles: produto 129 em uma unidade e produto 130 em 249 unidades, tal como se pode verificar dos desvios das equações números 34 e 35, respectivamente.

B. A viabilidade da meta nº 02 indica que foi possível a distribuição de estoques proposta pelas restrições nº 40 a 48.

C. O valor que consta na meta nº 03 vem a mostrar um acréscimo de Cr$ 742.510,00 nos Cr$ 10.000.000,00 , consignados para custo de estoques. É bem lógico que este valor cresça, uma vez que a F-2 apresentou como resultado o mínimo custo de estoques possível, já que não haviam restrições para sua distribuição entre os diversos produtos, como agora ocorreu com a introdução das restrições 40 a 49.

D. A meta nº 04 foi satisfeita uma vez que os estoques tiveram um custo maior que o proposto.

E. Pelo resultado da prioridade nº 05, se sabe a quantidade total de estoques, ou seja, 5327 unidades distribuidas da seguinte maneira: 3400, 600, 300, 250, 450, 140, 6 , 36 e 145 unidades, respectivamente, para os produtos nºs 102 , 104, 105, 110, 112, 115, 117, 118 e 122.

F. A ociosidade na linha de produção atingiu o valor de 76329 unidades, conforme se pode depreender pelo resultado na meta nº 06.

G. O total atendimento da prioridade nº 07, e o valor de Cr$ 288.728,00 na meta nº 08, vem a esclarecer o valor do lucro adicional pelo sistema proposto. Nota-se, no entanto, que este aumento de lucro é inferior ao acréscimo do custo de estoques, vide item C.

H. Com a satisfação do oitavo objetivo fica provado que não houve formação de estoques excessivos.

Como último aspecto a ser abordado neste exemplo, poder-se-ia formular o problema de modo a identificar o lucro máximo que poderia ser obtido. Para esta finalidade se propõe a formulação F-7, na qual a primeira prioridade é, justamente, a maximização do lucro. O resultado indica, conforme se pode ver abaixo, que este valor é de:

Cr$ 999.999.746,00 - Cr$ 905.950.720,00 = Cr$ 94.049.024,00

que corresponde a venda total das quantidades indicadas pelos resultados das restrições nº 06 a 35. Os setores 01, 02, 03 e 04, da linha de fabricação tem sua capacidade completamente esgotada, mas a secção 05 ainda apresenta uma capacidade ociosa de 40.400 unidades.

A F-7 está formulada na tabela 8.

RESULTADOS DA FORMULAÇÃO F-7

EQUAÇÃO Nº	DESVIOS POS.	DESVIOS NEG.
01	0.0	0.0
02	0.0	0.0
03	0.0	0.0
04	0.0	0.0
05	0.0	40400.0
06	0.0	54160.0
07	0.0	46454.0
08	180758.6	0.0
09	0.0	7774.0
10	0.0	3257.0
11	0.0	3270.0
12	0.0	15.0
13	0.0	2677.0
14	0.0	56.0
15	0.0	4400.0
16	11976.0	0.0
17	0.0	5650.0
18	0.0	3543.0
19	0.0	1224.0
20	0.0	617.0
21	0.0	710.0
22	0.0	1.0
23	0.0	293.0
24	0.0	371.0
25	0.0	964.0
26	0.0	75.0
27	0.0	1185.0
28	22199.0	0.0
29	0.0	698.0
30	0.0	549.0
31	0.0	929.0
32	0.0	4619.0
33	0.0	1053.0
34	20192.0	0.0
35	0.0	9972.0
36	50635.0	0.0
37	15580.0	0.0
38	0.0	905950720.0
39	237664192.0	0.0

ANÁLISE DA FUNÇÃO OBJETIVA

Prioridade	Atendimento	Valor
01	parcial	905950720.0
02	parcial	154416.0
03	parcial	237664192.0
04	completo	0.0
05	parcial	235125.6
06	parcial	40400.0
07	parcial	66215.8

T A B E L A 1

RESTRIÇÕES DO PROBLEMA DO CAPÍTULO 4

01 $X115+\ldots+X126 \leq$ 22.200

02 $X101+\ldots+X104+X107+\ldots+X110+X112+\ldots+X114+X127 \leq$ 189.880

03 $X105+X106+X111 \leq$ 12.120

04 $X107+\ldots+X110+X128+\ldots+X130 \leq$ 13.330

05 $X107+\ldots+X110+X127 \leq$ 40.400

06 $X101 \geq$ 60.178

07 $X102 \geq$ 51.616

08 $X103 \geq$ 10.134

09 $X104 \geq$ 8.638

10 $X105 \geq$ 3.619

11 $X106 \geq$ 3.633

12 $X107 \geq$ 17

13 $X108 \geq$ 2.974

14 $X109 \geq$ 62

15 $X110 \geq$ 4.889

16 $X111 \geq$ 160

17 $X112 \geq$ 6.278

18 $X113 \geq$ 3.937

19 $X114 \geq$ 1.360

20 $X115 \geq$ 686

21 $X116 \geq$ 789

22 $X117 \geq$ 1

23 $X118 \geq$ 326

24 $X119 \geq$ 412

25 $X120 \geq$ 1.071

26 $X121 \geq$ 83

27 $X122 \geq$ 1.317

28 $X123 \geq$ 1

29 $X124 \geq$ 776

30 $X125 \geq$ 610

31 $X126 \geq$ 921

32 $X127 \geq$ 5.132

33 $X128 \geq$ 1.170

34 $X129 \geq$ 1

35 $X130 \geq$ 11.080

(TABELA 1 - Cont.)

36 X101+...+X114+X127 ≤ 167.627

37 X115+...+X126 ≤ 7.320

38 12,88X111+ (-3,51)X105+ (-3,51)X106 + 157,01X101 +
+ 173,19X102+ 371,71X103+ 260,65X104 + 314,87X127 +
+ 349,72X107+ 310,25X108+ 335,84X109 + 341,65X110 +
+ 185,68X112+ 156,44X113+ 274,90X114 + 52,05X110 +
+ 524,21X116+1.029,38X113+ 945,51X118 + 953,06X119 +
+ 784,04X120+ 315,40X122+ 1.072,72X123 + 924,04X124 +
+1.028,97X125+ 575,08X126+ 43,75X128 + 58,83X130 +
+ 69,08X129+ 749,01X121≤35.373.632,00

39 2.031,42X101+1.896,33X102+2.473,32X103+2.374,12X104 +
+1.528,63X105+1.528,63X106+2.622,83X107+2.519,73X108 +
+2.443,48X109+2.336,64X110+1.710,59X111+1.791,21X112 +
+1.915,04X113+2.166,46X114+3.011,52X115+3.287,93X116 +
+3.180,15X117+3.266,98X118+3.551,18X119+4.389,64X120 +
+3.590,67X121+3.774,84X122+3.548,89X123+3.852,35X124 +
+4.138,20X125+4.830,05X126+3.316,63X127+ 250,22X128 +
+ 394,98X129+ 336,40X130 ≤ 376.073.216,00

T A B E L A 2

FORMULAÇÃO F-1, DO CAPÍTULO 4

01	$X115+\ldots+X126+d_1^-$	=	22.200
02	$X101+\ldots+X104+X107+\ldots+X110+X112+\ldots+X114+X127+d_2^-$	=	189.800
03	$X105+X106+X111+d_3^-$	=	12.120
04	$X107+\ldots+X110+X128+\ldots+X130+d_4^-$	=	13.330
05	$X107+\ldots+X110+X127+d_5^-$	=	40.400
06	$X101+d_6^- - d_6^+$	=	60.178
07	$X102+d_7^- - d_7^+$	=	51.616
08	$X103+d_8^- - d_8^+$	=	10.134
09	$X104+d_9^- - d_9^+$	=	8.638
10	$X105+d_{10}^- - d_{10}^+$	=	3.619
11	$X106+d_{11}^- - d_{11}^+$	=	3.633
12	$X107+d_{12}^- - d_{12}^+$	=	17
13	$X108+d_{13}^- - d_{13}^+$	=	2.974
14	$X109+d_{14}^- - d_{14}^+$	=	62
15	$X110+d_{15}^- - d_{15}^+$	=	4.889
16	$X111+d_{16}^- - d_{16}^+$	=	160
17	$X112+d_{17}^- - d_{17}^+$	=	6.278
18	$X113+d_{18}^- - d_{18}^+$	=	3.937
19	$X114+d_{19}^- - d_{19}^+$	=	1.360
20	$X115+d_{20}^- - d_{20}^+$	=	686
21	$X116+d_{21}^- - d_{21}^+$	=	789
22	$X117+d_{22}^- - d_{22}^+$	=	1
23	$X118+d_{23}^- - d_{23}^+$	=	326
24	$X119+d_{24}^- - d_{24}^+$	=	412
25	$X120+d_{25}^- - d_{25}^+$	=	1.071
26	$X121+d_{26}^- - d_{26}^+$	=	83
27	$X122+d_{27}^- - d_{27}^+$	=	1.317
28	$X123+d_{28}^- - d_{28}^+$	=	1
29	$X124+d_{29}^- - d_{29}^+$	=	776
30	$X125+d_{30}^- - d_{30}^+$	=	610
31	$X126+d_{31}^- - d_{31}^+$	=	921
32	$X127+d_{32}^- - d_{32}^+$	=	5.132
33	$X128+d_{33}^- - d_{33}^+$	=	1.170
34	$X129+d_{34}^- - d_{34}^+$	=	1
35	$X130+d_{35}^- - d_{35}^+$	=	11.080

(TABELA 2 - cont.)

