

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS TRIDIMENSIONAIS  
VISCOSOS EM QUALQUER REGIME DE VELOCIDADE**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

**CARLOS HENRIQUE MARCHI**

FLORIANÓPOLIS, DEZEMBRO DE 1992.

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS TRIDIMENSIONAIS  
VISCOSOS EM QUALQUER REGIME DE VELOCIDADE**

**CARLOS HENRIQUE MARCHI**

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

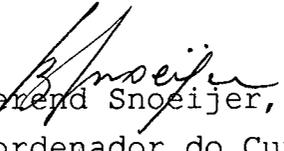
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL

PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

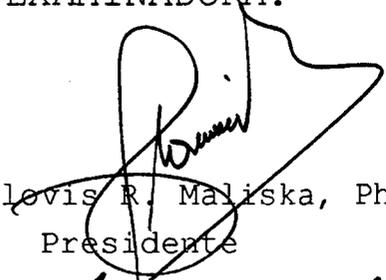


Prof. Clevis R. Maliska, Ph.D.  
Orientador



Prof. Berend Snoeijer, Dr.Ing.  
Coordenador do Curso

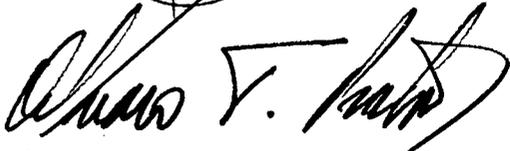
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Clevis R. Maliska, Ph.D.  
Presidente



Prof. Antonio F.C.Silva, D.Eng.



Prof. Álvaro T. Prata, Ph.D.



Eng. Paulo Moraes Jr., Dr.Ing.

*Mais uma dissertação, mais um quark na estrutura da ciência.*

*Às memórias de Robert H. Goddard e Wernher von Braun pela  
inspiração, e a Basílio Baranoff pelo incentivo.*

## AGRADECIMENTOS

*Meus agradecimentos a todos os contribuintes brasileiros que através do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e do Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE) financiaram este trabalho.*

*Agradeço aos estudantes Marcos A. Livramento, José Valerim Jr. (atualmente engenheiro), Emílio R. Hulse e Luciano A. dos Santos por suas contribuições nos códigos computacionais usados neste trabalho, pelo apoio à infra-estrutura computacional e pelas simulações realizadas. E ao estudante Clovis R. Maliska Jr. pelo apoio na utilização do seu software gráfico.*

*Pela leitura e sugestões apresentadas para a melhoria do manuscrito desta dissertação, e pelo apoio na edição da mesma, agradeço ao engenheiro Axel Dihlmann.*

*Agradeço também aos professores Álvaro T. Prata, Sérgio Colle, Arno Blass e Hyppólito V. Pereira Filho pelos cursos ministrados durante o cumprimento dos meus créditos.*

*Sou muito grato ao Dr. Paulo Moraes Jr., do Instituto de Aeronáutica e Espaço, pelo fornecimento dos dados experimentais usados neste trabalho e por sua colaboração em diversas ocasiões em que foi necessário.*

*Aos quatro integrantes da banca examinadora desta dissertação de mestrado, agradeço-lhes por terem aceito o convite à integrá-la, pela leitura do manuscrito e pelas sugestões apresentadas para sua melhoria, e ainda pela paciência que tiveram durante a apresentação e defesa do trabalho.*

*Meus agradecimentos especiais ao meu orientador, o professor Clovis R. Maliska, e ao seu colaborador, o professor Antonio Fábio C. Silva, que ministraram metade dos cursos que fiz e que são responsáveis por toda a minha formação na área numérica. Agradeço-lhes também pelas dezenas de horas de entusiasmantes discussões.*

*Finalmente, agradeço ao professor Maliska pela efetiva orientação e o apoio recebido durante todo o desenvolvimento desta dissertação, e ao professor Fábio pela paciência que teve ao auxiliar-me na depuração dos códigos computacionais que implementei.*

# ÍNDICE

RESUMO.....	vii
ABSTRACT.....	viii
SIMBOLOGIA.....	ix
1. INTRODUÇÃO	
1.1 - Motivação do Trabalho.....	1
1.2 - Revisão Bibliográfica.....	3
1.3 - Contribuição.....	15
2. MODELO MATEMÁTICO.....	17
3. MODELO NUMÉRICO.....	22
3.1 - Equações de Navier-Stokes e da Energia .....	22
3.2 - Avaliação dos Fluxos Convectivos.....	26
3.3 - Equação de Conservação da Massa.....	28
3.4 - Condições de Contorno.....	31
3.5 - Critério de Convergência.....	34
3.6 - Tensor Métrico.....	35
3.7 - Algoritmo do Modelo Numérico.....	36
4. RESULTADOS TRIDIMENSIONAIS AXISSIMÉTRICOS.....	39
4.1 - Domínio e Condições de Contorno.....	39
4.2 - Tolerância e Discretização do Domínio.....	43
4.3 - Resultados Numéricos.....	44
4.4 - Comentários.....	54
5. RESULTADOS TRIDIMENSIONAIS.....	59
5.1 - Domínio e Condições de Contorno.....	60
5.2 - Resultados 3D sem Ângulo de Ataque.....	63

5.3 - Resultados 3D com Ângulo de Ataque.....	65
5.4 - Comentários.....	71
6. CONCLUSÃO.....	75
7. REFERÊNCIAS.....	76

#### APÊNDICES

1. Coeficientes das Equações de Navier-Stokes e da Energia....	83
2. Termos Fontes dos Fluxos Convectivos.....	86
3. Coeficientes da Equação de Conservação da Massa.....	87
4. Fotos dos Resultados Numéricos.....	89

## RESUMO

Dado à inexistência de métodos analíticos que permitam resolver escoamentos reais sobre veículos aeroespaciais, como aviões e foguetes, os dois recursos de que se dispõem para projetá-los são a experimentação de modelos em túnel de vento e a simulação numérica.

Embora a simulação numérica não exclua os experimentos em túnel de vento, ela permite uma redução significativa destes e, conseqüentemente, dos custos envolvidos num projeto, já que simulações numéricas são sabidamente muito menos onerosas que ensaios experimentais.

Um modelo numérico que permite resolver escoamentos tridimensionais viscosos e laminares, de gases perfeitos, é apresentado neste trabalho. Desta forma, contribui-se para ampliar a disponibilidade das ferramentas numéricas para a solução de problemas de escoamento de fluidos. As principais características da metodologia são: utilização de um sistema de coordenadas naturais que se adapta à geometria do problema; o emprego do arranjo co-localizado de variáveis; e, capacidade de resolver escoamentos em qualquer regime de velocidade.

A validação do modelo numérico se dá através da simulação de escoamentos com número de Mach 0,50, 0,90 e 3,0 sobre o foguete brasileiro VLS, comparando-se as distribuições do coeficiente de pressão sobre o foguete, obtidas numericamente, com dados experimentais.

A principal conclusão do trabalho é a de que o modelo numérico proposto consegue resolver adequadamente os problemas em consideração.

## ABSTRACT

The complexity of real flows about aerospace vehicles precludes the use of analytical methods for its solution. Therefore, the two alternatives for the design of such vehicles are wind tunnel experiments and numerical simulations.

Although numerical simulations does not exclude the wind tunnel tests, they reduce them significantly, lowering the design costs considerably.

A numerical model for solving three-dimensional laminar viscous flow of ideal gases is reported in this work, contributing to enlarge the availability of numerical tools for the solution of fluid flow problems. The principal features of the model introduced here are: the use of boundary-fitted meshes, co-located variables and the capability of solving all speed flow.

The model validation is performed by solving 3D flows over the brazilian launch vehicle (VLS) for Mach number of 0.5, 0.9 and 3.0, and comparing the results with the experimental ones.

The main conclusion is that the numerical model is able to handle the fluid flow problems under consideration.

## SIMBOLOGIA

$a, b$	= coeficientes e termo fonte das equações de conservação da quantidade de movimento e da energia
$A, B$	= coeficientes e termo fonte da equação de conservação da massa
$c_p$	= calor específico à pressão constante [J/kg-K]
$C_p$	= coeficiente de pressão
$C^p$	= coeficiente da equação de estado
$d$	= coeficiente do método de acoplamento pressão-velocidade
$D$	= fluxo difusivo
$J$	= jacobiano da transformação do sistema de coordenadas
$k$	= condutividade térmica [W/m-K]
$M$	= número de Mach
$M_p$	= massa do volume de controle [kg]
$\dot{M}$	= fluxo de massa [kg/s]
$p$	= pressão termodinâmica [Pa]
$\hat{p}$	= termo fonte das equações de conservação relativo à pressão
$Pe$	= número de Peclet
$Pr$	= número de Prandtl
$R$	= constante particular do gás [J/kg-K]
$Re$	= número de Reynolds
$\hat{S}$	= termo fonte das equações de conservação
$t$	= tempo [s]
$T$	= temperatura [K]
$T$	= $T_w/T_\infty$ , em gráficos de resultados
$u, v, w$	= componente cartesianas do vetor velocidade nas direções $x, y, z$ , respectivamente [m/s]
$V$	= vetor velocidade
$U, V, W$	= componentes contravariantes do vetor velocidade
$x, y, z$	= direções do sistema de coordenadas cartesiano

### Subscritos

$i$	= face do volume de controle, onde $i = e, w, n, s, d, f$
$P$	= volume de controle
$x, y, z$	= derivadas de primeira ordem
$\xi, \eta, \gamma$	= derivadas de primeira ordem
$NB$	= volumes de controle vizinhos a $P$ ( $E, W, N, S, D, F, SE...$ )
$w$	= parede
$\infty$	= propriedade avaliada na corrente-livre do escoamento

### Letras gregas

$\Gamma^\phi$	= coeficiente de transporte da difusão
$\rho$	= massa específica [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]
$\phi$	= incógnita geral
$\xi, \eta, \gamma$	= direções do sistema de coordenadas generalizado
$\mu$	= viscosidade absoluta [ $\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}$ ]

---

# 1. INTRODUÇÃO

---

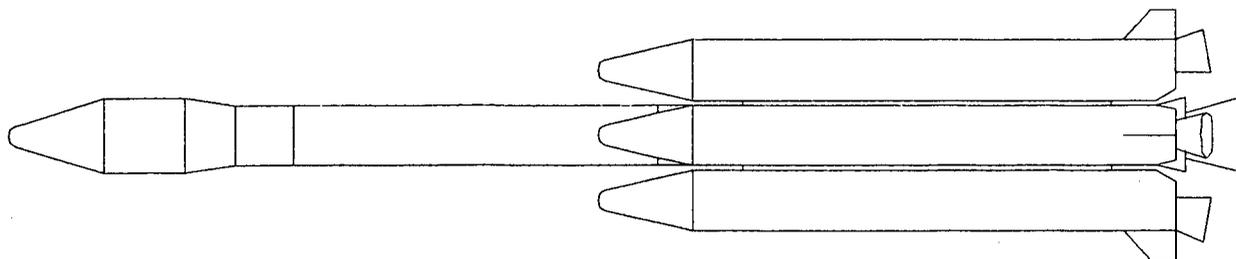
## 1.1 - MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

No ano de 1986, o Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE), do Centro Técnico Aeroespacial (CTA), de São José dos Campos (SP), assinava um convênio de cooperação técnico-científica com a Universidade Federal de Santa Catarina para que o Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor (SINMEC) desenvolvesse códigos computacionais para resolver escoamentos de alta velocidade. Os códigos desenvolvidos seriam posteriormente transferidos ao IAE para que este os usasse no projeto aerodinâmico de veículos aeroespaciais como o foguete brasileiro VLS, Fig. 1. O convênio com o IAE buscava também o treinamento de recursos humanos na área de aerodinâmica.

O resultado deste primeiro convênio foi o código computacional COMPRESS [1-3] desenvolvido pelos professores Antonio Fábio Carvalho da Silva e Clovis Raimundo Maliska da UFSC. Este código permite resolver escoamentos viscosos em qualquer regime de velocidade sobre geometrias arbitrarias bidimensionais ou tridimensionais axissimétricas, usando um arranjo desencontrado de variáveis.

Um segundo convênio foi assinado em 1989 entre o IAE e o SINMEC visando o desenvolvimento de códigos computacionais que permitissem resolver escoamentos viscosos tridimensionais. Inicialmente, o SINMEC realizou estudos para passar a empregar o arranjo co-localizado de variáveis em substituição ao desencontrado. A motivação foi evitar a complexidade que o uso do

arranjo desencontrado traria em um código computacional para problemas tridimensionais em coordenadas não-ortogonais. Dos estudos iniciais, resultou o código MACH2D que tem as mesmas características do COMPRESS com a única diferença de usar o arranjo co-localizado de variáveis.



**Figura 1.** Configuração do foguete VLS.

Já em 1990 o SINMEC havia desenvolvido o código computacional MACH3D que permite resolver escoamentos invíscidos sobre geometrias tridimensionais arbitrárias, usando o arranjo co-localizado. Na versão de 1990 do MACH3D, os sistemas lineares de equações eram resolvidos com o método MSI [4] cujo algoritmo é fortemente recursivo. Com a finalidade de usar a capacidade vetorial dos computadores, um estudo foi realizado [5,6] para verificar o desempenho do método ADI [7] na solução de sistemas lineares nestes computadores, já que o método ADI tem pouca recursividade. Verificou-se que o desempenho do método ADI é superior ao MSI em termos de tempo de computação.

Em sua dissertação de mestrado [8], realizada no SINMEC, Men implementou ao longo de 1990 e 1991 uma nova versão do código computacional MACH2D que passou, assim, também a resolver escoamentos turbulentos. Para isso, o modelo algébrico de Baldwin & Lomax [9] foi empregado.

A partir do ano de 1990, duas principais linhas de trabalho tiveram início com relação ao convênio com o IAE. Na primeira, o objetivo foi implementar uma nova versão do código MACH3D que permitisse resolver escoamentos sobre geometrias tridimensionais muito complexas utilizando a técnica de multiblocos para discretizar o domínio de cálculo. A etapa inicial desta linha

de trabalho consistiu num estudo, em domínios bidimensionais, da técnica de multiblocos [10,11] e que culminou no desenvolvimento de uma técnica de multiblocos para domínios tridimensionais cujos resultados são apresentados em [12].

A segunda linha de trabalho, e que se constitui no tema desta dissertação, visava a implementação de um código computacional para resolver escoamentos tridimensionais viscosos.

É oportuno, neste momento, mencionar alguns motivos que levam à realização de ensaios aerodinâmicos em túnel de vento ou à obtenção de soluções numéricas do escoamento sobre um foguete-lançador de satélites como o VLS. A determinação dos coeficientes de arrasto e de força normal, e do centro de pressão [13], por exemplo, são essenciais na previsão da trajetória do foguete ou de seu desempenho.

Com relação à separação dos quatro foguetes auxiliares ou boosters do primeiro estágio (Fig. 1), é de suma importância conhecer o comportamento do escoamento para dimensionar o sistema de separação e evitar a colisão dos boosters com o corpo central.

As distribuições do coeficiente de pressão ( $C_p$ ) e da temperatura são necessárias também para o projeto estrutural do foguete e de suas proteções térmicas. O conhecimento do nível de temperaturas permite prever os efeitos térmicos sobre os equipamentos do satélite transportado pelo foguete.

## 1.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Uma pergunta interessante é por que resolver numericamente escoamentos tridimensionais sobre veículos aeroespaciais se existem túneis de vento para esse fim?

Em primeiro lugar é importante lembrar que há cerca de 20 anos esta pergunta talvez não fosse feita devido à baixa velocidade de processamento dos computadores da época, bem como pela inexistência de métodos numéricos adequados e precisos.

Nestas duas últimas décadas, entretanto, os avanços obtidos foram extraordinários. Com relação à velocidade de processamento, conforme [14], basta dizer que em 1949 o computador EDSAC 1 atingia  $10^{-4}$  Mflops (milhões de operações de ponto flutuante por segundo). Vinte anos depois, o computador CDC 7600 chegava a 10 Mflops. E menos de vinte anos após, em 1986, o ETA-10 obtinha o desempenho de  $10^4$  Mflops. Segundo a referência [15], estima-se que em 1995 será atingida a velocidade de processamento de  $10^6$  Mflops. Além da velocidade de processamento, a capacidade de armazenamento de informações na memória principal tem crescido muito nos últimos anos. A memória do ETA-10, por exemplo, é de 256 Mbytes [16].

Anderson [17] fez um comentário em seu livro que é oportuno mencionar aqui. A solução de um problema pode se dar através de três tipos de abordagens. Uma delas é a experimental cujas bases foram estabelecidas por Galileu Galilei e seus contemporâneos no início do século XVII. O segundo tipo de abordagem se dá com os métodos matemáticos ou analíticos. Estes métodos tiveram início com o livro Principia, de Newton, em 1687. Avanços significativos na área da dinâmica dos fluidos, usando-se métodos analíticos, foram obtidos por Bernoulli e Euler nas primeiras décadas do século XVIII. Todos os avanços nas ciências naturais e na engenharia, desde então, resultaram da aplicação destes dois tipos de abordagem, a experimental e a analítica. A partir do advento dos computadores em meados deste século, surgiu o terceiro tipo de abordagem, os chamados métodos numéricos que vieram complementar os dois tipos anteriores.

