

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

César Cataldo Scharlau

**CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS E  
APLICAÇÕES**

Florianópolis

2013



César Cataldo Scharlau

**CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS E  
APLICAÇÕES**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas.

Orientador: Prof. Alexandre Trofino Neto, Dr.

Coorientador: Prof. Romeu Reginatto, Dr.

Florianópolis

2013

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Scharlau, César Cataldo  
Controle de sistemas chaveados e aplicações / César  
Cataldo Scharlau ; orientador, Alexandre Trofino Neto ; co-  
orientador, Romeu Reginatto. - Florianópolis, SC, 2013.  
198 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia de Automação e Sistemas.

Inclui referências

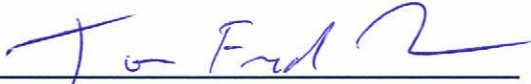
1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2. Sistemas  
chaveados. 3. Desigualdades matriciais lineares. 4.  
Estabilidade. 5. Conversores. I. Trofino Neto, Alexandre.  
II. Reginatto, Romeu. III. Universidade Federal de Santa  
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de  
Automação e Sistemas. IV. Título.

César Cataldo Scharlau

## CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS E APLICAÇÕES

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do Título de “Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Florianópolis, 8 de maio 2013.



---

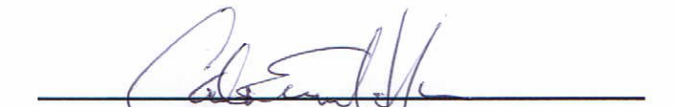
Prof. Jomi Fred Hübner, Dr.  
Coordenador do Curso

**Banca Examinadora:**



---

Prof. Alexandre Trofino Neto, Dr.  
Presidente



---

Prof. Carlos Emanuel de Souza, Dr.  
Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC)



---

Prof. João Manoel Gomes da Silva Junior, Dr.  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)





---

Prof. Daniel Ferreira Coutinho, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)



---

Prof. Nestor Roqueiro, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)



---

Prof. Hector Bessa Silveira, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)





Dedico este trabalho  
à minha mãe Gianina e  
ao meu pai José Catarino.



## AGRADECIMENTOS

Aos professores Alexandre Trofino, Romeu Reginatto e Maurício de Oliveira, pela orientação, incentivo, apoio, amizade e sabedoria que compartilharam comigo.

Aos membros da banca examinadora: professor Carlos Emanuel de Souza, professor João Manoel Gomes da Silva Junior, professor Daniel Ferreira Coutinho, professor Nestor Roqueiro e professor Hector Bessa Silveira, pelas suas contribuições para este trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela provisão das bolsas de estudo de doutorado (proc. no. 140939/2009-1) e de doutorado sanduíche no exterior (proc. no. 201638/2010-0).

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas (PPGEAS) da UFSC, pela oportunidade de realização do doutorado. Aos professores e funcionários do Departamento de Automação e Sistemas (DAS) da UFSC, pelo auxílio e colaboração.

Aos amigos que conheci em Florianópolis e em San Diego, pela convivência e companheirismo durante a realização do curso. Aos meus “velhos” amigos que sempre me incentivaram e que compreenderam a minha ausência nos últimos anos.

À minha família, pelo apoio em todos os momentos da minha vida, em especial ao “Casal 20” (minha irmã Helena e Alex), ao meu avô Preny, e aos meus pais Gianina e José Catarino.



*Faça as coisas o mais simples que você  
puder, porém não as mais simples.*

Albert Einstein



## RESUMO

Esta tese apresenta uma metodologia para análise e desenvolvimento de estratégias de controle para sistemas chaveados. Inicialmente, são estabelecidas condições de projeto para uma lei de chaveamento baseada na função ‘max’ considerando o caso de sistemas chaveados afins. As condições garantem que o sistema chaveado, sob efeito da lei de chaveamento projetada, apresente estabilidade global e assintótica, mesmo com a ocorrência de modos deslizantes em qualquer superfície de chaveamento do sistema. A principal contribuição das condições de projeto propostas é que as mesmas não exigem a existência de uma combinação Hurwitz estável das matrizes de dinâmicas dos subsistemas que compõem o sistema chaveado afim. Com base nestas condições, uma metodologia de projeto é proposta empregando desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities* - LMIs) como ferramenta de trabalho. A descrição das condições de projeto como um problema LMI faz com que seja necessária a existência de uma combinação Hurwitz estável das matrizes de dinâmicas dos subsistemas. Na sequência, são incluídos critérios de desempenho no projeto da lei de chaveamento. Dois requisitos de desempenho foram tratados: o custo garantido e a atenuação de distúrbio. Finalmente, a metodologia de projeto é estendida para uma classe de sistemas chaveados não lineares, tendo como estudos de caso aplicações de controle de motores de indução acionados por inversores e controle de aerogeradores de indução conectados à rede elétrica com conversores. Dentre as diferentes topologias de aerogeradores, a escolhida para o estudo foi a do Gerador de Indução de Dupla Alimentação (*Doubly Fed Induction Generator* - DFIG). Todos os resultados propostos foram ilustrados através de exemplos numéricos baseados em sistemas acadêmicos e em modelos que reproduzem as condições reais de aplicação de conversores de potência, motores de indução e aerogeradores.

**Palavras-chave:** Sistemas chaveados. Desigualdades matriciais lineares. Estabilidade. Conversores





## ABSTRACT

This thesis presents a methodology for analysis and development of control strategies in the context of switched systems. Firstly, we propose some useful conditions to design a switching rule for affine switched systems. The switching rule is based on the ‘max’ composition principle. The obtained results guarantee global asymptotic stability of the closed-loop switched system, despite occurrence of sliding modes at any switching surface of the system. The main contribution of this proposed method is that the conditions do not require a Hurwitz convex combination of the dynamic matrices of the affine subsystems. Then, the stability conditions are described as a Linear Matrix Inequality (LMI) problem. The LMI formulation of the proposed conditions assumes the existence of a Hurwitz convex combination of the dynamic matrices. In the sequel, the switching rule design method is extended to encompass the design with performance requirements, as well. The regarded performance requirements entail guaranteed cost and disturbance attenuation. At last, the design method is extended to a class of nonlinear switched systems. Moreover, as examples to this class of nonlinear systems, two potential applications are considered, inverter-fed induction motors and wind power induction generators connected to the grid via power converter. In this thesis, the study of power converters for wind generators focuses on the Doubly Fed Induction Generator (DFIG) topology. All the proposed results of this thesis are illustrated using numerical examples based on academic systems and models which reproduce practical applications of power converters, induction motors and wind power generators.

**Keywords:** Switched systems. Linear matrix inequalities. Stability. Converters



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Exemplo das trajetórias de um sistema chaveado com dois modos de operação.....	41
Figura 2	Exemplo 2.1: plano de fase de um sistema chaveado com trajetória instável composto por dois modos estáveis.....	43
Figura 3	Exemplo 2.2: plano de fase de um sistema chaveado com trajetória estável composto por dois modos instáveis.....	44
Figura 4	Exemplo 2.3: funções de Lyapunov para o sistema chaveado do Exemplo 2.2.....	47
Figura 5	Exemplo 3.1: conversor abaixador e elevador de tensão ( <i>Buck-Boost</i> ).....	60
Figura 6	Exemplo 3.1: função de Lyapunov $V(e)$ e limitante inferior $\bar{V}(e)$ .....	63
Figura 7	Exemplo 3.1: resultados de simulação do conversor <i>Buck-Boost</i> para $E_{\text{out}} = -9V$ .....	66
Figura 8	Exemplo 3.2: plano de fase com as trajetórias de cada subsistema para diferentes condições iniciais.....	67
Figura 9	Exemplo 3.2: função de Lyapunov $V(e)$ ; a curva em preto em (b) representa a superfície de chaveamento.....	68
Figura 10	Exemplo 3.2: plano de fase do sistema chaveado. Linhas cheias em preto representam as trajetórias; linhas tracejadas coloridas são as superfícies de chaveamento.....	70
Figura 11	Exemplo 4.1: resultados de simulação com subsistemas estáveis ( $\beta = 1$ ). Linhas cheias em preto representam as trajetórias; linhas tracejadas coloridas são as superfícies de chaveamento.....	80
Figura 12	Exemplo 4.1: resultados de simulação com subsistemas instáveis ( $\beta = -1$ ). Linhas cheias em preto representam as trajetórias; linhas tracejadas coloridas são as superfícies de chaveamento.....	81
Figura 13	Exemplo 4.2: conversor abaixador de tensão ( <i>Buck</i> )....	82
Figura 14	Exemplo 4.2: resultados de simulação do conversor <i>Buck</i> com realimentação de saída.....	84
Figura 15	Exemplo 4.3: resultados de simulação do conversor <i>Buck-Boost</i> para $E_{\text{out}} = -21V$ .....	85
Figura 16	Exemplo 5.1: resultados de simulação do conversor <i>Buck-Boost</i> para $E_{\text{out}} = -21V$ com custo garantido.....	95
Figura 17	Exemplo 5.2: resultados de simulação com subsistemas	

estáveis ( $\beta = 1$ ) e inclusão da atenuação de distúrbio..... 103

Figura 18 Exemplo 5.2: resultados de simulação com subsistemas instáveis ( $\beta = -1$ ) e inclusão da atenuação de distúrbio, sendo  $t_0 = 0, 26s$ ,  $e_1(t_0) = 5, 1 \times 10^{-3}$  e  $e_2(t_0) = 14, 3 \times 10^{-3}$ ..... 104

Figura 19 Exemplo 5.2: plano de fase dos resultados de simulação com subsistemas instáveis ( $\beta = -1$ ) e inclusão da atenuação de distúrbio. Linhas cheias em preto representam as trajetórias; linhas tracejadas coloridas são as superfícies de chaveamento. .... 104

Figura 20 Exemplo 5.2: resultados de simulação com subsistemas instáveis ( $\beta = -1$ ) e inclusão da atenuação de distúrbio, valores de  $w \in (-2.0, 0.8)$ . .... 105

Figura 21 Exemplo 5.3: resultados de simulação do conversor *Buck-Boost* para  $E_{out} = -9V$  com inclusão da atenuação de distúrbio... 106

Figura 22 Exemplo 5.3: resultados de simulação do conversor *Buck-Boost* para  $E_{out} = -21V$  com inclusão da atenuação de distúrbio. 107

Figura 23 Acionamento de uma carga trifásica empregando inversor de frequência. .... 119

Figura 24 Exemplo 6.1: erro de seguimento para as grandezas físicas do motor de indução..... 134

Figura 25 Exemplo 6.1: resultados de simulação das tensões do estator. .... 135

Figura 26 Exemplo 6.1: resultados de simulação da corrente em uma das fases do estator..... 135

Figura 27 Diagrama esquemático de conexão do DFIG ao sistema elétrico. .... 138

Figura 28 Circuito básico de um conversor estático de potência do tipo *back-to-back*. .... 139

Figura 29 Gráfico da potência elétrica em função da velocidade do vento em um aerogerador típico..... 149

Figura 30 Exemplo 7.1: erro de seguimento para as grandezas físicas do RSC..... 176

Figura 31 Exemplo 7.1: erro de seguimento para as correntes do GSC..... 176

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Estados de operação das chaves do inversor trifásico....	120
Tabela 2	Exemplo 6.1: parâmetros do motor de indução trifásico.	133
Tabela 3	Exemplo 7.1: parâmetros do gerador de indução.....	174
Tabela 4	Exemplo 7.1: parâmetros curva $C_p$ .....	174
Tabela 5	Exemplo 7.1: parâmetros da turbina eólica.....	175



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i> - Desigualdades Matriciais Lineares .....	32
CC	Corrente Contínua .....	33
CA	Corrente Alternada.....	33
DFIG	<i>Doubly Fed Induction Generator</i> - Gerador de Indução de Dupla Alimentação .....	34
BMI	<i>Bilinear Matrix Inequalities</i> - Desigualdades Matriciais Bilineares .....	48
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i> - Modulação por Largura de Pulso	60
IGBT	<i>Insulated Gate Bipolar Transistor</i> - Transistor Bipolar de Porta Isolada .....	119
CSI	<i>Current Source Inverter</i> - Inversor Alimentado por Corrente	119
VSI	<i>Voltage Source Inverter</i> - Inversor Alimentado por Tensão	119
UPS	<i>Uninterruptible Power Supplies</i> - Fontes Ininterruptas de Energia.....	119
DTC	<i>Direct Torque Control</i> - Controle Direto de Torque .....	124
RSC	<i>Rotor Side Converter</i> - Inversor ligado ao rotor.....	139
GSC	<i>Grid Side Converter</i> - Inversor ligado à rede elétrica.....	139





## LISTA DE SÍMBOLOS E NOTAÇÃO

$\mathbb{R}^n$	Espaço Euclidiano de dimensão $n$ .....	38
$\ x\ $	Norma Euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$ .....	38
$M^T$	Matriz transposta de $M$ .....	46
$M = M^T$	Matriz $M$ simétrica .....	46
$M > 0$	Matriz $M$ positiva definida .....	46
$M < 0$	Matriz $M$ negativa definida .....	46
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Conjunto das matrizes reais de dimensão $m \times n$ .....	51
$\star$	Bloco de uma matriz que pode ser deduzido por simetria .....	64
$0_{m \times n}$	Matriz de zeros de dimensão $m \times n$ .....	73
$I_n$	Matriz identidade de dimensão $n$ .....	73
$\otimes$	Produto de Kronecker .....	75
$\lambda_{\min}(M)$	Mínimo autovalor da matriz $M$ real e simétrica .....	76
$\mathcal{L}_2$	Conjunto dos sinais quadraticamente integráveis .....	95
$\ x(t)\ _2$	Norma 2 de sinais quadraticamente integráveis .....	96
$\Lambda^s$	Fluxos no estator .....	116
$\Lambda^r$	Fluxos no rotor .....	116
$i^s$	Correntes do estator .....	116
$i^r$	Correntes do rotor .....	116
$v^s$	Tensões no estator .....	116
$v^r$	Tensões no rotor .....	116
$d$	Subscrito que indica eixo direto .....	116
$q$	Subscrito que indica eixo de quadratura .....	116
$R_s$	Resistência do estator .....	117
$L_s$	Indutância do estator .....	117
$R_r$	Resistência do rotor .....	117
$L_r$	Indutância do rotor .....	117
$L_m$	Indutância de magnetização .....	117
$\omega_r$	Velocidade angular elétrica do rotor .....	117
$\omega_s$	Velocidade síncrona do campo do estator .....	117
$p$	Número de pares de polos .....	117
$T_m$	Torque de carga .....	117
$J_m$	Momento de inércia .....	117

$B_m$	Coefficiente de atrito viscoso.....	117
$\omega_{rm}$	Velocidade angular mecânica do rotor.....	117
$\vartheta(\mathcal{B})$	Conjunto de todos os vértices do politopo $\mathcal{B}$ .....	128
$V_v$	Velocidade do vento.....	140
$\lambda$	Velocidade específica de rotação da turbina eólica.....	140
$\beta$	Ângulo do passo das pás.....	140
$P_v$	Potência eólica.....	140
$\rho$	Densidade do ar.....	140
$A$	Área de passagem do ar.....	140
$P_u$	Potência mecânica capturada pela turbina eólica.....	141
$\omega_u$	Velocidade de rotação da turbina eólica.....	141
$T_u$	Torque mecânico desenvolvido pela ação do vento.....	141
$C_P$	Coefficiente de potência da turbina eólica.....	141
$R$	Raio das pás da turbina eólica.....	141
$C_Q$	Coefficiente de torque aerodinâmico.....	141
$V_{vb}$	Velocidade de vento base.....	142
$V_{vN}$	Velocidade de vento nominal.....	142
$C_{PN}$	Coefficiente de potência nominal.....	142
$\lambda_N$	Velocidade específica nominal.....	142
$P_{uN}$	Potência nominal da turbina eólica.....	142
$\omega_{uN}$	Velocidade de rotação nominal.....	142
$\omega_{ub}$	Rotação base da turbina eólica.....	142
$\omega_N$	Rotação nominal da turbina eólica.....	142
$P_b$	Potência base.....	143
$V_b$	Tensão base.....	143
$\omega_b$	Frequência base.....	143
$H$	Momento de inércia por unidade.....	144
$F_{pu}$	Coefficiente de atrito viscoso por unidade.....	144
$\omega_e$	Velocidade síncrona do campo do estator por unidade..	144
$P_s$	Potência ativa do estator.....	145
$Q_s$	Potência reativa do estator.....	145
$P_r$	Potência ativa do rotor.....	145
$Q_r$	Potência reativa do rotor.....	145
$i^g$	Correntes do GSC.....	148

$v^g$	Tensões no GSC .....	148
$R_f$	Resistência do filtro no GSC .....	148
$L_f$	Indutância do filtro no GSC .....	148
$C_g$	Capacitância do <i>link</i> CC do conversor <i>back-to-back</i> .....	168
$P_g$	Potência ativa do GSC .....	168
$P_g$	Potência reativa do GSC .....	168



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	31
1.1 APRESENTAÇÃO .....	31
1.2 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS .....	34
<b>2 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES</b> .....	37
2.1 INTRODUÇÃO .....	37
2.2 SISTEMAS CHAVEADOS .....	37
2.3 CLASSIFICAÇÃO QUANTO AO TIPO DE COMUTAÇÃO	39
2.4 MODOS DESLIZANTES .....	40
2.5 ESTABILIDADE DE SISTEMAS CHAVEADOS .....	42
2.5.1 Estabilidade de sistemas chaveados sob comutação arbitrária .....	44
2.5.2 Estabilidade de sistemas chaveados sob comutação com restrições .....	45
2.6 ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS CHAVEADOS .....	46
2.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	49
<b>3 CONDIÇÕES DE PROJETO DE LEI DE CHAVEA- MENTO UTILIZANDO FUNÇÃO ‘MAX’</b> .....	51
3.1 INTRODUÇÃO .....	51
3.2 SISTEMAS CHAVEADOS AFINS .....	51
3.3 LEI DE CHAVEAMENTO UTILIZANDO A FUNÇÃO MAX	53
3.4 CONDIÇÕES DE PROJETO PARA GARANTIA DE ES- TABILIDADE GLOBAL E ASSINTÓTICA .....	55
3.5 EXEMPLOS NUMÉRICOS .....	59
3.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	69
<b>4 METODOLOGIA PARA PROJETO DE LEI DE CHA- VEAMENTO</b> .....	71
4.1 INTRODUÇÃO .....	71
4.2 RESULTADOS PRELIMINARES E DEFINIÇÕES .....	71
4.3 CONDIÇÕES LMI PARA O PROJETO DE LEI DE CHA- VEAMENTO .....	73
4.3.1 LMIs para projeto com garantia de estabilidade global e assintótica .....	75
4.3.2 Realimentação de saída .....	78
4.4 EXEMPLOS NUMÉRICOS .....	79
4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	85
<b>5 METODOLOGIA DE PROJETO DE LEI DE CHA- VEAMENTO COM DESEMPENHO</b> .....	87

5.1	INTRODUÇÃO .....	87
5.2	PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO COM CUSTO GARANTIDO .....	87
5.2.1	Condições de projeto para garantia de estabilidade global e assintótica .....	88
5.2.2	Condições LMI para o projeto de lei de chaveamento .....	92
5.2.3	Exemplo numérico .....	94
5.3	PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO COM ATENUAÇÃO DE DISTÚRBO .....	95
5.3.1	Condições de projeto para garantia de estabilidade global e assintótica .....	97
5.3.2	Condições LMI para o projeto de lei de chaveamento .....	99
5.3.3	Exemplos numéricos .....	102
5.4	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	107
6	<b>METODOLOGIA DE PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO PARA APLICAÇÕES DE MOTORES DE INDUÇÃO .....</b>	<b>109</b>
6.1	INTRODUÇÃO .....	109
6.2	SISTEMAS CHAVEADOS NÃO LINEARES .....	109
6.3	CONDIÇÕES DE PROJETO PARA GARANTIA DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS CHAVEADOS NÃO LINEARES .....	111
6.4	MODELO MATEMÁTICO DO MOTOR DE INDUÇÃO TRI-FÁSICO .....	114
6.4.1	Acionamento de motores de indução .....	119
6.4.2	Erro de seguimento .....	122
6.5	CONDIÇÕES LMI PARA O PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO .....	124
6.6	EXEMPLO NUMÉRICO .....	132
6.7	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	134
7	<b>METODOLOGIA DE PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO PARA APLICAÇÕES DE GERADORES EÓLICOS .....</b>	<b>137</b>
7.1	INTRODUÇÃO .....	137
7.2	GERADOR DE INDUÇÃO DE DUPLA ALIMENTAÇÃO ..	137
7.2.1	Modelo aerodinâmico .....	140
7.2.1.1	Modelo aerodinâmico por unidade ( $pu$ ) .....	142
7.2.2	Modelo do gerador de indução assíncrono .....	143
7.2.3	Acoplamento do modelo aerodinâmico com o modelo eletromagnético .....	145
7.2.4	Modelo do inversor ligado à rede elétrica.....	147

7.3	CONTROLE DO AEROGERADOR .....	148
7.3.1	Máximo aproveitamento da potência do vento.....	149
7.3.1.1	Máximo aproveitamento da potência do vento em <i>pu</i> ....	150
7.3.2	Erro de seguimento do inversor ligado ao rotor.....	151
7.3.3	Erro de seguimento do inversor ligado à rede elétrica.....	155
7.4	CONDIÇÕES DE PROJETO PARA GARANTIA DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS CHAVEADOS NÃO LINEARES COM ATENUAÇÃO DE DISTÚRBO .....	156
7.5	CONDIÇÕES LMI PARA O PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO .....	159
7.5.1	Projeto da lei de chaveamento do inversor ligado ao rotor .....	160
7.5.2	Projeto da lei de chaveamento do inversor ligado à rede elétrica .....	168
7.6	EXEMPLO NUMÉRICO .....	173
7.7	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	177
8	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS .....</b>	179
8.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	179
8.2	PUBLICAÇÕES RELACIONADAS AO TRABALHO .....	180
8.3	PERSPECTIVAS FUTURAS .....	182
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	183
	<b>APÊNDICE A – Valores numéricos das matrizes dos exemplos .....</b>	193





# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 APRESENTAÇÃO

Sistemas chaveados é uma designação para uma extensa classe de aplicações em controle (MORSE, 1997). Esta classe de aplicações inclui os sistemas dinâmicos compostos por um número finito de subsistemas e uma lógica temporal ou associada ao estado que coordena o chaveamento entre estes subsistemas (SUN; GE, 2005). Cada um dos subsistemas que compõem um sistema chaveado apresenta propriedades e estrutura diferentes. Sistemas chaveados podem ser interpretados como uma classe particular de sistemas híbridos (LIBERZON, 2003) ou ainda sistemas de estrutura variável (DECARLO; ZAK; MATTHEWS, 1988).

Uma das motivações para o estudo dos sistemas chaveados é a sua utilização na descrição de uma significativa quantidade de sistemas físicos. Sistemas sujeitos a variações paramétricas abruptas conhecidas ou desconhecidas (JOHNSON, 1985; BROCKETT; WOOD, 1974) podem ser modelados como sistemas chaveados. Um exemplo de mudança abrupta de parâmetro ocorre no caso de falha em um componente (SUN; GE, 2005). Outro aspecto que serve de motivação para o estudo de sistemas chaveados é a existência de uma numerosa classe de sistemas não lineares nos quais a estabilização não consegue ser obtida empregando leis de controle com realimentação contínua, mas que, no entanto, podem ser estabilizadas por estratégias de controle nas quais ocorre o chaveamento entre diferentes controladores (BROCKETT, 1983). A metodologia de controle onde ocorre a comutação entre diferentes controladores é denominada controle chaveado.

Com relação ao controle de sistemas chaveados, diversas pesquisas têm sido feitas tendo como foco a análise da estabilidade (DECARLO et al., 2000; LIN; ANTSAKLIS, 2005), controlabilidade e observabilidade (BEMPORAD; FERRARI-TRECCATE; MORARI, 2000; SUN; GE; LEE, 2002) e no desenvolvimento de técnicas de projeto que forneçam garantias mínimas de estabilidade e desempenho (SUN; GE, 2005; MHASKAR; EL-FARRA; CHRISTOFIDES, 2005; MONTAGNER et al., 2006; DEAECTO; GEROMEL, 2010). O controle de sistemas chaveados é um tópico de pesquisa recente onde muito resta a ser feito, principalmente no que se refere ao desenvolvimento de técnicas de projeto de leis de chaveamento que possam ser determinadas de forma sistemática e numericamente eficiente. Uma das ferramentas de trabalho que pode ser utilizada no

projeto de controle de sistemas chaveados são as desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities* - LMIs) (BOYD et al., 1994). Algumas pesquisas já demonstraram o seu potencial de utilização para esta classe de aplicações (PETTERSSON; LENNARTSON, 1996; ZHAI; LIN; ANTSAKLIS, 2003; TROFINO et al., 2011).

Um sistema chaveado pode ser classificado como sistema chaveado linear, afim ou não linear, de acordo com as características dos subsistemas que o compõem. Existem diferenças significativas entre sistemas chaveados lineares e afins. Para o caso de sistemas chaveados afins, mesmo se todas as matrizes de dinâmicas dos subsistemas forem Hurwitz estáveis, pode ser difícil obter a convergência para a origem devido a presença do termo constante no campo vetorial. Outra consequência da presença do termo constante é que o equilíbrio estável na origem do sistema associado ao erro de seguimento será, em geral, obtido através de um modo deslizante. Estas observações ajudam a ilustrar como a estabilização de sistemas chaveados afins pode ser significativamente mais desafiadora do que a estabilização de sistemas chaveados lineares. A extensão dos resultados já obtidos para sistemas chaveados lineares ou afins para o caso de estabilização de sistemas chaveados não lineares representa um grande desafio. Como a dinâmica de cada subsistema é não linear, as condições de estabilidade podem ser construídas para uma determinada região do espaço de estados (estabilidade local) ou para todo o espaço de estados (estabilidade global) e nesse caso a escolha da lei de chaveamento possui um papel importante.

Um aspecto relevante no estudo de sistemas chaveados diz respeito ao comportamento do sistema em modos deslizantes (*sliding motions*). Os modos deslizantes possuem um papel importante no estudo de sistemas chaveados, pois os mesmos podem representar idealmente algumas dinâmicas complexas encontradas em aplicações reais (FILIPPOV, 1988). O modo deslizante pode ser interpretado como uma comutação infinitamente rápida denominada *chattering*. A necessidade de considerar a estabilidade em modos deslizantes é um aspecto que torna o problema de controle de sistemas chaveados mais complexo, sendo que muitos trabalhos anteriormente publicados excluem a possibilidade de ocorrência de modos deslizantes, como por exemplo (SUN, 2006) para o caso de sistemas chaveados lineares. Por outro lado, alguns resultados já foram obtidos para garantia de estabilidade caso ocorra *chattering*, como por exemplo (GEROMEL; COLANERI, 2006) para o caso de sistemas chaveados lineares. A ocorrência de *chattering* em aplicações práticas não é desejada pois corresponde a chaveamentos de alta frequência que causam desgaste excessivo nos dispositivos (LIBERZON, 2003). Por esse

motivo a limitação da frequência de chaveamento é um ponto importante envolvendo o controle de sistemas chaveados. Uma forma de se obter a limitação de frequência é através da introdução de um requisito adicional de tempo mínimo de residência em cada modo de operação do sistema (SUN; GE, 2005). A introdução desse requisito adicional não é uma tarefa simples e o desenvolvimento de uma metodologia adequada para limitação da frequência no caso geral encontra-se ainda como um problema em aberto.

É possível identificar várias aplicações de sistemas chaveados (MORSE, 1997; LIBERZON, 2003). Como exemplo, é possível citar os sistemas de controle de tráfego urbano (PAPAGEORGIOU et al., 2003) e processos químicos (MHASKAR; EL-FARRA; CHRISTOFIDES, 2005). Outras aplicações de sistemas chaveados incluem os circuitos de eletrônica de potência que empregam chaves eletrônicas, como os conversores e inversores (SHIEH; SHYU, 1999; SHTESSEL; ZINOBER; SHKOLNIKOV, 2002). Os conversores são amplamente utilizados em diversas aplicações, incluindo indústria automobilística, naval, aeronáutica e de informática, para os conversores que transformam níveis de corrente contínua em níveis de corrente contínua regulados (CC/CC), como também no controle de máquinas de indução (motores e geradores), para os conversores de corrente contínua para corrente alternada (CC/CA).

Um dos motivos para maior utilização dos motores de indução foram os avanços na eletrônica de potência, com o desenvolvimento de conversores mais eficientes e com menor custo. Até a década de 1970, os motores de indução eram utilizados somente em aplicações de velocidade constante e motores de corrente contínua em aplicações de velocidade variável com controle de conjugado (torque) (YAMAMURA, 1986). Com o desenvolvimento dos conversores de frequência baseados em dispositivos semicondutores, foi possível obter uma forma de acionamento com variação de velocidade também para motores de indução. A tendência atual é a substituição de máquinas de corrente contínuas por máquinas de indução acionadas por conversores de potência em praticamente todas as aplicações. Como vantagem dos motores de indução em relação aos motores de corrente contínua, podem-se citar a maior robustez e necessidade de manutenção reduzida pelo fato das máquinas de indução não necessitarem de escovas ou outros equipamentos de comutação. No entanto, a tarefa de controlar o motor de indução é bastante complexa devido principalmente a três fatores: (i) o modelo dinâmico é não linear, (ii) duas variáveis de estado (fluxos do rotor) geralmente não são mensuráveis e (iii) a variação da resistência do rotor que ocorre durante a operação em consequência do aquecimento

(CHIASSON, 1993).

Os conversores de potência também têm sido utilizados conjuntamente com geradores de indução. Um caso particular de aplicação ocorre no controle de aerogeradores de indução de velocidade variável em parques eólicos conectados diretamente na rede. Os aerogeradores que operam com velocidade variável, ao contrário dos que operam com velocidade fixa, necessitam de um conversor de potência para conexão com a rede. Por outro lado, os mesmos possuem vantagens com relação aos aerogeradores que operam com velocidade fixa, como, por exemplo, melhoria da eficiência energética, redução das solicitações mecânicas da turbina e redução na emissão de ruídos sonoros (CHOWDHURY; CHELLAPILLA, 2006). Uma revisão geral sobre as diferentes topologias de conversores empregadas em aerogeradores é apresentada em (BAROUDI; DINAHAHI; KNIGHT, 2007). Dentre as topologias existentes, o Gerador de Indução de Dupla Alimentação (*Doubly Fed Induction Generator - DFIG*) tem ganhado destaque na geração eólica (PENA; CLARE; ASHER, 1996; TARNOWSKI; REGINATTO, 2007).

Dentro deste contexto, o objetivo principal do trabalho concentra-se na análise e no desenvolvimento de técnicas de controle para sistemas chaveados. Inicialmente, serão estabelecidas as condições de projeto de lei de chaveamento para o caso de sistemas afins. Com base nestas condições será proposta uma metodologia de projeto empregando LMIs como ferramenta de trabalho. Na sequência, serão incluídos critérios de desempenho no projeto da lei de chaveamento. Por fim, a metodologia de projeto será estendida para uma classe de sistemas chaveados não lineares, tendo como estudos de caso aplicações de controle de motores de indução acionados por inversores e controle de aerogeradores de indução com conversores.

## 1.2 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS

Esta tese está organizada nos seguintes capítulos:

- Capítulo 2: apresenta algumas considerações preliminares relacionadas a sistemas chaveados, como a classificação dos sistemas quando ao tipo de comutação, modos deslizantes, análise da estabilidade e estabilização.
- Capítulo 3: apresenta as condições para o projeto de uma lei de chaveamento que assintoticamente conduz os estados de um sistema chaveado afim para uma dada referência. A lei de chavea-

mento é baseada no elemento máximo de um conjunto de funções auxiliares. As condições apresentadas garantem que o sistema chaveado sob efeito da lei de chaveamento projetada apresente estabilidade global e assintótica, mesmo com a ocorrência de modos deslizantes em qualquer superfície de chaveamento do sistema.

- Capítulo 4: descreve uma metodologia para o projeto de lei de chaveamento para sistemas chaveados afins com base nos resultados do Capítulo 3. O problema é descrito como um conjunto de LMIs, o que faz com que seja necessária a existência de uma combinação Hurwitz estável das matrizes de dinâmicas dos subsistemas.
- Capítulo 5: aborda a inclusão de requisitos de desempenho no projeto da lei de chaveamento para sistemas chaveados afins. Dois requisitos de desempenho são apresentados: o custo garantido e a atenuação de distúrbio.
- Capítulo 6: apresenta a extensão dos resultados para o caso de sistemas chaveados não lineares. O estudo é particularizado para aplicações de controle de motores de indução acionados por inversores de frequência.
- Capítulo 7: descreve uma metodologia de projeto de lei de chaveamento para aplicações de controle de aerogeradores de indução com conversores.

As atividades desta tese foram desenvolvidas junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas (PPGEAS) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Parte deste trabalho foi elaborada sob orientação do Prof. Maurício de Oliveira, do Departamento de Engenharia Mecânica e Aeroespacial da Universidade da Califórnia, San Diego (UCSD), no período de Fevereiro de 2011 até Janeiro de 2012.

Nos exemplos apresentados neste trabalho foram utilizados o *solver* SeDuMi com Yalmip (LöfBERG, 2004) para resolver as LMIs e o programa *Matlab/Simulink* para simulação dos sistemas chaveados.



## 2 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

### 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos preliminares relacionados a sistemas chaveados. O objetivo é contextualizar o leitor em relação às propriedades, características e ferramentas utilizadas na análise de sistemas chaveados através de uma revisão sucinta sobre os principais trabalhos já publicados sobre o tema.

Inicialmente serão vistas as características e propriedades que distinguem a classe de sistemas chaveados. Os diferentes tipos de comutação serão abordados. Com relação à estabilidade de sistemas chaveados, será apresentada uma revisão com as principais ferramentas utilizadas para análise. Por fim, será tratado o problema de projetar técnicas de chaveamento com o objetivo de estabilizar o sistema.

### 2.2 SISTEMAS CHAVEADOS

Sistemas híbridos é uma denominação para os sistemas onde dois tipos de dinâmicas coexistem e interagem: uma dinâmica de tempo contínuo (tipicamente modelada por equações diferenciais) e outra composta por eventos discretos (tipicamente modelada por autômatos de estados finitos ou infinitos) (LIBERZON, 2003). Como exemplos de eventos que produzem um comportamento híbrido, é possível citar a abertura e o fechamento de uma válvula ou de uma chave eletrônica. O fato de existirem muitos exemplos práticos que apresentam características de sistemas híbridos é um dos fatores que motiva o desenvolvimento de pesquisas nesta área.

As pesquisas envolvendo sistemas híbridos possuem características bastante interdisciplinares. Isso porque estas pesquisas têm sido feitas por diferentes comunidades científicas, cada qual tratando o assunto dentro de suas próprias abordagens. Por exemplo, os pesquisadores das ciências da computação focam seus trabalhos no comportamento discreto do sistema híbrido, tratando a dinâmica em tempo contínuo de forma simplificada. Por outro lado, pesquisadores da área de controle de sistemas enfatizam os trabalhos nas propriedades da dinâmica em tempo contínuo dos sistemas híbridos (LIBERZON, 2005). Neste trabalho será dada ênfase à segunda abordagem, tratando os sistemas híbridos como sistemas com dinâmica de tempo contínuo e representando os

eventos discretos chaveados de forma isolada. Assim, é possível distinguir uma classe particular dos sistemas híbridos, denominada sistemas chaveados.

Um sistema chaveado pode ser definido como um sistema dinâmico composto de uma família de subsistemas com dinâmica de tempo contínuo e uma lei que organiza o chaveamento entre eles (LIBERZON; MORSE, 1999). Cada subsistema corresponde a um modo de operação do sistema chaveado. É possível obter um sistema chaveado a partir de um sistema híbrido se forem desconsiderados os detalhes do comportamento dos eventos discretos e, no lugar disso, considerar todos os possíveis sinais de chaveamento para uma determinada classe. Por isso, os sistemas chaveados podem ser vistos como uma abstração que corresponde a um caso particular de nível mais elevado dos sistemas híbridos. Tipicamente, esta abstração gera um sistema com descrição mais simples, porém com mais soluções que o sistema original (LIBERZON, 2005). Mais detalhes sobre a relação entre sistemas híbridos e sistemas chaveados podem ser vistos em (HESPANHA, 2004).

Um sistema chaveado pode ser matematicamente representado pela equação diferencial na forma

$$\dot{x}(t) = f_\sigma(x(t)) \quad (2.1)$$

onde  $\{f_p : p \in \mathcal{M}\}$  é uma família de funções suficientemente regulares (pelo menos localmente Lipschitz<sup>1</sup>) de  $\mathbb{R}^n$  para  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{M}$  é um conjunto de índices e  $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}$  é uma função constante por partes (em inglês “*piecewise constant function*”) denominada sinal de chaveamento. Neste contexto, uma função constante por partes é um sinal que possui as seguintes características: apresenta uma quantidade finita de descontinuidades em qualquer intervalo finito de tempo e é constante entre as descontinuidades consecutivas (HESPANHA, 2004).

Quando um sistema chaveado apresenta todos os subsistemas lineares, o mesmo é denominado sistema chaveado linear

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) \quad (2.2)$$

com um conjunto de índices finito:  $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, m\}$ , sendo  $m$  o número de subsistemas (ou modos de operação) do sistema chaveado. Por outro lado, quando um sistema chaveado é composto por subsistemas

---

<sup>1</sup>Uma função  $f(x)$  é dita localmente Lipschitz no domínio  $D \subset \mathbb{R}^n$  se cada ponto de  $D$  possui uma vizinhança  $D_0$  de forma que  $f$  satisfaça a condição Lipschitz ( $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$ ) para todos os pontos em  $D_0$  com alguma constante Lipschitz  $L_0 > 0$ . O símbolo  $\|x\|$  corresponde a Norma Euclidiana de  $x \in \mathbb{R}^n$ .



afins o mesmo é denominado sistema chaveado afim

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma}x(t) + b_{\sigma}. \quad (2.3)$$

## 2.3 CLASSIFICAÇÃO QUANTO AO TIPO DE COMUTAÇÃO

Com relação à comutação, os sistemas chaveados podem ser classificados em: comutação dependente de estados *versus* comutação dependente do tempo ou comutação autônoma *versus* comutação controlada (LIBERZON, 2003). Na sequência serão apresentados os principais aspectos sobre cada um dos tipos de comutação:

- Comutação dependente dos estados: sistemas onde o sinal de chaveamento vai mudar de acordo com valor dos estados. Neste caso, o espaço de estados é particionado em regiões, sendo cada região correspondente à ativação de um dos subsistemas que compõem o sistema chaveado. As fronteiras dessas regiões são denominadas superfícies de comutação;
- Comutação dependente do tempo: sistemas nos quais ocorre uma mudança no sinal de chaveamento após um determinado intervalo de tempo. Para este tipo de comutação, o sinal de chaveamento é descrito como  $\sigma(t)$  com o objetivo de enfatizar a dependência temporal;
- Comutação autônoma: sistemas onde não existe controle direto sobre sinal de comutação. Neste grupo estão incluídos sistemas com comutação dependente dos estados nos quais a localização das superfícies de comutação é predeterminada, ou sistemas com comutação dependentes do tempo onde a regra que define o sinal de chaveamento é desconhecida ou foi desprezada na etapa de modelagem do sistema;
- Comutação controlada: sistemas onde o sinal de chaveamento é imposto para atingir um comportamento desejado. O mecanismo de comutação é controlado diretamente, podendo ser dependente dos estados ou dependente do tempo.

Para ilustrar a classificação quando ao tipo de comutação, considere como exemplo o sistema de transmissão de um veículo. No caso de uma transmissão automática, o sistema pode ser visto como um sistema chaveado com comutação autônoma e dependente dos estados. Já

uma transmissão manual corresponde a uma comutação controlada e dependente dos estados.

É importante destacar que combinações entre os diferentes tipos de comutações podem existir em um sistema chaveado. Da mesma forma, também não é muito simples determinar uma distinção precisa entre comutação autônoma ou controlada, assim como para comutação dependente de estados ou dependente do tempo (LIBERZON, 2003).

## 2.4 MODOS DESLIZANTES

Para definição de modos deslizantes, será considerado como exemplo um sistema chaveado com a comutação dependente dos estados definida pela superfície de comutação representada por  $\mathcal{S}$  e dois modos de operação, ou seja, dois subsistemas  $\dot{x} = f_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ , um ativo em cada lado de  $\mathcal{S}$ . Neste caso supõe-se que não ocorram saltos nos valores dos estados no momento do chaveamento. Se os campos vetoriais  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  estiverem apontando para o mesmo sentido em relação à  $\mathcal{S}$ , a trajetória contínua atinge a superfície  $\mathcal{S}$  e cruza para o outro lado. Esta situação é demonstrada na Figura 1(a). Por outro lado, é possível que os campos vetoriais  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  apontem ambos em direção à superfície, o que é visto na Figura 1(b). Neste caso quando a trajetória atinge a superfície  $\mathcal{S}$  ela não consegue mais sair desta região e se desloca sobre a superfície, isto é, o campo vetorial que define a dinâmica neste caso é tangente à superfície. Isso é denominado de modo deslizante (*sliding mode*) (LIBERZON, 2003).

O comportamento do sistema em modo deslizante pode ser descrito utilizando os conceitos introduzidos por Filippov (1988). De acordo com estes conceitos, o campo vetorial que define a dinâmica em modo deslizante deve ser tangente à superfície de chaveamento e existem várias formas de se definir este campo vetorial tangente. A forma mais simples e mais utilizada na literatura é definir o campo vetorial tangente através da combinação convexa dos campos vetoriais dos subsistemas em cada ponto da trajetória sobre a superfície. Por exemplo, na Figura 1(b) o campo vetorial tangente é dado por

$$f_\theta(x) := \theta(x)f_1(x) + (1 - \theta(x))f_2(x), \quad \theta(x) \in [0, 1] \quad (2.4)$$

onde  $\theta(x)$  é o elemento de combinação convexa que pode ser obtido através de regras de projeção ortogonal (FILIPPOV, 1988, p.52). Note que esta forma de definir o campo vetorial tangente também permite definir a dinâmica do sistema nos modos isolados, isto é, para  $\dot{x} = f_1(x)$ ,

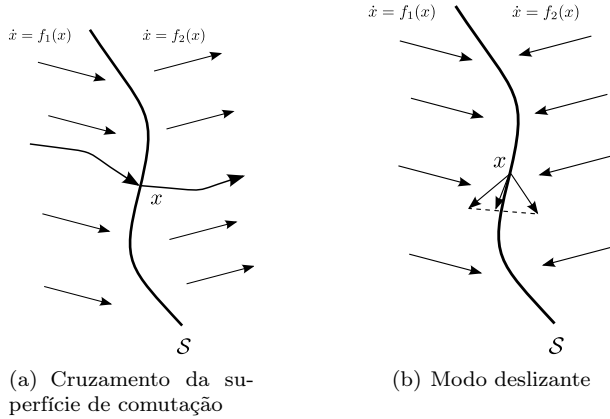


Figura 1 – Exemplo das trajetórias de um sistema chaveado com dois modos de operação.

$\theta(x) = 1$  e para  $\dot{x} = f_2(x)$ ,  $\theta(x) = 0$ . Desta forma, a dinâmica de um sistema chaveado com ou sem modos deslizantes pode ser vista como uma inclusão diferencial

$$\dot{x} = f_\theta(x). \quad (2.5)$$

Para uma apresentação mais formal e genérica dos modos deslizantes, veja (FILIPPOV, 1988, p.50). Na página 54 deste livro pode ser encontrada uma caracterização alternativa do campo vetorial tangente diferente da combinação convexa.

O modo deslizante pode ser interpretado como uma comutação infinitamente rápida. Este fenômeno não é desejado na prática pois corresponde a chaveamentos de alta frequência (*chattering*) que causam desgaste excessivo nos dispositivos (LIBERZON, 2003). Por esse motivo a limitação da frequência de chaveamento é um ponto importante envolvendo o controle de sistemas chaveados. Uma forma de se obter a limitação de frequência é através da introdução de um requisito adicional de tempo mínimo de residência em cada modo de operação do sistema (SUN, 2006). A introdução desse requisito adicional não é uma tarefa simples e o desenvolvimento de uma metodologia adequada para limitação da frequência encontra-se ainda como um problema em aberto no caso geral.

Uma outra forma de evitar a ocorrência de *chattering* consiste em introduzir uma histerese. A ideia básica consiste em definir duas regiões

sobrepostas através do deslocamento da superfície de chaveamento  $\mathcal{S}$ . Mais detalhes sobre a introdução de histerese em sistemas chaveados podem ser vistos em (BOLZERN; SPINELLI, 2004; DECARLO et al., 2000).

## 2.5 ESTABILIDADE DE SISTEMAS CHAVEADOS

A análise da estabilidade de sistemas chaveados, em particular dos sistemas chaveados lineares, é um assunto cujo interesse tem aumentado nos últimos anos. Algumas situações envolvendo a estabilidade de sistemas chaveados merecem destaque. Uma delas é de que mesmo quando todos os subsistemas que compõem um sistema chaveado são exponencialmente estáveis, o sistema chaveado pode apresentar trajetórias divergentes para determinados sinais de comutação. Outro aspecto relevante é a possibilidade de realizar o chaveamento entre subsistemas instáveis e obter um sistema chaveado exponencialmente estável. Estes dois casos sugerem que a estabilidade de um sistema chaveado depende não somente da dinâmica de cada subsistema, mas também das propriedades do sinal de chaveamento (LIN; ANTSAKLIS, 2005). Com o intuito de auxiliar no entendimento dessas duas situações, serão apresentados dois exemplos na sequência.

**Exemplo 2.1** (DECARLO et al., 2000) *Considere o sistema chaveado linear na forma da equação (2.2), onde  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{M} = \{1, 2\}$  e*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -100 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -100 & -1 \end{bmatrix}.$$

*Os autovalores são os mesmos para os dois subsistemas:  $\lambda_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{1000}$ . Definindo a seguinte função de chaveamento  $p(t)$*

$$p(t^+) = \begin{cases} 1, & \text{se } p(t) = 2 \text{ e } x_2(t) = -\frac{1}{k}x_1(t) \\ 2, & \text{se } p(t) = 1 \text{ e } x_2(t) = kx_1(t). \end{cases}$$

*Para qualquer condição inicial, a função  $p(t)$  especifica uma regra com memória para chavear a dinâmica do sistema entre  $A_1$  e  $A_2$ . Considerando  $k = -0.2$  e qualquer condição inicial  $x(0) \neq 0$ , a trajetória dos estados diverge, conforme apresentado no plano de fase na Figura 2. Essa situação demonstra que o chaveamento entre dois modos assintoticamente estáveis pode gerar uma trajetória instável.*

**Exemplo 2.2** (DECARLO et al., 2000) *Considere um sistema chaveado*

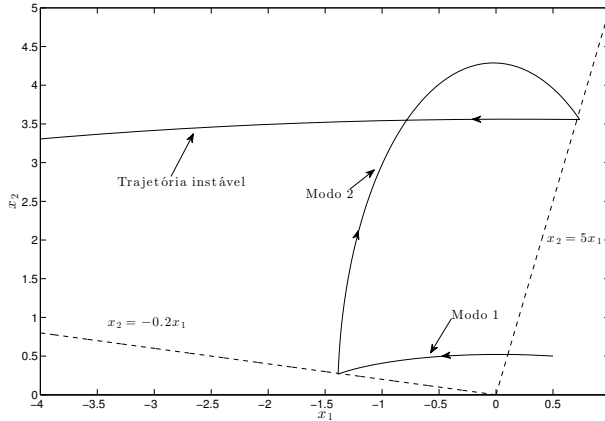


Figura 2 – Exemplo 2.1: plano de fase de um sistema chaveado com trajetória instável composto por dois modos estáveis.

com estrutura semelhante a do Exemplo 2.1, porém com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ -2 & -0.5 \end{bmatrix}$$

e

$$p(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } p(t^-) = 2 \text{ e } x_2(t) = -0.25x_1(t) \\ 2, & \text{se } p(t^-) = 1 \text{ e } x_2(t) = 0.5x_1(t). \end{cases}$$

Neste caso ambos subsistemas são instáveis: os autovalores de  $A_1$  estão localizados em zero e os de  $A_2$  em  $0.5 \pm j\sqrt{3}$ . Conforme visto na Figura 3, através do chaveamento entre os dois subsistemas é possível produzir uma trajetória estável entre dois modos instáveis.

O estudo da estabilidade de sistemas chaveados pode ser dividido em dois tipos de problemas: estabilidade quando o sistema encontra-se sob comutação arbitrária ou sob comutação controlada. Maiores detalhes sobre cada um desses tipos serão vistos na sequência.

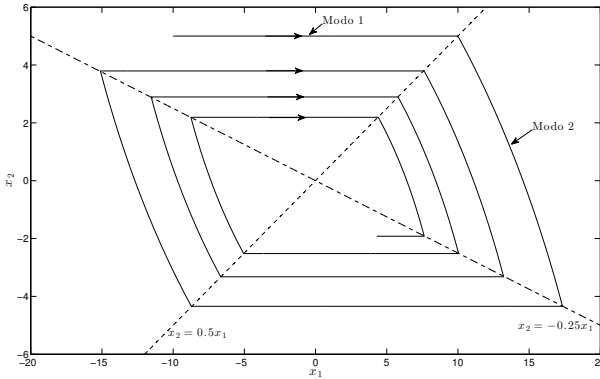


Figura 3 – Exemplo 2.2: plano de fase de um sistema chaveado com trajetória estável composto por dois modos instáveis.

