

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA E
ENGENHARIA DE ALIMENTOS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
QUÍMICA**

Rafael Donca

**MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO DA
TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA ATRAVÉS DE UM
MEIO POROSO TÊXTIL**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Química - PosENQ do Centro de Tecnológico da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Química.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Selene Maria de Arruda Guelli Ulson de Souza.

Coorientadores: Prof. Dr. Antônio Augusto Ulson de Souza e Prof. Dr. Erasmo Mancusi

Florianópolis
2013

Rafael Donca

**MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO DA
TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA ATRAVÉS UM MEIO
POROSO TÊXTIL**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Química, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química do Centro Tecnológico da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 13 de junho de 2013.

Prof. Ricardo Antonio Francisco Machado, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof.^a Selene Maria Arruda Guelli Ulson de Souza, Dr.^a
Orientadora

Prof. Antônio Augusto Ulson de Souza, Dr.
Coorientador

Prof. Erasmo Mancusi, Dr.
Coorientador

Prof.^a Alcilene Rodrigues Monteiro Fritz, Dr.^a

Prof.^a Débora de Oliveira, Dr.^a

Prof.^a. Cíntia Soares, Dr.^a

Aos meus pais, minha avó e minha irmã. A vocês, meus preciosos tesouros, dedico este trabalho e também meu amor.

AGRADECIMENTOS

O caminho percorrido até aqui, através desta experiência acadêmica, não foi um caminho solitário. Teria sido impossível ter dado certos passos sem os conselhos e as amizades pelas quais fui abençoado neste período de dedicação em busca da realização pessoal que este trabalho representa.

Durante esta estrada, na minha condição de indivíduo imperfeito, eu assisti – de forma que pouco pude interferir – minha vida pessoal se misturar e se confundir com minhas obrigações acadêmicas. Durante esta estrada eu sofri perdas irreparáveis, sofri com dúvidas e medos, e em alguns momentos fui derrotado por minhas próprias fraquezas. Às pessoas que acenderam as luzes nos momentos de escuridão, desejo agora agradecer.

Eu quero um dia poder dispor de um modo pelo qual eu possa realmente expor – e não apenas sugerir – para estas pessoas o quanto sou grato. Mas enquanto não posso inventar novas sílabas, esculpir novas palavras e cantar novos fonemas, eu escrevo aqui com o que eu tenho: muito obrigado.

Muito obrigado ao meu pai Carlos e à minha mãe Maria. Minha irmã Rosana e minha avó Dulcinea. Vocês, amada família, pela qual nunca precisei chamar – pois estavam sempre ao meu lado – muito obrigado por tudo.

Muito obrigado à professora Selene Maria Arruda Guelli Ulson de Souza, ao professor Antônio Augusto Ulson de Souza e ao professor Erasmo Mancusi, pela orientação neste trabalho, sem a qual ele jamais teria sido concluído, e pela oportunidade de fazer parte do grupo LABSIN/LABMASSA. Aos companheiros deste grupo de excelência, também desejo agradecer por toda a ajuda e companheirismo ao longo deste estudo.

Muito obrigado à secretária do PosENQ, em especial ao Edevilson, que sempre esteve disposto a ajudar com paciência e muito profissionalismo.

Muito obrigado ao CNPq pelo apoio financeiro que viabilizou o desenvolvimento e conclusão desta pesquisa.

Muito obrigado à minha amiga Leila Cipriani, cujo companheirismo, amizade e carinho foram minhas forças em muitos desafios, assim como foi no início desta jornada. Muito obrigado a você e a toda a sua família.

Muito obrigado aos meus companheiros e amigos de sempre e pra sempre, por essa amizade que não se compra, que não se vende e

nem se destrói. Um obrigado especial meu amigo Pablo por toda ajuda que precisei durante este período.

Muito obrigado à minha companheira Djulia e sua família, pela torcida sincera, pela paciência, por manterem a calma e me manterem calmo, pelos conselhos e pelo valioso otimismo que me deu fôlego quando precisei.

A todos que, de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, embora não citados aqui, muito obrigado.

E eu agradeço a Deus pela oportunidade de ter pessoas tão especiais em minha vida, por que com as quais, como se de pé sobre os ombros de gigantes, posso enxergar mais longe.

Muito obrigado a todos.

Seu futuro não é este ou aquele, o dinheiro ou o poder, o conhecimento ou o sucesso profissional. Seu futuro, seu caminho difícil e perigoso, é amadurecer.

(Hermann Hesse)

RESUMO

O conforto térmico entre o corpo humano e o meio ambiente depende da capacidade de dissipação de calor entre o corpo humano e o ambiente externo, através da vestimenta. A transferência de calor, no entanto, está intimamente relacionada às propriedades físicas do tecido, e depende também da transferência de vapor d'água – isto é, umidade – através do material têxtil, levando em conta seus fenômenos de mudança de fase. Este estudo aplica um modelo matemático para simular a transferência de calor e massa através de um domínio de cálculo composto por tecido de isolamento poroso revestido por um tecido de isolamento, e discute a evolução dos perfis de temperatura, umidade relativa e teor total de água absorvido ao longo do tempo, para uma condição de clima típica de inverno na cidade de Florianópolis-SC. Os resultados indicam que uma espessura de três centímetros de tecido de isolamento poroso é eficaz em proteger a pele humana das condições externas desconfortáveis, e que o mecanismo convectivo de transporte é importante não só no início, mas sim em todos os instantes do processo de transferência de calor e massa, apesar dos valores de velocidade do vapor da água decaírem com o tempo. Também se conclui que a resistência à transferência de calor e massa imposta pelo tecido de revestimento que envolve o domínio de cálculo é também importante para atenuar os efeitos das condições desconfortáveis do ambiente externo.

Palavras-chave: Conforto térmico, tecido, transferência de calor e umidade, modelo matemático, simulação.

ABSTRACT

The thermal comfort between the human body and the environment depends on heat dissipation capacity from the body for the external environment. The heat transfer, however, is deeply related to the physical properties of the fabric and also depends on the mass transfer through the fabric, taking in account the phase change phenomena. This study applies a mathematical model to simulate the heat and mass transfer through a domain of calculus made of isolation porous fabric which is involved by a thin layer of a coater fabric, and discuss the evolution of temperature, relative humidity and water content profiles, through time, for a typical climate condition of a winter day in the city of Florianopolis-SC. The results show that a thickness of three centimeters of isolation fabric is effective to protect the human skin from the uncomfortable conditions of the external environment. The results also show that the convective transfer mechanism is important not only in the beginning of the heat and mass transfer process, but also in the whole time, despite the velocity values decaying through the time. It can be also conclude that the heat and mass transfer resistance, imposed by the coater fabric is important to attenuate the uncomfortable effects of the external environment climate conditions.

Keywords: Thermal comfort, fabric, heat and mass transfer, mathematical model, simulation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – representação esquemática do domínio de cálculo adotado.....	33
Figura 2 – comparação entre os resultados de diferentes métodos de obtenção da pressão de saturação.	40
Figura 3 – teor de água absorvido pela fibra em função da umidade relativa.	42
Figura 4 – malha unidimensional com volumes inteiros na fronteira.	48
Figura 5 – esquema da malha para a fronteira utilizando volumes fictícios.	61
Figura 6 – fluxograma do procedimento computacional para a solução do modelo matemático.....	68
Figura 7 – comparação entre os resultados obtidos para o mesmo caso simulado com diferentes configurações de malha computacional.....	70
Figura 8 – comparação os dados experimentais e os resultados obtidos por simulação utilizando o modelo matemático proposto. Perfil de teor de água total.	72
Figura 9 – umidade relativa para os dias do mês de julho do ano de 2012 (dados coletados às 18h)	74
Figura 10 – temperatura para os dias do mês de julho do ano de 2012 para a cidade de Florianópolis-SC.....	74
Figura 11 – perfil de temperatura obtido para os trinta primeiros minutos de situação física simulada.	76
Figura 12 – comparação os resultados de uma situação apresentando resistência à transferência de calor e massa e uma situação sem resistência à transferência de calor e massa. Tempo de 2 horas de situação física simulada.	78
Figura 13 – perfil de temperatura obtido para 30 min, 1 h, 1,5 h e 2 h de situação física simulada.	79
Figura 14 – perfil de velocidade no domínio de cálculo para os instantes iniciais da situação física simulada.	80
Figura 15 – perfil de velocidade no domínio de cálculo para até duas horas de situação física simulada.	80
Figura 16 – evolução do parâmetro α ao longo do tempo.....	81
Figura 17 – evolução do parâmetro β ao longo do tempo.	82
Figura 18 – comparação entre os parâmetros α e β para 1 minuto de situação física simulada.	83
Figura 19 – comparação entre os perfis de temperatura para simulação abrangendo todos os mecanismos de transporte e uma simulação sem a presença do mecanismo de convecção. Tempo de 2 h de simulação da situação física real.	84
Figura 20 – evolução do perfil de concentração de vapor d’água para os primeiros 30 minutos de simulação da situação física real.	85
Figura 21 – perfil do teor de água absorvido pela fibra do tecido de isolamento do domínio de cálculo.....	86
Figura 22 – perfil de umidade relativa para os tempos iniciais de simulação da situação física.	87

Figura 23 – perfil de umidade relativa do ar para até 2 horas de simulação da situação real.....	88
Figura 24 – perfil do teor de água livre para até 2 horas de simulação da situação real.....	88
Figura 25 – perfil do teor de água total para até 30 minutos de simulação da situação física.....	89
Figura 26 – perfil de teor de água total para até 2 horas de simulação da situação física.....	90

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – parâmetros da equação de <i>Antoine</i> para a água pura.	39
Tabela 2 – diferentes malhas computacionais utilizadas.	70
Tabela 3 - condições de contorno e condições iniciais de umidade relativa e temperatura utilizadas na execução do experimento e na simulação a ser comparada.	71
Tabela 4 – condições de contorno e condições iniciais de umidade relativa e temperatura utilizadas na simulação.	75
Tabela 5 – valores dos parâmetros utilizados na simulação.	75

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado	Unidades utilizadas
C_f	Concentração de vapor d'água na superfície da fibra	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
$C_{v_{mi}}$	Concentração inicial de vapor d'água no domínio de cálculo	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
C_v	Concentração de vapor d'água no domínio de cálculo	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
$C_{v_{bi}}$	Concentração de vapor d'água nas fronteiras. ($i = 0$ para superfície do corpo humano, $i = L$ para o ar ambiente)	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
C_{sv}	Capacidade calorífica volumétrica do sistema ar-água-fibra	$\text{J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$
C_{va}	Capacidade calorífica volumétrica do ar seco	$\text{J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$
C_{vf}	Capacidade calorífica volumétrica da fibra	$\text{J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$
C_{vw}	Capacidade calorífica volumétrica do vapor de água	$\text{J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$
C_{vw}	Capacidade calorífica volumétrica da água	$\text{J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$
D_a	Coefficiente de difusão do vapor d'água no ar	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
D_f	Coefficiente de difusão do vapor d'água na fibra	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
E	Coefficiente de evaporação ou condensação, $E = 5.0\text{e-}3$	-
F_L	Incidência térmica radiativa total pela esquerda	$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$
F_R	Incidência térmica radiativa total pela direita	$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$
h_c	Coefficiente convectivo de transferência de massa	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
h_t	Coefficiente convectivo de transferência térmica	$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
k	Condutividade térmica do sistema ar-água-fibra	$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

k_a	Condutividade térmica do ar	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
k_f	Condutividade térmica da fibra	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
k_w	Condutividade térmica da água	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
M	Massa molecular da água	$kg \cdot kmol^{-1}$
Pe	Número de Peclet	-
P	Pressão total no domínio de cálculo	Pa
P_{ar}	Pressão parcial do ar	Pa
P_c	Pressão no ponto crítico	Pa
P_{sat}	Pressão de saturação do vapor d'água	Pa
P_v	Pressão parcial do vapor d'água	Pa
r_i	Resistência à transferência de calor dos revestimentos interno e externo. ($i = 0$ para interno; $i = L$ para externo)	$K \cdot m^2 \cdot W^{-1}$
R	Constante universal dos gases	$J \cdot kmol^{-1} \cdot K^{-1}$
R_f	Raio da fibra	m
RH	Umidade relativa no domínio de cálculo	-
RH_{bi}	Umidade relativa das fronteiras ($i = 0$ para superfície do corpo humano, $i = L$ para o ambiente externo)	-
RH_{ini}	Umidade relativa inicial no domínio de cálculo	-
S	Termo fonte da equação da conservação da energia	$W \cdot m^{-3}$
T	Temperatura no domínio de cálculo	K
T_b	Temperatura de ebulição a 1 atm	K
T_c	Temperatura no ponto crítico	K
T_{bi}	Temperatura das fronteiras. ($i = 0$ para superfície do corpo)	K

	humano, $i = L$ para o ambiente externo)	
T_{br}	Temperatura de ebulição reduzida	-
T_{ini}	Temperatura inicial no domínio de cálculo	K
T_r	Temperatura reduzida	-
u	Velocidade do vapor d'água	$m \cdot s^{-1}$
W	Teor de água total	-
\tilde{W}	Teor de água livre	-
W_f	Teor de água absorvida pela fibra	-
w_i	Resistência ao vapor d'água ($i = 0$ revestimento interno, $i = L$ revestimento externo)	$s \cdot m^{-1}$
$\frac{k_x}{\mu}$	Coefficiente da lei de Darcy para a velocidade	$m^2 \cdot Pa^{-1} \cdot s^{-1}$

Símbolos gregos:

α_i	Coefficiente de peso entre advecção e difusão do esquema de interpolação espacial WUDS	-
β_i	Coefficiente de peso entre advecção e difusão do esquema de interpolação espacial WUDS	-
β_r	Constante de sorção radiativa da fibra	m^{-1}
λ	Calor latente de mudança de fase da umidade no domínio de cálculo	$J \cdot kg^{-1}$
ζ_i	Emissividade da superfície ($i = 1$ revestimento interno, $i = 2$ revestimento externo)	-
δ'	Porosidade do tecido seco	-
δ	Porosidade do tecido molhado	-
τ	Tortuosidade efetiva das fibras do tecido	-
ρ	Massa específica da fibra	$Kg \cdot m^{-3}$

ρ_c	Massa específica do vapor d'água	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
ρ_w	Massa específica da água líquida	$\text{Kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Γ	Taxa total de mudança de fase e absorção no domínio de cálculo	$\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$
Γ_{CE}	Taxa de condensação, congelamento ou evaporação de água por unidade de volume	$\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$
Γ_s	Taxa de absorção de vapor d'água pela fibra por unidade de volume	$\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$
Γ^ϕ	Termo da equação do número de Peclet ($\phi = T$ para a equação da energia e $\phi = C_v$ para a equação da conservação da massa)	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
σ	Constante de Boltzmann	$\text{W}\cdot\text{K}^{-4}\cdot\text{m}^{-2}$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	27
1.1 OBJETIVOS.....	29
1.1.1 Objetivo Geral	29
1.1.2 Objetivos Específicos	29
2 REFERÊNCIAL TEÓRICO	30
2.1 VESTUÁRIO.....	31
2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA EM TECIDOS.	32
2.2.1 Modelo matemático considerado	32
2.2.1.1 Domínio de cálculo considerado.	33
2.2.1.2 Equação de conservação da energia.	35
2.2.1.3 Equação da conservação da espécie química	43
2.2.1.4 Condições de contorno.....	43
3 TRATAMENTO DO MODELO MATEMÁTICO	46
3.1 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MODELO MATEMÁTICO	48
3.1.1 Discretização da equação da conservação da energia	49
3.1.1.1 Tratamento do termo fonte da equação da conservação da energia.....	55
3.1.2 Discretização da equação da conservação da espécie química	59
3.1.3 Discretização das condições de contorno.	60
3.1.3.1 Discretização das condições de contorno para a equação da conservação da energia.	61
3.1.3.2 Discretização das condições de contorno para a equação da conservação da espécie química	63
3.1.4 Discretização da equação da velocidade.....	64
3.1.5 Discretização da equação do teor de água livre no domínio de cálculo	64
4 SOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR DE EQUAÇÕES	65

4.1 MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL	65
4.3 CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO	66
4.2 PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO	67
5 RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	69
5.1 DEFINIÇÃO DA MALHA COMPUTACIONAL UTILIZADA	70
5.2 COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO MATEMÁTICO E OS DADOS EXPERIMENTAIS	71
5.3 RESULTADOS OBTIDOS PARA CONDIÇÕES TÍPICAS DO INVERNO NA REGIÃO DE FLORIANÓPOLIS/SC	73
5.3.1 Discussão dos resultados obtidos.....	76
6 CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	91
REFERÊNCIAS	93

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas tem-se assistido a uma crescente demanda por qualidade dos bens de consumo, desde os mais simples como utensílios de cozinha, até os mais elaborados como computadores e automóveis. A ascendente posição de exigência do consumidor, aliada com a facilidade em obter informações e os avanços tecnológicos acabam por forçar a indústria a buscar inovações que possam não apenas satisfazer os desejos imediatos do consumidor, mas também se anteciparem a eles. (FILGUEIRAS, 2008).

Em se tratando do vestuário, este cenário de exigência é bastante presente. Os gostos e costumes das pessoas têm mudado com uma frequência cada vez maior e aquilo que se fere como *comfortable wear* e *casual wear* vêm hoje como estilos muito presentes (NEVES e CUNHA, 2004). E desta forma, o setor Têxtil não pode ficar alheio a esta realidade, tendo continuamente procurado conceber produtos que possam satisfazer e até ultrapassar as expectativas do mercado atual.

Um conceito importante ao considerar na confecção de novos produtos é a funcionalidade. Hoje um produto de vestuário apenas estético deixa em branco um espaço que poderia e deveria ser preenchido com tecnologia a serviço do conforto, aspecto este que é uma das preocupações mais presentes em termos da demanda moderna de vestuário. (FILGUEIRAS, 2008; NEVES e CUNHA, 2004; CORREIA, 2005)

O conceito de conforto, no entanto, ganha muitas definições de acordo com a literatura. BROEGA e SILVA (2010) apresentam uma definição de conforto como sendo um “estado agradável de harmonia fisiológica, psicológica, e física entre o ser humano e o ambiente”. Deve-se desta forma estudar o que se entende por harmonia fisiológica, psicológica e física para o ser humano.

Em termos específicos de vestuário, é aceito que o conforto total depende de quatro aspectos fundamentais, que são: Conforto sensorial de toque, Conforto Ergonômico, Conforto Psico-Estético, e por fim, o Conforto Termofisiológico. Este último indica um estado térmico e de umidade à superfície da pele confortável, e está inteiramente atrelado à transferência de calor e de vapor d’água através do material têxtil da vestimenta (BROEGA e SILVA, 2010).