É importante mencionar que num experimento a modelagem se dá sobre o fenômeno físico real que se pretende estudar. Assim, as discrepâncias que podem ocorrer se devem à qualidade de reprodução das condições do problema real e aos erros inerentes aos equipamentos de medição e de leitura. Já os métodos analíticos ou numéricos buscam resolver um conjunto de equações que resultam da modelagem matemática do fenômeno físico real. Desta forma, mesmo que a solução exata das equações seja obtida, nada garante que ela corresponda ao fenômeno real pois aproximações inadequadas podem ter sido feitas na modelagem matemática.

Respondendo à pergunta do início desta seção, o principal motivo é o custo envolvido nos experimentos aerodinâmicos em túnel de vento. Outros motivos são: as soluções numéricas são obtidas com baixo custo e com maior rapidez; devido aos computadores atualmente disponíveis, soluções numéricas de problemas bastante complexos sobre configurações reais têm sido obtidas, como em escoamentos sobre naves espaciais; existem diversos tipos de ensaios experimentais que atualmente não são possíveis ou que são muito difíceis e caríssimos de realizar, como por exemplo, a reentrada de veículos espaciais na atmosfera; e, mesmo os experimentos clássicos em túnel de vento ainda hoje não conseguem reproduzir simultaneamente os números de Mach e Reynolds das condições reais, o que não ocorre com as soluções numéricas.

A tendência atual é que os experimentos passem a ser usados no desenvolvimento de novos e mais abrangentes modelos matemáticos para os fenômenos físicos que ainda não são bem compreendidos, na validação de modelos numéricos e para situações onde não existem modelações adequadas. Assim, as soluções numéricas passarão a ser a principal ferramenta dos engenheiros no desenvolvimento de novos processos e produtos.

Apenas para dar uma noção dos recursos envolvidos nos experimentos aerodinâmicos em túnel de vento, cita-se o seguinte: o desenvolvimento do foguete Ariane, da Agência Espacial Européia (ESA), consumiu em torno de 4.000 horas de ensaios em túnel de vento [18]. Atualmente, um ensaio supersônico custa cerca de US\$ 3.000,00, e um ensaio subsônico ou transônico, US\$ 5.000,00 [19]. Entende-se aqui como um ensaio, a medição da distribuição do coeficiente de pressão sobre um modelo de foguete para um determinado número de Mach e ângulo de ataque. Um ensaio supersônico em um túnel de vento do tipo intermitente, por exemplo, tem a duração aproximada de 30 a 40 segundos. Como informação, só a fabricação do modelo do foguete VLS (Fig. 1), com comprimento em torno de 1,25 m e com 320 tomadas de pressão, custou cerca de US\$ 150 mil. Os ensaios realizados para sete números de Mach, quatro diferentes ângulos de ataque e diversas configurações do foguete VLS custaram aproximadamente US\$ 300 mil [19]. A título de comparação, deve-se informar que o valor total envolvido nos dois

convênios entre o SINMEC e o IAE ficou em torno de US\$ 50 mil. Neste valor incluem-se o pagamento de bolsistas de iniciação científica, mestrados, dois professores, tempo de computação, entre outras despesas, durante cinco anos. O investimento no desenvolvimento de novas metodologias numéricas é, portanto, de grande retorno.

Os métodos numéricos mais comumente usados na solução de problemas de escoamento são elementos finitos, diferenças finitas e volumes finitos. Elementos no contorno começa atualmente a ser empregado.

O método dos elementos finitos surgiu de diversas pesquisas realizadas entre 1940 e 1960 [23]. Turner et alii [20], em 1956, elaboraram formalmente esta técnica com relação à solução de problemas de mecânica dos sólidos. Aplicações na área de mecânica dos fluidos surgiram na década de 70 e podem ser vistas no livro de Baker [79].

Diferenças finitas é o método mais antigo. Considera-se que sua primeira aplicação tenha sido feita por Euler em 1768 [23]. Referências sobre este método são os livros de Minkowycz et alii [26], de Anderson et alii [35] e de Roache [80].

Harlow & Welch [21], em 1965, desenvolveram um dos primeiros modelos numéricos bem-sucedidos para resolver escoamentos de fluidos incompressíveis empregando variáveis primitivas ( $u, v, p$ ) como incógnitas, e apresentando muitas das características dos modelos numéricos atuais e que se baseiam no método dos volumes finitos. Textos básicos sobre este método podem ser vistos em [22,26,27,80].

Deve-se mencionar que um novo tipo de método tem surgido recentemente [24,25]. Este método, chamado de elementos finitos baseado no volume de controle, busca envolver num mesmo método as vantagens dos métodos dos elementos finitos e dos volumes finitos.

O modelo numérico usado neste trabalho segue a linha de pesquisa que vem sendo desenvolvida no SINMEC desde 1986 e que utiliza o método dos volumes finitos. As principais características e respectivos esquemas numéricos usados na implementação do modelo numérico deste trabalho são apresentados a seguir.

**1. Sistema de coordenadas naturais.** Permite resolver problemas sobre geometrias arbitrarias, uma vez que a malha se adapta às fronteiras, dando generalidade ao código computacional e facilitando a aplicação de condições de contorno. Os primeiros trabalhos a usarem este recurso foram [28-30].

**2. Esquema WUDS.** Se constitui na função de interpolação que é usada para relacionar as incógnitas de volumes de controle vizinhos. Foi desenvolvido e aplicado por Raithby & Torrance [31] com base na sugestão de Spalding [32] de se resolver analiticamente um problema convectivo-difusivo unidimensional. Uma versão otimizada do esquema WUDS original é usada aqui, conforme o trabalho de Raithby [33]. Diversos outros esquemas existem, como o power-law de Patankar [22] que tem características e desempenho semelhantes ao WUDS, e o esquema de Souza [34] onde uma função de interpolação denominada completa foi usada. Apesar do esquema de Souza ter melhor desempenho, em geral, que o WUDS, ele seria extremamente complexo se aplicado a problemas tridimensionais. Além disso, dependendo da malha que se emprega, resultados fisicamente irreais são obtidos.

**3. Volumes fictícios.** São usados para facilitar a aplicação das condições de contorno e facilitar a implementação do código. Uma discussão a respeito pode ser vista em [27].

**4. Formulação dependente do tempo e implícita [27].** O tempo é usado nas equações para servir como parâmetro de controle do processo iterativo de solução dos sistemas lineares que resultam da discretização das equações diferenciais que governam o problema. Estes sistemas lineares se originam do emprego de uma formulação implícita.

**5. Solução dos sistemas lineares com o esquema ADI [7].** Consiste na aplicação sucessiva e em direções alternadas do algoritmo de Thomas ou TDMA [7] (que também pode ser visto em [22], por exemplo). Apesar de sabidamente o esquema ADI ser mais lento do que o MSI [4], em computadores de processamento escalar,

verificou-se recentemente [6] que isto não ocorre em computadores de processamento vetorial, como o usado neste trabalho, o que justifica sua adoção. A versão do esquema ADI, usada no presente trabalho, é aquela apresentada em [6].

**6. Método de acoplamento SIMPLEC.** Os modelos numéricos que usam o método das diferenças finitas resolvem simultaneamente os seus sistemas lineares oriundos da discretização das equações diferenciais, como pode ser visto em [35]. Esta não é a estratégia adotada, em geral, no método dos volumes finitos. Neste método, os sistemas lineares são resolvidos separadamente para cada incógnita, sendo, assim, chamados de esquemas segregados. Para um problema de escoamento à baixa velocidade, nos esquemas segregados, as equações de Navier-Stokes são usadas para calcular  $u$ ,  $v$  e  $w$ , e a equação da energia para  $T$ , restando a equação de conservação da massa para obter a pressão. Mas, como a pressão não aparece explicitamente nesta equação, foram desenvolvidos os chamados métodos de acoplamento pressão-velocidade que transformam a equação de conservação da massa numa equação para a pressão. O primeiro método que surgiu foi o SIMPLE [36], de Patankar & Spalding. Neste trabalho, uma versão otimizada desse método é usada, o SIMPLEC, desenvolvido por Rushmore & Taulbee [82] e assim denominado por Van Doormaal e Raithby [37]. Atualmente, existem mais de uma dezena de métodos de acoplamento conhecidos, originados do método SIMPLE. Segundo seus autores, o método SIMPLEX [38] superaria os anteriores. No entanto, simulações realizadas para resolver o escoamento quase-unidimensional no interior de um bocal convergente-divergente não comprovaram esta afirmação.

**7. Arranjo co-localizado de variáveis.** A primeira aplicação bem-sucedida do método dos volumes finitos foi obtida por Harlow & Welch [21], em 1965, utilizando um arranjo descontraído de variáveis, ou seja, as componentes cartesianas da velocidade são armazenadas nas faces dos volumes de controle da pressão. Este recurso foi adotado para evitar o surgimento de oscilações no campo de pressões presentes quando variáveis co-localizadas e funções de interpolação de baixa ordem são empregadas. Este problema das

oscilações começou a ser superado com os trabalhos de Hsu [40] e Rhie [41] em 1981. Na época da publicação do artigo de Peric et alii [42], em 1988, o uso do arranjo co-localizado de variáveis para problemas de escoamentos de fluidos incompressíveis e em coordenadas cartesianas, no âmbito dos volumes finitos, começou a ser bastante empregado.

Marchi [43] e Marchi et alii [44] aplicaram o esquema de Peric et alii [42] na solução de escoamentos supersônicos e efetuaram uma pequena alteração na proposta de Peric, resultando no esquema PVF-A, que apresentou melhor desempenho em escoamentos supersônicos. Em escoamentos de baixa velocidade, os dois esquemas apresentaram o mesmo comportamento. Em [43,44], o esquema PVF-A foi estendido para resolver problemas sobre geometrias bidimensionais arbitrárias usando-se um sistema de coordenadas naturais. Esta extensão foi implementada no código computacional MACH2D que foi aplicado na solução de escoamentos sobre o foguete VLS [45]. Posteriormente, Bortoli [46] fez uso do código MACH2D para resolver outros problemas, como escoamentos sobre aerofólios e tomadas de ar de turbinas de aviões. O esquema PVF-A também foi empregado no trabalho de Souza [34] na solução de alguns problemas de escoamentos de fluidos incompressíveis. O arranjo co-localizado de variáveis adotado nesta dissertação é descrito em [47,48] onde o esquema PVF-A foi aplicado a problemas de escoamentos supersônicos tridimensionais sobre geometrias arbitrárias, resultando no código computacional MACH3D. Em [49] a técnica foi testada na solução de escoamentos subsônicos, transônicos e supersônicos.

Tem-se verificado que o uso do arranjo co-localizado reduz significativamente a memória computacional necessária para se resolver um problema, e diminui, em muito, cálculos de informações geométricas e coeficientes, e torna os códigos mais compactos e fáceis de implementar.

Uma discussão sobre diversos arranjos de variáveis desencontradas pode ser visto no trabalho de Silva [39].

**8. Qualquer regime de velocidade.** Os problemas de mecânica dos fluidos podem ser divididos quanto ao regime de velocidade em cinco tipos. O primeiro deles é caracterizado por

escoamentos com baixíssimo número de Mach, onde a massa específica é uma função fraca da pressão, e pode ou não ter uma dependência forte da temperatura. Casos típicos são os problemas de convecção natural e escoamentos de líquidos em dutos. Este regime é muito conhecido como escoamento de fluidos incompressíveis. Nos escoamentos em que o número de Mach na corrente-livre é inferior a 1 mas que devido às expansões que sofre ao passar sobre um corpo, chega a ser maior que a unidade em determinadas regiões, o regime de velocidade é dito transônico. O inverso também é válido, ou seja, o número de Mach é um pouco superior a 1 e ao escoar sofre compressões fazendo com que o número de Mach em algumas regiões seja inferior a 1. O problema clássico é o escoamento sobre um aerofólio. Em geral, um escoamento é dito transônico quando o número de Mach na corrente-livre fica entre 0,8 e 1,2. Entre os escoamentos de fluidos incompressíveis e os transônicos situa-se o regime de velocidade chamado subsônico. Neste regime, a massa específica já apresenta uma dependência considerável da pressão.

Quando a velocidade de um escoamento é muitíssimo elevada, a temperatura do fluido pode atingir valores consideráveis devido aos efeitos de compressão e da dissipação viscosa. Isto faz com que as moléculas do fluido comecem a se dissociar, e os átomos podem até sofrer ionização. Nestes escoamentos, as reações químicas devem ser consideradas. Elas caracterizam o regime de velocidade hipersônico. Em geral, diz-se que um escoamento é hipersônico quando o número de Mach é maior que cinco. Mas, dependendo do fluido e de seu estado, a dissociação do fluido pode ocorrer até para número de Mach igual a três [50]. Os escoamentos que ficam entre os regimes transônico e hipersônico são chamados de supersônicos.

Breves comentários sobre o comportamento físico dos tipos de escoamentos que serão considerados neste trabalho são apresentados a seguir.

No caso de um escoamento subsônico (Fig. 1b) não existem ondas de choque e as variações no escoamento são graduais ao longo do corpo e ocorrem antes mesmo de atingí-lo.

Nos demais regimes de escoamento, ocorre a formação de

ondas de choque. No escoamento baixo-transônico (Fig. 1b), o comportamento inicial é semelhante ao subsônico mas, devido às expansões que ocorrem, o número de Mach atinge valores maiores que a unidade em uma determinada região do escoamento propiciando o surgimento de uma onda de choque normal sobre o corpo, devido às condições existentes à sua jusante. Esta onda de choque faz com que o escoamento volte a ser subsônico.

Num escoamento alto-transônico (Fig. 1b), o número de Mach da corrente-livre é maior que a unidade o que resulta no surgimento de uma onda de choque oblíqua descolada do corpo. Isto faz com que uma região do escoamento seja subsônica, passando a supersônica, em seguida, e podendo voltar a ser subsônica devido à existência de ondas de choque adicionais.

No caso de um escoamento supersônico, dependendo da geometria do corpo, a onda de choque oblíqua que se forma à sua frente pode ser colada (Fig. 1b) ou descolada (Fig. 1c). Antes do choque, não existe efeito do corpo sobre o escoamento. Finalmente, no caso de um escoamento hipersônico (Fig. 1b), a distância da onda de choque oblíqua, ao longo do corpo, é muito pequena, resultando em sua interação com a camada-limite.

Basicamente, o comportamento físico do escoamento de um fluido compressível deve-se a três efeitos: transferência de calor, fricção e variação de área. Em geral, este último é predominante e se dá da seguinte forma. Em escoamentos subsônicos, diminuindo-se a área, aumenta-se a velocidade, e vice-versa. No caso de escoamentos supersônicos, o efeito é inverso. Aumentando-se a área, aumenta-se a velocidade.

Quanto ao comportamento físico de escoamentos tridimensionais, explicações podem ser vistas no livro de Anderson [17] e em artigos onde são apresentados resultados experimentais, como em [74, 91].

Tradicionalmente, o método dos volumes finitos desenvolveu-se voltado às aplicações que envolviam escoamentos de fluidos incompressíveis, enquanto que o método das diferenças finitas era utilizado na solução de problemas relacionados a escoamentos transônicos e supersônicos. Mas, desde o fim da década

de 60, pesquisadores que trabalhavam com estes dois métodos numéricos procuraram desenvolvê-los na busca de esquemas gerais capazes de resolver escoamentos em qualquer regime de velocidade. Trabalhos pioneiros foram os de Chorin [51], de Harlow & Amsden [52,53], e de Patankar [81].

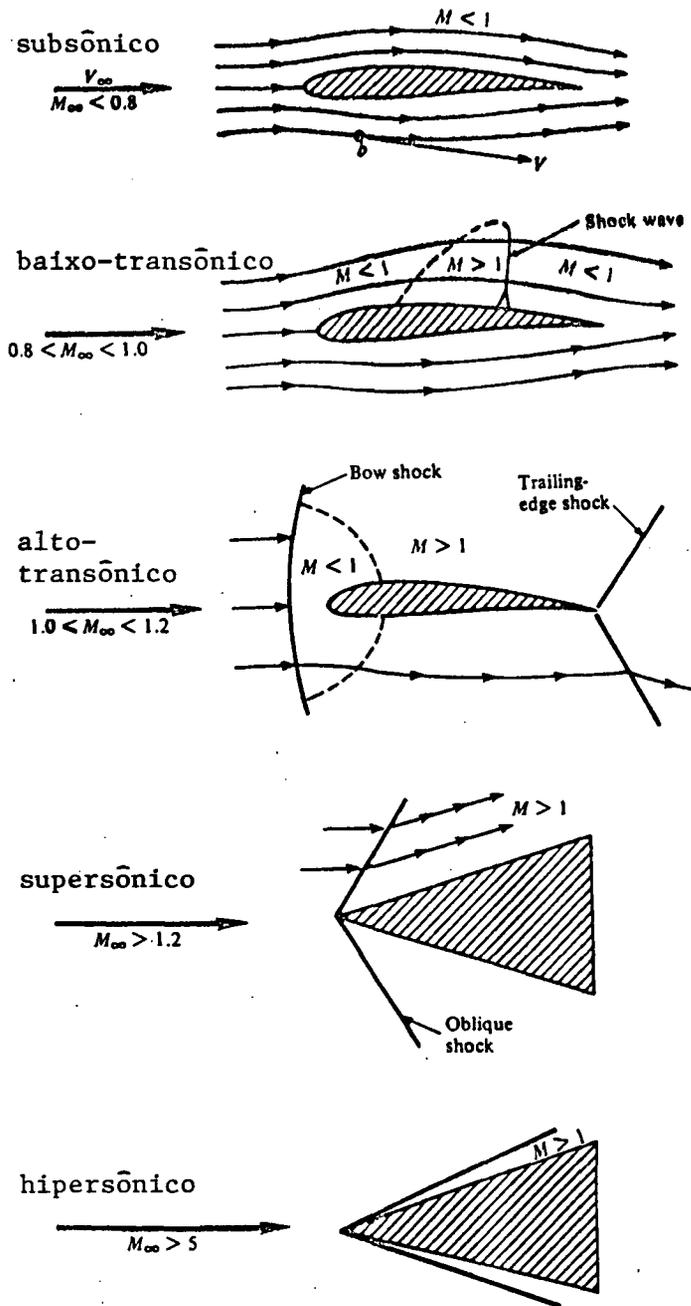


Figura 1b. Os diversos regimes de escoamento [17].