36 $X101+\ldots+X114+X127+d_{36}^{-}-d_{36}^{+} = 167.627$

37 $X115+\ldots+X126+d_{37}^{-}-d_{37}^{+} = \ldots\ 7.320$

38
$$
\begin{aligned}
& 12{,}88X111 + (-3{,}51)X105 + (-3{,}51)X106 + 157{,}01X101 + \\
& + 173{,}19X102 + 371{,}71X103 + 260{,}65X104 + 314{,}87X127 + \\
& + 349{,}72X107 + 310{,}25X108 + 335{,}84X109 + 341{,}65X110 + \\
& + 185{,}68X112 + 156{,}44X113 + 274{,}90X114 + 52{,}05X115 + \\
& + 524{,}21X116 + 1.029{,}38X117 + 945{,}51X118 + 953{,}06X119 + \\
& + 784{,}04X120 + 315{,}40X122 + 1.072{,}72X123 + 924{,}04X124 + \\
& +1.028{,}97X125 + 575{,}08X126 + 43{,}75X128 + 58{,}83X130 + \\
& + 69{,}08X129 + 749{,}01X121 + d_{38}^{-} - d_{38}^{+} = 35.373.632{,}00
\end{aligned}
$$

39
$$
\begin{aligned}
& 2.031{,}42X101 + 1.896{,}33X102 + 2.473{,}32X103 + 2.374{,}12X104+ \\
& +1.528{,}63X105 + 1.528{,}63X106 + 2.622{,}83X107 + 2.519{,}73X108+ \\
& +2.443{,}48X109 + 2.336{,}64X110 + 1.710{,}59X111 + 1.791{,}21X112+ \\
& +1.915{,}04X113 + 2.166{,}46X114 + 3.011{,}52X115 + 3.287{,}93X116+ \\
& +3.180{,}15X117 + 3.266{,}98X118 + 3.551{,}18X119 + 4.389{,}64X120+ \\
& +3.590{,}67X121 + 3.774{,}84X122 + 3.548{,}89X123 + 3.852{,}35X124+ \\
& +4.138{,}20X125 + 4.830{,}05X126 + 3.316{,}63X127 + 250{,}22X128+ \\
& + 394{,}98X129 + 336{,}40X130 + d_{39}^{-} - d_{39}^{+} = 376.073.216{,}00
\end{aligned}
$$

Função objetiva:

$$
\begin{aligned}
\min\ & P_1\,(d_6^{-}+\ldots+d_{37}^{-}) + P_2 d_{39}^{+} + P_3 d_{39}^{-} + P_4(d_6^{+}+\ldots+d_{35}^{+}) + \\
& + P_5\,(d_1^{-}+\ldots+d_5^{-}) + P_6 d_{38}^{-} + P_7 d_{38}^{+} + P_8(d_{36}^{+} + d_{37}^{+})\ .
\end{aligned}
$$

T A B E L A 3

FORMULAÇÃO F-2 DO PROBLEMA DO CAPÍTULO 4

01 $X115+\ldots+X126+d_1^-$ = ... 22.200

02 $X101+\ldots+X104+X107+\ldots+X110+X112+\ldots X114+X127+d_2^-$ = 189.880

03 $X105+X106+X111+d_3^-$ = ... 12.120

04 $X107+\ldots+X110+X128+\ldots+X130+d_4^-$ = ... 20.193

05 $X107+\ldots+X110+X127+d_5^-$ = ... 40.400

06 $X101+d_6^- - d_6^+$ = 60.178

07 $X102+d_7^- - d_7^+$ = 51.616

08 $X103+d_8^- - d_8^+$ = 10.134

09 $X104+d_9^- - d_9^+$ = 8.638

10 $X105+d_{10}^- - d_{10}^+$ = 3.619

11 $X106+d_{11}^- - d_{11}^+$ = 3.633

12 $X107+d_{12}^- - d_{12}^+$ = 17

13 $X108+d_{13}^- - d_{13}^+$ = 2.974

14 $X109+d_{14}^- - d_{14}^+$ = 62

15 $X110+d_{15}^- - d_{15}^+$ = 4.889

16 $X111+d_{16}^- - d_{16}^+$ = 160

17 $X112+d_{17}^- - d_{17}^+$ = 6.278

18 $X113+d_{18}^- - d_{18}^+$ = 3.937

19 $X114+d_{19}^- - d_{19}^+$ = 1.360

20 $X115+d_{20}^- - d_{20}^+$ = 686

21 $X116+d_{21}^- - d_{21}^+$ = 789

22 $X117+d_{22}^- - d_{22}^+$ = 1

23 $X118+d_{23}^- - d_{23}^+$ = 326

24 $X119+d_{24}^- - d_{24}^+$ = 412

25 $X120+d_{25}^- - d_{25}^+$ = 1.071

26 $X121+d_{26}^- - d_{26}^+$ = 83

27 $X122+d_{27}^- - d_{27}^+$ = 1.317

28 $X123+d_{28}^- - d_{28}^+$ = 1

29 $X124+d_{29}^- - d_{29}^+$ = 776

30 $X125+d_{30}^- - d_{30}^+$ = 610

31 $X126+d_{31}^- - d_{31}^+$ = 921

32 $X127+d_{32}^- - d_{32}^+$ = 5.132

33 $X128+d_{33}^- - d_{33}^+$ = 1.170

34 $X129+d_{34}^- - d_{34}^+$ = 1

35 $X130+d_{35}^- - d_{35}^+$ = 11.080

(TABELA 3 - Cont.)

36 $X101+\ldots+X114+X127+d_{36}^{-}-d_{36}^{+} = 167.627$

37 $X115+\ldots+X126+d_{37}^{-}-d_{37}^{+} = \ldots\ 7.320$

38 12,88X111 + (-3,51)X105 + (-3,51)X106 + 157,01X101 +
+ 173,19X102 + 371,71X103 + 260,65X104 + 314,87X127 +
+ 349,72X107 + 310,25X108 + 335,84X109 + 341,65X110 +
+ 185,68X112 + 156,44X113 + 274,90X114 + 52,05X115 +
+ 524,21X116 + 1.029,38X117 + 945,51X118 + 953,06X119 +
+ 784,04X120 + 315,40X122 + 1.072,72X123 + 924,04X124 +
+1.028,97X125 + 575,08X126 + 43,75X128 + 58,83X130 +
+ 69,08X129 + 749,01X121 + $d_{38}^{-} - d_{38}^{+}$ = 35.373.632,00

39 2.031,42X101 + 1.896,33X102 + 2.473,32X103 + 2.374,12X104+
+1.528,63X105 + 1.528,63X106 + 2.622,83X107 + 2.519,73X108+
+2.443,48X109 + 2.336,64X110 + 1.710,59X111 + 1.791,21X112+
+1.915,04X113 + 2.166,46X114 + 3.011,52X115 + 3.287,93X116+
+3.180,15X117 + 3.266,98X118 + 3.551,18X119 + 4.389,64X120+
+3.590,67X121 + 3.774,84X122 + 3.548,89X123 + 3.852,35X124+
+4.138,20X125 + 4.830,05X126 + 3.316,63X127 + 250,22X128+
+ 394,98X129 + 336,40X130 + $d_{39}^{-} - d_{39}^{+}$ = 376.073.126,00

Função objetiva:

$$\min P_1(d_6^{-}+\ldots+d_{37}^{-}) + P_2 d_{39}^{+} + P_3 d_{39}^{-} + P_4(d_6^{+}+\ldots+d_{35}^{+})$$
$$+ P_5(d_1^{-}+\ldots+d_5^{-}) + P_6 d_{38}^{-} + P_7 d_{38}^{+} + P_8(d_{36}^{+} + d_{37}^{+})$$

TABELA 4

FORMULAÇÃO F-3 DO PROBLEMA DO CAPÍTULO 4

01	$X115+\dots+X126+d_1^- =$	22.200
02	$X101+\dots+X104+X107+\dots+X110+X112+\dots+X114+X127+d_2^- =$	189.800
03	$X105+X106+X111+d_3^- =$	12.120
04	$X107+\dots+X110+X128+\dots+X130+d_4^- =$	20.193
05	$X107+\dots+X110+X127+d_5^- =$	40.400
06	$X101+d_6^- - d_6^+ =$	66.196
07	$X102+d_7^- - d_7^+ =$	56.778
08	$X103+d_8^- - d_8^+ =$	11.147
09	$X104+d_9^- - d_9^+ =$	9.502
10	$X105+d_{10}^- - d_{10}^+ =$	3.981
11	$X106+d_{11}^- - d_{11}^+ =$	3.996
12	$X107+d_{12}^- - d_{12}^+ =$	12
13	$X108+d_{13}^- - d_{13}^+ =$	3.271
14	$X109+d_{14}^- - d_{14}^+ =$	68
15	$X110+d_{15}^- - d_{15}^+ =$	5.378
16	$X111+d_{16}^- - d_{16}^+ =$	176
17	$X112+d_{17}^- - d_{17}^+ =$	6.906
18	$X113+d_{18}^- - d_{18}^+ =$	4.331
19	$X114+d_{19}^- - d_{19}^+ =$	1.496
20	$X115+d_{20}^- - d_{20}^+ =$	754
21	$X116+d_{21}^- - d_{21}^+ =$	868
22	$X117+d_{22}^- - d_{22}^+ =$	1
23	$X118+d_{23}^- - d_{23}^+ =$	358
24	$X119+d_{24}^- - d_{24}^+ =$	453
25	$X120+d_{25}^- - d_{25}^+ =$	1.178
26	$X121+d_{26}^- - d_{26}^+ =$	91
27	$X122+d_{27}^- - d_{27}^+ =$	1.449
28	$X123+d_{28}^- - d_{28}^+ =$	1
29	$X124+d_{29}^- - d_{29}^+ =$	854
30	$X125+d_{30}^- - d_{30}^+ =$	671
31	$X126+d_{31}^- - d_{31}^+ =$	1.013
32	$X127+d_{32}^- - d_{32}^+ =$	5.645
33	$X128+d_{33}^- - d_{33}^+ =$	1.287
34	$X129+d_{34}^- - d_{34}^+ =$	1
35	$X130+d_{35}^- - d_{35}^+ =$	12.188

(TABELA 4 - Cont.)