O conforto Termofisiológico, ou apenas conforto térmico, é um dos aspectos mais fortes da sensação de conforto total. A definição de conforto térmico é dada por HENSEN (1991) como sendo “O estado mental que expressa satisfação com o ambiente térmico”.

Vários estudos anteriores apontam que o conforto termofisiológico é dependente do balanço térmico do corpo com o meio ambiente. E este balanço é influenciado por parâmetros ambientais, tais como temperatura do ar, umidade relativa e velocidade do vento. E por parâmetros individuais, tais como atividade metabólica, e resistência térmica da roupa – isto é, as propriedades térmicas do tecido. (HENSEN, 1991).

Além disso, a produtividade mental e o desempenho físico de uma pessoa estão fortemente ligados à sensação de conforto térmico. CORREIA (2005) comenta que quando não existe conforto térmico, começam a surgir queixas por parte das pessoas e, posteriormente, podem surgir malefícios para a saúde, além de queda da motivação e da produtividade.

Para a aplicação de ferramentas de medição de conforto térmico, é imprescindível contar com informações sobre temperatura, umidade relativa, pressão de vapor, concentração de vapor d'água, entre outras informações que podem ser obtidas por simulação das transferências de calor e vapor d'água através da vestimenta.

Assim, o conforto térmico está diretamente relacionado com os fenômenos de transferência de calor e de umidade do corpo para o ambiente, e vice versa, tendo como resistência natural entre eles a própria vestimenta.

Neste estudo, pretende-se estudar os processos de transferência de calor e vapor d'água, através de um domínio de cálculo composto por uma camada de tecido de isolamento tendo como fronteiras o corpo humano e o ambiente externo, levando em conta os fenômenos de transferência por difusão, convecção e de troca térmica por radiação, bem como considerar os fenômenos de mudança de fase no domínio de cálculo.

Para tanto, será proposto um modelo matemático para descrever a transferência de calor e umidade através de um tecido de isolamento diante de determinadas condições iniciais e de fronteira. O modelo matemático então será submetido a um tratamento numérico a fim de se obter um conjunto de equações algébricas a serem resolvidas a partir de um procedimento computacional que será desenvolvido.

Os resultados serão então analisados e discutidos com o intuito de verificar se o modelo matemático proposto pode ser considerado como uma ferramenta para predição dos perfis de temperatura, concentração de vapor d'água e teor de umidade ao longo do tecido de isolamento, podendo então contribuir com os métodos de análise do conforto térmico em outros estudos.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo geral, simular a transferência de calor e concentração de vapor d'água em um domínio de cálculo composto por tecido de isolamento, tendo como fronteiras a pele humana e o ambiente.

1.1.2 Objetivos Específicos

- obter um modelo matemático, com base na literatura, para avaliar a transferência de calor e concentração de vapor d'água em um meio poroso têxtil;
- discutir os resultados obtidos e verificar a coerência em relação aos casos reais.

2 REFERÊNCIAL TEÓRICO

2.1 VESTUÁRIO

O vestuário tem como função primária atuar como uma resistência natural entre o corpo humano e o meio ambiente (CORREIA, 2005), mantendo o corpo humano num estado térmico aceitável para uma variedade de condições ambientais.

E também, historicamente, o vestuário passou a exercer uma função de representação de estados socioeconômicos, tendo em muitos momentos da história da civilização o papel de separar classes sociais de acordo com os trajes utilizados. Os aspectos de design, cor, e costura geram o movimento de um setor que move uma grande parcela da economia mundial – o setor da moda – e que trata do conforto psicológico do indivíduo com o ambiente (BROEGA e SILVA, 2010) mas muito pouco se preocupa com o conforto térmico das pessoas.

Atualmente, além do papel de “proteção” e de moda, outro componente do vestuário tem sido alvo de atenção por parte da indústria: a sua funcionalidade. Um vestuário funcional remete-nos ao vestuário dedicado a condições especiais de clima e aplicação. Este tipo de vestuário está presente na prática de esportes – roupas especiais para natação, para corridas entre outros – como também no vestuário de proteção em indústrias nas quais o indivíduo é sujeito a tarefas em atmosferas nocivas contendo vapores químicos. Nestas condições, a vestimenta tem a função de proteger o usuário, além de garantir a máxima dissipação de calor para o ambiente externo a fim de proporcionar-lhe conforto térmico. Neste tipo de aplicação onde as condições climáticas são extremas, o problema da dissipação térmica é crítico, pois embora se possa conceber uma vestimenta que seja impermeável a vapores, ainda há o desafio de conseguir a dissipação térmica entre o corpo e o ambiente (CORREIA, 2005; FILGUEIRAS, 2008).

Sendo assim, pode-se dizer que a funcionalidade e o conforto proporcionados pelo vestuário é função das suas características físicas, ou seja, suas propriedades físicas e arranjo das fibras que compõe o tecido utilizado.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA EM TECIDOS.

Encontram-se na literatura vários modelos matemáticos que pretendem prever os processos de transferência de calor e massa em tecidos. Estes modelos podem ser mais ou menos elaborados, dependendo se levam em conta ou não todos os fenômenos envolvidos no processo de transferência de massa e de energia nos tecidos.

Estes modelos, obtidos a partir de balanços de conservação, podem se apresentar escritos para uma, duas ou até três dimensões, em sistemas de coordenadas que não somente o cartesiano. Sendo na sua maioria ainda dependentes do tempo. Alguns deles consideram o mecanismo de difusão apenas, enquanto outros, mais elaborados, consideram também os mecanismos de convecção e ainda – no caso da conservação da energia – o mecanismo radiativo. E num meio poroso e também higroscópico, a conservação da espécie química, em modelos mais apropriados é modelada levando-se em conta as mudanças de fase – evaporação, condensação e congelamento – e ainda a absorção de água pelas fibras do tecido (HANG *et al.*, 2012; LUO e XU, 2006; MOTAKEF e MAHER, 1986; TIAN *et al.*, 2012; FAN e WEN, 2002; FAN *et al.*, 2004; Li e LUO, 1998).

Existem ainda trabalhos com modelos matemáticos que simulam a transferência de espécie química e energia em meios compostos por mais de um tipo de material compondo o tecido (WU e FAN, 2008).

Estes modelos normalmente resultam em um sistema de equações diferenciais parciais que demandam uma série de outras equações algébricas auxiliares para o fechamento do problema. Uma vez que estes modelos são altamente complexos, somente em situações muito simplificadas é que se tem a possibilidade de resolver o problema de maneira analítica – no entanto estas situações fogem bastante da realidade que se deseja simular. Na maioria dos casos, portanto, a solução do modelo é feita de maneira numérica, utilizando técnicas para o tratamento das equações diferenciais de maneira que o uso de computadores é geralmente empregado.

2.2.1 Modelo matemático considerado

Neste estudo, considerou-se um modelo matemático que fosse capaz de prever o comportamento do processo de transferência de calor e massa através de um domínio de cálculo composto por um tecido de isolamento – como o forro de uma jaqueta – levando em conta tanto o

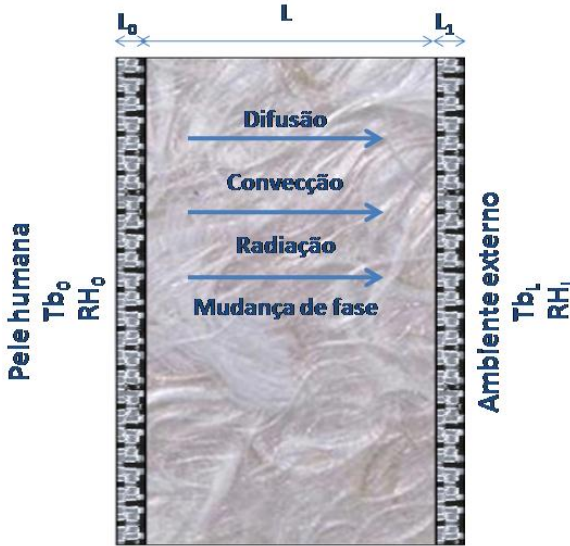
mecanismo difusivo quanto o mecanismo convectivo e ainda poder tratar dos fenômenos de mudança de fase que ocorrem no interior do domínio de cálculo, bem como incluir na modelagem o mecanismo radiativo para a transferência de calor, uma vez que o gradiente de temperatura envolvido é consideravelmente alto para que esta forma de transferência de calor tenha importância suficiente para não ser negligenciada.

2.2.1.1 Domínio de cálculo considerado.

Este modelo matemático adota um domínio de cálculo consistindo em uma camada de tecido de isolamento revestido tanto internamente quanto externamente – como uma jaqueta. Uma das faces desse domínio de cálculo fica em contato com a pele humana a uma condição de temperatura e umidade relativa definidas, enquanto que a outra face do domínio de cálculo fica em contato com o ambiente externo, também com temperatura e umidade relativa definidas. A figura abaixo mostra uma representação do domínio de cálculo adotado.

Figura 1 – representação esquemática do domínio de cálculo adotado.





Nesta representação, a camada de tecido de isolamento tem uma espessura L de 3 centímetros, enquanto que a espessura dos revestimentos, tanto interno quanto externo – L_0 e L_1 respectivamente – são da ordem de 0,1 milímetros. Na formulação do modelo matemático utilizado, são levadas em conta as seguintes simplificações (FAN *et al.*, 2004):

- a) na ocasião em que as fibras absorvem água, elas têm suas dimensões alteradas, tanto em diâmetro quanto em comprimento (MORTON e HEARLE, 2008). Neste modelo é considerado que não ocorre mudança nas dimensões da fibra;
- b) o tecido de isolamento é considerado como sendo isotrópico em toda a sua extensão, tanto em termos de arranjo das fibras quanto em propriedades físicas do material;
- c) entre todas as fases existe equilíbrio térmico – como consequência, nas regiões possivelmente congeladas, apenas a sublimação é considerada;
- d) a umidade na superfície da fibra está em equilíbrio de absorção com a umidade do ar ao redor.

2.2.1.2 Equação de conservação da energia.

Para o modelo matemático considerado, a conservação da energia se apresenta sob a forma da seguinte expressão:

$$C_{sv} \frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon u C_{vv} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S \quad \text{Eq. (1)}$$

Nesta equação de conservação, é considerado que a velocidade que dá sentido ao termo convectivo é induzida por um gradiente de pressão e, portanto, pode ser obtida pela utilização da equação de Darcy (HANG *et al.*, 2012) que se apresenta da seguinte forma:

$$u = \frac{-k_x \partial P}{\mu \partial x} \quad \text{Eq. (2)}$$

sendo P_{ar} a pressão parcial do ar e P_v a pressão parcial do vapor de água. A pressão total P é, então:

$$P = P_{ar} + P_v \quad \text{Eq. (3)}$$

Se considerarmos que a pressão parcial do ar não varia ao longo da posição, ou seja, o ar está estagnado, pode-se concordar que (FAN *et al.*, 2004):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P_v}{\partial x} \quad \text{Eq. (4)}$$

Sendo assim, pode-se escrever a lei de Darcy como sendo

$$u = \frac{-k_x \partial P_v}{\mu \partial x} \quad \text{Eq. (5)}$$

Por sua vez, a pressão parcial de vapor d'água, de acordo com HANG *et al.* (2012), pode ser obtida pela seguinte expressão:

$$P_v = \frac{RC_v T}{M} \quad \text{Eq. (6)}$$

Ainda analisando a equação Eq. (1), no que se refere à parcela difusiva do problema, a condutividade térmica efetiva utilizada no modelo é calculada como sendo uma média volumétrica que leva em conta os valores das condutividades térmicas do ar, da fibra e da água, além de ser função do teor de água total no domínio de cálculo. Este teor de água total W presente na equação para o cálculo da condutividade térmica efetiva se refere à quantidade total de água presente no domínio de cálculo, por consequência das mudanças de fase e de absorção de água pela fibra do tecido, conforme será apresentado posteriormente. Outro termo levado em conta é a porosidade da fibra molhada ε que também será apresentado posteriormente. A equação para o cálculo da condutividade térmica é:

$$k = \varepsilon k_a + (1 - \varepsilon) \left(k_f + \frac{\rho}{\rho_w} W k_w \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{\rho}{\rho_w} W \right)} \quad \text{Eq. (7)}$$

A capacidade calorífica volumétrica específica utilizada também é calculada a partir de uma média volumétrica e também leva em conta as capacidades caloríficas volumétricas do ar, da fibra e da água. A expressão que obtém a capacidade calorífica volumétrica específica utilizada no modelo é a seguinte:

$$C_{sv} = \varepsilon C_{va} + (1 - \varepsilon) \left(C_{vf} + \frac{\rho}{\rho_w} W C_{vw} \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{\rho}{\rho_w} W \right)} \quad \text{Eq. (8)}$$

A porosidade da fibra é definida como sendo a razão entre o volume de espaços vazios entre as fibras do tecido de isolamento e o volume total ocupado pelo tecido de isolamento. Esta porosidade, assomada do efeito de condensação, é calculada levando em conta o teor de água total e a porosidade da fibra seca ε' , partindo da seguinte expressão (HANG *et al.*, 2012; CHENG e FAN, 2004):

$$\varepsilon = \varepsilon' - \frac{\rho}{\rho_w} W (1 - \varepsilon') \quad \text{Eq. (9)}$$

O termo S da equação Eq. (1) é o termo fonte, que compreende os fenômenos de mudança de fase e de transferência de calor por mecanismo radiativo e é definido como sendo:

$$S = \frac{\partial F_R}{\partial x} - \frac{\partial F_L}{\partial x} + \lambda \Gamma \quad \text{Eq. (10)}$$

Na equação acima, os dois primeiros termos se referem ao mecanismo de transferência radiativo, que é tratado como demonstra FARNWORTH (1983) em seu trabalho sobre o fluxo de calor em tecidos de isolamento – e que será discutido durante a discretização do modelo matemático.

A última parcela da equação se refere às mudanças de fase e absorção de água pela fibra do tecido e pode ser expandida da seguinte forma:

$$\Gamma = \Gamma_{CE} + \Gamma_S \quad \text{Eq. (11)}$$

onde o termo Γ_{CE} é a taxa de condensação/evaporação por unidade de volume e é modelada pela equação de Hertz-Knudsen (CHENG e FAN, 2004; HANG *et al.*, 2012; FAN *et al.*, 2004)

$$\Gamma_{CE} = \frac{-2E\sqrt{(1-\varepsilon')-(1-\varepsilon)}}{R_f} \cdot \sqrt{\frac{M}{2R\pi}} \cdot \frac{(1-RH)P_{sat}}{\sqrt{T}} \quad \text{Eq. (12)}$$

Onde P_{sat} é a pressão de vapor no estado de saturação. Este é um termo importante do processo de transferência de calor e massa abordado neste estudo, pois a pressão de vapor no estado de saturação vai influenciar diretamente na umidade relativa do ar, que por sua vez influenciará a quantidade de água que será absorvida pela fibra do tecido de isolamento. Em seus trabalhos, Fan *et al.* (2000) e Hang *et al.* (2012) utilizaram expressões empíricas diferentes para o cálculo de P_{sat} , ao passo que na literatura clássica encontram-se métodos mais tradicionais para a estimativa da pressão de saturação.

O método utilizado por Fan *et al.* (2000) utiliza duas equações dependentes da temperatura, que se elegem de acordo com uma faixa de temperatura. O método reconhece a temperatura do ponto onde se deseja calcular a pressão de saturação e então escolhe a equação adequada, conforme segue:

$$P_{sat} = \begin{cases} 1013,25 \cdot e^{13.3185s - 1,976s^2 - 0,6445s^3 - 0,1299s^4} & T \leq 273,16 \\ 10^{10,5380997 - 2663,91/T} & T > 273,16 \end{cases} \quad \text{Eq. (13)}$$

$$s = T - 273,26$$

O método utilizado por Hang *et al.* (2012) tem um esquema semelhante ao utilizado por Fan *et al.* (2000), mas com faixas de temperatura e expressões diferentes, conforme segue:

$$P_{sat} = \begin{cases} 651 \cdot e^{0,072\Delta T} - 35 & T \leq 275,15 \text{ K} \\ 966 \cdot e^{0,052\Delta T} - 398 & T < 275,15 \text{ K} \end{cases} \quad \text{Eq. (14)}$$

$$\Delta T = T - 273 \text{ K}$$

Os métodos acima apresentados tiveram suas expressões obtidas a partir de dados experimentais e seus resultados têm como unidade de pressão o *Pascal*.

Uma comparação foi feita entre os métodos utilizados por Fan *et al.* (2000) e Hang *et al.* (2012) e entre dois métodos clássicos disponíveis na literatura – são eles: a equação de *Antoine* e a equação de *Gomes-Thodos* para substâncias polares.

A equação de *Antoine* é vastamente utilizada e abordada na maioria dos cursos de engenharia. É uma modificação da equação de *Clapeyron* e deve ser utilizada observando a faixa de temperatura para a qual é indicada (REID, 1987). Sua expressão tem a seguinte forma:

$$P_{sat} = \exp\left(A - \frac{B}{T + C}\right) \quad \text{Eq. (15)}$$

Onde os parâmetros A , B e C são dependentes da substância para a qual se quer calcular a pressão de saturação na temperatura T . Para a água, temos os seguintes valores para os parâmetros da equação de Antoine:

Tabela 1 – parâmetros da equação de *Antoine* para a água pura.

A	B	C
1,168E01	3,816E03	-4,613E01

FONTE: (REID, 1987)

Os parâmetros apresentados na Tabela 1 retornam um valor de pressão de saturação calculado em *bar* e então se utiliza um fator de conversão pertinente para convertê-los em *Pascal*.