### 2.5.1 Estabilidade de sistemas chaveados sob comutação arbitrária

O problema da análise da estabilidade sob comutação arbitrária consiste em determinar em que condições um sistema chaveado apresenta estabilidade levando em consideração que não existem informações *a priori* sobre o sinal de chaveamento e que o mesmo não possui restrições. Para este caso, é necessário que todos os subsistemas que compõem o sistema chaveado sejam assintoticamente estáveis. No entanto esta hipótese não é suficiente para garantir a estabilidade, pois mesmo quando todos os subsistemas de um sistema chaveado são estáveis, ainda assim é possível obter uma trajetória dos estados divergente para qualquer condição inicial. Por outro lado, é possível garantir a estabilidade global uniforme<sup>2</sup> exponencial de um sistema chaveado linear sob comutação arbitrária se existir uma Função Quadrática Comum de Lyapunov (*Common Quadratic Lyapunov Function*) para todos os subsistemas (LIBERZON; MORSE, 1999).

Muitos esforços têm sido direcionados para o estudo de funções quadráticas comuns de Lyapunov, motivados principalmente pelo fato de que as condições de existência de uma função quadrática comum de

<sup>2</sup>Neste caso, a palavra “uniforme” é utilizada para descrever a uniformidade com relação aos sinais de comutação.

Lyapunov não são fáceis de serem atingidas. Como exemplos de trabalhos já publicados sobre este tema, é possível citar (LIBERZON, 2003; KING; SHORTEN, 2004). Liberzon, Hespanha e Morse (1999) propõem um método para sistemas chaveados lineares e invariantes no tempo baseado na solução da álgebra de Lie gerada pelas matrizes da dinâmica dos estados dos subsistemas. Este método leva em consideração que as condições para solução da álgebra de Lie implicam na existência de uma função quadrática comum de Lyapunov.

Para sistemas de ordem elevada com mais de dois subsistemas, as condições necessárias e suficientes para a existência de uma função quadrática comum de Lyapunov de um sistema chaveado linear e invariante no tempo ainda apresentam-se como um problema em aberto (LIN; ANTSAKLIS, 2005). É importante salientar que a existência de uma função quadrática comum de Lyapunov é uma condição somente suficiente para estabilidade de um sistema chaveado sob comutação arbitrária. Existem sistemas chaveados que não possuem uma função quadrática comum de Lyapunov, mas que apresentam estabilidade sob comutação arbitrária (LIBERZON, 2003).

### **2.5.2 Estabilidade de sistemas chaveados sob comutação com restrições**

Nesta subseção será abordada a análise de estabilidade de sistemas chaveados considerando que o sinal de chaveamento possui restrições. Através desta análise, será possível determinar quais restrições devem ser incluídas no sinal de chaveamento para garantir a estabilidade de sistemas chaveados. As restrições no sinal de chaveamento podem existir no domínio do tempo (por exemplo, limites para o tempo de residência ou tempo médio de residência) ou no espaço de estados (LIN; ANTSAKLIS, 2005).

Uma das ferramentas utilizadas na análise de estabilidade de sistemas chaveados com comutação restrita são as Múltiplas Funções de Lyapunov (*Multiple Lyapunov Functions*). A ideia básica consiste em utilizar uma função de Lyapunov associada a cada modo ou região do espaço de estados do sistema chaveado. Estas funções concatenadas formam uma função de Lyapunov com características não convencionais: podem apresentar descontinuidades, podem não decrescer monotonicamente ao longo das trajetórias dos estados e são diferenciáveis por partes.

A utilização desta abordagem pode ser explicada através da se-

guinte situação. Supondo que todos os modos sejam estáveis, então cada modo pode ser associado com uma função de Lyapunov. Quando o modo estiver ativo, o valor da função de Lyapunov deste modo deve decrescer. Se for incluída uma restrição no sinal de chaveamento de forma que cada vez que o sistema realiza a ativação de um modo o valor da função de Lyapunov correspondente seja menor que o valor na ativação anterior, então o sistema chaveado será assintoticamente estável (LIN; ANTSAKLIS, 2005).

O uso de múltiplas funções de Lyapunov tem sido tema de várias pesquisas. Como exemplo de trabalhos com este enfoque já publicados, é possível citar (BRANICKY, 1998; DECARLO et al., 2000; LIBERZON; MORSE, 1999). A busca por funções de Lyapunov também pode ser formulada como um problema de desigualdades matriciais lineares (LMIs), conforme apresentado em trabalhos anteriores, como por exemplo (PETERSSON; LENNARTSON, 1996; COUTINHO; TROFINO, 2003).

O exemplo a seguir ilustra a utilização de múltiplas funções de Lyapunov para análise de estabilidade de um sistema chaveado linear.

**Exemplo 2.3** (DECARLO et al., 2000) *Considere o sistema chaveado do Exemplo 2.2. Para cada modo de operação é possível estabelecer uma função de Lyapunov  $V_1(x(t)) := x(t)^T P_1 x(t)$  e  $V_2(x(t)) := x(t)^T P_2 x(t)$ , sendo  $P_1$  e  $P_2$  as seguintes matrizes positivas ( $P_1 > 0, P_2 > 0$ ) e simétricas ( $P_1 = P_1^T, P_2 = P_2^T$ )*

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,46875 & -1,875 \\ -1,875 & 15 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{bmatrix}.$$

A Figura 4 apresenta os resultados obtidos em simulação. No gráfico da Figura 4(a) é possível visualizar os valores de cada uma das funções de Lyapunov. O gráfico que considera somente a função de Lyapunov do modo ativo é visto na Figura 4(b). Analisando os gráficos é possível verificar que neste sistema o valor da função de Lyapunov do modo ativo é sempre decrescente. Também constata-se que a energia decresce a medida que vai ocorrendo o chaveamento entre os dois modos, confirmando a estabilidade deste sistema chaveado.

## 2.6 ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS CHAVEADOS

Na seção anterior foram apresentadas as principais ferramentas para análise de estabilidade de sistemas chaveados. Nesta seção o problema a ser abordado consiste em estabelecer leis de chaveamento



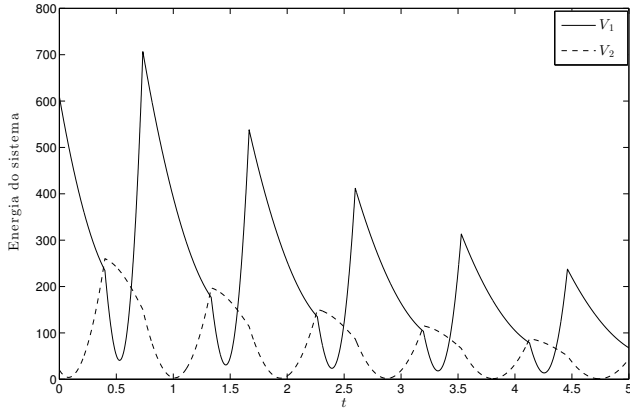
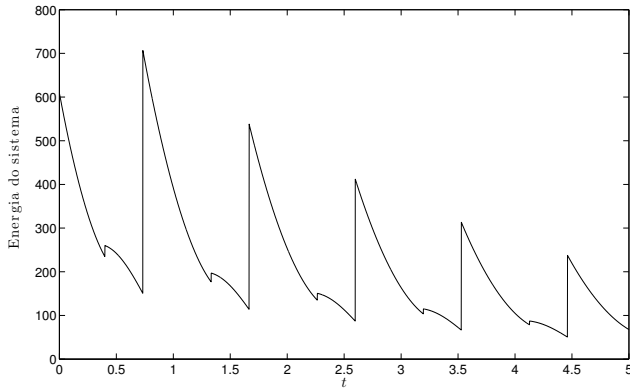
(a)  $V_1, V_2$ (b)  $V_i$ 

Figura 4 – Exemplo 2.3: funções de Lyapunov para o sistema chaveado do Exemplo 2.2.

para uma família de subsistemas que compõem o sistema chaveado de forma que o mesmo seja estável. Este problema é resolvido de forma trivial quando pelo menos um dos subsistemas apresenta estabilidade, pois neste caso basta manter ativo o modo cujo subsistema é estável (LIBERZON, 2003). Por outro lado, quando nenhum dos subsistemas

apresentar estabilidade, é necessário projetar uma lei de chaveamento que permita obter a estabilidade do sistema chaveado.

Uma das abordagens para o problema de estabilização de sistemas chaveados é focada na estabilização quadrática. Foi demonstrado em (WICKS; PELETIES; DECARLO, 1994) que a existência de uma combinação convexa estável das matrizes de dinâmica de um sistema chaveado linear implica na existência de uma lei de chaveamento dependente dos estados que estabiliza o sistema chaveado juntamente com uma função quadrática de Lyapunov. Feron (1996) provou que a condição de existência de uma combinação convexa estável é suficiente e necessária quando o número de subsistemas é igual a dois. Os resultados destas duas referências foram estendidos para o caso de sistemas chaveados afins em (BOLZERN; SPINELLI, 2004).

Infelizmente, a busca de uma combinação convexa e estável das matrizes de dinâmica dos subsistemas apresenta-se como um problema NP-Difícil (*NP-Hard*) (SKAFIDAS et al., 1999). O projeto de uma lei de chaveamento para estabilização quadrática utilizando LMIs e considerando um sistema chaveado linear com incertezas politópicas é apresentado em (ZHAI; LIN; ANTSAKLIS, 2003). Deve-se salientar, contudo, que todos estes métodos garantem a estabilidade pela utilização de uma função quadrática comum de Lyapunov. Isso representa uma abordagem conservadora pois, conforme já visto anteriormente, existem sistemas chaveados que podem apresentar estabilidade sem possuírem uma função quadrática comum de Lyapunov.

Uma alternativa para este problema consiste em utilizar múltiplas funções de Lyapunov no projeto de uma lei de chaveamento para estabilização. Esta abordagem foi proposta pela primeira vez em (WICKS; DECARLO, 1997), empregando funções de Lyapunov quadráticas por partes para sistemas chaveados lineares e invariantes no tempo com dois modos. Em (MIGNONE; FERRARI-TRECCATE; MORARI, 2000) é apresentado um método baseado em LMIs para projeto de realimentação de estados de sistemas discretos afins por partes. Um método de projeto para sistemas chaveados com campos vetoriais lineares empregando desigualdades matriciais bilineares (*Bilinear Matrix Inequalities* - BMIs) é proposto em (PETTERSSON, 2003). É importante salientar que grande parte das condições de estabilização utilizadas nos resultados já publicados e que podem ser verificadas através da solução de conjuntos de LMIs ou BMIs são somente suficientes, exceto para casos particulares de estabilização quadrática (LIN; ANTSAKLIS, 2005).

Com relação às leis de chaveamento, é possível identificar nos trabalhos já publicados diferentes tipos de estruturas utilizadas para es-

tabilização. Por exemplo, alguns resultados empregam leis baseadas na função ‘min’ ou na função ‘max’ de um conjunto de funções auxiliares dependentes dos estados. Como exemplos, é possível citar (GEROMEL; COLANERI, 2006; DEAECTO; GEROMEL, 2010; DEAECTO et al., 2010) para a função ‘min’ e (JI et al., 2006; TROFINO et al., 2012) para função ‘max’. Por um lado, as condições para garantia de estabilidade em modos deslizantes são mais simples quando a função ‘min’ é utilizada. Veja (LIBERZON, 2003) para mais detalhes sobre esse aspecto. Por outro lado, o uso da função ‘max’ não restringe as funções auxiliares a serem positivas, ao contrário do que acontece quando se emprega a função ‘min’ associada aos argumentos de estabilidade de Lyapunov. Outras abordagens definem as leis de chaveamento através da derivada da função de Lyapunov (BOLZERN; SPINELLI, 2004; HU; MA; LIN, 2008).

Uma outra questão relevante é saber sob quais condições é possível estabilizar um sistema chaveado pelo projeto adequado de leis de chaveamento. Algumas condições suficientes foram propostas em (SUN, 2004). Lin e Antsaklis (2005) estabelecem condições suficientes e necessárias para um classe de sistemas chaveados lineares com base em funções de Lyapunov poliedrais. No entanto, este resultado depende de uma transformação de coordenadas e ainda não se conhece um método eficiente de determinação desta transformação.

## 2.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo apresentou uma breve revisão sobre os principais tópicos envolvendo a análise e o controle de sistemas chaveados. Inicialmente, foi feita a distinção de sistemas chaveados partindo da definição dos sistemas híbridos. A classificação quanto ao tipo de comutação também foi abordada. As principais ferramentas para análise de estabilidade para o caso de sistemas chaveados sob comutação arbitrária (funções quadráticas comuns de Lyapunov) e sob comutação com restrições (funções múltiplas de Lyapunov) foram citadas. Os principais métodos para a estabilização, que consiste em projetar uma lei de comutação para que o sistema chaveado apresente estabilidade, foram citados. Desta forma, buscou-se neste capítulo dar ao leitor uma visão geral sobre os principais trabalhos já desenvolvidos na área de sistemas chaveados e também auxiliar na compreensão das novas metodologias para o projeto de leis de chaveamento para sistemas chaveados que serão apresentadas nos próximos capítulos.



### 3 CONDIÇÕES DE PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO UTILIZANDO FUNÇÃO ‘MAX’

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta as condições para o projeto de uma lei de chaveamento que assintoticamente conduz os estados de um sistema chaveado para uma dada referência. O estudo será particularizado para o caso de sistemas chaveados afins. A lei de chaveamento é baseada no valor máximo de um conjunto de funções auxiliares. As condições apresentadas garantem que o sistema chaveado em malha fechada (ou seja, sob efeito da lei de chaveamento projetada) apresente estabilidade global e assintótica, mesmo com a ocorrência de modos deslizantes em qualquer superfície de chaveamento do sistema. A principal contribuição das condições de projeto propostas é que as mesmas não exigem a existência de uma combinação Hurwitz estável das matrizes de dinâmicas dos subsistemas que compõem o sistema chaveado afim. Este requisito está presente em vários resultados anteriormente publicados, como por exemplo em (BOLZERN; SPINELLI, 2004). Consulte (DECARLO et al., 2000) para mais referências sobre este ponto.

O capítulo está estruturado da seguinte forma: inicialmente serão descritas as principais características dos sistemas chaveados afins. Na sequência, os aspectos da lei de chaveamento baseada na função max serão vistos. As condições de projeto para garantia de estabilidade global e assintótica serão descritas. Os resultados serão ilustrados através de exemplos numéricos.

#### 3.2 SISTEMAS CHAVEADOS AFINS

Considere o sistema chaveado composto de  $m$  subsistemas afins indicados a seguir

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i, \quad i \in \mathcal{M} := \{1, \dots, m\} \quad (3.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  representa os estados do sistema, supostamente disponíveis para medição, e  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b_i \in \mathbb{R}^n$  são as matrizes de cada subsistema.

Supondo que a comutação entre os  $m$  subsistemas de (3.1) ocorra de acordo com uma lei de chaveamento representada pelo sinal de cha-

veamento

$$\sigma(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M} \quad (3.2)$$

que pode ser visto como um mapeamento do vetor de estados, tomado a cada instante de tempo  $t$ , para o conjunto de índices  $\sigma(x(t)) \in \mathcal{M}$  do modo de operação corrente (ativo). Se, em um dado instante de tempo,  $\sigma(x(t))$  possuir somente um elemento, este elemento define o subsistema ativo. Caso contrário  $\sigma(x(t))$  possui mais de um elemento e pode estar ocorrendo o fenômeno de modos deslizantes neste instante. Utilizando os resultados de Filippov (1988) para definir a dinâmica em modos deslizantes,  $\sigma(x(t))$  se torna um sinal constante por trechos e descontínuo apenas nos instantes onde a trajetória do sistema entra ou sai de uma superfície de chaveamento.

O objetivo é projetar uma lei de chaveamento  $\sigma(x(t))$  que conduza assintoticamente os estados do sistema chaveado para uma dada referência constante  $\bar{x}$ , ou seja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}. \quad (3.3)$$

Dado  $\bar{x}$ , é conveniente definir o erro de seguimento

$$e(t) := x(t) - \bar{x} \quad (3.4)$$

e desta forma reescrever (3.1) em termos de  $e(t)$

$$\dot{e}(t) = A_i e(t) + k_i, \quad k_i := b_i + A_i \bar{x}. \quad (3.5)$$

Como  $\bar{x}$  é uma referência constante, é possível reformular o problema do projeto da lei de chaveamento em termos de  $e(t)$ , ou seja  $\sigma(e(t))$ . Com o objetivo de levar em consideração os modos deslizantes, caso os mesmos ocorram, assume-se que a dinâmica do erro de seguimento possa ser representada como uma combinação convexa dos campos vetoriais de cada subsistema em (3.5) (FILIPPOV, 1988), ou seja

$$\dot{e}(t) = \sum_{i \in \sigma(e(t))} \theta_i(e(t)) (A_i e(t) + k_i), \quad \theta(e(t)) \in \Theta \quad (3.6)$$

onde

$$\Theta := \left\{ \theta : \sum_{i=1}^m \theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\} \quad (3.7)$$

e  $\theta(e(t))$  é um vetor com elementos  $\theta_i(e(t))$  definidos de acordo com

Filippov (1988, p.50). Observe que  $\theta_i(e(t)) = 0$  caso  $i \notin \sigma(e(t))$ . Os modos deslizantes podem ocorrer em um ponto  $e(t)$  caso seja possível encontrar uma combinação convexa dos campos vetoriais dos subsistemas tal que  $\dot{e}(t)$  seja um vetor que pertence ao hiperplano tangente da superfície de chaveamento no ponto  $e(t)$ .

Para atingir globalmente o objetivo de seguimento descrito por (3.3), é necessário que a origem seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável de (3.6). Sob este aspecto é possível estabelecer o seguinte lema.

**Lema 3.1** *A origem é um ponto de equilíbrio de (3.6) somente se existir  $\bar{\theta} \in \Theta$  tal que*

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i k_i = 0. \quad (3.8)$$

□

**Prova 3.1** *Substitua  $\dot{e} = e = 0$  em (3.6). □*

### 3.3 LEI DE CHAVEAMENTO UTILIZANDO A FUNÇÃO MAX

Com base nas considerações vistas anteriormente, o problema será reformulado como sendo o projeto de uma lei de chaveamento  $\sigma(e(t))$  que conduza os estados de (3.6) para a origem. Neste trabalho o estudo será particularizado para leis de chaveamento obtidas da aplicação da função ‘max’ na forma

$$\sigma(e(t)) := \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\} \quad (3.9)$$

onde  $v_i(e(t))$ ,  $i \in \mathcal{M}$  são funções auxiliares associadas com os subsistemas de (3.5). Note que (3.9) é uma lei de chaveamento dependente dos estados que utiliza múltiplas funções de Lyapunov. Para mais detalhes sobre as diferentes abordagens no estabelecimento de leis de chaveamento veja a Seção 2.6 do capítulo anterior e as referências citadas.

A lei de chaveamento  $\sigma(e(t))$  deve fazer com que o origem da dinâmica do erro de seguimento seja globalmente assintoticamente estável. O próximo lema destaca uma subclasse de sistemas chaveados afins para os quais o problema da estabilização global é trivial.

**Lema 3.2** *Considere o sistema afim de erro de seguimento (3.5). Assuma que exista  $\bar{\theta} \in \Theta$  tal que  $\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i k_i = 0$ . Se existir  $i$  tal que  $A_i$*

apresente estabilidade Hurwitz e  $k_i = 0$ , então o sistema chaveado sob efeito da lei de chaveamento  $\sigma(e(t)) = \{i\}$  é globalmente assintoticamente estável.  $\square$

A prova deste lema é trivial e será omitida. Como consequência do Lema 3.2, os problemas desafiadores serão aqueles nos quais os subsistemas (3.5) satisfazem a suposição a seguir.

**Suposição 3.1** *Se  $A_i$  apresenta estabilidade Hurwitz, então  $k_i \neq 0$ .*

Os métodos que serão apresentados neste trabalho se aplicam para os casos em que a Suposição 3.1 é atendida e também para os casos em que não é atendida.

Neste ponto, é importante enfatizar uma diferença significativa entre sistemas chaveados lineares e afins. Para o caso de sistemas chaveados afins, mesmo se todas as matrizes de dinâmicas dos subsistemas ( $A_i$ ) forem Hurwitz estáveis, não é possível obter diretamente a convergência para a origem devido a presença do termo constante ( $k_i$ ) no campo vetorial. Outra consequência da presença do termo constante e da condição (3.8) no Lema 3.1 é que o equilíbrio estável na origem do sistema do erro de seguimento será frequentemente obtido através de um modo deslizante. Isso porque, de acordo com a Suposição 3.1, a única possibilidade de um único subsistema ser ativo na origem, ou seja  $\theta_i = 1$  para algum  $i$ , é quando a matriz  $A_i$  correspondente não for Hurwitz estável. Estas observações ajudam a ilustrar como a estabilização de sistemas chaveados afins pode ser significativamente mais desafiadora do que a estabilização de sistemas chaveados lineares.

Em particular, a necessidade de considerar a estabilidade em modos deslizantes é um aspecto que torna o problema mais complexo, sendo que muitos trabalhos anteriormente publicados excluem a possibilidade de ocorrência de modos deslizantes. Veja por exemplo (SUN, 2006) para o caso de sistemas chaveados lineares. Adicionalmente, existem vários resultados na literatura de leis de chaveamento baseadas na função ‘min’ em oposição ao uso da função ‘max’. Um dos motivos para essa preferência é devido as condições para garantia de estabilidade em modos deslizantes serem mais simples quando a função ‘min’ é utilizada no caso de sistemas afins. Veja (LIBERZON, 2003, § 3.4) para mais detalhes. No entanto, conforme será visto na próxima seção, o uso da função ‘max’ vai adicionar flexibilidade à análise de estabilidade pois as funções auxiliares  $v_i$  não vão precisar ser funções positivas, ao contrário do que acontece quando se emprega a função ‘min’ associada aos argumentos de estabilidade de Lyapunov (HU; MA; LIN, 2008; GEROMEL; COLANERI; BOLZERN, 2008).



### 3.4 CONDIÇÕES DE PROJETO PARA GARANTIA DE ESTABILIDADE GLOBAL E ASSINTÓTICA

Nesta seção será apresentado o principal resultado de estabilidade deste trabalho. Quando as condições do Teorema 3.1 são satisfeitas, é possível obter uma lei de chaveamento que assintoticamente conduz os estados do sistema chaveado para uma dada referência constante  $\bar{x}$ . Será dada atenção especial para a estabilidade em modos deslizantes.

**Teorema 3.1** *Considere o sistema afim (3.5) que define o erro de seguimento. Suponha que existam  $\bar{\theta} \in \Theta$  tal que  $\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i k_i = 0$  e funções invariantes no tempo  $v_i(e) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $v_i(0) = 0$ , para todo  $i \in \mathcal{M}$ ,  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , todas pertencentes à classe  $\mathcal{C}^1$ , e  $\alpha : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que*

$$V(e) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e)\} > 0 \quad (3.10)$$

e

$$V(e) \text{ é radialmente ilimitada} \quad (3.11)$$

$$Q(e) \leq 0, \quad \alpha(\theta) \geq 0 \quad (3.12)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{M}} \theta_i \theta_j \nabla v_i(e)^T (A_j e + k_j) + 2\alpha(\theta)(\theta_i - \bar{\theta}_i)v_i(e) < Q(e) \quad (3.13)$$

$\forall \theta \in \Theta, \forall e \neq 0$ , então a origem de (3.6) sob efeito da lei de chaveamento (3.9) é globalmente assintoticamente estável.  $\square$

**Prova 3.2** *A consideração que  $v_i \in \mathcal{C}^1$  garante que  $V$  é contínua com  $V(0) = 0$ , enquanto que a condição (3.11) garante que  $V$  é radialmente ilimitada. Desta forma,  $V$  qualifica-se como uma função candidata de Lyapunov e pode ser usada para provar estabilidade assintótica global (FILIPPOV, 1988). O fato de  $V$  não possuir derivada em todos os pontos não será um problema. Conforme será visto mais adiante, é possível utilizar argumentos convencionais de estabilidade de Lyapunov nesta prova. A condição (3.10) requer que  $V$  seja positiva definida enquanto que a condição (3.13) garante que  $V$  decresça para qualquer trajetória do sistema chaveado em malha fechada. Este último aspecto será provado na sequência.*

*Inicialmente, observe que*

$$V(e) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e)\} = \max_{\theta \in \Theta} \sum_{i \in \mathcal{M}} \theta_i v_i(e) \geq \sum_{i \in \mathcal{M}} \bar{\theta}_i v_i(e) \quad (3.14)$$

o que por sua vez implica que  $\sum_{i \in \mathcal{M}} (\theta_i - \bar{\theta}_i) v_i(e) \geq 0$ . Como  $\alpha(\theta) \geq 0$ , conclui-se que (3.13) pode ser obtida pela aplicação do Procedimento-S (YAKUBOVICH, 1971), (BOYD et al., 1994, p.23) nas seguintes condições

$$\sum_{i \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{M}} \theta_i \theta_j \nabla v_i(e)^T (A_j e + k_j) < Q(e) \leq 0$$

sempre que  $\sum_{i \in \mathcal{M}} (\theta_i - \bar{\theta}_i) v_i(e) \geq 0$  (3.15)

$\forall(\theta, e) \neq (\bar{\theta}, 0)$ , ou seja (3.13) é suficiente para (3.15). Nesta equação, enquanto a primeira desigualdade relaciona-se com a derivada no tempo da função de Lyapunov, conforme será demonstrado na sequência, a segunda desigualdade está relacionada com o uso da função ‘max’ em (3.14).

Primeiramente será verificado o caso no qual o sistema chaveado opera em um modo isolado, o que implica em  $\sigma(e)$  ser composto por somente um elemento, por exemplo  $\sigma(e) = \{i\}$ . Nesse caso tem-se

$$v_i(e) - \sum_{j \in \mathcal{M}} \bar{\theta}_j v_j(e) \geq 0.$$

De acordo com os resultados de Filippov (1988), nesta situação  $\theta_i = 1$  e  $\theta_j = 0$  para todo  $j \neq i$  e a desigualdade (3.15) é reduzida para

$$\nabla v_i(e)^T (A_i e + k_i) < Q(e) \leq 0 \quad \text{sempre que} \quad v_i(e) \geq \sum_{j \in \mathcal{M}} \bar{\theta}_j v_j(e).$$

(3.16)

Desta forma, para  $e(t)$  tal que  $\sigma(e(t)) = \{i\}$  tem-se  $V(e(t)) = v_i(e(t)) > 0$ . Logo,  $V(e(t))$  é diferenciável e assim a desigualdade (3.16) implica em

$$\dot{V}(e(t)) = \dot{v}_i(e(t)) = \nabla v_i(e(t))^T (A_i e(t) + k_i) < Q(e(t)) \leq 0.$$

Na sequência, considere um ponto  $e(t)$  no qual o sistema chaveado encontra-se em modo deslizante, ou seja  $\sigma(e(t))$  é composto por mais de um elemento. Neste caso as trajetórias do sistema em malha fechada podem ir para uma região onde  $\sigma(e(t))$  possui somente um elemento, na qual  $V(e(t))$  decresce devido aos argumentos anteriormente apresentados, ou entra em um modo deslizante. Em modo deslizante, a trajetória do sistema é descrita por (3.6). O sistema chaveado vai permanecer em modo deslizante enquanto existir pelo menos um  $\theta(e(t))$

em  $\Theta$  tal que  $e(t) \in T_{\dot{e}(t)}(e(t))$ , sendo

$$\begin{aligned} T_h(e) &:= \{e \in \mathbb{R}^n : V(e) = v_i(e) = v_j(e), \\ &\quad \nabla v_i(e)^T h = \nabla v_j(e)^T h \quad \text{para todo } i, j \in \sigma(e)\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

ou seja, existe uma direção  $h = \dot{e}(t)$  na inclusão diferencial que pertence ao plano tangente do manifold <sup>1</sup> de escorregamento

$$\{e \in \mathbb{R}^n : V(e) = v_i(e) \quad \text{para todo } i \in \sigma(e)\}. \quad (3.18)$$

Voltando para a prova de estabilidade, para um  $e(t)$  e para todo  $\theta(e(t)) \in \Theta$ , a desigualdade (3.14) acarreta em

$$V(e(t)) = \sum_{i \in \mathcal{M}} \theta_i(e(t)) v_i(e(t)) = \max_{\theta \in \Theta} \sum_{i \in \mathcal{M}} \theta_i v_i(e(t)) \geq \sum_{i \in \mathcal{M}} \bar{\theta}_i v_i(e(t))$$

o que implica

$$\sum_{i \in \mathcal{M}} (\theta_i(e(t)) - \bar{\theta}_i) v_i(e(t)) \geq 0. \quad (3.19)$$

Portanto, utilizando também neste caso o Procedimento-S, pode-se concluir de (3.13) que para  $e(t)$  e para todo  $\theta(e(t)) \in \Theta$  obtém-se

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{M}} \theta_i(e(t)) \theta_j(e(t)) \nabla v_i(e(t))^T (A_j e(t) + k_j) = \\ &\sum_{i \in \sigma(e(t))} \sum_{j \in \sigma(e(t))} \theta_i(e(t)) \theta_j(e(t)) \nabla v_i(e(t))^T (A_j e(t) + k_j) < Q(e(t)) \leq 0 \end{aligned}$$

sempre que (3.19) é satisfeita.

Em particular, para todo  $\theta(e(t)) \in \Theta$  tal que

$$\dot{e}(t) = \sum_{j \in \mathcal{M}} \theta_j(e(t)) (A_j e(t) + k_j) = \sum_{j \in \sigma(e(t))} \theta_j(e(t)) (A_j e(t) + k_j) \quad (3.20)$$

---

<sup>1</sup>Em português, o termo *manifold* é traduzido como “variedade”.

com  $e(t) \in T_{\dot{e}(t)}(e(t))$ , tem-se

$$\begin{aligned} DV(e(t))[\dot{e}(t)] &= \max_{i \in \sigma(e(t))} \nabla v_i(e(t))^T \dot{e}(t) \\ &= \sum_{i \in \sigma(e(t))} \theta_i(e(t)) \nabla v_i(e(t))^T \dot{e}(t) < Q(e(t)) \leq 0 \quad (3.21) \end{aligned}$$

onde  $DV(e(t))[h]$  representa a derivada direcional de Dini (LASDON, 1970, p.420) para  $V(e(t))$ . Observe que, desta forma, é garantido o decrescimento de  $DV(e(t))[h]$  ao longo de todas as trajetórias no manifold de escorregamento.

A última situação que precisa ser considerada é quando  $\sigma(e(t))$  possui mais de um elemento e o manifold de escorregamento não for diferenciável em  $e(t)$ . Devido à continuidade e diferenciabilidade das funções auxiliares  $v_i$ , esses pontos podem ocorrer somente na interseção de dois manifolds de escorregamento, portanto criando um sub-manifold de menor dimensão. O argumento a ser utilizado neste caso é o seguinte: o sistema pode sair do modo deslizante e possuir somente um modo ativo ou vai permanecer em modo deslizante em um dos sub-manifolds que cruzam em  $e(t)$ . Em ambos os casos  $V(e(t))$  decresce por causa dos argumentos previamente apresentados. Adicionalmente, a continuidade de  $V(e(t))$  implica que o valor desta função não aumenta nos pontos onde  $V(e(t))$  não é diferenciável. Além disso, a condição (3.21) é satisfeita também nos pontos de  $e(t)$  nos quais o manifold de escorregamento não é diferenciável. Nestes pontos  $\theta(e(t))$  é descontínuo, porém  $DV(e(t))[\dot{e}(t)] < 0$  pois (3.15) deve ser satisfeita para todo  $\theta \in \Theta - \{\bar{\theta}\}$ .  $\square$

**Observação 3.1** O Teorema 3.1 e sua prova podem ser generalizados para o caso de sistemas chaveados não lineares, nos quais as funções  $f_i(x(t))$ ,  $i \in \mathcal{M}$ , definem os subsistemas  $\dot{x}(t) = f_i(x(t))$  que não necessariamente precisam ser homogêneos. A extensão da metodologia para o caso de sistemas chaveados não lineares será vista nos próximos capítulos.  $\square$

**Observação 3.2** Observe em (3.19) que  $\theta$  é, de fato, uma função de  $e(t)$ . No entanto, na condição (3.13) essa dependência não é levada em consideração, o que pode adicionar um certo conservadorismo à esta condição. O papel de  $\alpha(\theta)$ , que aparece em (3.13) graças à aplicação do Procedimento-S, é reduzir este conservadorismo em um certo grau.  $\square$

**Observação 3.3** *É possível verificar que as condições do Teorema 3.1 não são convexas com relação ao  $\theta$  e  $\alpha(\theta)$ . No entanto, para algumas escolhas particulares de  $v_i(e(t))$  e  $\alpha(\theta)$  é possível obter condições suficientes para verificar as expressões do Teorema 3.1. Estas condições suficientes podem ser descritas também como um conjunto de LMIs. Esses aspectos já foram abordados em (TROFINO et al., 2011) e serão vistos com mais detalhes no próximo capítulo.  $\square$*

**Observação 3.4** *Em alguns casos é possível utilizar uma condição suficiente para verificar a positividade de  $V$ . Suponha que exista  $\tilde{\theta} \in \Theta$  tal que*

$$\sum_{i \in \mathcal{M}} \tilde{\theta}_i v_i(e) > 0, \quad \forall e \neq 0. \quad (3.22)$$

*Então tem-se  $V(e) > 0$  para todo  $e \neq 0$ . Isso ocorre pois*

$$V(e) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e)\} = \max_{\theta \in \Theta} \sum_{i \in \mathcal{M}} \theta_i v_i(e) \geq \sum_{i \in \mathcal{M}} \tilde{\theta}_i v_i(e) > 0.$$

*Em particular  $\tilde{\theta} = \bar{\theta}$ , com  $\bar{\theta}$  do Lema 3.1, parece ser a escolha natural. Pelos mesmos argumentos, se  $\sum_{i \in \mathcal{M}} \tilde{\theta}_i v_i(e)$  é radialmente ilimitada então  $V(e)$  vai ser também radialmente ilimitada.  $\square$*

### 3.5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção serão apresentados dois exemplos que ilustram alguns conceitos de sistemas chaveados afins e também demonstram a utilização do Teorema 3.1 para verificar a estabilidade global e assintótica de um sistema sob efeito de uma lei de chaveamento. O primeiro exemplo é baseado em um circuito de eletrônica de potência e o segundo é um exemplo acadêmico.

Neste ponto, é importante enfatizar que os circuitos de eletrônica de potência que empregam chaves eletrônicas são alguns dos exemplos práticos de sistemas chaveados. Dentre estes circuitos, é possível destacar os conversores de corrente contínua para corrente contínua (CC/CC). Estes conversores são empregados principalmente em aplicações onde é necessária a estabilização de uma determinada tensão CC na saída do circuito em um valor desejado (DI BERNARDO; VASCA, 2000). Esta tensão é obtida através da ação de uma chave eletrônica, sendo o chaveamento tradicionalmente feito através de técnicas de modulação

por largura de pulso (*Pulse Width Modulation* - PWM). Considerando que o circuito trabalhe em um ambiente sem ruídos ou perturbações, é possível estabelecer *a priori* um sinal de chaveamento com frequência fixa com base na tensão desejada na saída. Nesta situação o sistema estará operando em malha aberta. No entanto, em aplicações práticas podem ocorrer variações na carga e outros distúrbios externos e ruídos atuando sobre o circuito. Esses aspectos motivam o desenvolvimento de novas estratégias de controle para os conversores estáticos. Por exemplo, uma abordagem alternativa para o controle de conversores CC/CC foi proposta em (DEAECTO et al., 2010).

Neste trabalho, será visto primeiramente um exemplo de projeto de lei de chaveamento aplicado ao caso de um conversor abaixador e elevador de tensão (*Buck-Boost*). No próximo capítulo será apresentado um outro exemplo envolvendo o conversor abaixador de tensão (*Buck*).

**Exemplo 3.1** Considere um conversor abaixador e elevador de tensão (*Buck-Boost*) com carga resistiva, conforme visto no diagrama do circuito da Figura 5. O conversor *Buck-Boost* permite obter uma tensão na saída do circuito que pode ser menor ou maior que a tensão de entrada. A polaridade da tensão de saída é oposta à da tensão de entrada.

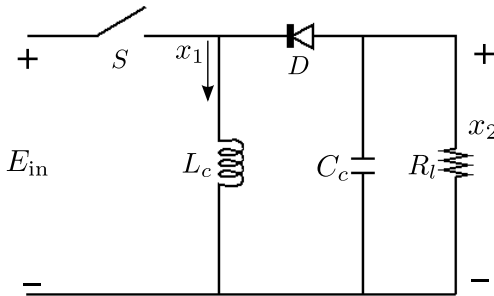


Figura 5 – Exemplo 3.1: conversor abaixador e elevador de tensão (*Buck-Boost*).

A operação do conversor *Buck-Boost* é composta por dois modos. Quando a chave  $S$  estiver ligada (modo 1), o diodo  $D$  estará reversamente polarizado. A corrente de entrada circula através do indutor  $L_c$  e cresce em função do tempo. Com a chave desligada (modo 2), a corrente circula pelo indutor  $L_c$ , pela carga, pelo capacitor  $C_c$  e pelo diodo  $D$ . Assim, a energia que tenha sido armazenada em  $L_c$  é trans-

ferida para a carga. O valor da corrente diminui à medida que ocorre a transferência da energia.

O modelo matemático do Buck-Boost pode ser descrito como um sistema chaveado afim com dois modos de operação,  $\mathcal{M} = \{1, 2\}$ , com a representação em espaço de estados (3.1), sendo

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_l C_c} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_c} \\ -\frac{1}{C_c} & -\frac{1}{R_l C_c} \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} \frac{E_{in}}{L_c} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Os estados do sistema são a corrente do indutor ( $x_1$ ) e a tensão no capacitor ( $x_2$ ). Maiores detalhes sobre a modelagem e a aplicação deste conversor podem ser vistos nos livros (RASHID, 2010; MARTINS; BARBI, 2008).

Os valores dos parâmetros considerados neste exemplo são

$$E_{in} = 15 \text{ V}, \quad L_c = 1 \text{ mH}, \quad C_c = 1 \text{ } \mu\text{F}, \quad R_l = 30 \Omega$$

A matriz  $A_1$  não é Hurwitz estável pois um dos autovalores é 0. Por outro lado, a matriz  $A_2$  é Hurwitz estável.

Para este sistema o objetivo é projetar uma lei de chaveamento de forma que a tensão no capacitor,  $x_2$ , seja igual a um dado valor  $E_{out}$ , ou seja,  $\bar{x}_2 = E_{out} \neq 0$ . Desta forma, o ponto de equilíbrio deverá ser igual a

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ E_{out} \end{pmatrix}$$

onde  $\bar{x}_1$  é uma constante a ser determinada. Calculando  $k_1$  e  $k_2$  de (3.5), obtém-se

$$k_1 = \begin{pmatrix} \frac{E_{in}}{L_c} \\ -\frac{E_{out}}{R_l C_c} \end{pmatrix}, \quad k_2 = \begin{pmatrix} \frac{E_{out}}{L_c} \\ -\frac{\bar{x}_1}{C_c} - \frac{E_{out}}{R_l C_c} \end{pmatrix}.$$

Utilizando o Lema 3.1 é possível obter  $\bar{\theta} \in \Theta$  tal que

$$\frac{1}{R_l L_c C_c} \begin{pmatrix} R_l C_c (\bar{\theta}_1 E_{in} + \bar{\theta}_2 E_{out}) \\ -L_c [\bar{\theta}_1 E_{out} + \bar{\theta}_2 (R_l \bar{x}_1 + E_{out})] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 = 1, \quad \bar{\theta}_1 \geq 0, \quad \bar{\theta}_2 \geq 0$$

do qual é possível obter

$$\bar{\theta}_1 = \frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{out}} - E_{\text{in}}}, \quad \bar{\theta}_2 = 1 - \bar{\theta}_1, \quad \bar{x}_1 = \frac{E_{\text{out}}^2 - E_{\text{out}}E_{\text{in}}}{E_{\text{in}}R_l}. \quad (3.23)$$

Observe que, neste exemplo, para dados  $E_{\text{in}}$  e  $E_{\text{out}}$ , o valor de  $\bar{\theta}$  é único. No entanto, existem casos em que isso não ocorre (ver Exemplo 3.2). O conversor opera como abaixador de tensão (“voltage buck”), ou seja  $E_{\text{in}} > E_{\text{out}}$ , caso  $\bar{\theta}_1 < 0,5$ . Quando  $\bar{\theta}_1 > 0,5$ , o conversor opera como elevador de tensão (“voltage boost”) e conseqüentemente  $E_{\text{in}} < E_{\text{out}}$ .

Para este exemplo, considere a lei de chaveamento (3.9) com as seguintes funções auxiliares classe  $\mathcal{C}^1$

$$\begin{aligned} v_1(e) &= -6000e_1 + 180e_2 - 300e_1^2 + 3e_2^2 + 20e_1e_2 \\ v_2(e) &= 3600e_1 - 108e_2 + 4000e_1^2 + 7e_2^2 + 40e_1e_2. \end{aligned}$$

Estas funções foram obtidas através de adaptações numéricas efetuadas sobre os resultados da solução de um conjunto de LMIs, visto em (TROFINO et al., 2011). Conforme discutido na Observação 3.3, para algumas escolhas particulares de  $v_i(e(t))$  e  $\alpha(\theta)$  é possível obter um conjunto de LMIs que verifica as condições do Teorema 3.1. A metodologia para projeto de lei de chaveamento utilizando LMIs será descrita no próximo capítulo.

Na sequência, será demonstrado que as condições do Teorema 3.1 são satisfeitas para este exemplo com as funções auxiliares apresentadas anteriormente. Assim, é possível obter uma lei de chaveamento  $\sigma(e)$  que globalmente conduz a tensão de saída para o seguinte valor de referência

$$E_{\text{out}} = -9 \text{ V}$$

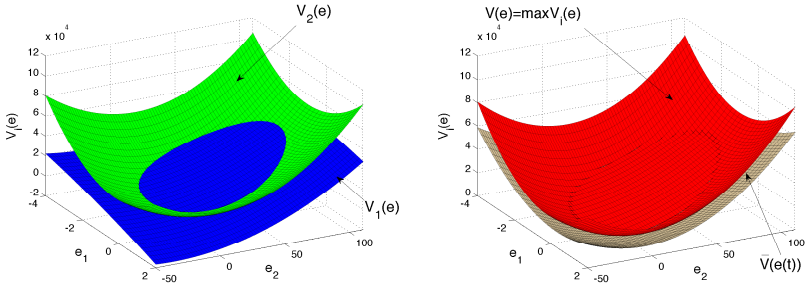
É importante salientar que, apesar dos valores numéricos das funções auxiliares terem sido obtidos com base no resultado das LMIs em (TROFINO et al., 2011), os argumentos a seguir são baseados somente nas condições do Teorema 3.1.

A Figura 6(a) apresenta um gráfico tridimensional das as funções auxiliares  $v_1$  e  $v_2$ . Observe que  $v_1(0) = v_2(0) = 0$  e que  $v_1$  e  $v_2$  não são positivas definidas devido à presença dos termos lineares.

Inicialmente, é necessário provar que a função ‘max’ de  $v_1$  e  $v_2$  é positiva definida e radialmente ilimitada, conforme mostrado no gráfico em três dimensões da Figura 6(b). Será provado também, utilizando os argumentos da Observação 3.4, que para este exemplo existe uma



função quadrática positiva definida que é um limitante inferior para  $V$  globalmente. Esta função limitante inferior é representada por  $\bar{V}(e(t))$  na Figura 6(b).



(a) Funções auxiliares  $v_1$  (azul) e  $v_2$  (verde) (b) Funções  $V$  (vermelho) e  $\bar{V}$  (marrom)

Figura 6 – Exemplo 3.1: função de Lyapunov  $V(e)$  e limitante inferior  $\bar{V}(e)$ .

Para  $E_{\text{out}} = -9 \text{ V}$ ,  $E_{\text{in}} = 15 \text{ V}$  e os demais parâmetros com os valores considerados anteriormente, o conversor opera como um abaixador de tensão (“voltage buck”). Assim, utilizando (3.23) obtém-se os valores de  $\bar{\theta}$

$$\bar{\theta}_1 = \frac{3}{8}, \quad \bar{\theta}_2 = \frac{5}{8}$$

com os quais é obtida a função

$$\bar{V}(e) := \bar{\theta}_1 v_1(e) + \bar{\theta}_2 v_2(e) = 2387.5 e_1^2 + 5.5 e_2^2 + 32.5 e_1 e_2.$$

Pode-se verificar que  $\bar{V}(e) > 0$  para todo  $e \neq 0$ . Assim, é possível concluir, com base na Observação 3.4, que  $V(e) \geq \bar{V}(e) > 0$  para todo  $e \neq 0$ . Como  $\bar{V}(e)$  é radialmente ilimitada, a função  $V(e)$  também será.

Na sequência, após provar que  $V$  é positiva, será demonstrado que a condição (3.13) é satisfeita com as seguintes escolhas particulares

$$Q(e) = Q = 0, \quad \alpha(\theta) = \alpha = 200.$$

Inicialmente, a equação (3.13) para este exemplo será reescrita

na forma

$$\frac{3}{100} \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} M(\theta) & r^T(\theta) \\ r(\theta) & \gamma(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix} > 0, \quad \text{para todo } \theta \in \Theta, \quad e \neq 0 \quad (3.24)$$

onde

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} 3600 \theta_1^2 + 555600 \theta_2 \theta_1 + 1152000 \theta_2^2 + 28650 \theta_1 + 28650 \theta_2 \\ 9880 \theta_1^2 + 128640 \theta_2 \theta_1 + 109760 \theta_2^2 + 195 \theta_1 + 195 \theta_2 \\ \star \\ 5964 \theta_1^2 + 19280 \theta_2 \theta_1 + 12716 \theta_2^2 + 66 \theta_1 + 66 \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$r(\theta)^T = \begin{bmatrix} 81000 \theta_1^2 + 707400 \theta_2 \theta_1 - 453600 \theta_2^2 \\ 57420 \theta_1^2 + 72468 \theta_2 \theta_1 - 64152 \theta_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\gamma(\theta) = 1080000 \theta_1^2 - 1296000 \theta_2 \theta_1 + 388800 \theta_2^2.$$

onde o símbolo “ $\star$ ” representa o bloco de uma matriz que pode ser deduzido por simetria.

Uma condição suficiente para que (3.24) seja satisfeita para todo  $e \neq 0$  é a seguinte

$$\begin{bmatrix} M(\theta) & r^T(\theta) \\ r(\theta) & \gamma(\theta) \end{bmatrix} \geq 0, \quad M(\theta) > 0, \quad \text{para todo } \theta \in \Theta. \quad (3.25)$$

Utilizando o Complemento de Schur (BOYD et al., 1994, p.7), a condição anterior é equivalente à

$$\gamma(\theta) \geq r(\theta) M^{-1}(\theta) r^T(\theta), \quad M(\theta) > 0, \quad \text{para todo } \theta \in \Theta.$$

Como  $\theta_2 = 1 - \theta_1$ ,  $M(\theta)$  é uma função matricial polinomial de  $\theta_1 \in [0, 1]$ . Neste caso  $M(\theta) > 0$  pois os menores principais de  $M(\theta)$  são funções escalares positivas de  $\theta_1$  no intervalo  $0 \leq \theta_1 \leq 1$  (Critério de Sylvester).

A condição  $\gamma(\theta) - r(\theta) M^{-1}(\theta) r^T(\theta) \geq 0$  é um pouco mais complexa de se provar. Inicialmente, defina

$$p(\theta) := \gamma(\theta) - r(\theta) M^{-1}(\theta) r^T(\theta)$$

sendo

$$\begin{aligned} r(\theta) &= (3 - 8\theta_1) [5400(25\theta_1 - 28) - 396(25\theta_1 - 54)] \\ \gamma(\theta) &= 43200(3 - 8\theta_1)^2. \end{aligned}$$

Analisando as expressões acima, verifica-se que é possível fatorar  $p(\theta)$  em  $p(\theta) = 864(3 - 8\theta_1)^2 p_1(\theta_1)$ , sendo

$$\begin{aligned} p_1(\theta_1) &= \frac{p_{11}(\theta_1) + p_{12}(\theta_1)}{p_{13}(\theta_1) + p_{14}(\theta_1)} \\ p_{11}(\theta_1) &= 4212 \times 10^6 \theta_1^4 - 7602015000 \theta_1^3 + 3433780625 \theta_1^2 \\ p_{12}(\theta_1) &= 263733136 \theta_1 - 396802426 \\ p_{13}(\theta_1) &= 17640000 \theta_1^4 + 171120000 \theta_1^3 - 457479296 \theta_1^2 \\ p_{14}(\theta_1) &= 385039472 \theta_1 - 120038651. \end{aligned}$$

Através da análise do gráfico da função  $p_1(\theta_1)$  no intervalo  $0 \leq \theta_1 \leq 1$  é possível verificar que  $p_1(\theta_1)$  é positiva neste intervalo. Assim,  $p(\theta) > 0$  para todo  $\theta_1 \neq \theta_1 = 3/8$  e  $p(\theta) = 0$ . A conclusão é que (3.24) será satisfeita para todo  $e \neq 0$  e  $\theta \in \Theta$ . A fatorização realizada anteriormente em  $p$  não ocorre por acaso, mas sim devido à escolha cuidadosa dos coeficientes das funções auxiliares  $v_1$  e  $v_2$ .