36 $X101+\dots+X114+X127+d_{36}^{-}-d_{36}^{+} = 183.890$

37 $X115+\dots+X126+d_{37}^{-}-d_{37}^{+} = \dots\ 8.018$

38 12,88X111 + (-3,51)X105 + (-3,51)X106 + 157,01X101 +
+ 173,19X102 + 371,71X103 + 260,65X104 + 314,87X127 +
+ 349,72X107 + 310,25X108 + 335,84X109 + 341,65X110 +
+ 185,68X112 + 156,44X113 + 274,90X114 + 52,05X115 +
+ 524,21X116 + 1.029,38X117 + 945,51X118 + 953,06X119 +
+ 784,04X120 + 315,40X122 + 1.072,72X123 + 924,04X124 +
+1.028,97X125 + 575,08X126 + 43,75X128 + 58,83X130 +
+ 69,08X129 + 749,01X121 + d_{38}^{-} - d_{38}^{+} = 36.425.952,00

39 2.031,42X101 + 1.896,33X102 + 2.473,32X103 + 2.374,12X104+
+1.528,63X105 + 1.528,63X106 + 2.622,83X107 + 2.519,73X108+
+2.443,48X109 + 2.336,64X110 + 1.710,59X111 + 1.791,21X112+
+1.915,04X113 + 2.166,46X114 + 3.011,52X115 + 3.287,93X116+
+3.180,15X117 + 3.266,98X118 + 3.551,18X119 + 4.389,64X120+
+3.590,67X121 + 3.774,84X122 + 3.548,89X123 + 3.852,35X124+
+4.138,20X125 + 4.830,05X126 + 3.316,63X127 + 250,22X128+
+ 394,98X129 + 336,40X130 + d_{39}^{-} - d_{39}^{+} = 412.686.592,00

Função objetiva:

$$\min P_1(d_6^{-}+\dots+d_{37}^{-}) + P_2 d_{39}^{+} + P_3 d_{39}^{-} + P_4(d_6^{+}+\dots+d_{35}^{+}) + P_5(d_1^{-}+\dots+d_5^{-}) + P_6 d_{38}^{-} + P_7 d_{38}^{+} + P_8(d_{36}^{+} + d_{37}^{+}) .$$

T A B E L A 5

FORMULAÇÃO F-4 DO PROBLEMA DO CAPÍTULO 4

01	$X115+\ldots+X126+d_1^- =$	22.200
02	$X101+\ldots+X104+X107+\ldots+X110+X112+\ldots+X114+X127+d_2^- =$	189.880
03	$X105+X106+X111+d_3^- =$	12.120
04	$X107+\ldots+X110+X128+\ldots+X130+d_4^- =$	20.193
05	$X107+\ldots+X110+X127+d_5^- =$	40.400
06	$X101+d_6^- - d_6^+ =$	54.160
07	$X102+d_7^- - d_7^+ =$	46.454
08	$X103+d_8^- - d_8^+ =$	9.121
09	$X104+d_9^- - d_9^+ =$	7.774
10	$X105+d_{10}^- - d_{10}^+ =$	3.257
11	$X106+d_{11}^- - d_{11}^+ =$	3.270
12	$X107+d_{12}^- - d_{12}^+ =$	15
13	$X108+d_{13}^- - d_{13}^+ =$	2.677
14	$X109+d_{14}^- - d_{14}^+ =$	56
15	$X110+d_{15}^- - d_{15}^+ =$	4.400
16	$X111+d_{16}^- - d_{16}^+ =$	144
17	$X112+d_{17}^- - d_{17}^+ =$	5.650
18	$X113+d_{18}^- - d_{18}^+ =$	3.543
19	$X114+d_{19}^- - d_{19}^+ =$	1.224
20	$X115+d_{20}^- - d_{20}^+ =$	617
21	$X116+d_{21}^- - d_{21}^+ =$	710
22	$X117+d_{22}^- - d_{22}^+ =$	1
23	$X118+d_{23}^- - d_{23}^+ =$	293
24	$X119+d_{24}^- - d_{24}^+ =$	371
25	$X120+d_{25}^- - d_{25}^+ =$	964
26	$X121+d_{26}^- - d_{26}^+ =$	75
27	$X122+d_{27}^- - d_{27}^+ =$	1.185
28	$X123+d_{28}^- - d_{28}^+ =$	1
29	$X124+d_{29}^- - d_{29}^+ =$	689
30	$X125+d_{30}^- - d_{30}^+ =$	549
31	$X126+d_{31}^- - d_{31}^+ =$	829
32	$X127+d_{32}^- - d_{32}^+ =$	4.619
33	$X128+d_{33}^- - d_{33}^+ =$	1.053
34	$X129+d_{34}^- - d_{34}^+ =$	1
35	$X130+d_{35}^- - d_{35}^+ =$	9.972

(TABELA 5 - Cont.)

36 $X101 + \ldots + X114 + X127 + d_{36}^{-} - d_{36}^{+} = 151.364$

37 $X115 + \ldots + X126 + d_{37}^{-} - d_{37}^{+} = \ldots.$ 6.620

38 $12{,}88X111 + (-3{,}51)X105 + (-3{,}51)X106 + 157{,}01X101 +$
$+ 173{,}19X102 + 371{,}71X103 + 260{,}65X104 + 314{,}87X127 +$
$+ 349{,}72X107 + 310{,}25X108 + 335{,}84X109 + 341{,}65X110 +$
$+ 185{,}68X112 + 156{,}44X113 + 274{,}90X114 + 52{,}05X115 +$
$+ 524{,}21X116 + 1.029{,}38X117 + 945{,}51X118 + 953{,}06X119 +$
$+ 784{,}04X120 + 315{,}40X122 + 1.072{,}72X123 + 924{,}04X124 +$
$+ 1.028{,}97X125 + 575{,}08X126 + 43{,}75X128 + 58{,}83X130 +$
$+ 69{,}08X129 + 749{,}01X121 + d_{38}^{-} - d_{38}^{+} = 36.425.952{,}00$

39 $2.031{,}42X101 + 1.896{,}33X102 + 2.473{,}32X103 + 2.374{,}12X104 +$
$+ 1.528{,}63X105 + 1.528{,}63X106 + 2.622{,}83X107 + 2.519{,}73X108 +$
$+ 2.443{,}48X109 + 2.336{,}74X110 + 1.710{,}59X111 + 1.791{,}21X112 +$
$+ 1.915{,}04X113 + 2.166{,}46X114 + 3.011{,}52X115 + 3.287{,}93X116 +$
$+ 3.180{,}15X117 + 3.266{,}98X118 + 3.551{,}18X119 + 4.389{,}64X120 +$
$+ 3.590{,}67X121 + 3.774{,}84X122 + 3.548{,}89X123 + 3.852{,}35X124 +$
$+ 4.138{,}20X125 + 4.830{,}05X126 + 3.316{,}63X127 + 250{,}22X128 +$
$+ 394{,}98X129 + 336{,}40X130 + d_{39}^{-} - d_{39}^{+} = 339.463.168{,}00$

Função objetiva:

$$\min P_1(d_6^{-} + \ldots + d_{37}^{-}) + P_2 d_{39}^{+} + P_3 d_{39}^{-} + P_4(d_6^{+} + \ldots + d_{35}^{+}) +$$
$$+ P_5(d_1^{-} + \ldots + d_5^{-}) + P_6 d_{38}^{-} + P_7 d_{38}^{+} + P_8(d_{36}^{+} + d_{37}^{+}) .$$

T A B E L A 6

FORMULAÇÃO F-5 DO PROBLEMA DO CAPÍTULO 4

01 $X115 + \ldots + X126 + d_1^- =$ 22.200

02 $X101 + \ldots + X104 + X107 + \ldots + X110 + X112 + \ldots + X114 + X127 + d_2^- =$ 189.880

03 $X105 + X106 + X111 + d_3^- =$ 12.120

04 $X107 + \ldots + X110 + X128 + \ldots + X130 + d_4^- =$ 20.193

05 $X107 + \ldots + X110 + X127 + d_5^- =$ 40.400

06 $X101 + d_6^- - d_6^+ = 54.160$

07 $X102 + d_7^- - d_7^+ = 46.454$

08 $X103 + d_8^- - d_8^+ = 9.121$

09 $X104 + d_9^- - d_9^+ = 7.774$

10 $X105 + d_{10}^- - d_{10}^+ = 3.257$

11 $X106 + d_{11}^- - d_{11}^+ = 3.270$

12 $X107 + d_{12}^- - d_{12}^+ = 15$

13 $X108 + d_{13}^- - d_{13}^+ = 2.677$

14 $X109 + d_{14}^- - d_{14}^+ = 56$

15 $X110 + d_{15}^- - d_{15}^+ = 4.400$

16 $X111 + d_{16}^- - d_{16}^+ = 144$

17 $X112 + d_{17}^- - d_{17}^+ = 5.650$

18 $X113 + d_{18}^- - d_{18}^+ = 3.543$

19 $X114 + d_{19}^- - d_{19}^+ = 1.224$

20 $X115 + d_{20}^- - d_{20}^+ = 617$

21 $X116 + d_{21}^- - d_{21}^+ = 710$

22 $X117 + d_{22}^- - d_{22}^+ = 1$

23 $X118 + d_{23}^- - d_{23}^+ = 293$

24 $X119 + d_{24}^- - d_{24}^+ = 371$

25 $X120 + d_{25}^- - d_{25}^+ = 964$

26 $X121 + d_{26}^- - d_{26}^+ = 75$

27 $X122 + d_{27}^- - d_{27}^+ = 1.185$

28 $X123 + d_{28}^- - d_{28}^+ = 1$

29 $X124 + d_{29}^- - d_{29}^+ = 689$

30 $X125 + d_{30}^- - d_{30}^+ = 549$

31 $X126 + d_{31}^- - d_{31}^+ = 829$

32 $X127 + d_{32}^- - d_{32}^+ = 4.619$

33 $X128 + d_{33}^- - d_{33}^+ = 1.053$

34 $X129 + d_{34}^- - d_{34}^+ = 1$

35 $X130 + d_{35}^- - d_{35}^+ = 9.972$

(TABELA 6 - Cont.)