A equação de *Gomes-Thodos* também é um método tradicional de obtenção da pressão de saturação para substâncias puras e utiliza as propriedades críticas e uma série de coeficientes, conforme se pode visualizar a seguir:

$$Tb_r = \frac{Tb}{Tc}$$

$$Tr = \frac{T}{Tc}$$

$$h = Tb_r \frac{\ln\left(\frac{Pc}{1,01325}\right)}{(1 - Tb_r)}$$

$$m = 0,0052M^{0,29}Tc^{0,72}$$

$$\gamma = \frac{2,246}{M} \exp(9,86e - 6MTc)$$

$$a = \frac{1 - \frac{1}{Tb_r}}{Tb_r^7 - 1}$$

$$b = \frac{1 - \frac{1}{Tb_r^m}}{Tb_r^7 - 1}$$

$$\beta = \frac{\gamma}{b} - \frac{a \cdot h}{b}$$

$$P_{sat} = Pc \cdot \exp\left(\beta \left(\frac{1}{T_r^m} - 1\right) + \gamma (T_r^7 - 1)\right)$$

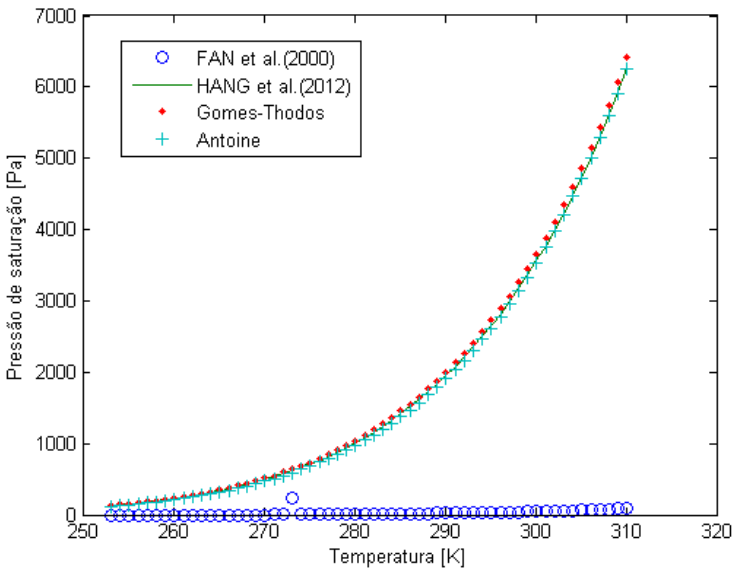
Eq. (16)

A pressão crítica P_c utilizada na equação de *Gomes-Thodos* é expressa em *bar*. Logo, a pressão de saturação obtida também será expressa em *bar* e, portanto, é necessário converter este valor para *Pascal*, multiplicando o resultado pelo fator de conversão pertinente.

Os resultados obtidos utilizando os quatro métodos acima apresentados foram comparados a fim de observar a variação entre os métodos e determinar o mais adequado para compor o modelo matemático proposto.

Dado um perfil de temperatura conhecido, variando de 310,15 K a 253,15 K. Os resultados encontrados para os diferentes métodos de determinação da pressão de saturação são:

Figura 2 – comparação entre os resultados de diferentes métodos de obtenção da pressão de saturação.



Como se pode facilmente observar, o método utilizado por Fan *et al.* (2000) apresenta resultados muito distantes da tendência apresentada pelos demais métodos analisados. Os valores obtidos pelo método utilizado por Fan *et al.* (2000) sugerem que possa haver algum equívoco nas expressões apresentadas para o método. Em contraste aos resultados obtidos pelo método utilizado por Fan *et al.* (2000), o método de Hang

et al. (2012) apresenta valores coerentes e muito semelhantes aos resultados apresentados pelos métodos mais clássicos – *Antoine* e *Gomes-Thodos*.

Optou-se pela equação de *Gomes-Thodos* como o método para obtenção da pressão de vapor d'água no estado de saturação para compor o modelo proposto. Esta equação, segundo REID (1987), obtém resultados que se aproximam mais dos resultados experimentais reportados pela literatura, em relação à equação de *Antoine*, e não demanda uma estrutura de controle *if-else* como no caso do método utilizado por *Hang et al.* (2012), o que pode eventualmente gerar uma maior demanda computacional.

A umidade relativa RH é calculada como sendo a razão entre a pressão de vapor parcial d'água P_v e a pressão de vapor d'água no seu estado de saturação P_{sat} , ambos na respectiva temperatura T :

$$RH = \frac{P_v}{P_{sat}} \quad \text{Eq. (17)}$$

O fenômeno de absorção de água pela fibra tem sua taxa por unidade de volume definida como sendo uma difusão fickiana simples em uma única fibra do tecido de isolamento. Sendo D_f a difusividade de água na fibra do tecido, R_f o raio da fibra e C_f a quantidade de água absorvida pela fibra, tem-se:

$$\Gamma_s = (1 - \varepsilon') \frac{2D_f}{R_f} \frac{\partial C_f}{\partial x} \quad \text{Eq. (18)}$$

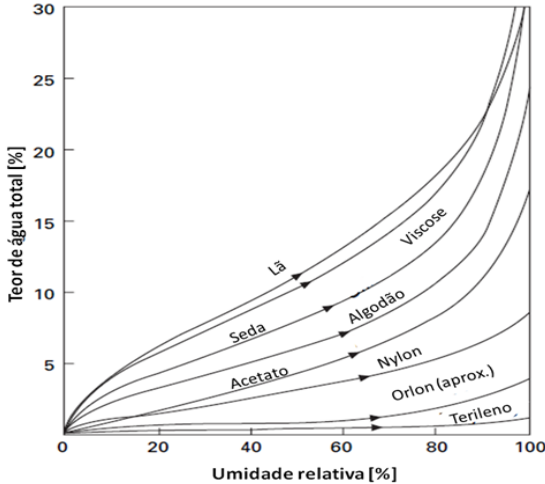
Verifica-se que a quantidade de água absorvida pela fibra C_f é função do teor de água absorvido pela fibra W_f – também denominado pela literatura como *Regain* – de acordo com a seguinte equação:

$$C_f = \rho W_f \quad \text{Eq. (19)}$$

W_f , por sua vez, é função da umidade relativa à qual a fibra está exposta. Quanto maior a umidade, maior será o teor de água absorvido pela fibra. Essa relação entre o teor de água absorvido e a umidade relativa é obtida

de maneira experimental e plotada de modo que se possa tratar os dados experimentais e obter uma equação que represente essa informação.

Figura 3 – teor de água absorvido pela fibra em função da umidade relativa.



FONTE: (MORTON e HEARLE, 2008)

Para que seja possível trabalhar mais facilmente com os dados apresentados na Figura 3, foi levantado o seguinte polinômio (com $R^2=0,991$) para expressar o teor de água absorvido pela fibra em função da umidade relativa para o tecido de isolamento composto de viscose, sendo ele:

$$W_f = 0,7085RH^3 - 0,852RH^2 + 0,4449RH - 0,0004 \quad \text{Eq. (20)}$$

No entanto, W_f é apenas o teor de água absorvido pela fibra. No domínio de cálculo também há a quantidade de água que é oriunda do processo de mudança de fase. Este teor de água livre, como é chamado, é representado por \tilde{W} e é calculado pela seguinte equação (HANG *et al.*, 2012):

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(1-\varepsilon')\tilde{W}] = \Gamma_{CE} \quad \text{Eq. (21)}$$

E, portanto, o teor total de água no domínio de cálculo será a soma entre o teor de água absorvido pelas fibras e o teor de água livre, proveniente da condensação:

$$W = \tilde{W} + W_f \quad \text{Eq. (22)}$$

2.2.1.3 Equação da conservação da espécie química

A equação da conservação da espécie química é escrita para a concentração de vapor de água no interior do domínio de cálculo, dada por:

$$\varepsilon \frac{\partial C_v}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial C_v}{\partial x} = \frac{D_a \varepsilon}{\tau} \frac{\partial^2 C_v}{\partial x^2} - \Gamma \quad \text{Eq. (23)}$$

onde a velocidade é calculada pela equação de Darcy, como descrito anteriormente. O coeficiente de difusão mássica D_a assim como a tortuosidade são constantes. O termo fonte Γ , conforme anteriormente comentado, compreende os fenômenos de mudança de fase e também a absorção de água pela fibra do tecido de isolamento.

2.2.1.4 Condições de contorno

O modelo matemático proposto é, portanto, um modelo composto por duas equações diferenciais parciais unidimensionais e transientes. Para este tipo de problema, é necessária a definição das condições de fronteira – ou condições de contorno – para o fechamento do problema, além de uma condição inicial para as variáveis conservadas – campos iniciais de concentração de vapor de água e temperatura no domínio de cálculo.

Existem três tipos de condições de contorno que podem ser empregadas. Estes tipos de condição de contorno podem ser mais ou menos elaboradas para se aproximarem mais da situação real que se deseja simular. São elas (MALISKA, 2010; PATANKAR, 1980):

- a) condição de contorno de Dirichlet: também chamada de condição de 1° tipo (ou condição de propriedade prescrita).

Este tipo de condição de contorno acaba sendo o mais simples, neste caso o valor da variável é fixo e constante na fronteira do domínio de cálculo;

- b) condição de contorno de Neumann: também denominada condição de contorno de 2° tipo (ou condição de fluxo prescrito). Nesta condição de contorno não se tem o valor da propriedade especificado. Ao invés disso, é disponível um valor especificado do fluxo dessa propriedade na fronteira do domínio de cálculo;
- c) condição de contorno de Robin: também denominada condição de 3° tipo (ou condição de igualdade de fluxos), iguala o fluxo difusivo e o fluxo convectivo. Para este tipo de abordagem, deve-se conhecer o coeficiente de convecção que rege o problema.

Para o fechamento do problema proposto, utilizou-se a condição de contorno de Robin para ambas as fronteiras do domínio de cálculo, tanto para a equação da conservação da espécie química, quanto para a equação da conservação da energia, a fim de tentar obter uma resposta mais realista da situação física a ser simulada.

De acordo com a Figura 1, o domínio de cálculo está envolto em uma fina camada de tecido de revestimento que o separa da pele humana e do ambiente externo. Para essas camadas de tecido de revestimento também há toda uma particularidade de transferência de massa e energia. No entanto, uma vez que a espessura dessas camadas de tecido de revestimento é muito menor do que a espessura do tecido de isolamento tomado como domínio de cálculo, toda a influência da presença das camadas de tecido de revestimento será tratada apenas como uma resistência à transferência de massa e energia para o domínio de cálculo adotado.

As equações utilizadas para as condições de contorno, para a equação da temperatura são (FAN *et al.*, 2004):

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{r_0} (T|_{x=0} - T_{bL}) \quad \text{Eq. (24)}$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{(T_{bL} - T|_{x=L})}{r_L + \left(\frac{1}{h_t}\right)} \quad \text{Eq. (25)}$$

onde r_0 é a resistência do tecido de revestimento interno à transferência de calor, enquanto que r_L e h_t são, respectivamente, a resistência do tecido de revestimento externo à transferência de energia e o coeficiente de transferência de calor por convecção. T_{b0} é a temperatura na interface entre a pele humana e o tecido de revestimento interno, e T_{bL} é a temperatura na interface entre o ambiente externo e o tecido de revestimento externo.

Para a equação da conservação da espécie química têm-se as seguintes equações para as condições de contorno:

$$\frac{D_a \varepsilon}{\tau} \frac{\partial C_v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{w_0} (C_v|_{x=0} - C_{vb0}) \quad \text{Eq. (26)}$$

$$\frac{D_a \varepsilon}{\tau} \frac{\partial C_v}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{(C_{vbL} - C_v|_{x=L})}{w_L + \left(\frac{1}{h_c}\right)} \quad \text{Eq. (27)}$$

Semelhante às equações das condições de contorno para a conservação da temperatura, tem-se o termo de resistência do tecido de revestimento interno ao transporte de massa w_0 , e para o tecido de revestimento externo tem-se o termo de resistência ao transporte de massa w_L e o coeficiente convectivo de transferência de massa h_c . As concentrações C_{vb0} e C_{vbL} são, respectivamente, a concentração de vapor d'água na interface entre a pele humana e o revestimento interno, e a concentração de vapor d'água na interface entre o ambiente externo e o tecido de revestimento externo.

A concepção correta das condições de contorno é muito importante, uma vez que a solução do problema de transferência de espécie química e energia é altamente dependente delas. Em alguns casos, com condições de contorno mais simplificadas, surge a possibilidade de uma solução analítica para o modelo matemático, embora tais simplificações façam com que os resultados se distanciem bastante da realidade (HANG *et al.*, 2012).

3 TRATAMENTO DO MODELO MATEMÁTICO

Abstrair uma situação física sob a forma de um modelo matemático é uma tarefa que por si só já vem acompanhada de vários desafios. Uma vez que se obtém um modelo matemático que – consideradas as simplificações – descreva a realidade com o máximo de detalhes, é hora de dirigir a atenção para a tarefa de obter a solução do modelo.

A classe dos métodos teóricos utilizados na solução dos modelos matemáticos é formada pelos métodos analíticos e pelos métodos numéricos. Ambos têm por objetivo a solução das equações diferenciais que compõem o modelo matemático obtido. MALISKA (2010) explica que a diferença básica entre esses dois métodos é a complexidade das equações com as quais cada um pode trabalhar.

Métodos analíticos acabam esbarrando na complexidade das equações, uma vez que esta abordagem apenas consegue tratar os casos de modelos com equações diferenciais mais simples, onde as simplificações – condições de contorno menos elaboradas, geometrias mais simples e hipóteses simplificadoras – acabam afastando os resultados obtidos da situação real. A vantagem de uma solução analítica é a obtenção de uma solução fechada requerendo baixos tempos de computação. Se um método analítico for suficiente para resolver um problema de interesse, ele deve ser preferido em relação a métodos numéricos, que demandam tempos de computação muito maiores (PATANKAR, 1980; MALISKA, 2010).

Já os métodos numéricos aparecem como a alternativa mais coerente para a resolução dos modelos matemáticos, pois é possível abordar equações diferenciais mais complexas e com condições de contorno mais elaboradas, além de geometrias que se aproximem mais da realidade estudada.

Os métodos numéricos aplicam técnicas de discretização que aproximam o sistema original de equações diferenciais por um sistema de equações algébricas. Essas aproximações transformam um domínio de cálculo contínuo em um domínio de cálculo discreto e, desta forma, a solução não existe em todos os pontos do domínio de cálculo, mas sim apenas nos pontos discretizados do domínio de cálculo (LEMONS, 2011).

Existem alguns métodos numéricos considerados clássicos para a solução dos modelos matemáticos. Esses métodos são o de diferenças finitas, o método de elementos finitos e o método de volumes finitos.

O método dos volumes finitos é atualmente o método mais aplicado em situações envolvendo escoamentos e é um método no qual

as equações aproximadas são obtidas através de balanços no volume elementar e a discretização acontece pela integração das equações diferenciais no tempo e espaço no próprio volume elementar, e os valores das variáveis nas interfaces do volume são aproximados através de esquemas de interpolação espaciais (MALISKA, 2010; LEMOS, 2011).

Um esquema de interpolação clássico do método de volumes finitos é o esquema *WUDS*, que utiliza um comportamento de peso entre os mecanismos difusivo e convectivo, balanceando a influência de cada um deles no fenômeno modelado, esquema esse que é utilizado no processo de discretização do modelo matemático proposto neste estudo.

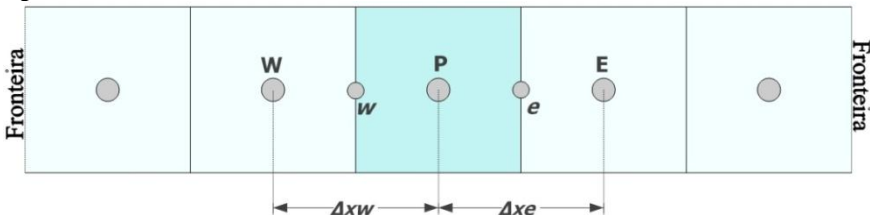
3.1 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MODELO MATEMÁTICO

Após a escolha do método numérico a ser utilizado para a obtenção da solução do modelo matemático, o próximo passo é a discretização das equações diferenciais de maneira correta.

Conforme comentado anteriormente, o método dos volumes finitos se caracteriza pela integração no tempo e no espaço das equações diferenciais no volume de controle elementar.

É necessário, portanto, que o domínio de cálculo, antes contínuo, seja agora transformado em um domínio de cálculo discreto. Isto se consegue a partir da subdivisão do domínio de cálculo em um número finito de sub-regiões – os volumes elementares – que serão os pontos no domínio de cálculo nos quais as variáveis serão calculadas (LEMOS, 2011). Uma malha que pode representar de maneira satisfatória o domínio de cálculo adotado no modelo matemático deste estudo é uma malha uniforme com volumes inteiros nas fronteiras, como mostrado na Figura 4.

Figura 4 – malha unidimensional com volumes inteiros na fronteira.



Fonte: Adaptado de Maliska (2010).

A integração das equações diferenciais ocorre no volume elementar P , e por se tratar de um problema unidimensional, as outras dimensões – y e z – são consideradas unitárias.

Uma vez que se tem o domínio de cálculo discretizado definido, pode-se proceder à integração das equações no espaço e no tempo.

3.1.1 Discretização da equação da conservação da energia

Parte-se da integração no tempo e no espaço da Eq. (1) que então se apresenta da seguinte forma:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e C_{sv} \frac{\partial T}{\partial t} dxdt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \epsilon u C_{vv} \frac{\partial T}{\partial x} dxdt =$$

Eq. (28)

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dxdt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e S dxdt$$

Para uma melhor organização e compreensão do processo de discretização, será tratado agora individualmente o primeiro termo à esquerda da igualdade, que se trata do termo transiente. Este termo, já integrado no espaço e no tempo, se apresenta da seguinte forma:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e C_{sv} \frac{\partial T}{\partial t} dxdt = \left(C_{sv} T_P - C_{sv}^0 T_P^0 \right) \Delta x$$

Eq. (29)

O sobrescrito ⁰ na equação acima significa que a informação da variável está sendo retirada do instante anterior do tempo. Já os termos que não contêm o sobrescrito ⁰ estão sendo avaliados no instante de tempo atual.