Em 1985, Van Doormaal [54] desenvolveu um novo modelo numérico para resolver escoamentos em qualquer regime de velocidade usando o sistema de coordenadas cartesianas. O trabalho de Van Doormaal foi estendido por Silva & Maliska [3] a sistemas de coordenadas naturais para geometrias bidimensionais ou tridimensionais axissimétricas. Detalhes sobre esta extensão podem ser vistos em [39]. A metodologia para qualquer regime de velocidade foi denominada de CSDV (Correção Simultânea na Densidade e Velocidade). Trabalho semelhante ao de Silva & Maliska foi realizado por Karki & Patankar [55].

O modelo numérico de Silva & Maliska [3] foi estendido por Marchi et alii [48] para resolver escoamentos em qualquer regime de velocidade sobre geometrias tridimensionais arbitrárias. Este modelo pode ser visto também nas referências [47] e [49].

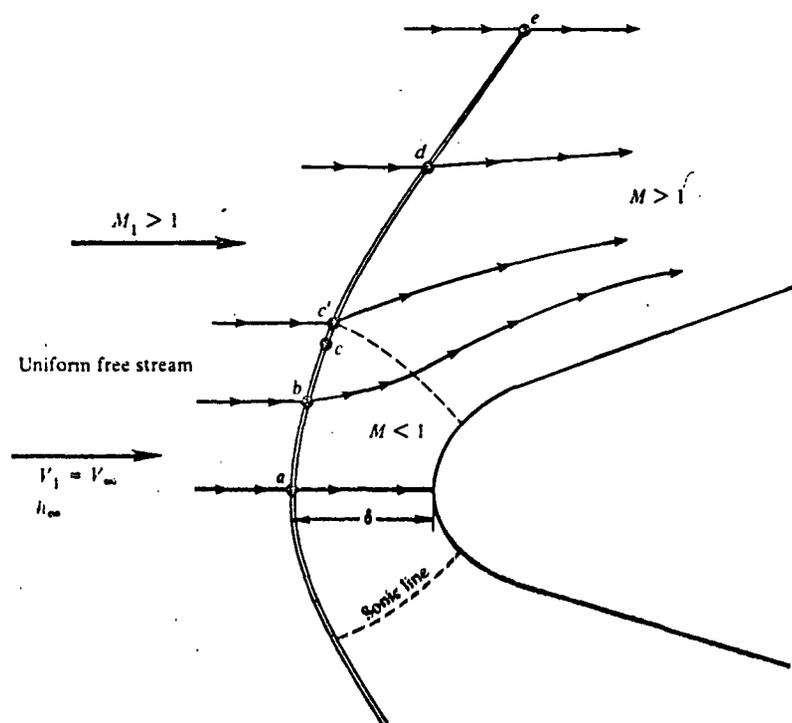


Figura 1c. Escoamento supersônico sobre um corpo rombudo [17].

**9. Escoamento viscoso laminar.** Men [8] verificou que o uso do modelo algébrico de turbulência de Baldwin & Lomax [9], em

problemas bidimensionais, aumenta consideravelmente o tempo de computação necessário para se obter uma solução numérica. Além disso, Visbal & Knight [56], num estudo sobre o modelo de Baldwin & Lomax, chegaram à conclusão de que os coeficientes deste modelo variam com o número de Mach. Portanto, este modelo não é adequado a uma metodologia capaz de resolver escoamentos em qualquer regime de velocidade, como a que se pretende. Devido às limitações computacionais a que o presente trabalho estaria sujeito, e considerando-se os dois comentários acima, escoamentos viscosos turbulentos não serão aqui abordados.

São citados a seguir alguns trabalhos representativos da literatura sobre métodos numéricos que tratam da solução de escoamentos tridimensionais.

Rakich [85], em 1967, resolveu escoamentos tridimensionais supersônicos usando o método das características [60]. Este método permite resolver a equação potencial para escoamentos supersônicos e incluir efeitos de camada limite e de reações químicas [80]. Dois anos depois, Williams [86] publicou um trabalho onde as equações de Navier-Stokes para escoamentos tridimensionais de fluidos incompressíveis eram resolvidas. Malhas de até 70 mil volumes foram usadas. O mesmo tipo de problema foi resolvido por Briley & McDonald [84]. Exemplos de métodos numéricos desenvolvidos para resolver escoamentos tridimensionais parabólicos de fluidos incompressíveis são os trabalhos de Patankar & Spalding [36], Briley [87], e Maliska [63]. Escoamentos tridimensionais elípticos turbulentos, de baixa velocidade, foram resolvidos por Hah [57].

Modelos numéricos para resolver escoamentos tridimensionais de fluidos compressíveis foram propostos, por exemplo, nos trabalhos de Briley & McDonald [84], Pullian & Steger [88] e Rieger & Jameson [59]. Neste último trabalho, escoamentos hipersônicos de gás perfeito foram resolvidos com uma malha de 813 mil volumes. Escoamentos tridimensionais hipersônicos, incluindo efeitos de gás real, foram resolvidos no trabalho de Prabhu & Tannehill [89]. Azevedo [58] resolveu escoamentos tridimensionais subsônicos, transônicos e supersônicos usando malhas de até 263 mil volumes, e problemas onde a interação de escoamentos transônicos com a

estrutura de um foguete foi considerada [83]. Baudart et alii [90] resolveram escoamentos tridimensionais turbulentos transientes, bifásico e com reações químicas no interior da câmara de combustão de um foguete a propelente líquido.

Verificou-se através da revisão bibliográfica realizada que não existe nenhum modelo numérico que permita resolver escoamentos tridimensionais viscosos em qualquer regime de velocidade e que apresente as nove características acima relacionadas. Este fato revela a oportunidade do presente trabalho.

### **1.3 - CONTRIBUIÇÃO**

A contribuição do presente trabalho se constitui na extensão a problemas tridimensionais da metodologia de Silva & Maliska [3] que é capaz de resolver escoamentos bidimensionais em qualquer regime de velocidade.

Esta extensão envolve: a elaboração de um modelo numérico com as nove características descritas no item 1.2, dentre as quais se destaca o emprego da metodologia para qualquer regime de velocidade e o uso do arranjo co-localizado de variáveis; a implementação de dois códigos computacionais, um para escoamentos invíscidos e outro para escoamentos viscosos; e a validação do modelo numérico proposto.

A validação é feita comparando-se a solução numérica de escoamentos tridimensionais invíscidos e viscosos sobre o foguete VLS com dados experimentais obtidos em túnel de vento. São resolvidos numericamente escoamentos com número de Mach 0,50, 0,90 e 3,0, para ângulos de ataque de zero e seis graus, utilizando-se malhas de 40, 80 e 160 mil volumes de controle.

O domínio de cálculo engloba apenas a parte frontal do foguete VLS (Fig. 1), mais precisamente, 25% de seu comprimento. Isto se deve ao fato de que, mais adiante, os efeitos do escoamento sobre os foguetes boosters começam a ser sentidos e, portanto, o

domínio teria que envolver os boosters também. Mas, devido às limitações computacionais, isto é evitado neste trabalho.

Deixa-se claro que não se tem por objetivo, nesta dissertação, discutir sobre os fenômenos físicos envolvidos nos escoamentos a serem abordados. Muito embora isso seja de grande importância, a ênfase dada neste trabalho relaciona-se com o desempenho da metodologia numérica proposta.

A seguir, apresenta-se no capítulo 2 o modelo matemático a ser considerado no presente trabalho. Em seguida, no capítulo 3, o modelo numérico proposto é descrito. Os resultados numéricos obtidos são mostrados no capítulo 4 (escoamentos tridimensionais axissimétricos) e no capítulo 5 (escoamentos tridimensionais). Finalmente, no capítulo 6, a conclusão sobre o trabalho é apresentada.

---

## 2. MODELO MATEMÁTICO

---

O tipo de problema físico que se pretende resolver é o escoamento tridimensional de alta velocidade de um fluido sobre um veículo aeroespacial.

Para tanto, o fluido de trabalho que será usado é o ar. Apesar dele ser constituído por uma mistura de diversos gases, será admitido que esta mistura se comporte como um gás termicamente e caloricamente perfeito [60], que seja uma substância pura, e que sua viscosidade absoluta e condutividade térmica sejam constantes.

Admitindo-se as simplificações acima, o modelo matemático que será adotado é composto pelas equações de conservação da massa e da energia, pelas equações de Navier-Stokes, e pela equação dos gases perfeitos. Estas equações, escritas no sistema de coordenadas cartesiano  $(x, y, z)$ , podem ser vistas no livro de Bejan [61].

Visando a solução de escoamentos sobre geometrias arbitrárias, surge a necessidade de se empregar um sistema de coordenadas que permita dar generalidade ao método numérico e que evite problemas na aplicação das condições de contorno [30,62]. Isto é conseguido através de um sistema de coordenadas que se adapta aos contornos do domínio de cálculo.

Sendo assim, as cinco equações de conservação, acima mencionadas, escritas num sistema de coordenadas naturais  $(\xi, \eta, \gamma)$ , podem ser expressadas genericamente por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V \phi) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\rho W \phi) = - \hat{P} \phi + \hat{S} \phi \\ & + \Gamma \phi \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \alpha_{11} J \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \alpha_{12} J \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \alpha_{13} J \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) + \Gamma \phi \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \alpha_{12} J \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \alpha_{22} J \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \alpha_{23} J \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) \\ & + \Gamma \phi \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \alpha_{13} J \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \alpha_{23} J \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \alpha_{33} J \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

onde o jacobiano da transformação do sistema de coordenadas é dado por

$$J = (x_{\xi}y_{\eta}z_{\gamma} + x_{\eta}y_{\gamma}z_{\xi} + x_{\gamma}y_{\xi}z_{\eta} - x_{\xi}y_{\gamma}z_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}z_{\gamma} - x_{\gamma}y_{\eta}z_{\xi})^{-1} \quad (2)$$

Informações sobre o processo de transformação de equações entre dois sistemas de coordenadas podem ser vistas no livro de Anderson et alii [35].

As expressões para as componentes contravariantes do vetor velocidade são

$$U = \bar{\xi}_x u + \bar{\xi}_y v + \bar{\xi}_z w \quad (3)$$

$$V = \bar{\eta}_x u + \bar{\eta}_y v + \bar{\eta}_z w \quad (4)$$

$$W = \bar{\gamma}_x u + \bar{\gamma}_y v + \bar{\gamma}_z w \quad (5)$$

onde

$$\bar{\xi}_x = z_{\gamma}y_{\eta} - z_{\eta}y_{\gamma} \quad (6)$$

$$\bar{\xi}_y = z_{\eta}x_{\gamma} - z_{\gamma}x_{\eta} \quad (7)$$

$$\bar{\xi}_z = y_{\gamma}x_{\eta} - y_{\eta}x_{\gamma} \quad (8)$$

$$\bar{\eta}_x = z_{\xi}y_{\gamma} - z_{\gamma}y_{\xi} \quad (9)$$

$$\bar{\eta}_y = z_{\gamma}x_{\xi} - z_{\xi}x_{\gamma} \quad (10)$$

$$\bar{\eta}_z = y_{\xi}x_{\gamma} - y_{\gamma}x_{\xi} \quad (11)$$

$$\bar{\gamma}_x = z_{\eta}y_{\xi} - z_{\xi}y_{\eta} \quad (12)$$

$$\bar{\gamma}_y = z_{\xi}x_{\eta} - z_{\eta}x_{\xi} \quad (13)$$

$$\bar{\gamma}_z = y_{\eta}x_{\xi} - y_{\xi}x_{\eta} \quad (14)$$

As componentes do tensor métrico que aparecem na Eq. (1) são dadas por

$$\alpha_{11} = (\bar{\xi}_x)^2 + (\bar{\xi}_y)^2 + (\bar{\xi}_z)^2 \quad (15)$$

$$\alpha_{22} = (\bar{\eta}_x)^2 + (\bar{\eta}_y)^2 + (\bar{\eta}_z)^2 \quad (16)$$

$$\alpha_{33} = (\bar{\gamma}_x)^2 + (\bar{\gamma}_y)^2 + (\bar{\gamma}_z)^2 \quad (17)$$

$$\alpha_{12} = \bar{\xi}_x \bar{\eta}_x + \bar{\xi}_y \bar{\eta}_y + \bar{\xi}_z \bar{\eta}_z \quad (18)$$

$$\alpha_{13} = \bar{\xi}_x \bar{\gamma}_x + \bar{\xi}_y \bar{\gamma}_y + \bar{\xi}_z \bar{\gamma}_z \quad (19)$$

$$\alpha_{23} = \bar{\eta}_x \bar{\gamma}_x + \bar{\eta}_y \bar{\gamma}_y + \bar{\eta}_z \bar{\gamma}_z \quad (20)$$

A letra  $\phi$  representa a variável dependente das cinco equações de conservação. Desta forma, quando  $\phi$  for igual a 1, u, v, w ou T são recuperadas as equações de conservação da massa, da quantidade de movimento nas direções x, y e z (equações de Navier-Stokes) e da energia.

O coeficiente de transporte da difusão,  $\Gamma^\phi$ , é nulo para  $\phi = 1$ , é igual a  $\mu$  quando  $\phi$  representa u, v e w, e é igual a  $k/c_p$  para  $\phi = T$ .

Os termos fontes  $\hat{P}^\phi$  e  $\hat{S}^\phi$  são nulos para a equação de conservação da massa. Para as demais equações, eles são representados por

$$\hat{P}^u = p_\xi \bar{\xi}_x + p_\eta \bar{\eta}_x + p_\gamma \bar{\gamma}_x \quad (21)$$

$$\hat{P}^v = p_\xi \bar{\xi}_y + p_\eta \bar{\eta}_y + p_\gamma \bar{\gamma}_y \quad (22)$$

$$\hat{P}^w = p_\xi \bar{\xi}_z + p_\eta \bar{\eta}_z + p_\gamma \bar{\gamma}_z \quad (23)$$

$$\hat{P}^T = \frac{1}{c_p J} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \vec{v}) - p (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \quad (24)$$

$$\hat{S}^u = \frac{\mu}{3} \left[ \bar{\xi}_x \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla \cdot \vec{v}) + \bar{\eta}_x \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla \cdot \vec{v}) + \bar{\gamma}_x \frac{\partial}{\partial \gamma} (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \quad (25)$$

$$\hat{S}^v = \frac{\mu}{3} \left[ \bar{\xi}_y \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla \cdot \vec{v}) + \bar{\eta}_y \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla \cdot \vec{v}) + \bar{\gamma}_y \frac{\partial}{\partial \gamma} (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \quad (26)$$

$$\hat{S}^w = \frac{\mu}{3} \left[ \bar{\xi}_z \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla \cdot \vec{v}) + \bar{\eta}_z \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla \cdot \vec{v}) + \bar{\gamma}_z \frac{\partial}{\partial \gamma} (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}^T = & \frac{\mu J}{c_p} \left\{ 2 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{\xi}_x u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{\eta}_x u) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\bar{\gamma}_x u) \right]^2 \right. \\ & + 2 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{\xi}_y v) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{\eta}_y v) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\bar{\gamma}_y v) \right]^2 \\ & + 2 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{\xi}_z w) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{\eta}_z w) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\bar{\gamma}_z w) \right]^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \right)^2 \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{\xi}_y u + \bar{\xi}_x v) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{\eta}_y u + \bar{\eta}_x v) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\bar{\gamma}_y u + \bar{\gamma}_x v) \right]^2 \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{\xi}_z v + \bar{\xi}_y w) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{\eta}_z v + \bar{\eta}_y w) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\bar{\gamma}_z v + \bar{\gamma}_y w) \right]^2 \\ & \left. + \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{\xi}_x w + \bar{\xi}_z u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{\eta}_x w + \bar{\eta}_z u) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\bar{\gamma}_x w + \bar{\gamma}_z u) \right]^2 \right\} \quad (28) \end{aligned}$$

onde

$$\nabla \cdot \vec{v} = J \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \right) \quad (29)$$

A forma da equação dos gases perfeitos que se adota é

$$p = \rho RT \quad (30)$$

Apesar de se estar interessado apenas nas soluções de regime permanente dos problemas que serão simulados, o tempo é mantido nas equações para servir como parâmetro de controle do processo iterativo em que as equações de conservação são resolvidas.