36 $X101 + \ldots + X114 + X127 + d_{36}^{-} - d_{36}^{+} = 151.364$

37 $X115 + \ldots + X126 + d_{37}^{-} - d_{37}^{+} = \ldots\ 6.620$

38 $12{,}88X111 + (-3{,}51)X105 + (-3{,}51)X106 + 157{,}01X101 +$
$+ 173{,}19X102 + 371{,}71X103 + 260{,}65X104 + 314{,}87X127 +$
$+ 349{,}72X107 + 310{,}25X108 + 335{,}84X109 + 341{,}65X110 +$
$+ 185{,}68X112 + 156{,}44X113 + 274{,}90X114 + 52{,}05X115 +$
$+ 524{,}21X116 + 1.029{,}38X117 + 945{,}51X118 + 953{,}06X119 +$
$+ 784{,}04X120 + 315{,}40X122 + 1.072{,}72X123 + 924{,}04X124 +$
$+ 1.028{,}97X125 + 575{,}08X126 + 43{,}75X128 + 58{,}83X130 +$
$+ 69{,}08X129 + 749{,}01X121 + d_{38}^{-} - d_{38}^{+} = 36.425.952{,}00$

39 $2.031{,}42X101 + 1.896{,}33X102 + 2.473{,}32X103 + 2.374{,}12X104 +$
$+ 1.528{,}63X105 + 1.528{,}63X106 + 2.622{,}83X107 + 2.519{,}73X108 +$
$+ 2.443{,}48X109 + 2.336{,}64X110 + 1.710{,}59X111 + 1.791{,}21X112 +$
$+ 1.915{,}04X113 + 2.166{,}46X114 + 3.011{,}52X115 + 3.287{,}93X116 +$
$+ 3.180{,}15X117 + 3.266{,}98X118 + 3.551{,}18X119 + 4.389{,}64X120 +$
$+ 3.590{,}67X121 + 3.774{,}84X122 + 3.548{,}89X123 + 3.852{,}35X124 +$
$+ 4.138{,}20X125 + 4.830{,}05X126 + 3.316{,}63X127 + 250{,}22X128 +$
$+ 394{,}98X129 + 336{,}40X130 + d_{39}^{-} - d_{39}^{+} = 339.463.168{,}00$

Função objetiva:

$$\text{Min } P_1(d_6^{-} + \ldots + d_{37}^{-}) + P_2 d_{39}^{+} + P_3 d_{39}^{-} + P_4(d_1^{-} + \ldots + d_5^{-}) +$$
$$+ P_5 d_{38}^{-} + P_6 d_{38}^{+} + P_7(d_{36}^{+} + d_{37}^{+}) .$$

T A B E L A 7

FORMULAÇÃO F-6 DO PROBLEMA DO CAPÍTULO 4

01	$X115+\ldots+X126+d_1^- =$	22.200
02	$X101+\ldots+X104+X107+\ldots+X110+X112+\ldots+X114+X127+d_2^- =$	189.880
03	$X105+X106+X111+d_3^- =$	12.120
04	$X107+\ldots+X110+X128+\ldots+X130+d_4^- =$	20.193
05	$X107+\ldots+X110+X127+d_5^- =$	40.400
06	$X101+d_6^- - d_6^+ =$	60.178
07	$X102+d_7^- - d_7^+ =$	51.616
08	$X103+d_8^- - d_8^+ =$	10.134
09	$X104+d_9^- - d_9^+ =$	8.638
10	$X105+d_{10}^- - d_{10}^+ =$	3.619
11	$X106+d_{11}^- - d_{11}^+ =$	3.633
12	$X107+d_{12}^- - d_{12}^+ =$	17
13	$X108+d_{13}^- - d_{13}^+ =$	2.974
14	$X109+d_{14}^- - d_{14}^+ =$	62
15	$X110+d_{15}^- - d_{15}^+ =$	4.889
16	$X111+d_{16}^- - d_{16}^+ =$	160
17	$X112+d_{17}^- - d_{17}^+ =$	6.278
18	$X113+d_{18}^- - d_{18}^+ =$	3.937
19	$X114+d_{19}^- - d_{19}^+ =$	1.360
20	$X115+d_{20}^- - d_{20}^+ =$	686
21	$X116+d_{21}^- - d_{21}^+ =$	789
22	$X117+d_{22}^- - d_{22}^+ =$	1
23	$X118+d_{23}^- - d_{23}^+ =$	326
24	$X119+d_{24}^- - d_{24}^+ =$	412
25	$X120+d_{25}^- - d_{25}^+ =$	1.071
26	$X121+d_{26}^- - d_{26}^+ =$	83
27	$X122+d_{27}^- - d_{27}^+ =$	1.317
28	$X123+d_{28}^- - d_{28}^+ =$	1
29	$X124+d_{29}^- - d_{29}^+ =$	776
30	$X125+d_{30}^- - d_{30}^+ =$	610
31	$X126+d_{31}^- - d_{31}^+ =$	921
32	$X127+d_{32}^- - d_{32}^+ =$	5.132
33	$X128+d_{33}^- - d_{33}^+ =$	1.170
34	$X129+d_{34}^- - d_{34}^+ =$	1
35	$X130+d_{35}^- - d_{35}^+ =$	11.080

(TABELA 7 - Cont.)

36 $X101+\ldots+X114+X127+d_{36}^{-}-d_{36}^{+} = 167.627$

37 $X115+\ldots+X126+d_{37}^{-}-d_{37}^{+} = \ldots\ 7.320$

38 $12,88X111 + (-3,51)X105 + (-3,51)X106 + 157,01X101 +$
$+ 173,19X102 + 371,71X103 + 260,65X104 + 314,87X127 +$
$+ 349,72X107 + 310,25X108 + 335,84X109 + 341,65X110 +$
$+ 185,68X112 + 156,44X113 + 274,90X114 + 52,05X115 +$
$+ 524,21X116 + 1.029,38X117 + 945,51X118 + 953,06X119 +$
$+ 784,04X120 + 315,40X122 + 1.072,72X123 + 924,04X124 +$
$+1.028,97X125 + 575,08X126 + 43,75X128 + 58,83X130 +$
$+ 69,08X129 + 749,01X121 + d_{38}^{-} - d_{38}^{+} = 35.373.632,00$

39 $2.031,42X101 + 1.896,33X102 + 2.473,32X103 + 2.374,12X104+$
$+1.528,63X105 + 1.528,63X106 + 2.622,83X107 + 2.519,73X108+$
$+2.443,48X109 + 2.336,64X110 + 1.710,59X111 + 1.791,21X112+$
$+1.915,04X113 + 2.166,46X114 + 3.011,52X115 + 3.287,93X116+$
$+3.180,15X117 + 3.266,98X118 + 3.551,18X119 + 4.389,64X120+$
$+3.590,67X121 + 3.774,84X122 + 3.548,89X123 + 3.853,34X124+$
$+4.138,20X125 + 4.830,05X126 + 3.316,63X127 + 250,22X128+$
$+ 394,98X129 + 336,40X130 + d_{39}^{-} - d_{39}^{+} = 376.073.216,00$

40 $X101+X102+d_{40}^{-} = \ldots\ 115.194$

41 $X103+X104+d_{41}^{-} = \ldots\ 19.372$

42 $X105+X106+X111+d_{42}^{-} = \ldots\ 7.712$

43 $X112+X113+X114+X127+d_{43}^{-} = 17.157$

44 $X107+X108+X109+X110+d_{44}^{-} = 8.192$

45 $X115+X116+X124+X125+d_{45}^{-} = 3.001$

46 $X118+X119+d_{45}^{-} = \ldots\ 774$

47 $X117+X121+X123+d_{47}^{-} = \ldots\ 91$

48 $X120+X122+X126+d_{48}^{-} = \ldots\ 3.454$

Função objetiva:

$$\min P_1(d_6^{-}+\ldots+d_{37}^{-}) + P_2(d_{40}^{-}+\ldots+d_{48}^{-}) + P_3 d_{39}^{+} + P_4 d_{39}^{-} +$$
$$+ P_5(d_6^{+}+\ldots+d_{35}^{+}) + P_6(d_1^{-}+\ldots+d_5^{-}) + P_7 d_{38}^{-} + P_8 d_{38}^{+} +$$
$$+ P_9(d_{36}^{+} + d_{37}^{+}) .$$

T A B E L A 8

FORMULAÇÃO F-7 DO PROBLEMA DO CAPÍTULO 4

01	$X115+....+X126+d_1^- =$	22.200
02	$X101+....+X104+X107+...+X110+X112+...+X114+X127+d_2^- =$	189.880
03	$X105+X106+X111+d_3^- =$	12.120
04	$X107+....+X110+X128+...+X130+d_4^- =$	20.193
05	$X107+....+X110+X127+d_5^- =$	40.400
06	$X101+d_6^- -d_6^+ =$	60.178
07	$X102+d_7^- -d_7^+ =$	51.616
08	$X103+d_8^- -d_8^+ =$	10.134
09	$X104+d_9^- -d_9^+ =$	8.638
10	$X105+d_{10}^- -d_{10}^+ =$	3.619
11	$X106+d_{11}^- -d_{11}^+ =$	3.633
12	$X107+d_{12}^- -d_{12}^+ =$	17
13	$X108+d_{13}^- -d_{13}^+ =$	2.974
14	$X109+d_{14}^- -d_{14}^+ =$	62
15	$X110+d_{15}^- -d_{15}^+ =$	4.889
16	$X111+d_{16}^- -d_{16}^+ =$	160
17	$X112+d_{17}^- -d_{17}^+ =$	6.278
18	$X113+d_{18}^- -d_{18}^+ =$	3.937
19	$X114+d_{19}^- -d_{19}^+ =$	1.360
20	$X115+d_{20}^- -d_{20}^+ =$	686
21	$X116+d_{21}^- -d_{21}^+ =$	789
22	$X117+d_{22}^- -d_{22}^+ =$	1
23	$X118+d_{23}^- -d_{23}^+ =$	326
24	$X119+d_{24}^- -d_{24}^+ =$	412
25	$X120+d_{25}^- -d_{25}^+ =$	1.071
26	$X121+d_{26}^- -d_{26}^+ =$	83
27	$X122+d_{27}^- -d_{27}^+ =$	1.317
28	$X123+d_{28}^- -d_{28}^+ =$	1
29	$X124+d_{29}^- -d_{29}^+ =$	776
30	$X125+d_{30}^- -d_{30}^+ =$	610
31	$X126+d_{31}^- -d_{31}^+ =$	921
32	$X127+d_{32}^- -d_{32}^+ =$	5.132
33	$X128+d_{33}^- -d_{33}^+ =$	1.170
34	$X129+d_{34}^- -d_{34}^+ =$	1
35	$X130+d_{35}^- -d_{35}^+ =$	11.080

(TABELA 8 - Cont.)