Por fim, foi realizada uma simulação do conversor operando com a lei de chaveamento. A Figura 7 apresenta os resultados de simulação do sistema com condição inicial igual a zero, ou seja  $x = (0, 0)$ . O objetivo é a convergência dos estados para o ponto de equilíbrio  $\bar{x} = (480 \text{ mA}, -9 \text{ V})$ . A resposta dos estados  $x$  em função do tempo é apresentada nos gráficos à esquerda da figura e o plano de fase do erro é visto à direita da Figura 7. É possível verificar que quando a trajetória toca a superfície de chaveamento pela segunda vez um modo deslizante conduz o erro em direção à origem,  $e = 0$ .  $\square$

**Exemplo 3.2** Considere um sistema chaveado afim com três subsistemas,  $\mathcal{M} = \{1, 2, 3\}$ , na representação em espaço de estados (3.1), sendo

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & b_1 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ b_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & b_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Para este exemplo, o objetivo é conduzir os estados do sistema para

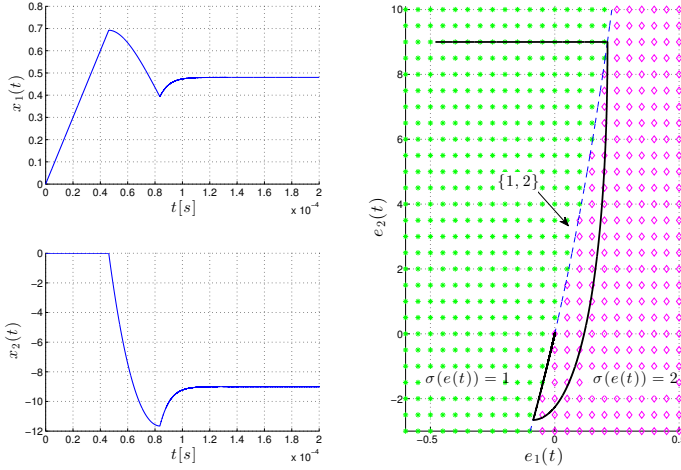


Figura 7 – Exemplo 3.1: resultados de simulação do conversor *Buck-Boost* para  $E_{\text{out}} = -9\text{V}$ .

a origem, ou seja,  $\bar{x} = 0$ . Observe que nenhuma das matrizes de dinâmicas dos subsistemas ( $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ) é Hurwitz estável. Adicionalmente, é possível verificar que este exemplo satisfaz a Suposição 3.1. A Figura 8 apresenta o plano de fase com as trajetórias de cada subsistema para diferentes condições iniciais. Utilizando o Lema 3.1 é possível calcular

$$\begin{pmatrix} \bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_3 = 1, \quad \bar{\theta}_1 \geq 0, \quad \bar{\theta}_2 \geq 0, \quad \bar{\theta}_3 \geq 0 \quad (3.27)$$

com o qual obtém-se a seguinte expressão

$$\bar{\theta} = (\beta, \beta, 1 - 2\beta), \quad \beta \in [0, 1/2]. \quad (3.28)$$

É possível verificar que qualquer escolha de  $\beta$  na faixa  $[0, 1/2]$  faz com que a origem seja um ponto de equilíbrio de (3.6) para este exemplo.

Com relação à lei de chaveamento, considere as seguintes funções

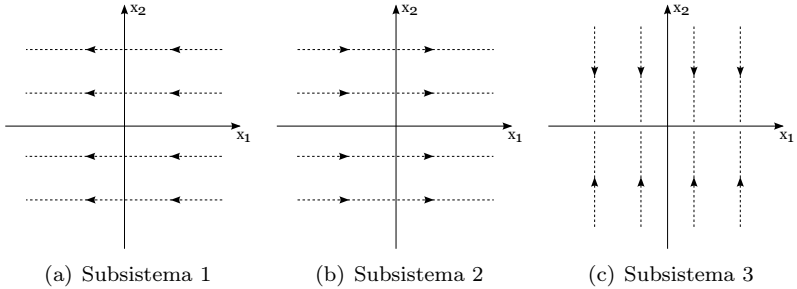


Figura 8 – Exemplo 3.2: plano de fase com as trajetórias de cada subsistema para diferentes condições iniciais.

auxiliares classe  $\mathcal{C}^1$

$$v_1(e) = e_1(t) + e_2(t)^2, \quad v_2(e) = -e_1(t) + e_2(t)^2, \quad v_3(e) = 2e_2(t)^2. \quad (3.29)$$

Um gráfico tridimensional destas funções é apresentado na Figura 9(a). Na sequência, será demonstrado que estas funções auxiliares vão produzir uma lei de chaveamento  $\sigma(e)$  com o formato de (3.9) que conduz os estados do sistema assintoticamente para zero, ou seja para  $e = \bar{x} = 0$ . Inicialmente, serão analisadas as condições no qual a composição ‘max’ das funções auxiliares será positiva definida. Como

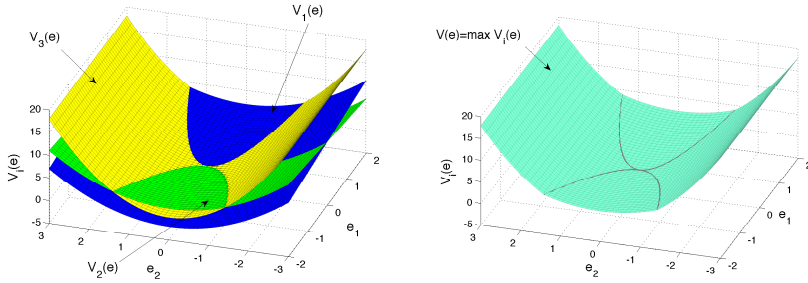
$$V(e) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e)\} = \max\{|e_1| + e_2^2, \quad 2e_2^2\} \quad (3.30)$$

é possível concluir que  $V(e) > 0$  para todo  $e \neq 0$  e que  $V(e)$  é também radialmente ilimitada. Adicionalmente, como

$$V(e_1, 0) = |e_1|$$

verifica-se que não vai existir uma função quadrática positiva definida que seja globalmente um limitante inferior para  $V$ , pois qualquer forma quadrática positiva definida iria crescer mais que  $|e_1|$  para um  $e_1$  grande o suficiente. Desta forma, este é um exemplo no qual a Observação 3.4 não se aplica para a escolha de  $v_i(e)$  em (3.29). De fato,  $\bar{\theta}_1 v_1(e) + \bar{\theta}_2 v_2(e) + \bar{\theta}_3 v_3(e) = 2(1 - \beta)e_2^2$ , que é positiva semidefinida para  $\beta \in [0, 1/2]$ . Um gráfico tridimensional de  $V(e)$  pode ser visto na Figura 9(b).

Na sequência será verificada a condição (3.13) com a escolha



(a) Funções auxiliares  $v_1$  (azul),  $v_2$  (verde) e  $v_3$  (amarelo)

(b) Função  $V$  (verde claro)

Figura 9 – Exemplo 3.2: função de Lyapunov  $V(e)$ ; a curva em preto em (b) representa a superfície de chaveamento.

particular de  $Q(e) = Q = 0$  e  $\alpha(\theta) = \alpha = 0$ . Utilizando manipulações algébricas é possível reescrever esta condição como

$$\sum_{i \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{M}} \theta_i \theta_j \nabla v_i(e)^T (A_j e + k_j) = -f(\theta) - g(\theta, e_2)$$

sendo

$$f(\theta) = (\theta_1 - \theta_2)^2 \geq 0, \quad g(\theta, e) = 2\theta_3(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3)e_2^2.$$

Observe que  $f(\theta) + g(\theta, e) \geq 0$  para todo  $e, \theta \in \Theta$ . Desta forma, (3.13) é no mínimo negativa semidefinida. Pode-se cogitar o uso dos princípios de LaSalle para análise de estabilidade desta condição. A discussão pode ser bastante complexa (veja, por exemplo, Hespanha (2004)) e neste caso optou-se por utilizar um argumento ad hoc. Como  $V$  é positiva definida e (3.13) é somente negativa semidefinida, a metodologia de Lyapunov somente pode provar convergência para um subconjunto<sup>2</sup> do seguinte conjunto invariante

$$\Omega := \{(\theta, e) : f(\theta) + g(\theta, e) = 0, \quad \theta \in \Theta\} = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

<sup>2</sup>De fato,  $\Omega(e) := \{(\theta(e), e) \in \Omega : \theta(e) \text{ parametriza uma trajetória factível}\} \subseteq \Omega$ .

sendo

$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= \{(\theta, e) : \theta_3 = 1, \quad \theta_1 = \theta_2 = e_2 = 0, \quad e \in \mathbb{R}^2\} \\ \Omega_2 &:= \{(\theta, e) : \theta_1 = \theta_2 = 1/2, \quad \theta_3 = 0, \quad e \in \mathbb{R}^2\}.\end{aligned}$$

Observe que, para este exemplo, o sistema de chaveamento sob efeito da lei de chaveamento  $\sigma(e(t))$  implica em

$$(\theta(e(t)), e(t)) \in \Omega \quad \implies \quad e(t) = 0.$$

De fato, se  $\theta_3(e(t)) = 1$  e  $e_2(t) = 0$ , através da análise das equações (3.29) e (3.30) é possível verificar que  $e_1(t) = 0$ . Por outro lado, o caso  $\theta_1(e(t)) = \theta_2(e(t)) = 1/2$  implica em  $e_1(t) = 0$  e  $v_1(e(t)) = v_2(e(t)) = e_2(t)^2$ . Como  $v_3(e(t)) = 2e_2(t)^2$ ,  $v_1(e(t)) = v_2(e(t)) < V(e(t))$  exceto quando  $e_2(t) = 0$ . Resumindo,  $\dot{V}$  será igual à zero somente no equilíbrio  $(e, \theta) = (0, \bar{\theta})$  e  $\dot{V} < 0$  fora do equilíbrio.

Os resultados de simulação com as trajetórias do sistema para diferentes condições iniciais são apresentados na Figura 10. Observe que todas as trajetórias que iniciam em um ponto onde  $e_1(0) \neq 0$  e  $e_2(0) \neq 0$  apresentam modos deslizantes fora do equilíbrio. Adicionalmente, verifica-se que para qualquer condição inicial na qual  $e_2(0) = 0$  ou  $e_1(0) = 0$ , indicadas na figura pelo símbolo “•”, os estados do sistema convergem para a origem sem chaveamentos durante toda a trajetória. Se  $e_2(0) = 0$  e  $e_1(0) > 0$  tem-se  $\sigma(e(t)) = \{1\}$ ,  $\forall t \geq 0$ . Se  $e_2(0) = 0$  e  $e_1(0) < 0$  tem-se  $\sigma(e(t)) = \{2\}$ ,  $\forall t \geq 0$ . Caso  $e_1(0) = 0$ ,  $\sigma(e(t)) = \{3\}$ ,  $\forall t \geq 0$ . No equilíbrio tem-se  $e(t) = 0$  e  $\theta = \bar{\theta}$  para  $\bar{\theta}$  definido em (3.28).  $\square$

### 3.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo apresentou as condições para o projeto de leis de chaveamento para sistemas chaveados afins. Os resultados são sintetizados no Teorema 3.1 e os mesmos garantem que o sistema chaveado em malha fechada apresente estabilidade global e assintótica, mesmo com a ocorrência de modos deslizantes em qualquer superfície de chaveamento do sistema. É importante enfatizar que, diferente de outros resultados anteriormente apresentados, a metodologia proposta não requer a existência de uma combinação Hurwitz estável das matrizes de dinâmicas dos subsistemas que compõem o sistema chaveado afim. Dois exemplos foram apresentados, com os quais foi possível ilustrar a utilização do Teorema 3.1 para análise de estabilidade global e assintótica

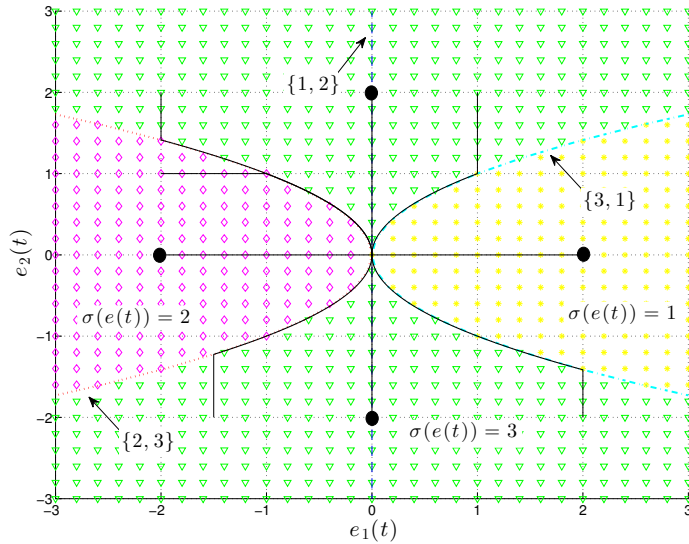


Figura 10 – Exemplo 3.2: plano de fase do sistema chaveado. Linhas cheias em preto representam as trajetórias; linhas tracejadas coloridas são as superfícies de chaveamento.

de um sistema sob efeito de uma lei de chaveamento.

Conforme citado anteriormente, pode-se verificar que as condições do Teorema 3.1 não são convexas com relação ao  $\theta$  e o  $\alpha(\theta)$ . Porém, para determinadas escolhas de  $\alpha(\theta)$  e das funções auxiliares  $v_i(e(t))$ , é possível obter condições suficientes para verificar as expressões do Teorema 3.1 e descrevê-las como um conjunto de LMIs. Esses aspectos serão abordados no próximo capítulo.



## 4 METODOLOGIA PARA PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO

### 4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta uma metodologia para o projeto de lei de chaveamento para sistemas chaveados afins. Os resultados são baseados no desenvolvimento apresentado no capítulo anterior e em (TROFINO et al., 2011). Através de algumas considerações é possível obter condições suficientes para verificar as expressões do Teorema 3.1 e descrevê-las como um conjunto de LMIs. A metodologia é proposta com base na suposição que exista uma combinação Hurwitz estável das matrizes de dinâmicas dos subsistemas que compõem o sistema chaveado.

Inicialmente, serão vistas definições e resultados preliminares que serão utilizados para descrever as condições na forma convexa. Na sequência, os procedimentos para obtenção de um conjunto de LMIs serão descritos. Os resultados obtidos serão estendidos para o caso de realimentação de saída, ou seja, quando não existe a possibilidade de medição de todos os estados que compõem o sistema chaveado. Como exemplos numéricos, serão utilizados um sistema acadêmico com três modos de operação, um conversor abaixador de tensão (*Buck*) e um conversor abaixador e elevador de tensão (*Buck-Boost*).

### 4.2 RESULTADOS PRELIMINARES E DEFINIÇÕES

Esta seção descreve alguns resultados preliminares e definições que serão utilizados no processo de obtenção do conjunto de LMIs para verificar as condições apresentadas no capítulo anterior. Inicialmente será visto um resultado bastante utilizado em teoria de controle, o Lema de Finsler.

**Lema 4.1 (Lema de Finsler)** *Seja  $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^s$  um dado conjunto politépico, sejam  $M(\cdot) : \mathcal{W} \mapsto \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $G(\cdot) : \mathcal{W} \mapsto \mathbb{R}^{r \times q}$  funções matriciais dadas, com  $M(\cdot)$  simétrica. Seja  $Q(w)$  uma base para o espaço nulo de  $G(w)$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $\forall w \in \mathcal{W}$  a condição  $z^T M(w) z > 0$  é satisfeita  $\forall z \in \mathbb{R}^q : G(w) z = 0$ .
- (ii)  $\forall w \in \mathcal{W}$  existe uma função matricial  $L(\cdot) : \mathcal{W} \mapsto \mathbb{R}^{q \times r}$  tal que  $M(w) + L(w)G(w) + G(w)^T L(w)^T > 0$ .

(iii)  $\forall w \in \mathcal{W}$  a condição  $Q(w)^T M(w) Q(w) > 0$  é satisfeita.  $\square$

Dois casos são de interesse para este trabalho. O primeiro caso é quando  $M(\cdot), G(\cdot)$  são funções afins e  $L$  é forçada a ser constante. Nessa situação, (ii) se torna uma condição LMI politópica. No entanto, (i), (ii) não são mais equivalentes pois  $L$  é forçada a ser constante, porém (ii) é claramente uma condição LMI suficiente para (i).

O segundo caso é quando  $M(\cdot)$  é uma função afim e  $G$  é forçada a ser constante, fazendo com que  $Q$  seja também constante. Neste caso (i), (iii) ainda são equivalentes e (iii) é uma LMI politópica com uma dimensão e um número de variáveis de decisão menores em comparação com (ii).

Uma situação interessante ocorre quando  $G(w)$  é uma função afim com algumas linhas constantes. Para este caso considere a decomposição  $G(w) = (G_0^T \quad G_1(w)^T)^T$ ,  $L(w) = (L_0(w) \quad L_1)$ , onde  $G_0$  representa as linhas constantes de  $G(w)$  e  $L_0(w)$  possui a dimensão de  $G_0^T$ . Seja  $Q_0$  uma base do espaço nulo de  $G_0$ . Logo,

$$Q_0^T (M(w) + L_1 G_1(w) + G_1(w)^T L_1^T) Q_0 > 0, \quad \forall w \in \mathcal{W},$$

é uma condição LMI politópica suficiente para (i). Esta LMI possui menor dimensão e número de variáveis de decisão em comparação com a condição (ii). A redução na dimensão e no número de variáveis de decisão é uma consequência da condição  $G_0 z = 0$ , que expressa a relação de dependência entre alguns elementos do vetor  $z$ . Os elementos redundantes são eliminados quando a base do espaço nulo é utilizada.

O interesse nestes casos na forma de LMIs politópicas é que as mesmas são alternativas numericamente eficientes para a condição (i), que é difícil de ser testada numericamente. Mais detalhes sobre o Lema de Finsler podem ser vistos em (BOYD et al., 1994) e (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001).

Outra definição que será utilizada na sequência é a dos Anuladores.

**Definição 4.1 (Anulador)** *Dada uma função vetorial  $f(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s$  e um número inteiro positivo  $r$ , a função matricial  $\aleph_f(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^{r \times s}$  será chamada de Anulador de  $f(\cdot)$  se  $\aleph_f(z) f(z) = 0$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}^q$  de interesse. Adicionalmente, se  $\aleph_f(\cdot)$  é uma função linear a mesma será denominada Anulador Linear.  $\square$*

Por exemplo, considere uma função  $f(z) = (z_1^2 \quad z_1 z_2)^T$ . Neste caso o anulador linear será  $\aleph_f(z) = (z_2 \quad -z_1)$ . Observe que os anula-

dores lineares expressam uma interdependência linear entre os elementos de  $f(z)$  e que a representação matricial de um anulador em geral não é única. Suponha que  $f(z) = z = (z_1 \ \dots \ z_q)^T \in \mathbb{R}^q$ . Uma representação simples do anulador linear  $\aleph_z(z)$  é a seguinte

$$\aleph_z(z) = \begin{bmatrix} z_2 & -z_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_3 & -z_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & z_q & -z_{q-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q-1 \times q}. \quad (4.1)$$

Considerando todos os possíveis pares  $z_i, z_j$  para  $i \neq j$  sem repetição, ou seja  $\forall i, j \in \{1, \dots, q\}$  com  $j > i$ , tem-se o anulador linear dado pela fórmula

$$\aleph_z(z) = \begin{bmatrix} \phi_1(z) & Y_1(z) \\ \vdots & \vdots \\ \phi_{(q-1)}(z) & Y_{(q-1)}(z) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

sendo

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= (z_2 \ \dots \ z_q)^T \\ \phi_i(z) &= \begin{bmatrix} & z^{(i+1)} \\ 0_{(q-i) \times (i-1)} & \vdots \\ & z_q \end{bmatrix}, \quad i \in \{2, \dots, q-1\} \\ Y_i(z) &= -z_i I_{(q-i)}, \quad i \in \{1, \dots, q-1\} \end{aligned}$$

e  $\aleph_z(z) \in \mathbb{R}^{r \times q}$ , com  $r = \sum_{j=1}^{q-1} j$ . O símbolo  $0_{m \times n}$  representa uma matriz de zeros de dimensão  $m \times n$  e  $I_n$  representa uma matriz identidade de dimensão  $n$ .

Neste trabalho o Anulador será utilizado juntamente com o Teorema de Finsler para reduzir o conservadorismo das LMIs dependentes de parâmetros. Detalhes sobre o uso de Anuladores para reduzir a conservatividade de LMIs dependentes do estado podem ser vistos em (TROFINO, 2000) e (TROFINO; DEZUO, 2011).

### 4.3 CONDIÇÕES LMI PARA O PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO

Nesta seção serão apresentadas condições suficientes para verificar as expressões do Teorema 3.1 e também será visto o processo para

descrevê-las como um conjunto de LMIs. Neste problema considera-se que as funções auxiliares  $v_i(e(t)) \in \mathcal{C}^1$ ,  $i \in \mathcal{M}$  de (3.9) possuem a seguinte estrutura particular

$$v_i(e(t)) = e(t)^T P_i e(t) + 2e(t)^T S_i \quad (4.3)$$

onde  $P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $S_i \in \mathbb{R}^n$  são matrizes a serem determinadas. É possível verificar que as funções auxiliares possuem termos quadráticos e lineares. Os termos lineares adicionam graus de liberdade interessantes no problema de estabilidade de sistemas afins. No entanto estes termos geralmente são negligenciados (BOLZERN; SPINELLI, 2004; XU; ZHAI; HE, 2008).

Para esta escolha particular de  $v_i(e(t))$ , é possível reescrever (3.13) para o caso particular  $Q(e) = 0$  como

$$\begin{pmatrix} e(t) \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} A_\theta^T P_\theta + P_\theta A_\theta + 2\alpha_\theta(P_\theta - \bar{P}) & \star \\ K_\theta^T P_\theta + S_\theta^T A_\theta + 2S_\theta^T \alpha_\theta & 2K_\theta^T S_\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ 1 \end{pmatrix} < 0. \quad (4.4)$$

considerando a seguinte notação

$$\begin{aligned} P_\theta &:= \sum_{i=1}^m \theta_i P_i, & A_\theta &:= \sum_{i=1}^m \theta_i A_i, & K_\theta &:= \sum_{i=1}^m \theta_i k_i, \\ S_\theta &:= \sum_{i=1}^m \theta_i S_i, & \alpha_\theta &:= \sum_{i=1}^m \theta_i \alpha_i, & \bar{P} &:= \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i P_i. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Assim, o desafio consiste em descrever a desigualdade acima como um problema convexo. Vários métodos podem ser aplicados para atingir este objetivo. Os procedimentos utilizados neste trabalho serão demonstrados na sequência.

Neste ponto é importante reforçar que a dependência do  $\theta(e(t))$  com relação ao  $e(t)$  não é levada em consideração na condição (3.13) do Teorema 3.1, conforme discutido na Observação 3.2 do capítulo anterior. Devido à dificuldade de se incluir essa dependência, será adotada uma condição mais conservadora onde  $\theta(e(t))$  é substituído por um parâmetro arbitrário e variante no tempo, denominado  $\theta$ , livre para possuir qualquer valor pertencente ao  $\Theta$ .

Antes de apresentar o próximo teorema, é importante definir a notação auxiliar utilizada para expressar as condições. Considerando os seguintes vetores auxiliares  $\theta, \bar{\theta} \in \mathbb{R}^m$

$$\theta = (\theta_1 \quad \dots \quad \theta_m)^T, \quad \bar{\theta} = (\bar{\theta}_1 \quad \dots \quad \bar{\theta}_m)^T, \quad e_\theta = \theta \otimes e \quad (4.6)$$

onde  $\theta \in \Theta$  e  $\bar{\theta}_i \in \Theta$  é definido pela condição (3.8) do Lema 3.1. O símbolo “ $\otimes$ ” representa o produto de Kronecker.

Sejam  $\aleph_\theta, \aleph_{\bar{\theta}}$  os anuladores lineares de  $\theta, \bar{\theta}$  conforme visto na Definição 4.1. Sejam as constantes positivas  $\alpha_i$  dadas e escolhidas conforme as orientações da Observação 4.2. Considere as seguintes matrizes auxiliares

$$A = (A_1 \quad \dots \quad A_m), \quad P = (P_1 \quad \dots \quad P_m) \quad (4.7)$$

$$K = (k_1 \quad \dots \quad k_m), \quad S = (S_1 \quad \dots \quad S_m) \quad (4.8)$$

$$\alpha = (\alpha_1 I_n \quad \dots \quad \alpha_m I_n), \quad \mathbf{1}_m = (1 \quad \dots \quad 1) \in \mathbb{R}^{1 \times m} \quad (4.9)$$

$$I_a = \mathbf{1}_m \otimes I_n \quad (4.10)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \star \\ K^T P + S^T A + 2S^T \alpha & K^T S + S^T K \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\Psi_{11} = (A + \alpha)^T P + P^T (A + \alpha) - \alpha^T \bar{P} I_a - I_a^T \bar{P} \alpha. \quad (4.12)$$

### 4.3.1 LMIs para projeto com garantia de estabilidade global e assintótica

Tendo como base as condições do Teorema 3.1, é possível estabelecer o seguinte teorema.

**Teorema 4.1** *Seja  $\bar{x}$  um dado vetor constante representando o equilíbrio desejado para o sistema chaveado afim (3.1) e supondo que os estados  $x(t)$  possam ser medidos. Considere o sistema afim (3.5) cujo estado é o erro de seguimento e assumindo que exista  $\theta \in \Theta$  definido de acordo com o Lema 3.1. Utilizando a notação auxiliar (4.5)-(4.11), seja  $Q_a$  uma base do espaço nulo de  $C_a$  e seja  $L$  uma matriz a ser determinada com as dimensões de  $C_b(\theta)^T$ , sendo*

$$C_a = (0_{(1 \times mn)} \quad \mathbf{1}_m), \quad C_b(\theta) = \begin{bmatrix} \aleph_\theta \otimes I_n & 0_{(rn \times m)} \\ 0_{(m \times nm)} & \aleph_\theta - \aleph_{\bar{\theta}} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

com os anuladores lineares  $\aleph_\theta, \aleph_{\bar{\theta}} \in \mathbb{R}^{r \times m}$  conforme Definição 4.1. Sejam as constantes  $\alpha_i > 0$  dadas e escolhidas conforme as orientações da Observação 4.2. Supondo que existam matrizes  $P, S, L$  que resolvam

o seguinte problema LMI

$$\bar{P} > 0, \quad \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i S_i = 0 \quad (4.14)$$

$$Q_a^T (\Psi + LC_b(\theta) + C_b(\theta)^T L^T) Q_a < 0, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (4.15)$$

então a origem de (3.6) sob efeito da lei de chaveamento (3.9) é globalmente assintoticamente estável e (3.10) é uma função de Lyapunov para o sistema em malha fechada (3.6), (3.9).  $\square$

**Prova 4.1** Inicialmente, será demonstrado que a escolha particular de  $v_i(e(t))$  atende aos requisitos do Teorema 3.1. Considerando as funções auxiliares em (4.3) e como (4.14) implica  $\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i S_i = 0$ , a função de Lyapunov para  $\theta = \bar{\theta}$  é  $\bar{V}(e(t)) = e(t)^T (\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i P_i) e(t), \forall e(t) \neq 0$ . Logo

$$V(e(t)) \geq \bar{V}(e(t)) = e(t)^T \bar{P} e(t) > 0, \quad \forall e(t) \neq 0. \quad (4.16)$$

Desta forma  $V(e(t))$  é positiva definida e radialmente ilimitada, pois o lado direito de (4.16) é uma forma quadrática positiva definida em vista de (4.14). Adicionalmente,  $v_i(e(t)) \leq \beta_i(\|e(t)\|)$  sendo  $\beta_i(\|e(t)\|) := \|P_i\| \|e(t)\|^2 + 2\|S_i\| \|e(t)\|$ . Isso mostra que

$$\lambda_{\min}(\bar{P}) \|e(t)\|^2 \leq V(e(t)) \leq \max_{i \in \mathcal{M}} \{\beta_i(\|e(t)\|)\} \quad (4.17)$$

onde os limites inferiores e superiores são funções classe  $\mathcal{K}_\infty$ . Desta forma as condições (3.10)-(3.11) do Teorema 3.1 estão sendo atendidas. O símbolo  $\lambda_{\min}(\bar{P})$  representa o mínimo autovalor da matriz real simétrica  $\bar{P}$ .

Na sequência, será demonstrada a obtenção da equação (4.15) com base na condição (3.13) do Teorema 3.1 para o caso particular  $Q(e) = 0$ . Inicialmente, (4.4) é reescrita com a notação (4.7)-(4.11) como

$$\begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \\ K^T P + S^T A + 2S^T \alpha & K^T S + S^T K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta \end{pmatrix} < 0. \quad (4.18)$$

Considerando  $K\bar{\theta} = 0$  devido à condição (3.8) e  $S\bar{\theta} = 0$  devido à (4.14), é possível verificar que  $(0 \quad \bar{\theta}^T) \Psi = 0$ . Desta forma é possível reescrever (4.18) como

$$\begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta \end{pmatrix}^T \Psi \begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{pmatrix}^T \Psi \begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{pmatrix} < 0. \quad (4.19)$$

Com  $C_a, C_b(\theta)$  em (4.13) tais que

$$C_a \begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{pmatrix} = 0, \quad C_b(\theta) \begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.20)$$

Aplicando o Lema de Finsler (Lema 4.1) é possível reescrever (4.19) inserindo a matriz  $C_b(\theta)$  que contém os anuladores lineares como

$$\begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{pmatrix}^T (\Psi + LC_b(\theta) + C_b(\theta)^T L^T) \begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{pmatrix} < 0 \quad (4.21)$$

para qualquer matriz  $L$  de dimensões adequadas. Considerando o espaço nulo de  $C_a$  e aplicando novamente o Lema de Finsler, é possível obter a LMI em (4.15) como uma condição suficiente para (3.13) do Teorema 3.1.  $\square$

**Observação 4.1** Verifica-se que, para o problema de estabilidade global considerado neste capítulo,  $A_\theta^T P_\theta + P_\theta A_\theta + 2\alpha_\theta(P_\theta - \bar{P}) < 0$  é uma condição necessária para que (4.4) seja satisfeita. Como  $\bar{\theta} \in \Theta$ , esta condição implica, para  $\theta = \bar{\theta}$ , que  $A_{\bar{\theta}}^T P_{\bar{\theta}} + P_{\bar{\theta}} A_{\bar{\theta}} < 0$ , o que de fato implica que  $A_{\bar{\theta}}$  deve ser Hurwitz estável pois  $P_{\bar{\theta}} = \bar{P} > 0$ . Observe que este requisito não existe nas condições do Teorema 3.1, sendo este caso particular inclusive ilustrado no Exemplo 3.2 do capítulo anterior.  $\square$

**Observação 4.2** Pode-se observar que a condição (4.15) não é, de fato, uma LMI com relação às constantes escalares positivas  $\alpha_i$ . No entanto, algumas orientações para escolha dessas constantes podem ser obtidas através da análise do problema. Conforme visto anteriormente,  $A_\theta^T P_\theta + P_\theta A_\theta + 2\alpha_\theta(P_\theta - \bar{P}) < 0$  é uma condição necessária para que (4.4) seja satisfeita. É possível reescrever essa desigualdade como  $(A_\theta + \alpha_\theta I_n)^T P_\theta + P_\theta (A_\theta + \alpha_\theta I_n) - 2\alpha_\theta \bar{P} < 0$ . Como  $\alpha_\theta \bar{P} > 0$ , esta condição indica que as constantes  $\alpha_i$  possam ser escolhidas, conforme abordado em (TROFINO et al., 2009; TROFINO; SCHARLAU; COUTINHO, 2012), no intervalo  $0 < \alpha_i < |\underline{\lambda}_i|$ , onde  $\underline{\lambda}_i$  representa a parte real do autovalor estável de  $A_i$  mais próximo do eixo imaginário e  $|\underline{\lambda}_i|$  seu valor absoluto. A ideia é ter decrescimento exponencial de  $V(e(t))$  nas direções onde o termo negativo  $-2\alpha_\theta e(t)^T \bar{P} e(t)$  em (4.4) possa ser negligenciado. Neste caso (4.4) se torna o requisito de performance exponencial de (TROFINO et al., 2009; TROFINO; SCHARLAU; COUTINHO, 2012).  $\square$

**Observação 4.3** Conforme abordado no capítulo anterior, o uso da função ‘max’ na lei de chaveamento vai adicionar flexibilidade ao problema em comparação com as estratégias que empregam a função ‘min’,

pois as funções auxiliares  $v_i$  não vão precisar ser positivas. Para a estrutura particular de  $v_i$  considerada em (4.3), essa diferença significa que o termo quadrático não precisa ser positivo em todas as funções auxiliares. Esse aspecto, associado à inclusão do termo linear  $S_i$  nas funções auxiliares, possui um papel importante na redução da conservatividade do problema.  $\square$

### 4.3.2 Realimentação de saída

Os resultados apresentados no Teorema 4.1 são baseados na ideia de realimentação de estados. Pode-se verificar que é necessário a disponibilidade completa dos valores dos estados para determinar o modo ativo, de acordo com a lei de chaveamento (3.9). No entanto, na prática a situação mais comum é que parte dos estados não esteja disponível para medição. Na sequência será apresentada uma lei de chaveamento baseada na realimentação de saída, ou seja, realimentação parcial de estados.

Considere o sistema (3.1) com a saída  $y(t) = C_i x(t) \in \mathbb{R}^{g_i}$ , e  $C_i \in \mathbb{R}^{g_i \times n}$  para  $i \in \mathcal{M}$  são matrizes dadas. Definindo também o erro de seguimento de saída como

$$\varepsilon(t) = y(t) - C_i \bar{x} = C_i e(t). \quad (4.22)$$

Supondo que as funções auxiliares  $v_i(e(t))$  possuam a estrutura definida em (4.3), porém com as matrizes  $P_i, S_i$  definidas como

$$P_i := P_0 + C_i^T Q_i C_i, \quad S_i := S_0 + C_i^T R_i \quad (4.23)$$

onde  $P_0 = P_0^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $S_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $R_i \in \mathbb{R}^{g_i}$ ,  $Q_i = Q_i^T \in \mathbb{R}^{g_i \times g_i}$ . Neste caso as funções auxiliares podem ser reescritas como

$$v_i(e(t)) = e(t)^T P_0 e(t) + 2e(t)^T S_0 + \mu_i(\varepsilon(t))$$

com

$$\mu_i(\varepsilon(t)) := \varepsilon(t)^T Q_i \varepsilon(t) + 2\varepsilon(t)^T R_i.$$

Desta forma  $V(e(t))$  pode ser definido como

$$V(e(t)) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\} = e(t)^T P_0 e(t) + 2e(t)^T S_0 + \max_{i \in \mathcal{M}} \{\mu_i(\varepsilon(t))\}$$



e a lei de chaveamento definida em (3.9) pode ser reescrita em função do erro de seguimento de saída como

$$\arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\} = \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{\mu_i(\varepsilon(t))\} = \sigma(\varepsilon(t)). \quad (4.24)$$

Os procedimentos vistos acima demonstram que o Teorema 4.1 pode ser diretamente empregado para o caso de realimentação parcial dos estados através da inclusão das restrições (4.23) na estrutura das matrizes  $\{P_i, S_i\}$  das funções auxiliares  $v_i(e(t)), i \in \mathcal{M}$ . A lei de chaveamento neste caso será definida por (4.24).

#### 4.4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

**Exemplo 4.1** *Considere um sistema chaveado afim com três subsistemas,  $\mathcal{M} = \{1, 2, 3\}$ , na representação em espaço de estados (3.1), sendo*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\beta \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\beta & -2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

*Neste exemplo, os estados do sistema chaveados devem ser conduzidos para a origem, o que implica  $\bar{x} = 0$ . Observe que a estabilidade de cada subsistema muda conforme a escolha de  $\beta$ . Para  $\beta = 1$ , todos os subsistemas são Hurwitz estáveis mas o ponto de equilíbrio desejado, a origem, não é um ponto de equilíbrio de nenhum deles. Quando  $\beta = -1$  o sistema chaveado é composto de dois subsistemas instáveis ( $A_1$  e  $A_2$ ) e um Hurwitz estável ( $A_3$ ).*

*Utilizando o Lema 3.1 é possível calcular*

$$\begin{pmatrix} \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 - 2\bar{\theta}_3 \\ \bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_3 = 1, \quad \bar{\theta}_1 \geq 0, \quad \bar{\theta}_2 \geq 0, \quad \bar{\theta}_3 \geq 0 \quad (4.25)$$

*no qual verifica-se que a única escolha possível que faz com que  $\bar{x} = 0$  é  $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_3$ , o que significa neste caso*

$$\bar{\theta} = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right). \quad (4.26)$$

Observe que o valor de  $\bar{\theta}$  para este sistema implica que um modo deslizante entre os três subsistemas vai ocorrer no equilíbrio.

Inicialmente, será abordado o caso onde  $\beta = 1$  (todos os subsistemas Hurwitz estáveis). Os autovalores de  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  são, respectivamente,  $\{-0,5 \pm j0,866\}$ ,  $\{-1 \pm j\}$ , and  $\{-1,5 \pm j0,866\}$ . Observe que  $A_{\bar{\theta}} = \sum_{i=1}^3 A_i \bar{\theta}_i$  também é Hurwitz estável. Os parâmetros de projeto  $\alpha_i$  foram escolhidos de acordo com a Observação 4.2 como  $\alpha_1 = 0,25$ ,  $\alpha_2 = 0,50$  e  $\alpha_3 = 0,75$ . O Teorema 4.1 foi utilizado para obter as matrizes  $\{P_i, S_i, i \in \mathcal{M}\}$  das funções auxiliares (4.3) da lei de chaveamento (3.9). Os valores numéricos das matrizes podem ser vistos no Apêndice A.1.1. Os resultados de simulação para diferentes condições iniciais são apresentados no plano de fase de  $e(t)$  visto na Figura 11. É possível verificar que em todos os casos a trajetória do erro converge para a origem. Conforme esperado, quando a trajetória atinge a origem um modo deslizante envolvendo os três subsistemas ocorre. Modos deslizantes fora da origem também ocorrem nas superfícies de chaveamento dos subsistemas  $\{2, 3\}$  e  $\{3, 1\}$ .

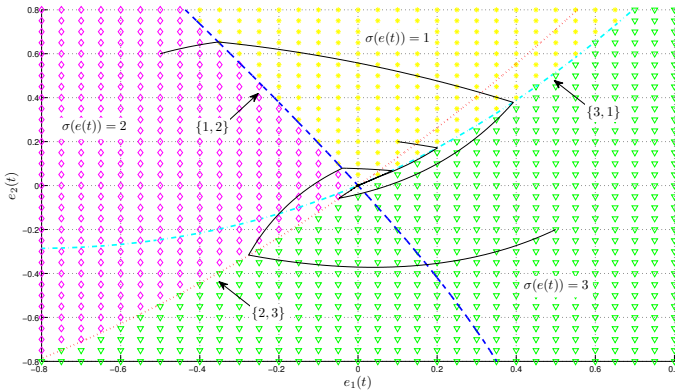


Figura 11 – Exemplo 4.1: resultados de simulação com subsistemas estáveis ( $\beta = 1$ ). Linhas cheias em preto representam as trajetórias; linhas tracejadas coloridas são as superfícies de chaveamento.

O próximo caso a ser considerado é  $\beta = -1$ , ou seja,  $A_1$  e  $A_2$  instáveis com autovalores em  $\{0,5 \pm j0,866\}$  e  $\{0,73, -2,73\}$ , respectivamente, e  $A_3$  Hurwitz estável com autovalores em  $\{-1,5 \pm j0,866\}$ . Os valores de  $\alpha_i$  considerados são os mesmos do caso anterior e  $A_{\bar{\theta}}$  também

é Hurwitz estável. A Figura 12 apresenta os resultados de simulação em um plano de fase para uma condição inicial específica. Da mesma forma que ocorreu no caso anterior, pode-se verificar na origem a existência de um modo deslizante envolvendo os três subsistemas. Fora da origem ocorrem dois modos deslizantes para esta trajetória em particular nas superfícies de chaveamento dos subsistemas  $\{1, 2\}$  e  $\{3, 1\}$ .  $\square$

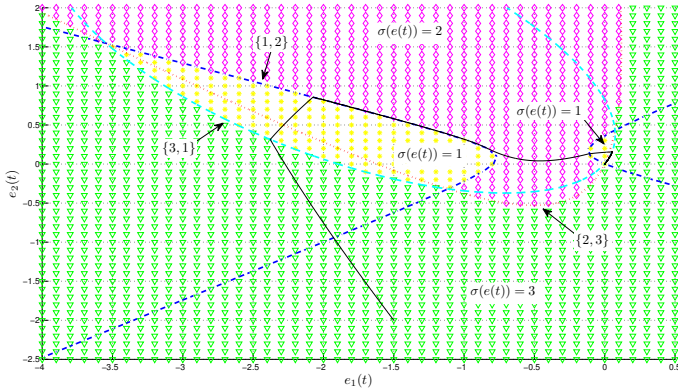


Figura 12 – Exemplo 4.1: resultados de simulação com subsistemas instáveis ( $\beta = -1$ ). Linhas cheias em preto representam as trajetórias; linhas tracejadas coloridas são as superfícies de chaveamento.

**Exemplo 4.2** Considere um conversor abaixador de tensão (Buck) (RASHID, 2010; MARTINS; BARBI, 2008) com carga resistiva e indutiva, conforme visto no diagrama do circuito da Figura 13. Nesta topologia a tensão média na saída  $E_{\text{out}}$  é sempre menor que a tensão de entrada  $E_{\text{in}}$ . Em aplicações práticas a chave  $S$  pode ser implementada através de transistores de potência ou tiristores. O resistor  $R_1$  e o indutor  $L_1$  em série compõem a carga do conversor.

A operação do circuito pode ser dividida em dois modos. O modo 1 corresponde à chave  $S$  ligada. Neste modo a corrente de entrada circula através do indutor de filtro  $L_c$ , do capacitor de filtro  $C_c$  e da carga. Quando a chave  $S$  está desligada o circuito opera no modo 2. Considerando que  $L_c$  e  $C_c$  possuam energia armazenada o diodo de comutação  $D$  irá conduzir neste modo. Caso a chave permaneça desligada no modo 2, o valor da corrente vai diminuindo até a dissipação completa

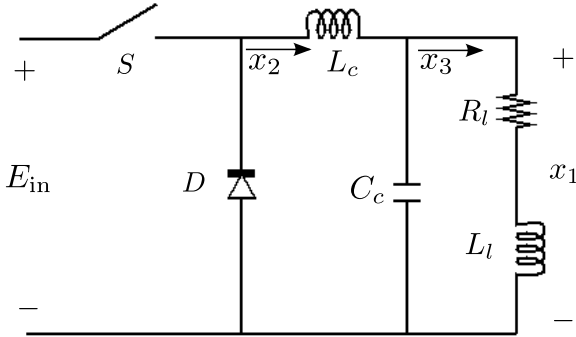


Figura 13 – Exemplo 4.2: conversor abaixador de tensão (*Buck*).

da energia armazenada em  $L_c$  e  $C_c$ . Dependendo da frequência de chaveamento, da indutância e capacitância de filtro, a corrente no indutor pode ser descontínua (RASHID, 2010).

O modelo matemático deste conversor pode ser descrito como um sistema chaveado afim com dois subsistemas,  $\mathcal{M} = \{1, 2\}$ , na representação em espaço de estados (3.1), sendo

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_c} & -\frac{1}{C_c} \\ -\frac{1}{L_c} & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_l} & 0 & -\frac{R_l}{L_l} \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_{in}}{L_c} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = 0_{3 \times 1}. \quad (4.27)$$

Os estados do sistema são a tensão no capacitor  $C_c$  ( $x_1$ ), a corrente no indutor  $L_c$  ( $x_2$ ) e a corrente na carga ( $x_3$ ). Nesta modelagem assume-se que as comutações da chave  $S$  e do diodo  $D$  são ideais (instantâneas) e que o conversor opera em modo de condução contínua, ou seja, durante o chaveamento a corrente no indutor não atinge o valor nulo no tempo em que o circuito opera no modo 2.

O objetivo é projetar uma lei de chaveamento de forma que a tensão na saída,  $x_1$ , seja igual à uma tensão de referência  $E_{out}$ , ou seja,  $\bar{x}_1 = E_{out} \neq 0$ . Com essas considerações, busca-se um ponto de equilíbrio tal que

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} E_{out} \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}$$

onde  $\bar{x}_2, \bar{x}_3$  são constantes a serem determinadas. Calculando  $k_1$  e  $k_2$  em (3.5) é possível obter

$$k_1 = \begin{pmatrix} \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_3}{C_c} \\ \frac{E_{\text{in}} - E_{\text{out}}}{L_c} \\ \frac{E_{\text{out}} - R_l \bar{x}_3}{L_l} \end{pmatrix}, \quad k_2 = \begin{pmatrix} \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_3}{C_c} \\ -\frac{E_{\text{out}}}{L_c} \\ \frac{E_{\text{out}} - R_l \bar{x}_3}{L_l} \end{pmatrix}.$$

Utilizando o Lema 3.1, deve existir  $\bar{\theta} \in \Theta$  tal que

$$\frac{1}{C_c L_c L_l} \begin{pmatrix} L_c L_l (\bar{x}_2 - \bar{x}_3) \\ C_c L_l (\bar{\theta}_1 E_{\text{in}} - E_{\text{out}}) \\ C_c L_c (E_{\text{out}} - R_l \bar{x}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 = 1, \quad \bar{\theta}_1 \geq 0, \quad \bar{\theta}_2 \geq 0$$

do qual é possível obter as seguintes expressões

$$\bar{\theta}_1 = \frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{in}}}, \quad \bar{\theta}_2 = 1 - \bar{\theta}_1, \quad \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = \frac{E_{\text{out}}}{R_l}. \quad (4.28)$$

Os valores dos parâmetros considerados neste exemplo são os seguintes

$$E_{\text{in}} = 15 \text{ V}, \quad L_c = 1 \text{ mH}, \quad C_c = 1 \mu\text{F}, \quad L_l = 100 \mu\text{H}, \quad R_l = 30 \Omega. \quad (4.29)$$

As matrizes  $A_1 = A_2 = A_{\bar{\theta}}$  são Hurwitz estáveis e para os valores numéricos dos parâmetros considerados neste exemplo os autovalores serão  $\{-262441; -18779 \pm j28114\}$ . Será considerada como referência para tensão da saída  $E_{\text{out}} = 9 \text{ V}$ . Os valores  $\alpha_1 = \alpha_2 = 5000$  foram escolhidos de acordo com a Observação 4.2. Neste exemplo, supõe-se que os valores da tensão no capacitor ( $x_1$ ) e da corrente do indutor ( $x_2$ ) estejam disponíveis para medição, e que não seja possível medir a corrente na carga ( $x_3$ ), o que implica

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

O Teorema 4.1 foi utilizado juntamente com as restrições (4.23) para obter as matrizes  $\{Q_i, R_i, i \in \mathcal{M}\}$  com as quais são calculadas as funções auxiliares em função do erro de saída  $\mu_i(\varepsilon(t))$  da lei de chaveamento  $\sigma(\varepsilon(t))$  definida em (4.24). Os valores numéricos das matrizes

podem ser vistos no Apêndice A.1.2.

A Figura 14 apresenta os resultados obtidos em simulação da aplicação da estratégia de controle com realimentação de saída. Analisando os resultados, verifica-se que os estados convergem para a referência desejada. Desta forma, o requisito de erro nulo em regime permanente foi atingido.  $\square$

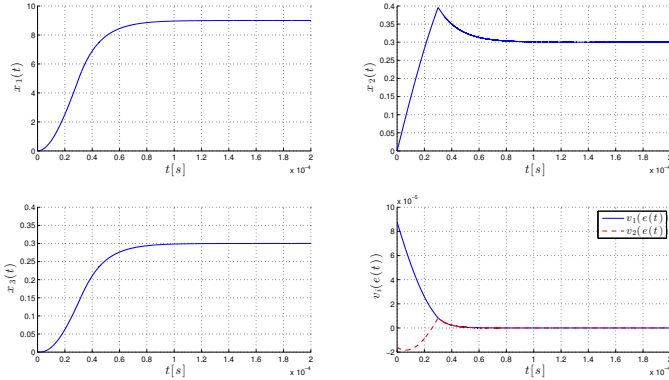


Figura 14 – Exemplo 4.2: resultados de simulação do conversor *Buck* com realimentação de saída.