Resumindo, o modelo matemático que descreve o tipo de problema físico que se pretende resolver neste trabalho é formado pela Eq. (1), que representa cinco equações de conservação, e pela relação constitutiva da Eq. (30). As incógnitas nestas seis equações são  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $T$  e  $p$ . No próximo capítulo é descrito o procedimento numérico que será usado para resolver o modelo matemático apresentado.

---

## 3. MODELO NUMÉRICO

---

O método dos volumes finitos será empregado na construção do modelo numérico descrito neste capítulo. A teoria básica sobre o método dos volumes finitos pode ser encontrada em [22,26,27].

### 3.1 - EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES E DA ENERGIA

O princípio básico do método dos volumes finitos é subdividir (discretizar) o domínio do problema em diversos volumes de controle, em cada um dos quais as equações diferenciais do modelo matemático são integradas. O domínio de cálculo do problema deve ser entendido como a região do espaço onde pretende-se obter a solução do escoamento.

Um volume de controle qualquer representado no sistema de coordenadas cartesiano  $(x, y, z)$ , em geral, tem uma geometria arbitrária composta por seis quadriláteros. No entanto, representado no sistema de coordenadas naturais  $(\xi, \eta, \gamma)$ , todos os volumes de controle são cubos de mesmo tamanho, como na Fig. 2, adotando-se por simplicidade  $\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\gamma = 1$  metro. As dimensões reais de um volume de controle são passadas para o espaço transformado através das Eq. (2) e Eq. (6) a (14).

Integrando-se a Eq. (1) no tempo e sobre o volume de controle P da Fig. (2), delimitado por suas seis faces (e, w, n, s, d, f), obtém-se

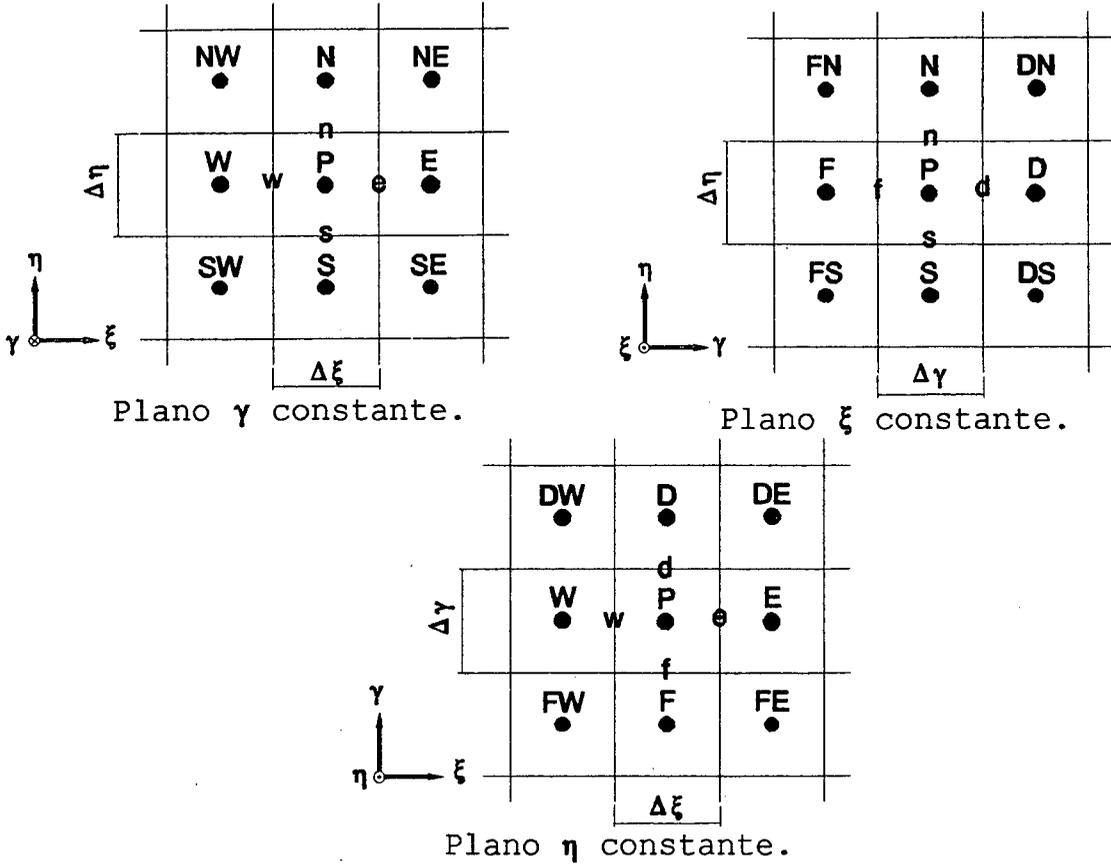


Figura 2. Volumes de controle no espaço transformado.

$$\begin{aligned}
 & (M_P \dot{\phi}_P - M_P^o \dot{\phi}_P^o) / \Delta t + \dot{M}_e \phi_e - \dot{M}_w \phi_w + \dot{M}_n \phi_n - \dot{M}_s \phi_s + \dot{M}_d \phi_d - \dot{M}_f \phi_f = \\
 & + \left( D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_3 \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right)_e - \left( D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_3 \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right)_w \\
 & + \left( D_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_5 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_6 \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right)_n - \left( D_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_5 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_6 \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right)_s \\
 & + \left( D_7 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_8 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_9 \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right)_d - \left( D_7 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_8 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_9 \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right)_f \\
 & - L[\hat{P}^\phi]_P \Delta V + L[\hat{S}^\phi]_P \Delta V
 \end{aligned} \tag{31}$$

onde os fluxos convectivos são dados por

$$\dot{M}_e = (\rho U)_e \Delta \eta \Delta \gamma \tag{32}$$

$$\dot{M}_w = (\rho U)_w \Delta \eta \Delta \gamma \tag{33}$$

$$\dot{M}_n = (\rho V)_n \Delta \xi \Delta \gamma \quad (34)$$

$$\dot{M}_s = (\rho V)_s \Delta \xi \Delta \gamma \quad (35)$$

$$\dot{M}_d = (\rho W)_d \Delta \xi \Delta \eta \quad (36)$$

$$\dot{M}_f = (\rho W)_f \Delta \xi \Delta \eta \quad (37)$$

os fluxos difusivos por

$$D_1 = \Gamma^\phi \alpha_{11} J \Delta \eta \Delta \gamma \quad (38)$$

$$D_2 = \Gamma^\phi \alpha_{12} J \Delta \eta \Delta \gamma \quad (39)$$

$$D_3 = \Gamma^\phi \alpha_{13} J \Delta \eta \Delta \gamma \quad (40)$$

$$D_4 = \Gamma^\phi \alpha_{12} J \Delta \xi \Delta \gamma \quad (41)$$

$$D_5 = \Gamma^\phi \alpha_{22} J \Delta \xi \Delta \gamma \quad (42)$$

$$D_6 = \Gamma^\phi \alpha_{23} J \Delta \xi \Delta \gamma \quad (43)$$

$$D_7 = \Gamma^\phi \alpha_{13} J \Delta \xi \Delta \eta \quad (44)$$

$$D_8 = \Gamma^\phi \alpha_{23} J \Delta \xi \Delta \eta \quad (45)$$

$$D_9 = \Gamma^\phi \alpha_{33} J \Delta \xi \Delta \eta \quad (46)$$

e

$$M_p = \rho_p \Delta V / J_p \quad (47)$$

$$M_p^\circ = \rho_p^\circ \Delta V / J_p \quad (48)$$

$$\Delta V = \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma \quad (49)$$

Os dois termos da Eq. (31) com o superescrito "0" são avaliados no instante de tempo  $t$ , enquanto que todos os demais, no

instante  $t+\Delta t$ , caracterizando assim uma formulação totalmente implícita. Uma discussão a respeito de formulações explícitas e implícitas pode ser lida no trabalho de Maliska [27]. O processo de cálculo dos fluxos convectivos e difusivos, Eq. (32) a (46), será apresentado posteriormente.

O arranjo de variáveis que se adota neste trabalho é o co-localizado. Neste arranjo, todas as variáveis ou incógnitas ( $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $T$  e  $p$ ) são armazenadas no centro dos volumes de controle. Entretanto, como pode ser visto na Eq. (31), é necessário conhecer as incógnitas e suas derivadas nas faces dos volumes de controle. Sendo assim, algum esquema que relacione as incógnitas no centro do volume de controle com suas faces deve ser empregado. O esquema escolhido foi o WUDS de Raithby & Torrance [31] na forma apresentada em [33]. Neste esquema, para a face leste ( $e$ ), por exemplo, tem-se

$$\phi_e = (1/2 + \alpha_e)\phi_P + (1/2 - \alpha_e)\phi_E \quad (50)$$

e

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)_e = \beta_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\Delta\xi} \quad (51)$$

As derivadas cruzadas que aparecem na Eq. (31), isto é, aquelas avaliadas numa direção que seja paralela à face onde devem ser obtidas, são calculadas por diferenças finitas. Como exemplo, tem-se

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)_e = \frac{(\phi_N + \phi_{NE} - \phi_S - \phi_{SE})}{4 \Delta\eta} \quad (52)$$

Os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  resultam da solução de um problema convectivo-difusivo unidimensional, sendo dados por [33]

$$\alpha = \frac{sg(\dot{M}) \cdot Pe^2}{(10 + 2Pe^2)} \quad (53)$$

$$\beta = \frac{(1 + 0.005Pe^2)}{(1 + 0.05Pe^2)} \quad (54)$$

onde  $sg$  representa o sinal do fluxo de massa  $M$ , e  $Pe$  é o número de

Peclet, calculado pela razão entre os fluxos convectivo e difusivo. Para a face norte tem-se

$$(Pe)_n = \frac{\dot{M}_n}{D_5}$$

Substituindo as Eq. (50) a (52), e suas análogas para as outras cinco faces, chega-se à seguinte forma discretizada das equações de Navier-Stokes e da energia para um volume de controle genérico,

$$a_P \phi_P = \Sigma (a_{nb} \phi_{NB})_P + b_P \quad (55)$$

As expressões para os coeficientes da Eq. (55) são apresentados no Apêndice 1. Esta equação representa um sistema linear para  $\phi$  com 19 diagonais não-nulas.

Os termos  $L[\hat{P}^\phi]$  e  $L[\hat{S}^\phi]$  da Eq. (31) representam a integração numérica por diferenças finitas dos termos fontes  $\hat{P}^\phi$  e  $\hat{S}^\phi$ . Suas expressões são dadas no Apêndice 1.

### 3.2 - AVALIAÇÃO DOS FLUXOS CONVECTIVOS

Para se calcular os coeficientes da Eq. (55) é necessário conhecer os valores de  $\rho$ ,  $U$ ,  $V$  e  $W$  nas faces do volume de controle para, então, avaliar os fluxos convectivos com as Eq. (32) a (37).

Conforme proposto em [81,80,54], usa-se o esquema upwind [77] para avaliar a massa específica nas faces. Assim, para a face leste, por exemplo, tem-se

$$\rho_e = (1/2 + \gamma_e) \rho_P + (1/2 - \gamma_e) \rho_E \quad (56)$$

onde  $\gamma_e$  é igual a  $1/2$  se  $U_e \geq 0$  ou  $-1/2$  se  $U_e < 0$ .

O esquema usado para avaliar as componentes contravariantes da velocidade nas faces do volume de controle é

aquele proposto por Marchi et alii [48] e que pode ser visto também em [47]. Como exemplo, é descrito o cálculo de  $U$  na face leste,  $U_e$ .

Da Eq. (55), obtém-se

$$a_P \phi_P = \Sigma (a_{nb} \phi_{NB})_P + b'_P - L[\hat{P}^\phi]_P \Delta V \quad (57)$$

onde  $b'_P$  é o termo independente  $b_P$  mostrado no Apêndice 1 subtraído do termo  $L[\hat{P}^\phi]$ , e  $\phi$  representa  $u$ ,  $v$  e  $w$ .

Escrevendo-se a mesma Eq. (55), mas agora para o volume de controle  $E$ , tem-se

$$a_E \phi_E = \Sigma (a_{nb} \phi_{NB})_E + b'_E - L[\hat{P}^\phi]_E \Delta V \quad (58)$$

onde  $a_E$  representa o coeficiente central  $a_P$  do volume  $E$ .

A determinação de  $\phi_e$  é feita efetuando-se uma média aritmética entre as Eq. (57) e (58), exceto com os termos  $L[\hat{P}^\phi]$ . Estes termos são avaliados como se um arranjo desencontrado de variáveis [22] estivesse sendo usado. Procedendo-se à média, obtém-se

$$\frac{(a_P + a_E)}{2} \phi_e = \frac{1}{2} [\Sigma (a_{nb} \phi_{NB})_P + \Sigma (a_{nb} \phi_{NB})_E + b'_P + b'_E] - L[\hat{P}^\phi]_e \Delta V \quad (59)$$

ou

$$\phi_e = \frac{[\Sigma (a_{nb} \phi_{NB})_P + \Sigma (a_{nb} \phi_{NB})_E + b'_P + b'_E]}{(a_P + a_E)} - \frac{2 \cdot \Delta V}{(a_P + a_E)} L[\hat{P}^\phi]_e \quad (60)$$

Com  $u_e$ ,  $v_e$  e  $w_e$  calculados através da Eq. (60),  $U_e$  é obtido com a Eq. (3). Para tanto, as métricas  $\xi_x$ ,  $\xi_y$  e  $\xi_z$  devem ser aquelas calculadas sobre a face leste. Finalmente, calculados  $\rho_e$  e  $U_e$ , o fluxo convectivo na face leste pode ser obtido através da Eq. (32).

O procedimento descrito neste item também é empregado para obter  $\rho$ ,  $U$ ,  $V$  e  $W$  nas outras cinco faces visando o cálculo dos demais fluxos convectivos.

As expressões para os termos fontes  $L[\hat{P}^\phi]$  nas faces leste (e), norte (n) e dorsal (d), para  $u$ ,  $v$  e  $w$ , são apresentadas no Apêndice 2.

### 3.3 - EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA

A Eq. (31) escrita para  $\phi = 1$  resulta em

$$\frac{(M_P - M_P^0)}{\Delta t} + \dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s + \dot{M}_d - \dot{M}_f = 0 \quad (61)$$

Para resolver escoamentos em qualquer regime de velocidade, a técnica CSDV [3] é empregada. Ela consiste em manter a massa específica e a velocidade como incógnitas na equação de conservação da massa [81,84]. O fluxo de massa na face leste, por exemplo, é calculado por

$$\dot{M}_e = (\rho U)_e \Delta \eta \Delta \gamma = (\rho^* U + \rho U^* - \rho^* U^*)_e \Delta \eta \Delta \gamma \quad (62)$$

onde o asterisco significa que os valores de  $\rho^*$  e  $U^*$  são conhecidos de um nível iterativo anterior relacionado a um campo de pressão estimado ( $p^*$ ), e  $\rho$  e  $U$  são incógnitas referidas ao nível de pressão ( $p$ ).

Substituindo a Eq. (62), e suas análogas para as outras cinco faces do volume de controle elementar, na Eq. (61), chega-se a

$$\begin{aligned} m_p \rho_P + m_e^p \rho_E + m_w^p \rho_W + m_n^p \rho_N + m_s^p \rho_S + m_d^p \rho_D + m_f^p \rho_F \\ + m_e^U U_e + m_w^U U_w + m_n^V V_n + m_s^V V_s + m_d^W W_d + m_f^W W_f = b^c \end{aligned} \quad (63)$$

onde os coeficientes desta equação são dados no Apêndice 3. Para se chegar à Eq. (63), explicitou-se a massa específica, nas faces, em função daquelas armazenadas no centro dos volumes, através da Eq. (56) e de suas análogas.

A partir da equação de estado, Eq. (30), escrita para os campos de pressões  $p$  e  $p^*$ , obtém-se para a massa específica a seguinte expressão

$$\rho_P = \rho_P^* + C_P^p P_P^p \quad (64)$$

onde

$$C_p^p = (T_p R)^{-1} \quad (65)$$

Expressando-se as Eq. (3) e (60) para os campos de pressões  $p$  e  $p^*$ , e empregando-se o método SIMPLEC [37] chega-se a

$$U_e = U_e^* - d_e^U (p'_E - p'_P) \cdot (\alpha_{11})_e \quad (66)$$

É importante mencionar que para se chegar à Eq. (66), todas as derivadas cruzadas dos termos  $L[\hat{P}^\phi]_e$  da Eq. (60) foram desprezadas. O objetivo desta simplificação é obter um sistema linear de sete diagonais não-nulas para a equação de conservação da massa, bem mais simples que o sistema de 19 diagonais. Esta simplicidade se traduz nos seguintes aspectos: redução de memória computacional, pois 12 coeficientes a menos são armazenados, e redução no tempo de CPU gasto para resolver o sistema linear. Além disso, o algoritmo resultante é bem mais simples de implementar.

Como a Eq. (66) se constitui numa forma de se avançar o processo iterativo e sabendo-se que quando este convergir o campo de  $p'$  será nulo, nenhum erro está sendo cometido com a simplificação realizada. O que pode ocorrer é o processo iterativo necessitar de mais iterações para convergir.