36 $X101 + \ldots + X114 + X127 + d_{36}^{-} - d_{36}^{+} = 167.627$

37 $X115 + \ldots + X126 + d_{37}^{-} - d_{37}^{+} = \ldots.$ 7.320

38 $12{,}88X111 + (-3{,}51)X105 + (-3{,}51)X106 + 157{,}01X101 +$
$+ 173{,}19X102 + 371{,}71X103 + 260{,}65X104 + 314{,}87X127 +$
$+ 349{,}72X107 + 310{,}25X108 + 335{,}84X109 + 341{,}65X110 +$
$+ 185{,}68X112 + 156{,}44X113 + 274{,}90X114 + 52{,}05X115 +$
$+ 524{,}21X116 + 1.029{,}38X117 + 945{,}51X118 + 953{,}06X119 +$
$+ 784{,}04X120 + 315{,}40X122 + 1.072{,}72X123 + 924{,}04X124 +$
$+ 1.028{,}97X125 + 575{,}08X126 + 43{,}75X128 + 58{,}83X130 +$
$+ 69{,}08X129 + 749{,}01X121 + d_{38}^{-} - d_{38}^{+} = 999.999.746{,}00$

39 $2.031{,}42X101 + 1.896{,}33X102 + 2.473{,}32X103 + 2.374{,}12X104 +$
$+ 1.528{,}63X105 + 1.528{,}63X106 + 2.622{,}83X107 + 2.519{,}73X108 +$
$+ 2.443{,}48X109 + 2.336{,}64X110 + 1.710{,}59X111 + 1.791{,}21X112 +$
$+ 1.915{,}04X113 + 2.166{,}46X114 + 3.011{,}52X115 + 3.287{,}93X116 +$
$+ 3.180{,}15X117 + 3.266{,}98X118 + 3.551{,}18X119 + 4.389{,}64X120 +$
$+ 3.590{,}67X121 + 3.774{,}84X122 + 3.548{,}89X123 + 3.852{,}35X124 +$
$+ 4.138{,}20X125 + 4.830{,}05X126 + 3.316{,}63X127 + 250{,}22X128 +$
$+ 394{,}98X129 + 336{,}40X130 + d_{39}^{-} - d_{39}^{+} = 376.073.216{,}00$

Função objetiva:

$$\min P_1 d_{38}^{-} + P_2(d_6^{-} + \ldots + d_{37}^{-}) + P_3 d_{39}^{+} + P_4 d_{39}^{-} + P_5(d_6^{+} + \ldots + d_{35}^{+}) +$$
$$+ P_6(d_1^{-} + \ldots + d_5^{-}) + P_7(d_{36}^{+} + d_{37}^{+}) .$$

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Foi visto, neste estudo, um modelo de resolução de G.P., com duas interpretações, onde todos os elementos são determinísticos. Uma pequena generalização foi feita quando Bruno Contini considerou o problema estocástico $Y^*=RX+U$, onde U representa a variação dos valores médios, resolvido somente para o caso de variância mínima.

A proposição de generalizar ainda mais o problema estocástico está descrita no capítulo 3, onde os valores ótimos são calculados para ∞ valores de risco.

Um exemplo da aplicação desta generalização foi apresentada no capítulo 4.

Poder-se-ia ainda introduzir o conceito de "região de confiabilidade", para as resoluções ótimas. Pode-se pensar em X^o como solução ótima da programação quadrática quando $\lambda = 0$, se os desvios forem zero pode-se escrever:

$$E(Y) = RX^o = Y^*$$

e, para que haja otimalidade:

$$Pr(Y(X^o) \in Y^*) = \text{Max } Pr(Y(X) \in Y^*)$$

A não singularidade de W é condição suficiente para que a forma quadrática Q (onde $\lambda=0$) seja χ^2 com q graus de liberdade. Logo, Q é um elipsóide (passível de prova matemática) no espaço E^q centrado em Y^o (10).

$$Q = p\chi^2_q$$

onde χ^2_q é uma fração α da distribuição quiquadrada com q graus de liberdade, dada por:

$$Pr(\chi^2_q \in p\chi^2_q) = \frac{1}{2^{q/2}\ \Gamma(q/2)} \int_{p\chi^2_q}^{\infty} t^{(q/2)-1} . e^{-t/2}\, dt = 1 - \alpha$$

Será então possível definir um elipsóide $Q(y)$, tal que:

$$Q(y) = (Y-Y^o)'W^{-1}(Y-Y^o) = p\chi^2_q$$

o que indica que a probabilidade de um vetor aleatório Y confirmar que $Q(Y) > p\chi^2_q$ não é maior que $(1-\alpha)$.

Convém salientar que o desenvolvimento deste trabalho no aspecto de otimização de uma função quadrática, foi realizado valendo-se das condições de Kuhn-Tucker para que uma solução seja ótima. Não foi estudada a possibilidade do desenvolvimento' de um outro algorítmo, já que uma pequena adaptação do algorítmo de Dantzig-Wolffe foi o suficiente para resolver o problema. Esta adaptação gera, porém, uma necessidade computacional bastante grande, recomenda-se, pois, o prosseguimento desta pesquisa para desenvolver um novo algorítmo com o objetivo mais específico e, portanto, mais eficiente no aspecto computacional.

Outro aspecto que pode ser desenvolvido, refere-se às interpretações e utilizações do coeficiente de aversão ao risco. A literatura sobre este assunto está numerado com (5) e (6) na relação bibliográfica deste trabalho.

BIBLIOGRAFIA

(1) MAO, C.T.J. - "Quantitative analysis of financial decisions", pág. 69 a 180; Ed. Mac-Millan Company, New York, U.S.A., 2a. edição, 1969.

(2) CANADA, R.J. - "Intermediate economic analysis for management and engineering", pag. 173 a 318; Ed. Prentice Hall Incorporation, New York, U.S.A., 1971.

(3) LEE, Mac S. - "Goal programming for decisions analysis", Ed. Auerbach Publishers, U.S.A., 1972.

(4) RAIFFA, H. - "Applied statistical decision theory", editado pela M.I.T., Londres, Inglaterra, 1971.

(5) ENSSLIN, L. - "Cycle elimination model: a new horizon for the portfolio selection analysis", technical paper, University of Southern California, Los Angeles, U.S.A., 1974.

(6) ENSSLIN, L. - "A new approach to the portfolio selection", technical paper, University of Southern California, Los Angeles, U.S.A., 1974.

(7) CONTINI, B. - "A stochastic approach to goal programming", paper editado pela Foundacione Luigi Einaudi, Torino, Itália, abril/1968.

(8) KING, J.R. - "Decision analysis by decision tree", editado pela Management Science, vol. 1, nº 1, U.S.A., setembro/1973.

(9) DYER, S.J. - "Interactive goal programming", editado pela Management Science, vol. 19, nº 1, U.S.A., setembro/1973.

(10) WAGNER, M.H. - "Principles of operations research", pag. 33 a 94, 513 a 576 e 639 a 773, ed. Prentice Hall Inc., New Jersey, U.S.A., 1969.

(11) KEENEY, R.L. e RAIFFA, H. - "Decisions with multiple objectives: preferences and value tradeoffs", pag. 131 a 534; Ed. John Wiley e Sons Inc., New York, U.S.A., 1976.

APÊNDICE 1

Segue a listagem do programa computacional, em linguagem FORTRAN IV, para computador tipo IBM-370, utilizado na ilustração apresentada no capítulo 4 deste trabalho [3].

```
PAGE   1

// JOB T

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0008        0008        0000

V2 M11   ACTUAL 16K  CONFIG 16K

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
//J10GOAL   JOB 10000000,KRISCHER,CLASS=C
//S1       EXEC  FORTGCLG
//FORT.SYSIN DD *
C
C
C
C
C              GOAL   PROGRAMMING
C
C
C
C
C       PURPOSE
C          TO SOLVE MULTI-GOAL LINEAR PROBLEMS.
C
C
C
C***********************************************************************
C
C
      DIMENSION KEPT(70)
      DIMENSION RHS1(70)
      DIMENSION VALY(70,10)
      DIMENSION Y(70)
      DIMENSION PRDT(70)
      DIMENSION AMT(70)
      DIMENSION ZVAL(10)
      DIMENSION C(70,150)
      DIMENSION DOD(70)
      DIMENSION DUD(150)
      DIMENSION VALX(10,150)
      DIMENSION X(150)
      DIMENSION RVLX(10,150)
      DIMENSION D(70,150)
C
C          GOAL PROGRAMMING
C
      CALL START(N,M,L,C,VALX,VALY,PRDT,RHS1,KPCK,KEPT,TEST)
      DO 21 J=1,M
   21 X(J)=J
      DO 20 I=1,N
   20 Y(I)=I
   15 FORMAT(1X,F12.2)
   12 FORMAT(10F11.2)
   13 FORMAT(8F9.0)
      DO 25 K=1,L
      DO 25 I=1,N
      VALY(I,K) = VALX(K,I)
   25 CONTINUE
      ITAB=0
C
C          BRING IN NEW VARIABLES
```

```
PAGE   2
C
      ITER=0
C
C        CALCULATE NET CONTRIBUTION OF EACH VARIABLE(RVLX(K,J))
C
   31 L1=0
   32 K3=L-L1
      WRITE(6,7467) L1
 7467 FORMAT(80X,'L1=',I4)
   33 IF(K3-1) 800,40,40
   40 DO 60 K=1,K3
      DO 60 J=1,M
      SUMP=0.
      DO 50 I=1,N
      P=VALY(I,K)*C(I,J)
      SUMP= SUMP+P
   50 CONTINUE
      RVLX(K,J)=SUMP- VALX(K,J)
   60 CONTINUE
      ITER =ITER + 1
C
C        BRING IN X(K2)
C
      ZMAX=0
      DO 90 J=1,M
      IF(K3-L) 92,70,70
   92 K4=K3+1
      DO 91 K=K4,L
      IF(RVLX(K,J)) 90,91,91
   91 CONTINUE
   70 IF(RVLX(K3,J)-ZMAX) 90,90,80
   80 ZMAX=RVLX(K3,J)
      K2=J
   90 CONTINUE
   95 IF(ZMAX)790,790,100
C
C        WHICH VARIABLE IS REMOVED FROM THE BASIS
C        CALCULATE LIMITING AMT FOR EACH BASIS VARIABLE
C
  100 DO 150 I=1,N
      IF(PRDT(I)) 110,120,120
  110 WRITE(6,13)  PRDT(I)
      GO TO 830
  120 IF(C(I,K2)) 130,130,140
  130 AMT(I)=-1.
      GO TO 150
  140 AMT(I)=PRDT(I)/C(I,K2)
  150 CONTINUE
C
C        SELECT SMALEST POSITIVE LIMITING AMT
C
      I=1
  160 IF(AMT(I)) 170,210,210
  170 I=I+1
      IF(I-N) 160,160,180
  180 WRITE(6,13) AMT(N)
      GO TO 830
  210 ZMIN=AMT(I)
      K1= I
  220 I=I+1
```