**Exemplo 4.3** Considere o conversor abaixador e elevador de tensão (*Buck-Boost*) com carga resistiva visto no Exemplo 3.1. Para este caso o valor de referência para a tensão de saída será de  $E_{\text{out}} = -21$  V, o que significa que o conversor opera como um elevador de tensão (“voltage boost”). Utilizando (3.23), obtêm-se os valores de  $\bar{\theta}$  para este exemplo

$$\bar{\theta}_1 = \frac{7}{12}, \quad \bar{\theta}_2 = \frac{5}{12}.$$

Neste caso os valores  $\alpha_1 = 333$  e  $\alpha_2 = 166$  também foram escolhidos seguindo as orientações da Observação 4.2. Resolvendo as LMIs do Teorema 4.1 foram obtidas as matrizes  $\{P_1, S_1, P_2, S_2\}$  das funções auxiliares (4.3) da lei de chaveamento (3.9). Os valores numéricos das matrizes podem ser vistos no Apêndice A.1.3. A Figura 15 apresenta os resultados de simulação do sistema com condição inicial igual a zero, ou seja  $x = (0, 0)$ . O objetivo é a convergência dos estados para o ponto de equilíbrio  $\bar{x} = (1, 68 \text{ A}, -21 \text{ V})$ . A resposta dos estados  $x$  em função

do tempo é apresentada nos gráficos à esquerda da figura e o plano de fase do erro é visto à direita da Figura 15.

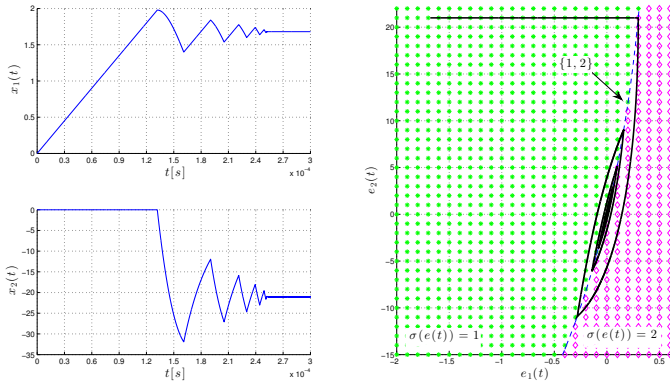


Figura 15 – Exemplo 4.3: resultados de simulação do conversor *Buck-Boost* para  $E_{\text{out}} = -21\text{V}$ .

Analisando os gráficos da Figura 15, pode-se verificar que a tensão na saída foi corretamente regulada em regime. No entanto, ocorrem vários chaveamentos com tempo finito antes da ocorrência do modo deslizante que conduz o erro à origem,  $e = 0$ . É importante enfatizar que as condições dos Teoremas 3.1 e 4.1, consideram somente o problema de estabilização, sem a inclusão de nenhum requisito de desempenho. Neste exemplo, as oscilações que ocorrem nos estados durante o regime transitório poderiam ser atenuadas pela adição de um requisito de desempenho no projeto da lei de chaveamento.  $\square$

#### 4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo foi apresentada uma metodologia para o projeto de lei de chaveamento para sistemas chaveados afins. Para uma escolha particular das funções auxiliares,  $v_i(e(t))$ , foi possível obter condições suficientes para verificar as expressões do Teorema 3.1 e descrevê-las como um conjunto de LMIs. A metodologia é proposta com base na suposição que exista uma combinação Hurwitz estável das matrizes de dinâmicas dos subsistemas que compõem o sistema chaveado afim. Os resultados obtidos são sintetizados no Teorema 4.1. Também foi

possível verificar que as condições deste teorema podem ser adaptadas para o caso de realimentação de saída.

Três exemplos foram apresentados, envolvendo um sistema acadêmico com três subsistemas e também aplicações envolvendo conversores. Estes exemplos ilustraram o uso da metodologia proposta tanto para o caso de realimentação de estados como também para a situação em que somente alguns estados estão disponíveis para medição.

Conforme citado anteriormente, as condições dos Teoremas 3.1 e 4.1, consideram somente o problema de estabilização, sem a inclusão de nenhum requisito de desempenho. O Exemplo 4.3 deste capítulo apresentou um caso no qual a inclusão de um requisito de desempenho no projeto da lei de chaveamento poderia melhorar o comportamento em regime transitório. A inclusão destes requisitos na metodologia de projeto de leis de chaveamento para sistemas chaveados afins será o tema do próximo capítulo.



## 5 METODOLOGIA DE PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO COM DESEMPENHO

### 5.1 INTRODUÇÃO

A inclusão de requisitos de desempenho no projeto da lei de chaveamento para sistemas chaveados afins será abordada neste capítulo. Dois requisitos de desempenho serão apresentados separadamente: o custo garantido e a atenuação de distúrbio. As metodologias apresentadas são baseadas nos resultados de estabilidade global assintótica apresentados nos capítulos anteriores e também em (TROFINO et al., 2012).

A inclusão de índices de desempenho no controle de sistemas chaveados já foi tema de trabalhos anteriormente publicados. Por exemplo, em (GEROMEL; COLANERI; BOLZERN, 2008) os autores tratam o problema de projetar um controle com custo garantido  $\mathcal{H}_2$  para sistemas chaveados lineares. Em (JI et al., 2006) são propostas condições suficientes para a estabilização e o controle  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas chaveados lineares com incertezas limitadas em norma e variantes no tempo. Outros exemplos de controle  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas chaveados lineares podem ser vistos em (ZHAO; HILL, 2008) e (DEAECTO; GEROMEL, 2010).

O capítulo está estruturado da seguinte forma: primeiramente serão vistos os procedimentos para o sistema chaveado afim com custo garantido. Em seguida, a inclusão da atenuação de distúrbio será apresentada. Os resultados serão ilustrados através dos exemplos já abordados nos capítulos anteriores.

### 5.2 PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO COM CUSTO GARANTIDO

Considere o sistema chaveado composto de  $m$  subsistemas afins (3.1) reescrito na seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + b_i, & x(0) &= x_0, \\ z(t) &= E_i x(t), & i \in \mathcal{M} &:= \{1, \dots, m\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  representa a saída de desempenho e  $E_i \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$  são matrizes de estrutura.

O objetivo neste caso é projetar uma lei de chaveamento,  $\sigma(x(t))$ ,

que conduz assintoticamente os estados do sistema chaveado para uma dada referência constante enquanto satisfaz um requisito de desempenho a ser definido na sequência.

A dinâmica do sistema chaveado (5.1) pode ser reescrita utilizando o erro de seguimento definido em (3.4)

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_i e(t) + k_i, & k_i &:= b_i + A_i \bar{x}, & e(0) &= e_0 = x_0 - \bar{x}, \\ z_e(t) &= E_i e(t), & z_e(t) &:= z(t) - E_i \bar{x} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Sob estas considerações e levando em conta que  $\bar{x}$  é uma referência constante, é possível redefinir o problema de projetar a lei de chaveamento em termos de  $e(t)$ , ou seja,  $\sigma(e(t))$ . Nesta abordagem supõe-se também que a dinâmica do erro de seguimento possa ser representada como uma combinação convexa dos campos vetoriais de cada subsistema em (5.2) (FILIPPOV, 1988), ou seja

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i \in \sigma(e(t))} \theta_i(e(t)) (A_i e(t) + k_i), \\ z_e(t) &= \sum_{i \in \sigma(e(t))} \theta_i(e(t)) E_i e(t), & \theta(e(t)) &\in \Theta \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde  $\Theta$  é o simplex unitário descrito em (3.7) e  $\theta(e(t))$  é um vetor com elementos  $\theta_i(e(t))$  definidos de acordo com Filippov (1988, p.50). Para este caso a condição (3.8) do Lema 3.1 também deve ser satisfeita.

Neste trabalho considera-se que o desempenho com custo garantido seja representado pela seguinte função custo

$$J(e_0) = \min_{\sigma(e(t))} \int_0^{\infty} z_e(t)^T z_e(t) dt \quad (5.4)$$

a ser minimizada para o sistema (5.2) para uma dada condição inicial  $e_0$ .

### 5.2.1 Condições de projeto para garantia de estabilidade global e assintótica

Tendo como base as condições do Teorema 3.1 e as considerações vistas até aqui, é possível estabelecer o seguinte teorema para projetar uma lei de chaveamento com inclusão do desempenho com custo garantido.

**Teorema 5.1** *Considere o sistema afim (5.2) que define o erro de seguimento e uma dada condição inicial  $e_0$ . Suponha que existam  $\bar{\theta} \in \Theta$  tal que  $\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i k_i = 0$  e funções  $v_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $v_i(0) = 0$ , para todo  $i \in \mathcal{M}$ , todas pertencentes à classe  $\mathcal{C}^1$ , e  $\alpha : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ . Caso exista solução para o seguinte problema*

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \lambda \text{ tal que} \\ & V(e) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e)\} > 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$V(e) \text{ é radialmente ilimitada} \quad (5.6)$$

$$\alpha(\theta) \geq 0 \quad (5.7)$$

$$\lambda - v_i(e_0) > 0, \quad \forall i \in \mathcal{M} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{M}} \theta_i \theta_j \nabla v_i(e)^T (A_j e + k_j) \\ & + 2\alpha(\theta)(\theta_i - \bar{\theta}_i)v_i(e) + z_e(t)^T z_e(t) < 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

$\forall \theta \in \Theta, \forall e \neq 0$ , então a origem de (5.3) sob efeito da lei de chaveamento (3.9) é globalmente assintoticamente estável e  $V(e_0)$  é um limitante superior da função custo definida em (5.4) que é minimizado.  $\square$

**Prova 5.1** *A estabilidade é obtida diretamente do Teorema 3.1 com  $Q(e(t)) = -z_e(t)^T z_e(t)$ . Da prova do Teorema 3.1 também pode-se concluir que*

$$\begin{aligned} DV(e(t))[\dot{e}(t)] &= \max_{i \in \sigma(e(t))} \nabla v_i(e(t))^T \dot{e}(t) \\ &= \sum_{i \in \sigma(e(t))} \theta_i(e(t)) \nabla v_i(e(t))^T \dot{e}(t) + z_e(t)^T z_e(t) < 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

*Inicialmente, será verificado o caso no qual o sistema chaveado opera em um modo isolado, ou seja  $\sigma(e(t))$  possui somente um elemento. Neste caso é possível reescrever (5.10) como*

$$\dot{V}(e(t)) + z_e(t)^T z_e(t) < 0. \quad (5.11)$$

*Supondo que  $\sigma(e(t))$  mantenha-se com somente um elemento no intervalo de tempo de zero até  $t_1 > 0$ . Sob esta condição é possível integrar*

(5.11) neste intervalo de tempo obtendo a seguinte expressão

$$V(e(t_1)) + \int_0^{t_1} z_e(t)^T z_e(t) dt < V(e_0). \quad (5.12)$$

Considerando que a origem de (5.3) sob efeito da lei de chaveamento (3.9) é globalmente assintoticamente estável, conclui-se que  $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} e(t_1) = 0$  e também  $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} V(e(t_1)) = 0$ . Desta forma, em equilíbrio (5.12) é equivalente a

$$\int_0^{\infty} z_e(t)^T z_e(t) dt < V(e_0). \quad (5.13)$$

Logo, se  $V(e_0)$  for minimizado também estará sendo minimizado um limitante superior para a função custo (5.4).

Na sequência, considere um ponto no qual o sistema chaveado encontra-se em modo deslizante, ou seja  $\sigma(e(t))$  é composto por mais de um elemento. De acordo com a prova do Teorema 3.1, a derivada direcional de Dini (LASDON, 1970, p.420) de  $V(e(t))$  é única para  $e(t) \in T_{\hat{e}(t)}(e(t))$ , com  $T_h(e(t))$  definido em (3.17). Nesta situação, nos pontos de continuidade do campo vetorial tem-se  $DV(e(t))[\dot{e}(t)] = \dot{V}(e(t))$  e a equação (5.11) também é válida para o modo deslizante.

Considere agora que a trajetória passa por pontos onde o campo vetorial é descontínuo. Nesta situação os mesmos argumentos anteriores podem ser utilizados pois é possível integrar (5.11) em intervalos de tempo onde o campo vetorial é contínuo e os pontos de descontinuidade podem ser desprezados. Note que  $V$  é contínua, isto é

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} V(e(t + \epsilon)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} V(e(t - \epsilon)) = V(e(t)), \forall t. \quad (5.14)$$

Além disso,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t+\epsilon}^{t-\epsilon} z_e(t)^T z_e(t) dt = 0 \quad (5.15)$$

pois  $z_e(t)$  é limitado para todo  $t$ .

Integrando-se (5.11) de  $t = t_0$  até  $t = t_K$  em intervalos de tempo definidos pelos instantes de descontinuidade do campo vetorial  $\{t_1, \dots, t_K\}$ , tem-se

$$\sum_{k=1}^K \left( V(e(t_k^-)) - V(e(t_{k-1}^+)) + \int_{t_{k-1}^+}^{t_k^-} z_e(t)^T z_e(t) dt \right) < 0 \quad (5.16)$$

onde  $K$  representa o número de intervalos,  $t_k^- = t_k - \delta t$ ,  $t_k^+ = t_k + \delta t$ , sendo  $\delta t$  um incremento infinitesimal. Levando-se em conta (5.14) e (5.15), é possível reescrever (5.16) como

$$V(e(t_K^-)) - V(e(t_0^+)) + \int_{t_0^+}^{t_K^-} z_e(t)^T z_e(t) dt < 0. \quad (5.17)$$

Devido à estabilidade assintótica global da origem  $t_K \rightarrow \infty$  implica  $\lim_{t_K \rightarrow \infty} e(t_K) = 0$  e  $\lim_{t_K \rightarrow \infty} V(e(t_K)) = 0$ . Sendo  $t_0$  o instante inicial, note que  $V(e(t_0^+)) = V(e(t_0)) = V(e_0)$  e portanto a condição (5.13) é obtida.

Observe de (5.17) que  $V(e_0)$  é um limitante superior para a função custo em (5.4). Assim, a minimização da função custo pode ser representada pela equação (5.8), dado que  $V(e_0) = \max_{i \in \sigma} \{v_i(e_0)\} = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e_0)\} \geq v_i(e_0), \forall i \in \mathcal{M}$ .  $\square$

**Observação 5.1** *Veja que o problema de minimizar  $V(e_0)$  no Teorema 5.1 é representado pela equação (5.8). Esta formulação para o problema é possível pois a lei de chaveamento (3.9) utiliza a função ‘max’. Neste caso, a função custo de (5.4) pode ser minimizada utilizando a seguinte condição*

$$J < \min_{\sigma(e_0)} \max_{i \in \sigma(e_0)} v_i(e_0) \leq \min_{\sigma(e_0)} \max_{i \in \mathcal{M}} v_i(e_0). \quad (5.18)$$

Analisando a equação acima, é possível verificar que a condição (5.8) é equivalente a expressão à direita da desigualdade. Por outro lado, caso a função ‘min’ seja utilizada para definir a lei de chaveamento, a condição que minimiza (5.4) será diferente

$$J < \min_{\sigma(e_0)} \min_{i \in \sigma(e_0)} v_i(e_0). \quad (5.19)$$

Observe que a condição (5.8) também poderia ser utilizada para leis de chaveamento que utilizam a função ‘min’, pois  $\min_{\sigma(e_0)} \min_{i \in \sigma(e_0)} v_i(e_0) < \min_{\sigma(e_0)} \max_{i \in \mathcal{M}} v_i(e_0)$ . No entanto, o uso desta condição incluiria uma diferença numérica no problema de minimização pois  $\max_{i \in \mathcal{M}} v_i(e_0)$  é um limitante superior para  $\min_{i \in \sigma(e_0)} v_i(e_0)$ . Desta forma, o problema de minimizar  $V(e_0)$  pode ser mais complexo de ser representado caso a função ‘min’ seja utilizada na definição da lei de chaveamento. Neste caso a escolha da função ‘max’ parece ser mais adequada.  $\square$

### 5.2.2 Condições LMI para o projeto de lei de chaveamento

Com base nas condições do Teorema 5.1 vistas anteriormente e considerando que as funções auxiliares de (3.9) possuem a estrutura particular vista em (4.3), é possível estabelecer o seguinte teorema para o projeto de lei de chaveamento com inclusão do custo garantido. A metodologia é proposta com base na suposição que exista uma combinação Hurwitz estável das matrizes de dinâmicas dos subsistemas que compõem o sistema chaveado.

**Teorema 5.2** *Seja  $\bar{x}$  um dado vetor constante representando o equilíbrio desejado para o sistema chaveado afim (5.1) e supondo que os estados  $x(t)$  possam ser medidos. Considere o sistema afim (5.2) cujo estado é o erro de seguimento e assuma que exista  $\bar{\theta} \in \Theta$  definido de acordo com o Lema 3.1. Seja  $e_0 = x_0 - \bar{x}$  uma dada condição inicial do sistema. Utilizando a notação auxiliar (4.5)-(4.10), seja  $Q_a$  uma base do espaço nulo de  $C_a$  e seja  $L$  uma matriz a ser determinada com as dimensões de  $C_b(\theta)^T$ , sendo  $C_a$  e  $C_b(\theta)$  definidos por (4.13) e com os anuladores lineares  $\aleph_\theta, \aleph_{\bar{\theta}} \in \mathbb{R}^{r \times m}$  conforme Definição 4.1. Sejam as constantes  $\alpha_i > 0$  dadas e escolhidas conforme as orientações da Observação 4.2. Supondo que existam matrizes  $P, S, L$  e um escalar  $\lambda$  que resolvam o seguinte problema LMI*

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar } & \lambda \\ & P_i, S_i, \lambda \end{array} \quad \text{sujeito à} \quad (5.20)$$

$$\bar{P} > 0, \quad \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i S_i = 0 \quad (5.21)$$

$$\lambda - (e_0^T P_i e_0 + 2e_0^T S_i) > 0, \quad \forall i \in \mathcal{M} \quad (5.22)$$

$$Q_a^T (\Phi + LC_b(\theta) + C_b(\theta)^T L^T) Q_a < 0, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (5.23)$$

sendo

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \star \\ K^T P + S^T A + 2S^T \alpha & K^T S + S^T K \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$\Phi_{11} = (A + \alpha)^T P + P^T (A + \alpha) - \alpha^T \bar{P} I_a - I_a^T \bar{P} \alpha + E^T E \quad (5.25)$$

$$E = (E_1 \quad \dots \quad E_m) \quad (5.26)$$

então a origem de (5.3) sob efeito da lei de chaveamento (3.9) é globalmente assintoticamente estável, a função custo definida em (5.4)

satisfaz a condição  $J < (e_0^T P_i e_0 + 2e_0^T S_i)$ ,  $\forall i \in \sigma(e_0)$  e (5.5) é uma função de Lyapunov para o sistema em malha fechada (5.3), (3.9).  $\square$

**Prova 5.2** A prova que as condições (5.5)-(5.6) do Teorema 5.1 estão sendo atendidas segue o mesmo procedimento da prova do Teorema 4.1 do capítulo anterior. Desta forma, serão vistos na sequência os procedimentos para obtenção da equação (5.23) com base na condição (5.9) do Teorema 5.1. Considerando a escolha particular para as funções auxiliares  $v_i(e(t))$  apresentada em (4.3), é possível reescrever a condição (5.9) como

$$\begin{pmatrix} e(t) \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} A_\theta^T P_\theta + P_\theta A_\theta + 2\alpha_\theta(P_\theta - \bar{P}) + E_\theta^T E_\theta & \star \\ K_\theta^T P_\theta + S_\theta^T A_\theta + 2S_\theta^T \alpha_\theta & 2K_\theta^T S_\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ 1 \end{pmatrix} < 0 \quad (5.27)$$

com a mesma notação de (4.5) e

$$E_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i E_i. \quad (5.28)$$

O próximo passo é descrever a desigualdade anterior como um problema convexo. Inicialmente, reescrevendo (5.27) com a notação (4.6)-(4.10) e (5.26)

$$\begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \star \\ K^T P + S^T A + 2S^T \alpha & K^T S + S^T K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta \end{pmatrix} < 0. \quad (5.29)$$

Considerando que também para este caso  $K\bar{\theta} = 0$  devido à condição (3.8) e  $S\bar{\theta} = 0$  devido à (5.21), é possível verificar que  $(0 \quad \bar{\theta}^T) \Phi = 0$ . Assim, é possível reescrever (5.29) como

$$\begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta \end{pmatrix}^T \Phi \begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{pmatrix}^T \Phi \begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{pmatrix} < 0. \quad (5.30)$$

Aplicando o Lema de Finsler (Lema 4.1) é possível inserir a matriz  $C_b(\theta)$  que contém os anuladores lineares. Reescrevendo (5.30) como

$$\begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{pmatrix}^T (\Phi + LC_b(\theta) + C_b(\theta)^T L^T) \begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{pmatrix} < 0. \quad (5.31)$$

para qualquer matriz  $L$  de dimensões adequadas. Considerando o espaço nulo de  $C_a$  e aplicando novamente o Lema de Finsler, é possível

obter a LMI em (5.23) como uma condição suficiente para a equação (5.9) do Teorema 5.1.  $\square$

### 5.2.3 Exemplo numérico

**Exemplo 5.1** *Considere o conversor abaixador e elevador de tensão (Buck-Boost) com carga resistiva apresentado no Exemplo 3.1. Da mesma forma que no Exemplo 4.3, para este caso o valor de referência para a tensão de saída também será de  $E_{\text{out}} = -21$  V, o que significa que o conversor opera como um elevador de tensão. Os valores  $\alpha_1 = 333$  e  $\alpha_2 = 166$  são os mesmo utilizados no exemplo anterior. Para este exemplo considera-se que a saída de desempenho é a tensão no capacitor, ou seja  $z(t) = x_2(t)$  o que implica  $E_1 = E_2 = (0 \ 1)$ . As matrizes  $\{P_1, S_1, P_2, S_2\}$  das funções auxiliares (4.3) da lei de chaveamento (3.9) foram obtidas resolvendo as LMIs do Teorema 5.2. Para este caso  $\lambda = 1,2858$  e os valores numéricos das matrizes podem ser vistos no Apêndice A.2.1.*

*A resposta do sistema para condições iniciais nulas ( $e_0 = -\bar{x}$ ) e a região próxima da origem do plano de fase do erro são vistos na Figura 16. Pode-se verificar que a tensão de saída também é corretamente regulada neste caso. Observe que quando a trajetória toca a superfície de chaveamento pela primeira vez um modo deslizante ocorre conduzindo o erro para a origem.*

*É possível comparar estes resultados de simulação com os gráficos apresentados no Exemplo 4.3 e também em (TROFINO et al., 2011). A diferença entre estes dois resultados é que o projeto da lei de chaveamento dos exemplos apresentados nesta seção considera-se não somente o problema de estabilização mas também um requisito de desempenho (neste caso, o custo garantido). Comparando os resultados das Figuras 15 do capítulo anterior com a 16, pode-se observar que as oscilações que ocorrem nos estados durante o regime transitório foram atenuadas quando os requisitos de desempenho são considerados no projeto. Em (TROFINO et al., 2011) foram necessários ajustes nos parâmetros  $\alpha_i$  para melhorar a resposta transitória. Este exemplo demonstra que este ajuste não é necessário quando o desempenho por custo garantido é incluído no projeto da lei de chaveamento.  $\square$*



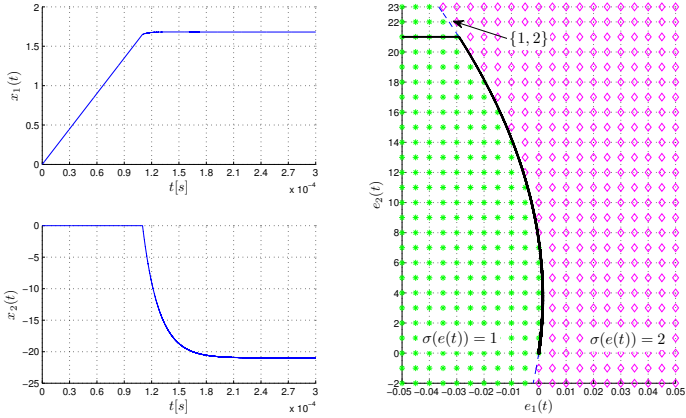


Figura 16 – Exemplo 5.1: resultados de simulação do conversor *Buck-Boost* para  $E_{\text{out}} = -21\text{V}$  com custo garantido.

### 5.3 PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO COM ATENUAÇÃO DE DISTÚRPIO

Considere o sistema chaveado composto de  $m$  subsistemas afins (3.1) reescrito na seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + b_i + B_i w(t), & x(0) &= x_0, \\ z(t) &= C_{zi} x(t) + D_{zi} w(t), & i \in \mathcal{M} &:= \{1, \dots, m\} \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  representa a saída de desempenho,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  é um distúrbio externo quadraticamente integrável ( $w \in \mathcal{L}_2$ ) com  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$  e  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$ ,  $C_{zi} \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$  e  $D_{zi} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$  são matrizes de estrutura.

O objetivo neste caso é projetar uma lei de chaveamento,  $\sigma(x(t))$ , que conduz assintoticamente os estados do sistema chaveado para uma dada referência constante e também minimize o ganho  $\mathcal{L}_2$  do distúrbio  $w(t)$  para a saída de desempenho  $z(t)$ .

A dinâmica do sistema chaveado (5.32) também pode ser rees-

crita utilizando o erro de seguimento definido em (3.4)

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_i e(t) + k_i + B_i w(t), & k_i &:= b_i + A_i \bar{x}, \\ z_e(t) &= C_{zi} e(t) + D_{zi} w(t), & z_e(t) &:= z(t) - C_{zi} \bar{x}, \\ e(0) &= e_0 = x_0 - \bar{x}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Sob estas considerações e levando em conta que  $\bar{x}$  é uma referência constante, é possível redefinir o problema em termos de  $e(t)$ . Neste caso deseja-se projetar uma lei de chaveamento,  $\sigma(e(t))$ , que conduza o erro para a origem e minimize um limitante superior  $\gamma$  do ganho de distúrbio de  $w(t)$  para  $z_e(t)$  definido como

$$\|H_{wz_e}\|_\infty := \sup_{\sigma(e(t))} \frac{\|z_e(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} < \gamma \quad (5.34)$$

para condições iniciais nulas ( $e(0) = 0$ ) e  $\|w(t)\|_2 \neq 0$ , onde  $\|x(t)\|_2 = (\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$  é a norma 2 de sinais.

Nesta abordagem considera-se que a dinâmica do erro de seguimento possa ser representada como uma combinação convexa dos campos vetoriais de cada subsistema em (5.33) (FILIPPOV, 1988), ou seja

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i \in \sigma(e(t))} \theta_i(e(t), w(t)) (A_i e(t) + k_i + B_i w(t)), \\ z_e(t) &= \sum_{i \in \sigma(e(t))} \theta_i(e(t), w(t)) (C_{zi} e(t) + D_{zi} w(t)), & \theta(e(t), w(t)) &\in \Theta \end{aligned} \quad (5.35)$$

onde  $\Theta$  é o simplex unitário descrito em (3.7) e  $\theta(e(t), w(t))$  é um vetor com elementos  $\theta_i(e(t), w(t))$  definidos de acordo com Filippov (1988, p.50).

Para atingir globalmente o objetivo de conduzir assintoticamente os estados do sistema chaveado para uma dada referência constante é necessário que a origem seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável de (5.35). Isso implica  $\dot{e}(t) = e(t) = 0$  em (5.35). Para que esta condição de equilíbrio seja satisfeita é necessário que  $w(t)$  assuma valores no conjunto

$$\mathcal{W} := \left\{ w \in \mathbb{R}^{n_w} : \sum_{i=1}^m \tilde{\theta}_i(w) (k_i + B_i w) = 0, \tilde{\theta}(w) \in \Theta \right\} \quad (5.36)$$

onde  $\tilde{\theta}(w)$  é um vetor com elementos  $\tilde{\theta}_i(w)$  onde  $\tilde{\theta}_i(w) := \theta_i(e, w)$  para  $e = 0$ .

Como por hipótese  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ , a condição do Lema 3.1 também deve ser atendida, isto é, deve existir  $\bar{\theta}$  que satisfaz (3.8), que pode ser visto como  $\bar{\theta} = \theta(e, w)$  para  $e = 0$  e  $w = 0$ .

**Observação 5.2** *Analisando (5.36), verifica-se que, dependendo da estrutura de  $k_i$  e  $B_i$ , é possível atender a condição de equilíbrio  $\dot{e}(t) = e(t) = 0$  para distúrbios não nulos desde que  $w(t) \in \mathcal{W}$ . Isso significa que a lei de chaveamento pode manter o erro de seguimento na origem mesmo na presença de distúrbios em uma determinada faixa de valores de  $w$ . Na sequência esse caso será demonstrado através de um exemplo acadêmico. É importante salientar que o caso  $w = 0$  também faz parte do conjunto  $\mathcal{W}$ .  $\square$*

### 5.3.1 Condições de projeto para garantia de estabilidade global e assintótica

Tendo como base as condições do Teorema 3.1 e as considerações vistas anteriormente, é possível estabelecer o seguinte teorema para projetar uma lei de chaveamento com atenuação de distúrbio.

**Teorema 5.3** *Considere o sistema afim (5.33) que define o erro de seguimento e seja  $w \in \mathcal{L}_2$  com  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ . Suponha que existam  $\bar{\theta} \in \Theta$  tal que  $\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i k_i = 0$  e funções  $v_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $v_i(0) = 0$ , para todo  $i \in \mathcal{M}$ , todas pertencentes à classe  $\mathcal{C}^1$ , e  $\alpha : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ . Caso exista solução para o seguinte problema*

*minimizar  $\gamma$  tal que*

$$V(e) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e)\} > 0 \quad (5.37)$$

$$V(e) \text{ é radialmente ilimitada} \quad (5.38)$$

$$\gamma > 0, \quad \alpha(\theta) \geq 0 \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{M}} \theta_i \theta_j \nabla v_i(e)^T (A_j e + k_j) + 2\alpha(\theta)(\theta_i - \bar{\theta}_i)v_i(e) \\ & + \frac{1}{\gamma} z_e^T z_e - \gamma w^T w < 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

$\forall \theta \in \Theta, \forall e \neq 0$ , então a origem de (5.35) sob efeito da lei de chaveamento (3.9) é globalmente assintoticamente estável e um limitante superior para atenuação de distúrbio em (5.34) é satisfeito para  $e_0 = 0$ .

□

**Prova 5.3** *Pode-se verificar que, de forma semelhante às condições do Teorema 3.1, a equação (5.37) requer que  $V$  seja positiva definida enquanto que (5.40) garante o decrescimento de  $V$  para qualquer trajetória do sistema chaveado sob efeito da lei de chaveamento. A prova será focada neste último aspecto, visto que os demais seguem o mesmo procedimento da prova do Teorema 3.1.*

*Inicialmente, como  $\alpha(\theta) \geq 0$ , conclui-se que (5.40) pode ser obtida pela aplicação do Procedimento-S (YAKUBOVICH, 1971), (BOYD et al., 1994, p.23) nas seguintes condições*

$$\sum_{i \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{M}} \theta_i \theta_j \nabla v_i(e)^T (A_j e + k_j) + \frac{1}{\gamma} z_e^T z_e - \gamma w^T w < 0$$

sempre que 
$$\sum_{i \in \mathcal{M}} (\theta_i - \bar{\theta}_i) v_i(e) \geq 0 \quad (5.41)$$

$\forall (\theta, e) \neq (\bar{\theta}, 0)$ .

*A partir deste ponto a demonstração segue de forma semelhante aos procedimentos utilizados na prova do Teorema 5.1. Para o caso no qual  $\sigma(e(t))$  possui somente um elemento,  $V(e(t))$  é diferenciável e a desigualdade (5.41) implica em*

$$\dot{V}(e(t)) + \frac{1}{\gamma} z_e(t)^T z_e(t) - \gamma w(t)^T w(t) < 0. \quad (5.42)$$

*Suponha que  $\sigma(e(t))$  mantenha-se com somente um elemento no intervalo de tempo de zero até  $t_1 > 0$ . Sob esta condição é possível integrar (5.42) neste intervalo de tempo obtendo a seguinte expressão*

$$V(e(t_1)) + \frac{1}{\gamma} \int_0^{t_1} z_e(t)^T z_e(t) dt - \gamma \int_0^{t_1} w(t)^T w(t) dt < V(e_0). \quad (5.43)$$

*Considerando que a origem de (5.35) sob efeito da lei de chaveamento (3.9) é globalmente assintoticamente estável, conclui-se que  $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} e(t_1) = 0$  e também  $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} V(e(t_1)) = 0$ . Como  $e_0 = 0$ ,  $V(e_0) = 0$ . Desta forma, para  $t_1 \rightarrow \infty$  a condição (5.43) é igual a*

$$\int_0^{\infty} z_e(t)^T z_e(t) dt < \gamma^2 \int_0^{\infty} w(t)^T w(t) dt \quad (5.44)$$

*que é equivalente ao requisito em (5.34).*

*Para o caso no qual o sistema chaveado encontra-se em modo*

deslizante, os mesmos argumentos utilizados na prova do Teorema 5.1 podem ser empregados. Recapitulando a prova do Teorema 3.1, a derivada direcional de Dini (LASDON, 1970, p.420) de  $V(e(t))$  é única para  $e(t) \in T_{\dot{e}(t)}(e(t))$ , com  $T_h(e(t))$  definido em (3.17). Logo, nos pontos de continuidade do campo vetorial  $DV(e(t))[\dot{e}(t)] = \dot{V}(e(t))$  e a equação (5.42) também é válida para o modo deslizante. Realizando a integração de (5.42) em intervalos de tempo definidos pelos instantes de descontinuidade do campo vetorial, chega-se também em (5.44).  $\square$

### 5.3.2 Condições LMI para o projeto de lei de chaveamento

A partir das condições do Teorema 5.3 e supondo que exista uma combinação Hurwitz estável das matrizes de dinâmicas dos subsistemas que compõem o sistema chaveado, é possível estabelecer o seguinte teorema para o projeto de lei de chaveamento com atenuação de distúrbio. Esta metodologia considera as funções auxiliares de (3.9) com a estrutura particular vista em (4.3).

**Teorema 5.4** *Seja  $\bar{x}$  um dado vetor constante representando o equilíbrio desejado para o sistema chaveado afim (5.32), supondo que os estados  $x(t)$  possam ser medidos e que o distúrbio  $w \in \mathcal{L}_2$  com  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ . Considere o sistema afim do erro de seguimento (5.33) e assuma que exista  $\bar{\theta} \in \Theta$  definido de acordo com o Lema 3.1. Utilizando a notação auxiliar (4.5)-(4.10), seja  $Q_a$  uma base do espaço nulo de  $C_a$  e seja  $L$  uma matriz a ser determinada com as dimensões de  $C_b(\theta)^T$ , sendo*

$$C_a = \begin{pmatrix} 0_{(1 \times mn)} & \mathbf{1}_m & 0_{(1 \times n_w)} \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

e

$$C_b(\theta) = \begin{bmatrix} \aleph_\theta \otimes I_n & 0_{(rn \times m)} & 0_{(rn \times n_w)} \\ 0_{(r \times nm)} & \aleph_\theta - \aleph_{\bar{\theta}} & 0_{(r \times n_w)} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

com os anuladores lineares  $\aleph_\theta, \aleph_{\bar{\theta}} \in \mathbb{R}^{r \times m}$  conforme Definição 4.1. Sejam as constantes  $\alpha_i > 0$  dadas e escolhidas conforme as orientações da Observação 4.2. Supondo que existam matrizes  $P, S, L$  e um escalar positivo  $\gamma$  que resolvam o seguinte problema LMI

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar } \gamma & \\ P_i, S_i, \gamma & \text{sujeito à} \end{array} \quad (5.47)$$

$$\bar{P} > 0, \quad \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i S_i = 0 \quad (5.48)$$

$$\begin{bmatrix} Q_a^T (\Upsilon + LC_b(\theta) + C_b(\theta)^T L^T) Q_a & \star \\ (C_z \quad 0 \quad D_\theta) Q_a & -\gamma I_n \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (5.49)$$

sendo

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \star & \star \\ K^T P + S^T A + 2S^T \alpha & K^T S + S^T K & \star \\ B_\theta^T P & B_\theta^T S & -\gamma I_{n_w} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

$$\Upsilon_{11} = (A + \alpha)^T P + P^T (A + \alpha) - \alpha^T \bar{P} I_a - I_a^T \bar{P} \alpha \quad (5.51)$$

$$B_\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i B_i, \quad C_z = (C_{z1} \quad \dots \quad C_{zm}), \quad D_\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i D_{zi} \quad (5.52)$$

então a origem de (5.35) sob efeito da lei de chaveamento (3.9) é globalmente assintoticamente estável e um limitante superior do ganho  $\mathcal{L}_2$  de distúrbio definido em (5.34) é satisfeito. Além disso, para  $w \in \mathcal{W}$  (5.37) é uma função de Lyapunov para o sistema (5.35) com a lei de chaveamento (3.9).  $\square$

**Prova 5.4** A demonstração que as condições (5.37)-(5.38) do Teorema 5.3 estão sendo atendidas segue o mesmo procedimento da prova do Teorema 4.1 do capítulo anterior. Assim, serão vistos na sequência os procedimentos para obtenção da equação (5.49) com base na condição (5.40) do Teorema 5.3. Inicialmente, verifica-se que é possível reescrever  $z_e(t)^T z_e(t)$  como

$$\begin{aligned} z_e(t)^T z_e(t) &= e(t)^T C_{z\theta}^T C_{z\theta} e(t) + 2e(t)^T C_{z\theta}^T D_\theta w(t) \\ &\quad + w(t)^T D_\theta^T D_\theta w(t) \end{aligned} \quad (5.53)$$

sendo

$$C_{z\theta} := \sum_{i=1}^m \theta_i C_{zi}. \quad (5.54)$$

Considerando a escolha particular para as funções auxiliares  $v_i(e(t))$  apresentada em (4.3) e utilizando (5.53), é possível reescrever a condi-

$\zeta\tilde{\alpha}$  (5.40) como

$$\begin{pmatrix} e(t) \\ 1 \\ w(t) \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \star & \star \\ \Omega_{21} & 2K_\theta^T S_\theta & \star \\ \Omega_{31} & B_\theta^T S_\theta & \gamma^{-1}D_\theta^T D_\theta - \gamma I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ 1 \\ w(t) \end{pmatrix} < 0 \quad (5.55)$$

onde

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= A_\theta^T P_\theta + P_\theta A_\theta + 2\alpha_\theta(P_\theta - \bar{P}) + \gamma^{-1}C_{z\theta}^T C_{z\theta} \\ \Omega_{21} &= K_\theta^T P_\theta + S_\theta^T A_\theta + 2S_\theta^T \alpha_\theta \\ \Omega_{31} &= \gamma^{-1}D_\theta^T C_{z\theta} + B_\theta^T P_\theta. \end{aligned}$$

O próximo passo é descrever a desigualdade anterior como um problema convexo. Reescrevendo (5.55) com a notação (4.6)-(4.10) e (5.52) como

$$\begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta \\ w \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \star & \star \\ \Gamma_{21} & K^T S + S^T K & \star \\ \Gamma_{31} & B_\theta^T S & \gamma^{-1}D_\theta^T D_\theta - \gamma I_{n_w} \end{bmatrix}}_{\Gamma} \begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta \\ w \end{pmatrix} < 0 \quad (5.56)$$

com

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \Upsilon_{11} + \gamma^{-1}C_z^T C_z, \quad \Gamma_{21} = K^T P + S^T A + 2S^T \alpha \\ \Gamma_{31} &= \gamma^{-1}D_\theta^T C_z + B_\theta^T P. \end{aligned}$$

Considerando novamente que  $K\bar{\theta} = 0$  devido à condição (3.8) e  $S\bar{\theta} = 0$  devido à (5.48), é possível verificar que  $(0 \quad \bar{\theta}^T \quad 0) \Gamma = 0$ . Desta forma, é possível reescrever (5.56) como

$$\begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta \\ w \end{pmatrix}^T \Gamma \begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \\ w \end{pmatrix}^T \Gamma \begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \\ w \end{pmatrix} < 0. \quad (5.57)$$

Aplicando o Lema de Finsler (Lema 4.1) é possível inserir a matriz  $C_b(\theta)$  definida em (5.46) que contém os anuladores lineares. Reescrevendo (5.57) como

$$\begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \\ w \end{pmatrix}^T (\Gamma + LC_b(\theta) + C_b(\theta)^T L^T) \begin{pmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \\ w \end{pmatrix} < 0 \quad (5.58)$$

para qualquer matriz  $L$  de dimensões adequadas. Considerando o espaço nulo da matriz  $C_a$  definida em (5.45) e aplicando novamente o Lema de Finsler, é possível obter a seguinte condição suficiente para (5.58)

$$Q_a^T \Upsilon Q_a + Q_a^T (LC_b(\theta) + C_b(\theta)^T L^T) Q_a + Q_a^T \begin{pmatrix} C_z^T \\ 0 \\ D_\theta^T \end{pmatrix} \gamma^{-1} \begin{pmatrix} C_z & 0 & D_\theta \end{pmatrix} Q_a < 0. \quad (5.59)$$

Aplicando o Complemento de Schur em (5.59) obtém-se a LMI em (5.49) como uma condição suficiente para a equação (5.40) do Teorema 5.3.  $\square$

### 5.3.3 Exemplos numéricos

**Exemplo 5.2** Considere o sistema chaveado afim com três subsistemas apresentado no Exemplo 4.1 do capítulo anterior. Para este caso

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,25 \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

$C_{z1} = C_{z2} = C_{z3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D_{z1} = 2$ ,  $D_{z2} = 1$ ,  $D_{z3} = 0,5$  e o distúrbio externo  $w(t) = 20t \exp(-7t)$ .

Inicialmente foi considerado  $\beta = 1$ , o que significa que todos os subsistemas são Hurwitz estáveis. Os valores de  $\alpha_i$  foram escolhidos de acordo com a Observação 4.2 como  $\alpha_1 = 0,4$ ,  $\alpha_2 = 0,8$  e  $\alpha_3 = 1,2$ . O Teorema 5.4 foi utilizado para obter as matrizes  $\{P_i, S_i, i \in \mathcal{M}\}$  das funções auxiliares (4.3) da lei de chaveamento (3.9). Os valores numéricos das matrizes podem ser vistos no Apêndice A.2.2. O valor de  $\gamma$  para este exemplo é 2,0788. Os resultados de simulação para o sistema com a perturbação são vistos na Figura 17. Observa-se que o erro do sistema é corretamente regulado na origem mesmo quando o distúrbio  $w(t)$  não é nulo.

O caso no qual  $\beta = -1$ , ou seja  $A_1$  e  $A_2$  instáveis e  $A_3$  Hurwitz estável, também foi avaliado para o projeto com inclusão da atenuação de distúrbio. Os valores de  $\alpha_i$  foram os mesmo utilizados para o caso  $\beta = 1$ . As LMIs do Teorema 5.4 foram resolvidas com  $\gamma = 4,5285$ . A Figura 18 apresenta os resultados de simulação. Da mesma forma que ocorreu no caso anterior, o erro de seguimento retorna à zero mesmo na presença do distúrbio externo  $w(t)$ .



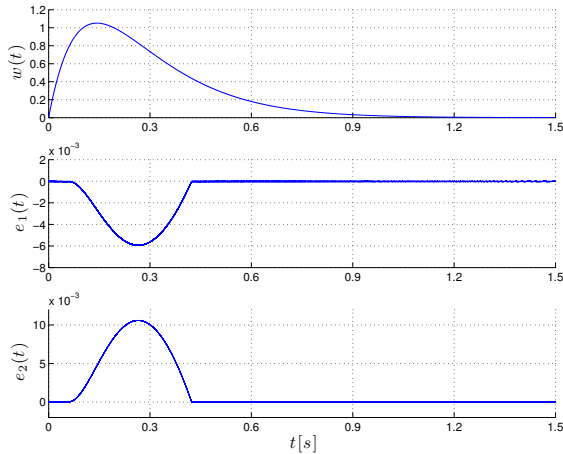


Figura 17 – Exemplo 5.2: resultados de simulação com subsistemas estáveis ( $\beta = 1$ ) e inclusão da atenuação de distúrbio.

Os mesmos resultados de simulação da Figura 18 são apresentados em um plano de fase na Figura 19. É interessante notar que a trajetória de  $e_1(t), e_2(t)$  é, de fato, um modo deslizante. A trajetória inicia na origem, atinge o ponto  $e(t_0)$  e retorna à origem. Observe que toda a trajetória fora da origem permanece na superfície de chaveamento dos subsistemas  $\{1, 3\}$ .

Analisando os resultados nas Figuras 17 e 18, verifica-se que através da ação da lei de chaveamento no sistema é possível manter o erro de seguimento em zero mesmo na presença do distúrbio externo  $w$ . Considerando as matrizes  $k_i$  e  $B_i$  deste sistema, é possível encontrar valores  $w \in \mathcal{W}$  tais que a condição  $\sum_{i=1}^m \theta_i(w) (k_i + B_i w) = 0$  seja satisfeita com  $\tilde{\theta}(w) \in \Theta$ . Para este exemplo a condição é satisfeita com  $\mathcal{W} = \{w : -2 \leq w \leq 0.8\}$ . Isso significa que este sistema se enquadra nos aspectos comentados na Observação 5.2. Neste caso em particular, para condições iniciais nulas ( $e(0) = 0$ ) o erro de seguimento é mantido na origem em qualquer tempo desde que o distúrbio externo  $w(t)$  possua valores no conjunto  $\mathcal{W}$ .

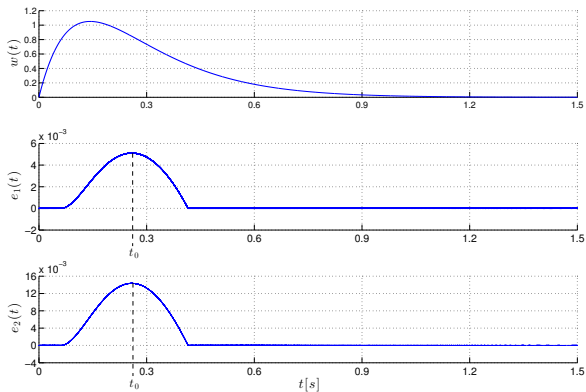


Figura 18 – Exemplo 5.2: resultados de simulação com subsistemas instáveis ( $\beta = -1$ ) e inclusão da atenuação de distúrbio, sendo  $t_0 = 0,26$ s,  $e_1(t_0) = 5,1 \times 10^{-3}$  e  $e_2(t_0) = 14,3 \times 10^{-3}$ .

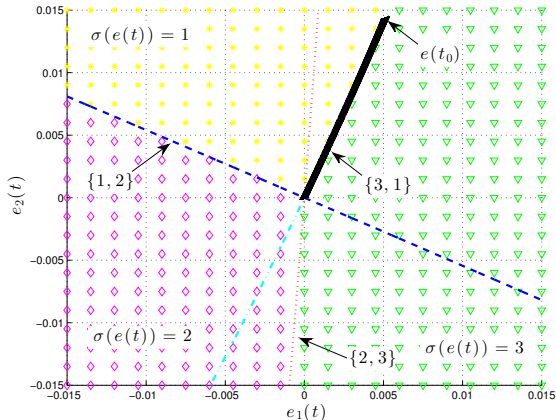


Figura 19 – Exemplo 5.2: plano de fase dos resultados de simulação com subsistemas instáveis ( $\beta = -1$ ) e inclusão da atenuação de distúrbio. Linhas cheias em preto representam as trajetórias; linhas tracejadas coloridas são as superfícies de chaveamento.

A simulação para o caso  $\beta = 1$  foi repetida considerando como distúrbio externo um sinal randômico uniformemente distribuído com valores na faixa  $(-2.0, 0.8)$ . Os resultados de simulação são apresentados na Figura 20. Analisando estes resultados é possível verificar que, conforme mencionado anteriormente, o erro de seguimento permanece na origem mesmo na presença de distúrbio.  $\square$

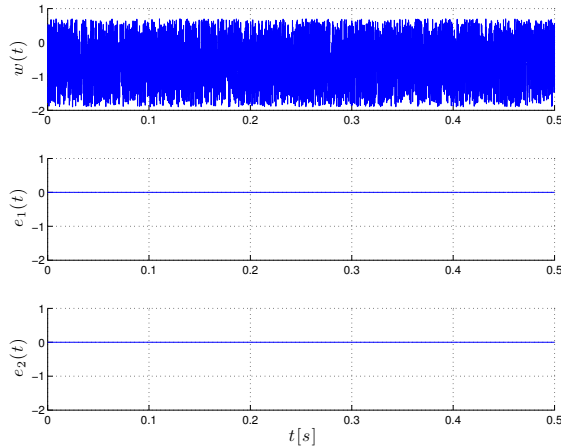


Figura 20 – Exemplo 5.2: resultados de simulação com subsistemas instáveis ( $\beta = -1$ ) e inclusão da atenuação de distúrbio, valores de  $w \in (-2.0, 0.8)$ .

**Exemplo 5.3** Considere o conversor abaixador e elevador de tensão (Buck-Boost) com carga resistiva apresentado no Exemplo 3.1. Para este exemplo a saída de desempenho é a tensão no capacitor, ou seja  $z(t) = x_2(t)$  o que implica  $C_{z1} = C_{z2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Considera-se também neste caso  $B_1 = (1/L \ 0)^T$ ,  $B_2 = 0_{2 \times 1}$ ,  $D_{z1} = D_{z2} = 0$  e o distúrbio externo  $w(t) = \sin(2\pi 120t)$ . Estas escolhas de  $B_i$ ,  $D_{z_i}$  e  $w(t)$  foram efetuadas com o intuito de reproduzir o caso no qual o conversor é alimentado por uma fonte de corrente contínua com um fator de oscilação de 7% da tensão de entrada. Desta forma, o requisito de desempenho no projeto da lei de chaveamento tem como objetivo minimizar o efeito da oscilação na tensão de saída.