As expressões para as componentes contravariantes nas demais faces do volume de controle são dadas por

$$U_w = U_w^* - d_w^U (p'_P - p'_W) \cdot (\alpha_{11})_w \quad (67)$$

$$V_n = V_n^* - d_n^V (p'_N - p'_P) \cdot (\alpha_{22})_n \quad (68)$$

$$V_s = V_s^* - d_s^V (p'_P - p'_S) \cdot (\alpha_{22})_s \quad (69)$$

$$W_d = W_d^* - d_d^W (p'_D - p'_P) \cdot (\alpha_{33})_d \quad (70)$$

$$W_f = W_f^* - d_f^W (p'_P - p'_F) \cdot (\alpha_{33})_f \quad (71)$$

onde, por exemplo

$$d_e^U = (d_p + d_E) / 2 \quad (72)$$

$$d_n^V = (d_p + d_N) / 2 \quad (73)$$

$$d_d^W = (d_p + d_D) / 2 \quad (74)$$

e

$$d_p = (a_p - \Sigma a_{nb})_p^{-1} \quad (75)$$

Os valores da massa específica e das componentes contravariantes da velocidade com asterisco, como já foi dito, referem-se a um campo de pressões estimado ( $p^*$ ). Eles aparecem na Eq. (64), nas Eq. (66) a (71), e nos coeficientes do Apêndice 3. São obtidos através do procedimento descrito no item anterior, 3.2.

Substituindo a Eq. (64) e suas análogas, e as Eq. (66) a (71) na Eq. (63), obtém-se

$$A_p \cdot P'_p = \Sigma (A_{nb} \cdot P'_{NB})_p + B_p \quad (76)$$

A Eq. (76) representa uma correção sobre um campo de pressões estimado que quando substituído nos campos de  $\rho^*$ ,  $U^*$ ,  $V^*$  e  $W^*$  resulta em campos de massa específica e de velocidade que satisfazem a equação de conservação da massa. Os coeficientes da Eq. (76) podem ser vistos no Apêndice 3. O novo campo de pressões é obtido através de

$$P_p = P_p^* + P'_p \quad (77)$$

e as componentes cartesianas da velocidade ( $u, v, w$ ) por

$$\phi_p = \phi_p^* - d_p \cdot L[\hat{P} \cdot \phi]_p \quad (78)$$

onde os termos  $L[\hat{P} \cdot \phi]$  são calculados com as mesmas expressões dadas no Apêndice 1. Para isso, apenas deve-se trocar  $p$  por  $p'$ .

### 3.4 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

A forma de aplicação das condições de contorno pode ser dividida em dois tipos quanto ao uso ou não de volumes fictícios. Designa-se por volume fictício um volume de controle que esteja fora do domínio de cálculo mas adjacente às suas fronteiras.

No caso de não serem usados volumes fictícios, as equações de conservação discretizadas, Eq. (55) e (76), dos volumes de controle adjacentes às fronteiras do domínio, precisam ser alteradas para considerar as condições de contorno. Além disso, nestes volumes de controle situados na fronteira, nem todos os 18 volumes da Fig. 2 em torno de P existem, e isto tem que ser considerado.

Quando volumes fictícios são usados [27], o processo de aplicação das condições de contorno torna-se bastante simplificado em relação à forma anterior. Contudo, mais memória computacional é requerida para armazenar as informações geométricas e os valores das variáveis e de seus coeficientes nestes volumes fictícios, que são, na realidade, as informações das condições de contorno.

Neste trabalho, as condições de contorno para as incógnitas  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $T$  são aplicadas fazendo-se uso de volumes fictícios. No caso da pressão não são usados volumes fictícios porque suas condições de contorno são dadas indiretamente através da massa específica e da velocidade. A seguir, os diversos tipos de condições de contorno são discutidos.

#### 3.4.1 - $\phi$ prescrito.

Considere a Fig. 3 onde são mostrados os volumes fictícios N, P e S adjacentes à fronteira oeste do domínio de cálculo e aos volumes reais NE, E e SE. A representação da Fig. 3 é adequada para aplicar condições de contorno na face leste (e) do volume P.

Quando a condição de contorno é prescrita, ou seja, conhece-se o valor de  $\phi$  na face leste ( $\phi_e$ ), faz-se

$$\phi_P = \phi_e \quad (79)$$

onde  $\phi$  representa  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $T$ .

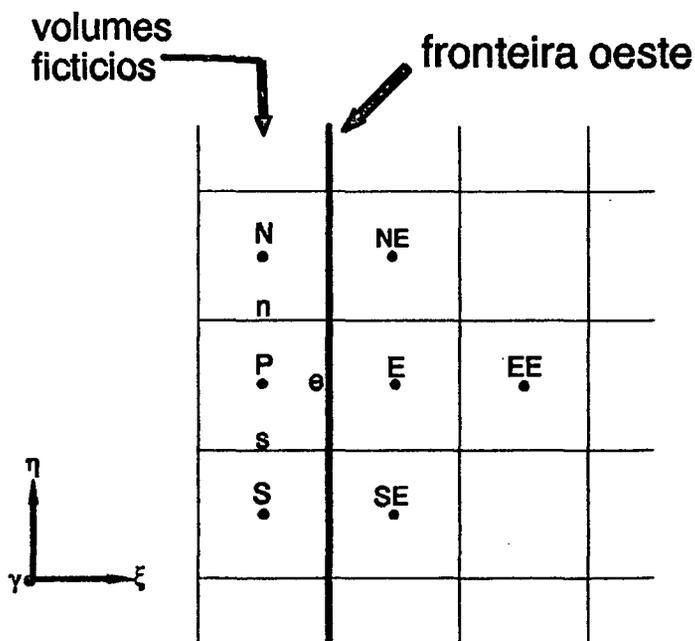


Figura 3. Volumes fictícios no espaço transformado.

A condição imposta através da Eq. (79) é suficiente para  $\rho$ , pois a equação evolutiva de  $\rho$  é algébrica. Para  $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $T$  ela tem que ser escrita na forma de um sistema linear, ou seja, na forma da Eq. (55), o que resulta em

$$a_P = 1, \quad a_{nb} = 0 \quad e \quad b_P = \phi_e \quad (80)$$

Para a equação de conservação da massa, Eq. (76), é necessário conhecer a massa específica do volume  $P$ , o que é contemplado com a Eq. (79), e a componente contravariante  $U$  da velocidade na face "e". Como  $u_e$ ,  $v_e$  e  $w_e$  são conhecidos nesta face,  $U_e$  é calculado diretamente através da Eq. (3). Conhecidos  $\rho_P$  e  $U_e$ , a influência do fluxo de massa prescrito na face "e" passa diretamente ao termo fonte  $B_P$  da Eq. (76).

Como foi citado anteriormente, não sendo usados volumes fictícios para a pressão, quando os coeficientes do volume  $E$  da Fig. 3 estiverem sendo calculados, o coeficiente que relaciona o

volume E ao P deve ser nulo. Isto é conseguido zerando-se os coeficiente  $C^p$  e  $d^u$ ,  $d^v$  e  $d^w$  dos volumes fictícios. Este procedimento de zeragem é adotado com qualquer tipo de condição de contorno. Com isso, a Eq. (66) se reduz a  $U_e = U_e^*$ , ou seja, a pressão não altera  $U_e^*$ . Este é o resultado esperado se a velocidade é prescrita.

### 3.4.2 - Fronteira de simetria.

Para esta condição de contorno, por simplicidade, considere uma situação bidimensional em que os eixos  $\xi$  e  $\eta$  da Fig. 3 coincidam com os eixos  $x$  e  $y$ .

Quando o escoamento dentro do domínio é o mesmo que ocorre com sua imagem em relação a uma de suas fronteiras, as condições impostas são

$$u_P = -u_E \quad (81)$$

e

$$\phi_P = \phi_E \quad (82)$$

com  $\phi = \rho, v$  e  $T$ .

Assim, para a Eq. (81) tem-se

$$a_p = 1, \quad a_e = -1 \quad e \quad a_{nb} = b_p = 0 \quad (83)$$

e para a Eq. (82)

$$a_p = a_e = 1 \quad e \quad a_{nb} = b_p = 0 \quad (84)$$

Para a equação de conservação da massa faz-se

$$U_e = 0 \quad (85)$$

No caso da temperatura, a condição de simetria equivale a de isolamento térmico ou fluxo de calor nulo.

Quando a condição de contorno que se pretende aplicar para a velocidade é a de escorregamento, a condição da Eq. (82) é utilizada para as três componentes cartesianas da velocidade.

### 3.4.3 - Escoamento localmente parabólico.

Este tipo de condição de contorno é empregado nas fronteiras onde o escoamento deixa o domínio de cálculo.

Considerando a simplificação mencionada no início do item 3.4.2, esta condição é dada por

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e = 0 \quad (86)$$

que se traduz na Eq. (82) e é aplicada como mostrado na Eq. (84), com  $\phi$  representando  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $T$ .

Com as componentes cartesianas da velocidade sendo calculadas pela Eq. (82), a componente  $U_e^*$  pode ser obtida da Eq. (3). E, como  $d^v$  é nulo, como já foi dito,  $U_e$  resulta igual a  $U_e^*$ .

#### 3.4.4 - Avaliação de $L[\hat{P}^\phi]_p$ .

Embora não seja propriamente uma condição de contorno, alguns comentários são necessários. Quando os termos  $L[\hat{P}^\phi]_p$  são avaliados para volumes de controle adjacentes aos contornos do domínio (volumes NE, E e SE, no caso da Fig. 3), torna-se necessário conhecer o valor da pressão nos volumes fictícios. Mas, como não se resolve a equação de conservação da massa nos volumes fictícios, algum procedimento tem que ser empregado para avaliar a pressão nestes volumes e poder, então, calcular os termos  $L[\hat{P}^\phi]_p$ . O que se faz é extrapolar linearmente o valor da pressão dos dois volumes reais adjacentes à fronteira. Para o caso da Fig. 3, obtém-se

$$P_P = 2P_E - P_{EE} \quad (87)$$

### 3.5 - CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

Seguindo o trabalho de Maliska [63], uma simulação numérica será considerada convergida se satisfizer o seguinte critério

$$\frac{(P_P - P_P^0)_{\text{maximo}}}{\Delta p} \leq \epsilon \quad (88)$$

onde  $\Delta p$  representa a diferença máxima do campo de pressões. O valor de  $\epsilon$ , em geral, fica na faixa de  $10^{-4}$  a  $10^{-7}$ .

Quando são resolvidos problemas com número de Mach muito pequeno, ou seja, escoamentos de fluidos incompressíveis, o critério da inequação (88) também pode ser aplicado sobre as componentes cartesianas da velocidade, como no trabalho de Milioli et alii [64].

### 3.6 - TENSOR MÉTRICO

As componentes da matriz jacobiana da transformação do sistema de coordenadas, que são necessárias para calcular as métricas das Eq. (6) a (14), são avaliadas através de diferenças finitas. O processo de cálculo é exemplificado a seguir para a componente  $\alpha_{11}$  do tensor métrico, Eq. (15), avaliada na face leste de um volume de controle elementar, Fig. 4. Nos pontos 1, 3, 6 e 8 desta figura são conhecidas as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  que foram obtidas através de algum método de geração de malhas.

As componentes da matriz jacobiana  $\phi_\eta$  e  $\phi_\gamma$  na face leste (e) são dadas por

$$(\phi_\eta)_e = \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_e = \frac{(\phi_7 - \phi_2)}{\Delta \eta} \quad (89)$$

$$(\phi_\gamma)_e = \left( \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right)_e = \frac{(\phi_5 - \phi_4)}{\Delta \gamma} \quad (90)$$

onde  $\phi$  representa  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

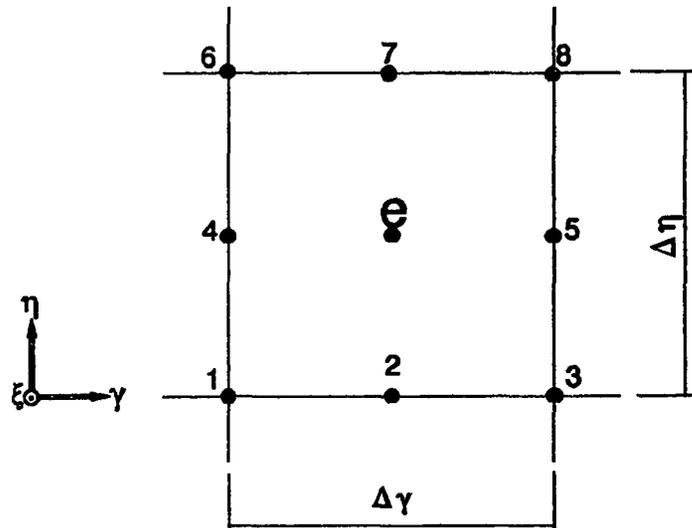


Figura 4. Cálculo das métricas na face leste.

Como os segmentos que unem os pontos 1, 3, 6 e 8 são segmentos de retas, mesmo no espaço físico, as coordenadas nos pontos 2, 4, 5 e 7 são obtidas através de médias das coordenadas conhecidas nos pontos 1, 3, 6 e 8. Desta forma, as Eq. (89) e (90) resultam em

$$(\phi_\eta)_e = \frac{(\phi_6 + \phi_8 - \phi_1 - \phi_3)}{2 \cdot \Delta\eta} \quad (91)$$

$$(\phi_\gamma)_e = \frac{(\phi_3 + \phi_8 - \phi_1 - \phi_6)}{2 \cdot \Delta\gamma} \quad (92)$$

Com  $\phi_\eta$  e  $\phi_\gamma$  dados pelas Eq. (91) e (92), as métricas  $\xi_x$ ,  $\xi_y$  e  $\xi_z$  podem ser calculadas com as Eq. (6) a (8). E, então, a componente  $\alpha_{11}$  do tensor métrico na face leste pode ser obtida através da Eq. (15).

### 3.7 - ALGORITMO DO MODELO NUMÉRICO

A sequência de cálculo do algoritmo numérico adotado

neste trabalho, simplificadamente, é apresentada abaixo.

1. Definição dos dados e das condições iniciais das incógnitas do problema a ser simulado.
2. Discretização do domínio de cálculo e armazenamento das informações geométricas da malha.
3. Estimativa dos campos das incógnitas em  $t+\Delta t$ .
4. Cálculo dos coeficientes das equações de Navier-Stokes.
5. Cálculo dos coeficientes da equação de  $p'$ .
6. Cálculo dos termos fontes das equações de Navier-Stokes.
7. Obtenção da solução da Eq. (55) para  $u^*$ ,  $v^*$  e  $w^*$ .
8. Avaliação das componentes contravariantes  $U^*$ ,  $V^*$  e  $W^*$  através do procedimento descrito no item 3.2.
9. Cálculo do termo fonte de  $p'$ .
10. Obtenção da solução da Eq. (76) para  $p'$ .
11. Correção da pressão e da massa específica com  $p'$  através das Eq. (64) e (77).
12. Correção das componentes cartesianas e contravariantes do vetor velocidade com  $p'$  através das Eq. (66), (68), (70) e (78).
13. Cálculo dos coeficientes e termo fonte da equação da energia.
14. Obtenção da solução da Eq. (55) para  $T$ .
15. Retornar ao item 3 até que o critério de convergência adotado seja satisfeito.

Os cinco sistemas lineares de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p'$  e  $T$ , representados pelas Eq. (55) e (76), são resolvidos com o método ADI [6,7]. Este método consiste na aplicação do algoritmo TDMA [22] sequencialmente nas três direções do sistema de coordenadas transformado.

Os itens 5 a 12 foram executados duas vezes para cada intervalo de tempo. Este procedimento é baseado na experiência do grupo SINMEC e resulta, em geral, na diminuição do tempo de computação para se obter a solução de um problema, em relação à execução dos itens 5 a 12 de uma vez por passo de tempo.

---

## **4. RESULTADOS 3D AXISSIMÉTRICOS**

---

Dezenas de simulações foram feitas inicialmente com o código computacional MACH2D para definir o tamanho do domínio do problema, a tolerância a ser adotada, e estudar o efeito do refino de malha. Neste capítulo, estas simulações são comentadas e alguns resultados apresentados.

O código MACH2D emprega o mesmo modelo numérico deste trabalho mas foi desenvolvido para resolver apenas problemas bidimensionais ou tridimensionais axissimétricos. Dois são os motivos para este código ter sido empregado nas simulações acima mencionadas: 1) utilizando um código bidimensional, não existem restrições relativas ao computador, como tempo de CPU e memória, o que permite realizar muitas simulações em pouco tempo; e 2) vários trabalhos [8,49,65,66] obtiveram resultados numéricos com o código MACH2D, em diversos problemas, que compararam bem com resultados analíticos e experimentais.

### **4.1 - DOMÍNIO E CONDIÇÕES DE CONTORNO**

O domínio de cálculo usado para os testes tridimensionais axissimétricos (ângulo de ataque nulo) foi delimitado por duas retas (contornos W e E), pela geometria do foguete (contorno S), e por um quarto de elipse (contorno N), como pode ser visto esquematicamente na Fig. 5.

A definição da geometria do foguete é dada na Fig. 6

[67]. Os valores apresentados correspondem às dimensões do modelo do foguete VLS, em escala 1:15, que foi usado nos experimentos em túnel de vento.