PAGE 3

```
      IF(I-N) 230,230,300
  230 IF(AMT(I)) 220,240,240
  240 IF(ZMIN-AMT(I)) 220,220,210
C
C        REMOVE  Y(K1)
  300 Y(K1)=X(K2)
      DO 310 K=1,L
      VALY(K1,K)= VALX(K,K2)
  310 CONTINUE
C
C
C        CALCULATE NEW RIGHT-HAND SIDES
C
      DO 400 I=1,N
      PRDT(I) = PRDT(I) - ZMIN*C(I,K2)
  400 CONTINUE
      PRDT(K1) = ZMIN
C
C        CALCULATE NEW SUBSTITUTION RATES
C
      DO 500 J=1,M
      DO 500 I=1,N
      D(I,J) = C(I,J)- C(K1,J)*(C(I,K2)/C(K1,K2))
  500 CONTINUE
      DO 510 J=1,M
      D(K1,J) = C(K1,J)/C(K1,K2)
  510 CONTINUE
      DO 520 J=1,M
      DO 520 I=1,N
      C(I,J) =D(I,J)
  520 CONTINUE
C
C        WRITE ALL TABLES OR JUST OPTIMAL TABLE
C
      IF(ITAB) 40,40,600
C
C        WRITE EACH TABLE
C
  600 DO 610 I=1,N
      WRITE(6,13) Y(I),PRDT(I)
  610 CONTINUE
      DO 620 I=1,N
      WRITE(6,12)  (C(I,J),J=1,M)
  620 CONTINUE
      GO TO 40
C
C        MOVE TO NEXT LOWER PRIORITY LEVEL
C
  790 L1= L1+1
      GO TO 32
C
C        WRITE FINAL RESULTS
C
  800 WRITE(6,1014) ITER
      WRITE(6,1015)
 1015 FORMAT(1H1)
 1014 FORMAT(10X,'ITERATIONS.............',I5)
      WRITE(6,5000)
 5000 FORMAT(55X,'THE SIMPLEX SOLUTION',25X,'PAGE 05')
      WRITE(6,5001)
```

```
 5001 FORMAT('THR RIGHT HAND SIDE ')
  801 DO 810 I=1,N
      WRITE(6,13) Y(I),PRDT(I)
  810 CONTINUE
      WRITE(6,5002)
 5002 FORMAT('THE SUBSTITUTION RATES')
  811 DO 812 I=1,N
      WRITE(6,12)  (C(I,J),J=1,M)
  812 CONTINUE
      WRITE(6,5003)
 5003 FORMAT('THE ZJ-CJ  MATRIX')
  813 DO 814 K=1,L
      WRITE(6,12)  (RVLX(K,J),J=1,M)
  814 CONTINUE
C
C        EVALUATE OBJECTIVE FUNCTION
C
      DO 820 K=1,L
      ZVAL(K)=0.
      DO 820 I=1,N
      ZVAL(K)=  ZVAL(K) + PRDT(I)*VALY(I,K)
  820 CONTINUE
      WRITE(6,5004)
 5004 FORMAT(' AN EVALUATION OF THE OBJECTIVE FUNCTION ')
      DO 821 K=1,L
      KK=L-K
      IF(TEST.EQ.1.0) GO TO 89
      KK=KK+1
   89 WRITE(6,15) KK,ZVAL(K)
  821 CONTINUE
      CALL FINISH(RHS1,PRDT,VALY,L,KPCK,Y,N,KEPT,TEST)
  830 STOP
      END
```

```
PAGE   1

// JOB T

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0008        0008        0000

V2 M11   ACTUAL 16K  CONFIG 16K

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
C
C
      SUBROUTINE START(NROWS,NVAR,NPRT,C,VALX,VALY,RHS,RHS1,KPCK,KEPT,TE
     1ST)
C
C         THE START SUROUTINE IS DESIGNED TO TAKE INFORMATION IN A SPEC-
C         IFIED FORMAT AND TRANSFORM IT INTO A SERIES OF USABLE MATRICES
C
C
      DIMENSION RHS(70)
      DIMENSION VALY(70,10)
      DIMENSION C(70,150),VALX(10,150)
      DIMENSION EQUALS(70),RVLX(10,150)
      DIMENSION KEPT(70)
      DIMENSION RHS1(70)
      REAL NEG
      REAL L
      NV=150
      NR=70
    1 FORMAT(A4,3I3)
      DATA POS,NEG/'POS ','NEG '/
      DATA DATA/'DATA'/
      DATA OBJ/'OBJ '/
      DATA PROB/'PROB'/
      DATA B /'B'/
      DATA E,G,L/'E','G','L'/
      DATA RGHT/'RGHT'/
      TEST=0.
C
C
C
C
C         READ THE PROBLEM CARD FOR THE NUMBER OF ROWS, VARIABLES, AND

C         PRIORITIES
C
   10 READ(5,1) ANAME,NROWS,NVAR,NPRT
      LISP=NPRT +1
      IF(NVAR.LE.0) GO TO 1020
      IF(NPRT.LE.0) GO TO 1020
      IF(NROWS.LE.0) GO TO 1020
      IF(ANAME.NE.PROB) GO TO 901
C
C
C         READ THE SIGN CARD
C
C         IT WILL CONTAIN ONE OF THE FOLLOWING LETTERS FOR EACH ROW
C         FOR EQUALS                     E
C         FOR LESS THAN OR EQUAL TO      L
C         FOR GREATER THAN OR EQUAL TO   G
C         FOR BOTH DEVIATIONS            B
C
```

```
C
      READ(5,11) (EQUALS(I),I=1,NROWS)
   11 FORMAT(80A1)
C
C
      NART=0
C
C       COUNT THE NUMBER OF POSITIVE SLACK VARIABLES
C
      NFLDS=0
      DO 12 I=1,NROWS
      IF(EQUALS(I).EQ.B) NFLDS=NFLDS+1
   12 IF(EQUALS(I).EQ.G) NFLDS=NFLDS+1
C
C
C         TEST FOR SIZE
C
C.....................................................................
      NSIZE= NFLDS+NROWS+NVAR
      IF(NROWS.GT.NR) GO TO 911
      IF(NSIZE.GT.NV) GO TO 911
C
C
C         CLEAR ALL MATRICES
C
C.....................................................................
      KDUD=NPRT+1
      DO 16 J=1,NSIZE
      DO 16 I=1,NROWS
      KEPT(I)=0
      IF(I.GT.KDUD) GO TO 17
      K=I
      RVLX(K,J)=0.
      VALX(K,J)=0
   17 IF(I.EQ.J)  C(I,J)=1.
      VALY(I,K)=0.
      IF(I.NE.J)  C(I,J)=0.
   16 CONTINUE
      KPCK=0
      K=KDUD
C
C
C         ADJUST THE SLACK VARIABLES AND OBJECTIVE FUNCTION TO MEET THE
C         REQUIREMENTS OF THE SIGN
C
C
         DO 13 I=1,NROWS
      IF(EQUALS(I).EQ.E) GO TO 14
      IF(EQUALS(I).EQ.G) GO TO 15
      IF(EQUALS(I).EQ.L) GO TO 13
      IF(EQUALS(I).EQ.B) GO TO 18
      GO TO 910
   14 J=I
      VALX(K,J)=1.0
      NART= NART+1
      TEST =1.
      GO TO 13
   15 KPCK= KPCK+1
      J=NROWS+KPCK
      C(I,J)=-1.
```

```
      C(I,I)=0.
      KEPT(I)=J
      J=I
      VALX(K,J)=1.
      NART= NART+1
      TEST=1.
      GO TO 13
   18 KPCK=KPCK+1
      J=KPCK+NROWS
      C(I,J)=-1.
      KEPT(I)=J
   13 CONTINUE
C
C
C          READ THE OBJECTIVE FUNCTION
C
C.......................................................................
      READ(5,21) ANAME
   19 I=0
      IF(ANAME.NE.OBJ) GO TO 920
      IF(ANAME.EQ.OBJ) GO TO 20
   20 READ(5,21) ANAME,I,M,TEMP
      IF(ANAME.EQ.DATA) GO TO 30
      IF(M.LE.0) GO TO 1022
      K=LISP-M
   21 FORMAT(A4,2I5,F16.6)
      IF(J.LE.0) GO TO 1022
      IF(K.GT.NPRT) GO TO 1024
      IF(ANAME.EQ.NEG) GO TO 26
      IF(ANAME.EQ.POS) GO TO 25
      GO TO 27
   26 J=I
      VALX(K,J)=TEMP
      GO TO 20
   25 J=KEPT(I)
      IF(KEPT(I).EQ.0) GO TO 1026
      VALX(K,J)=TEMP
      GO TO 20
   27 IF(TEMP) 926,20,926
C
C
C          READ THE DATA MATRIX IN
C
C.......................................................................
   30 READ(5,21) ANAME,I,J,TEMP
      IF(ANAME.EQ.RGHT) GO TO 40
      IF(I.LE.0) GO TO 1090
      IF(J.EQ.0) GO TO 1090
      J= KPCK+NROWS+J
      C(I,J)= TEMP
      GO TO 30
C
C
C          READ THE RIGHT HAND SIDE
C
C.......................................................................
   40 READ(5,44) (RHS(I),I=1,NROWS)
   44 FORMAT(8F10.0)
C
C
```