Inicialmente, o valor da tensão de referência será de  $E_{\text{out}} =$

$-9V$ . Os valores de  $\alpha_1 = 333$  e  $\alpha_2 = 166$  são os mesmo utilizados nos exemplos anteriores. Resolvendo as LMIs do Teorema 5.4 foi possível obter  $\gamma = 4,8972$  e as matrizes  $\{P_1, S_1, P_2, S_2\}$  das funções auxiliares (4.3) com as quais a lei de chaveamento (3.9) é definida. Os valores numéricos das matrizes podem ser vistos no Apêndice A.2.3. A resposta em simulação do sistema chaveado para um distúrbio  $w(t)$  aplicado quando o sistema já se encontra no equilíbrio ( $e_0 = 0$ ) é apresentada na Figura 21. Observa-se que, como esperado neste caso, tanto o erro da tensão de saída como o erro da corrente no indutor retornam para o valor nulo de equilíbrio após cessar o distúrbio  $w(t)$ . Além disso, os efeitos do distúrbio foram atenuados na tensão de saída, com um fator de oscilação de aproximadamente 2% da tensão regulada.

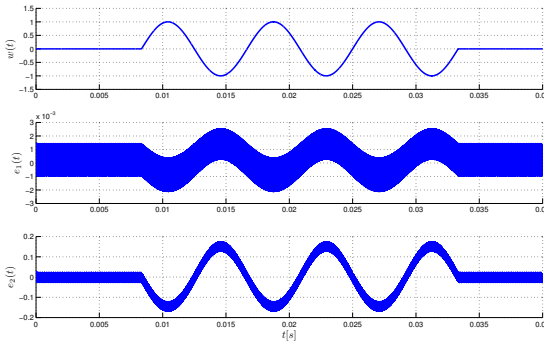


Figura 21 – Exemplo 5.3: resultados de simulação do conversor *Buck-Boost* para  $E_{\text{out}} = -9V$  com inclusão da atenuação de distúrbio.

O mesmo teste foi efetuado considerando a tensão de referência  $E_{\text{out}} = -21 V$ , o que significa que o conversor opera como um elevador de tensão. Neste caso as LMIs do Teorema 5.4 foram resolvidas com  $\gamma = 3,9116$ . Os resultados de simulação podem ser vistos na Figura 22, onde é possível verificar que os efeitos das oscilações na tensão de entrada também foram atenuados. Para este caso o fator de oscilação na tensão de saída é de aproximadamente 2,5%.

É importante enfatizar que, devido à estrutura de  $k_i$  e  $B_i$  do sistema considerado neste exemplo, não é possível encontrar  $\hat{\theta}(w) \in \Theta$  para o qual  $\sum_{i=1}^m \hat{\theta}_i(w)(k_i + B_i w) = 0$  quando  $w \neq 0$ . Desta forma  $\mathcal{W} = \{w : w = 0\}$  e qualquer distúrbio vai afetar a dinâmica do erro de seguimento.  $\square$

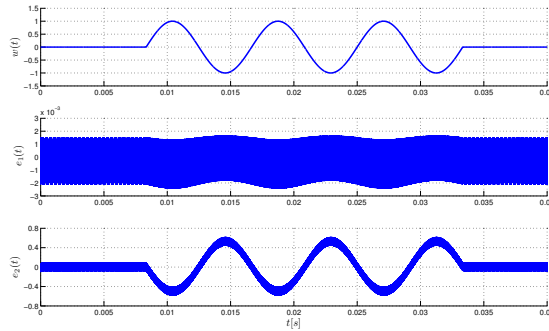


Figura 22 – Exemplo 5.3: resultados de simulação do conversor *Buck-Boost* para  $E_{\text{out}} = -21\text{V}$  com inclusão da atenuação de distúrbio.

#### 5.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo apresentou o projeto de lei de chaveamento para sistemas chaveados afins com a inclusão de requisitos de desempenho. Inicialmente, foi abordado a inclusão do custo garantido. Para este caso foram estabelecidas as condições de projeto, vistas no Teorema 5.1, que posteriormente foram descritas como um conjunto de LMIs apresentadas no Teorema 5.2 para uma escolha particular das funções auxiliares  $v_i(e(t))$ . Através dos resultados do Exemplo 5.1, foi possível ilustrar uma melhoria na resposta transitória do sistema chaveado quando o desempenho por custo garantido é incluído no projeto da lei de chaveamento.

Um procedimento semelhante foi adotado para a inclusão da atenuação de distúrbio. Para este requisito de desempenho as condições de projeto e o conjunto de LMIs são descritos nos Teoremas 5.3 e 5.4, respectivamente. Um aspecto interessante abordado neste capítulo é a possibilidade de realizar, para uma determinada classe de sistemas chaveados, a eliminação de distúrbios externos para uma faixa de valores através da ação da lei de chaveamento, sem afetar a dinâmica do erro de seguimento. O Exemplo 5.2 ilustra um caso onde é possível eliminar o distúrbio externo.

É importante salientar que os resultados dos Teoremas 5.2 e 5.4 baseiam-se na suposição que exista uma combinação Hurwitz estável das matrizes de dinâmicas dos subsistemas que compõem o sistema

chaveado afim. Sob este aspecto, uma sugestão para trabalhos futuros seria modificar as condições LMI apresentadas neste capítulo de forma que esta suposição não seja mais necessária.

Nos próximos capítulos será abordada a extensão das condições de projeto para o caso de sistemas chaveados não lineares. Os resultados serão particularizados para duas aplicações: motores de indução acionados por inversores e geradores eólicos com conversores.

## 6 METODOLOGIA DE PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO PARA APLICAÇÕES DE MOTORES DE INDUÇÃO

### 6.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta condições para o projeto de uma lei de chaveamento que assintoticamente conduz os estados de um sistema chaveado não linear para uma dada referência constante. Será efetuada uma extensão dos resultados já vistos nos capítulos anteriores nos quais foi tratado o caso de sistemas chaveados afins. Nesta parte do trabalho o estudo de sistemas chaveados não lineares será particularizado para a aplicação de motores de indução trifásicos acionados por inversores de frequência.

A estrutura do capítulo é a seguinte: inicialmente serão apresentadas as equações que representam a classe de sistemas chaveados não lineares que será estudada. Na sequência, serão estabelecidas as condições de projeto para garantia de estabilidade desta classe de sistemas chaveados não lineares. Depois, as principais características do modelo do motor de indução trifásico serão apresentadas. Considerando que o motor trifásico é alimentado por um inversor de frequência, é possível descrever a dinâmica da aplicação como um sistema chaveado não linear. Finalmente, com base nesta descrição e com as condições de projeto para garantia de estabilidade será proposta uma metodologia para projeto de uma nova estratégia de chaveamento para motores de indução. Os resultados serão ilustrados através de um exemplo numérico.

### 6.2 SISTEMAS CHAVEADOS NÃO LINEARES

Considere a seguinte classe de sistemas chaveados não lineares compostos de  $m$  subsistemas

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t), z(t)), \quad i \in \mathcal{M} := \{1, \dots, m\} \quad (6.1)$$

onde  $z \in \mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^{n_z}$  é um sinal externo auxiliar com dinâmica conhecida ( $\dot{z}(t) = s(z(t))$ ),  $\mathcal{Z}$  é um conjunto limitado fechado e  $f_i(x(t), z(t)) \in \mathbb{R}^n$  é a função vetorial da dinâmica de cada subsistema. Nas aplicações de sistemas chaveados não lineares abordadas neste trabalho o sinal  $z(t)$

representa uma referência senoidal. Mais detalhes sobre este aspecto serão vistos na sequência.

Supondo que a comutação entre os  $m$  subsistemas de (6.1) ocorra de acordo com uma lei de chaveamento representada pelo sinal de chaveamento

$$\sigma(x(t), z(t)) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_z} \rightarrow \mathcal{M} \quad (6.2)$$

que pode ser visto como um mapeamento de  $x$  e  $z$ , tomados a cada instante de tempo  $t$ , para o conjunto de índices  $\sigma(x(t), z(t)) \in \mathcal{M}$  do modo de operação corrente (ativo).

O problema consiste em projetar uma lei de chaveamento,  $\sigma(x(t), z(t))$ , que conduza assintoticamente os estados do sistema chaveado não linear (6.1) para uma determinada referência constante  $\bar{x}$  para todo  $z \in \mathcal{Z}$ . A dinâmica de (6.1) pode ser reescrita utilizando o erro de seguimento definido em (3.4)

$$\dot{e}(t) = f_i(e(t) + \bar{x}, z(t)), \quad z \in \mathcal{Z}. \quad (6.3)$$

Desta forma, o problema será reformulado como sendo projetar uma lei de chaveamento  $\sigma(e(t), z(t))$  tal que o equilíbrio  $e(t) = 0$  seja localmente (ou globalmente) assintoticamente estável para todo  $z \in \mathcal{Z}$ . De acordo com Filippov (1988), assume-se que a dinâmica do erro de seguimento em modos deslizantes pode ser representada como uma combinação convexa das dinâmicas dos subsistemas de (6.3), ou seja

$$\dot{e}(t) = \sum_{i \in \sigma(e, z)} \theta_i(e(t), z(t)) f_i(e(t) + \bar{x}, z(t)), \quad \theta(e(t), z(t)) \in \Theta \quad (6.4)$$

onde  $\Theta$  é o simplex unitário descrito em (3.7) e  $\theta(e(t), z(t))$  é um vetor com elementos  $\theta_i(e(t), z(t))$  definidos conforme Filippov (1988, p.50).

Para atingir o objetivo de conduzir assintoticamente os estados do sistema chaveado para uma dada referência constante, é necessário que a origem seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (6.4) para todo  $z \in \mathcal{Z}$ . Desta forma, é possível estabelecer o seguinte lema.

**Lema 6.1** *A origem é um ponto de equilíbrio de (6.4) somente se existir  $\bar{\theta}(z(t)) \in \Theta$  tal que*

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(z(t)) f_i(\bar{x}, z(t)) = 0, \quad \forall z \in \mathcal{Z}. \quad (6.5)$$



□

**Prova 6.1** *Substitua  $\dot{e} = e = 0$  em (6.4). □*

### 6.3 CONDIÇÕES DE PROJETO PARA GARANTIA DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS CHAVEADOS NÃO LINEARES

Nesta seção os resultados anteriormente apresentados no Teorema 3.1 serão estendidos para a classe de sistemas chaveados não lineares definida em (6.1).

**Teorema 6.1** *Considere o sistema não linear (6.3) que representa o erro de seguimento. Seja  $\mathcal{X}$  uma vizinhança da origem do erro de seguimento. Suponha que existam  $\bar{\theta}(z(t)) \in \Theta$  tal que a condição (6.5) do Lema 6.1 seja satisfeita. Sejam as funções de classe  $\mathcal{C}^1$   $v_i : \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $v_i(0, z(t)) = 0 \forall z(t) \in \mathcal{Z}$  e para todo  $i \in \mathcal{M}$  e considere a notação  $g_i(e(t), z(t)) = \frac{\partial v_i(e(t), z(t))}{\partial z} \dot{z}(t)$ . Sejam  $\phi_1(e(t))$ ,  $\phi_2(e(t))$  e  $\phi_3(e(t))$  funções contínuas positivas definidas e  $\alpha : \mathcal{X} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que as seguintes condições sejam satisfeitas  $\forall \theta \in \Theta, \forall e \in \mathcal{X}, \forall z \in \mathcal{Z}$ .*

$$\phi_1(e) \leq V(e, z) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e, z)\} \leq \phi_2(e) \quad (6.6)$$

$$\alpha(e, \theta) \geq 0 \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{M}} \theta_i \theta_j \nabla v_i(e, z)^T f_j(e + \bar{x}, z) + g_i(e, z) \\ + 2\alpha(e, \theta)(\theta_i - \bar{\theta}_i(z))v_i(e, z) \leq -\phi_3(e). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Então a origem de (6.4) sob efeito da lei de chaveamento

$$\sigma(e(t), z(t)) := \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t), z(t))\} \quad (6.9)$$

é localmente assintoticamente estável. Adicionalmente, caso  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  e  $\phi_1(e)$  seja radialmente ilimitada, as condições garantem estabilidade assintótica e global. □

**Prova 6.2** *A prova utiliza argumentos semelhantes aos empregados na demonstração do Teorema 3.1. Em primeiro lugar, observe que*

$$V(e, z) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e, z)\} = \max_{\theta \in \Theta} \sum_{i \in \mathcal{M}} \theta_i v_i(e, z) \geq \sum_{i \in \mathcal{M}} \bar{\theta}_i(z) v_i(e, z) \quad (6.10)$$

o que por sua vez implica que  $\sum_{i \in \mathcal{M}} (\theta_i - \bar{\theta}_i(z)) v_i(e, z) \geq 0$ . Como  $\alpha(e, \theta) \geq 0$ , conclui-se com (6.8) que  $\forall \theta \in \Theta, \forall e \in \mathcal{X}, \forall z \in \mathcal{Z}$  tem-se

$$\sum_{i \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{M}} \theta_i \theta_j \nabla v_i(e, z)^T f_j(e + \bar{x}, z) + g_i(e, z) \leq -\phi_3(e)$$

sempre que  $\sum_{i \in \mathcal{M}} (\theta_i - \bar{\theta}_i(z)) v_i(e, z) \geq 0$ . (6.11)

Inicialmente será verificado o caso no qual o sistema chaveado opera em um modo isolado, por exemplo  $\sigma(e, z) = \{i\}$ . Nessa situação

$$v_i(e, z) - \sum_{j \in \mathcal{M}} \bar{\theta}_j(z) v_j(e, z) \geq 0.$$

Neste caso  $\theta_i = 1$  e  $\theta_j = 0$  para todo  $j \neq i$ , conforme os resultados em (FILIPPOV, 1988), e a desigualdade (6.11) é reduzida para

$$\nabla v_i(e, z)^T f_i(e + \bar{x}, z) + g_i(e, z) \leq -\phi_3(e)$$

sempre que  $v_i(e, z) \geq \sum_{j \in \mathcal{M}} \bar{\theta}_j(z) v_j(e, z)$ . (6.12)

Assim, para  $e(t)$  e  $z(t)$  tal que  $\sigma(e(t), z(t)) = \{i\}$  tem-se

$$\phi_1(e(t)) \leq V(e(t), z(t)) = v_i(e(t), z(t)) \leq \phi_2(e(t)).$$

Logo,  $V(e(t), z(t))$  é diferenciável e a desigualdade (6.12) implica em

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t), z(t)) &= \dot{v}_i(e(t), z(t)) \\ &= \nabla v_i(e(t), z(t))^T f_i(e(t) + \bar{x}, z(t)) + g_i(e(t), z(t)) \\ &\leq -\phi_3(e(t)). \end{aligned}$$

A partir deste ponto, os procedimentos para provar que o equilíbrio é localmente assintoticamente estável seguem os resultados de estabilidade de Lyapunov para sistemas não autônomos apresentados nos Teoremas 4.8 e 4.9 de Khalil (2002).

Na sequência, considere  $e(t)$  e  $z(t)$  no qual o sistema chaveado encontra-se em modo deslizante. Neste caso as trajetórias do sistema em malha fechada podem ir para uma região onde  $\sigma(e(t), z(t))$  possui somente um elemento, na qual  $V(e(t), z(t))$  decresce devido aos argumentos apresentados anteriormente, ou entra em um modo deslizante. Em modo deslizante, a trajetória do sistema é descrita por (6.4). O

sistema chaveado vai permanecer em modo deslizante enquanto existir pelo menos um  $\theta(e(t), z(t))$  em  $\Theta$  tal que  $(e(t), z(t)) \in T_{\dot{e}(t)}(e(t), z(t))$ , sendo

$$\begin{aligned} T_h(e, z) &:= \{(e, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z} : V(e, z) = v_i(e, z) = v_j(e, z), \\ &\quad \nabla v_i(e, z)^T h + g_i(e, z) = \nabla v_j(e, z)^T h + g_j(e, z) \quad (6.13) \\ &\quad \text{para todo } i, j \in \sigma(e, z)\} \end{aligned}$$

ou seja, existe uma direção  $h = \dot{e}(t)$  na inclusão diferencial que pertence ao plano tangente do manifold de escorregamento

$$\{(e, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z} : V(e, z) = v_i(e, z) \text{ para todo } i \in \sigma(e, z)\}. \quad (6.14)$$

Retornando para a análise de estabilidade, para um  $e(t)$  e  $z(t)$  e para todo  $\theta(e(t), z(t)) \in \Theta$ , a desigualdade (6.10) acarreta em

$$\begin{aligned} V(e(t), z(t)) &= \sum_{i \in \mathcal{M}} \theta_i(e(t), z(t)) v_i(e(t), z(t)) \\ &= \max_{\theta \in \Theta} \sum_{i \in \mathcal{M}} \theta_i v_i(e(t), z(t)) \geq \sum_{i \in \mathcal{M}} \bar{\theta}_i(z(t)) v_i(e(t), z(t)) \end{aligned}$$

o que implica em

$$\sum_{i \in \mathcal{M}} (\theta_i(e(t), z(t)) - \bar{\theta}_i(z(t))) v_i(e(t), z(t)) \geq 0. \quad (6.15)$$

Portanto, neste caso pode-se também concluir que para  $e(t)$ ,  $z(t)$  e para todo  $\theta(e(t), z(t)) \in \Theta$  a condição (6.8) é equivalente à

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{M}} \theta_i(e(t), z(t)) \theta_j(e(t), z(t)) \nabla v_i(e(t), z(t))^T f_j(e(t) + \bar{x}, z(t)) \\ &\quad + g_i(e(t), z(t)) = \\ &\sum_{i \in \sigma(e, z)} \sum_{j \in \sigma(e, z)} \theta_i(e(t), z(t)) \theta_j(e(t), z(t)) \nabla v_i(e(t), z(t))^T f_j(e(t) + \bar{x}, z(t)) \\ &\quad + g_i(e(t), z(t)) \leq -\phi_3(e(t)) \end{aligned}$$

sempre que (6.15) é satisfeita.

Em particular, para todo  $\theta(e(t), z(t)) \in \Theta$  tal que

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{j \in \mathcal{M}} \theta_j(e(t), z(t)) f_j(e(t) + \bar{x}, z(t)) \\ &= \sum_{j \in \sigma(e, z)} \theta_j(e(t), z(t)) f_j(e(t) + \bar{x}, z(t)) \end{aligned} \quad (6.16)$$

com  $(e(t), z(t)) \in T_{\dot{e}(t)}(e(t), z(t))$ , tem-se

$$\begin{aligned} DV(e(t), z(t))[\dot{e}(t)] &= \max_{i \in \sigma(e, z)} \nabla v_i(e(t), z(t))^T \dot{e}(t) + g_i(e(t), z(t)) \\ &= \sum_{i \in \sigma(e, z)} \theta_i(e(t), z(t)) \nabla v_i(e(t), z(t))^T \dot{e}(t) \\ &\quad + g_i(e(t), z(t)) \leq -\phi_3(e(t)). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Relembrando que a derivada direcional de Dini de  $V(e(t), z(t))$  é única para  $(e(t), z(t)) \in T_{\dot{e}(t)}(e(t), z(t))$ , com  $T_h(e(t), z(t))$  definido em (6.13) e que nos pontos de continuidade do campo vetorial tem-se  $DV(e(t), z(t))[\dot{e}(t)] = \dot{V}(e(t), z(t))$ . Nos pontos de descontinuidade  $\theta(e(t), z(t))$  é descontínuo, porém  $DV(e(t), z(t))[\dot{e}(t)] < 0$  pois (6.11) deve ser satisfeita para todo  $\theta \in \Theta - \{\bar{\theta}\}$ .

Assim, podemos concluir de (6.17) que a função  $V(e(t), z(t))$  é estritamente decrescente. Como  $V(e(t), z(t))$  é positiva definida, contínua e estritamente decrescente, argumentos similares aos utilizados nas provas dos Teoremas 4.8 e 4.9 de Khalil (2002) também são válidos para garantir estabilidade do sistema em modo deslizante.  $\square$

A partir deste ponto o estudo de sistemas chaveados não lineares será particularizado para a aplicação envolvendo o controle de motores de indução trifásicos acionados por inversores de frequência. O objetivo é desenvolver uma metodologia de projeto para esta aplicação considerando a lei de chaveamento (6.9) e com base nas condições do Teorema 6.1 e descrevê-las como um conjunto de LMIs. Na sequência, serão vistos os principais características e o modelo matemático do motor de indução.

## 6.4 MODELO MATEMÁTICO DO MOTOR DE INDUÇÃO TRIFÁSICO

Os motores de indução apresentam características que tornam sua utilização vantajosa, tais como confiabilidade, robustez, versatili-

dade e baixo custo. A confiabilidade do motor de indução advém do fato da comutação ser realizada sem a necessidade de escovas ou outros equipamentos mecânicos, como ocorre nos motores CC. Este aspecto também permite o uso destes equipamentos em ambientes com risco de explosão, pois ao contrário do motor CC não existe o risco de geração de faíscas na comutação. Os motores de indução possuem um custo relativamente mais baixo que os motores CC devido às características construtivas do rotor serem mais simples e também pela construção do motor não necessitar de materiais de custo elevado, como por exemplo imãs permanentes (CHIASSON, 1996). Essas vantagens despertaram um grande interesse pela utilização deste tipo de motor. Contudo, por um grande período de tempo, o uso dos motores de indução ficou restrito às aplicações de velocidade fixa. A evolução dos dispositivos semicondutores de potência que teve início na década de 1970 e a consequente diminuição dos custos viabilizaram a utilização de motores de indução em qualquer regime de operação. A tendência atual é que a máquina de indução passe a substituir a máquina de corrente contínua em praticamente todas as aplicações onde controle de velocidade e/ou torque são exigidos (PEREIRA et al., 2006).

O desenvolvimento de estratégias de acionamento e controle para motores de indução requer o conhecimento do modelo matemático que reproduz o comportamento físico do equipamento. Assim sendo, nesta seção serão apresentadas de forma sucinta as principais características do modelo do motor de indução trifásico. Mais detalhes sobre a modelagem de motores de indução podem ser obtidos em (LEONHARD, 2001; KRAUSE, 2002).

A modelagem matemática dos fenômenos eletromecânicos que descrevem o comportamento do motor de indução é efetuada mediante algumas considerações. Por exemplo, os efeitos de saturação magnética, perdas magnéticas e efeitos não lineares na carga mecânica acoplada ao eixo do rotor são geralmente negligenciados ou incluídos de forma aproximada no modelo do motor. Adicionalmente, leva-se em conta que os enrolamentos do estador e do rotor sejam iguais e representados de forma concatenada em três bobinas defasadas  $120^\circ$ . A distribuição do fluxo magnético no entreferro também é considerada como sendo radial e senoidal. Todas estas medidas introduzem simplificações de modelagem através de restrições dos fenômenos físicos.

Um outro aspecto relevante no que diz respeito à modelagem do motor de indução é a utilização de sistemas de coordenadas em quadratura, o que permite representar o motor através de uma quantidade fixa de equações, independente do número de fases. A metodologia

consiste em representar o motor de indução por dois pares de bobinas, cada par com uma defasagem de  $90^\circ$ . Um dos pares de bobinas representa o estator e o outro o rotor. A complexidade do modelo é reduzida neste sistema de coordenadas. Por exemplo, a dependência não linear da indutância mútua estator-rotor com a posição do rotor é eliminada do modelo. É importante destacar também a redução no número de equações do modelo pelo uso deste sistema de coordenadas. Em situações em que o motor é considerado um sistema trifásico balanceado, é possível descrever o comportamento do motor com cinco equações diferenciais, enquanto que na modelagem tradicional seriam necessárias sete equações. A representação em sistemas de coordenadas em quadratura também oferece vantagens na aplicação de determinadas técnicas de controle do motor de indução.

O modelo da máquina de indução trifásica do tipo gaiola de esquilo na representação em espaço de estados é definido pela seguinte equação

$$\dot{x}(t) = A(x, \omega_s)x(t) + B_u u(t) + B_\nu \nu(t) \quad (6.18)$$

onde  $u(t) = (v_d^s(t) \ v_q^s(t))^T$ ,  $\nu(t) = T_m(t)$  e

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t) \ x_5(t))^T \\ &= (i_d^s(t) \ i_q^s(t) \ \Lambda_d^r(t) \ \Lambda_q^r(t) \ \omega_r(t))^T \\ A(x, \omega_s) &= \begin{bmatrix} -a_1 & \omega_s(t) & a_2 & a_3 x_5(t) & 0 \\ -\omega_s(t) & -a_1 & -a_3 x_5(t) & a_2 & 0 \\ a_5 & 0 & -a_4 & \omega_s(t) - x_5(t) & 0 \\ 0 & a_5 & -(\omega_s(t) - x_5(t)) & -a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_8 x_2(t) & -a_8 x_1(t) & -a_6 \end{bmatrix} \\ B_u &= \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -a_7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Os fluxos no rotor ( $\Lambda^r$ ), as correntes do estator ( $i^s$ ) e as tensões no estator ( $v^s$ ) estão descritos em coordenadas direta e quadratura ( $dq$ ). O sistema de referência empregado neste caso é o síncrono, que possui a característica de transformar, em regime, as variáveis do sistema de coordenadas trifásicas em variáveis contínuas. As constantes das

matrizes do sistema são definidas como

$$a_0 = \frac{L_r}{L_s L_r - L_m^2}, a_1 = a_0 \left( \frac{L_m^2 R_s}{L_r^2} + R_s \right), a_2 = a_0 \frac{L_m R_r}{L_r^2}, a_3 = a_0 \frac{L_m}{L_r}$$

$$a_4 = \frac{R_r}{L_r}, a_5 = \frac{L_m R_r}{L_r}, a_6 = \frac{B_m}{J_m}, a_7 = \frac{p}{J_m}, \quad \text{e} \quad a_8 = a_7 \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r}$$

onde

$R_s$  - resistência do estator;

$L_s$  - indutância do estator;

$R_r$  - resistência do rotor;

$L_r$  - indutância do rotor;

$L_m$  - indutância de magnetização;

$\omega_r$  - velocidade angular elétrica do rotor;

$\omega_s$  - velocidade síncrona do campo do estator;

$p$  - número de pares de polos;

$T_m$  - torque de carga;

$J_m$  - momento de inércia do motor;

$B_m$  - coeficiente de atrito viscoso do motor.

A relação entre  $\omega_r$  e a velocidade angular mecânica do rotor ( $\omega_{rm}$ ) é dada pela equação

$$\omega_{rm} = \frac{\omega_r}{p}. \quad (6.19)$$

A transformação das grandezas do motor trifásico em coordenadas direta e quadratura pode ser feita utilizando duas transformações. Inicialmente, será efetuada a transformação das grandezas trifásicas para o referencial estacionário, ou seja  $ABC$  para  $\alpha\beta$ . Esta operação é obtida através da Transformação de Clarke, cuja equação considerando

amplitude invariante é vista a seguir

$$\begin{pmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_A \\ f_B \\ f_C \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

onde  $f$  representa uma grandeza genérica do motor de indução trifásico.

A Transformação de Park ( $\alpha\beta$  para  $dq$ ) possibilita a representação das grandezas em referenciais girantes, dentre eles o síncrono (que gira na velocidade síncrona), que é utilizado neste trabalho. A Transformação de Park para as variáveis do estator no sistema síncrono é vista a seguir

$$\begin{pmatrix} f_d \\ f_q \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta_s(t) & \sin \delta_s(t) & 0 \\ -\sin \delta_s(t) & \cos \delta_s(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_0 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

sendo

$$\delta_s(t) = \int \omega_s(t) dt. \quad (6.22)$$

O índice 0 representa a componente zero da transformação. Em situações em que o motor é considerado um sistema trifásico equilibrado, a componente zero apresentará valor nulo.

Analisando o modelo da máquina de indução trifásica, é possível verificar que se trata de um sistema que apresenta não linearidades nas dinâmicas das grandezas físicas. Este é um dos aspectos que torna o controle deste sistema uma tarefa complexa. Outro fator que dificulta o controle de motores de indução é que geralmente os fluxos do rotor não são mensuráveis. Sob este aspecto, muitas pesquisas têm sido desenvolvidas com objetivo de projetar estimadores de fluxo para estratégias de controle que necessitem desta informação (SALVATORE; STASI; TARCHIONI, 1993; SALMASI; NAJAFABADI; MARALANI, 2010). Adicionalmente, existe também o problema da variação paramétrica, principalmente da resistência do rotor. Os parâmetros do motor podem mudar de valor sob o efeito da temperatura, da frequência e da saturação (TOLIYAT; LEVI; RAINA, 2003). O desempenho de técnicas de controle baseadas nos valores dos parâmetros do motor pode ser comprometido se a diferença entre os valores utilizados na malha de controle e os valores dos parâmetros do motor em operação for muito significativa.



### 6.4.1 Acionamento de motores de indução

No estudo de caso deste capítulo considera-se que o motor de indução trifásico é alimentado por um inversor de frequência. A denominação inversor de frequência compreende a classe de conversores que transformam as variáveis elétricas de tensão e corrente contínuas em variáveis elétricas de tensão e corrente alteradas, de frequências e amplitudes variáveis. A Figura 23(a) apresenta o diagrama esquemático de um inversor de frequência utilizado para acionamento de uma carga trifásica genérica. Atualmente, o componente eletrônico mais utilizado como chave é o Transistor do tipo Bipolar de Porta Isolada (*Insulated Gate Bipolar Transistor* - IGBT). Em geral, os inversores de frequência são classificados em dois grupos: o Inversor Alimentado por Corrente (*Current Source Inverter* - CSI) e o Inversor Alimentado por Tensão (*Voltage Source Inverter* - VSI), sendo este último grupo o mais utilizado nas aplicações que envolvem variação de frequência (BOSE, 1996). Em termos de aplicações, além do acionamento de motores, o inversor de frequência também pode ser utilizado em Fontes Ininterruptas de Energia (*Uninterruptible Power Supplies* - UPS) (DENG; ORUGANTI; SRINIVASAN, 2005).

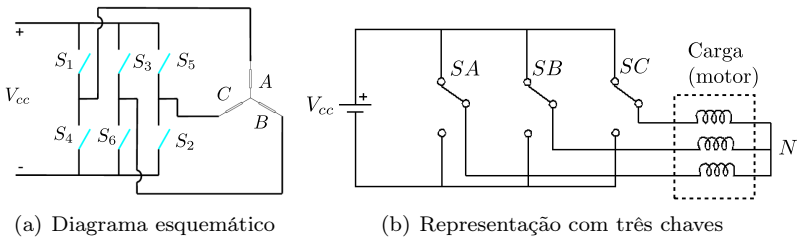


Figura 23 – Acionamento de uma carga trifásica empregando inversor de frequência.

Na análise da Figura 23(a) assume-se que a tensão da fonte de corrente contínua  $V_{cc}$  (elo CC, também conhecido como *link* CC) é fixa e a comutação das chaves seja ideal (instantânea). Também é considerado que o estado das chaves em cada ramo do inversor é complementar, ou seja, se a chave  $S_1$  estiver fechada,  $S_4$  estará aberta. Desta forma é possível simplificar a modelagem do inversor considerando oito situações de chaveamento, conforme visto na Figura 23(b) e cujos modos de operação são mostrados na Tabela 1. Nos modos de operação 1 até 6 a

corrente circula da fonte CC para a carga. Nos modos 0 e 7 a tensão em todas as fases é nula e a corrente circula somente entre as bobinas da carga trifásica. Este fenômeno é chamado de Roda Livre (*free wheeling*, em inglês). Verifica-se que para o caso do inversor trifásico são seis modos distintos com tensão não nula na carga e dois modos redundantes roda-livre, totalizando sete modos distintos. A combinação dos estados das chaves modifica a tensão aplicada na carga trifásica, que no caso de acionamento de motores vai corresponder às bobinas do estator.

Tabela 1 – Estados de operação das chaves do inversor trifásico.

$i$	$SA$	$SB$	$SC$	$V_{AN}$	$V_{BN}$	$V_{CN}$
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	$\frac{2}{3}V_{cc}$	$-\frac{1}{3}V_{cc}$	$-\frac{1}{3}V_{cc}$
2	1	1	0	$\frac{1}{3}V_{cc}$	$\frac{1}{3}V_{cc}$	$-\frac{2}{3}V_{cc}$
3	0	1	0	$-\frac{1}{3}V_{cc}$	$\frac{2}{3}V_{cc}$	$-\frac{1}{3}V_{cc}$
4	0	1	1	$-\frac{2}{3}V_{cc}$	$\frac{1}{3}V_{cc}$	$\frac{1}{3}V_{cc}$
5	0	0	1	$-\frac{1}{3}V_{cc}$	$-\frac{1}{3}V_{cc}$	$\frac{2}{3}V_{cc}$
6	1	0	1	$\frac{1}{3}V_{cc}$	$-\frac{2}{3}V_{cc}$	$\frac{1}{3}V_{cc}$
7	1	1	1	0	0	0

Analisando a Tabela 1, é possível estabelecer uma matriz que relaciona os estados das chaves com os valores nas bobinas do estator

$$\begin{pmatrix} V_{AN} \\ V_{BN} \\ V_{CN} \end{pmatrix} = \frac{V_{cc}}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

onde  $u_j, j = 1, 2, 3$  é um número (0 ou 1) que representa a posição das chaves complementares em cada ramo do inversor.

Utilizando a matriz da equação (6.23) e a Transformação de Clarke (equação (6.20)), é possível estabelecer uma relação entre os

estados das chaves e a tensão no estator em coordenadas  $\alpha\beta$ :

$$\begin{pmatrix} V_{\alpha i} \\ V_{\beta i} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} V_{cc} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_i. \quad (6.24)$$

Com base nas considerações anteriormente vistas, é possível estabelecer sete modos distintos para  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ , o que significa que  $i \in \mathcal{M} := \{1, \dots, m\}$  para  $m = 7$ . Neste caso a componente zero não está sendo incluída no equacionamento pois supõe-se que o motor é um sistema trifásico equilibrado, o que implica em valor nulo para esta componente.

A Transformada de Park (equação (6.21)) pode ser reescrita como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} V_{di} \\ V_{qi} \end{pmatrix}}_{V_{dqi}} = \begin{bmatrix} z_2(t) & z_1(t) \\ -z_1(t) & z_2(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_{\alpha i} \\ V_{\beta i} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} V_{\beta i} & V_{\alpha i} \\ -V_{\alpha i} & V_{\beta i} \end{bmatrix}}_{V_i} \underbrace{\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}}_z \quad (6.25)$$

sendo  $z_1(t) = \text{sen } \delta_s(t)$ ,  $z_2(t) = \text{cos } \delta_s(t)$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ ,  $n_z = 2$ , e neste caso o conjunto limitado fechado  $\mathcal{Z}$  será definido como

$$\mathcal{Z} := \{z : z^T z - 1 = 0\}. \quad (6.26)$$

A dinâmica de  $z$  é dada por

$$\dot{z}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \omega_s(t) \\ -\omega_s(t) & 0 \end{bmatrix}}_{W(\omega_s)} z(t). \quad (6.27)$$

Utilizando as definições apresentadas anteriormente, é possível verificar que

$$\begin{pmatrix} v_d^s(t) \\ v_q^s(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m \theta_i V_{dqi} = \sum_{i=1}^m \theta_i V_i z(t) \quad (6.28)$$

com  $\theta \in \Theta$ .

Finalmente, é possível reescrever a equação (6.18) que representa a dinâmica de um motor de indução trifásico alimentado por um inversor de frequência como um sistema chaveado não linear compostos de

$m = 7$  subsistemas

$$\dot{x}(t) = A(x, \omega_s)x(t) + B_u V_i z(t) + B_\nu T_m(t), \quad i \in \mathcal{M} := \{1, \dots, m\}. \quad (6.29)$$

### 6.4.2 Erro de seguimento

A partir deste ponto, o problema consiste em projetar uma lei de chaveamento,  $\sigma(x(t), z(t))$ , que conduza assintoticamente os estados do sistema chaveado não linear (6.29) para uma determinada referência constante  $\bar{x}$  para todo  $z \in \mathcal{Z}$ . A dinâmica de (6.29) também pode ser reescrita utilizando o erro de seguimento definido em (3.4)

$$\dot{e}(t) = F(e, \omega_s)e(t) + h_i(t) \quad (6.30)$$

sendo

$$h_i(t) = h_0(t) + B_u V_i z(t), \quad h_0(t) = \tilde{A}(\omega_s) \bar{x} + B_\nu T_m(t) \quad (6.31)$$

e

$$\tilde{A}(\omega_s) = \begin{bmatrix} -a_1 & \omega_s(t) & a_2 & a_3 \bar{x}_5 & 0 \\ -\omega_s(t) & -a_1 & -a_3 \bar{x}_5 & a_2 & 0 \\ a_5 & 0 & -a_4 & \omega_s(t) - \bar{x}_5 & 0 \\ 0 & a_5 & -(\omega_s(t) - \bar{x}_5) & -a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_8 \bar{x}_2 & -a_8 \bar{x}_1 & -a_6 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

$$F(e, \omega_s) = \tilde{A}(\omega_s) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_3 e_5(t) & a_3 \bar{x}_4 \\ 0 & 0 & -a_3 e_5(t) & 0 & -a_3 \bar{x}_3 \\ 0 & 0 & 0 & -e_5(t) & -\bar{x}_4 \\ 0 & 0 & e_5(t) & 0 & \bar{x}_3 \\ -a_8 \bar{x}_4 & a_8 \bar{x}_3 & a_8 e_2(t) & -a_8 e_1(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

sendo  $e_j(t)$ ,  $\bar{x}_j$ ,  $j \in \{1, \dots, 5\}$  os elementos de  $e(t)$  e  $\bar{x}$ , respectivamente.

Assim, o problema será reformulado como sendo projetar uma lei de chaveamento  $\sigma(e(t), z(t))$  de forma que o equilíbrio  $e(t) = 0$  seja atingido localmente (ou globalmente) para todo  $z \in \mathcal{Z}$ . Considera-se também nesta aplicação que a dinâmica do erro de seguimento em

modo deslizante pode ser representada por

$$\dot{e}(t) = \sum_{i \in \sigma(e(t), z(t))} \theta_i(t) \{F(e, \omega_s)e(t) + h_i(t)\}, \quad \theta(t) \in \Theta \quad (6.34)$$

onde  $\Theta$  é o simplex unitário descrito em (3.7) e  $\theta(t)$  é um vetor com elementos  $\theta_i(t)$  definidos de acordo com Filippov (1988, p.50).

O seguinte lema estabelece a condição necessária para que a origem seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (6.34) para todo  $z \in \mathcal{Z}$ .

**Lema 6.2** *A origem é um ponto de equilíbrio de (6.34) somente se existir  $\bar{\theta}(t) \in \Theta$  tal que*

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(t) h_i(t) = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(t) B_u V_i z(t) + h_0(t) = 0, \quad \forall z(t) \in \mathcal{Z}. \quad (6.35)$$

□

**Prova 6.3** *Substitua  $\dot{e} = e = 0$  em (6.34). □*

**Observação 6.1** *Analisando a expressão (6.33) que define  $F(e, \omega_s)$ , é possível verificar que a matriz de dinâmica não depende do chaveamento. Além disso, a representação desta matriz não é única e pode mudar de acordo com a escolha dos elementos de  $e(t)$  dos quais a matriz será função. Por exemplo, a seguinte equação também representa a matriz de dinâmica do modelo do motor de indução*

$$F(e, \omega_s) = \tilde{A}(\omega_s) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_3(\bar{x}_4 + e_4(t)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3(\bar{x}_3 + e_3(t)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\bar{x}_4 + e_4(t)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{x}_3 + e_3(t) \\ -a_8(\bar{x}_4 + e_4(t)) & a_8(\bar{x}_3 + e_3(t)) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

*Para este caso particular é possível representar  $F(e(t), \omega_s(t))$  em 64 formas distintas. Esta característica será utilizada na descrição da metodologia de projeto da lei de chaveamento, o que será visto na sequência.*

□

**Observação 6.2** *Comparando as condições do Lema 6.2 com o Lema 3.1 verifica-se que nesta aplicação os elementos de  $\bar{\theta}$  não são constantes no equilíbrio e dependem do tempo. De fato, para o caso do motor*

de indução alimentado por um inversor de frequência o equilíbrio será atingido para

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_d^s \\ \bar{v}_q^s \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(t) V_i z(t) \quad (6.37)$$

sendo  $\bar{v}_d^s$  e  $\bar{v}_q^s$  os valores dq das tensões no estator no equilíbrio ( $x(t) = \bar{x}$ ). Assim, o chaveamento vai acionar as chaves do inversor de forma a produzir uma tensão senoidal trifásica nas bobinas do estator tendo em vista que  $z(t)$  também é uma variável senoidal.  $\square$

## 6.5 CONDIÇÕES LMI PARA O PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO

Muitas estratégias de controle têm sido aplicadas com sucesso em motores de indução acionados por inversores. O controle escalar (também conhecido como tensão/frequência ou V/f) é uma das estratégias de controle mais simples e de menor custo disponível. Esta metodologia de controle parte do princípio de que é possível controlar, com um determinado grau de precisão, a velocidade do rotor a partir do controle da frequência elétrica no estator (KRAUSE, 2002).

O controle vetorial ou por orientação de campo é uma técnica que permite controlar o fluxo e o torque do motor de indução de forma semelhante ao que é feito em motores CC. Um motor de indução possui um grau de complexidade de controle muito maior que um motor CC. Além da tensão do estator variar em amplitude, frequência e fase, existe um intrincado acoplamento entre as entradas de controle e os estados internos para gerar o torque eletromagnético (GABRIEL; LEONARD; NORDBY, 1980). Apesar deste grau de complexidade, foi demonstrado por Blaschke (1972) que utilizando o princípio da orientação de campo estes problemas podem ser simplificados.

Uma outra metodologia para controle de motores de indução é o Controle Direto de Torque (*Direct Torque Control* - DTC) (TAKAHASHI; NOGUCHI, 1986). A estratégia de controle DTC consiste em manipular o vetor do fluxo do estator de forma a produzir o torque desejado no motor de indução. A geração deste vetor de fluxo é feita através da escolha da combinação das chaves do inversor de frequência, que aplica as tensões apropriadas nas bobinas do estator. A escolha dos estados das chaves usualmente é feita através de uma tabela de chaveamento pré-determinada.

Nesta seção será proposta uma metodologia para projeto de uma nova estratégia de chaveamento para motores de indução. Esta metodologia distingui-se das técnicas de controle vetorial, onde o acionamento e o controle é tratado de forma separada, e aproxima-se da filosofia do DTC, onde o sinal de erro das grandezas controladas define diretamente os estados da chave do inversor. Com relação ao DTC, os avanços que foram obtidos até então consistem basicamente em melhorar o projeto da tabela de chaveamento com o objetivo de minimizar algumas desvantagens, como o alto nível de oscilação (*ripple*) das correntes e do torque (PAPAFOTIOU; GEYER; MORARI, 2007). Neste cenário, acredita-se que o desenvolvimento de uma nova metodologia de chaveamento para acionamento e controle de motores pode contribuir na elaboração de uma técnica alternativa sem a dependência de uma tabela para escolha dos estados das chaves.

A metodologia está sendo proposta sob algumas premissas. Conforme citado anteriormente, em aplicações práticas envolvendo motores somente as correntes do estator e a velocidade ou posição do rotor estão disponíveis para medição. Vários trabalhos têm sido desenvolvidos utilizando diferentes técnicas para lidar com este problema, sendo a medida mais comum a utilização de estimadores para calcular o valor do fluxo do rotor com base nas outras grandezas disponíveis. Mais informações podem ser vistas em (SALVATORE; STASI; TARCHIONI, 1993; SALMASI; NAJAFABADI; MARALANI, 2010). Desta forma, a abordagem do problema de estimação do fluxo no rotor está fora do escopo deste trabalho e os resultados são baseados na premissa de que o vetor de estados  $x(t)$  encontra-se disponível.

Uma outra consideração refere-se ao torque de carga. As cargas mecânicas que são acionadas por motores de indução impõem dois tipos de torque ao motor, o torque resistente e o torque de arraste. O torque resistente opõe-se ao movimento do motor em qualquer sentido de rotação. Por outro lado, o torque de arraste favorece o movimento em qualquer sentido de rotação. As cargas mecânicas têm comportamentos diferentes quanto ao torque resistente que oferecem aos motores elétricos e podem ser classificadas conforme a relação entre o torque e a velocidade mecânica do rotor. Os principais tipos de carga são: constante, linear e quadrática (CAO; COLLINS, 2002). Nesta abordagem supõe-se que o torque de carga seja constante e conhecido, ou seja  $T_m(t) = T_m$ . Alguns exemplos deste tipo de carga são: esteiras transportadoras contínuas, pontes rolantes, guinchos, máquinas extrusoras e compressores de parafuso.

Dentro da premissa que o torque de carga seja constante e co-

nhecido, é possível determinar um valor constante para a velocidade síncrona do estator, ou seja  $\omega_s(t) = \omega_s$ . Para esta aplicação, deseja-se impor um valor específico para a velocidade do rotor ( $\bar{\omega}_r = \bar{x}_5$ ) e para as componentes do fluxo do rotor ( $\bar{\Lambda}_d^r = \bar{x}_3$ ,  $\bar{\Lambda}_q^r = \bar{x}_4$ ). De forma a satisfazer a condição do Lema 6.2, é possível calcular os valores de equilíbrio de  $\bar{i}_d^s$ ,  $\bar{i}_q^s$  e o valor desejado para  $\omega_s$

$$\omega_s = \frac{a_5(a_6\bar{x}_5 + a_7T_m)}{a_8(\bar{x}_3^2 + \bar{x}_4^2)} + \bar{x}_5 \quad (6.38)$$

$$\bar{i}_d^s = \bar{x}_1 = \frac{a_4\bar{x}_3 - (\omega_s - \bar{x}_5)\bar{x}_4}{a_5} \quad (6.39)$$

$$\bar{i}_q^s = \bar{x}_2 = \frac{a_4\bar{x}_4 + (\omega_s - \bar{x}_5)\bar{x}_3}{a_5}. \quad (6.40)$$

As funções auxiliares  $v_i(e(t), z(t)) \in \mathcal{C}^1$ ,  $i \in \mathcal{M}$  de (6.9) consideradas neste problema possuem a seguinte estrutura particular

$$v_i(e(t), z(t)) = e(t)^T P(e(t))e(t) + 2e(t)^T S_i(z(t)) \quad (6.41)$$

onde

$$P(e(t)) := P_0 + \sum_{j=1}^5 P_j e_j(t), \quad S_i(z(t)) := Th_i(z(t)) \quad (6.42)$$

sendo  $e_j(t)$ ,  $j \in \{1, \dots, 5\}$  os elementos de  $e(t)$ .

Considerando a escolha efetuada para as funções auxiliares, pode-se verificar que

$$\begin{aligned} V(e(t), z(t)) &= \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t), z(t))\} = e(t)^T P(e(t))e(t) \\ &\quad + \max_{i \in \mathcal{M}} \{2e(t)^T Th_i(z(t))\} \quad (6.43) \end{aligned}$$

e assim a lei de chaveamento definida em (6.9) para este caso será

$$\sigma(e(t), z(t)) = \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t), z(t))\} = \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{2e(t)^T Th_i(z(t))\}.$$

Comparando as equações (6.41) e (4.3), é possível verificar que houve um aumento na complexidade na estrutura das funções auxiliares. A escolha acima foi efetuada com o objetivo de tentar reduzir o conservadorismo do problema. É importante ressaltar que para esta



estrutura particular de  $v_i(e(t), z(t))$

$$\begin{aligned}\dot{v}_i(e(t), z(t)) &= \frac{\partial}{\partial e} v_i(e(t), z(t)) \dot{e}(t) + \frac{\partial}{\partial t} v_i(e(t), z(t)) \\ &= \nabla v_i(e(t), z(t)) \dot{e}(t) + 2e(t)^T \dot{S}_i(z(t)).\end{aligned}$$

Tendo como base as condições do Teorema 6.1 vistas anteriormente e considerando as funções auxiliares de (6.9) com a estrutura particular vista em (6.41), é possível estabelecer o seguinte teorema para o projeto de lei de chaveamento para motores de indução acionados por inversores de frequência.

**Teorema 6.2** *Seja  $\bar{x}$  um dado vetor constante representando o equilíbrio desejado para o sistema chaveado não linear (6.29) que representa a dinâmica de um motor de indução acionado por um inversor de frequência. Suponha que o estado  $x$  possa ser medido e/ou corretamente estimado. Considere o sistema (6.30) cujo estado é o erro de seguimento com carga constante e conhecida. Assuma que exista  $\bar{\theta}(t) \in \Theta$  definido de acordo com o Lema 6.2. Seja  $\mathcal{X}$  um politopo que define uma vizinhança da origem do erro de seguimento e  $L_a, L_b$  matrizes a serem determinadas com as dimensões de  $\aleph_e^T$  e  $N_b(e)^T$ , respectivamente, sendo*

$$N_b(e) = \begin{bmatrix} 0_{(r \times n)} & \aleph_e & 0_{(r \times n_z)} \\ -I_n & F_a(e) & 0_{(n \times n_z)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -I_n & F_z(e) & 0_{(n \times n_z)} \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

com o anulador linear  $\aleph_e \in \mathbb{R}^{r \times n}$  obtido de acordo com a Definição 4.1 e sendo  $F_a(e), \dots, F_z(e)$  as múltiplas representações da matriz dinâmica  $F(e)$ , conforme visto na Observação 6.1. Sejam as constantes  $\alpha(e) > 0$  dadas e escolhidas conforme as orientações da Observação 4.2 para cada vértice de  $\mathcal{X}$ .