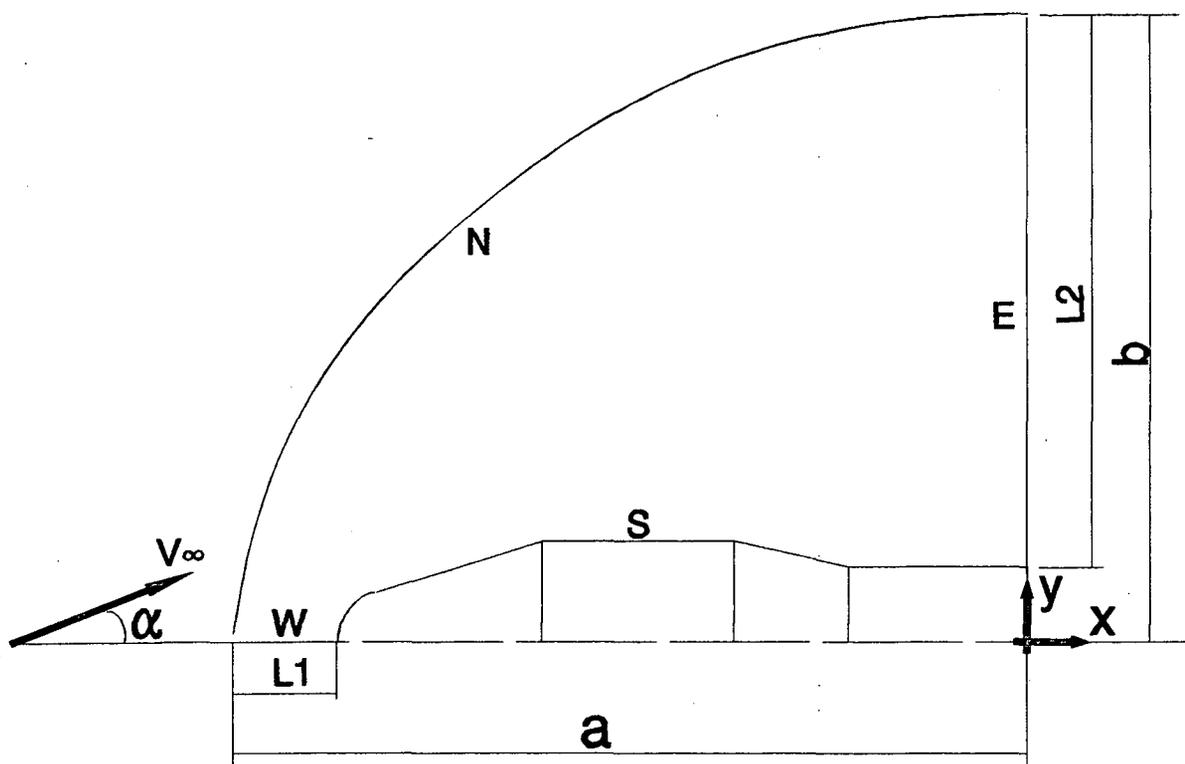


Figura 5. Configuração do domínio de cálculo.

Os números de Mach considerados nas simulações foram 0,50, 0,90 e 3,0 caracterizando assim três regimes de velocidade: subsônico, transônico e supersônico, respectivamente. As definições destes três escoamentos são dadas na Tabela 1. O número de Mach para um gás perfeito pode ser definido por

$$M = \frac{u}{\sqrt{\gamma RT}} \quad (93)$$

Com base nos dados da Tabela 1, chegou-se àqueles mostrados na Tabela 2. A temperatura  $T_\infty$  foi calculada a partir de  $T_0$ , considerando escoamento compressível invíscido, quase-unidimensional [60] com  $\gamma = 1,4$  e  $R = 287 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  para o ar. A velocidade é obtida da equação de estado, Eq. (30), e da definição de pressão dinâmica  $q$ , dada por

$$q_{\infty} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} u_{\infty}^2 \quad (94)$$

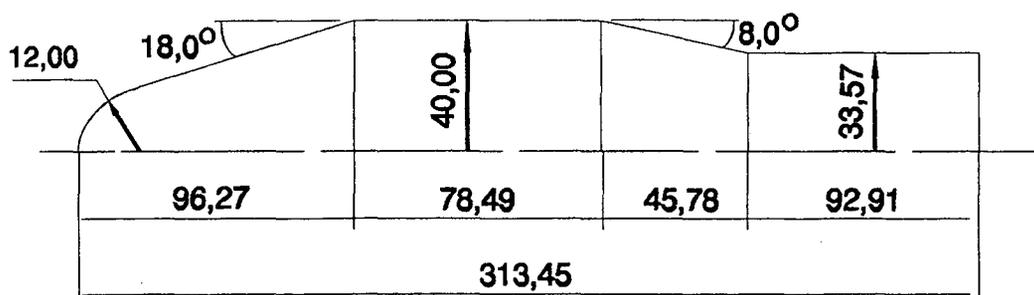


Fig. 6 Geometria do modelo do foguete VLS (dados em milímetros).

Tabela 1. Dados experimentais para  $\alpha = 0^\circ$  [67].

Problema n°	1	2	3
$M_{\infty}$	0,50	0,90	3,00
$p_{\infty}$ [kPa]	210,623	107,321	3,230
$T_0$ [K]	290,6	300,5	291,3
$q_{\infty}$ [kPa]	36,642	60,464	20,369
$Re/L$ [ $m^{-1}$ ]	$25,4 \times 10^6$	$23,4 \times 10^6$	$9,3 \times 10^6$

A viscosidade é calculada usando-se a definição do número de Reynolds  $Re$  cuja expressão é

$$\frac{Re}{L} = \frac{\rho_{\infty} u_{\infty}}{\mu_{\infty}} \quad (95)$$

O número de Prandtl foi obtido de dados experimentais para o ar [68] considerando a temperatura  $T_{\infty}$ .

As condições de contorno aplicadas, com referência à nomenclatura da Fig. 5 e ao item 3.4 do capítulo anterior, foram:

- contorno N:  $\phi$  prescrito (condições da corrente-livre), Tabelas 1 e 2);
- contorno W: fronteira de simetria;
- contorno E: escoamento localmente parabólico; e
- contorno S: isolamento térmico ou parede adiabática para a temperatura. Para a velocidade, no caso de escoamento invíscido (equações de Euler), aplicou-se a condição de escorregamento e de fluxo de massa normal à parede nulo. Já para escoamento viscoso (equações de Navier-Stokes), a condição de  $\phi$  prescrito foi usada para a velocidade, com  $\phi = 0$ .

Tabela 2. Dados complementares para  $\alpha = 0^\circ$ .

Problema nº	1	2	3
$M_\infty$	0,50	0,90	3,00
$T_\infty$ [K]	276,8	258,6	104,0
$u_\infty$ [m/s]	166,3	289,2	613,6
$\mu_\infty$ [kg/m-s]	$1,74 \times 10^{-5}$	$1,79 \times 10^{-5}$	$7,14 \times 10^{-6}$
Pr	0,714	0,720	0,769

Como se sabe, escoamentos subsônicos apresentam um comportamento físico elíptico [27]. Desta forma, o contorno N deve estar a uma distância do foguete que seja suficiente para não interferir nos resultados do problema. Com base em diversas simulações para os problemas 1 e 2, verificou-se que as distâncias  $L_1$  e  $L_2$  deveriam ser 5,0 e 10,0 metros, respectivamente.

Embora um domínio muito menor pudesse ser adotado para o problema 3, por ser um escoamento supersônico, de característica hiperbólica, isto não foi feito. Visando-se facilitar a realização das simulações, um único domínio foi usado.

Conforme mostrado em [60], um escoamento pode ser considerado como ocorrendo num meio contínuo se a seguinte relação for satisfeita,

$$Kn \approx \frac{M}{\sqrt{Re}} < 0.01$$

onde Kn é o número de Knudsen. Este número é definido como a razão entre o livre caminho médio das partículas do fluido e o comprimento característico do problema. Para os problemas 1 a 3, o valor máximo do número de Knudsen obtido, para as condições da corrente-livre, foi  $8,8 \times 10^{-4}$ . Portanto, para os três problemas em consideração, a hipótese de meio contínuo é válida.

## 4.2 - TOLERÂNCIA E DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO

Para os três problemas, verificou-se que com o valor de  $10^{-4}$  para  $\epsilon$  (item 3.5) os resultados obtidos para o coeficiente de pressão já podiam ser considerados convergidos. No caso da temperatura, os valores de  $\epsilon$  para a pressão tiveram que ser  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$  e  $10^{-6}$ , para os problemas 1, 2 e 3, respectivamente.

Foram usados 49 pontos para definir a geometria do foguete (contorno S) e da elipse (contorno N). No contorno S, estes 49 pontos foram concentrados mais na ogiva do foguete, com o espaçamento entre eles aumentando gradativamente em direção ao contorno E. A altura  $y$  de cada ponto que define o contorno N foi calculado por uma progressão geométrica de razão 1,05 sobre o comprimento  $b$  da Fig. 5. Com a altura  $y$  calculada, a coordenada  $x$  de cada ponto da elipse foi obtida por

$$x = -a\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (96)$$

O efeito de se usar mais pontos para discretizar os contornos S e N será comentado ainda neste capítulo.

Depois de várias simulações realizadas, decidiu-se usar 71 pontos para discretizar os contornos W e E. Este número foi considerado satisfatório para captar a camada limite, as expansões

e compressões dos escoamentos sobre o foguete.

Uma progressão geométrica (PG) de razão 1,20 foi usada para calcular as coordenadas dos pontos que definem os contornos W e E. O primeiro elemento desta PG fica sobre o foguete. Seu comprimento é de 2,9  $\mu\text{m}$  para o contorno W, e de 5,7  $\mu\text{m}$  para o contorno E.

A discretização do domínio é feita com retas que unem os pontos do contorno S ao N. Sobre o comprimento destas retas, é aplicada a mesma P.G. dos contornos W e E, obtendo-se assim as coordenadas dos pontos que definem a malha mostrada na Fig. 7. Uma ampliação dela é vista na Fig. 8, onde os primeiros 50 volumes na direção normal ao foguete são mostrados.

A malha da Fig. 7 foi empregada tanto na solução de escoamentos invíscidos quanto viscosos. Desta forma, evitou-se qualquer influência de malha sobre a comparação dos resultados obtidos.

O intervalo de tempo  $\Delta t$  usado para avançar o processo iterativo de solução do sistema de equações foi variável. A partir de um valor mínimo, ia sendo aumentado com o número de iterações até atingir um valor máximo estabelecido. O objetivo deste procedimento é o de obter a convergência em um menor número de iterações. O intervalo de tempo empregado é dado por

$$\Delta t = \Delta t^* \cdot \frac{R_f}{u_\infty} \quad (97)$$

onde  $R_f$  é uma dimensão característica, no caso, o raio máximo do foguete que é de 40 mm;  $u_\infty$  é a velocidade da corrente-livre; e  $\Delta t^*$  é o intervalo de tempo adimensional. O valor de  $\Delta t^*$  usado ficou na faixa de 0,50 a 6,1.

### 4.3 - RESULTADOS NUMÉRICOS

Visando facilitar a compreensão dos resultados a serem

apresentados, as seguintes características da geometria devem ser destacadas:

- em  $x/L = 0.0$  tem-se o ápice da ogiva do foguete;
- em  $x/L = 0,0066$ , transição da região esférica para a cônica;
- em  $x/L = 0,0768$ , cone-cilindro com diâmetro maior;
- em  $x/L = 0,139$ , cilindro-cone de redução;
- em  $x/L = 0,176$ , cone-cilindro com diâmetro menor;
- em  $x/L = 0,25$ , limite do domínio de cálculo.

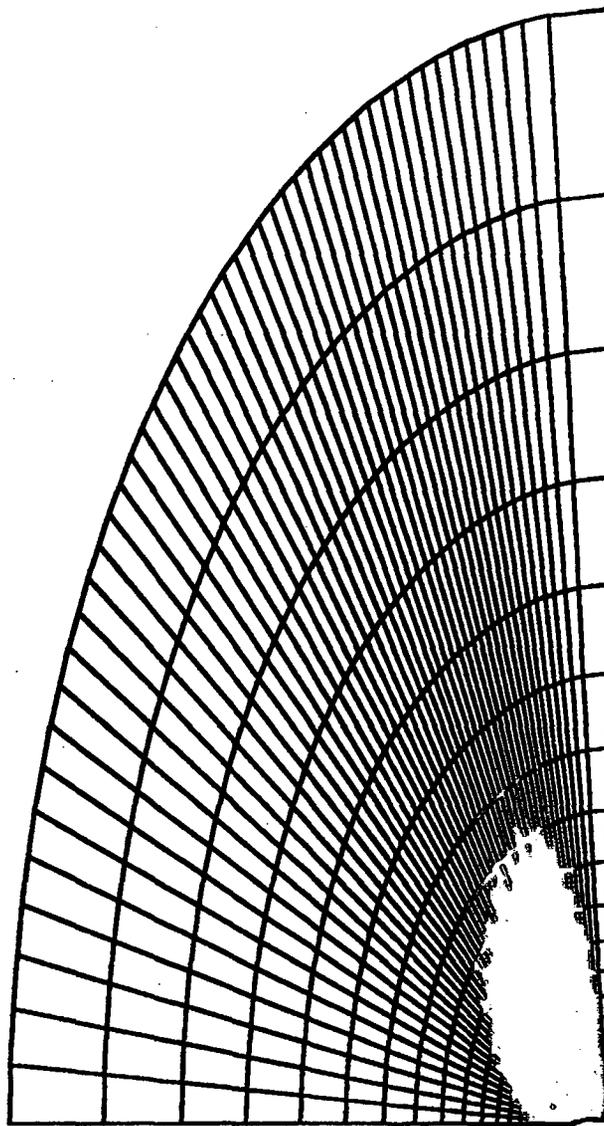


Figura 7. Malha de 48x70 volumes.

As distribuições do coeficiente de pressão ( $C_p$ ) das soluções invíscidas e viscosas para o problema 2, número de Mach 0,90, são apresentadas nas Fig. 9 e 10. Estas soluções foram obtidas usando-se 48, 96 e 192 volumes entre os contornos W e E. Os resultados experimentais de Moraes [67] para este problema também são apresentados nestas figuras. As malhas com 96 e 192 volumes sobre o foguete foram obtidas pela introdução de uma e três linhas, respectivamente, entre cada duas das linhas daquelas 49 mostradas na Fig. 7.