PAGE 4

```
C         WRITE THE ABOVE RESULTS
C
C.......................................................................
      WRITE(6,5015)
 5015 FORMAT(55X,'THE RIGHT HAND SIDE- INPUT',33X,'PAGE 01')
      DO 41 I=1,NROWS
      IF(RHS(I)) 941,42,43
   42 RHS(I)= .00001
   43 RHS1(I) = RHS(I)
      WRITE(6,1111) I,RHS(I)
 1111 FORMAT(10X,I3,2X,F15.5)
   41 CONTINUE
      WRITE(6,620)
  620 FORMAT(1H1)
      WRITE(6,5016)
 5016 FORMAT(55X,'THE SUBSTITUTION RATES- INPUT',18X,'PAGE 02')
      DO 1112 I=1,NROWS
      WRITE(6,2519) I
 2519 FORMAT(1X,'ROW',I5)
 1112 WRITE(6,1113) (C(I,J),J=1,NSIZE)
 1113 FORMAT(10F11.2)
      WRITE(6,620)
      WRITE(6,5017)
 5017 FORMAT(55X,'THE OBJECTIVE FUNCTION- INPUT',19X,'PAGE 03')
      DO 1114 K=1,NPRT
      M=LISP-K
      WRITE(6,2150) M
 2150 FORMAT(' PRIORITY',I5)
 1114 WRITE(6,1113) (VALX(K,J),J=1,NSIZE)
      WRITE(6,620)
      WRITE(6,5018)
 5018 FORMAT(55X,'SUMMARY OF INPUT INFORMATION',19X,'PAGE 04')
      NVAR= NSIZE
      WRITE(6,2017) NROWS,NVAR,NPRT,NART
 2017 FORMAT(10X,'NUMBER OF ROWS..........',I5,/,10X,'NUMBER OF VARIABLES
     1.....',I5,/,10X,'NUMBER OF PRIORITIES...',I5,/,10X,'ADDEDPRIORITIES
     2........',I5)
      IF(NART.GT.0) NPRT= NPRT+1
      RETURN
  910 WRITE(6,914)
  914 FORMAT(' PROGRAM CONTAIN AN ERROR EITHER IN THE NUMBER OF ROWS PUN
     1CHED OR IN THE SIGN CARD. THE VALUE IS SOMETHING OTHER THAN  E , G
     2 , B ,OR L ')
      GO TO 999
 1090 WRITE(6,1091)
 1091 FORMAT('   IMPROPER DATA COLUMN OR ROW DEFINITION ')
      GO TO 999
  920 WRITE(6,921)
  921 FORMAT('  AN OBJECTIVE CARD WITH THE VALUE',F16.3,'
     1S FOUND BUT INSTRUCTIONS AS TO WHICH DEVIATION HAS BEEN NEGLETED.
     2EXAMINE YOUR DATA')
      GO TO 999
 1020 WRITE(6,1021)
 1021 FORMAT('   NUMBER OF ROWS, VARIABLES, OR PRIORITIES CANNOT BE EQUA
     1L TO ZERO UNDER ANY CIRCUNSTANCES')
      GO TO 999
 1022 WRITE(6,1023)
 1023 FORMAT('   COLUMN VALUE OR PRIORITY VALUE IS EQUAL TO OR LESS THAN
     1 ZERO')
      GO TO 999
```

PAGE 5

```
  911 WRITE(6,912)
  912 FORMAT('  THE NUMBER OF VARIABLES NEEDED TO COMPUTE THIS PROGRAM
     1IS TOO GREAT UNDER PRESENT DIMENSIONS.  SEE YOUR PROGRAMMER FOR AL
     2TERING THIS RESTRICTION TO MEET YOUR NEEDS')
      GO TO 999
 1026 WRITE(6,1027)
 1027 FORMAT('  ATTEMPT IS MADE TO MINIMIZE NON EXISTANT POSITIVE  DEVIA
     1TION')
      GO TO 999
 1024 WRITE(6,1025)
 1025 FORMAT('  OBJECTIVE FUNCTION PRIORITY EXCEEDS STATED NUMBER OF PRI
     1ORITIES')
      GO TO 999
  901 WRITE(6,902)
  902 FORMAT(' PROBLEM CARD MISSING OR MISPUNCHED')
      GO TO 999
  926 WRITE(6,927)
  927 FORMAT('  A CARD IN THE OBJECTIVE SECTION DEFINED SOME VALUE FOR T
     1HE OBJECTIVE FUNCTION BUT FAILED TO DEFINE WHETHER THIS WAS TO  AP
     2PLY TO THE POSITIVE OR NEGATIVE DEVIATION')
  941 WRITE(6,942)
  942 FORMAT('  NEGATIVE VALUES ARE NOT ALLOWED ON THE RIGHT HAND SIDE.
     1 CORRET PROBLEM BY MULTIPLYING ENTIRE CONSTRAINT THROUGH BY MINUS
     2ONE.')
      GO TO 999
  999 STOP
      END
```

```
PAGE   1

// JOB T

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0008        0008        0000

V2 M11   ACTUAL 16K  CONFIG 16K

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
C
C
C
C
C
      SUBROUTINE FINISH(RHS1,RHS,VALY,NPRT,KPCK,Y,NROWS,KEPT,TEST)
      REAL NEGSLK
      DIMENSION VALY(70,10)
      DIMENSION ZVAL(10)
      DIMENSION RHS(70)
      DIMENSION KEPT(70)
      DIMENSION Y(70),RHS1(70)
C
C
C         RHS1 IS THE RESERVED VECTOR OF RHS VALUES FROM THE BEGINNINGC
C         THE ENDING RHS ARE THE SUBTRACTED FROM THE BEGINNING ONES
C         AND THE RESULTS IS PLACED INTO THE APPROPRIATE SLACK COLUMN.
C         THE REMAINDER OF THE VALUES ARE PRINTED ON PAGE TWO OF THE RE-
C         SULTS .
C
C
C
C         SLACK VARIABLES
C
      WRITE(6,21)
   21 FORMAT(1H1,120X,'PAGE 06'//,50X,'SLACK ANALYSIS')
    1 FORMAT(////)
      WRITE(6,1)
      WRITE(6,8)
    8 FORMAT(10X,'ROW',6X,'AVAILABLE',12X,'POS-SLK',12X,'NEG-SLK')
      WRITE(6,1)
      DO 19 I=1,NROWS
      NEGSLK=0.0
      POSSLK=0.0
      DO 11 J=1,NROWS
      M= Y(J)
      IF(I-M) 9,10,9
    9 IF(M-KEPT(I))  11,12,11
   11 CONTINUE
      GO TO 13
   10 NEGSLK= RHS(J)
      GO TO 13
   12 POSSLK=RHS(J)
   13 WRITE(6,14) I,RHS1(I),POSSLK,NEGSLK
   14 FORMAT(10X,I3,3F20.5)
   19 CONTINUE
   43 FORMAT(10X,I3,3X,F15.5)
C
C
C         VARIABLE AMOUNTS .
C
      WRITE(6,44)
```

```
PAGE   2
   44 FORMAT(1H1,120X,'PAGE 07'//,50X,'VARIABLE ANALYSIS')
      WRITE(6,45)
   45 FORMAT(////,7X,'VARABLE        AMOUNT',//)
      DO 41 I=1,NROWS
      NCHCK= Y(I)-KPCK-NROWS
      IF(NCHCK) 41,41,42
   42 WRITE(6,43) NCHCK,RHS(I)
   41 CONTINUE
      WRITE(6,72)
   72 FORMAT(1H1)
      WRITE(6,50)
   50 FORMAT(//,55X,'ANALYSIS OF THE OBJECTIVE',23X,'PAGE 08',////,50X,'
     1PRIORITY',10X,'UNDER-ACHIEVEMENT',/)
      DO 52 K=1,NPRT
      ZVAL(K)=0.0
      DO 51 I=1,NROWS
   51 ZVAL(K)=ZVAL(K)+ VALY(I,K)*RHS(I)
      LISP= NPRT+1
      KK= LISP-K
      IF(TEST.EQ.0) GO TO 52
      KK= NPRT-K
      IF(KK.GT.0) GO TO 52
      WRITE(6,78) ZVAL(K)
   78 FORMAT(/,45X,'ARTIFICIAL',5X,F20.5)
      GO TO 77
   52 WRITE(6,53) KK,ZVAL(K)
   53 FORMAT(1H0,52X,I2,5X,F20.5)
   77 CONTINUE
      STOP
      END
```

APÊNDICE 2

PROGRAMAÇÃO POR OBJETIVOS ITERATIVA

Uma extensão interessante do G.P. é o de promover a entrada de informações pessoais do decisor no modelo matemático. Neste aspecto se mostram de grande valia os conceitos fundamentais de Função Utilidade.

Propõe-se, neste capítulo, que ao invés de trabalhar com um vetor de metas, que tem uma certa média e uma variância em uma distribuição normal, tal como foi estudado em capítulos anteriores, que se trabalhe com a curva utilidade, tal como foi discutido por James S. Dyer [9].

5.1 - Relação entre minimizar desvios e maximizar a função utilidade.

Supor a seguinte formulação de G.P., tal como foi vista, em termos matriciais, no capítulo 2.

$$\text{Min } (Pz^+ + Pz^-)$$

$$\text{s.a. } RX - Iz^+ + Iz^- = Y^*$$

$$BX \leq h$$

$$x_i,\ z_i^+,\ z_i^- \geq 0$$

Por outro lado, pela noção de função utilidade, admite-se a existência de $U(Y)$ com a seguinte propriedade:

$$0 = U(Y_1) > U(Y_2) > U(Y_3) \ldots > U(Y_n) = 1$$

ou seja, admite-se que exista uma ordem de preferência (utiles ou brits) pelos diferentes valores de Y . Esta ordem de preferência deve ser determinada a partir de informações prestadas pelo decisor que, admite-se, seja racional e coerente [11]. Na verda de, o que se dispõe agora é uma curva utilidade $y_1 \cdot U(y_i)$ para cada restrição do problema.

Pode-se supor que a função utilidade do decisor seja monotonicamente crescente, em outras palavras, $U'(Y) \geqq 0$. Sabe-se que uma função utilidade deste tipo pode ser aproximada pelo polinômio de Taylor,

$$U(Y) = a + bY + cY^2 + dY^3 + \ldots$$

onde Y é um vetor n-dimensional.

Todavia, este estudo restringe-se até o segundo momento, pois a distribuição do vetor Y será considerada somente quanto a média e a variância. Neste caso,

$$U(Y) = a + bY + cY^2$$

O valor esperado desta função será:

$$E(U(Y)) = E(a)+E(bY)+E(cY^2)$$

Sabe-se, no entanto, que:

$$E(Y) = Y^*$$

$$E(Y^2) = Y^{*2} + \sigma^2$$

onde σ^2 é a variância com relação ao valor esperado.

Assim, chega-se finalmente a:

$$E(U(Y)) = a + bY^* + cY^{*2} + c\sigma^2 .$$

Uma vez que as parcelas a; bY^* e cY^{*2} são constantes, as possíveis variações no valor esperado da utilidade do vetor Y dependerá unicamente da variância do mesmo.

Pressupondo a existência de ∞ vetores Y, como por exemplo no caso de, num mesmo problema, se fazerem várias iterações, pode-se escrever que:

$$E(U(Y_1)) = a + bY^* + cY^{*2} + c\sigma_1^2$$

$$E(U(Y_2)) = a + bY^* + cY^{*2} + c\sigma_2^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E(U(Y_\infty)) = a + bY^* + cY^{*2} + c\sigma_\infty^2 \ .$$

Pode-se dispor estas equações de tal modo que,

$$E(U(Y_1)) > E(U(Y_2)) \ldots > E(U(Y_\infty)) \quad ,$$

mas dado que as parcelas $a+bY^*+cY^{*2}$ são constantes, decorre que:

$$c\sigma_1^2 < c\sigma_2^2 \ldots < c\sigma_\infty^2$$

Entre várias opções que diferem unicamente quanto ao termo da variância em relação a média, é óbvio, que um decisor conservador preferirá a de menor variância, ou seja,

se $E(U(Y_1)) > E(U(Y_2))$, sai que

$$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

Levando este raciocínio para o conjunto de opções, se tem finalmente que:

$$\sigma_1^2 < \sigma_2^2 < \sigma_3^2 \ldots < \sigma_\infty^2 \quad ,$$

o que só será possível se $c < 0$.