Analisando agora a parcela convectiva da equação Eq. (28) individualmente, tem-se:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \epsilon u C_{vv} \frac{\partial T}{\partial x} dxdt =$$

Eq. (30)

$$\left[(\epsilon u C_{vv} T)|_e^\theta - (\epsilon u C_{vv} T)|_w^\theta \right] \Delta t$$

Integrando a parcela difusiva da equação, ou seja, o primeiro termo a direita da igualdade da Eq. (28), tem-se:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt = \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e^\theta - k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w^\theta \right) \quad \text{Eq. (31)}$$

É necessário também integrar o termo fonte da equação de conservação da energia. Ao fazê-lo, tem-se:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e S dx dt = S_p^\theta \Delta x \Delta t \quad \text{Eq. (32)}$$

Agrupando a Eq. (29), que é o termo transiente, com a Eq. (30), que é o termo convectivo, juntamente com Eq. (31) que é o termo difusivo e a Eq. (32) que é o termo fonte, a equação Eq. (28) integrada é, então, apresentada da seguinte forma:

$$\left(C_{sv_p} T_p - C_{sv_p^\theta} T_p^\theta \right) \Delta x + \left[(\varepsilon u C_{vT}) \Big|_e^\theta - (\varepsilon u C_{vT}) \Big|_w^\theta \right] \Delta t = \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e^\theta - k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w^\theta \right) + S_p^\theta \Delta x \Delta t \quad \text{Eq. (33)}$$

Na equação acima, o sobrescrito $^\theta$ refere-se à escolha do comportamento do fluxo da variável conservada em relação ao tempo. Este comportamento pode ser definido como sendo de três tipos de formulações, sendo elas: a formulação explícita, formulação implícita e a formulação totalmente implícita. Esta formulação, tomando uma variável conservável genérica ϕ , obedece à seguinte equação (MALISKA, 2010):

$$\phi^\theta = \theta \phi + (1 - \theta) \phi^0 \quad \text{Eq. (34)}$$

Assim, caso escolha-se o valor de θ igual a zero, tem-se uma formulação explícita, ou seja, os valores das variáveis serão buscados no passo de tempo anterior. Caso se escolha um valor de θ maior do que zero e

menor do que 1, tem-se uma formulação implícita, onde os valores das variáveis serão buscados com um peso entre o passo de tempo anterior e o passo de tempo atual. Caso se opte por um valor de θ igual a 1, tem-se a formulação totalmente implícita, onde os valores das variáveis serão buscados no passo de tempo atual.

Para o processo de discretização do modelo matemático proposto, será escolhida uma formulação totalmente implícita para os termos lineares – termos de convecção e de difusão – e será escolhida uma formulação explícita para o termo fonte, medida que se faz necessária devido à forte não-linearidade deste termo (PANTANKAR, 1980; MALISKA, 2010).

Ainda se referindo à equação Eq. (33), torna-se necessário definir o método de interpolação espacial para a variável conservada – no caso, a temperatura. Existem várias funções de interpolação, cada uma delas exibe vantagens e deve-se levar em conta a natureza do fenômeno que se quer simular – isto é, identificar qual mecanismo de transporte é o mais influente na situação física – pois métodos de interpolação que funcionam muito bem para processos convectivos podem fugir da realidade quando aplicados à processos difusivos.

Para o modelo proposto, o método de interpolação adotado é o método WUDS (*Weighted Upstream Differencing Scheme*). Este esquema apresenta dois coeficientes – α_i e β_i – que servem como peso entre os processos convectivo e difusivo, ambos dependendo do número de Peclet (MALISKA, 2010).

Adotando a temperatura como exemplo de variável conservativa, o seu valor nas faces e e w do volume elementar P são escritas, respectivamente, como sendo:

$$T_e = (0,5 + \alpha_e)T_P + (0,5 - \alpha_e)T_E \quad \text{Eq. (35)}$$

$$T_w = (0,5 + \alpha_w)T_W + (0,5 - \alpha_w)T_P \quad \text{Eq. (36)}$$

A derivada da variável conservativa, na interface, é escrita como sendo:

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_e = \beta_e k \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta_{xe}} \right) \quad \text{Eq. (37)}$$

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_w = \beta_w k \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta_{xw}} \right) \quad \text{Eq. (38)}$$

Os coeficientes α_i e β_i são, respectivamente, definidos como se segue:

$$\alpha_i = \frac{Pe^2}{10 + 2Pe^2} \quad \text{Eq. (39)}$$

$$\beta_i = \frac{1 + 0,005Pe^2}{1 + 0,05Pe^2} \quad \text{Eq. (40)}$$

onde o número de Peclet – para uma variável conservativa genérica ϕ – na direção x é definido como sendo:

$$Pe = \frac{u\Delta x}{\Gamma^\phi} \quad \text{Eq. (41)}$$

onde o termo Γ^ϕ assumirá valores particulares, dependendo da variável a ser conservada. Para a equação da conservação da energia, este termo irá assumir o valor da seguinte equação:

$$\Gamma^T = \frac{k}{C_{sv}} \quad \text{Eq. (42)}$$

Para a equação da conservação da espécie química, o termo Γ^ϕ é escrito como sendo:

$$\Gamma^{C_v} = D_a \quad \text{Eq. (43)}$$

Analisando o esquema de interpolação *WUDS*, pode-se observar que na ocasião de uma velocidade nula, ou seja, o número de Peclet sendo igual a zero, tem-se $\alpha_i = 0$ e $\beta_i = 1$ e, neste cenário, o esquema de interpolação de *diferenças centrais* é resgatado – neste caso apenas a difusão estará ocorrendo no problema. Na ocasião de uma velocidade muito grande, tem-se $\alpha_i = 0,5$ e $\beta_i = 0,1$, ou seja, nestas

circunstâncias o esquema de interpolação *WUDS* aproxima-se do esquema *upwind* e a difusão é rebaixada e quase não exerce influência sobre o fenômeno. Sendo assim, o sistema de peso entre o mecanismo difusivo e o mecanismo convectivo que o esquema de interpolação *WUDS* oferece é uma maneira satisfatória de considerar o fenômeno com maior coerência em relação à realidade.

Agora, considerando que a malha adotada, demonstrada na Figura 4 é uma malha uniforme, ou seja, $\Delta x_e = \Delta x_w = \Delta x$ e assumindo uma formulação totalmente implícita no tempo, ou seja, com $\theta = 1$ para os termos lineares e assumindo uma formulação explícita no tempo para o termo fonte – termo S da Eq. (33) – ou seja, $\theta = 0$. Conhecendo as Eq. (35), Eq. (36), Eq. (37) e Eq. (38). Substituindo na Eq. (33) tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{svP} T_P \Delta x}{\Delta t} - \frac{C_{svP^0} T_P^0 \Delta x}{\Delta t} + \\ & [\varepsilon u C_{vv} [(0,5 + \alpha_e) T_P + (0,5 - \alpha_e) T_E] - \\ & \varepsilon u C_{vv} [(0,5 + \alpha_w) T_W + (0,5 - \alpha_w) T_P] = \\ & \beta_e k \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta x} \right) - \beta_w k \left(\frac{T_P - T_W}{\Delta x} \right) + S_P^0 \end{aligned} \quad \text{Eq. (44)}$$

A equação Eq. (44) ainda pode ser trabalhada para se colocar em evidência T_P , T_E e T_W e, então, ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_P \left(\frac{C_{svP} \Delta x}{\Delta t} + \varepsilon u C_{vv} (0,5 + \alpha_e) - \varepsilon u C_{vv} (0,5 - \alpha_w) + \frac{\beta_e k}{\Delta x} + \frac{\beta_w k}{\Delta x} \right) = \\ T_E \left(-\varepsilon u C_{vv} (0,5 - \alpha_e) + \frac{\beta_e k}{\Delta x} \right) + \\ T_W \left(\varepsilon u C_{vv} (0,5 + \alpha_w) + \frac{\beta_w k}{\Delta x} \right) - \\ T_P^0 \left(\frac{C_{svP^0} \Delta x}{\Delta t} \right) + S_P^0 \end{aligned} \quad \text{Eq. (45)}$$

Definindo-se:

$$A_p = \frac{C_{svp} \Delta x}{\Delta t} + \varepsilon u C_{vv} (0,5 + \alpha_e) - \varepsilon u C_{vv} (0,5 - \alpha_w) + \frac{\beta_e k}{\Delta x} + \frac{\beta_w k}{\Delta x}$$

Eq. (46)

$$A_E = -\varepsilon u C_{vv} (0,5 - \alpha_e) + \frac{\beta_e k}{\Delta x}$$

Eq. (47)

$$A_W = \varepsilon u C_{vv} (0,5 + \alpha_w) + \frac{\beta_w k}{\Delta x}$$

Eq. (48)

$$A_p^0 = \frac{C_{svp}^0 \Delta x}{\Delta t}$$

Eq. (49)

Pode-se escrever a Eq. (45) de forma mais condensada como:

$$T_p A_p = T_E A_E + T_W A_W + T_p^0 A_p^0 + S_p^0 \Delta x$$

Eq. (50)

Se evidenciar-se a variável conservada no volume de controle elementar P , tem-se:

$$T_p = \frac{1}{A_p} (T_E A_E + T_W A_W + T_p^0 A_p^0 + S_p^0 \Delta x)$$

Eq. (51)

A Eq. (51) é a forma discretizada da equação da conservação da energia do modelo proposto neste estudo – Eq. (1). Trata-se agora de uma equação algébrica válida para todos os pontos discretos do domínio de cálculo.

No entanto, ainda deve-se tratar o termo fonte desta equação, como será discutido a seguir.

3.1.1.1 Tratamento do termo fonte da equação da conservação da energia.

Como já comentado anteriormente, o termo fonte do modelo matemático em questão abrange os fenômenos de mudança de fase – evaporação/condensação e absorção – e também, no caso da equação da conservação da energia, vai abranger o termo de troca térmica por radiação.

Recapitulando a Eq. (10), tem-se:

$$S = \frac{\partial F_R}{\partial x} - \frac{\partial F_L}{\partial x} + \lambda \Gamma \quad \text{Eq. (10)}$$

Os dois primeiros termos dessa equação são correspondentes à troca térmica por radiação. FARNWORTH (1983) estudou a física da transferência de calor em tecidos de isolamento. Em seu trabalho, ele discute que em amostras de tecido que têm espessuras bem maiores do que a profundidade de penetração de radiação, o fluxo radiativo pode ser aproximado por uma equação de difusão, utilizando apenas uma condutividade que ele chamou de *condutividade radiativa* k_{rad} que multiplicaria um gradiente médio de temperatura através da amostra. No entanto, para amostras de tecido de isolamento, onde a profundidade de penetração da radiação é da ordem de milímetros – enquanto que a espessura da amostra de tecido de isolamento é da ordem de poucos centímetros – o mecanismo de troca térmica por radiação pode ser equiparado ao mecanismo condutivo em relevância. Neste cenário, não é coerente considerar uma *condutividade radiativa* para tratar o fenômeno de troca térmica por radiação, mas sim é preciso encontrar outra forma de aproximação.

O autor então considerou um volume infinitesimal de espessura dx entre duas fontes de temperatura e idealizou um fluxo total de radiação térmica incidindo pela direita – oriundo da fonte de temperatura mais baixa – e o chamou de F_R e da mesma forma considerou um fluxo de radiação térmica F_L incidindo pela esquerda – oriundo da fonte de temperatura mais alta. Ele assumiu que a distribuição angular de intensidade radiativa é aproximadamente constante, de modo que o fluxo F_L é apenas levemente maior do que F_R .

Desta forma, a fração de F_R e F_L absorvida pela fibra no domínio de cálculo é função de uma constante de absorvidade radiativa – denominada β_r – que será uma média de todos os ângulos de

incidência e acaba sendo independente da posição. Assim, a absorvidade do elemento de volume será $\beta_r dx$ bem como a emissividade térmica também será $\beta_r dx$. Sendo assim, a atenuação dos fluxos radiativos será dada por:

$$\frac{\partial F_L}{\partial x} = \beta_r F_L - \beta_r \sigma T^4(x) \quad \text{Eq. (52)}$$

$$\frac{\partial F_R}{\partial x} = -\beta_r F_R + \beta_r \sigma T^4(x) \quad \text{Eq. (53)}$$

Considerando a transferência de calor por radiação na interface entre o tecido de revestimento interno e o tecido de isolamento, e na interface entre o tecido de revestimento externo e o tecido de isolamento, tem-se as seguintes condições iniciais para a Eq. (52) e Eq.(53):

$$(1 - \zeta_1) F_L(0, t) + \zeta_1 \sigma T^4(0, t) = F_R(0, t) \quad \text{Eq. (54)}$$

$$(1 - \zeta_2) F_R(L, t) + \zeta_2 \sigma T^4(L, t) = F_L(L, t) \quad \text{Eq. (55)}$$

Resolvendo a Eq. (52) e a Eq.(53), tem-se:

$$F_L(x, t) = -\beta_r \sigma e^{\beta_r x} \left(\int_0^x e^{-\beta_r x} T^4 dx + C_2 \right) \quad \text{Eq. (56)}$$

$$F_R(x, t) = \beta_r \sigma e^{-\beta_r x} \left(\int_0^x e^{\beta_r x} T^4 dx + C_1 \right) \quad \text{Eq. (57)}$$

Combinando então as equações Eq. (56) e Eq. (57), respectivamente, com a Eq. (52) e Eq.(53) tem-se:

$$\frac{\partial F_L}{\partial x} = -\beta_r^2 \sigma e^{\beta_r x} \left(\int_0^x e^{-\beta_r x} T^4 dx + C_2 \right) - \beta_r \sigma T^4 \quad \text{Eq. (58)}$$

$$\frac{\partial F_R}{\partial x} = -\beta_r^2 \sigma e^{-\beta_r x} \left(\int_0^x e^{\beta_r x} T^4 dx + C_1 \right) + \beta \sigma T^4 \quad \text{Eq. (59)}$$

Utilizando a Eq. (54) e a Eq. (55) como condições iniciais, obtêm-se as constantes C_1 e C_2 como sendo (FAN *et al.*, 2004):

$$C_1 = \frac{\zeta_1}{\beta_r} T^4(0, t) - (1 - \zeta_1) C_2 \quad \text{Eq. (60)}$$

$$C_2 = \frac{1}{(1 - \zeta_2) \beta_r (1 - \zeta_1) e^{(-\beta_r L)} - \beta_r e^{(\beta_r L)}} \cdot \left(\begin{aligned} &(1 - \zeta_2) \beta_r e^{(-\beta_r L)} \int_0^L e^{(\beta_r x)} T^4 dx + \\ &\beta_r e^{(\beta_r L)} \int_0^L e^{(-\beta_r x)} T^4 dx + \\ &(1 - \zeta_2) \zeta_1 e^{(-\beta_r L)} T^4(0, t) + \zeta_2 T^2(L, t) \end{aligned} \right) \quad \text{Eq. (61)}$$

Definidas as constantes de integração, pode-se reescrever os termos de troca térmica por radiação da Eq. (10) como sendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_R}{\partial x} - \frac{\partial F_L}{\partial x} &= \beta_r^2 \sigma e^{\beta_r x} \left(\int_0^x e^{-\beta_r x} T^4 dx + C_2 \right) - \\ &\beta_r^2 \sigma e^{-\beta_r x} \left(\int_0^x e^{\beta_r x} T^4 dx + C_1 \right) + 2\beta \sigma T^4 \end{aligned} \quad \text{Eq. (62)}$$

Sendo assim, pode-se escrever o termo fonte da equação da conservação da energia de maneira definitiva, como sendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_R}{\partial x} - \frac{\partial F_L}{\partial x} &= \beta_r^2 \sigma e^{\beta_r x} \left(\int_0^x e^{-\beta_r x} T^4 dx + C_2 \right) - \\ &\beta_r^2 \sigma e^{-\beta_r x} \left(\int_0^x e^{\beta_r x} T^4 dx + C_1 \right) + 2\beta_r \sigma T^4 + \lambda \Gamma \end{aligned} \quad \text{Eq. (63)}$$

O termo fonte da equação da conservação da energia ainda possui a parcela que trata dos fenômenos de mudança de fase. As expressões que traduzem esses fenômenos já foram apresentadas anteriormente na Eq. (12) – que trata da condensação/congelamento – e na Eq. (18) – que trata da absorção de água pela fibra.

A Eq. (18) foi apresentada na sua forma diferencial e, portanto, também necessita ser discretizada. Relembrando a Eq. (18), tem-se:

$$\Gamma_s = (1 - \varepsilon') \frac{2D_f}{R_f} \frac{\partial C_f}{\partial x} \quad \text{Eq. (18)}$$

Esta equação pode ser discretizada utilizando *one-side* como esquema de interpolação espacial. Assim, para uma malha uniforme compreendendo $r = [0, R_f]$ conforme HANG *et al.* (2012), tem-se:

$$\Gamma_s = (1 - \varepsilon) \frac{2D_f}{R_f} \left(\frac{C_{fP}^0 - C_{fW}^0}{\Delta r} \right) \quad \text{Eq. (64)}$$

Vale lembrar aqui que, durante o processo de discretização da equação da energia, escolheu-se para o termo fonte uma formulação explícita em relação ao tempo. Toda informação de variáveis utilizadas para o cálculo do termo fonte S serão buscadas no passo de tempo anterior. A decisão de uma formulação explícita no tempo para o termo fonte se deve à sua forte não-linearidade. Existem algumas técnicas de linearização do termo fonte, no entanto não há uma regra geral e existem casos em que a proposta mais coerente é lançar mão de uma formulação explícita no tempo para este termo, como feito aqui (PATANKAR, 1980).

O termo λ na equação do termo fonte se refere ao calor latente de mudança de fase. Este termo terá seu valor variando, dependendo se estará ocorrendo vaporização, condensação ou congelamento no volume elementar onde a variável estará sendo calculada. Neste sentido, compara-se a concentração de saturação C_{vsat} com a concentração de vapor d'água C_v nas respectivas temperaturas. Caso se tenha $C_{vsat} < C_v$ a uma temperatura acima de 273,15K ocorrerá condensação. Caso se tenha $C_{vsat} < C_v$ a uma temperatura igual ou inferior à 273,15K ocorrerá congelamento. Caso tenha-se $C_{vsat} > C_v$ ocorrerá evaporação.

3.1.2 Discretização da equação da conservação da espécie química

O próximo passo do tratamento do modelo matemático é a discretização da equação da espécie química. Integrando a Eq. (23) no tempo e espaço para o volume elementar P tem-se:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \varepsilon \frac{\partial C_v}{\partial t} dxdt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \varepsilon u \frac{\partial C_v}{\partial x} dxdt =$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\varepsilon D_a}{\tau} \frac{\partial^2 C_v}{\partial x^2} dxdt - \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \Gamma dxdt$$

Eq. (65)

cuja solução é:

$$\left(\varepsilon C_{vP} - \varepsilon C_{vP}^0 \right) \Delta x + \left(\varepsilon u C_v|_e^\theta - \varepsilon u C_v|_w^\theta \right) \Delta t =$$

$$\left(\frac{\varepsilon D_a}{\tau} \frac{\partial C_v}{\partial x} \Big|_e^\theta - \frac{\varepsilon D_a}{\tau} \frac{\partial C_v}{\partial x} \Big|_w^\theta \right) \Delta t - \Gamma^\theta \Delta t \Delta x$$

Eq. (66)

Assim como na discretização da equação da conservação da energia, é necessário definir o esquema de interpolação no tempo e o esquema de interpolação espacial. Como anteriormente, para a equação da conservação da espécie química, a formulação no tempo será considerada como sendo totalmente implícita para os termos lineares – isto é, $\theta = 1$ – e explícita para o termo fonte – ou seja, $\theta = 0$. O esquema de interpolação espacial para a equação da espécie química também será o esquema *WUDS*, utilizado para a equação da conservação da energia.