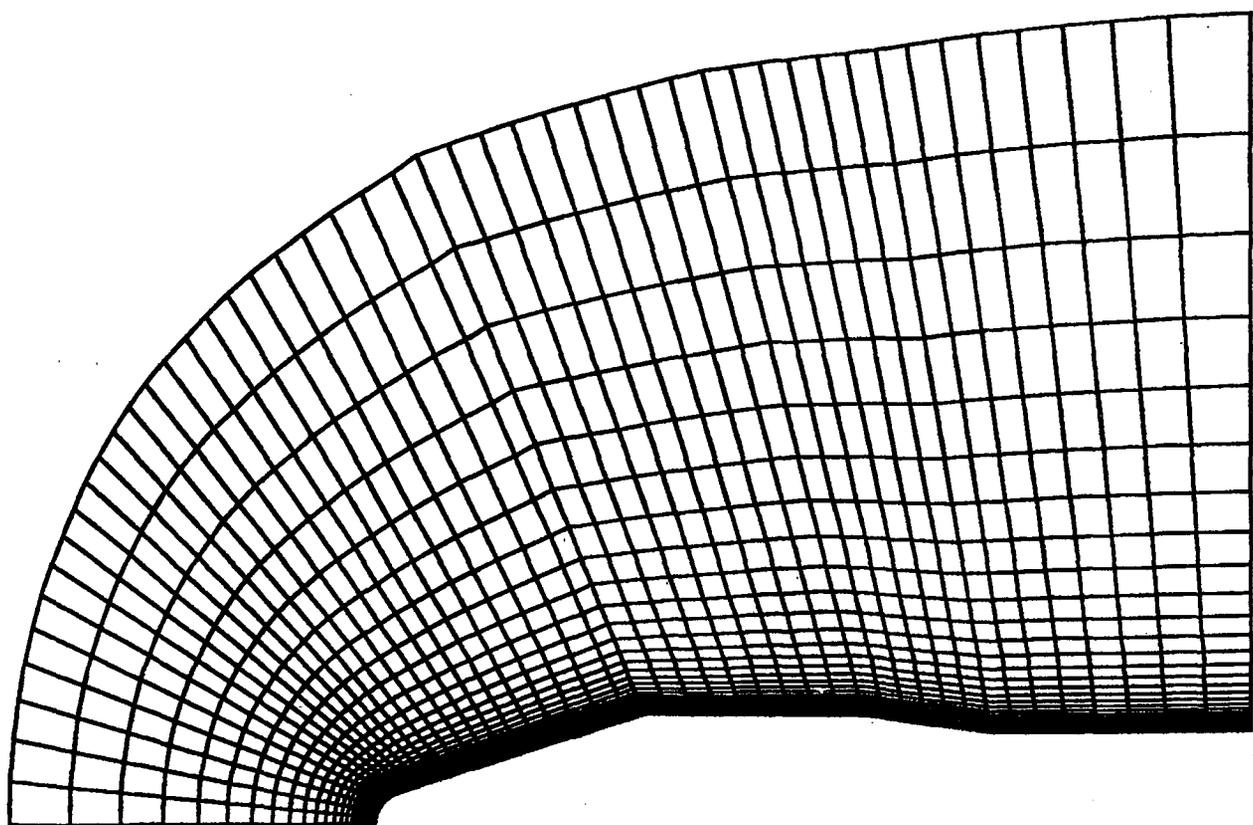


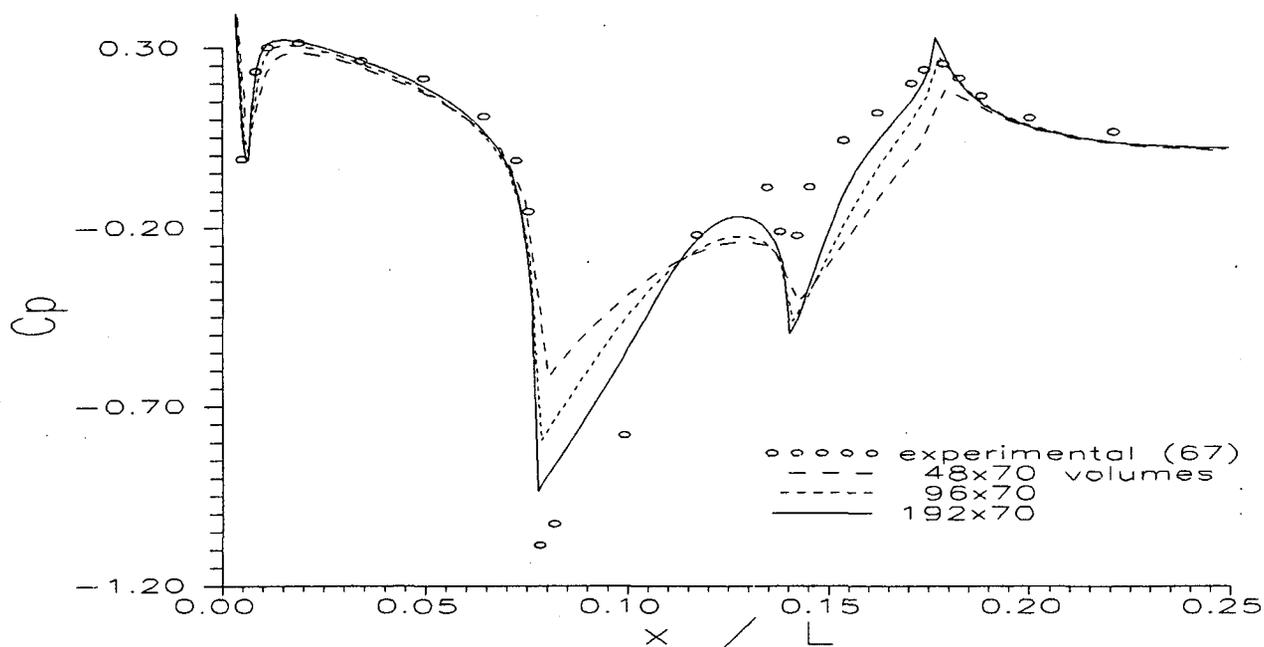
Figura 8. Ampliação da Fig. 7 mostrando 48x50 volumes.

A definição do coeficiente de pressão que se adota neste trabalho é dada por

$$C_p = \frac{(p_w - p_\infty)}{\frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2} \quad (98)$$

onde  $p_w$  é o valor da pressão armazenada no centro dos volumes de

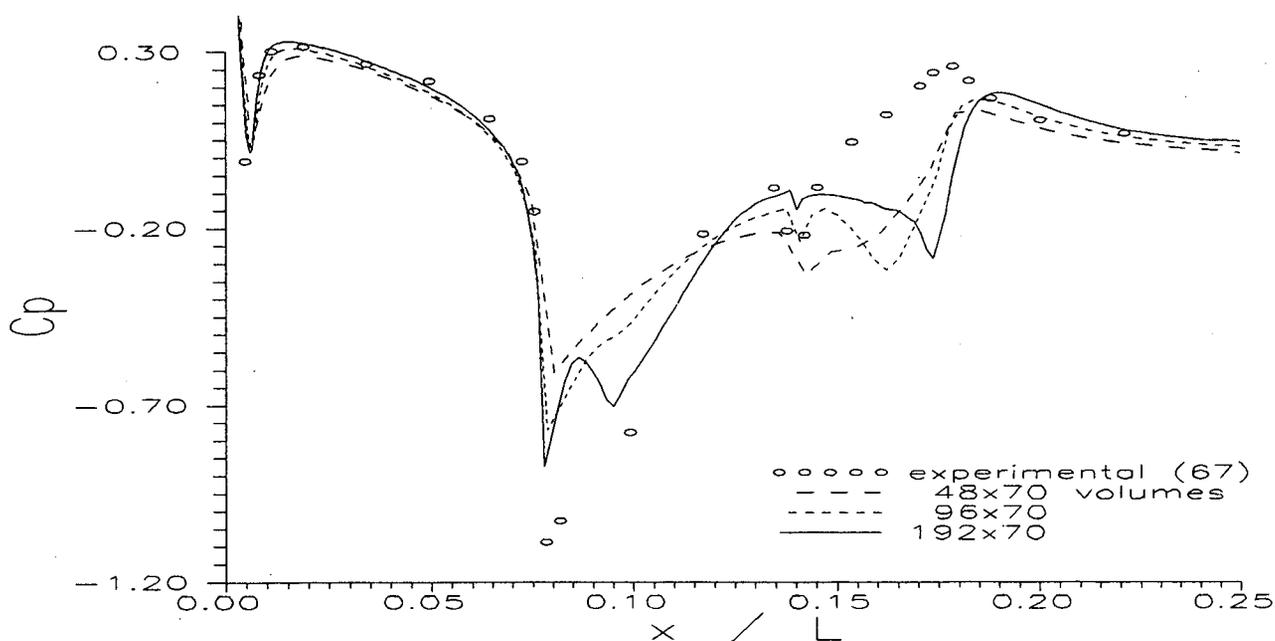
controle situados sobre a parede do foguete. Não existe nenhuma diferença significativa entre  $p_w$  e o valor da pressão sobre a parede do foguete, obtida por extrapolação linear, por exemplo, conforme comparações realizadas. A simplificação de se usar a pressão no centro dos volumes de controle situados sobre o foguete teve por objetivo facilitar o cálculo do  $C_p$ , principalmente com relação aos problemas tridimensionais.



**Figura 9.** Solução do escoamento invíscido,  $M_\infty = 0,90$ .

Como pode ser visto na Fig. 9, quanto mais refinada for a malha, a solução numérica invíscida tende aos resultados experimentais, como é de se esperar de um método numérico consistente. Comportamento idêntico ocorreu para os problemas 1 e 3.

Entretanto, mesmo a malha de  $192 \times 70$  volumes ainda não apresenta uma ótima concordância com os resultados experimentais, mas reproduz adequadamente todos os fenômenos físicos verificados experimentalmente. No caso dos problemas 1 e 3, a dependência dos resultados com a malha é muito menor do que para o problema transônico, conforme a Fig. 9. As soluções ( $C_p$ ) obtidas com  $96 \times 70$  e  $192 \times 70$  volumes são praticamente coincidentes.



**Figura 10.** Solução do escoamento viscoso,  $M_\infty = 0,90$ .

O comportamento da solução viscosa com o refino de malha é contrário ao da solução invíscida, como pode ser visto na Fig. 10. Isto é, quanto mais refina-se a malha, menor é a concordância da solução numérica com os resultados experimentais. Isto também ocorreu com o problema 1 mas com menor abrangência. Quanto ao problema 3, o comportamento é o mesmo da solução invíscida.

Men, em seu trabalho [8], mostra que a solução numérica do escoamento turbulento com número de Mach 3,75, sobre o foguete VLS, não apresenta nenhum descolamento, ao passo que, a solução do escoamento laminar prediz a existência de uma recirculação. O modelo de turbulência usado por Men é algébrico e deve-se a Baldwin & Lomax [9].

Deve-se mencionar que as discrepâncias entre as soluções numéricas dos escoamentos invíscidos e viscosos, apresentadas neste capítulo, estão justamente relacionadas à predição de recirculações nos escoamentos viscosos. Portanto, é possível que o uso do modelo de Baldwin & Lomax consiga evitá-las e, desta forma, a solução numérica dos escoamentos viscosos passe a concordar com os resultados experimentais.

Entretanto, uma constatação inesperada pode ser feita na

Fig. 10b onde o resultado numérico de Zdravistch & Azevedo [92] para o escoamento invíscido a Mach 0,9 mostra um comportamento do  $C_p$  semelhante àquele da Fig. 10 (escoamento viscoso), isto é, mostra, ainda que muito timidamente, uma região de expansão sobre a parte do corpo do VLS onde ocorre uma redução em sua seção transversal,  $x/d = 2,6$  a  $3,3$ .

Esta parte do VLS pode ser modelada como o escoamento sobre uma configuração formada por uma placa plana seguida por uma rampa com inclinação  $\theta$ . Apesar deste problema ser geometricamente muito simples, o comportamento físico é muito complexo, ainda mais no caso de escoamentos supersônicos [93], onde há interação entre onda de choque e camada limite, região separada e a formação de um choque devido à rampa.

A concordância entre dados experimentais e resultados numéricos do escoamento bidimensional laminar sobre uma rampa é boa para valores de  $\theta$  pequenos. A partir de um determinado valor, ao refinar-se a malha, a solução numérica tende a afastar-se do resultado experimental [93], o que é uma provável explicação para os resultados apresentados nesta dissertação, como mostrado na Fig. 10.

Esta aparente inconsistência numérica foi explicada no artigo de Rudy et alii [93]. O fato é que a partir de uma determinada inclinação da rampa, o escoamento é tridimensional e não pode ser resolvido por um código bidimensional. Ao resolverem o escoamento tridimensional sobre uma rampa de largura finita, mesmo para inclinações grandes, os resultados numéricos de Rudy et alii [93] apresentaram ótima concordância com os dados experimentais. A malha empregada foi de  $100 \times 100 \times 24 = 240$  mil volumes. Além disso, quanto mais refinada era a malha, melhor era a concordância.

Como resultados finais do escoamento tridimensional axissimétrico sobre o foguete VLS, são considerados aqueles obtidos com a malha de  $192 \times 70$  volumes e que são apresentados nas Fig. 11 a 16. Os valores da temperatura mostrados nas Fig. 12, 14 e 16 foram calculados por  $T_w/T_w$ , onde  $T_w$  é o valor da temperatura armazenado no centro dos volumes de controle situados sobre a parede do foguete.

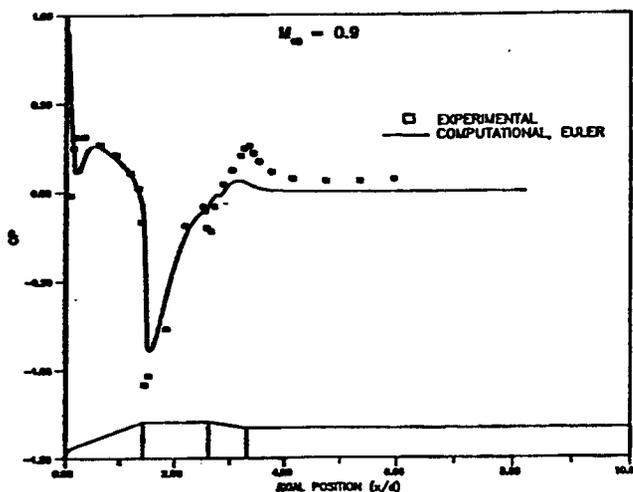


Figura 10b. Escoamento invisido sobre o VLS,  $M_\infty = 0,9$  [92].

A solução numérica viscosa dos problemas 1 e 2 é muito dependente da malha, como pode ser visto na Fig. 10. No caso do problema 3, as soluções ( $C_p$ ) obtidas com  $96 \times 70$  e  $192 \times 70$  volumes são praticamente idênticas, como ocorreu nas soluções invíscidas. Comparando-se os dados experimentais de Moraes & Neto [69], mostrados na Fig. 16a, com os da Fig. 15, verifica-se que as soluções numéricas dos escoamentos invíscidos e viscosos praticamente coincidem com os dados experimentais para  $Re/L = 29,0 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$ . Lembre-se que  $Re/L = 9,3 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$  para o problema 3. Deve-se mencionar que, com base nas informações de Moraes [67], deve ter havido uma troca na legenda das curvas da Fig. 16a, de Moraes & Neto [69].

Utilizando um computador Convex C-210, cuja velocidade de processamento é de 17 Mflops [70], o tempo de computação para atingir a convergência dos problemas 1 a 3, com a malha de  $192 \times 70$  volumes, ficou entre 20 e 40 minutos, aproximadamente.

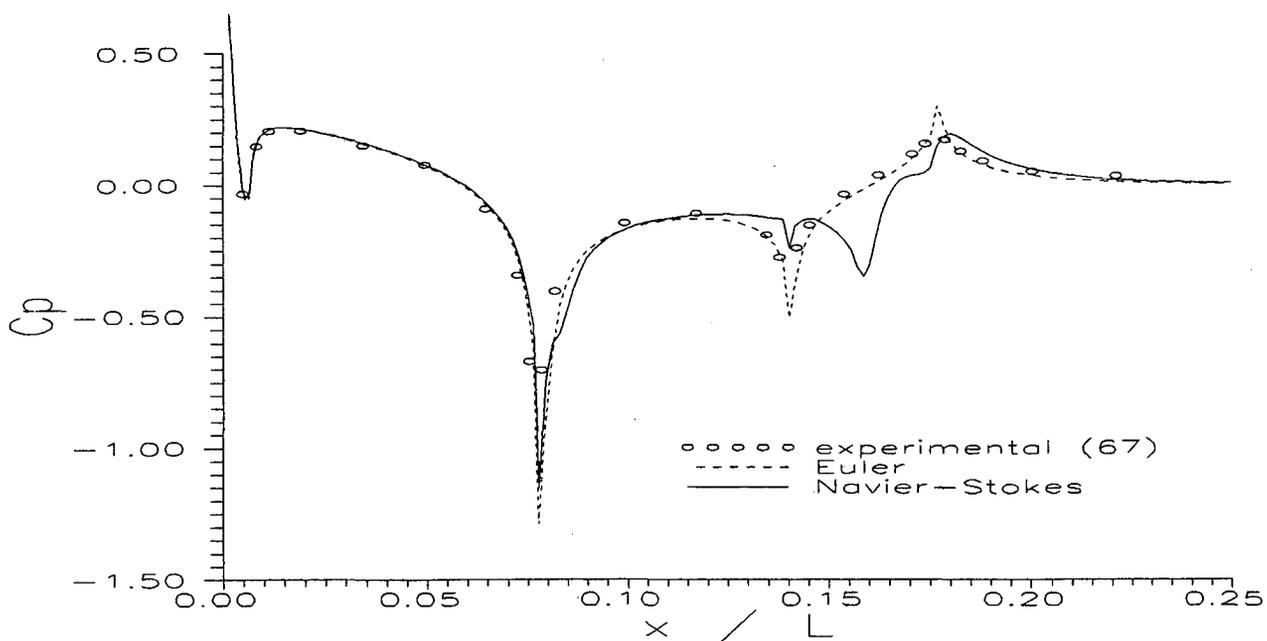


Figura 11. Resultado do coeficiente de pressão,  $M_\infty = 0,50$ .

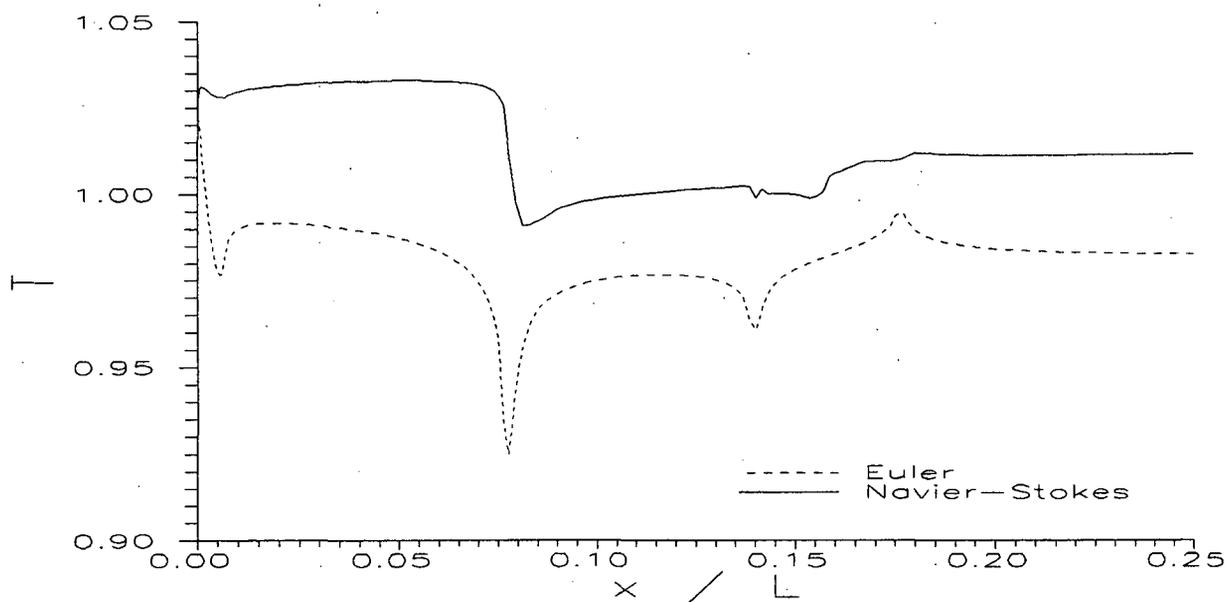


Figura 12. Resultado da temperatura,  $M_\infty = 0,50$ .