Assim se comprova que existe uma perfeita correspondência em

$$\text{Min } (Pz^+ + Pz^-) \quad \text{e} \quad \text{Max } U(Y) \ .$$

Pode-se dar uma interpretação geométrica para o que ficou assentado. Seja, para isto, a função utilidade

$$U(Y) = a + bY + cY^2 = a + bY - K^2Y^2 \quad ,$$

onde K é um número real, o que assegura que o termo $(-K^2Y^2)$ será sempre negativo.

$$U(Y) = -K^2(Y^2-(b/K^2)\ Y-a/K^2) \quad ,$$

o que sempre se pode fazer como:

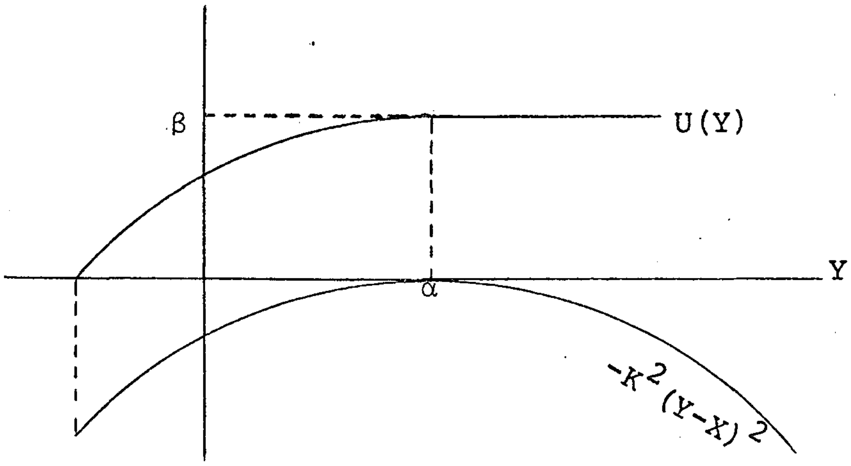
$$U(Y) = -K^2(Y-\alpha)^2 + \beta \ ,$$

onde,

$$\beta = K^2\alpha^2 - a \quad , \quad e \quad \alpha = b/2K^2$$

Assim se tem:

$$\left.\begin{array}{lll} -2K(Y-\alpha) & \text{para} & \alpha > Y \\ 0 & \text{para} & = Y \end{array}\right\} U'(Y)$$



5.2 - Formulação do G.P. Unilateral

O decisor deverá apresentar uma região de aceitação para cada y_i , componente do vetor Y, tal como foi feito no capítulo 3, quando se propôs um valor médio e uma variação, só que, neste caso, ao invés de pensar em variância o decisor deve especificar um peso P_i associado com cada desvio do valor de y_i. Desta forma cada restrição terá uma preferência relativa às restantes. Supõe-se, por outro lado, que a preferência do decisor é não decrescente.

James S. Dyer sugere que se utilize um algorítmo iterativo de G.P., e isto se faz induzindo a formulação para o caso unilateral:

$$\text{Min } P(z^-)$$
$$\text{s.a. } RX - Iz^+ + Iz^- = Y$$
$$z^+,\ z^-,\ x_i \geq 0$$

Logo:

$$Iz^- = Y - RX + Iz^+ \quad , \quad e$$

$$\text{Min } P(-RX+Iz^+) \rightarrow \text{Max } P(RX-iz^+)$$

Introduzindo $-Iz_1^- + Iz_1^+ \triangleq RX$, e substituindo Iz^+ por Iz_2^+, tem-se que:

$$\text{Max } P(Iz_1^+ - Iz_1^- - Iz_2^+)$$
$$\text{s.a. } RX - Iz_1^+ + Iz_1^- = 0$$
$$RX - Iz_2^+ + Iz_2^- = Y$$
$$z_1^+,\ z_1^-,\ z_2^+,\ z_2^- \geq 0 \qquad (34)$$

Esta formulação unilateral de G.P. é equivalente a aproximação linear de uma função utilidade separável aditiva,pois se depreende claramente que a função objetiva expressa em (34) é a soma de r funções lineares côncavas.

Assim o problema pode ser resolvido com o auxílio do algorítmo de Frank-Wolfe.

Ijiri sugere que a escolha de P_i seja feita da seguinte forma:

$$P_i = 1/(\Delta f_i) = 1/(\partial f_j/\partial f_i) = \partial f_i/\partial f_j \cong$$
$$\cong (\partial U/\partial f_i) \ / \ (\partial U/\partial f_j) \quad ,$$

desde que U seja diferenciável, e onde

$$f_i = r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \ldots + r_{im}x_m \quad , \quad i = 1,2,\ldots r$$

5.2 - Algorítmo de G.P. Unilateral

Etapa 1

Determinar os objetivos y_i (valor esperado), para cada restrição, junto ao decisor. Cada y_i deve ser escolhido de modo que:

$$\partial U/\partial f_i = 0 \quad \text{para} \quad f_i \text{ e } b_i \, , \quad i = 1, \ldots, r$$

isto é, escolher o b_i de tal forma que sua utilidade seja máxima, em outras palavras, y_i é escolhido assim que, a partir dele, não há mais satisfação em aumentá-lo mas há um decréscimo de satisfação ao diminuí-lo.

Etapa 2

Escolher um vetor arbitrário $X^k \varepsilon X$ que satisfaça todas das restrições. Calcular $f^k(X)^k$, onde k representa o número da iteração.

Etapa 3

Se houver à disposição uma curva função utilidade para cada restrição, este cálculo é imediato. Mas como isto , quase sempre, implica em impossibilidade prática, se procede da seguinte forma:

Tem-se $(f_1, \ldots f_i \ldots f_r)$, dá-se um incremento Δf_i ao f_i , e assim passaremos a $(f_1, \ldots f_i+\Delta f_i, \ldots f_r)$ e se verifica em quanto este aumento influencia as outras restrições. O decisor dispõe então subsídios para esta escolha.

Etapa 4

Deve-se resolver o problema unilateral de G.P.. Supõe-se que $P^k z$ seja continuamente diferenciável e, como decorrência, que seja uma função contínua.

$$\text{Min } P^k z$$

$$\text{s.a. } f(X^*)^k + z \geq Y$$

$$Y \geq 0$$

Como a ordem de prioridades da iteração K foi fixada na etapa 3, o G.P. dará uma solução ótima X^{*k} de acordo com ela.

Antes de estudar o próximo passo, convém apresentar umas considerações teóricas.

A chamada derivada direcional de U(f(X)), no ponto X, ao longo da direção $d_1, d_2, \ldots, d_n$ é definida pelo valor limite de:

$$\frac{Uf(x_1+hd_1, \ldots, x_n+hd_n) - Uf(x_1, \ldots, x_n)}{h\left(\sum_{j=1}^{n} (d_j)^2\right)^{1/2}}$$

assim que h se aproxima de zero por valores positivos. Dado as condições de continuidade, este limite se iguala a

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} (\partial f(U) / \partial X_j) d_j}{\left(\sum_{j=1}^{n} (d_j)^2\right)^{1/2}}$$

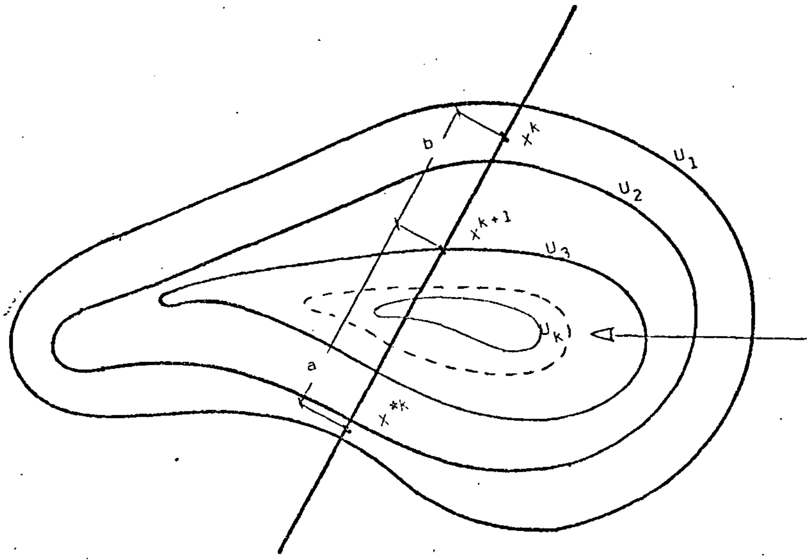
Se d_j for normalizado de modo que o denominador seja igual a 1, o valor da direção derivativa é maximizado para d_j, que é proporcional a $\partial f(U)/\partial x_j$. Em outras palavras, a taxa de aumento de U(X) por unidade da distância Euclidiana é maior para o gradiente nesta direção.

U aumenta no sentido indicado pela seta da figura abaixo. É necessário salientar que este gráfico vale para somente uma iteração.

Faz-se $d^k = X^{*k} - X^k$.

d_j^k, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, representa a direção da iteração.

Interpretação geométrica



Etapa 5

Com auxílio do decisor determina-se uma aproximação do tamanho do próximo passo, expresso por $0 = t = 1$, que maximize

$$U(f(X^k + td^k))$$

Geometricamente, $t = a/b$. Conhece-se X^k e X^{*k} mas não se sabe se X^{*k} representa o ponto ótimo; então raciocina-se com a reta $(X^k.X^{*k})$. Neste caso se pode, por derivação, encontrar o ponto ótimo sobre êste segmento de reta, que será o ponto de maior utilidade desta iteração. Este ponto será denominado de X^{k+1}. Caso $t=1$ o ponto X^{*k} já é o ponto ótimo, ou aquele que apresenta a maior utilidade da função.

Etapa 6

Se $U(f(X^k + t^k d^k)) = U(f^k)$, termina-se o procedimento, caso contrário toma-se $X^{k+1} = X^k + t^k d^k$ e segue-se para a etapa 3, para uma nova escolha de prioridades.