Sendo assim, a Eq. (66) depois de trabalhada e rearranjada, pode ser escrita da seguinte forma:

$$C_{vP} \left[\frac{\varepsilon \Delta x}{\Delta t} + \varepsilon u (0,5 + \alpha_e) - \varepsilon u (0,5 - \alpha_w) + \frac{\beta_e D_a \varepsilon}{\tau \Delta x_e} + \frac{\beta_w D_a \varepsilon}{\tau \Delta x_w} \right] =$$

$$C_{vE} \left[-\varepsilon u (0,5 - \alpha_e) + \frac{\beta_e D_a \varepsilon}{\tau \Delta x_e} \right] +$$

$$C_{vW} \left[\varepsilon u (0,5 + \alpha_w) + \frac{\beta_w D_a \varepsilon}{\tau \Delta x_w} \right] + C_{vP^0} \left(\frac{\varepsilon \Delta x}{\Delta t} \right) - \Gamma^0 \Delta x$$

Eq. (67)

Assumindo uma malha computacional uniforme com $\Delta x_e = \Delta x_w = \Delta x$ pode-se escrever a Eq. (67) de forma mais condensada, fazendo:

$$\hat{A}_p = \frac{\varepsilon \Delta x}{\Delta t} + \varepsilon u(0,5 + \alpha_e) - \varepsilon u(0,5 - \alpha_w) + \frac{\beta_e D_a \varepsilon}{\tau \Delta x_e} + \frac{\beta_w D_a \varepsilon}{\tau \Delta x_w} \quad \text{Eq. (68)}$$

$$\hat{A}_E = -\varepsilon u(0,5 - \alpha_e) + \frac{\beta_e D_a \varepsilon}{\tau \Delta x_e} \quad \text{Eq.(69)}$$

$$\hat{A}_W = \varepsilon u(0,5 + \alpha_w) + \frac{\beta_w D_a \varepsilon}{\tau \Delta x_w} \quad \text{Eq.(70)}$$

$$\hat{A}_p^0 = \frac{\varepsilon \Delta x}{\Delta t} \quad \text{Eq. (71)}$$

Substituindo as equações acima na Eq. (67) tem-se:

$$C_{vp} \hat{A}_p = C_{vE} \hat{A}_E + C_{vW} \hat{A}_W + C_{vp}^0 \hat{A}_p^0 - \Gamma^0 \Delta x \quad \text{Eq. (72)}$$

Evidenciando a concentração de vapor d'água no volume elementar P tem-se:

$$C_{vp} = \frac{1}{\hat{A}_p} \left(C_{vE} \hat{A}_E + C_{vW} \hat{A}_W + C_{vp}^0 \hat{A}_p^0 - \Gamma^0 \Delta x \right) \quad \text{Eq. (73)}$$

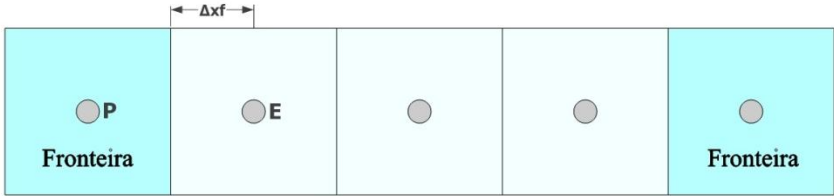
3.1.3 Discretização das condições de contorno.

As equações Eq. (51) e Eq. (73) são discretizadas para um volume elementar genérico P e valem para todos os volumes elementares internos do domínio de cálculo discretizado. No entanto, para que o sistema de equações algébricas esteja completo, é necessário que se obtenha as equações aproximadas para as fronteiras do domínio de cálculo discretizado. Existem várias formas de se aplicar as condições de contorno. A que será utilizada para o fechamento da

discretização do modelo matemático em questão é a técnica dos volumes fictícios.

Nesta abordagem, é idealizado um volume inteiro para a fronteira e a informação do valor da variável estará centrada nesse volume fictício. Em termos práticos, este volume não existe e tampouco ocupa lugar geométrico na malha. A Figura 4 ilustra a aplicação das condições de contorno por volumes fictícios.

Figura 5 – esquema da malha para a fronteira utilizando volumes fictícios.



Fonte: Adaptado de Maliska (2010).

3.1.3.1 Discretização das condições de contorno para a equação da conservação da energia.

Resgatando a equação de condição de contorno na fronteira em contato com a pele humana – Eq. (24) – tem-se:

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{r_0} (T|_{x=0} - T_{bL}) \quad \text{Eq. (24)}$$

Utilizando o esquema de diferenças centrais para interpolar a derivada na interface e o valor da variável na interface, tem-se:

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{T|_{x=1} - T|_{x=0}}{2\Delta x_f} \quad \text{Eq. (74)}$$

$$T|_{x=0} = \frac{T|_{x=1} + T|_{x=0}}{2} \quad \text{Eq. (75)}$$

Logo, a Eq. (24) discretizada assume a seguinte forma:

$$T|_{x=0} = \frac{1}{A_1} (A_2 T|_{x=1} - B) \quad \text{Eq. (76)}$$

Fazendo $\frac{1}{r_0} = \theta$ então os coeficientes A_1 , A_2 e B serão:

$$A_1 = \frac{k}{2\Delta x_f} - \frac{\theta}{2} \quad \text{Eq. (77)}$$

$$A_2 = \frac{k}{2\Delta x_f} + \frac{\theta}{2} \quad \text{Eq. (78)}$$

$$B = T_{b0} \theta \quad \text{Eq. (79)}$$

Procedendo da mesma forma com a equação da condição de contorno da fronteira em contato com o ambiente externo – Eq. (25) – tem-se:

$$T|_{x=L} = \frac{1}{A_1} (A_2 T|_{x=(L-1)} + B) \quad \text{Eq. (80)}$$

Sendo $\omega = \frac{1}{r_L + \frac{1}{h_t}}$ então os coeficientes A_1 , A_2 e B serão:

$$A_1 = \frac{k}{2\Delta x_f} + \frac{\omega}{2} \quad \text{Eq. (81)}$$

$$A_2 = \frac{k}{2\Delta x_f} - \frac{\omega}{2} \quad \text{Eq. (82)}$$

$$B = T_{bL} \omega \quad \text{Eq. (83)}$$

3.1.3.2 Discretização das condições de contorno para a equação da conservação da espécie química

As equações de condição de contorno para a equação da conservação da espécie química são muito semelhantes as da equação da conservação da energia e, portanto, recebem o mesmo tratamento de discretização.

A Eq. (26) é a equação de condição de contorno na fronteira entre o domínio de cálculo e a pele humana, e discretizada assume a seguinte forma:

$$C_v |_{x=0} = \frac{1}{A_1} (A_2 C_v |_{x=1} - B) \quad \text{Eq. (84)}$$

Fazendo $\frac{1}{w_0} = \beta$, então os coeficientes A_1 , A_2 e B serão:

$$A_1 = \frac{D_a \varepsilon}{2 \Delta x_f \tau} - \frac{\beta}{2} \quad \text{Eq. (85)}$$

$$A_2 = \frac{D_a \varepsilon}{2 \Delta x_f \tau} + \frac{\beta}{2} \quad \text{Eq. (86)}$$

$$B = C_{vb0} \beta \quad \text{Eq. (87)}$$

Com a Eq. (27) irá proceder-se de forma semelhante, e então se tem:

$$C_v |_{x=L} = \frac{1}{A_1} (A_2 C_v |_{x=(L-1)} + B) \quad \text{Eq. (88)}$$

Sendo $\gamma = \frac{1}{w_L + \frac{1}{h_c}}$ então os coeficientes A_1 , A_2 e B serão:

$$A_1 = \frac{D_a \varepsilon}{2 \Delta x_f \tau} + \frac{\gamma}{2} \quad \text{Eq. (89)}$$

$$A_2 = \frac{D_a \varepsilon}{2\Delta x_f \tau} - \frac{\gamma}{2} \quad \text{Eq. (90)}$$

$$B = C_{vbL} \beta \quad \text{Eq. (91)}$$

3.1.4 Discretização da equação da velocidade

Também é necessário discretizar a equação da velocidade, que fora apresentada sob sua forma diferencial – Eq. (2). Utilizando um esquema de interpolação *one side*, tem-se:

$$u = -\frac{k_x}{\mu} \left(\frac{P_{vP} - P_{vW}}{\Delta x} \right) \quad \text{Eq. (92)}$$

3.1.5 Discretização da equação do teor de água livre no domínio de cálculo

É necessário também a discretização da equação do teor de água livre do modelo matemático – Eq. (21). Utilizando um esquema de interpolação explícito no tempo, tem-se:

$$\tilde{W} = \frac{\Gamma_{CE}}{\rho(1-\delta')} - \tilde{W}^0 \quad \text{Eq. (93)}$$

4 SOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR DE EQUAÇÕES

No item 3, fora discutido a discretização do modelo matemático, utilizando o Método dos Volumes Finitos.

Como resultado, a discretização do modelo matemático gera um sistema linear de equações algébricas, que devido ao seu acoplamento deve ser resolvido simultaneamente, avançando no espaço e no tempo. Existem duas classes de métodos de solução de sistemas lineares: a classe dos métodos diretos e a classe dos métodos iterativos.

Os métodos diretos são aqueles que funcionam com a matriz completa e demandam de processos de inversão da matriz completa. Esses métodos, por serem diretos, não necessitam de uma estimativa inicial das variáveis para que se obtenha a solução do sistema. Dentre os métodos diretos tem-se como exemplo, o método da Eliminação de Gauss, assim como o método de Decomposição LU (PRESS *et al.*, 2011).

As matrizes obtidas a partir da aplicação de métodos numéricos são bastante esparsas e por serem também de grande tamanho, as operações de inversão da matriz vão trabalhar muito com os elementos zeros da função e, portanto, o esforço computacional seria muito grande e, sendo assim, a classe de métodos diretos não é recomendada para aplicações que envolvam problemas de mecânica dos fluidos computacional. Além disso, a matriz de coeficientes do sistema linear quase sempre deve ser atualizada ao longo do processo e desta maneira não faz sentido buscar a solução direta de um sistema linear cujos coeficientes não são os corretos. Sendo assim, para aplicações CFD, os métodos preferidos são os métodos iterativos (MALISKA, 2010).

Os métodos iterativos são os que requerem uma estimativa inicial para que então se prossiga com a solução. Estes métodos são classificados como *ponto a ponto*, *linha a linha* ou *plano a plano*.

Exemplos de métodos iterativos *ponto a ponto* são: o método de *Jacobi*, método de *Gauss-Seidel* e também o método S.O.R – método das Sobre-Relaxações Sucessivas. Esses métodos visitam equação por equação de maneira iterativa, utilizando os valores de variáveis do nível iterativo anterior. Neste estudo o método de solução do sistema de equações diferenciais será o método de Gauss-Seidel.

4.1 MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL

Como comentado anteriormente, o método de Gauss-Seidel pertence à classe de métodos iterativos de solução de sistemas de

equações algébricas lineares. Neste método, durante um ciclo iterativo, faz-se uso dos valores das variáveis já calculadas nesse mesmo ciclo iterativo. Isto acelera a convergência em relação ao método de Jacobi, que utiliza apenas valores de variáveis calculadas no nível anterior de iteração.

Escrevendo a equação discretizada da conservação da energia – Eq. (51) – em termos do método de Gauss-Seidel, tem-se:

$$T_P = \frac{1}{A_P} \left(T_E^0 A_E + T_W A_W + T_P^0 A_P^0 + S_P^0 \Delta x \right) \quad \text{Eq. (94)}$$

Onde o sobrescrito ⁰ denota o nível de iteração anterior, enquanto que as variáveis que não contém sobrescrito estão tendo seu valor utilizado ou calculado no nível de iteração atual. Analisando a equação acima, tomando o volume elementar P sendo um volume central, tendo a sua esquerda o volume elementar W e à sua direita o volume elementar E (assim como na Figura 4) pode-se perceber que o método de Gauss-Seidel irá utilizar os valores já calculados do nível de iteração atual que estarão disponíveis. Em uma varredura no sentido da esquerda para a direita, o valor de T_W do nível de iteração atual está disponível para o cálculo de T_P , enquanto que para as demais variáveis só estão disponíveis no os seus valores no nível de iteração anterior.

A equação discretizada da conservação da espécie química – Eq. (73) – escrita em termos do método de Gauss-Seidel, assume a seguinte forma:

$$C_{vP} = \frac{1}{\hat{A}_P} \left(C_{vE}^0 \hat{A}_E + C_{vW} \hat{A}_W + C_{vP}^0 \hat{A}_P^0 - \Gamma \Delta x \right) \quad \text{Eq. (95)}$$

4.3 CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO

Como visto anteriormente, os métodos iterativos demandam uma estimativa inicial para as variáveis. Estes campos iniciais são especificados no começo do procedimento de cálculo. Eles representam a condição inicial da amostra de tecido de isolamento modelada. Trata-se de um campo inicial de temperatura, de teor de água livre e também de concentração de vapor d'água. Este campo de concentração de vapor d'água é calculado a partir de uma condição inicial de umidade relativa, conforme a seguinte expressão:

$$C_{v_{ini}} = \frac{RH_{ini} P_{sat}(T_{ini}) M}{RT_{ini}} \quad \text{Eq. (96)}$$

Além dessa estimativa, é necessário especificar as condições de temperatura e umidade relativa nas fronteiras do sistema.

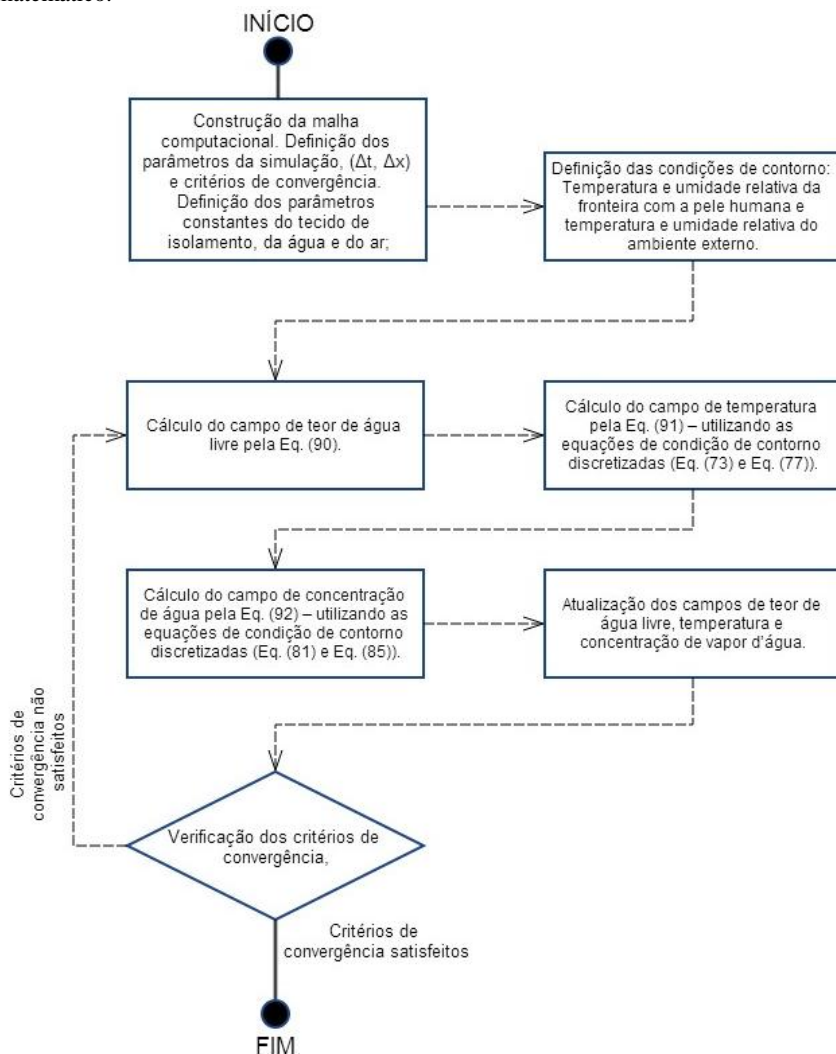
Para a fronteira entre o tecido de isolamento e a pele humana, será considerada uma temperatura T_{b0} e uma umidade relativa RH_{b0} enquanto que para a fronteira entre o tecido de isolamento e o ambiente externo tem-se uma temperatura T_{bL} e uma umidade relativa RH_{bL} . A partir das umidades relativas nas fronteiras, é possível calcular as concentrações de vapor d'água, com a seguinte equação:

$$C_{v_{bi}} = \frac{RH_{bi} P_{sat}(T_{bi}) M}{RT_{bi}} \quad \text{Eq. (97)}$$

4.2 PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO

O procedimento computacional para a solução do modelo matemático segue o seguinte fluxograma:

Figura 6 – fluxograma do procedimento computacional para a solução do modelo matemático.



5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com o modelo matemático devidamente discretizado e com o procedimento de cálculo definido e implementado computacionalmente em linguagem C++, pode-se agora proceder à simulação de situações envolvendo o modelo matemático proposto.

Com um modelo matemático funcional em mãos, passa-se à simulação de diferentes situações, alterando-se as condições iniciais de temperatura e umidade relativa, ou ainda as condições de fronteira, como a umidade relativa na fronteira com a pele humana ou na fronteira com o ambiente externo. Também é possível modificar as temperaturas e as constantes de transferência de calor por convecção nessas fronteiras e analisar como os resultados são influenciados.

Pode-se ainda modificar os valores das propriedades físicas da matéria e obter resultados para diferentes tipos de materiais para a composição do domínio de cálculo, podendo assim verificar quais fibras se adaptam melhor para condições diversas de simulação.

É importante, no entanto, disponibilizar de dados experimentais para verificar se o modelo matemático está obtendo resultados que representam a realidade com certo nível de precisão. Essa comparação entre os dados experimentais e os dados numéricos é a validação do modelo matemático. Um modelo matemático que não dispõe de dados experimentais para sua validação acaba não podendo ser concluído como fiel à realidade simulada até que se possa proceder à sua validação.