Suponha que existam matrizes  $L_a, L_b, T, P_0$  e  $P_j, j \in \{1, \dots, 5\}$  que resolvam o seguinte problema LMI

$$P(e) + L_a \aleph_e + \aleph_e^T L_a^T > 0, \quad \forall e \in \vartheta(\mathcal{X}) \quad (6.45)$$

$$\Psi(e) + L_b N_b(e) + N_b(e)^T L_b^T < 0, \quad \forall e \in \vartheta(\mathcal{X}) \quad (6.46)$$

sendo  $\vartheta(\mathcal{X})$  o conjunto de todos os vértices do politopo  $\mathcal{X}$ ,

$$\Psi(e) = \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ P(e) + 0,5 \sum_{j=1}^5 P_j e C_j & 0 & \star \\ B_u^T T^T & \Psi_{32}(e) & B_u^T (T + T^T) B_u \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

com  $C_j, j \in \{1, \dots, 5\}$  vetores auxiliares, tais que  $C_j x = x_j$ ,

$$\Psi_{32}(e) = B_u^T P(e) + 2\alpha(e) B_u^T T^T + 0,5 B_u^T \left[ \sum_{j=1}^5 P_j e C_j \right]^T + [T B_u W]^T. \quad (6.48)$$

Então a origem de (6.34) sob efeito da lei de chaveamento (6.9) com funções auxiliares de (6.41) é localmente assintoticamente estável e (6.43) é uma função de Lyapunov para o sistema em malha fechada (6.34), (6.9).  $\square$

**Prova 6.4** Inicialmente, será demonstrado que a escolha particular de  $v_i(e(t), z(t))$  para esta aplicação atende à condição (6.6) do Teorema 6.1. Considerando as funções auxiliares em (6.41) e pela condição do Lema 6.2

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(z(t)) S_i(z(t)) = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(z(t)) T h_i(z(t)) = 0, \forall z \in \mathcal{Z}. \quad (6.49)$$

Logo, para  $\theta(e(t), z(t)) = \bar{\theta}(z(t))$ , tem-se

$$\bar{V}(e(t)) = \sum_{i \in \mathcal{M}} \bar{\theta}_i(z(t)) v_i(e(t), z(t)) = e(t)^T P(e(t)) e(t)$$

e desta forma

$$V(e(t), z(t)) = \max_{\theta \in \Theta} \sum_{i \in \mathcal{M}} \theta_i v_i(e(t), z(t)) \geq \bar{V}(e(t)), \forall e, \forall z \in \mathcal{Z}. \quad (6.50)$$

O próximo passo é verificar a existência de funções positivas definidas que sejam limitantes superiores e inferiores para  $V(e(t), z(t))$ . Primeiramente, note que a constante abaixo será positiva em virtude

de (6.45)

$$\epsilon_1 = \min_{e \in \mathcal{X}} \lambda_{\min}(P(e) + L_a \aleph_e + \aleph_e^T L_a^T).$$

Pré e pós multiplicando a condição (6.45) pelo erro de seguimento e sabendo que  $\aleph_e e = 0$ , obtém-se a expressão que representa  $\bar{V}(e(t))$ . Sob estes argumentos e considerando a equação (6.50), é possível estabelecer uma função positiva definida que é um limitante inferior de  $V(e(t), z(t))$

$$V(e(t), z(t)) \geq \bar{V}(e(t)) \geq \epsilon_1 \|e(t)\|^2, \quad \forall e \in \mathcal{X}, \quad \forall z \in \mathcal{Z}.$$

Adicionalmente,  $v_i(e(t), z(t)) \leq \beta_i(\|e(t)\|)$  sendo

$$\begin{aligned} \beta_i(\|e(t)\|) := & \|P_0\| \|e(t)\|^2 + \max_{j \in \mathcal{N}} \{\|P_j\|\} \sum_{k=1}^5 |e_k| \|e(t)\|^2 \\ & + 2\|e(t)\| \|T\| \|h_0\| + 2\|e(t)\| \|T\| \|B_u\| \|V_i\| \end{aligned}$$

onde  $j \in \mathcal{N} := \{1, \dots, 5\}$ . Desta forma é possível demonstrar que

$$\max_{i \in \mathcal{M}} \{\beta_i(\|e(t)\|)\} \geq V(e(t), z(t)) \geq \bar{V}(e(t)) \geq \epsilon_1 \|e(t)\|^2 \quad (6.51)$$

$\forall e \in \mathcal{X}, \quad \forall z \in \mathcal{Z}$ . Assim, a condição (6.6) do Teorema 6.1 está sendo atendida por (6.45) para a escolha particular de  $v_i(e(t), z(t))$ , sendo as funções contínuas positivas definidas  $\phi_1(e(t)) = \epsilon_1 \|e(t)\|^2$  e  $\phi_2(e(t)) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{\beta_i(\|e(t)\|)\}$ .

Com relação à condição (6.7), como a matriz de dinâmica  $F(e(t))$  não depende do chaveamento, será considerado  $\alpha_i(e) = \alpha(e) > 0$ , o que implica em  $\alpha(e, \theta) = \alpha(e) > 0$ .

Na sequência, serão apresentados os passos para obtenção da equação (6.46) e também a demonstração que a mesma atende à condição (6.8) do Teorema 6.1. Inicialmente, considerando a função auxiliar definida em (6.41) e o sistema do erro de seguimento em (6.30) com torque de carga constante e conhecido ( $T_m(t) = T_m$ ), é possível rees-

crever o lado esquerdo da condição (6.8) do Teorema 6.1 como

$$\begin{aligned}
 M(e, z, \theta) &= \sum_{i \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{M}} \theta_i \theta_j \nabla v_i(e, z)^T (F(e)e + h_j(z)) + g_i(e, z) \\
 &\quad + 2\alpha(e)(\theta_i - \bar{\theta}_i(z))v_i(e, z) \\
 &= 2\dot{e}(t)^T (P(e)e(t) + TH_\theta(z)) + e(t)^T \dot{P}(e)e(t) \\
 &\quad + 2e(t)^T T (H_\theta(z) + \dot{H}_\theta(z))
 \end{aligned} \tag{6.52}$$

sendo

$$H_\theta(z) := \sum_{i=1}^m \theta_i h_i(z), \quad \dot{H}_\theta(z) = TB_u V_\theta W z, \quad V_\theta := \sum_{i=1}^m \theta_i V_i$$

com  $W$  definido em (6.27). Tendo em vista que

$$e(t)^T \dot{P}(e)e(t) = e(t)^T \sum_{j=1}^5 P_j \dot{e}_j(t)e(t) = e(t)^T \sum_{j=1}^5 P_j e(t) C_j \dot{e}(t)$$

é possível reescrever (6.52) como

$$M(e, z, \theta) = \begin{pmatrix} e(t) \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11}(e) & M_{12}(e, z, \theta) \\ \star & 2H_\theta^T(z)TH_\theta(z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.53}$$

onde

$$\begin{aligned}
 M_{11}(e) &= F(e)^T P(e) + P(e)^T F(e) + \sum_{j=1}^5 P_j e C_j F(e) \\
 M_{12}(e, z, \theta) &= P(e)^T H_\theta(z) + F(e)^T T H_\theta(z) + 2\alpha(e) T H_\theta(z) \\
 &\quad + 0,5 \sum_{j=1}^5 P_j e C_j H_\theta(z) + TB_u V_\theta W z.
 \end{aligned}$$

Neste ponto o desafio consiste em descrever a expressão em (6.53) como um problema convexo. Vários métodos podem ser aplicados para atingir este objetivo. Os procedimentos utilizados neste trabalho serão demonstrados na sequência. Redefinido a dinâmica do erro de seguimento em (6.34) como

$$\dot{e}(t) = F(e)e(t) + H_\theta(z(t)) = \xi(e(t)) + H_\theta(z(t)) \tag{6.54}$$

é possível reescrever  $M(e, z, \theta)$  como

$$M(e, z, \theta) = \begin{pmatrix} \xi \\ e \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ M_{21}(e) & 0 & \star \\ H_\theta^T(z)T^T & M_{32}(e, z, \theta) & 2H_\theta^T(z)TH_\theta(z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ e \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.55)$$

com

$$M_{21}(e) = P(e) + 0,5 \sum_{j=1}^5 P_j e C_j$$

$$\begin{aligned} M_{32}(e, z, \theta) &= H_\theta^T(z)P(e) + 2\alpha(e)H_\theta^T(z)T^T \\ &+ 0,5 \left[ \sum_{j=1}^5 P_j e C_j H_\theta(z) \right]^T + [TB_u V_\theta W z]^T. \end{aligned}$$

Depois, sabendo que  $H_{\bar{\theta}}(z(t)) = 0, \forall z \in \mathcal{Z}$  pela condição do Lema 6.2, é possível descrever  $H_\theta(z(t))$  como

$$\begin{aligned} H_\theta(z) &= H_\theta(z) - H_{\bar{\theta}}(z) = h_0 + \sum_{i=1}^m \theta_i B_u V_i z - (h_0 + \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(z) B_u V_i z) \\ &= B_u \sum_{i=1}^m (\theta_i - \bar{\theta}_i(z)) V_i z(t) = B_u V_{\Delta\theta} z(t). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Utilizando argumentos semelhantes para  $\dot{S}_\theta(z(t)) = T\dot{H}_\theta(z(t))$  e sabendo que  $V_\theta W = W V_\theta$

$$\begin{aligned} \dot{H}_\theta(z) &= \dot{H}_\theta(z) - \dot{H}_{\bar{\theta}}(z) = \sum_{i=1}^m \theta_i B_u W V_i z - \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(z) B_u W V_i z \\ &= B_u W \sum_{i=1}^m (\theta_i - \bar{\theta}_i(z)) V_i z(t) \\ &= B_u W V_{\Delta\theta} z(t). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Finalmente, é possível reescrever (6.55) como

$$M(e, z, \theta) = \pi_a^T \Psi(e) \pi_a \quad (6.58)$$

sendo  $\pi_a = (\xi(e(t)) \quad e(t) \quad V_{\Delta\theta} z(t))^T$ .

Como as condições de projeto são expressas através de LMIs dependentes do estado (erro de seguimento), uma forma de reduzir o conservadorismo dessas desigualdades é através do uso do Lema de Finsler (Lema 4.1) em conjunto com a ideia de anuladores (Definição 4.1), como proposto em Trofino e Dezuo (2011) para o caso de sistemas não lineares racionais sem chaveamento. Aplicando o Lema de Finsler em (6.58) é possível inserir a matriz  $N_b(e)$  que contém os anuladores lineares, obtendo assim a LMI em (6.46).

Na sequência será demonstrado que a LMI (6.46) é uma condição suficiente para (6.8) do Teorema 6.1. Os argumentos serão similares à demonstração da função limitante inferior de  $V(e(t), z(t))$ . Defina a seguinte constante, que é positiva pela LMI (6.46)

$$\epsilon_3 = \min_{e \in \mathcal{X}} \lambda_{\min} \left( - \left( \Psi(e) + L_b N_b(e) + N_b(e)^T L_b^T \right) \right).$$

Pré e pós multiplicando a condição (6.46) por  $\pi_a$  e sabendo que  $N_b(e) \pi_a = 0$ , é possível obter a seguinte condição

$$M(e, z, \theta) = \pi_a^T \Psi(e) \pi_a \leq -\epsilon_3 \|\pi_a\|^2.$$

Como  $\|\pi_a\|^2 = \|\xi\|^2 + \|e\|^2 + \|V_{\Delta\theta} z\|^2$ , é possível verificar que  $\|\pi_a\|^2 \geq \|e\|^2$ , o que por sua vez implica

$$M(e, z, \theta) \leq -\epsilon_3 \|e\|^2, \quad \forall e \in \mathcal{X}.$$

Assim, é possível concluir que a LMI (6.46) é uma condição suficiente para (6.8) do Teorema 6.1 sendo  $\phi_3(e) = \epsilon_3 \|e\|^2 > 0, \forall e \in \mathcal{X} - \{0\}$ .  
□

## 6.6 EXEMPLO NUMÉRICO

**Exemplo 6.1** Considere um motor de indução trifásico alimentado por um inversor de frequência. O valor de  $V_{cc}$  nesta aplicação é 350 V. Os parâmetros do motor são apresentados na Tabela 2 e foram obtidos com base em uma máquina de indução trifásica vista em (SPILLER; HAFFNER; PEREIRA, 2002).

Tabela 2 – Exemplo 6.1: parâmetros do motor de indução trifásico.

Parâmetro	Valor
$R_s$	14,50 $\Omega$
$R_r$	15,60 $\Omega$
$L_s$	0,72 H
$L_r$	0,72 H
$L_m$	0,6738 H
$B_m$	$1,00 \times 10^{-5} \text{N.m/rad.s}^{-1}$
$J_m$	$7,60 \times 10^{-4} \text{kg/m}^2$
$p$	2

Para este caso particular o objetivo é impor um valor específico para a velocidade no rotor ( $\bar{\omega}_r = \bar{x}_5$ ) e para as componentes do fluxo do rotor ( $\bar{\Lambda}_d^r = \bar{x}_3$ ,  $\bar{\Lambda}_q^r = \bar{x}_4$ ) para um dado valor de carga constante e conhecido. Os valores numéricos considerados foram  $\bar{x}_3 = \bar{x}_4 = 0,3 \text{Wb}$ ,  $\bar{x}_5 = 377 \text{rad/s}$  e  $T_m = 1 \text{N.m}$ . Utilizando as equações (6.38)-(6.40) obtém-se  $\omega_s = 405,9471 \text{rad/s}$ ,  $\bar{x}_1 = -0,1494 \text{A}$  e  $\bar{x}_2 = 1,0399 \text{A}$ .

Resolvendo as LMIs do Teorema 6.2 foi possível obter a matriz  $T$  que define a lei de chaveamento (6.9), cujo valor numérico pode ser visto no Apêndice A.3.1. Para esta aplicação em particular os resultados foram obtidos para o seguinte politopo

$$\mathcal{X} = \{e : -5,85 \leq e_1 \leq 6,15, -7,04 \leq e_2 \leq 4,96, -0,7 \leq e_3 \leq 0,1, -0,7 \leq e_4 \leq 0,1, -417 \leq e_5 \leq 13\}.$$

A Figura 24 apresenta os resultados de simulação para condições iniciais nulas. Observa-se que todos os sinais de erro convergem para zero, o que significa que em regime os valores desejados para corrente no estator, fluxo no rotor e velocidade no rotor estão sendo impostos no motor mesmo com a máquina operando sob carga não nula. Com o objetivo de demonstrar a correta geração das tensões e das correntes senoidais nas bobinas do estator do motor, as Figuras 25 e 26 apresentam, respectivamente, os resultados de simulação das tensões e da corrente em uma das fases no estator.  $\square$

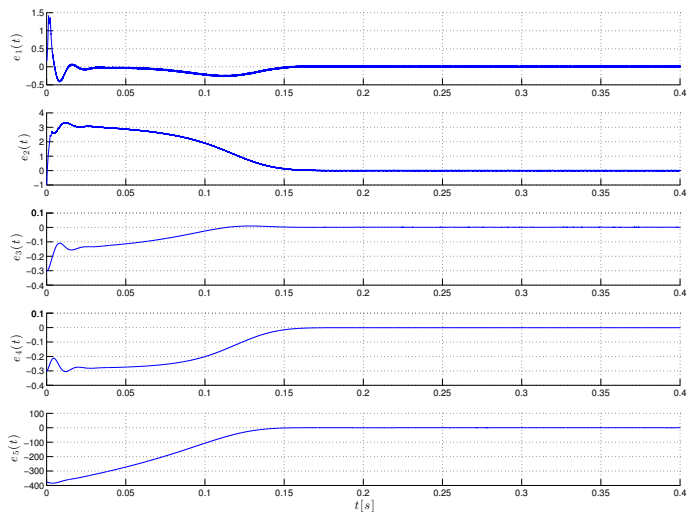


Figura 24 – Exemplo 6.1: erro de seguimento para as grandezas físicas do motor de indução.

## 6.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo apresentou o projeto de lei de chaveamento para sistemas chaveados não lineares. Inicialmente foram estabelecidas as condições de projeto, vistas no Teorema 6.1. Estas condições correspondem à extensão dos resultados apresentados nos capítulos anteriores onde o caso de sistemas chaveados afins foi considerado. Na sequência, o estudo foi particularizado para a aplicação de motores de indução trifásicos acionados por inversores de frequência. Depois, uma metodologia para projeto de uma nova estratégia de chaveamento para motores de indução foi proposta. Esta metodologia é descrita pelo conjunto de LMIs apresentadas no Teorema 6.2. A utilização do método proposto foi ilustrada através dos resultados do Exemplo 6.1.

A metodologia de projeto para a aplicação de motores de indução trifásicos acionados por inversores foi obtida sob as premissas que o vetor de estados encontra-se disponível e que o torque de carga seja constante e conhecido. Desta forma, uma sugestão para trabalhos futu-



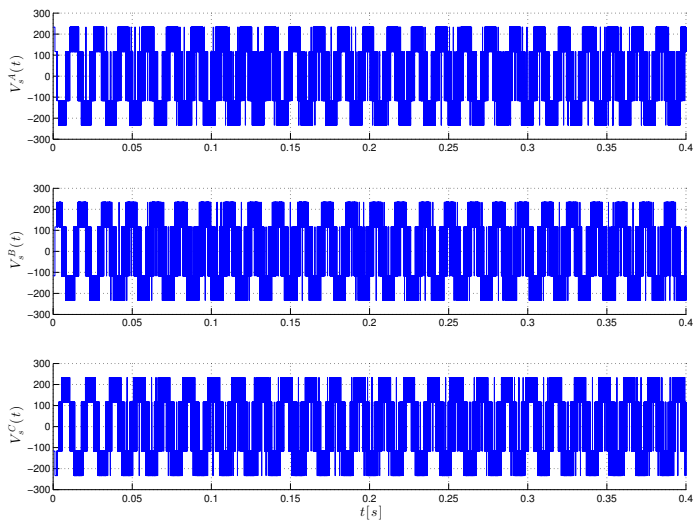


Figura 25 – Exemplo 6.1: resultados de simulação das tensões do estator.

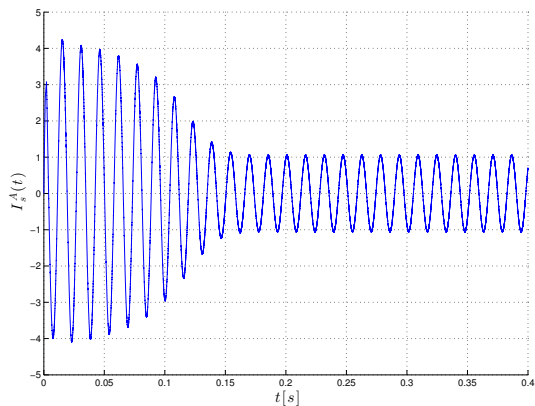


Figura 26 – Exemplo 6.1: resultados de simulação da corrente em uma das fases do estator.

ros seria modificar os resultados permitindo que o projeto da lei de chaveamento possa ser efetuado considerando o torque de carga como um parâmetro incerto. Essa mesma abordagem poderia ser aplicada para o problema da variação paramétrica, principalmente da resistência do rotor. Um outro aspecto a ser melhorado nesta aplicação seria verificar formas de implementar a estratégia de chaveamento sem a necessidade da informação dos fluxos do rotor, tendo em vista que em aplicações práticas geralmente estas grandezas não são mensuráveis. Adicionalmente, pode-se verificar que as condições do Teorema 6.2 dependem da escolha dos limites do politopo  $\mathcal{X}$ . Assim, uma outra sugestão para aperfeiçoamento da metodologia seria modificar os resultados do Teorema 6.2 buscando reduzir o conservadorismo e permitir a obtenção de solução das LMIs para politopos com limites maiores, ou ainda elaborar técnicas que permitam estimar a região de convergência para um motor em particular.

O próximo capítulo dá continuidade à aplicação das condições de projeto para o caso de sistemas chaveados não lineares. A próxima aplicação a ser considerada é a utilização de inversores em sistemas de geração de energia eólica.

## 7 METODOLOGIA DE PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO PARA APLICAÇÕES DE GERADORES EÓLICOS

### 7.1 INTRODUÇÃO

As condições de projeto de uma lei de chaveamento para estabilização de um sistema chaveado não linear também serão abordadas neste capítulo. Porém, o enfoque nesta parte do trabalho será em sistemas de geração de energia elétrica que utilizam a potência disponível nos ventos. A utilização de fontes de energia renováveis, como a energia eólica, pode contribuir na redução da dependência de combustíveis fósseis. Estima-se que a potência continuamente disponível nos ventos que circulam pela Terra pode chegar a 10 milhões de MW. Estes fatores têm despertado o interesse em pesquisas envolvendo o desenvolvimento de novas tecnologias de conversores de potência que permitam a integração dos geradores eólicos com a rede elétrica. O uso de conversores nesta aplicação permite a operação das turbinas eólicas com velocidade variável, que possuem uma eficiência energética superior em comparação com as turbinas que operam com velocidade fixa (BAROUDI; DINAHAHI; KNIGHT, 2007).

O capítulo está estruturado da seguinte maneira: inicialmente será efetuada a descrição da topologia de sistema de geração de energia eólica que será considerada neste estudo de caso. Na sequência serão apresentadas as principais características e os modelos matemáticos de cada parte do sistema de geração. Com base nos modelos e utilizando resultados já vistos nos capítulos anteriores, serão estabelecidas condições LMIs que compõem uma metodologia para projeto de uma nova estratégia de chaveamento para sistemas de geração eólica que empregam conversores de potência. Um exemplo numérico será utilizado para ilustrar os resultados obtidos.

### 7.2 GERADOR DE INDUÇÃO DE DUPLA ALIMENTAÇÃO

Nesta seção serão vistas as principais características do gerador de indução de dupla alimentação, conhecido pela sigla DFIG, e sua utilização em sistemas de geração de energia eólica com conexão na rede elétrica e com a turbina operando com velocidade variável. O estudo será particularizado para esta topologia, no entanto existem outras

configurações de geradores e conversores que podem ser empregadas. Maiores informações sobre este tópico podem ser obtidas em (HANSEN et al., 2001; NICOLAS et al., 2002; BAROUDI; DINAVAH; KNIGHT, 2007).

A Figura 27 (TARNOWSKI; REGINATTO, 2007) mostra um diagrama esquemático da conexão de um DFIG à um sistema elétrico. Analisando esta figura, verifica-se que nesta topologia os enrolamentos do estator são conectados diretamente na rede elétrica e os enrolamentos do rotor, composto por bobinas, são ligados na rede através de um conversor estático de potência do tipo *back-to-back*.

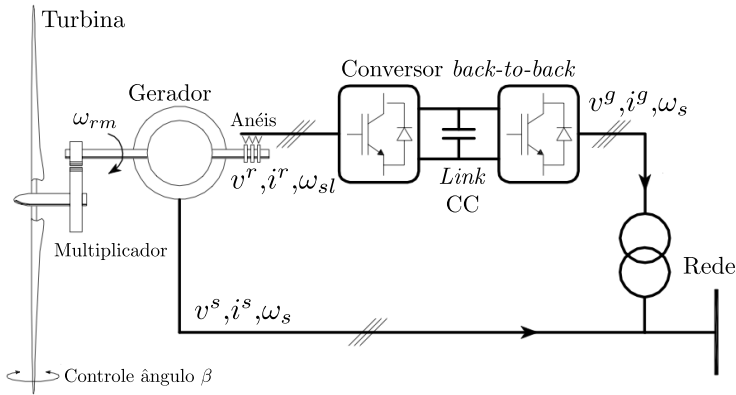


Figura 27 – Diagrama esquemático de conexão do DFIG ao sistema elétrico.

O conversor *back-to-back* alimentado por tensão e com chaveamento PWM tem sido amplamente utilizado para conexão de aerogeradores à rede elétrica (HANSEN et al., 2001). Este tipo de conversor é composto basicamente por dois inversores de frequência que compartilham o mesmo *link* CC. A Figura 28 mostra a estrutura básica de um conversor *back-to-back*. Nesta aplicação, os terminais de um dos inversores são ligados ao rotor do gerador (RSC - *Rotor Side Converter*) e o outro inversor é conectado à rede elétrica (GSC - *Grid Side Converter*). Os dois circuitos podem operar no modo retificador e/ou inversor. Assim, é possível a transferência de potência ativa do gerador para a rede e vice-versa. O fato de existir um *link* CC em comum permite o desacoplamento das frequências e das potências reativas das duas tensões. Isso significa que o inversor conectado ao gerador pode tanto absorver quanto fornecer potência reativa ao gerador enquanto o

inversor interligado à rede pode operar com fator de potência unitário, ou seja, potência reativa nula.

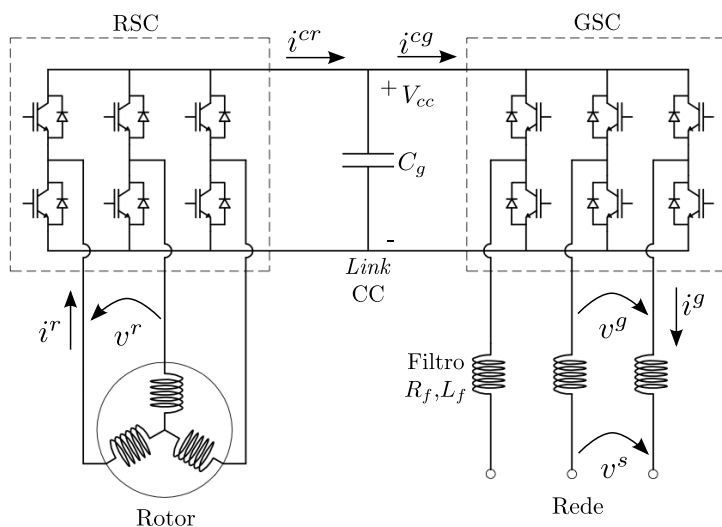


Figura 28 – Circuito básico de um conversor estático de potência do tipo *back-to-back*.

O DFIG apresenta vantagens em comparação com as demais topologias. Por exemplo, o custo do conversor é menor, tendo em vista que o mesmo é conectado ao rotor e que a maior parte da potência flui pelo estator (MULLER; DEICKE; DE DONCKER, 2002). Essa situação difere das topologias onde o conversor é instalado entre o gerador e a rede, o que acontece, por exemplo, quando o gerador é síncrono. Outra vantagem da topologia DFIG é a possibilidade de fornecimento de potência tanto pelo estator quanto pelo rotor. Quando o gerador opera no modo supersíncrono ( $\omega_r > \omega_s$ ), o rotor fornece potência à rede. No modo subsíncrono ( $\omega_r < \omega_s$ ), o rotor vai absorver potência da rede através do conversor (ANAYA-LARA et al., 2009). Desta forma, um outro aspecto positivo do uso do DFIG é a possibilidade de transferir a potência máxima em uma ampla faixa de velocidades de rotação subsíncronas e supersíncronas (BAROUDI; DINAHAHI; KNIGHT, 2007), diferente do que ocorre nas topologias onde são empregadas turbinas de velocidade fixa, como por exemplo as que utilizam gerador de indução com rotor do tipo gaiola de esquilo.

O DFIG tem sido tema de várias pesquisas em geração eólica

(PENA; CLARE; ASHER, 1996; CHOWDHURY; CHELLAPILLA, 2006; TARNOWSKI; REGINATTO, 2007) e constitui uma opção adequada para aplicações na faixa de potência dos MW (BAROUDI; DINAHAHI; KNIGHT, 2007). Uma desvantagem deste tipo de gerador é a necessidade de se utilizar elementos de comutação para alimentar os enrolamentos do rotor, que exigem manutenção periódica, especialmente em equipamentos instalados em mar aberto (*offshore*) (MARQUES et al., 2003).

Devido à sua importância e vantagens já demonstradas em resultados de pesquisa publicados em livros e artigos, o estudo será particularizado para o caso do gerador de indução de dupla alimentação interligado na rede através de conversor *back-to-back*. Na sequência serão apresentados os modelos matemáticos de cada parte do sistema. A simbologia utilizada será a mesma dos capítulos anteriores, exceto quando indicado.

### 7.2.1 Modelo aerodinâmico

A potência mecânica capturada por uma dada turbina eólica não depende apenas da velocidade do vento ( $V_v$ ), mas também da velocidade específica de rotação da turbina ( $\lambda$ ) e do ângulo do passo das pás ( $\beta$ ). Portanto, o modelo que descreve o comportamento aerodinâmico da turbina também deve descrever esta dependência.

A energia cinética por unidade de tempo transportada pelo vento é dada por (GOLDING, 1976)

$$P_v(t) = \frac{1}{2} \rho A V_v(t)^3 \quad (7.1)$$

sendo  $P_v$  a potência eólica,  $\rho$  a densidade do ar,  $A$  a área de passagem do ar e  $V_v$  a velocidade do vento na área considerada.

A potência mecânica capturada pela turbina eólica é descrita por

$$P_u(t) = \omega_u(t) T_u(t) \quad (7.2)$$

onde  $P_u$  é a potência mecânica capturada,  $\omega_u$  a velocidade de rotação da turbina e  $T_u$  o torque mecânico desenvolvido pela ação do vento. A potência mecânica capturada pela turbina, descrita na equação anterior, é uma fração da potência eólica total dada por (7.1). Assim sendo, a relação entre essas duas potências define a eficiência aerodinâmica da

turbina, denominado coeficiente de potência ( $C_P$ )

$$C_P(t) \equiv \frac{P_u(t)}{P_v(t)}. \quad (7.3)$$

Durante o funcionamento da turbina, o valor de  $C_P$  varia com  $\beta$  e com a velocidade específica de rotação  $\lambda$ , descrita por

$$\lambda(t) = \frac{R \omega_u(t)}{V_v(t)}. \quad (7.4)$$

Utilizando (7.1) e (7.3), é possível descrever  $P_u$  como

$$P_u(t) = \frac{1}{2} \rho A C_P(\lambda(t), \beta(t)) V_v(t)^3. \quad (7.5)$$

Combinando (7.2), (7.4) e (7.5) tem-se

$$T_u(t) = \frac{1}{2} \rho \pi R^3 C_Q(t) V_v(t)^2 = \frac{1}{2} \rho A R^3 \frac{C_P(\lambda(t), \beta(t))}{\lambda(t)^3} \omega_u(t)^2 \quad (7.6)$$

sendo  $C_Q$  o coeficiente de torque aerodinâmico

$$C_Q(t) = \frac{C_P(\lambda(t), \beta(t))}{\lambda(t)}. \quad (7.7)$$

Na maioria das investigações do comportamento dos aerogeradores, as turbinas com ângulo de pá variável são modeladas através de curvas do tipo  $C_P(\lambda, \beta)$ . Estas curvas podem ser interpretadas como um número de curvas  $C_P(\lambda)$  da mesma turbina eólica para diferentes valores de  $\beta$ . Na literatura existem diversas aproximações por funções analíticas para estas curvas (SLOOTWEG; POLINDER; KLING, 2001; LEI et al., 2006). Uma aproximação genérica para estas curvas é dada pela seguinte expressão (SLOOTWEG; POLINDER; KLING, 2001)

$$C_P(\lambda, \beta) = k_1 \left( \frac{k_2}{\lambda_i(t)} - k_3 \beta(t) - k_4 \beta(t)^{k_5} - k_6 \right) e^{-\frac{k_7}{\lambda_i(t)}} \quad (7.8)$$

onde

$$\lambda_i(t) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda(t) + k_8 \beta(t)} - \frac{k_9}{\beta(t)^3 + 1}} \quad (7.9)$$

e os coeficientes  $k_1$  a  $k_9$  são parâmetros que variam conforme o projeto aerodinâmico da turbina.

7.2.1.1 Modelo aerodinâmico por unidade ( $pu$ )

A potência mecânica capturada dada por (7.5) pode ser expressa em  $pu$  por

$$P_u(t) = \frac{P_{uN}}{V_N^3 C_{PN}} C_P(\lambda(t), \beta(t)) V(t)^3 [pu] \quad (7.10)$$

onde

$$V_N = \frac{V_{vN}}{V_{vb}}, \quad V(t) = \frac{V_v(t)}{V_{vb}} \quad (7.11)$$

$V_{vb}$  é a velocidade de vento base e  $C_{PN}$  é o coeficiente de potência nominal correspondente à velocidade específica nominal ( $\lambda_N$ ). Esta velocidade específica nominal é dada por  $\omega_{uN}$ ,  $V_{vN}$  e  $\beta = 0^\circ$ . Define-se a potência nominal da turbina eólica ( $P_{uN}$ ) como a potência mecânica capturada correspondente para a geração da potência elétrica nominal em regime permanente, com a velocidade de vento nominal ( $V_{vN}$ ) e a velocidade de rotação nominal ( $\omega_{uN}$ ). Estes valores são fornecidos pelo fabricante.

A expressão para a velocidade específica de rotação da turbina ( $\lambda$ ) também pode ser reescrita em  $pu$ . Tendo  $\omega_u$  dado agora em  $pu$  e  $\omega_{ub}$  a rotação base da turbina, é possível reescrever (7.4) como

$$\lambda(t) = \frac{R \omega_u(t) \omega_{ub}}{V(t) V_{vb}}. \quad (7.12)$$

Tendo um vento nominal  $V_N$  e uma rotação nominal  $\omega_N$ , ambos em  $pu$ , corresponde à um  $\lambda_N$  dado por

$$\lambda_N = \frac{R \omega_N \omega_{ub}}{V_N V_{vb}}. \quad (7.13)$$

Relacionando (7.12) com (7.13) é possível obter

$$\lambda(t) = \frac{\lambda_N V_N \omega_u(t)}{\omega_N V(t)}. \quad (7.14)$$

A partir destas definições é possível obter as seguintes representações em  $pu$  para  $T_u$

$$T_u(t) = \frac{P_{uN} \lambda_N}{\omega_N C_{PN} V_N^2} C_Q(\lambda(t), \beta(t)) V(t)^2 [pu] \quad (7.15)$$



ou

$$T_u(t) = \frac{P_{uN} \lambda_N^3}{\omega_N^3 C_{PN}} \frac{C_Q(\lambda(t), \beta(t))}{\lambda(t)^2} \omega_u(t)^2 [pu]. \quad (7.16)$$

## 7.2.2 Modelo do gerador de indução assíncrono

O modelo matemático que descreve o comportamento do gerador de indução assíncrono de dupla alimentação também pode ser descrito por unidade. As grandezas do estator e do rotor são representadas utilizando como referencial o sistema de coordenadas síncrono nos eixos  $d$  e  $q$ . Para uma determinada potência base ( $P_b$ ), tensão base ( $V_b$ ) e frequência base ( $\omega_b$ ), é possível obter a seguinte equação na representação em espaço de estados

$$\dot{x}(t) = A_p(x)x(t) + B_{u_p}u(t) + B_{v_p}v(t), \quad (7.17)$$

onde  $u(t) = (v_{d_p}^s(t) \ v_{q_p}^s(t) \ v_{d_p}^r(t) \ v_{q_p}^r(t))^T$ ,  $v(t) = T_m(t)$  e

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t) \ x_5(t))^T \\ &= (\Lambda_{d_p}^s(t) \ \Lambda_{q_p}^s(t) \ \Lambda_{d_p}^r(t) \ \Lambda_{q_p}^r(t) \ \omega_{r_p}(t))^T \\ A_p(x) &= \omega_b \begin{bmatrix} a_1 & \omega_e & a_2 & 0 & 0 \\ -\omega_e & a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & a_4 & (\omega_e - x_5(t)) & 0 \\ 0 & a_3 & -(\omega_e - x_5(t)) & a_4 & 0 \\ -a_5 x_4(t) & a_5 x_3(t) & 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \\ B_{u_p} &= \omega_b \begin{pmatrix} -I_4 \\ 0_{(1 \times 4)} \end{pmatrix}, \quad B_{v_p} = \omega_b \begin{pmatrix} 0_{(4 \times 1)} \\ a_7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde o subscrito ‘ $p$ ’ indica que as grandezas físicas do gerador estão em  $pu$ . As constantes das matrizes são definidas em função dos parâmetros em  $pu$

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{R_s}{\bar{\sigma} L_s}, \quad a_2 = \frac{R_s k^2}{\bar{\sigma} L_m}, \quad a_3 = \frac{R_r k^2}{\bar{\sigma} L_m}, \quad a_4 = -\frac{R_r}{\bar{\sigma} L_r}, \quad a_5 = \frac{k^2}{2H \bar{\sigma} L_m \omega_b} \\ a_6 &= -\frac{F_{pu}}{2H \omega_b}, \quad a_7 = \frac{1}{2H \omega_b}, \quad \bar{\sigma} = 1 - k^2 \quad \text{e} \quad k^2 = \frac{L_m^2}{L_s L_r} \end{aligned}$$

sendo  $H$  o momento de inércia e  $F_{pu}$  o coeficiente de atrito viscoso, ambos em  $pu$ . A variável  $\omega_e$  representa a frequência síncrona do campo

do estator em *pu*

$$\omega_e = \frac{\omega_s}{\omega_b}. \quad (7.18)$$

A conversão para *pu* das tensões, correntes e fluxos utiliza relações do tipo

$$v_{d_p}^s(t) = \frac{v_d^s(t)}{\sqrt{2}V_b}. \quad (7.19)$$

A relação entre  $\omega_{r_p}$  e a velocidade angular mecânica do rotor ( $\omega_{rm_p}$ ) é semelhante à do modelo do motor de indução visto no capítulo anterior e é dada pela seguinte equação

$$\omega_{rm_p}(t) = \frac{\omega_{r_p}(t)}{p}. \quad (7.20)$$

As seguintes considerações são levadas em conta na modelagem do gerador:

- Fluxo de potência elétrica positiva quando a máquina opera como gerador;
- $T_m$  positivo quando atua no mesmo sentido que o campo girante do entreferro;
- Sentido positivo das correntes do estator e do rotor quando saem dos terminais do gerador;
- As grandezas do rotor são referenciadas ao estator.

As correntes do estator ( $i^s$ ) podem ser obtidas a partir dos fluxos utilizando as seguintes expressões

$$i_{d_p}^s(t) = \frac{1}{\bar{\sigma}L_s} \left[ \Lambda_{d_p}^s(t) - \frac{L_m}{L_r} \Lambda_{d_p}^r(t) \right], \quad i_{q_p}^s(t) = \frac{1}{\bar{\sigma}L_s} \left[ \Lambda_{q_p}^s(t) - \frac{L_m}{L_r} \Lambda_{q_p}^r(t) \right]. \quad (7.21)$$

Para determinar o valor das correntes do rotor ( $i^r$ ) podem ser empregadas as seguintes equações

$$i_{d_p}^r(t) = \frac{\Lambda_{d_p}^r(t)}{L_r} - \frac{L_m}{L_r} i_{d_p}^s(t), \quad i_{q_p}^r(t) = \frac{\Lambda_{q_p}^r(t)}{L_r} - \frac{L_m}{L_r} i_{q_p}^s(t). \quad (7.22)$$

Os valores instantâneos das potências ativas ( $P_s$  e  $P_r$ ) e reativas ( $Q_s$  e  $Q_r$ ) do gerador de indução assíncrono são obtidos através das

seguintes expressões

$$P_s(t) = \left( v_{d_p}^s(t) i_{d_p}^s(t) + v_{q_p}^s(t) i_{q_p}^s(t) \right) \quad (7.23)$$

$$Q_s(t) = \left( v_{q_p}^s(t) i_{d_p}^s(t) - v_{d_p}^s(t) i_{q_p}^s(t) \right) \quad (7.24)$$

$$P_r(t) = \left( v_{d_p}^r(t) i_{d_p}^r(t) + v_{q_p}^r(t) i_{q_p}^r(t) \right) \quad (7.25)$$

$$Q_r(t) = \left( v_{q_p}^r(t) i_{d_p}^r(t) - v_{d_p}^r(t) i_{q_p}^r(t) \right). \quad (7.26)$$

### 7.2.3 Acoplamento do modelo aerodinâmico com o modelo eletromagnético

A integração do modelo aerodinâmico (turbina) com o modelo eletromagnético (gerador) é feita sob as seguintes considerações:

- Os parâmetros de inércia ( $H$ ) e de atrito ( $F_{pu}$ ) por unidade agrupam os valores correspondentes ao gerador e à turbina;
- O acoplamento entre o eixo da turbina e o eixo do rotor é feito através de um acoplamento mecânico rígido com um multiplicador cuja relação das engrenagens é conhecida ( $N_{gear}$ ). Logo, em  $pu$  o torque mecânico desenvolvido pela ação do vento é igual ao torque mecânico que atua no gerador, ou seja  $T_m = T_u$ . As velocidades do gerador e da turbina em  $pu$  serão iguais, ou seja  $\omega_u = \omega_{r_p}$ .

Levando em conta as considerações previamente descritas, é possível reescrever a equação (7.17) como

$$\dot{x}(t) = A_p(x)x(t) + B_s \bar{v}_{dq}^s + B_r v_{dq}^r(t) + B_{\nu_p} T_u(x_5, \beta, V) \quad (7.27)$$

onde

$$B_s = \omega_b \begin{pmatrix} -I_2 \\ 0_{(2 \times 2)} \\ 0_{(1 \times 2)} \end{pmatrix}, \quad B_r = \omega_b \begin{pmatrix} 0_{(2 \times 2)} \\ -I_2 \\ 0_{(1 \times 2)} \end{pmatrix}$$

e  $v_{dq}^r(t) = \left( v_{d_p}^r(t) \quad v_{q_p}^r(t) \right)^T$ , sendo  $\bar{v}_{dq}^s = \left( \bar{v}_{d_p}^s \quad \bar{v}_{q_p}^s \right)^T$  são os valores nominais para tensão  $dq$  no estator definidas pelas características da rede elétrica.

O termo não linear  $T_u(x_5, \beta, V)$  é definido com base na equação (7.16) supondo que  $\omega_u = \omega_{r_p}$  e que  $T_m = T_u$ . Como  $\lambda$  depende de  $\omega_u = \omega_{r_p} = x_5$ , é possível reescrever (7.16) como

$$T_u(x_5, \beta, V) = k_b \frac{C_P(\lambda(x_5(t), V(t)), \beta(t))}{\lambda(x_5(t), V(t))^3} x_5(t)^2 [pu] \quad (7.28)$$

sendo

$$k_b = \frac{P_{uN} \lambda_N^3}{\omega_N^3 C_{PN}}. \quad (7.29)$$

O valor de  $T_u$  em função de  $x_5, \beta, V$  é dado pela seguinte expressão

$$T_u(x_5, \beta, V) = \frac{e^{k_7 N(x_5, \beta, V)} (-k_2 N(x_5, \beta, V) - k_4 \beta(t)^{k_5} - \beta(t) k_3 - k_6) k_1 k_b V(t)^3}{k_c^3 x_5(t)} \quad (7.30)$$

onde

$$k_c = \frac{\lambda_N V_N}{\omega_N} \quad (7.31)$$

e

$$N(x_5, \beta, V) = \left( \frac{k_9}{\beta(t)^3 + 1} - \frac{V(t)}{k_c x_5(t) + \beta(t) k_8 V(t)} \right). \quad (7.32)$$

Na abordagem que será vista neste trabalho, o ângulo do passo da pás será  $\beta = 0^\circ$ . Sob estas considerações é possível reescrever (7.30) como

$$T_u(x_5, V) = \frac{e^{k_7 k_9 - \frac{k_7 V(t)}{k_c x_5(t)}} \left( \frac{k_2 V(t)}{k_c x_5(t)} - k_2 k_9 - k_6 \right) k_1 k_b V(t)^3}{k_c^3 x_5(t)}. \quad (7.33)$$

Analisando a equação anterior, é possível verificar que neste modelo  $T_u$  não é definido para  $x_5(t) = 0$ . No entanto, para aplicações práticas a faixa de variação da velocidade de rotação é limitada, geralmente  $\pm 30\%$  da velocidade síncrona, devido à limitações de potência do rotor e dos inversores. Desta forma, será possível utilizar este modelo para simulação e desenvolvimento das estratégias de chaveamento para o RSC.

Na sequência, utilizando a mesma metodologia empregada no capítulo anterior, é possível reescrever a equação (7.27) como um sistema chaveado não linear composto de  $m = 7$  subsistemas. Neste caso

o chaveamento do inversor vai determinar a tensão nos terminais das bobinas do rotor, ou seja,

$$\begin{pmatrix} v_{d_p}^r(t) \\ v_{q_p}^r(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m \theta_i V_{dq_i} = \sum_{i=1}^m \theta_i V_i z(t) \quad (7.34)$$

com  $\theta \in \Theta$ ,  $V_i$  definido em (6.25) e  $z_1 = \text{sen } \delta_r(t)$ ,  $z_2 = \text{cos } \delta_r(t)$ , sendo

$$\delta_r(t) = \int \omega_{sl}(t) dt, \quad \omega_{sl}(t) = (\omega_e - \omega_{r_p}(t))\omega_b. \quad (7.35)$$

Para esta aplicação, a dinâmica da variável  $z$  é dada por

$$\dot{z}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \omega_{sl}(t) \\ -\omega_{sl}(t) & 0 \end{bmatrix}}_{W(\omega_{sl})} z(t). \quad (7.36)$$

Finalmente, é possível reescrever (7.27) como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_p(x)x(t) + B_s \bar{v}_{dq}^s + B_r V_i z(t) + B_{V_p} T_u(x_5, V), \\ i &\in \mathcal{M} := \{1, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

## 7.2.4 Modelo do inversor ligado à rede elétrica

Considerando a topologia vista na Figura 28, na qual um filtro de linha é instalado entre o conversor e a rede, o modelo que descreve o comportamento dinâmico do inversor conectado à rede elétrica em  $pu$  é dado pela seguinte equação

$$\dot{\xi}(t) = A_g \xi(t) + B_g \left( v_{dq}^g(t) - \bar{v}_{dq}^s \right) \quad (7.38)$$

no qual os estados  $\xi(t) = (i_d^g(t) \ i_q^g(t))^T$  são as componentes  $dq$  da corrente nos terminais do GSC,  $v_{dq}^g(t) = (v_d^g(t) \ v_q^g(t))^T$  representa a tensão nos terminais do inversor e

$$A_g = \begin{bmatrix} -\frac{R_f}{L_f} & \omega_e \\ -\omega_e & -\frac{R_f}{L_f} \end{bmatrix}, \quad B_g = \frac{1}{L_f}$$

sendo  $R_f$  e  $L_f$  a resistência e a indutância do filtro nos terminais do inversor, respectivamente.

No caso do GSC o chaveamento do inversor vai determinar a tensão  $v_{dq}^g(t)$ , ou seja,

$$\begin{pmatrix} v_d^g(t) \\ v_q^g(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m \theta_i V_i z(t) \quad (7.39)$$

com  $\theta \in \Theta$ ,  $V_i$  definido em (6.25) e  $z_1 = \text{sen } \delta_g$ ,  $z_2 = \text{cos } \delta_g$ , sendo

$$\delta_g = \int \omega_e dt + \kappa \quad (7.40)$$

onde  $\kappa$  corresponde ao ângulo necessário para sincronização com os sinais senoidais da rede. Para esta aplicação, a dinâmica da variável  $z$  é dada por

$$\dot{z}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \omega_e \\ -\omega_e & 0 \end{bmatrix}}_{W_g} z(t). \quad (7.41)$$

Desta forma, é possível novamente utilizar a metodologia vista no capítulo anterior para reescrever a equação (7.38) como um sistema chaveado não linear composto de  $m = 7$  subsistemas

$$\dot{\xi}(t) = A_g \xi(t) + B_g (V_i z(t) - \bar{v}_{dq}^s), \quad i \in \mathcal{M} := \{1, \dots, m\}. \quad (7.42)$$

### 7.3 CONTROLE DO AEROGERADOR

As metodologias de controle de sistemas de geração eólica que empregam conversores de potência possuem como principal objetivo a maximização da potência elétrica ativa de saída em toda a faixa de variação de velocidade do vento (BAROUDI; DINAHAHI; KNIGHT, 2007). A variação da potência em função da velocidade do vento pode ser melhor entendida através da análise do gráfico visto na Figura 29 (ANAYA-LARA et al., 2009). Verifica-se nesta figura que da velocidade zero até a velocidade mínima de vento ( $V_{ci}$ , *cut-in wind speed* em inglês), praticamente nenhuma potência elétrica é produzida. A partir de  $V_{ci}$ , a potência elétrica cresce com a velocidade do vento em uma razão tipicamente cúbica. Esse crescimento ocorre até a velocidade atingir o seu valor nominal ( $V_n$ ). Para ventos com velocidades superiores a  $V_n$  a potência de

saída é mantida constante. A velocidade será limitada superiormente por  $V_{co}$  por questões de segurança e limitação de carga mecânica sobre a turbina.

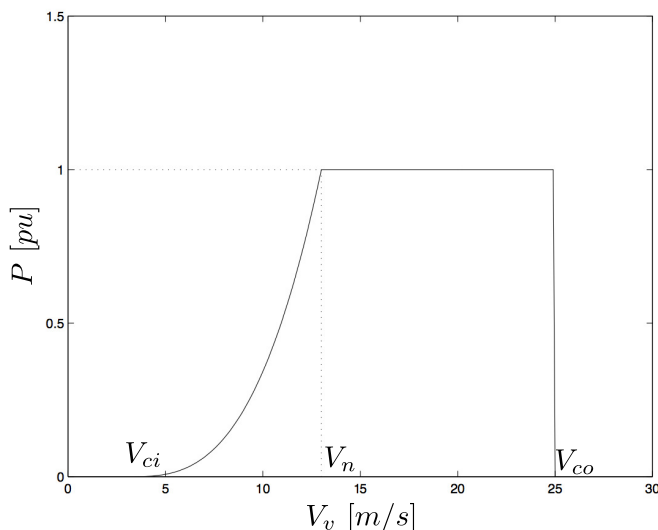


Figura 29 – Gráfico da potência elétrica em função da velocidade do vento em um aerogerador típico.