Neste estudo serão simuladas algumas situações físicas envolvendo o domínio de cálculo modelado, modificando as condições iniciais e de fronteira, a fim de poder criar diferentes condições de clima e verificar o comportamento dos resultados obtidos e poder discutir esses resultados sob a ótica do fenômeno físico.

Quando estiverem disponíveis, dados experimentais provenientes da literatura serão comparados com os resultados numéricos obtidos e então poderá verificar-se a coerência do modelo matemático frente aos resultados experimentais e então apontar os pontos onde o modelo deve ser aprimorado para que se possa aproximar ainda mais da realidade.

5.1 DEFINIÇÃO DA MALHA COMPUTACIONAL UTILIZADA

Foram inicialmente propostas três tipos diferentes de configuração de malha computacional para o domínio de cálculo discretizados, conforme a Tabela 2:

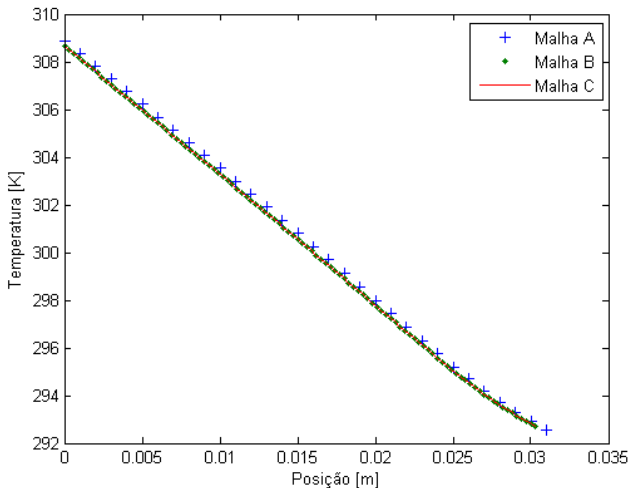
Tabela 2 – diferentes malhas computacionais utilizadas.

Malha	Nº Volumes	Δx [m]
01	30	0,001
02	100	0,0003
03	300	0,0001

todas as malhas representam o domínio de cálculo composto pelo tecido de isolamento de três centímetros de espessura, revestido internamente e externamente por uma fina camada de tecido de revestimento que será tratado como resistência à transferência de calor e massa.

Um caso semelhante foi simulado utilizando cada uma das três malhas apresentadas, com $\Delta t = 0,05$ s. Os resultados obtidos foram então comparados conforme se pode observar na Figura 7 abaixo.

Figura 7 – comparação entre os resultados obtidos para o mesmo caso simulado com diferentes configurações de malha computacional



Os perfis de temperatura exibidos na Figura 7 são os perfis correspondentes a duas horas de fenômeno real simulado. Conforme se pode concluir, os resultados obtidos para as três configurações de malha são muito próximos. No entanto, a melhor comparação foi entre a *malha B* e a *malha C*, cujos erros relativos são menores. A malha escolhida para os demais casos simulados foi então a *malha B*, contendo 100 volumes e $\Delta t = 0,0003 \text{ m}$. Esta malha não é tão grosseira como a *malha A* e também não é tão refinada como a *malha C*, mas apresenta resultados muito semelhantes àqueles da malha C, que é mais refinada e portanto deve apresentar os resultados com menores erros. Adotar a *malha B* traz uma relação satisfatória entre a precisão dos resultados e o tempo para o cálculo dos resultados.

5.2 COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO MATEMÁTICO E OS DADOS EXPERIMENTAIS

Antes de apresentar os resultados obtidos a partir das simulações realizadas com o modelo matemático até agora discutido e trabalhado, será exibida a seguir uma figura que compara os resultados obtidos através da simulação de uma situação física real, e os dados experimentais obtidos na literatura (FAN *et al.* 2004).

Para a comparação, foram identificadas as condições iniciais e de contorno para as quais o experimento de FAN *et al.* (2004) foi conduzido. Estas mesmas condições foram incluídas na simulação para que os resultados experimentais e numéricos pudessem ser comparados. As condições iniciais e de contorno do experimento de FAN *et al.* (2004) são demonstradas na Tabela 3:

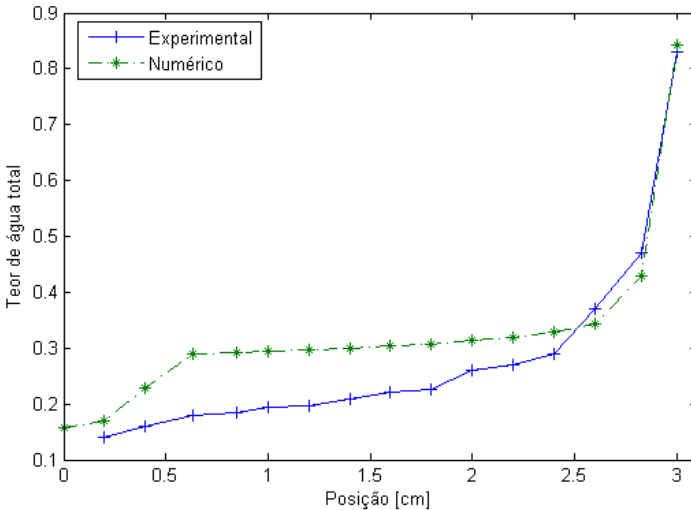
Tabela 3 - condições de contorno e condições iniciais de umidade relativa e temperatura utilizadas na execução do experimento e na simulação a ser comparada.

	Umidade relativa [%]	Temperatura [°C]
Ambiente externo	80	-20
Pele humana	70	33
Condição inicial	65	20

Os demais parâmetros necessários para a simulação utilizados são iguais aos listados na Tabela 5, uma vez que, tanto na simulação quanto no experimento, é utilizado um tecido de isolamento composto de viscose e os tecidos de revestimento compostos de nylon. A malha utilizada é a *malha B* conforme discutido no item 5.1 do deste trabalho. A simulação

foi conduzida até 8 horas de situação física simulada. Os resultados obtidos para o teor de água total são comparados com os resultados experimentais disponíveis em FAN *et al.* (2004) conforme a Figura 8:

Figura 8 – comparação os dados experimentais e os resultados obtidos por simulação utilizando o modelo matemático proposto. Perfil de teor de água total.



Como é possível observar, o perfil experimental e o perfil numérico obtido apresentam a mesma tendência de comportamento, porém existe uma translação do perfil obtido numericamente em relação ao perfil experimental. Os erros entre os dois perfis apresentados variam entre 1% e 60%, tendo sua maior aproximação nas regiões próximas as fronteiras.

Analisando as condições de contorno do ambiente externo, tem-se que a temperatura especificada nesta fronteira é de vinte graus negativos, o que leva ao congelamento das regiões próximas a este ponto. O congelamento acontece quando a umidade relativa na região alcança valores iguais ou superiores a 100%, combinada com um valor de temperatura negativo. O teor de água livre, além de representar a quantidade de água líquida por condensação, também contabiliza a quantidade de água congelada. Como se pode observar da Figura 8, a região compreendida entre 2,5 e 3 centímetros do domínio de cálculo apresenta um crescimento bastante acentuado do teor de água total. Considerando as baixas temperaturas, é sensato acreditar que a umidade

relativa nesta região tem um valor maior ou igual a 100%, o que já é motivo para que as fibras do tecido tenham absorvido grande quantidade de água. Mas, além da quantidade de água absorvida, também existe a quantidade de água congelada ou condensada. Estas duas quantidades de água (a quantidade absorvida e a quantidade congelada/condensada) compõem o teor de água total (vide Eq. (22)).

Uma possível explicação para a diferença entre o perfil experimental e o perfil obtido a partir da simulação sob as mesmas condições iniciais e de contorno, pode estar no modo como é calculado a quantidade de água absorvida pelas fibras do tecido.

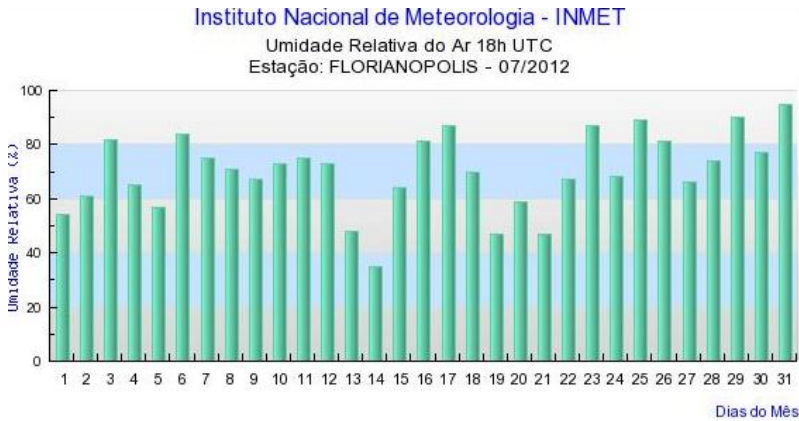
A quantidade de água absorvida pela fibra é função da umidade relativa do ar. Esta relação é particular para cada tipo de tecido, conforme apresentado pela Figura 3. Para o modelo matemático utilizado neste trabalho, foi levantado um polinômio (Eq. (20)) representando a curva de teor de água absorvido versus umidade relativa para o tecido composto de viscose. Embora o polinômio levantado tenha oferecido uma boa representatividade para a relação W_f vs RH para a viscose, é possível que hajam imprecisões no tratamento da curva da Figura 3 para obtenção do polinômio, além de que seja possível haver imprecisões da própria curva da Figura 3. Por outro lado, também é possível que hajam erros relacionados ao experimento do qual os dados experimentais foram obtidos, tais como sensores não calibrados de maneira correta, dificuldade na manutenção das condições de fronteira, entre outros.

5.3 RESULTADOS OBTIDOS PARA CONDIÇÕES TÍPICAS DO INVERNO NA REGIÃO DE FLORIANÓPOLIS/SC

Florianópolis é a cidade capital do estado de Santa Catarina, localizado na região sul do Brasil. Florianópolis é uma cidade do litoral catarinense – que é banhado pelo oceano atlântico – e possui uma parte insular e uma parte continental. Localizada abaixo do trópico de capricórnio, seu clima subtropical apresenta estações do ano caracterizadas por condições climáticas bastante distintas entre si.

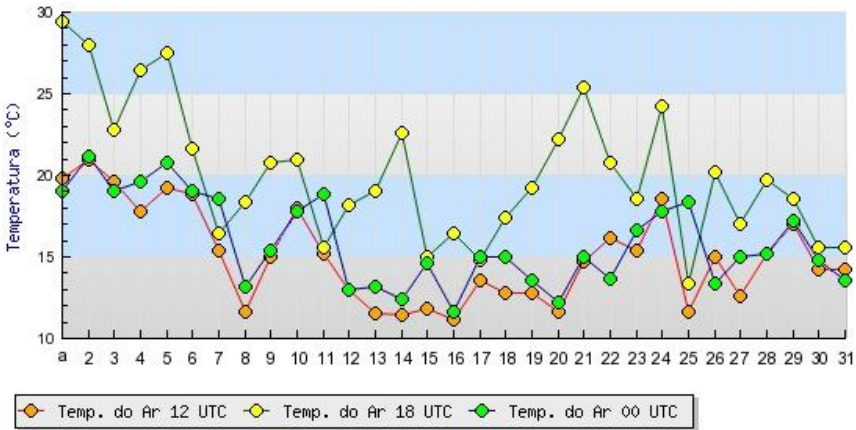
Decidiu-se simular a transferência de calor e massa através de um tecido de isolamento revestido sob as condições de clima de um dia de inverno em Florianópolis, mais precisamente um dia do mês de Julho. A Figura 9 trás dados de umidade relativa para todos os dias do mês de julho do ano de 2012 para a cidade de Florianópolis, enquanto que a Figura 10 demonstra os dados de temperatura (dados do Instituto Nacional de Meteorologia – INMET).

Figura 9 – umidade relativa para os dias do mês de julho do ano de 2012 (dados coletados às 18h)



FONTE: INMET (2013)

Figura 10 – temperatura para os dias do mês de julho do ano de 2012 para a cidade de Florianópolis-SC.



FONTE: INMET (2013)

As condições de umidade relativa e temperatura para o ambiente externo escolhidas foram àquelas exibidas para o dia 16 de julho de 2012 às 18h00min conforme as figuras acima.

Para a fronteira em contato com a pele humana, as condições de temperatura e umidade relativa escolhidas foram de 70 % e 36 °C,

respectivamente. A condição inicial a qual a amostra de tecido de isolamento revestido estaria acondicionada é de 20 °C de temperatura e 75 % de umidade relativa. Um resumo das condições de contorno e das condições iniciais para a simulação é exibida na Tabela 4:

Tabela 4 – condições de contorno e condições iniciais de umidade relativa e temperatura utilizadas na simulação.

	Umidade relativa [%]	Temperatura [°C]
Ambiente externo	80	16
Pele humana	70	36
Condição inicial	75	20

Os valores dos coeficientes convectivos de transferência de calor e massa, bem como outros parâmetros utilizados na simulação são exibidos na Tabela 5.

Tabela 5 – valores dos parâmetros utilizados na simulação.

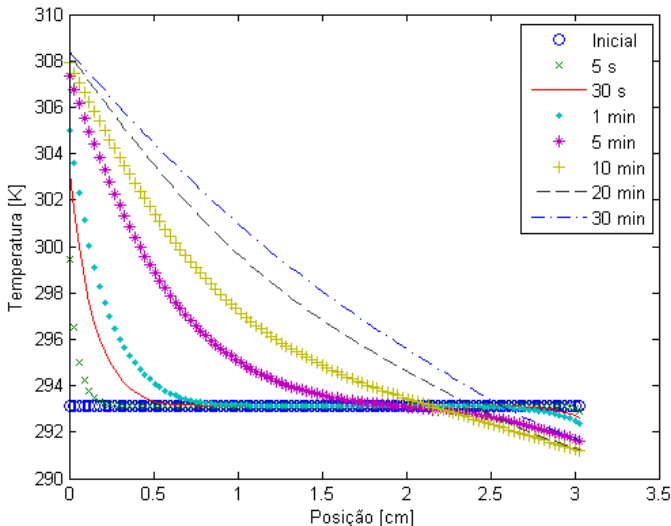
Coefficiente de evaporação/condensação, E	5E-03	-
Raio da fibra, R_f	1,03E-5	m
Massa molecular da água, M	18	$\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Constante universal dos gases, R	8,31447E03	$\text{J}\cdot\text{kmol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Calor latente de mudança de fase, λ		
Região seca	2522E03	
Região molhada	2260E03	$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$
Região congelada	2593E03	
Porosidade do tecido seco, ε'	0,951	-
Coefficiente de Resistência à transferência de calor dos tecidos de revestimento (interno e externo), r_f	3,15E-02	$\text{K}\cdot\text{m}^2\cdot\text{W}^{-1}$
Coefficiente convectivo de troca térmica, h_f	4,05	$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
Coefficiente de Resistência à transferência de massa dos tecidos de revestimento (interno e externo), w_i	64,99	$\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$
Coefficiente convectivo de transferência de massa, h_c	2,294E-03	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
Massa específica da fibra (viscose), ρ	1530,0	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Massa específica do vapor d'água, ρ_c	1,2	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Massa específica da água líquida, ρ_w	1000,0	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Condutividade térmica do ar, k_a	2,5E-02	$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
Condutividade térmica da fibra (viscose), k_f	0,1	$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$

Condutividade térmica da água, k_w	0,57	$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
Capacidade calorífica vol. do ar seco, C_{va}	1,159E03	$\text{J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$
Capacidade calorífica vol. da fibra, C_{vf}	1300E03	$\text{J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$
Capacidade calorífica vol. da água, C_{vw}	4200E03	$\text{J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$
Coefficiente de difusão do vapor d'água na fibra, D_f	1,512E-16	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$

5.3.1 Discussão dos resultados obtidos

A simulação da transferência de calor e massa através do domínio de cálculo representado pela Figura 1, utilizando as condições de contorno e condições iniciais da Tabela 4 e parâmetros da Tabela 5 gerou resultados através dos quais se pode acompanhar a evolução dos perfis de temperatura, umidade relativa, teor total de quantidade de água no tecido, bem como distribuição da concentração de vapor d'água e quais regiões do tecido se encontram seca, molhadas ou até mesmo congeladas. Estes resultados, representando até duas horas da situação física real simulada, são agora exibidos e discutidos, procurando compreender os mecanismos físicos envolvidos.

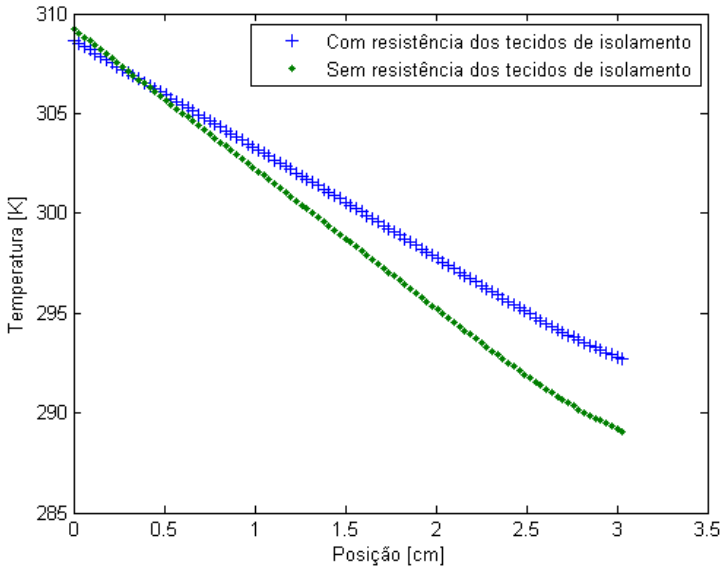
Figura 11 – perfil de temperatura obtido para os trinta primeiros minutos de situação física simulada.



No tempo inicial, como é de se esperar, o perfil de temperatura é constante e igual a $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ($293,15\text{ K}$). Este é o valor da temperatura a qual o domínio de cálculo estava acondicionado antes de ser exposto à pele humana e ao ambiente externo. Quando isso acontece, percebe-se os mecanismos de transferência de calor agindo por consequência da diferença de temperatura entre a condição inicial do domínio de cálculo ($20\text{ }^{\circ}\text{C}$), a temperatura da pele humana ($36\text{ }^{\circ}\text{C}$) e a temperatura do ambiente externo ($16\text{ }^{\circ}\text{C}$). É possível perceber que a variação da temperatura ocorre mais depressa nas regiões próximas da pele humana. Este comportamento pode ser consequência de uma diferença de temperatura maior nesta região. Mas também se pode esperar que nesta região o coeficiente de condutividade térmica e a capacidade calorífica também assumam valores maiores na medida em que o tempo vai passando nos instantes iniciais. Como pode ser concluído a partir da Eq. (7) e da Eq. (8), tanto a condutividade térmica quanto a capacidade calorífica têm seus valores dependentes do teor de água líquida total presente no domínio de cálculo. Este teor de água total, W é uma soma do teor de água absorvido pelas fibras do tecido e do teor de água livre, oriundo do processo de condensação ou congelamento (Figura 25 e Figura 26). Tanto o teor de água absorvido pelas fibras, quando o teor de água livre, dependem diretamente da umidade relativa no domínio de cálculo, que por sua vez é função da pressão de saturação – que responde diretamente à temperatura.

Outro aspecto para se observar na evolução do perfil de temperatura é que leva tempo para que os pontos próximos as fronteiras, tanto com a pele humana quanto com o ambiente externo, atinjam valores próximos aos valores especificados como condição de contorno para a simulação. Isto pode ser explicado pela presença do tecido de revestimento que envolve o domínio de cálculo em suas fronteiras. Como comentado anteriormente, estes revestimentos oferecem resistência à transferência tanto de calor como de massa entre o domínio de cálculo e suas vizinhanças. A Figura 12 faz uma comparação entre a situação simulada com a presença do tecido de revestimento e uma simulação sem a presença do tecido de revestimento, ou seja, sem a presença de resistência à transferência de calor e massa.

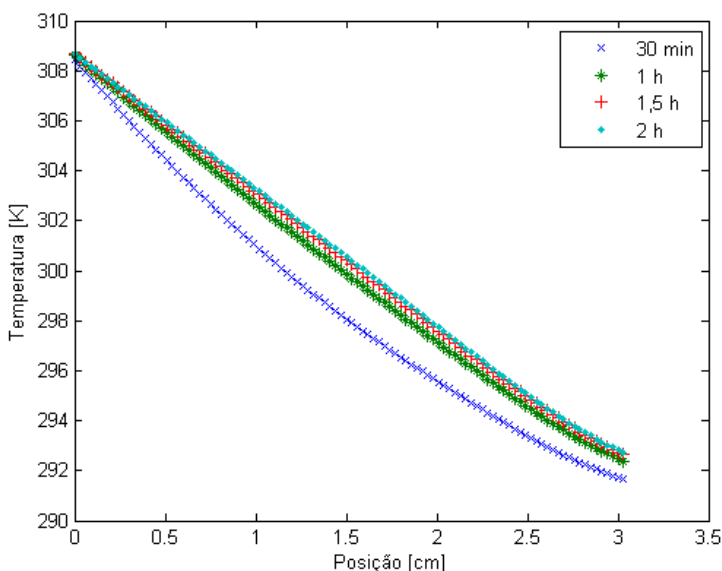
Figura 12 – comparação os resultados de uma situação apresentando resistência à transferência de calor e massa e uma situação sem resistência à transferência de calor e massa. Tempo de 2 horas de situação física simulada.



A ausência de resistência à transferência de calor e massa faz com que o perfil de temperatura sofra uma influência muito maior das condições de fronteira, apresentando um campo de temperaturas com valores consideravelmente menores do que àqueles obtidos na ocasião da presença de uma resistência à transferência de calor e massa.

Uma vez apresentada a influência do tecido de revestimento na simulação, tem-se os perfis finais de temperatura para a simulação, conforme exibido na Figura 13:

Figura 13 – perfil de temperatura obtido para 30 min, 1 h, 1,5 h e 2 h de situação física simulada.



Finalmente, depois de percorridas as duas primeiras horas, é possível visualizar a tendência do perfil de temperatura estacionário, de comportamento linear.

Sabe-se da Eq. (5) que a velocidade que dá sentido ao mecanismo convectivo é proporcional ao gradiente de pressão parcial de vapor d'água no domínio de cálculo. No início da simulação, este gradiente é maior nas regiões próximas a fronteira com a pele humana, portanto, o mecanismo convectivo atua de maneira mais significativa no início do processo de transferência, mas vai decaindo em importância na medida em que o tempo passa e os gradientes de pressão parcial de vapor d'água diminuem ao longo do domínio de cálculo, fazendo com que a velocidade gradativamente assumia valores menores e constantes, conforme se pode acompanhar na Figura 14. É possível perceber que os valores da velocidade nos instantes iniciais da simulação são altos, mas que decaem muito rapidamente. Em cerca de dez minutos decorridos já é possível visualizar um perfil de velocidades mais baixo e assumindo um comportamento constante. Esta tendência prossegue durante toda a simulação, conforme se pode acompanhar na Figura 14 e Figura 15.

Figura 14 – perfil de velocidade no domínio de cálculo para os instantes iniciais da situação física simulada.

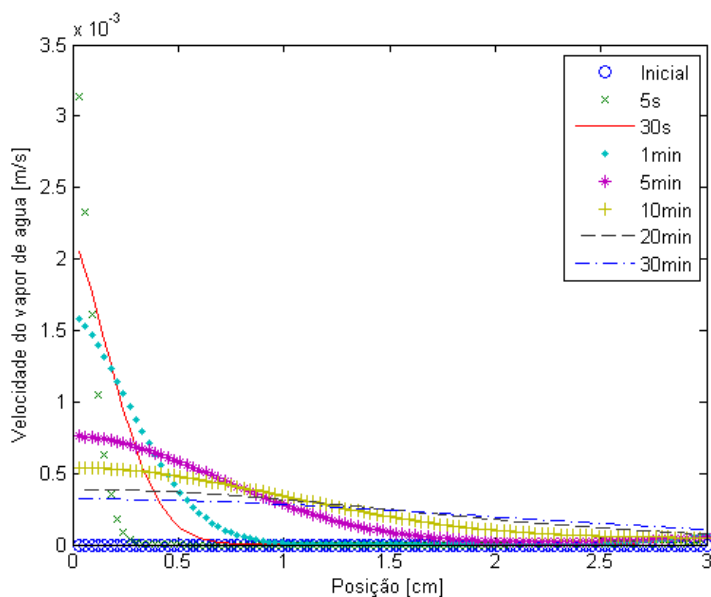
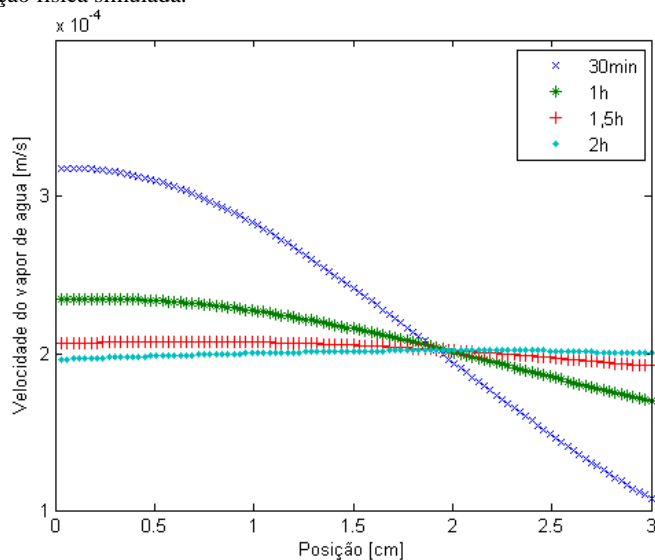


Figura 15 – perfil de velocidade no domínio de cálculo para até duas horas de situação física simulada.



Conforme comentado anteriormente no item 3.1, o esquema de interpolação espacial utilizado na discretização do modelo matemático (*WUDS*) conta com um sistema de peso sobre os mecanismos convectivo e difusivo, através dos parâmetros α e β . Estes parâmetros são função do número de Peclet (Eq. (41)) que por sua vez é função da velocidade. Uma vez que, conforme se visualiza na Figura 14 e Figura 15, a velocidade decai rapidamente ao longo do tempo, é de se esperar que o mecanismo de transporte mais influente no processo de transferência de calor e massa seja o mecanismo difusivo. Isto pode ser provado ao acompanhar a evolução dos parâmetros α e β , pois, uma vez que o parâmetro α é um indicativo de influência do mecanismo convectivo, o parâmetro β indica o quão importante está sendo o mecanismo difusivo para o processo de transferência. A Figura 16 e a Figura 17 demonstram a evolução dos parâmetros α e β , respectivamente, ao longo do tempo:

Figura 16 – evolução do parâmetro α ao longo do tempo

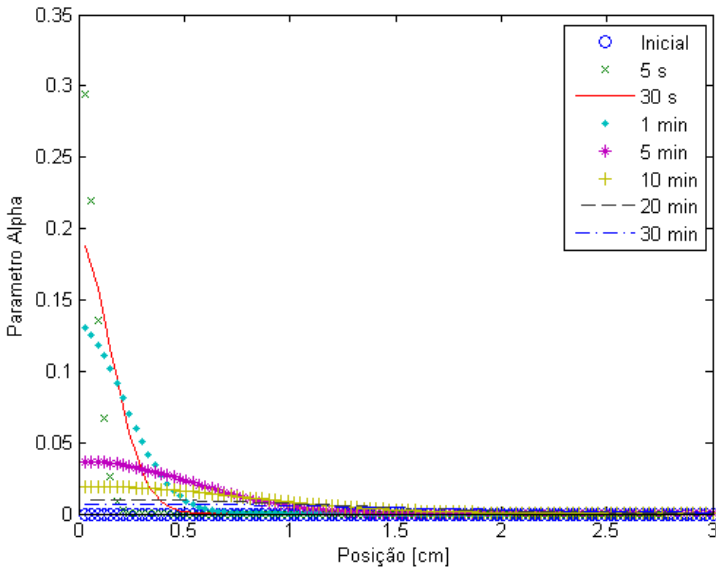
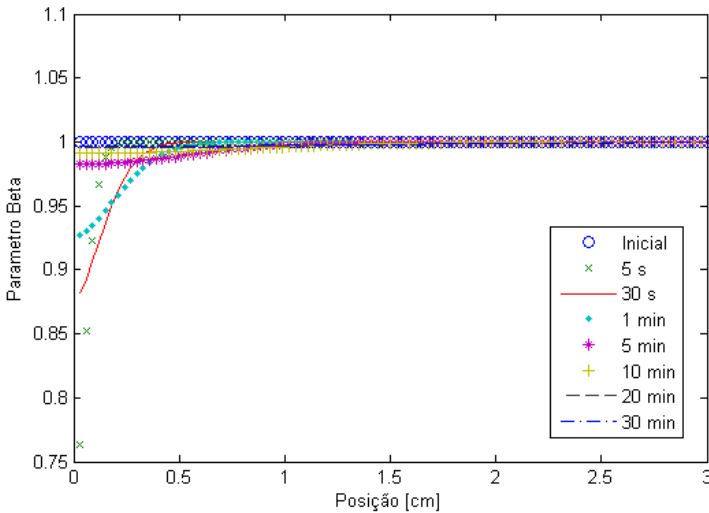
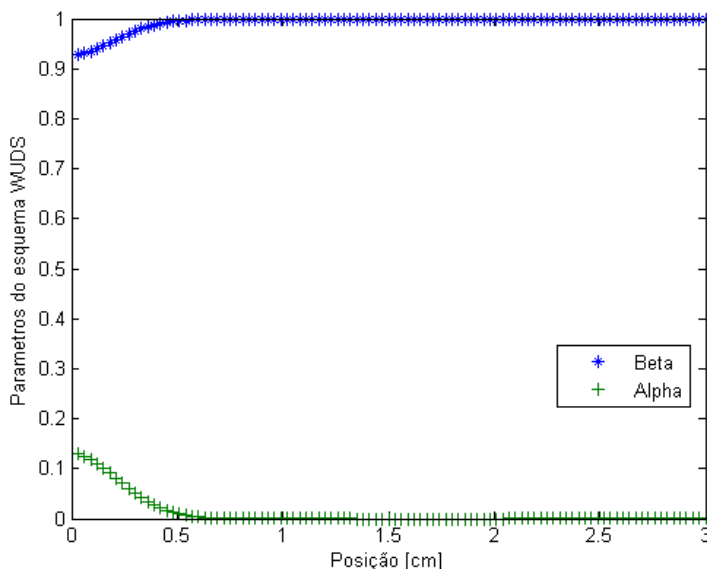


Figura 17 – evolução do parâmetro β ao longo do tempo.

Pode-se observar que o parâmetro α assume valores importantes somente nas regiões próximas a fronteira com a pele humana e somente por um curto intervalo de tempo. Isto se deve ao comportamento da velocidade, que alcança valores maiores nessas regiões no início do processo de transferência. Na medida em que o tempo passa, os valores de α decaem, sinalizando que o mecanismo convectivo vai perdendo influencia frente ao mecanismo difusivo que, como se pode observar pela evolução do perfil do parâmetro β , mantém-se como mecanismo dominante ao longo de todo o tempo. A Figura 18 compara os valores de α e β num mesmo momento para a situação física, reforçando a conclusão de que o mecanismo mais influente ao longo do tempo é o mecanismo difusivo.

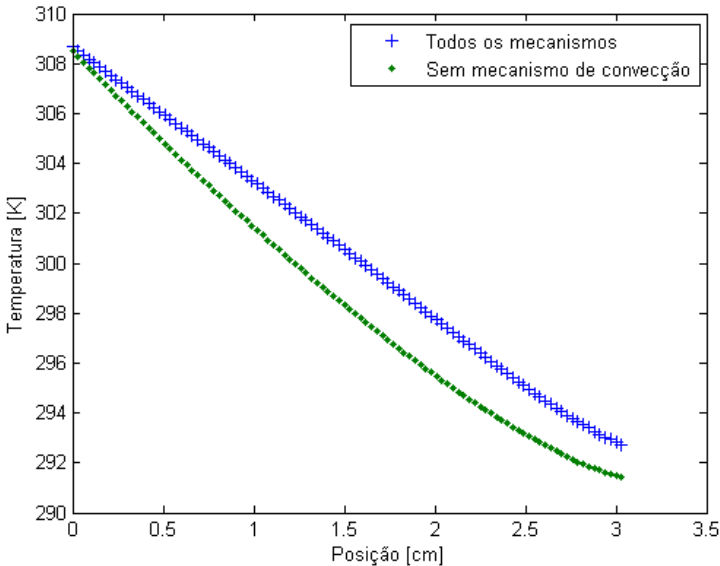
Figura 18 – comparação entre os parâmetros α e β para 1 minuto de situação física simulada.



No entanto, mesmo que o mecanismo convectivo perca grande parte de sua influência ao longo do processo, ele continua acelerando a transferência de calor e massa ao longo do tempo (o valor de α , apesar de baixo, nunca se iguala a zero – vide perfil de velocidade na Figura 15). O mecanismo convectivo só vai cessar quando se atingir uma condição em que a diferença de pressão parcial de vapor d'água entre dois pontos do domínio de cálculo seja nula, condição somente possível se a pressão de vapor for igual em todos os pontos do domínio de cálculo, situação que só é atingida se as condições de contorno da fronteira com a pele humana e com o ambiente externo forem iguais.

Uma comparação entre os perfis de temperatura para uma situação em que se considera o mecanismo convectivo e uma situação em que se negligência o mecanismo convectivo é exibida na Figura 19.

Figura 19 – comparação entre os perfis de temperatura para simulação abrangendo todos os mecanismos de transporte e uma simulação sem a presença do mecanismo de convecção. Tempo de 2 h de simulação da situação física real.



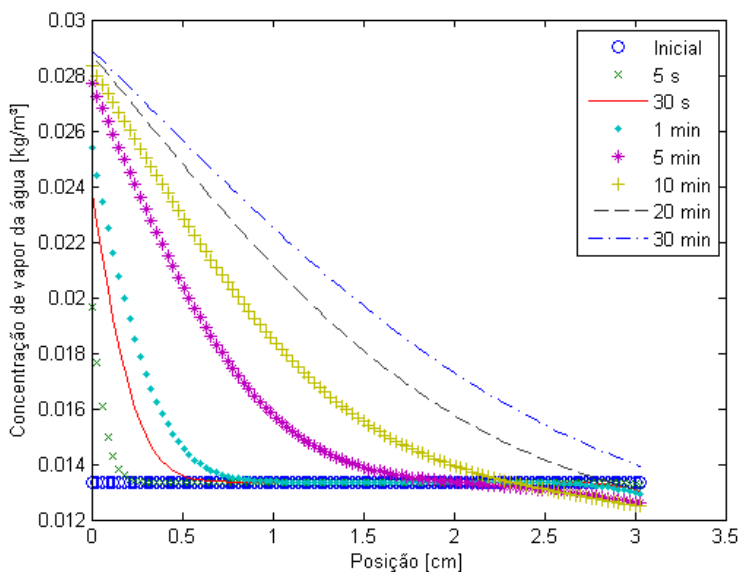
Pode-se dizer que o perfil de temperatura para a simulação com ausência do mecanismo de convecção ainda está evoluindo para um perfil de tendência estacionária. Este perfil obtido com a ausência de convecção é muito parecido com o perfil obtido para 30 minutos de simulação que é exibido na Figura 13 (cuja simulação leva em conta todos os mecanismos).

É possível concluir que a transferência de calor é mais lenta quando não há contribuição convectiva na situação física, ou seja, levaria mais do que duas horas para que o perfil de temperatura atinja o estado estacionário, já que os únicos mecanismos de transferência seriam o difusivo e o mecanismo radiativo (incluído no termo fonte da equação de conservação). Assim, é sensato dizer que, tanto nos instantes iniciais quanto nos instantes mais avançados, o mecanismo convectivo é importante para o processo de transferência de calor e massa ao longo do domínio de cálculo e desta maneira não deve ser negligenciado.

A evolução do perfil de concentração de vapor d'água no domínio de cálculo exhibe um comportamento muito semelhante àquele

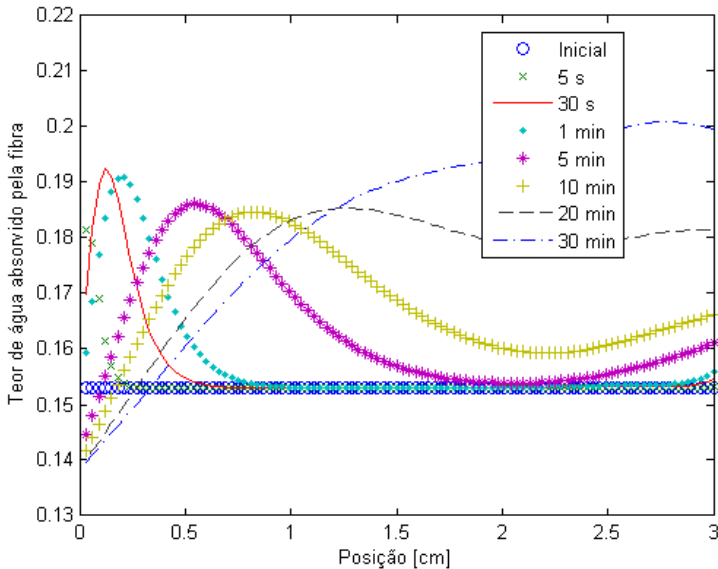
apresentado pelo perfil de temperatura. Logicamente valem as mesmas considerações que foram feitas em relação ao mecanismo convectivo de transferência e à presença da resistência de transferência oferecida pelo tecido de revestimento que envolve o domínio de cálculo. A Figura 20 mostra o perfil de concentração de vapor d'água para os instantes iniciais.