Para velocidades de vento acima da nominal (ou seja,  $V_v > V_n$ ), a potência permanece constante e o controle da potência é efetuado através de dispositivos mecânicos que atuam nas pás da turbina. A região típica de operação ocorre com velocidades de vento na faixa  $V_{ci} \leq V_v \leq V_n$ , na qual a potência varia com a velocidade do vento. É nesta faixa de velocidades que o controle através do chaveamento de dispositivos eletrônicos deve atuar.

### 7.3.1 Máximo aproveitamento da potência do vento

Nas seções anteriores foram apresentados modelos matemáticos que descrevem a dependência da potência elétrica e mecânica com relação à velocidade do vento (ver equações (7.1) a (7.9)). Utilizando estes modelos será possível estabelecer estratégias que permitam o controle da potência elétrica gerada pelo aerogerador.

O problema de maximizar a potência elétrica ativa de saída pode ser descrito como a maximização do coeficiente de potência  $C_P$ . Analisado as equações (7.8), (7.9), (7.4) e considerando  $\beta = 0^\circ$ , para cada velocidade de vento  $V_v$  existe um valor para a velocidade angular da turbina  $\omega_u$  para a qual o  $C_P(\lambda, \beta)$  é máximo. Nesse caso, diz-se que  $\lambda = \lambda_{opt}$  e  $C_P = C_P^{max}$ , ou seja

$$C_P^{max} = C_P(\lambda_{opt}, \beta). \quad (7.43)$$

A potência mecânica extraída do vento pela turbina é máxima sempre que  $C_P = C_P^{max}$ , o que pode ser realizado fixando-se a razão de velocidade na ponta da pá em  $\lambda_{opt}$ . Desta forma, utilizando (7.4) tem-se que a velocidade da turbina fica vinculada à velocidade do vento por

$$\omega_u(t) = \frac{\lambda_{opt}}{R} V_v(t). \quad (7.44)$$

Desta forma, a potência mecânica máxima será

$$P_u^{max}(t) = \frac{1}{2} \rho A C_P^{max} V_v(t)^3 = \frac{1}{2} \rho A R^3 \frac{C_P^{max}}{\lambda_{opt}^3} \omega_u(t)^3 = K_{opt} \omega_u(t)^3 \quad (7.45)$$

e o torque mecânico será

$$T_u^{max}(t) = \frac{1}{2} \rho A R^3 \frac{C_P^{max}}{\lambda_{opt}^3} \omega_u(t)^2 = K_{opt} \omega_u(t)^2. \quad (7.46)$$

A estratégia de variar a velocidade da turbina para maximizar a captura de energia eólica é conhecida como *Maximum Power Tracking* (MPT).

### 7.3.1.1 Máximo aproveitamento da potência do vento em *pu*

Uma análise semelhante pode ser feita considerando as variáveis do modelo do aerogerador por unidade. Neste caso a velocidade de rotação  $\omega_u$  em *pu* fica vinculada à velocidade do vento  $V$  através da seguinte expressão obtida a partir de (7.14)

$$\omega'_u(t) = \frac{\lambda_{opt} \omega_N}{\lambda_N V_N} V(t). \quad (7.47)$$

Com a turbina operando na velocidade de rotação de máximo



aproveitamento da potência eólica, a potência mecânica será dada por

$$P_u^{max}(t) = \frac{P_{uN} C_P^{max}}{V_N^3 C_{PN}} V(t)^3 [pu] \quad (7.48)$$

ou

$$P_u^{max}(t) = K_{opt}^{pu} \omega'_u(t)^3 [pu], \quad K_{opt}^{pu} = \frac{P_{uN} \lambda_N^3 C_P^{max}}{\omega_N^3 C_{PN} \lambda_{opt}^3}. \quad (7.49)$$

Já o torque mecânico será dado por

$$T'_u(t) = K_{opt}^{pu} \omega'_u(t)^2 [pu]. \quad (7.50)$$

A equação (7.50) não representa o máximo torque mecânico que é capaz de desenvolver a turbina eólica. Esse torque pode ser obtido utilizando os valores  $C_Q^{max}$  e  $\lambda_Q$  e é dado por

$$T_u^{max}(t) = \frac{P_{uN} \lambda_N^3 C_Q^{max}}{\omega_N^3 C_{PN} \lambda_Q^2} \omega_u(t)^2 [pu]. \quad (7.51)$$

### 7.3.2 Erro de seguimento do inversor ligado ao rotor

Após estabelecer as equações que definem o comportamento dinâmico do RSC, o problema consiste em projetar uma lei de chaveamento,  $\sigma(x(t), z(t))$ , que conduza assintoticamente os estados do sistema chaveado não linear (7.37) para uma referência constante  $\bar{x}$  calculada para o máximo aproveitamento da potência de uma velocidade de vento específica  $\bar{V}$  com  $\beta = 0^\circ$  e para todo  $z \in \mathcal{Z}$ .

Inicialmente, a dinâmica do sistema é reescrita utilizando a ideia do erro de seguimento definido em (3.4). Adicionalmente, é definido o erro de torque ( $e_T$ )

$$e_T(t) := T_u(x_5(t), V(t)) - T_u^{opt}(x_5(t)), \quad T_u^{opt}(x_5(t)) := K_{opt}^{pu} x_5(t)^2. \quad (7.52)$$

Observe que considerando o cálculo da referência para máximo aproveitamento da potência do vento, no equilíbrio  $x(t) = \bar{x}$  implica em  $T_u(x_5(t), V(t)) = T_u^{opt}(\bar{x}_5)$ . Isso significa que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_T(t) = 0$ . Dadas as características da turbina eólica, é possível determinar uma faixa de

valores para o torque  $T_u$

$$T_u^{min} \leq T_u(x_5(t), V(t)) \leq T_u^{max} \quad (7.53)$$

onde  $T_u^{min}$  e  $T_u^{max}$  são valores característicos da turbina em operação normal e para o qual o modelo (7.30) é válido. Em vista de (7.53), verifica-se que o erro de torque  $e_T(t)$  também se encontra limitado em um intervalo

$$e_T^{min} \leq e_T(t) \leq e_T^{max}. \quad (7.54)$$

Com o objetivo de evitar o uso explícito do coeficiente de potência ( $C_P$ ), assume-se que o torque ( $T_u$ ) é mensurável e que a dinâmica do erro de torque possa ser representada pela expressão

$$\dot{e}_T(t) := -\varphi e_T(t) + d(t) \quad (7.55)$$

sendo  $d(t)$  um sinal externo de energia limitada

$$\int_0^\infty d(t)^T d(t) dt < C_o \quad (7.56)$$

onde  $C_o$  é tal que

$$d(t) \in \mathcal{D} := \{d(t) \in \mathcal{L}_2 : e_T^{min} \leq e_T(t) \leq e_T^{max}\} \subseteq \mathbb{R}^{n_d} \quad (7.57)$$

e  $\varphi$  um dado escalar positivo que delimita a taxa de variação do torque. Caso não se queira considerar restrições na taxa de variação do torque, basta escolher  $\varphi$  suficientemente grande. As expressões (7.55) e (7.57) fornecem uma caracterização alternativa para a expressão do torque em (7.30). Observe que a expressão (7.30) é baseada na aproximação genérica do  $C_P(\lambda, \beta)$  em (7.8) e sua complexidade dificulta consideravelmente sua utilização no projeto da lei de chaveamento do RSC.

Na sequência, utilizando (3.4) e (7.52) o sistema (7.37) é descrito como

$$\dot{e}(t) = F(e) e(t) + h_i(z(t)) + B_{\nu_p} e_T(t) \quad (7.58)$$

sendo

$$h_i(z(t)) = h_0 + B_r V_i z(t), \quad h_0 = \tilde{A}\bar{x} + B_s \bar{v}_{dq}^s + B_{\nu_p} \bar{T}_u \quad (7.59)$$

e

$$\tilde{A} = \omega_b \begin{bmatrix} a_1 & \omega_e & a_2 & 0 & 0 \\ -\omega_e & a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & a_4 & \omega_e - \bar{x}_5 & 0 \\ 0 & a_3 & -(\omega_e - \bar{x}_5) & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 \bar{x}_2 & -a_5 \bar{x}_1 & a_6 + 2a_7 K_{opt}^{pu} \bar{x}_5 \end{bmatrix}$$

$$F(e) = \tilde{A} + \omega_b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e_5(t) & -\bar{x}_4 \\ 0 & 0 & e_5(t) & 0 & \bar{x}_3 \\ -a_5 \bar{x}_4 & a_5 \bar{x}_3 & a_5 e_2(t) & -a_5 e_1(t) & a_7 K_{opt}^{pu} e_5(t) \end{bmatrix}. \quad (7.60)$$

Definindo o erro aumentado,  $e_a(t)$ , é possível agrupar as dinâmicas de (7.58) e (7.55) como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{e}_T(t) \end{pmatrix}}_{\dot{e}_a(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} F(e) & B_{V_p} \\ 0 & -\varphi \end{bmatrix}}_{F_a(e_a)} \underbrace{\begin{pmatrix} e(t) \\ e_T(t) \end{pmatrix}}_{e_a(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} h_i(z(t)) \\ 0 \end{pmatrix}}_{h_{a_i}(z(t))} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B_d} d(t) \quad (7.61)$$

Sob estas considerações, o problema será reformulado como sendo projetar uma lei de chaveamento  $\sigma(e_a(t), z(t))$  de forma que o equilíbrio  $e_a(t) = 0$  seja atingido localmente (ou globalmente) para todo  $z \in \mathcal{Z}$  e também que o efeito de  $d(t) \in \mathcal{D}$  seja minimizando em uma dada saída de desempenho  $y_e \in \mathbb{R}^{n_y}$ . Assim, o problema pode ser interpretado como um caso de projeto de lei de chaveamento com atenuação de distúrbio.

De acordo com Filippov (1988), assume-se que a dinâmica de  $e_a(t)$  em modos deslizantes pode ser representada como uma combinação convexa das dinâmicas dos subsistemas de (7.61), ou seja, por

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i \in \sigma(e_a, z)} \theta_i(e_a(t), z(t), d(t)) \{F_a(e_a) e_a(t) + h_{a_i}(z(t)) + B_d d(t)\},$$

$$\theta(e_a(t), z(t), d(t)) \in \Theta \quad (7.62)$$

onde  $\Theta$  é o simplex unitário descrito em (3.7) e  $\theta(e_a(t), z(t), d(t))$  é um vetor com elementos  $\theta_i(e_a(t), z(t), d(t))$  definidos conforme (FILIPPOV, 1988, p.50).

Para atingir o objetivo de conduzir assintoticamente os estados

do sistema chaveado para uma dada referência constante, é necessário que a origem seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (7.62) para todo  $z \in \mathcal{Z}$ . Assim, é possível estabelecer o seguinte lema.

**Lema 7.1** *A origem é um ponto de equilíbrio de (7.62) somente se existir  $\bar{\theta}(z(t)) \in \Theta$  tal que*

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(z(t)) h_{a_i}(z(t)) = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(z(t)) \underbrace{\begin{pmatrix} B_r \\ 0 \end{pmatrix}}_{B_{ra}} V_i z(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} h_0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{h_{0a}} = 0, \quad \forall z \in \mathcal{Z}. \quad (7.63)$$

□

**Prova 7.1** *Substitua  $e_a = \dot{e}_a = 0$  e  $d = 0$  em (7.62). □*

**Observação 7.1** *Verifica-se que, de forma semelhante ao caso do motor de indução, a matriz de dinâmica  $F_a(e_a)$  em (7.61) possui diferentes formas de representação de acordo com a permutação dos elementos de  $e_a(t)$  dos quais a matriz é função. Para este caso particular é possível representar  $F_a(e_a)$  em 16 formas distintas. Observe que as duas primeiras linhas e a última linha de  $F_a(e_a)$  são constantes, ou seja, não dependem dos valores do erro de seguimento. Neste caso é possível decompor a matriz de dinâmicas como*

$$F_a(e_a) = \begin{pmatrix} \widetilde{F}_a \\ \widehat{F}(e_a) \\ \widetilde{F}_b \end{pmatrix} \quad (7.64)$$

onde

$$\widetilde{F}_a = \omega_b \begin{bmatrix} a_1 & \omega_e & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_e & a_1 & 0 & a_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.65)$$

$$\widehat{F}(e_a) = \omega_b \begin{bmatrix} a_3 & 0 & a_4 \\ 0 & a_3 & -(\omega_e - (e_5(t) + \bar{x}_5)) \\ -a_5 \bar{x}_4 & a_5 \bar{x}_3 & a_5 (e_2(t) + \bar{x}_2) \\ \omega_e - (e_5(t) + \bar{x}_5) & -\bar{x}_4 & 0 \\ a_4 & \bar{x}_3 & 0 \\ -a_5 (e_1(t) + \bar{x}_1) & a_6 + a_7 K_{opt}^{pu}(e_5(t) + 2\bar{x}_5) & a_7 \end{bmatrix}, \quad (7.66)$$

$$\tilde{F}_b = \omega_b [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\varphi]. \quad (7.67)$$

*Estas características serão utilizadas na obtenção das condições LMI da metodologia de projeto da lei de chaveamento do RSC. Adicionalmente, analisando a condição do Lema 7.1 é possível concluir que, assim como no caso do motor de indução (veja Observação 6.2), no chaveamento do RSC os elementos de  $\bar{\theta}$  também não são constantes no equilíbrio e dependem da variável  $z$ .  $\square$*

### 7.3.3 Erro de seguimento do inversor ligado à rede elétrica

Com base nas equações que definem o modelo matemático do GSC, o problema consiste em projetar uma lei de chaveamento,  $\sigma(\xi(t), z(t))$ , que conduza assintoticamente os estados do sistema chaveado (7.42) para uma determinada referência constante  $\bar{\xi}$  para todo  $z \in \mathcal{Z}$ . A dinâmica deste sistema também pode ser reescrita utilizando a idéia do erro de seguimento definido em (3.4). Para esta aplicação  $e_g(t) := \xi(t) - \bar{\xi}$  e assim

$$\dot{e}_g(t) = A_g e_g(t) + k_i(z(t)) \quad (7.68)$$

sendo

$$k_i(z(t)) = k_0 + B_g V_i z(t), \quad k_0 = A_g \bar{\xi} - B_g \bar{v}_{dq}^s. \quad (7.69)$$

Desta forma, o problema será reformulado como sendo projetar uma lei de chaveamento  $\sigma(e_g(t), z(t))$  de forma que o equilíbrio  $e_g(t) = 0$  seja localmente (ou globalmente) assintoticamente estável para todo  $z \in \mathcal{Z}$ . Considera-se também nesta aplicação que a dinâmica do erro de seguimento em modos deslizantes pode ser representada por

$$\dot{e}_g(t) = \sum_{i \in \sigma(e_g, z)} \theta_i(e_g(t), z(t)) \{A_g e_g(t) + k_i(z(t))\}, \quad \theta(e_g(t), z(t)) \in \Theta \quad (7.70)$$

onde  $\Theta$  é o simplex unitário descrito em (3.7) e  $\theta(e_g(t), z(t))$  é um vetor com elementos  $\theta_i(e_g(t), z(t))$  definidos de acordo com Filippov (1988, p.50).

Para atingir o objetivo de conduzir assintoticamente os estados do sistema chaveado para uma dada referência constante, é necessário que a origem seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente

estável de (7.70). Sob este aspecto é possível estabelecer o seguinte lema.

**Lema 7.2** *A origem é um ponto de equilíbrio de (7.70) somente se existir  $\tilde{\theta}(z(t)) \in \Theta$  tal que*

$$\sum_{i=1}^m \tilde{\theta}_i(z(t)) k_i(z(t)) = \sum_{i=1}^m \tilde{\theta}_i(z(t)) B_g V_i z(t) + k_0 = 0, \quad \forall z \in \mathcal{Z}. \quad (7.71)$$

□

**Prova 7.2** *Substitua  $\dot{e}_g = e_g = 0$  em (7.70). □*

#### 7.4 CONDIÇÕES DE PROJETO PARA GARANTIA DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS CHAVEADOS NÃO LINEARES COM ATENUAÇÃO DE DISTÚRBO

Tendo como base as condições do Teorema 6.1, será estabelecido um teorema para projeto da lei de chaveamento para sistemas chaveados não lineares com atenuação de distúrbio. Com base nas condições deste teorema serão construídas as LMIs da metodologia de projeto de lei de chaveamento do RSC.

Primeiramente, considere a classe de sistemas chaveados não lineares compostos de  $m$  subsistemas vista em (6.1) reescrita na seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_i(x(t), z(t)) + B_i w(t), \\ y_d(t) &= C_{yi} x(t) + D_{yi} w(t), \quad i \in \mathcal{M} := \{1, \dots, m\} \end{aligned} \quad (7.72)$$

onde  $y_d \in \mathbb{R}^{n_y}$  representa a saída de desempenho,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  é um distúrbio externo quadraticamente integrável ( $w \in \mathcal{L}_2$ ) com  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$  e  $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$ ,  $C_{yi} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  e  $D_{yi} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$  são matrizes de estrutura.

O objetivo é projetar uma lei de chaveamento,  $\sigma(x(t), z(t))$ , que conduz assintoticamente os estados do sistema chaveado para uma dada referência constante  $\bar{x}$  para todo  $z \in \mathcal{Z}$  e também minimize o ganho  $\mathcal{L}_2$  do distúrbio  $w(t)$  para a saída de desempenho  $y_d(t)$ .

A dinâmica do sistema chaveado (7.72) também pode ser reescrita utilizando o erro de seguimento definido em (3.4)

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= f_i(e(t) + \bar{x}, z(t)) + B_i w(t), \\ y_e(t) &= C_{yi} e(t) + D_{yi} w(t), \quad y_e(t) := y_d(t) - C_{yi} \bar{x}. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Neste problema deseja-se projetar uma lei de chaveamento,  $\sigma(e(t), z(t))$ , que conduza o erro para a origem para todo  $z \in \mathcal{Z}$  e minimize um limitante superior  $\gamma$  do ganho de distúrbio de  $w(t)$  para  $y_e(t)$  definido como

$$\|H_{wy_e}\|_\infty := \sup_{\sigma(e(t), z(t))} \frac{\|y_e(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} < \gamma \quad (7.74)$$

para condições iniciais nulas ( $e(0) = 0$ ) e  $\|w(t)\|_2 \neq 0$ .

De acordo com Filippov (1988), considera-se que a dinâmica do erro de seguimento em modos deslizantes seja um sistema chaveado que pode ser representado como uma combinação convexa dos campos vetoriais de cada subsistema em (7.73), ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i \in \sigma(e, z)} \theta_i(e(t), z(t), w(t)) (f_i(e(t) + \bar{x}, z(t)) + B_i w(t)), \\ y_e(t) &= \sum_{i \in \sigma(e, z)} \theta_i(e(t), z(t), w(t)) (C_{yi} e(t) + D_{yi} w(t)), \\ \theta(e(t), z(t), w(t)) &\in \Theta \end{aligned} \quad (7.75)$$

onde  $\Theta$  é o simplex unitário descrito em (3.7) e  $\theta(e(t), z(t), w(t))$  é um vetor com elementos  $\theta_i(e(t), z(t), w(t))$  definidos de acordo com os resultados de Filippov (1988, p.50).

Para atingir o objetivo de conduzir assintoticamente os estados de (7.72) para uma dada referência constante, é necessário que a origem seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (7.75) para todo  $z \in \mathcal{Z}$ , o que implica  $\dot{e} = e = 0$ . Sabendo que, por hipótese,  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ , é possível estabelecer o seguinte lema.

**Lema 7.3** *A origem é um ponto de equilíbrio de (7.75) somente se existir  $\bar{\theta}(z(t)) \in \Theta$  tal que*

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(z(t)) f_i(\bar{x}, z(t)) = 0, \quad \forall z \in \mathcal{Z}. \quad (7.76)$$

□

**Prova 7.3** *Substitua  $\dot{e} = e = 0$  e  $w = 0$  em (7.75). □*

Sob estas considerações, o seguinte teorema será proposto.

**Teorema 7.1** *Considere o sistema chaveado não linear (7.73) que representa o erro de seguimento e seja  $w \in \mathcal{L}_2$  com  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ .*

Considere  $\mathcal{X}$  uma vizinhança da origem do erro de seguimento. Suponha que existam  $\bar{\theta}(z(t)) \in \Theta$  tal que a condição (7.76) do Lema 7.3 seja satisfeita. Sejam as funções de classe  $C^1$   $v_i : \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $v_i(0, z) = 0 \forall z \in \mathcal{Z}$  e para todo  $i \in \mathcal{M}$  e considere a notação  $g_i(e(t), z(t)) = \frac{\partial v_i(e(t), z(t))}{\partial z} \dot{z}(t)$ . Sejam  $\phi_1(e)$  e  $\phi_2(e)$  funções contínuas positivas definidas e  $\alpha : \mathcal{X} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que exista solução para o seguinte problema  $\forall \theta \in \Theta, \forall e \in \mathcal{X}, \forall z \in \mathcal{Z}$ .

minimizar  $\gamma$  tal que

$$\phi_1(e) \leq V(e, z) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e, z)\} \leq \phi_2(e) \quad (7.77)$$

$$\alpha(e, \theta) \geq 0 \quad (7.78)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{M}} \theta_i \theta_j \nabla v_i(e, z)^T f_j(e + \bar{x}, z) + g_i(e, z) \\ & + 2\alpha(e, \theta)(\theta_i - \bar{\theta}_i(z))v_i(e, z) \\ & + \frac{1}{\gamma} y_e^T y_e - \gamma w^T w < 0. \end{aligned} \quad (7.79)$$

Então a origem de (7.75) sob efeito da lei de chaveamento (6.9) é localmente assintoticamente estável e um limitante superior para atenuação de distúrbio em (7.74) é satisfeito. Adicionalmente, caso  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  e  $\phi_1(e)$  seja radialmente ilimitada, as condições garantem estabilidade assintótica e global.  $\square$

**Prova 7.4** A prova será focada em (7.79), que garante o decrescimento de  $V(e(t), z(t))$ , pois a demonstração para as demais condições segue o mesmo procedimento da prova do Teorema 6.1. Esta condição em particular deve ser válida para  $w \in \mathcal{L}_2$  com  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ . Quando o valor do distúrbio é nulo ( $w = 0$ ), a condição (7.79) recai no caso do Teorema 6.1 e assim as condições de estabilidade estão garantidas. Para o caso  $w \neq 0$ , são necessárias algumas considerações.

Primeiramente, como  $\alpha(e, \theta) \geq 0$ , conclui-se com (7.79) que  $\forall \theta \in \Theta, \forall e \in \mathcal{X}, \forall z \in \mathcal{Z}$  tem-se

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{M}} \theta_i \theta_j \nabla v_i(e, z)^T f_j(e + \bar{x}, z) + g_i(e, z) + \frac{1}{\gamma} y_e^T y_e - \gamma w^T w < 0 \\ & \text{sempre que} \quad \sum_{i \in \mathcal{M}} (\theta_i - \bar{\theta}_i(z))v_i(e, z) \geq 0. \end{aligned} \quad (7.80)$$

Para o caso no qual  $\sigma(e(t), z(t))$  possui somente um elemento,



$V(e(t), z(t))$  é diferenciável e a desigualdade (7.80) implica em

$$\dot{V}(e(t), z(t)) + \frac{1}{\gamma} y_e(t)^T y_e(t) - \gamma w(t)^T w(t) < 0. \quad (7.81)$$

Suponha que  $\sigma(e(t), z(t))$  mantenha-se com somente um elemento no intervalo de tempo de zero até  $t_1 > 0$ . Sob esta condição é possível integrar (7.81) neste intervalo de tempo obtendo a seguinte expressão

$$V(e(t_1)) + \frac{1}{\gamma} \int_0^{t_1} y_e(t)^T y_e(t) dt - \gamma \int_0^{t_1} w(t)^T w(t) dt < V(e_0). \quad (7.82)$$

Lembrando que a origem de (7.75) sob efeito da lei de chaveamento (6.9) é assintoticamente estável, conclui-se que  $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} e(t_1) = 0$  e também  $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} V(e(t_1)) = 0$ . Como  $e_0 = 0$  e  $V(e_0) = 0$ , para  $t_1 \rightarrow \infty$  a condição (7.82) é igual a

$$\int_0^{\infty} y_e(t)^T y_e(t) dt < \gamma^2 \int_0^{\infty} w(t)^T w(t) dt \quad (7.83)$$

que é equivalente ao requisito em (7.74).

Para o caso no qual o sistema chaveado encontra-se em modo deslizante, os mesmos argumentos utilizados na prova do Teorema 5.1 podem ser empregados. Recapitulando a prova do Teorema 6.1, a derivada direcional de Dini (LASDON, 1970, p.420) de  $V(e(t), z(t))$  é única para  $(e(t), z(t)) \in T_{\tilde{e}(t)}(e(t), z(t))$ , com  $T_h(e(t), z(t))$  definido em (6.13). Logo, nos pontos de continuidade do campo vetorial  $DV(e(t), z(t))[\dot{e}(t)] = \dot{V}(e(t), z(t))$  e a equação (7.81) também é válida para o modo deslizante. Realizando a integração de (7.81) em intervalos de tempo definidos pelos instantes de descontinuidade do campo vetorial e lembrando que  $V(e(t), z(t))$  é contínua, chega-se também em (7.83). □

## 7.5 CONDIÇÕES LMI PARA O PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO

Nesta seção será apresentada uma metodologia de projeto para uma estratégia de chaveamento que conduz os estados do DFIG para um determinado ponto de equilíbrio. Esta metodologia considera o projeto independente das leis de chaveamento para cada um dos inversores que compõem o conversor *back-to-back*. Inicialmente, serão

apresentados os resultados para o projeto da lei de chaveamento do RSC. Na sequência, as condições serão propostas para projeto da lei de chaveamento do GSC.

### 7.5.1 Projeto da lei de chaveamento do inversor ligado ao rotor

Antes da apresentação do teorema que define a metodologia de projeto, serão descritos os passos para a determinação do ponto de equilíbrio para o RSC. Conforme citado anteriormente, na abordagem que será tratada neste trabalho a referência constante  $\bar{x}$  será calculada para o máximo aproveitamento da potência para uma dada velocidade de vento específica  $\bar{V}$  e para todo  $z \in \mathcal{Z}$ . Além disso, o ângulo do passo da pás será  $\beta = 0^\circ$ .

Destá forma, o ponto de equilíbrio deve ser projetado de acordo com as condições de operação para máxima potência vistas anteriormente e de forma a satisfazer a condição do Lema 7.1. Inicialmente, escrevendo (7.63) para este caso particular

$$a_1\bar{x}_1 + \bar{\omega}_e\bar{x}_2 + a_2\bar{x}_3 - \bar{v}_{d_p}^s = 0 \quad (7.84)$$

$$-\bar{\omega}_e\bar{x}_1 + a_1\bar{x}_2 + a_2\bar{x}_4 - \bar{v}_{q_p}^s = 0 \quad (7.85)$$

$$a_3\bar{x}_1 + a_4\bar{x}_3 + (\bar{\omega}_e - \bar{x}_5)\bar{x}_4 - \bar{v}_{d_p}^r = 0 \quad (7.86)$$

$$a_3\bar{x}_2 - (\omega_e - \bar{x}_5)\bar{x}_3 + a_4\bar{x}_4 - \bar{v}_{q_p}^r = 0 \quad (7.87)$$

$$a_5\bar{x}_2\bar{x}_3 - a_5\bar{x}_1\bar{x}_4 + a_6\bar{x}_5 + a_7\bar{T}_u = 0 \quad (7.88)$$

sendo  $\bar{v}_{dq}^r = (\bar{v}_{d_p}^r \ \bar{v}_{q_p}^r)^T$  as tensões nos terminais do rotor em equilíbrio. Como  $\bar{\omega}_e$ ,  $\bar{v}_{d_p}^s$  e  $\bar{v}_{q_p}^s$  dependem das características da rede, o problema consiste em definir os valores de  $\bar{x}$  e das tensões  $\bar{v}_{dq}^r$ .

O valor de  $\bar{x}_5$  pode ser escolhido para o máximo aproveitamento da potência eólica. Utilizando a equação (7.47) para uma velocidade do vento  $\bar{V}$  em  $pu$  conhecida

$$\bar{x}_5 = \frac{\lambda_{opt} \omega_N}{\lambda_N V_N} \bar{V}. \quad (7.89)$$

O valor de  $\bar{T}_u$  para  $\bar{x}_5$  calculado na equação anterior é determinado empregando (7.50)

$$\bar{T}_u = K_{opt}^{pu} \bar{x}_5^2. \quad (7.90)$$

Restam determinar os valores de  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$ ,  $\bar{x}_3$ ,  $\bar{x}_4$  e as tensões do rotor  $\bar{v}_{d_p}^r$  e  $\bar{v}_{q_p}^r$ . Isolando  $\bar{x}_3$  e  $\bar{x}_4$  em (7.84) e (7.85), respectivamente

$$\bar{x}_3 = \frac{\bar{v}_{d_p}^s - a_1 \bar{x}_1 - \bar{\omega}_e \bar{x}_2}{a_2} \quad (7.91)$$

$$\bar{x}_4 = \frac{\bar{v}_{q_p}^s + \bar{\omega}_e \bar{x}_1 - a_1 \bar{x}_2}{a_2}. \quad (7.92)$$

Substituindo (7.91) e (7.92) em (7.88)

$$-\frac{\bar{\omega}_e a_5}{a_2} (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) - \frac{\bar{v}_{q_p}^s a_5}{a_2} \bar{x}_1 + \frac{\bar{v}_{d_p}^s a_5}{a_2} \bar{x}_2 + a_6 \bar{x}_5 + a_7 \bar{T}_u = 0. \quad (7.93)$$

Para um dado valor de  $\bar{x}_1$ , é possível determinar o valor de  $\bar{x}_2$  através das raízes do polinômio obtido da equação anterior ou vice versa. Depois, aplicando (7.91) e (7.92) obtém-se  $\bar{x}_3$  e  $\bar{x}_4$ . Finalmente, os valores de  $\bar{v}_{d_p}^r$  e  $\bar{v}_{q_p}^r$  podem ser obtidos utilizando (7.86) e (7.87).

As LMIs serão obtidas com base no Teorema 7.1, tendo em vista que o problema de projetar uma lei de chaveamento para a dinâmica do erro de seguimento do RSC (equação (7.62)) pode ser interpretado como um caso de atenuação do distúrbio com  $w(t) = d(t) \in \mathcal{D}$ . A saída de desempenho será dada por

$$y_e(t) = C_y e_a(t) + D_y d(t). \quad (7.94)$$

Com relação às funções auxiliares  $v_i(e_a(t), z(t)) \in \mathcal{C}^1$ ,  $i \in \mathcal{M}$  de (6.9), as seguintes estruturas foram consideradas neste caso

$$v_i(e_a(t), z(t)) = e_a(t)^T P(e_a(t)) e_a(t) + 2e_a(t)^T S_i(z(t)) \quad (7.95)$$

onde

$$P(e_a(t)) := P_0 + \sum_{j=1}^6 P_j e_{a_j}(t) \quad (7.96)$$

e

$$S_i(z(t)) := Th_{a_i}(z(t)). \quad (7.97)$$

Para esta escolha particular das funções auxiliares, pode-se ve-

rificar que

$$\begin{aligned} V(e_a(t), z(t)) &= \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e_a(t), z(t))\} \\ &= e_a(t)^T P(e_a(t)) e_a(t) + 2e_a(t)^T Th_{0_a} \\ &\quad + \max_{i \in \mathcal{M}} \{2e_a(t)^T TB_{r_a} V_i z(t)\} \end{aligned} \quad (7.98)$$

e assim a lei de chaveamento definida em (6.9) é equivalente a

$$\begin{aligned} \sigma(e_a(t), z(t)) &= \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e_a(t), z(t))\} \\ &= \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{2e_a(t)^T TB_{r_a} V_i z(t)\}. \end{aligned} \quad (7.99)$$

Nesta caso também é possível verificar um aumento na complexidade da estrutura das funções auxiliares em comparação com as escolhas efetuadas nos Capítulos 4 e 5. É importante ressaltar que para  $v_i(e_a(t), z(t))$  definida em (7.95)

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(e_a(t), z(t)) &= \frac{\partial}{\partial e} v_i(e_a(t), z(t)) \dot{e}_a(t) + \frac{\partial}{\partial t} v_i(e_a(t), z(t)) \\ &= \nabla v_i(e_a(t), z(t)) \dot{e}_a(t) + 2e_a(t)^T \dot{S}_i(t). \end{aligned}$$

Sob estas considerações e tendo como base as condições do Teorema 7.1 vistas anteriormente, é possível estabelecer o seguinte teorema para projeto da lei de chaveamento  $\sigma(e_a(t), z(t))$ .

**Teorema 7.2** *Seja  $\bar{x}$  um dado vetor constante representando o equilíbrio desejado para o sistema chaveado não linear (7.37), que representa a dinâmica do gerador de indução assíncrono em pu com os enrolamentos do rotor ligados à um inversor de frequência. Suponha que o estado  $x$  possa ser medido e/ou corretamente estimado. Considere o sistema (7.61) cujo estado é o erro aumentado de seguimento,  $e_a$ . Assuma que exista  $\bar{\theta}(z(t)) \in \Theta$  definido de acordo com o Lema 7.1. Seja  $\mathcal{X}$  um politopo que define uma vizinhança da origem de  $e_a$ . Sejam  $Q_a$  uma base do espaço nulo de  $C_a$  e  $L_a, L_b$  matrizes a serem determinadas com as dimensões de  $\mathfrak{N}_{e_a}^T$  e  $N_b(e_a)^T$ , respectivamente, sendo*

$$C_a = \begin{bmatrix} (-I_2 & 0_{(2 \times 3)} & 0_{(2 \times 1)} & \tilde{F}_a & 0_{(2 \times n_z)} & 0_{(2 \times n_d)} \\ (0_{(1 \times 2)} & 0_{(1 \times 3)} & -1) & \tilde{F}_b & 0_{(1 \times n_z)} & 0_{(1 \times n_d)} \end{bmatrix} \quad (7.100)$$

$e$

$$N_b(e_a) = \begin{bmatrix} 0_{(r \times n_a)} & \aleph_{e_a} & 0_{(r \times n_z)} & 0_{(r \times n_d)} \\ (0_{(3 \times 2)} & -I_3 & 0_{(3 \times 1)}) & \widehat{F}_a(e_a) & 0_{(3 \times n_z)} & 0_{(3 \times n_d)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0_{(3 \times 2)} & -I_3 & 0_{(3 \times 1)}) & \widehat{F}_b(e_a) & 0_{(3 \times n_z)} & 0_{(3 \times n_d)} \end{bmatrix} \quad (7.101)$$

com o anulador linear  $\aleph_{e_a} \in \mathbb{R}^{r \times n_a}$  obtido de acordo com a Definição 4.1 e sendo  $\widehat{F}_a(e_a), \dots, \widehat{F}_z(e_a)$  as múltiplas representações de  $\widehat{F}(e_a)$ , conforme visto na Observação 7.1. Sejam as constantes  $\alpha(e_a) > 0$  dadas e escolhidas conforme as orientações da Observação 4.2 para cada  $e_a \in \vartheta(\mathcal{X})$ .

Suponha que existam matrizes  $L_a, L_b, T, P_0$  e  $P_j, j \in \{1, \dots, 6\}$  e um escalar positivo  $\gamma$  que resolvam o seguinte problema LMI

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \gamma \\ & P_0, P_j, T, \gamma \end{aligned} \quad \text{sujeito à} \quad (7.102)$$

$$P(e_a) + L_a \aleph_{e_a} + \aleph_{e_a}^T L_a^T > 0, \quad \forall e_a \in \vartheta(\mathcal{X}) \quad (7.103)$$

$$\begin{bmatrix} Q_a^T(\Psi(e_a) + L_b N_b(e_a) + N_b(e_a)^T L_b^T) Q_a & \star \\ (0 \ C_y \ 0 \ D_y) Q_a & -\gamma I_{n_y} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall e_a \in \vartheta(\mathcal{X}) \quad (7.104)$$

sendo

$$\Psi(e_a) = \begin{bmatrix} 0 & \star & \star & \star \\ \Psi_{21}(e_a) & 0 & \star & \star \\ B_{ra}^T T^T & \Psi_{32}(e_a) & B_{ra}^T (T + T^T) B_{ra} & \star \\ 0 & \Psi_{42}(e_a) & B_d^T T B_{ra} & -\gamma I_{n_d} \end{bmatrix} \quad (7.105)$$

com  $C_j$ ,  $j \in \{1, \dots, 6\}$  vetores auxiliares, tais que  $C_j e_a = e_{a_j}$ ,

$$\Psi_{21}(e_a) = P(e_a) + 0,5 \sum_{j=1}^6 P_j e_a C_j \quad (7.106)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{32}(e_a) &= B_{ra}^T P(e_a) + 2\alpha(e_a) B_{ra}^T T^T + 0,5 B_{ra}^T \left[ \sum_{j=1}^6 P_j e_a C_j \right]^T \\ &+ [T B_{ra} W(\omega_{sl})]^T \end{aligned} \quad (7.107)$$

$$\Psi_{42}(e_a) = B_d^T P(e_a) + 0,5 B_d^T \left[ \sum_{j=1}^6 P_j e_a C_j \right]^T. \quad (7.108)$$

Então a origem de (7.62) sob efeito da lei de chaveamento (7.99) é localmente assintoticamente estável, um limitante superior de (7.74) com  $w(t) = d(t) \in \mathcal{D}$  é satisfeito e (7.98) é uma função de Lyapunov para o sistema em malha fechada (7.62), (7.99).  $\square$

**Prova 7.5** A prova segue procedimentos semelhantes às demonstrações dos Teoremas 5.4 e 6.2. A primeira etapa consiste em provar que a escolha particular de  $v_i(e_a(t), z(t))$  para esta aplicação atende à condição (7.77) do Teorema 7.1. Considerando as funções auxiliares em (7.95) e como

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(z) S_i(z) = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(z) T h_{a_i}(z) = 0, \forall z \in \mathcal{Z} \quad (7.109)$$

pela condição do Lema 7.1, para  $\theta(e_a, z) = \bar{\theta}(z)$ , tem-se

$$\bar{V}(e_a(t)) = \sum_{i \in \mathcal{M}} \bar{\theta}_i(z(t)) v_i(e_a(t), z(t)) = e_a(t)^T P(e_a(t)) e_a(t).$$

Logo

$$V(e_a(t), z(t)) = \max_{\theta \in \Theta} \sum_{i \in \mathcal{M}} \theta_i v_i(e_a(t), z(t)) \geq \bar{V}(e_a(t)), \forall e_a, \forall z \in \mathcal{Z}. \quad (7.110)$$

O próximo passo é verificar a existência de funções positivas definidas que sejam limitantes superiores e inferiores para  $V(e_a(t), z(t))$ . Inicialmente, observe que a constante definida a seguir será positiva em

virtude de (7.103)

$$\epsilon_1 = \min_{e_a \in \mathcal{X}} \lambda_{\min}(P(e_a) + L_a \aleph_{e_a} + \aleph_{e_a}^T L_a^T).$$

Pré e pós multiplicando a condição (7.103) pelo erro aumentado de seguimento e sabendo que  $\aleph_{e_a} e_a = 0$ , obtém-se a expressão que representa  $\bar{V}(e_a(t))$ . Sob estes argumentos e considerando a equação (7.110), é possível estabelecer uma função positiva definida que é um limitante inferior de  $V(e_a(t), z(t))$

$$V(e_a(t), z(t)) \geq \bar{V}(e_a(t)) \geq \epsilon_1 \|e_a(t)\|^2, \quad \forall e_a \in \mathcal{X}, \quad \forall z \in \mathcal{Z}.$$

Adicionalmente, é possível verificar que  $v_i(e_a(t), z(t)) \leq \beta_i(\|e_a(t)\|)$ , sendo

$$\begin{aligned} \beta_i(\|e_a(t)\|) := & \|P_0\| \|e_a(t)\|^2 + \max_{j \in \mathcal{N}} \{\|P_j\|\} \|e_a(t)\|^2 \left( \sum_{k=1}^6 |e_{a_k}| \right) \\ & + 2\|e_a(t)\| \|T\| \|h_{0_a}\| + 2\|e_a(t)\| \|T\| \|B_{ra}\| \|V_i\| \end{aligned}$$

onde  $j \in \mathcal{N} := \{1, \dots, 6\}$ . Assim, prova-se que

$$\max_{i \in \mathcal{M}} \{\beta_i(\|e_a(t)\|)\} \geq V(e_a(t), z(t)) \geq \bar{V}(e_a(t)) \geq \epsilon_1 \|e_a(t)\|^2 \quad (7.111)$$

$\forall e_a \in \mathcal{X}, \quad \forall z \in \mathcal{Z}$ . Logo, a condição (7.77) do Teorema 7.1 está sendo atendida por (7.103) para a escolha particular de  $v_i(e_a(t), z(t))$ , sendo as funções positivas definidas  $\phi_1(e_a(t)) = \epsilon_1 \|e_a(t)\|^2$  e  $\phi_2(e_a(t)) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{\beta_i(\|e_a(t)\|)\}$ .

Como a matriz de dinâmica  $F(e_a(t))$  não depende do chaveamento, também neste caso será considerado  $\alpha_i(e_a) = \alpha(e_a) > 0$ , o que implica em  $\alpha(e_a, \theta) = \alpha(e_a) > 0$ , satisfazendo a condição (7.78) do Teorema 7.1.

O próximo passo é demonstrar a obtenção da equação (7.104) com base na condição (7.79) do Teorema 7.1. Considerando a função auxiliar definida em (7.95) e redefinido a dinâmica do erro aumentado de seguimento em (7.62) como

$$\begin{aligned} \dot{e}_a(t) &= F_a(e_a) e_a(t) + H_{a_\theta}(z(t)) + B_d d(t) \\ &= \xi(e_a(t)) + H_{a_\theta}(z(t)) + B_d d(t) \end{aligned} \quad (7.112)$$

e utilizando a notação

$$H_{a_\theta}(z) := \sum_{i=1}^m \theta_i h_{a_i}(z)$$

é possível escrever (7.79) como

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(e_a, z, d, \theta) &= \sum_{i \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{M}} \theta_i \theta_j \nabla v_i(e_a, z)^T (\xi(e_a) + h_{a_j}(z) + B_d d) \\ &\quad + g_i(e_a, z) + 2\alpha(e_a)(\theta_i - \bar{\theta}_i(z))v_i(e_a, z) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} y_e^T y_e - \gamma d^T d < 0 \\ &= \begin{pmatrix} \xi(e_a(t)) \\ e_a(t) \\ 1 \\ d(t) \end{pmatrix}^T M(e_a, z, \theta) \begin{pmatrix} \xi(e_a(t)) \\ e_a(t) \\ 1 \\ d(t) \end{pmatrix} < 0 \quad (7.113) \end{aligned}$$

sendo

$$M(e_a, z, \theta) = \begin{bmatrix} 0 & \star & \star & \star \\ M_{21}(e_a) & \gamma^{-1} C_y^T C_y & \star & \star \\ H_{a_\theta}^T(z) T^T & M_{32}(e_a, z, \theta) & 2H_{a_\theta}^T(z) T H_{a_\theta}(z) & \star \\ 0 & M_{42}(e_a) & B_d^T T H_{a_\theta}(z) & M_{44} \end{bmatrix} \quad (7.114)$$

$$M_{21}(e_a) = P(e_a) + \sum_{j=1}^6 P_j e_a C_j$$

$$\begin{aligned} M_{32}(e_a, z, \theta) &= H_{a_\theta}(z)^T P(e_a) + 2\alpha(e_a) H_{a_\theta}(z)^T T^T \\ &\quad + 0,5 H_{a_\theta}(z)^T \left[ \sum_{j=1}^6 P_j e_a C_j \right]^T + [T B_{ra} V_\theta W(\omega_{sl}) z]^T \end{aligned}$$

$$M_{42}(e_a) = B_d^T P(e_a) + 0,5 B_d^T \left[ \sum_{j=1}^6 P_j e_a C_j \right]^T + \gamma^{-1} D_y^T C_y$$

$$M_{44} = \gamma^{-1} D_y^T D_y - \gamma I_{n_d}.$$

Depois, sabendo que  $H_{a_\theta}(z(t)) = 0 \forall z \in \mathcal{Z}$  pela condição do



Lema 7.1, é possível descrever  $H_{a_\theta}(z(t))$  como

$$\begin{aligned} H_{a_\theta}(z) &= H_{a_\theta}(z) - H_{a_{\bar{\theta}}}(z) \\ &= h_{0_a} + \sum_{i=1}^m \theta_i B_{ar} V_i z - \left( h_{0_a} + \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(z) B_{ar} V_i z \right) \\ &= B_{ar} \sum_{i=1}^m (\theta_i - \bar{\theta}_i(z)) V_i z(t) = B_{ar} V_{\Delta\theta} z(t). \end{aligned} \quad (7.115)$$

Adicionalmente, utilizando argumentos semelhantes para  $\dot{S}_\theta(z(t)) = T\dot{H}_{a_\theta}(z(t))$  e como  $V_\theta W(\omega_{sl}) = W(\omega_{sl})V_\theta$

$$\begin{aligned} \dot{H}_{a_\theta}(z) &= \dot{H}_{a_\theta}(z) - \dot{H}_{a_{\bar{\theta}}}(z) \\ &= \sum_{i=1}^m \theta_i B_{ar} W(\omega_{sl}) V_i z - \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(z) B_{ar} W(\omega_{sl}) V_i z \\ &= B_{ar} W(\omega_{sl}) \sum_{i=1}^m (\theta_i - \bar{\theta}_i(z)) V_i z(t) = B_{ar} W(\omega_{sl}) V_{\Delta\theta} z(t). \end{aligned} \quad (7.116)$$

Utilizando as considerações vistas anteriormente, é possível re-escrever (7.113) como

$$\widetilde{M}(e_a, z, d, \theta) = \pi_b^T (\Psi(e_a) + \Omega^T \gamma^{-1} \Omega) \pi_b < 0 \quad (7.117)$$

sendo  $\pi_b = (\xi(e_a(t)) \quad e_a(t) \quad V_{\Delta\theta} z(t) \quad d(t))^T$  e  $\Omega = (0 \quad C_y \quad 0 \quad D_y)$ .

Aplicando o Lema de Finsler em (7.117) é possível inserir a matriz  $N_b(e_a)$  que contém os anuladores lineares. Considerando o espaço nulo da matriz  $C_a$  definida em (7.100) e aplicando novamente o Lema de Finsler, obtém-se

$$\begin{aligned} &Q_a^T (\Psi(e_a) + L_b N_b(e_a) + N_b(e_a)^T L_b^T) Q_a \\ &+ Q_a^T \Omega^T \gamma^{-1} \Omega Q_a < 0. \end{aligned} \quad (7.118)$$

Finalmente, aplicando o Complemento de Schur em (7.118) é obtida a LMI em (7.104), que é uma condição suficiente para (7.79) do Teorema 7.1.  $\square$

### 7.5.2 Projeto da lei de chaveamento do inversor ligado à rede elétrica

Na topologia que está sendo considerada neste trabalho o fluxo de potência ativa e reativa entre o rotor e a rede ocorre via RSC e GSC. A dinâmica do *link* CC que interliga os dois inversores que compõem o conversor *back-to-back* visto na Figura 28 pode ser descrita através do fluxo de potência entre os inversores

$$\dot{V}_{cc}(t) = \frac{\omega_s}{C_g V_{cc}(t)} (P_r(t) - P_g(t)) \quad (7.119)$$

sendo  $C_g$  o valor da capacitância do *link* CC e  $P_g$  a potência ativa entregue pelo GSC à rede elétrica, dada por

$$P_g(t) = (v_d^s(t)i_d^g(t) + v_q^s(t)i_q^g(t)). \quad (7.120)$$

Em regime permanente  $\dot{V}_{cc} = 0$  e  $P_g = P_r$ .

Não existe acúmulo de energia no conversor estático, de maneira que a potência ativa que entra em um dos lados será entregue do outro lado. No entanto, as potências reativas entregues ou absorvidas por cada inversor podem diferir, uma vez que isso não implica em acúmulo de energia no interior do conversor. Desta forma, a potência reativa poderá ter qualquer valor dentro dos limites de operação de cada conversor. Usualmente o GSC é utilizado somente para fornecer potência ativa para a rede. Neste caso a potência reativa entregue pelo GSC será nula ou o fator de potência é unitário, ou seja,

$$Q_g(t) = (v_q^s(t)i_d^g(t) - v_d^s(t)i_q^g(t)) = 0. \quad (7.121)$$

As equações acima são utilizadas para determinação dos valores de equilíbrio desejados para as componentes  $d$  e  $q$  das correntes do GSC. Uma simplificação importante pode ser obtida promovendo o alinhamento do eixo direto do sistema de coordenadas  $dq$  com o fasor da tensão da fase  $A$  do estator. Este alinhamento não implica em perda de generalidade, nem em aproximações no modelo. No entanto essa alteração simplifica as equações das potências.