Figura 20 – evolução do perfil de concentração de vapor d'água para os primeiros 30 minutos de simulação da situação física real.



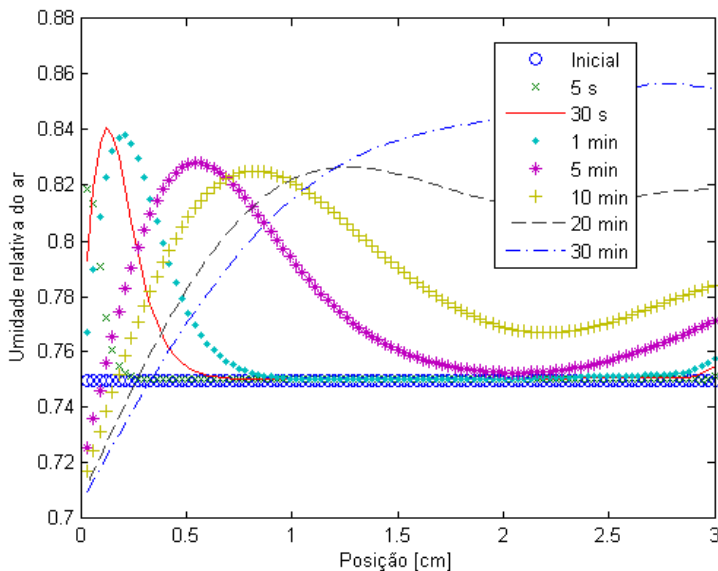
A Figura 21 exibe os perfis do teor de água absorvido pelas fibras do tecido. Conforme nos mostra a Figura 3 e a Eq. (17), o teor de água absorvido pelas fibras é uma função diretamente proporcional da umidade relativa no domínio de cálculo.

Figura 21 – perfil do teor de água absorvido pela fibra do tecido de isolamento do domínio de cálculo.



Nos tempos iniciais, temos um maior acúmulo de água absorvida nas regiões próximas da fronteira com a pele humana. Isto se deve ao fato de que a umidade relativa é maior nestas regiões nos tempos iniciais, que se deve pela influência da condição de contorno da umidade relativa da fronteira com a pele humana especificada em 80%, conforme se pode observar na Figura 22. Na medida em que o tempo evolui, o comportamento do perfil de água absorvida pelo tecido se inverte, a influência da condição de contorno de umidade relativa da pele humana já não exerce influência frente ao efeito da pressão de saturação maior (consequência de uma temperatura maior) nestas regiões, o que leva a uma umidade relativa menor. Na outra extremidade percebe-se que acontece o contrário, uma vez que as temperaturas menores fazem a pressão de saturação assumir valores menores e, por consequência, são geradas condições de umidades relativas maiores nessas regiões, fazendo com que a fibra do tecido absorva maior quantidade de água. Desta forma, para tempos mais avançados, têm-se regiões mais secas perto da fronteira com a pele humana e regiões com umidade relativa maior (e mais chances de condensação) próximas ao ambiente externo.

Figura 22 – perfil de umidade relativa para os tempos iniciais de simulação da situação física.



A evolução do perfil de umidade relativa para até duas horas de situação real simulada é exibido na Figura 23. É possível acompanhar sua tendência a um perfil estacionário e também perceber que o valor da umidade relativa não ultrapassa 100%. Tal situação não oferece condições para condensação do vapor d'água. Neste caso, o valor do teor de água livre (\tilde{W}) deve ser nulo ou até negativo durante todo o tempo. Este comportamento pode ser visualizado na Figura 24.

Figura 23 – perfil de umidade relativa do ar para até 2 horas de simulação da situação real.

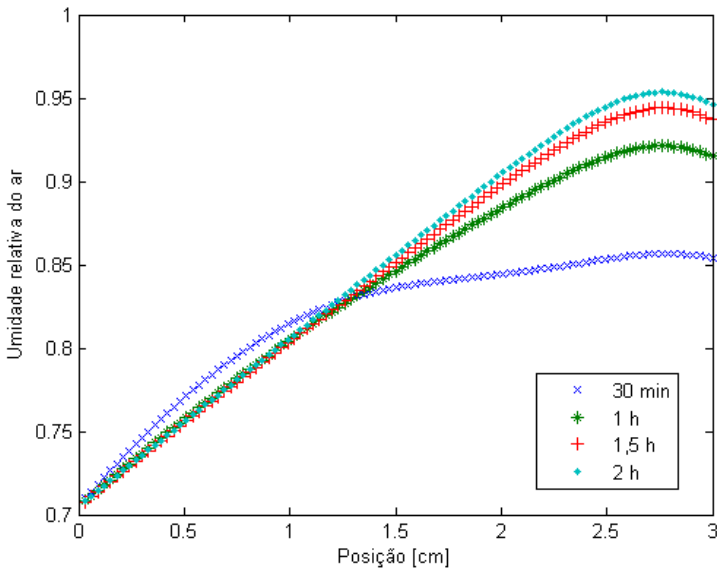
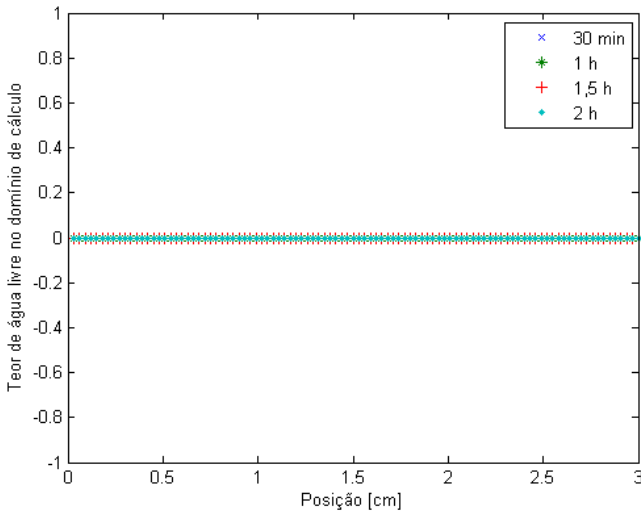


Figura 24 – perfil do teor de água livre para até 2 horas de simulação da situação real.



Uma vez que não se observa acúmulo de água livre no domínio de cálculo durante a simulação, já que as condições de umidade relativa não atingem valores acima de 100%. O teor de água total (W) no domínio de cálculo acaba sendo composto apenas pelo teor de água absorvido pelas fibras do tecido, e seu perfil para os tempos iniciais e para até duas horas de simulação da situação tem o seguinte comportamento:

Figura 25 – perfil do teor de água total para até 30 minutos de simulação da situação física.

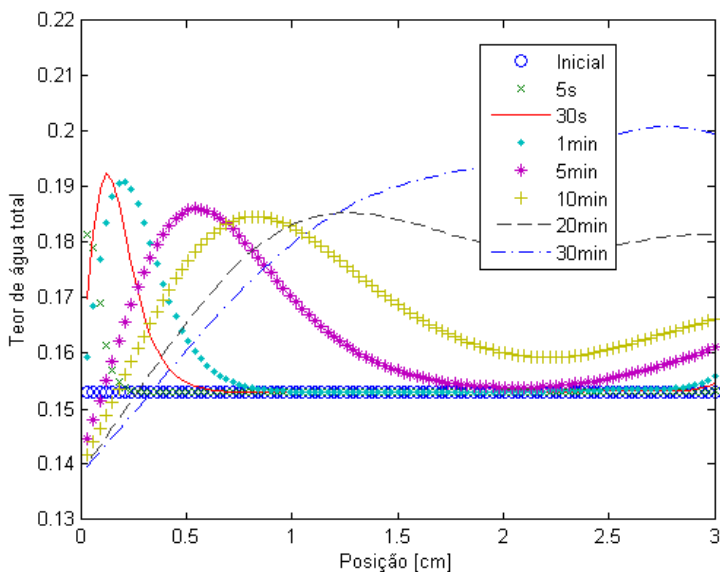
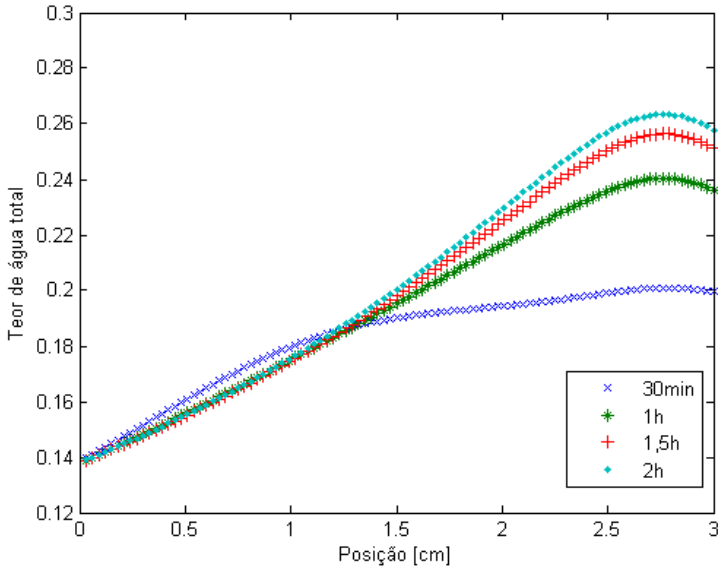


Figura 26 – perfil de teor de água total para até 2 horas de simulação da situação física.



Dos perfis estimados pela simulação da situação física, é possível concluir que a região mais próxima da pele humana (região compreendida entre 0 e 1 centímetro) é mais seca e apresenta condições de temperatura variando entre 35 °C e 31 °C, e umidade relativa variando entre 70% e 80%, o que pode fazer concluir que o tecido de isolamento funciona de forma satisfatória para proteger a pele da temperatura baixa e condições menos confortáveis do ambiente externo.

6 CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Após todo o trabalho de fechamento do modelo matemático e discretização do mesmo, além do desenvolvimento do código computacional para as simulações das situações físicas propostas, pode-se dizer que os resultados obtidos foram satisfatórios.

A comparação entre os resultados experimentais e os resultados obtidos a partir da simulação com o modelo matemático proposto (exibida na Figura 8), apesar de ter apresentado erros relativos consideráveis, também apresentou uma tendência de comportamento satisfatória entre os perfis e, conforme fora discutido, os erros envolvidos são aparentemente uma combinação entre erros de cunho experimental e no cálculo do teor de água absorvido pelas fibras, que depende de uma função da umidade relativa que é particular para cada tipo de fibra de tecido.

Os resultados obtidos nas condições típicas de um dia de inverno na cidade de Florianópolis-SC mostraram-se fisicamente coerentes e indicaram que uma roupa com as características do domínio de cálculo é eficaz em proteger a pele humana das condições desconfortáveis especificadas para o ambiente externo.

Também é interessante ressaltar a influência do tecido de revestimento como resistência à transferência de calor e massa. As propriedades deste tecido são de considerável importância e vão refletir notavelmente nos perfis de temperatura e teor total de água, uma vez que estes tecidos servem como uma espécie de proteção às condições das fronteiras do domínio de cálculo. Outro fator a ser levado em conta é a espessura destes tecidos de revestimento. Neste trabalho, a espessura destes tecidos é da ordem de um décimo de milímetro e por consequência disto, são apenas considerados como resistências ao transporte de calor e massa. Caso essa espessura seja maior, é necessário considerar a necessidade de modelar com maiores detalhes a transferência de calor e massa através do tecido de revestimento, assim como feito para o tecido de isolamento.

A influência do mecanismo convectivo também foi avaliada e, como se pode observar, apesar dos valores de velocidade decaírem com o passar do tempo, o mecanismo convectivo tem sua importância durante todo o processo de transferência de calor e massa e por isso não deve ser negligenciado.

Num aspecto geral, o modelo matemático, implementado a partir da rotina computacional escrita em C++, apresenta-se como uma ferramenta útil na predição dos perfis de temperatura, concentração de

vapor d'água, umidade relativa, teor total de água, entre outras informações que podem ser utilizadas pelos métodos de análise de conforto térmico e, desta forma, é possível dizer que o objetivo deste trabalho foi alcançado de maneira satisfatória

Este trabalho pode e deve ser melhorado. Como sugestões para futuros trabalhos envolvendo a transferência de calor e massa em tecidos, é proposto:

- ✓ Conceber experimentos de bancada para a obtenção de dados experimentais que possam ser comparados com os resultados obtidos numericamente no sentido de identificar os pontos fracos do modelo e proceder à sua melhoria obtendo então a validação do modelo;
- ✓ Desenvolver uma interface gráfica para a rotina computacional, de modo a facilitar a entrada dos dados de propriedades físicas e condições iniciais e de contorno, bem como um sistema de saída de resultados já plotados. Neste ponto sugere-se a implementação da biblioteca Dislin, disponível gratuitamente na web e com suporte para várias linguagens de programação.
- ✓ Para uma maior aproximação das condições reais, seria interessante reescrever o modelo matemático para as demais dimensões do espaço, utilizando possivelmente sistemas de coordenadas que não o cartesiano, para representar melhor a geometria das vestimentas.
- ✓ Acoplar ao modelo a variação da temperatura na fronteira com a pele humana como uma função da atividade metabólica humana, obtendo também maior aproximação com as condições reais do fenômeno.

REFERÊNCIAS

BROEGA, A. C.; SILVA, M. E. C. **O conforto total do vestuário: Design para os cinco sentidos.** V Encuentro Latinoamericano de Diseño “Diseño en Palermo” Comunicação Académicas. Buenos Aires, Argentina. 2010.

CORREIA, E. L. S. **Modelo térmico aplicado à caracterização do conforto proporcionado pelo vestuário.** 2005. 63 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Humana) – Universidade do Minho. 2005.

CHENG, X.; FAN, J. **Simulation of heat and moisture transfer with phase change and mobile condensates in fibrous insulation.** International Journal of Thermal Sciences, Volume 43, Issue 7, Páginas 665-676, 2004.

DEITEL, H. M.; DEITEL, P. J. C++: Como programar. Ed. 5. São Paulo: atual, 2006. 1164 p.

FAN, J.; CHENG, X.; WEN, X.; SUN, W. **An improved model of heat and moisture transfer with phase change and mobile condensates in fibrous insulation and comparison with experimental results.** International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 47, Issues 10–11, Páginas 2343-2352, 2004.

FAN, J.; CHENG, X.; CHEN, Y. **An experimental investigation of moisture absorption and condensation in fibrous insulations under low temperature.** Experimental Thermal and Fluid Science, Volume 27, Issue 6, Páginas 723-729, 2003.

FAN, J.; WEN, X. **Modeling heat and moisture transfer through fibrous insulation with phase change and mobile condensates.** International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 45, Issue 19, Páginas 4045-4055, 2002.

FAN, J.; LUO, Z.; LI, Y. **Heat and moisture transfer with sorption and condensation in porous clothing assemblies and numerical simulation.** International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 43, Issue 16, Páginas 2989-3000, 2000.

FARNWORTH, B. **Mechanisms of Heat Flow Through Clothing Insulation.** Textile Research Journal, Volume 53, Páginas 717-275, 1983.

FILGUEIRAS, A. P. A. **Optimização do design de malhas multifuncionais para utilização em vestuário desportivo.** 2008. 376 f. Tese (Doutorado em Engenharia Têxtil) – Universidade do Minho. 2008.

HANG, X. D.; SUN, W.; YE, C. **Finite volume solution of heat and moisture transfer through three-dimensional textile materials.** Computers & Fluids, Volume 57, Páginas 25-39, 2012.

HENSEN, J. L. Maria. **On the thermal interaction of building structure and heating and ventilating system.** 1991. 197 f. Tese (PhD) – Technische Universiteit Eindhoven, 1991.

LI, Y.; LUO, Z. X. **An improved mathematical simulation of the coupled diffusion of moisture and heat in wool fabric.** Textile Research Journal, Volume 69, n° 10, Páginas 760-768, 1998.

LEMOS, E. M. **Implementação de um método de volumes finitos de ordem superior com tratamento multibloco aplicado à simulação de escoamentos de fluidos viscoelásticos.** 2011, 289 f. Tese (Doutorado em Engenharia Química) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. 2011.

LUO, X.; XU, Q. **Fourth-order algorithm for solving 2D transient heat and moisture transfer simulation through fabric.** Applied Mathematics and Computation, Volume 182, Issue 2, Páginas 1542-1555, 2006.

MALISKA, Clovis R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional.** 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010. 453 p.

MORTON, W. E.; HEARLE, J. W. S. **Physical properties of textile fibres.** Woodhead Publishing in Textiles. 4. ed. Cambridge: The Textile Institute: 2008. 765 p.

MOTAKEF, S.; MÄHER A. E. **Simultaneous heat and mass transfer with phase change in a porous slab**. International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 29, Issue 10, Páginas 1503-1512, 1986.

NEVES, M.; CUNHA, J. **Integrando o conforto e a estética no design de tecidos**. II SIENTEX – Simpósio Internacional de Engenharia Têxtil, Natal, Brasil. 2004.

PATANKAR, S. V. **Numerical heat transfer and fluid flow**. Washington, DC: Hemisphere Publishing Corp, 1980. 210 p.

PRESS, W. H. **Métodos numéricos aplicados: Rotinas em C++**. 3 ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.

REID, R. C. **The properties of gases and liquids**. 4 ed. McGraw-Hill, 1987.

TIAN, M.; ZHU, S.; PAN, N. **Skin thermal stimulation on touching cool fabric from the transient stage to steady-state stage**, International Journal of Thermal Sciences, Volume 53, Páginas 80-88, 2012.

WU, H.; FAN, J. **Study of heat and moisture transfer within multi-layer clothing assemblies consisting of different types of battings**. International Journal of Thermal Sciences, Volume 47, Issue 5, Páginas 641-647, 2008.