Promovendo este alinhamento resulta em  $v_q^s = 0$ . Assim as equações anteriores ficam

$$P_g(t) = v_d^s(t)i_d^g(t) \quad (7.122)$$

$$Q_g(t) = -v_d^s(t)i_q^g(t) = 0 \quad (7.123)$$

Para atender (7.123) é necessário fazer  $i_q^g = 0$ .

O ponto de equilíbrio deve ser projetado de acordo com as condições de operação vistas anteriormente e de forma a satisfazer a condição do Lema 7.2. Inicialmente, escrevendo (7.71) para este caso particular

$$-\frac{R_f}{L_f} \bar{i}_d^g + \omega_e \bar{i}_q^g + B_g \bar{v}_d^g - B_g \bar{v}_d^s = 0 \quad (7.124)$$

$$-\omega_e \bar{i}_d^g - \frac{R_f}{L_f} \bar{i}_q^g + B_g \bar{v}_q^g - B_g \bar{v}_q^s = 0 \quad (7.125)$$

sendo  $\bar{v}_{dq}^g = (\bar{v}_d^g \quad \bar{v}_q^g)^T$  as tensões nos terminais do GSC em equilíbrio.

As equações (7.124) e (7.125) podem ser simplificadas considerando o alinhamento do eixo direto do sistema de coordenadas  $dq$  com o fasor da tensão da fase  $A$  do estator, o que implica  $\bar{v}_q^s = 0$ . Considerando também  $Q_g = 0$  em (7.123) é necessário fazer  $\bar{i}_q^g = 0$ . Fazendo  $P_r = P_g$  em (7.122) é possível determinar  $\bar{i}_d^g$ . Com este valor de corrente e com as considerações previamente descritas é possível determinar o ponto de equilíbrio e os valores no equilíbrio para as tensões nos terminais do GSC.

Como a dinâmica do erro de seguimento do GSC é um sistema chaveado não linear, os resultados serão obtidos com base nas condições do Teorema 6.1. As seguintes funções auxiliares  $v_i(e_g(t), z(t)) \in \mathcal{C}^1$ ,  $i \in \mathcal{M}$  de (6.9) serão consideradas para este caso

$$v_i(e_g(t), z(t)) = e_g(t)^T P e_g(t) + 2e_g(t)^T S_i(z(t)) \quad (7.126)$$

onde

$$S_i(z(t)) := T k_i(z(t)) = T(k_0 + B_g V_i z(t)). \quad (7.127)$$

Considerando a escolha efetuada em (7.126), pode-se verificar que

$$\begin{aligned} V(e_g(t), z(t)) &= \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e_g(t), z(t))\} = e_g(t)^T P e_g(t) + 2e_g(t)^T T k_0 \\ &\quad + \max_{i \in \mathcal{M}} \{2e_g(t)^T T B_g V_i z(t)\} \end{aligned} \quad (7.128)$$

e desta forma a lei de chaveamento definida em (6.9) é equivalente a

$$\begin{aligned}\sigma(e_g(t), z(t)) &= \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e_g(t), z(t))\} \\ &= \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{2e_g(t)^T T B_g V_i z(t)\}.\end{aligned}\quad (7.129)$$

Adicionalmente, para esta escolha de  $v_i(e_g(t), z(t))$

$$\begin{aligned}\dot{v}_i(e_g(t), z(t)) &= \frac{\partial}{\partial e_g} v_i(e_g(t), z(t)) \dot{e}_g(t) + \frac{\partial}{\partial t} v_i(e_g(t), z(t)) \\ &= \nabla v_i(e_g(t)) \dot{e}_g(t) + 2e_g(t)^T \dot{S}_i(z(t)).\end{aligned}$$

Tendo como base as considerações prévias, é possível estabelecer o seguinte teorema para o projeto da lei de chaveamento  $\sigma(e_g(t), z(t))$ .

**Teorema 7.3** *Seja  $\bar{\xi}$  um dado vetor constante representando o equilíbrio desejado para o sistema chaveado não linear (7.38), que representa a dinâmica em pu do inversor conectado à rede elétrica. Suponha que o vetor de estados  $\xi$  possa ser medido e/ou corretamente estimado. Considere o sistema (7.68) cujo estado é o erro de seguimento. Assuma que exista  $\bar{\theta}(z(t)) \in \Theta$  definido de acordo com o Lema 7.2. Seja a constante  $\alpha > 0$  dada e escolhida conforme as orientações da Observação 4.2.*

*Supondo que existam matrizes  $T$  e  $P$  que resolvam o seguinte problema LMI*

$$P > 0 \quad (7.130)$$

$$\Psi < 0 \quad (7.131)$$

sendo

$$\Psi = \begin{bmatrix} A_g^T P + P A_g & & \\ B_g^T (P + T^T A_g + 2\alpha T^T) + (T B_g W_g)^T & B_g^T (T + T^T) B_g \end{bmatrix} \quad (7.132)$$

então a origem de (7.70) sob efeito da lei de chaveamento (7.129) é globalmente assintoticamente estável e (7.128) é uma função de Lyapunov para o sistema em malha fechada (7.70), (7.129).  $\square$

**Prova 7.6** *Em primeiro lugar será demonstrado que a escolha particular de  $v_i(e_g(t), z(t))$  para esta aplicação atende à condição (6.6) do Teorema 6.1. Considerando as funções auxiliares em (7.126) e pela*

condição do Lema 7.2

$$\sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(z(t)) S_i(z(t)) = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(z(t)) T k_i(z(t)) = 0, \forall z \in \mathcal{Z}. \quad (7.133)$$

Assim, para  $\theta(e(t), z(t)) = \bar{\theta}(z(t))$  com (7.130) e (7.133), tem-se

$$\bar{V}(e_g(t)) = \sum_{i \in \mathcal{M}} \bar{\theta}_i(z(t)) v_i(e_g(t), z(t)) = e_g(t)^T P e_g(t) > 0, \forall e_g \neq 0. \quad (7.134)$$

Logo

$$V(e_g(t), z(t)) = \max_{\theta \in \Theta} \sum_{i \in \mathcal{M}} \theta_i v_i(e_g(t), z(t)) \geq \bar{V}(e_g(t)) > 0 \quad (7.135)$$

$\forall e_g \neq 0, \forall z \in \mathcal{Z}$ . Desta forma  $V(e_g(t), z(t))$  é positiva definida e radialmente ilimitada, pois (7.134) é uma forma quadrática positiva definida devido à condição (7.130).

Adicionalmente,  $v_i(e_g(t), z(t)) \leq \beta_i(\|e_g(t)\|)$  sendo

$$\beta_i(\|e_g(t)\|) := \|P\| \|e_g(t)\|^2 + 2\|e_g(t)\| \|T\| \|k_0\| + 2\|e_g(t)\| \|T\| \|B_g\| \|V_i\|.$$

Logo, é possível demonstrar que

$$\max_{i \in \mathcal{M}} \{\beta_i(\|e_g(t)\|)\} \geq V(e(t), z(t)) \geq \bar{V}(e(t)) \geq \lambda_{\min}(P) \|e_g(t)\|^2. \quad (7.136)$$

Assim, a condição (6.6) do Teorema 6.1 está sendo atendida por (7.130) para a escolha particular de  $v_i(e_g(t), z(t))$ , sendo as funções positivas definidas  $\phi_1(e_g(t)) = \lambda_{\min}(P) \|e(t)\|^2$  e  $\phi_2(e_g(t)) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{\beta_i(\|e_g(t)\|)\}$ . Verifica-se que neste caso a função  $\phi_1(e_g(t))$  será radialmente ilimitada, o que é um requisito necessário para garantia de estabilidade global.

Com relação à condição (6.7), como a matriz de dinâmica  $A_g$  é constante, será considerado  $\alpha_i = \alpha > 0$ , o que implica em  $\alpha(e, \theta) = \alpha > 0$ .

Na sequência, serão apresentados os passos para obtenção da LMI (7.131) e também a demonstração que a mesma atende à condição (6.8) do Teorema 6.1. Para a escolha de  $v_i(e_g(t))$  em (7.126) é possível

reescrever o lado esquerdo da condição (6.8) do Teorema 6.1 como

$$\begin{aligned}
 M(e_g, z, \theta) &= \sum_{i \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{M}} \theta_i \theta_j \nabla v_i(e_g, z)^T (A_g e_g + k_j(t)) \\
 &\quad + g_i(e_g, z) + 2\alpha(\theta_i - \bar{\theta}_i(z))v_i(e_g, z) \\
 &= \begin{pmatrix} e_g(t) \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} A_g^T P + P A_g & \star \\ M_{21}(z, \theta) & 2K_\theta^T(z) T K_\theta(z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_g(t) \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.137}$$

com

$$M_{21}(z, \theta) = K_\theta^T(z)P + K_\theta^T(z)T^T A + 2\alpha K_\theta^T(z)T^T + [TB_g V_\theta W_g z]^T.$$

Na sequência, sabendo que  $K_{\bar{\theta}}(z) = 0$ ,  $\forall z \in \mathcal{Z}$  pela condição do Lema 7.2, é possível descrever  $K_\theta(z)$  como

$$\begin{aligned}
 K_\theta(z) &= K_\theta(z) - K_{\bar{\theta}}(z) = k_0 + \sum_{i=1}^m \theta_i B_g V_i z - \left( k_0 + \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(z) B_g V_i z \right) \\
 &= B_g \sum_{i=1}^m (\theta_i - \bar{\theta}_i(z)) V_i z(t) = B_g V_{\Delta\theta} z(t).
 \end{aligned} \tag{7.138}$$

Utilizando argumentos semelhantes para  $\dot{S}_\theta(z) = T \dot{K}_\theta(z)$  e como  $V_\theta W_g = W_g V_\theta$

$$\begin{aligned}
 \dot{K}_\theta(z) &= \dot{K}_\theta(z) - \dot{K}_{\bar{\theta}}(z) = \sum_{i=1}^m \theta_i B_g W_g V_i z - \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i(z) B_g W_g V_i z \\
 &= B_g W_g \sum_{i=1}^m (\theta_i - \bar{\theta}_i(z)) V_i z(t) \\
 &= B_g W_g V_{\Delta\theta} z(t).
 \end{aligned} \tag{7.139}$$

Finalmente, é possível reescrever (7.137) como

$$M(e_g, z, \theta) = \pi_c^T \Psi \pi_c \tag{7.140}$$

sendo  $\pi_c = (e_g(t) \quad V_{\Delta\theta} z(t))^T$ , da qual é possível obter a condição (7.131).

A última etapa consiste em demonstrar que a LMI (7.131) é uma condição suficiente para (6.8) do Teorema 6.1. Defina a seguinte cons-

tante, que é positiva pela LMI (7.131)

$$\epsilon_3 = \lambda_{\min}(-\Psi)$$

é possível obter a condição

$$M(e_g, z, \theta) = \pi_c^T \Psi \pi_c \leq -\epsilon_3 \|\pi_c\|^2.$$

Como  $\|\pi_c\|^2 = \|e_g\|^2 + \|V_{\Delta\theta} z\|^2$ , é possível verificar que  $\|\pi_c\|^2 \geq \|e_g\|^2$ , o que por sua vez implica

$$M(e_g, z, \theta) \leq -\epsilon_3 \|e_g\|^2, \quad \forall e_g.$$

Assim, é possível concluir que a LMI (7.131) é uma condição suficiente para (6.8) do Teorema 6.1 sendo  $\phi_3(e) = \epsilon_3 \|e_g\|^2 > 0$ ,  $\forall e_g \neq 0$ . Verifica-se também que neste caso as condições são satisfeitas globalmente para  $e_g$ , permitindo assim obter os resultados para estabilidade assintótica global.  $\square$

## 7.6 EXEMPLO NUMÉRICO

**Exemplo 7.1** Considere um sistema eólico empregando DFIG. Os parâmetros do gerador de indução assíncrono em pu são apresentados na Tabela 3. Os parâmetros da curva  $C_p$  (equação (7.8)) são vistos na Tabela 4 e os parâmetros da turbina eólica são vistos na Tabela 5. Considera-se neste caso que os valores dos estados são conhecidos, ou seja que os valores dos fluxos no rotor e no estator, a velocidade do rotor e as correntes do inversor conectado na rede são mensuráveis e/ou corretamente estimados.

O ponto de equilíbrio desejado para o RSC foi calculado utilizando as equações (7.84)-(7.93). Para este exemplo considera-se  $V_{cc} = 2$ , as tensões na rede  $\bar{v}_{d_p}^s = 1,0012$  e  $\bar{v}_{q_p}^s = 0$  e a velocidade do vento  $\bar{V} = 0,6305$ , tudo em pu. Considerando  $\bar{\Lambda}_{d_p}^s = \bar{X}_1 = 0$ , é possível calcular os demais valores para o equilíbrio com máximo aproveitamento da potência do vento. Assim,

$$\bar{x} = (0 \quad 1,0032 \quad -0,0792 \quad 1,0285 \quad 0,9813)^T.$$

Neste equilíbrio os valores das potências em pu são  $P_s = 0,4082$ ,  $Q_s = 0$ ,  $P_r = -8,974 \times 10^{-3}$  e  $Q_r = -5,510 \times 10^{-3}$ . Para este exemplo a saída de desempenho considerada é a velocidade de rotação da turbina,

Tabela 3 – Exemplo 7.1: parâmetros do gerador de indução

Parâmetro	Valor
$R_s$	0,00488
$R_r$	0,00549
$L_s$	4,0452
$L_r$	4,05234
$L_m$	3,95279
$p$	2
$P_b$	$20 \times 10^6$ W
$V_b$	690 V
$\omega_s = \omega_b$	$2\pi 50$ rad/s

Tabela 4 – Exemplo 7.1: parâmetros curva  $C_p$ 

Parâmetro	Valor
$k_1$	0,22
$k_2$	210
$k_3$	0,8
$k_4$	0
$k_5$	1
$k_6$	8
$k_7$	18
$k_8$	0,09
$k_9$	0,01

ou seja  $y_e(t) = x_5(t)$ , o que implica  $C_y = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$  e  $D_y = 0$ . Resolvendo as LMIs do Teorema 7.2, foi possível obter a matriz  $T$  que define a lei de chaveamento (7.99). Neste caso as condições foram satisfeitas para o politopo

$$\mathcal{X} = \{e_a : -0,3 \leq e_1 \leq 0,1, \ -0,3 \leq e_2 \leq 0,1, \ -1 \leq e_3 \leq 4, \\ -1 \leq e_4 \leq 1, \ -0,4 \leq e_5 \leq 0,1 \ -0,4 \leq e_T \leq 0,4\}.$$

Foram realizadas simulações utilizando os parâmetros do RSC e a lei de chaveamento com a matriz  $T$  obtida através da resolução das LMIs. Os valores numéricos das matrizes para este exemplo podem ser



Tabela 5 – Exemplo 7.1: parâmetros da turbina eólica

Parâmetro	Valor
$R$	45m
$H$	3,5
$F_{pu}$	0
$\omega_N$	1,3416
$V_{vb}$	12 m/s
$V_{vN}$	0,9583
$\lambda_{opt}$	9,65
$\lambda_N$	8,68
$C_P^{max}$	0,4756
$C_{PN}$	0,467
$N_{gear}$	95
$K_{opt}^{pu}$	0,4248

vistos no Apêndice A.4.1. A condição inicial é

$$e_a(0) = (0 \quad -1,061 \quad 42,245 \quad 1,088 \quad -311,265 \quad 279,478)^T \times 10^{-3}$$

que corresponde ao ponto de máximo aproveitamento de potência para uma velocidade de vento  $V = 0,4305$ . Os resultados de simulação podem ser vistos na Figura 30. Observa-se que todos os sinais de erro convergem para zero.

Neste exemplo também foi realizado o projeto da lei de chaveamento do GSC. O ponto de equilíbrio para este caso é obtido através das equações (7.120)-(7.125) e considerando o alinhamento do eixo direto do sistema de coordenadas  $dq$  com o fasor da tensão da fase  $A$  do estator, o que implica  $\bar{v}_q^s = 0$ . Além disso, considera-se também  $Q_g = 0$ , o que implica  $i_q^g = 0$ . Os valores da resistência e da indutância do filtro nos terminais do inversor são  $R_f = 0,488 \times 10^{-3}$  e  $L_f = 0,405$  (ambos em pu). Desta forma para este exemplo o ponto de equilíbrio será

$$\bar{\xi} = (-0,00896 \quad 0)^T.$$

Resolvendo as LMIs do Teorema 7.3, foi possível obter a matriz  $T$  que define a lei de chaveamento (7.129). A Figura 31 apresenta os resultados de simulação para condições iniciais nulas. Observa-se que todos os sinais de erro convergem para zero, o que significa que em regime os valores desejados para as corrente nos terminais do GSC

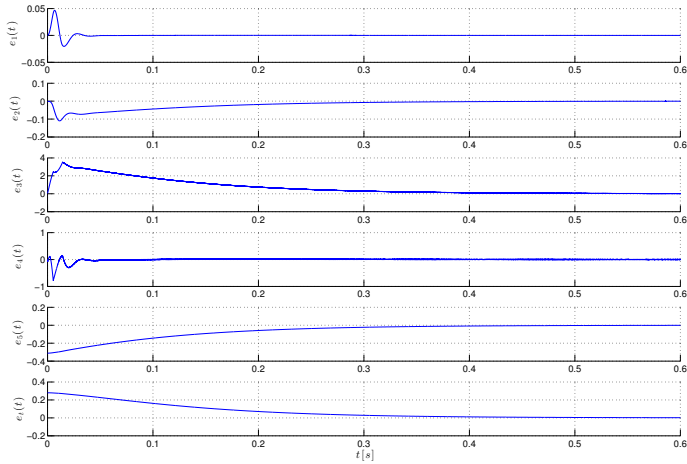


Figura 30 – Exemplo 7.1: erro de seguimento para as grandezas físicas do RSC.

*estão sendo corretamente atingidos.*  $\square$

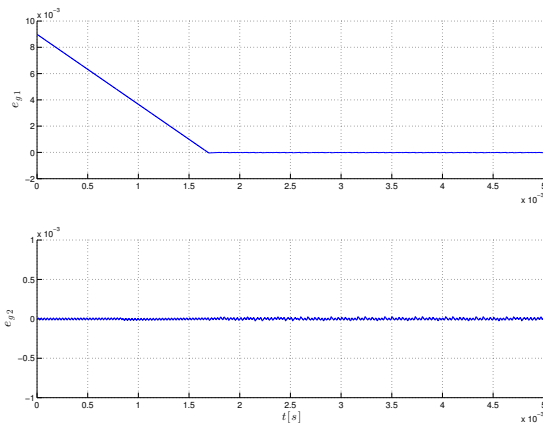


Figura 31 – Exemplo 7.1: erro de seguimento para as correntes do GSC.

## 7.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo deu continuidade aos estudos de projeto de lei de chaveamento para sistemas chaveados não lineares. O estudo foi particularizado para aplicações envolvendo sistemas de geração de energia eólica conectados na rede elétrica. Dentre as diferentes topologias de geradores e conversores, foi escolhida a DFIG. Os principais aspectos deste sistema foram discutidos. Na sequência foram estabelecidos modelos para cada parte do DFIG. Utilizando os modelos e com base nos resultados para sistemas chaveados não lineares já apresentados no capítulo anterior, foi possível estabelecer uma metodologia de projeto para lei de chaveamento do inversor ligado nas bobinas do rotor do gerador, descrita pelo conjunto de LMIs que compõem o Teorema 7.2. Também foi desenvolvida uma metodologia para projeto da lei de chaveamento do inversor conectado na rede elétrica, apresentada no Teorema 7.3. A utilização do método proposto foi ilustrada através dos resultados do Exemplo 7.1. Para o exemplo numérico considerado foi possível obter solução das LMIs tanto para o projeto da lei de chaveamento do RSC quanto para o projeto da lei de chaveamento do GSC. Os resultados de simulação demonstraram a funcionalidade da técnica.

As condições do Teorema 7.2 dependem da escolha dos valores mínimos e máximos do politopo  $\mathcal{X}$ . Sob este aspecto, uma sugestão para trabalhos futuros seria modificar os resultados do Teorema 7.2 buscando reduzir o conservadorismo e permitir a obtenção de solução das LMIs para politopos com limites maiores, ou ainda elaborar técnicas que permitam estimar a região de convergência para um dado aerogerador. Um outro aspecto a ser melhorado seria verificar formas de implementar a estratégia de chaveamento considerando a velocidade do vento como um parâmetro incerto para um dado intervalo de valores. Neste caso a referência desejada  $\bar{x}$ , ao invés de ser considerada constante, seria uma função da velocidade do vento. A ideia é permitir que o sistema trabalhe no ponto de máximo aproveitamento da potência para diferentes velocidades de vento.



## 8 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

### 8.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta tese apresentou uma metodologia para análise e controle de sistemas chaveados. Os resultados apresentados incluem condições de projeto de lei de chaveamento para sistemas chaveados afins e sistemas chaveados não lineares.

Para uma melhor compreensão dos aspectos que envolvem o tema em estudo neste trabalho, o Capítulo 2 apresentou um referencial teórico em relação às propriedades, características e ferramentas utilizadas na análise de sistemas chaveados. Foi abordado também o problema de projetar leis de chaveamento com o objetivo de estabilizar o sistema.

A partir do Capítulo 3 foram apresentados vários resultados para projeto de lei de chaveamento. Os resultados foram particularizados para sistemas chaveados afins e com lei de chaveamento utilizando a função ‘max’. No Capítulo 3, as condições de projeto foram estabelecidas para uma função auxiliar genérica e as mesmas garantem que o sistema chaveado, sob efeito da lei de chaveamento projetada, apresente estabilidade global e assintótica, mesmo com a ocorrência de modos deslizantes em qualquer superfície de chaveamento do sistema. A principal contribuição das condições de projeto propostas é que as mesmas não exigem a existência de uma combinação Hurwitz estável das matrizes de dinâmicas dos subsistemas que compõem o sistema chaveado afim.

No Capítulo 4, os resultados foram particularizados para um formato específico de função auxiliar. Sob estas considerações foi possível obter condições suficientes para verificar as expressões e descrevê-las como um conjunto de LMIs. A metodologia baseia-se na suposição que exista uma combinação Hurwitz estável das matrizes de dinâmicas dos subsistemas que compõem o sistema chaveado.

A inclusão de índices de desempenho nos resultados obtidos foi abordada no Capítulo 5. Dois requisitos de desempenho foram tratados: o custo garantido e a atenuação de distúrbio. Um aspecto interessante visto neste capítulo é a possibilidade de realizar, para uma determinada classe de sistemas chaveados, a eliminação de distúrbios externos para uma faixa de valores através da ação da lei de chaveamento, sem afetar a dinâmica do erro de seguimento.

A partir do Capítulo 6 foi considerada uma classe de sistemas chaveados não lineares. As aplicações escolhidas foram de controle de motores de indução acionados por inversores de frequência, no Capítulo

6, e o controle de aerogeradores de indução conectados à rede elétrica com conversores, no Capítulo 7. Dentre as diferentes topologias de aerogeradores, a escolhida para o estudo foi a DFIG. Inicialmente as condições foram estabelecidas para uma função auxiliar genérica. Depois, os resultados foram particularizados para cada aplicação, obtendo novas metodologias para projeto de leis de chaveamento.

É importante enfatizar que todos os resultados propostos foram ilustrados através de exemplos numéricos. Nos Capítulos 3, 4 e 5 foram utilizados sistemas acadêmicos e circuitos de eletrônica de potência, como o conversor abaixador de tensão (*Buck*) e o conversor abaixador e elevador de tensão (*Buck-Boost*). Nos Capítulos 6 e 7 os resultados foram verificados empregando modelos que reproduzem as condições reais de aplicação.

## 8.2 PUBLICAÇÕES RELACIONADAS AO TRABALHO

As pesquisas desenvolvidas até o momento geraram resultados que deram origem aos seguintes artigos já publicados:

- A. Trofino, D. Assmann, C.C. Scharlau, D.F. Coutinho. "Switching Rule Design for Switched Dynamic Systems with Affine Vector Fields". *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 54, p. 2215-2222, 2009 - este artigo propõe uma metodologia de projeto de lei de chaveamento para sistemas chaveados afins, tendo como exemplo numérico o conversor *Buck* com carga incerta.
- A. Trofino, D. Assmann, C.C. Scharlau, D.F. Coutinho. "Switching Rule Design for Switched Dynamic Systems with Affine Vector Fields". *Proc. of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, 2009 - neste artigo é apresentada uma metodologia de projeto de lei de chaveamento para sistemas chaveados afins e o estudo de caso considerado é um conversor *Buck* com oscilação na tensão de entrada.
- A. Trofino, R. Reginatto, J. Oliveira, C.C. Scharlau, D.F. Coutinho. "A reference tracking strategy for affine switched systems". *Proc. of the 7th International Conference on Control and Automation*, 2009 - este artigo propõe um método de projeto de lei de chaveamento de forma que os estados do sistema chaveado sigam um determinado sinal de referência.
- A. Trofino, C. C. Scharlau, T. J. M. Dezuo, M. C. de Oliveira.

“Stabilizing switching rule design for affine switched systems”. *Proc. of the 50th IEEE Conference on Decision and Control*, 2011 - este artigo apresenta uma metodologia de projeto de lei de chaveamento para sistemas chaveados afins, garantindo estabilidade do sistema mesmo com a ocorrência de modos deslizantes.

- A. Trofino, C.C. Scharlau, D.F. Coutinho. “Corrections to: Switching Rule Design for Switched Dynamic Systems with Affine Vector Fields”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 57, p. 1080-1082, 2012 - este artigo propõe correções em resultados apresentados anteriormente, com o objetivo de garantir estabilidade do sistema em modos deslizantes.
- A. Trofino, C. C. Scharlau, T. J. M. Dezuo, M. C. de Oliveira. “Switching rule design for affine switched systems with  $\mathcal{H}_\infty$  performance”. *Proc. of the 51st IEEE Conference on Decision and Control*, 2012 - este artigo apresenta a inclusão de atenuação de distúrbio na metodologia de projeto de lei de chaveamento para sistemas chaveados afins.

Os seguintes artigos encontram-se no momento em processo de revisão para publicação ou preparação para submissão:

- A. Trofino, C. C. Scharlau, T. J. M. Dezuo, M. C. de Oliveira. “Switching rule design for affine switched systems using a max-type composition rule”. *Em revisão para publicação no periódico Systems & Control Letters*.
- A. Trofino, C. C. Scharlau, T. J. M. Dezuo, M. C. de Oliveira. “Switching rule design for affine switched systems with guaranteed cost performance”. *À ser submetido para publicação no periódico Automática*.
- A. Trofino, C. C. Scharlau, T. J. M. Dezuo, M. C. de Oliveira. “Switching rule design for affine switched systems with  $\mathcal{H}_\infty$  performance”. *À ser submetido para publicação no periódico IEEE Transactions on Automatic Control*.
- A. Trofino, C. C. Scharlau, T. J. M. Dezuo, R. Reginatto. “Switching rule design for inverter-fed induction motors”. *Submetido para publicação no congresso 52nd IEEE Conference on Decision and Control*.

### 8.3 PERSPECTIVAS FUTURAS

Dentre as sugestões de trabalhos futuros, pode-se citar:

- Inclusão de condições nos resultados já obtidos de forma a efetuar a limitação de frequência do chaveamento, evitando desta forma a ocorrência de *chattering* e possibilitando a implementação experimental das metodologias de projeto de leis e chaveamento;
- Modificar as condições LMI apresentadas nos Capítulos 4 e 5 de forma que não seja mais necessária a existência de uma combinação Hurwitz estável das matrizes de dinâmicas dos subsistemas que compõem o sistema chaveado afim;
- Realizar pesquisas sobre a atenuação e eliminação dos efeitos do ruído externo em sistemas chaveados através da inclusão de requisitos de desempenho, com base nos resultados vistos no Capítulo 5;
- Estender os resultados do motor de indução apresentados no Capítulo 6 para outros perfis de torque de carga. Neste caso a carga pode ser considerada como um parâmetro incerto ou ainda o modelo da dinâmica da carga pode ser incluído no problema;
- Incluir o objetivo adicional de atenuar os efeitos da variação paramétrica (resistência do rotor, por exemplo) na metodologia de projeto de lei de chaveamento para motor de indução alimentado por inversor;
- Pesquisar formas de reduzir o conservadorismo das LMIs obtidas neste trabalho para o projeto de lei de chaveamento considerando uma classe de sistemas chaveados não lineares e também elaborar técnicas que permitam estimar a região de convergência;
- Estender os resultados do gerador eólico para a velocidade do vento como um parâmetro incerto definido em um dado intervalo de valores;
- Modificar a metodologia de controle para o DFIG de forma a projetar conjuntamente as leis de chaveamento para o RSC e o GSC.
- Efetuar a extensão dos métodos propostos na tese para o caso de sistemas chaveados com dinâmica a tempo discreto.



## REFERÊNCIAS

- ANAYA-LARA, O. et al. *Wind energy generation: modelling and control*. [S.l.]: Wiley, 2009.
- BAROUDI, J. A.; DINAHAHI, V.; KNIGHT, A. M. A review of power converter topologies for wind generators. *Renewable Energy*, Elsevier, v. 32, n. 14, p. 2369–2385, 2007.
- BEMPORAD, A.; FERRARI-TRECCATE, G.; MORARI, M. Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 45, n. 10, p. 1864–1876, 2000.
- BLASCHKE, F. *The principle of field orientation as applied to the new transvector closed-loop control system for rotating field machine*. [S.l.]: Siemens Review, 1972. 217–220 p.
- BOLZERN, P.; SPINELLI, W. Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In: *Proc. of the 2004 American Control Conference*. Boston, MA, EUA: [s.n.], 2004. v. 5, p. 3890 – 3895.
- BOSE, B. K. *Power electronics and variable frequency drives: technology and applications*. [S.l.]: Wiley-IEEE Press, 1996.
- BOYD, S. et al. *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- BRANICKY, M. S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 43, n. 4, p. 475–482, 1998.
- BROCKETT, R. W. Asymptotic stability and feedback stabilization. In: \_\_\_\_\_. *Differential geometric control theory*. [S.l.]: Birkhauser, 1983. p. 181–191.
- BROCKETT, R. W.; WOOD, J. R. Electrical networks containing controlled switches. In: *IEEE Symposium on Circuit Theory*. [S.l.: s.n.], 1974. p. 57 – 79.
- CAO, R.; COLLINS, E. R. The effects of load types on the behavior of ac motor drives during voltage sags. In: *Proc. of the 10th International*

*Conference on Harmonics and Quality of Power*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: [s.n.], 2002. v. 1, p. 353 – 358.

CHIASSON, J. Dynamic feedback linearization of the induction motor. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 38, n. 10, p. 1588–1594, 1993.

CHIASSON, J. Nonlinear controllers for an induction motor. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 4, n. 7, p. 977–990, 1996.

CHOWDHURY, B.; CHELLAPILLA, S. Double-fed induction generator control for variable speed wind power generation. *Electric Power Systems Research*, Elsevier, v. 76, n. 9-10, p. 786–800, 2006.

COUTINHO, D. F.; TROFINO, A. Piecewise polynomial Lyapunov functions for a class of switched nonlinear systems. In: *Proc. of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, HI, EUA: [s.n.], 2003. v. 4, p. 4265 – 4270.

DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: MOHEIMANI, S. O. R. (Ed.). *Perspectives in robust control*. [S.l.]: Springer, 2001, (Lecture notes in control and information sciences, v. 268). p. 241–257.

DEAECTO, G.; GEROMEL, J.  $\mathcal{H}_\infty$  control for continuous-time switched linear systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, American Society of Mechanical Engineers, v. 132, n. 4, p. 041013–1–041013–7, 2010.

DEAECTO, G. et al. Switched affine systems control design with application to dc-dc converters. *IET Control Theory & Applications*, IET, v. 4, n. 7, p. 1201–1210, 2010.

DECARLO, R.; ZAK, S.; MATTHEWS, G. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial. *Proceedings of the IEEE*, v. 76, n. 3, p. 212–232, 1988.

DECARLO, R. A. et al. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, IEEE, v. 88, n. 7, p. 1069–1082, 2000.

DENG, H.; ORUGANTI, R.; SRINIVASAN, D. Modeling and control of single-phase ups inverters: a survey. In: *Proc. of the 2005 International Conference on Power Electronics and Drives Systems*. Kuala Lumpur, Malásia: [s.n.], 2005. v. 2, p. 848 – 853.

- DI BERNARDO, M.; VASCA, F. Discrete-time maps for the analysis of bifurcations and chaos in DC/DC converters. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, v. 47, n. 2, p. 130–143, 2000.
- FERON, E. *Quadratic stabilizability of switched systems via state and output feedback*. [S.l.], 1996.
- FILIPPOV, A. F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- GABRIEL, R.; LEONARD, W.; NORDBY, C. Field oriented control of a standard ac motor using microprocessor. *IEEE Trans. Ind. Applicat.*, IA-16, n. 2, p. 186–192, 1980.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P.; BOLZERN, P. Dynamic output feedback control of switched linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 53, n. 3, p. 720–733, 2008.
- GOLDING, E. W. *The generation of electricity by wind power*. [S.l.]: E. & F.N. Spon, 1976.
- HANSEN, L. H. et al. *Conceptual survey of generators and power electronics for wind turbines*. Roskilde, Dinamarca, dez. 2001.
- HESPANHA, J. P. Uniform stability of switched linear systems: extensions of LaSalle’s invariance principle. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, IEEE, v. 49, n. 4, p. 470–482, 2004.
- HU, T.; MA, L.; LIN, Z. Stabilization of switched systems via composite quadratic functions. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, IEEE, v. 53, n. 11, p. 2571–2585, 2008.
- JI, Z. et al. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  control and stabilization of uncertain switched linear systems: a multiple Lyapunov functions approach. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, v. 128, p. 696–700, 2006.
- JOHNSON, T. L. Synchronous switching linear systems. In: *Proc. of the 24th IEEE Conference on Decision and Control*. Fort Lauderdale, FL, EUA: [s.n.], 1985. p. 1699–1700.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear systems*. 3. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2002.

KING, C.; SHORTEN, R. A singularity test for the existence of common quadratic Lyapunov functions for pairs of stable LTI systems. In: *Proc. of the 2004 American Control Conference*. Boston, MA, EUA: [s.n.], 2004. v. 4, p. 3881–3884.

KRAUSE, P. C. *Analysis of electric machinery and drive systems*. [S.l.]: Wiley-IEEE Press, 2002.

LASDON, L. S. *Optimization theory for large systems*. [S.l.]: Macmillan, 1970.

LEI, Y. et al. Modeling of the wind turbine with a doubly fed induction generator for grid integration studies. *IEEE Trans. Energy Conversion*, v. 21, n. 1, p. 257–264, 2006.

LEONHARD, W. *Control of electrical drives*. [S.l.]: Springer Verlag, 2001.

LIBERZON, D. *Switching in systems and control*. Boston: Birkhauser, 2003.

LIBERZON, D. Switched systems. In: \_\_\_\_\_. *Handbook of networked and embedded control systems*. 1. ed. [S.l.]: Birkhauser, 2005. p. 559–574.

LIBERZON, D.; HESPANHA, J. P.; MORSE, A. S. Stability of switched systems: a Lie-algebraic condition. *Systems and Control Letters*, Elsevier, v. 37, n. 3, p. 117–122, 1999.

LIBERZON, D.; MORSE, A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Syst. Mag.*, IEEE, v. 19, n. 5, p. 59–70, 1999.

LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: A short survey of recent results. In: *Proc. of the 2005 IEEE International Symposium on Intelligent Control*. Limassol, Chipre: [s.n.], 2005. p. 24–29.

LÖFBERG, J. Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Proc. of the CACSD Conference*. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. <<http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip>>.

MARQUES, J. et al. A survey on variable-speed wind turbine system. In: *Anais do 7º Congresso Brasileiro de Eletrônica de Potência*. Fortaleza, CE, Brasil: [s.n.], 2003. p. 732 – 738.

MARTINS, D. C.; BARBI, I. *Conversores CC-CC básicos não isolados*. Florianópolis: Edição dos autores, 2008.

MHASKAR, P.; EL-FARRA, N. H.; CHRISTOFIDES, P. D. Predictive control of switched nonlinear systems with scheduled mode transitions. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 50, n. 11, p. 1670–1680, 2005.

MIGNONE, D.; FERRARI-TRECCATE, G.; MORARI, M. Stability and stabilization of piecewise affine and hybrid systems: An LMI approach. In: *Proc. of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney, Austrália: [s.n.], 2000. v. 1, p. 504–509.

MONTAGNER, V. F. et al. State feedback control of switched linear systems: an lmi approach. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 194, n. 2, p. 192–206, 2006.

MORSE, A. S. *Control using logic-based switching*. London: Springer, 1997.

MULLER, S.; DEICKE, M.; DE DONCKER, R. W. Doubly fed induction generator systems for wind turbines. *IEEE Trans. Ind. Applicat.*, v. 8, n. 3, p. 26–33, 2002.

NICOLAS, C. V. et al. Guidelines for the design and control of electrical generator systems for new grid connected wind turbine generators. In: *Proc. of the 28th Annual Conference of the Industrial Electronics Society*. Sevilha, Espanha: [s.n.], 2002. v. 4, p. 3317 – 3325.

PAPAFOTIOU, G.; GEYER, T.; MORARI, M. A hybrid model predictive control approach to the direct torque control problem of induction motors. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, John Wiley & Sons, Ltd, v. 17, n. 17, p. 1572–1589, 2007.

PAPAGEORGIOU, M. et al. Review of road traffic control strategies. *Proceedings of the IEEE*, v. 91, n. 12, p. 2043–2067, 2003.

PENA, R.; CLARE, J. C.; ASHER, G. M. Doubly fed induction generator using back-to-back PWM converters and its application to variable-speed wind-energy generation. *IEE Proceedings - Electric Power Applications*, v. 143, n. 3, p. 231–241, 1996.

PEREIRA, L. et al. General model of a five-phase induction machine allowing for harmonics in the air gap field. *IEEE Trans. Energy Conversion*, v. 21, n. 4, p. 891–899, 2006.

PETTERSSON, S. Synthesis of switched linear systems. In: *Proc. of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, HI, EUA: [s.n.], 2003. v. 5, p. 5283–5288.

PETTERSSON, S.; LENNARTSON, B. Stability and robustness for hybrid systems. In: *Proc. of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*. Kobe, Japão: [s.n.], 1996. v. 2, p. 1202–1207.

RASHID, M. H. *Power electronics handbook*. 3. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2010.

SALMASI, F.; NAJAFABADI, T.; MARALANI, P. An adaptive flux observer with online estimation of dc-link voltage and rotor resistance for vsi-based induction motors. *IEEE Trans. Power Electron.*, v. 25, n. 5, p. 1310–1319, 2010.

SALVATORE, L.; STASI, S.; TARCHIONI, L. A new EKF-based algorithm for flux estimation in induction machines. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, v. 40, n. 5, p. 496–504, 1993.

SHIEH, H. J.; SHYU, K. K. Nonlinear sliding-mode torque control with adaptive backstepping approach for induction motor drive. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, v. 46, n. 2, p. 380–389, 1999.

SHTESSEL, Y.; ZINOBER, A. S. I.; SHKOLNIKOV, I. A. Boost and buck-boost power converters control via sliding modes using method of stable system centre. In: *Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas, NV, EUA: [s.n.], 2002. v. 1, p. 340–345.

SKAFIDAS, E. et al. Stability results for switched controller systems. *Automatica*, Elsevier, v. 35, n. 4, p. 553–564, 1999.

SLOOTWEG, J. G.; POLINDER, H.; KLING, W. L. Dynamic modelling of a wind turbine with doubly fed induction generator. In: *IEEE Power Engineering Society Summer Meeting*. [S.l.: s.n.], 2001. v. 1, p. 644–649.

SPILLER, P.; HAFFNER, J.; PEREIRA, L. Real-time application of simulation tools and implementation of control techniques for induction machines in *matlab/simulink*<sup>®</sup> environment. In: *Proc. of the 28th Annual Conference of the Industrial Electronics Society*. Sevilha, Espanha: [s.n.], 2002. v. 3, p. 2068–2072.

- SUN, Z. Stabilizability and insensitivity of switched linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 49, n. 7, p. 1133–1137, 2004.
- SUN, Z. Combined Stabilizing Strategies for Switched Linear Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 51, n. 4, p. 666–674, 2006.
- SUN, Z.; GE, S. S. Analysis and synthesis of switched linear control systems. *Automatica*, Elsevier, v. 41, n. 2, p. 181–195, 2005.
- SUN, Z.; GE, S. S.; LEE, T. H. Controllability and reachability criteria for switched linear systems. *Automatica*, Elsevier, v. 38, n. 5, p. 775–786, 2002.
- TAKAHASHI, I.; NOGUCHI, T. A new quick-response and high-efficiency control strategy of an induction motor. *IEEE Trans. Ind. Applicat.*, IA-22, n. 5, p. 820–827, 1986.
- TARNOWSKI, G. C.; REGINATTO, R. Adding Active Power Regulation to Wind Farms with Variable Speed Induction Generators. In: *IEEE Power Engineering Society General Meeting*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 1–8.
- TOLIYAT, H.; LEVI, E.; RAINA, M. A review of rfo induction motor parameter estimation techniques. *IEEE Trans. Energy Conversion*, v. 18, n. 2, p. 271–283, 2003.
- TROFINO, A. Robust stability and domain of attraction of uncertain nonlinear systems. In: *Proc. of the 2000 American Control Conference*. Chicago, IL, EUA: [s.n.], 2000. v. 5, p. 3707–3711.
- TROFINO, A. et al. Switching rule design for switched dynamic systems with affine vector fields. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 54, n. 9, p. 2215–2222, 2009.
- TROFINO, A.; DEZUO, T. Global stability of uncertain rational nonlinear systems with some positive states. In: *Proc. of the 50th IEEE Conference on Decision and Control*. Orlando, FL, EUA: [s.n.], 2011. p. 7337–7342.
- TROFINO, A.; SCHARLAU, C. C.; COUTINHO, D. F. Corrections to “Switching rule design for switched dynamic systems with affine vector fields”. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 57, n. 4, p. 1080–1082, 2012.

TROFINO, A. et al. Stabilizing switching rule design for affine switched systems. In: *Proc. of the 50th IEEE Conference on Decision and Control*. Orlando, FL, EUA: [s.n.], 2011. p. 1183–1188.

TROFINO, A. et al. Switching rule design for affine switched systems with  $\mathcal{H}_\infty$  performance. In: *Proc. of the 51st IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, HI, EUA: [s.n.], 2012. p. 1923–1928.

WICKS, M.; DECARLO, R. Solution of coupled Lyapunov equations for the stabilization of multimodal linear systems. In: *Proc. of the 1997 American Control Conference*. Albuquerque, NM, EUA: [s.n.], 1997. v. 3, p. 1709–1713.

WICKS, M. A.; PELETIES, P.; DECARLO, R. A. Construction of piecewise lyapunov functions for stabilizing switched systems. In: *Proc. of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. Lake Buena Vista, FL, EUA: [s.n.], 1994. v. 4, p. 3492–3497.

XU, X.; ZHAI, G.; HE, S. On practical asymptotic stabilizability of switched affine systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, v. 2, n. 1, p. 196 – 208, 2008.

YAKUBOVICH, V. A. S-procedure in nonlinear control theory. *Vestnik Leningrad University*, v. 1, p. 62–77, 1971.

YAMAMURA, S. *AC motors for high-performance applications*. [S.l.]: Marcel Dekker Inc., New York, NY, 1986.

ZHAI, G.; LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties. *International Journal of Control*, Taylor and Francis, v. 76, n. 7, p. 747–753, 2003.

ZHAO, J.; HILL, D. On stability,  $\mathcal{L}_2$ -gain and  $\mathcal{H}_\infty$  control for switched systems. *Automatica*, Elsevier, v. 44, n. 5, p. 1220–1232, 2008. ISSN 0005-1098.



**APÊNDICE A - Valores numéricos das matrizes dos  
exemplos**



## A.1 CAPÍTULO 4

## A.1.1 Exemplo 4.1

$$\beta = 1$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 30,0648 & 7,0822 \\ 7,0822 & 26,7078 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} -7,8464 \\ 26,8298 \end{pmatrix} \times 10^{-2}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 5,9058 & 1,3742 \\ 1,3742 & 2,3679 \end{bmatrix} \times 10^{-1}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} -3,0099 \\ 1,5347 \end{pmatrix} \times 10^{-1}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 8,5995 & 2,0261 \\ 2,0261 & 2,1529 \end{bmatrix} \times 10^{-1}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 3,7946 \\ -4,2177 \end{pmatrix} \times 10^{-1}$$

$$\beta = -1$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 79,0903 & -9,1509 \\ -9,1509 & -0,1511 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} -11,2595 \\ 8,8845 \end{pmatrix} \times 10^{-2}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} -6,2024 & -6,8287 \\ -6,8287 & 42,1420 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} -16,8411 \\ 1,1646 \end{pmatrix} \times 10^{-2}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 4,9480 & 2,6450 \\ 2,6450 & 4,7369 \end{bmatrix} \times 10^{-1}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 2,8101 \\ -1,0049 \end{pmatrix} \times 10^{-1}$$

## A.1.2 Exemplo 4.2

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -0,0845 & -3,3679 \\ -3,3679 & -244,6907 \end{bmatrix} \times 10^{-8}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1,7834 \\ -100,8191 \end{pmatrix} \times 10^{-6}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0,02379 & -1,5939 \\ -1,5938 & -0,001165 \end{bmatrix} \times 10^{-7}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 6,1501 \\ 0,1062 \end{pmatrix} \times 10^{-7}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0,3448 & -1,1171 & -0,9452 \\ -1,1171 & 314,8752 & 4,2455 \\ -0,9452 & 4,2455 & 10,3017 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0,8240 \\ 60,4872 \\ 0 \end{pmatrix} \times 10^{-6}$$

## A.1.3 Exemplo 4.3

$$P_1 = \begin{bmatrix} -26,8423 & 0,8801 \\ 0,8801 & 0,2941 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} -362,7108 \\ 7,5897 \end{pmatrix} \times 10^{-6}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 360,7074 & 2,4782 \\ 2,4782 & 0,7273 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 507,7952 \\ -10,6256 \end{pmatrix} \times 10^{-6}$$

## A.2 CAPÍTULO 5

## A.2.1 Exemplo 5.1

$$P_1 = \begin{bmatrix} -6458,5233 & -1,4662 \\ -1,4662 & 1,4861 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} -430,3445 \\ 0,3454 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 401,1252 & 2,6236 \\ 2,6236 & 0,2371 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 602,4823 \\ -0,4835 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

## A.2.2 Exemplo 5.2

$$\beta = 1$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,2093 & -0,8492 \\ -0,8492 & 1,3189 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} -2,4940 \\ -0,9226 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 3,5039 & 4,1293 \\ 4,1293 & 6,9244 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} -4,8872 \\ -3,6644 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 18,5634 & 15,2243 \\ 15,2243 & 17,9117 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 7,3812 \\ 4,5869 \end{pmatrix}$$

$$\beta = -1$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 17,2374 & 0,1255 \\ 0,1255 & 4,7432 \end{bmatrix} \times 10^{-1}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} -9,9499 \\ 8,1005 \end{pmatrix} \times 10^{-1}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} -9,0543 & -5,2641 \\ -5,2641 & 60,0564 \end{bmatrix} \times 10^{-1}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} -15,8587 \\ -2,7838 \end{pmatrix} \times 10^{-1}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 5,6811 & 3,9781 \\ 3,9781 & 6,5913 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 2,5808 \\ -0,5317 \end{pmatrix}$$

### A.2.3 Exemplo 5.3

Referência  $E_{\text{out}} = -9\text{V}$

$$P_1 = \begin{bmatrix} -1798,1558 & -6,1223 \\ -6,1223 & 2,0343 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} -1064,1828 \\ 8,4489 \end{pmatrix} \times 10^{-4}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1471,4063 & 10,6654 \\ 10,6654 & 1,1746 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 638,5097 \\ -5,0693 \end{pmatrix} \times 10^{-4}$$

Referência  $E_{\text{out}} = -21V$

$$P_1 = \begin{bmatrix} -8101,3238 & 3,2926 \\ 3,2926 & 3,7200 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} -11092,8798 \\ 5,5116 \end{pmatrix} \times 10^{-5}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 9852,5144 & 53,9851 \\ 53,9851 & 5,1112 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 15530,0318 \\ -7,7162 \end{pmatrix} \times 10^{-5}$$

## A.3 CAPÍTULO 6

### A.3.1 Exemplo 6.1

$$T = \begin{bmatrix} -837,4477 & 47,3052 & 0 & 0 & 0 \\ -66,9295 & -892,9490 & 0 & 0 & 0 \\ -5884,0936 & -1125,3574 & 0 & 0 & 0 \\ 677,6454 & -5975,4784 & 0 & 0 & 0 \\ 1,3202 & -3,4257 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3$$

## A.4 CAPÍTULO 7

### A.4.1 Exemplo 7.1

Lei de chaveamento do RSC

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -16,2170 & 0,2305 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,4357 & -16,7664 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,2244 & -0,4036 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5329 & -0,6968 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6,7892 & 1,0511 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,0747 & 0,7543 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Lei de chaveamento do GSC

$$T = \begin{bmatrix} -2258,2128 & 0,01366 \\ 0,03667 & -2258,1914 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$