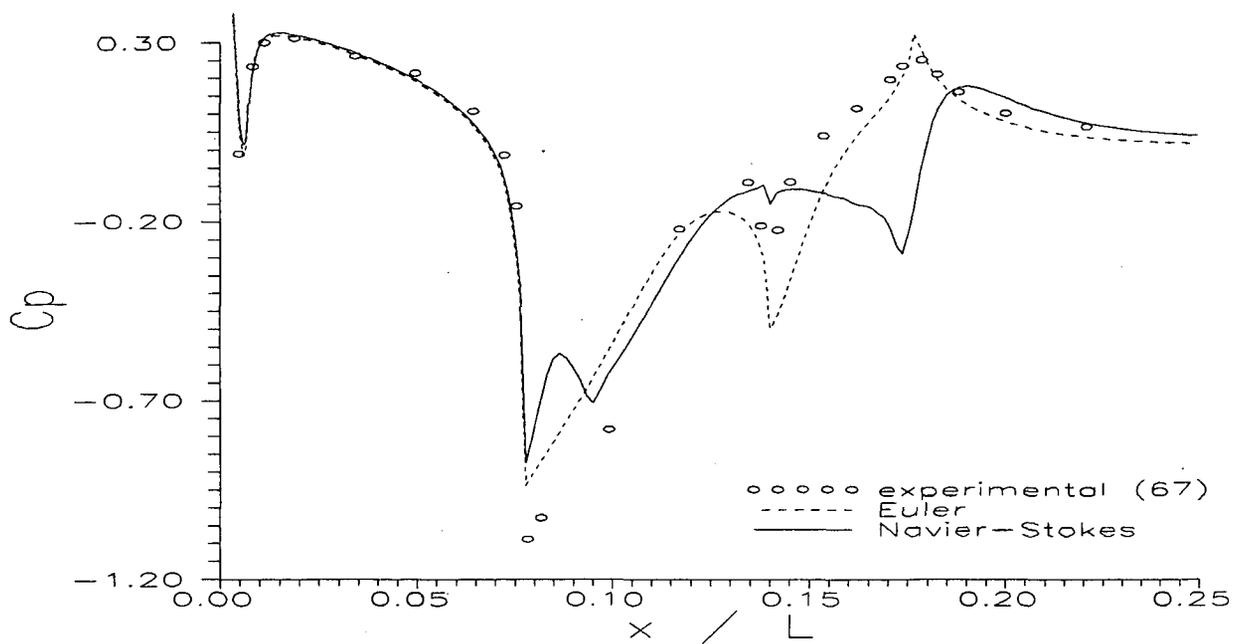


Figura 13. Resultado do coeficiente de pressão,  $M_\infty = 0,90$ .

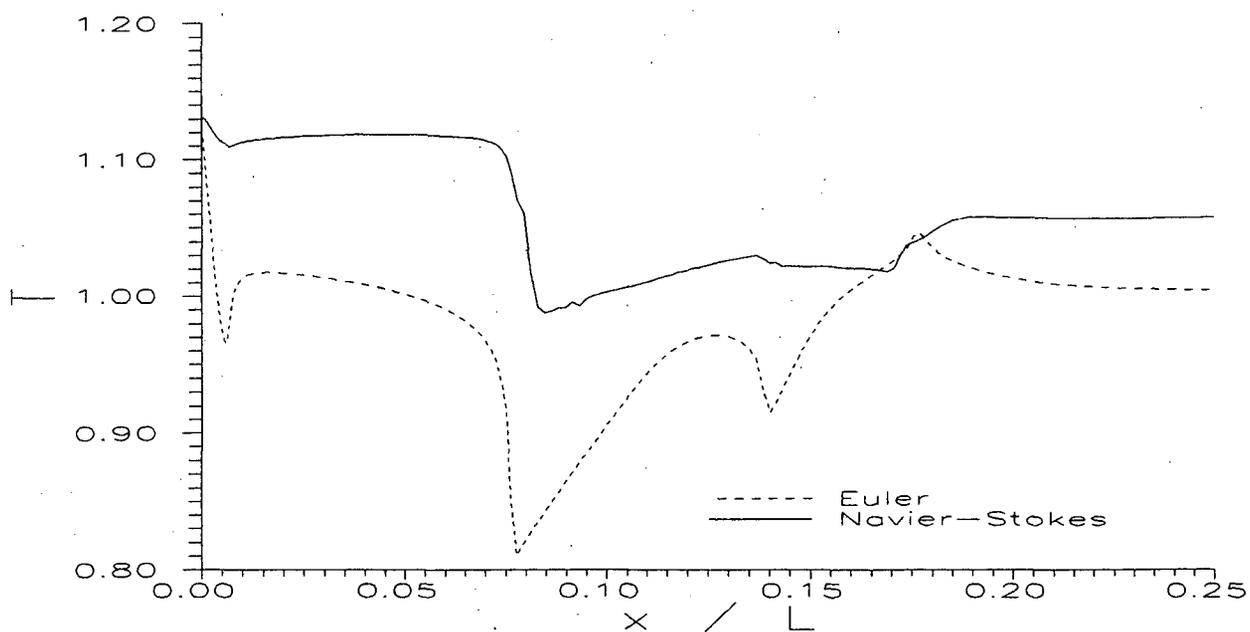


Figura 14. Resultado da temperatura,  $M_\infty = 0,90$ .

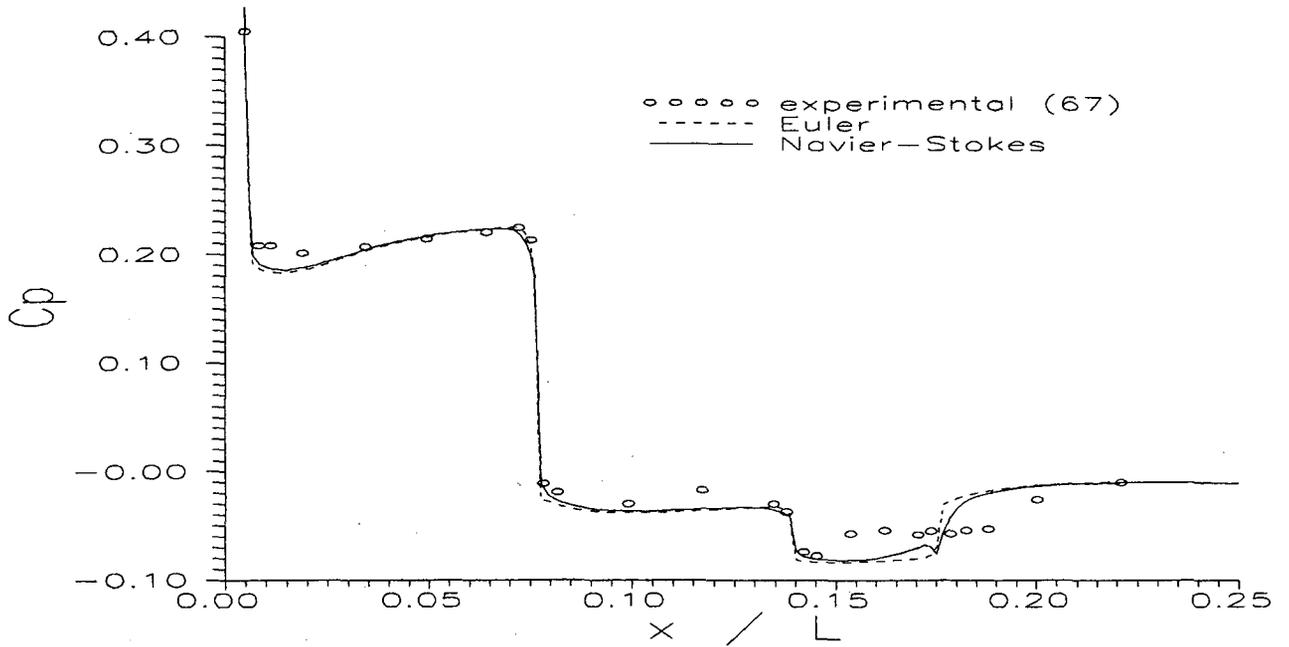


Figura 15. Resultado do coeficiente de pressão,  $M_\infty = 3,0$ .

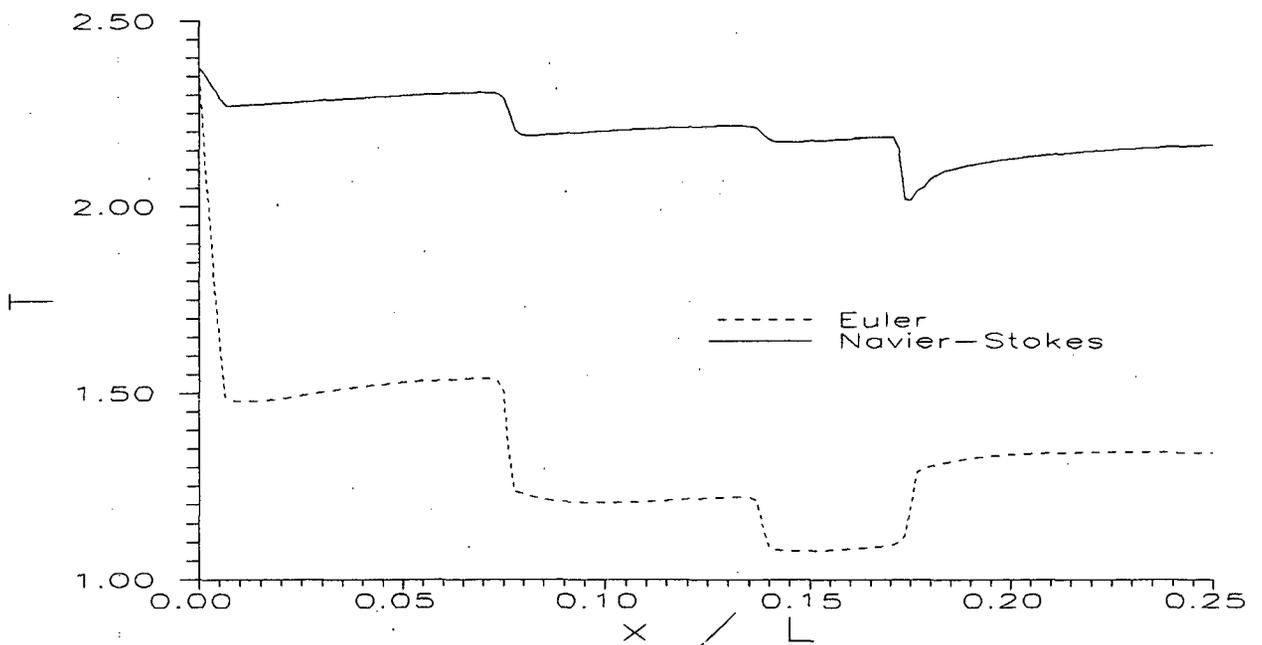


Figura 16. Resultado da temperatura,  $M_\infty = 3,0$ .

## 4.4 - COMENTÁRIOS

### 4.4.1 - escoamento transônico.

A maior dependência dos resultados com a malha adotada ocorreu no problema 2,  $M_{\infty} = 0,90$ , onde o escoamento é transônico. Este mesmo comportamento foi verificado em [49], tanto para  $M_{\infty} = 0,90$  como para  $M_{\infty} = 1,05$ . Em [49], o escoamento invíscido axissimétrico sobre o foguete VLS foi resolvido usando o código computacional MACH2D.

A conclusão é a de que, para uma mesma malha, a metodologia CSDV não apresenta o mesmo desempenho em todos os regimes de escoamento. Na faixa transônica aparentemente há alguma deficiência. Esta deficiência no regime transônico mostra-se também presente no método das diferenças finitas, como pode ser visto no trabalho de Azevedo [83].

### 4.4.2 - Supercompressões e superexpansões.

Empregando uma malha equivalente a 768x47 volumes, obteve-se em [49] excelente concordância dos resultados numéricos com os dados experimentais de Moraes [67] para os números de Mach 0,50, 0,90, 1,05, 1,50, 2,50 e 3,75. O único tipo de discrepância observado foi a obtenção de superexpansões ou supercompressões para os casos de escoamento subsônico e transônico.

Segundo Azevedo [71], estas discrepâncias devem-se à existência de valores elevados para a velocidade nas regiões próximas às quinas do objeto sobre o qual há um escoamento e que ocorre quando a condição de contorno é a de escorregamento, apropriada para resolver escoamentos invíscidos. Como no escoamento real (viscoso) a velocidade é muito pequena nas regiões próximas às quinas devido à camada limite e à condição de não-escorregamento, as superexpansões e supercompressões estariam associadas ao uso da condição de contorno de escorregamento.

Refinando-se a malha apenas nos volumes adjacentes à quina localizada entre o cone frontal do VLS e o cilindro de diâmetro maior, com linhas paralelas àquelas duas mostradas na Fig.

16b, a solução viscosa converge para  $C_p = -1,12$  para  $M_\infty = 0,50$ , usando-se uma malha oito vezes mais refinada do que aquela de 48 volumes sobre o corpo do foguete. Mesmo com uma malha 32 vezes mais refinada, um resultado independente da malha não foi obtido para o escoamento invíscido. Para a malha 32 vezes mais refinada, o  $C_p$  já atinge  $-1,72$ . Neste caso, o número de Mach adjacente à parede e à quina é de  $0,91$  enquanto que no escoamento viscoso, o valor máximo verificado é de  $0,67$ , fora da camada limite. Estes resultados corroboram a explicação dada no parágrafo anterior.

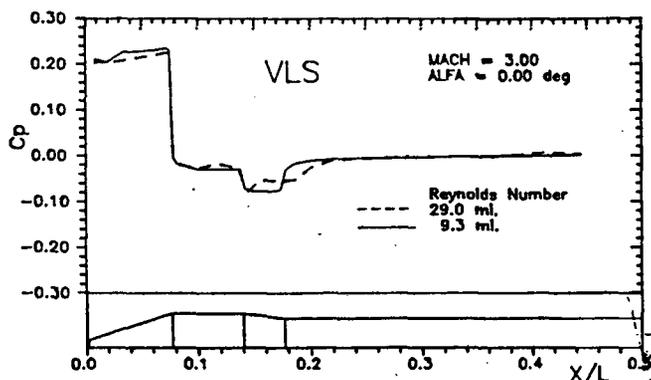


Figura 16a. Dados experimentais de Moraes & Neto [69].

#### 4.4.3 - Lei de Shuterland.

Visando verificar o efeito da temperatura sobre a viscosidade e, conseqüentemente, sobre os resultados dos escoamentos viscosos, procedeu-se à implementação da Lei de Shuterland [72] no código MACH2D. Para o ar, esta relação pode ser dada por

$$\mu = \mu_\infty \cdot \left( \frac{T}{T_\infty} \right)^{3/2} \cdot \left( \frac{T_\infty + 110}{T + 110} \right) \quad (99)$$

Para o problema 3,  $M_\infty = 3,0$ , não verificou-se nenhum efeito sobre a distribuição do coeficiente de pressão. A influência sobre a temperatura pode ser vista na Fig. 17, sendo menor, em geral, que a diferença entre os resultados obtidos com as malhas de  $48 \times 70$  e  $192 \times 70$ . A razão  $\mu/\mu_\infty$  da Eq. (99), para este problema,

ficou entre 2,0 e 2,2 ao longo do foguete. Uma malha de 96x70 volumes foi empregada para obter os resultados mostrados na Fig. 17.

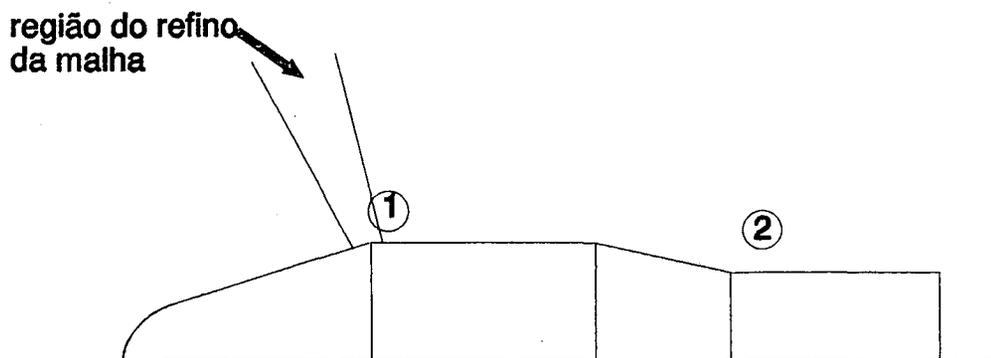


Figura 16b. Locais de refinamento da malha e de velocidade máxima.

#### 4.4.4 - Ponto de estagnação.

Na Tabela 3 são confrontados os resultados numéricos (subíndice n) do coeficiente de pressão e da temperatura ( $T_w/T_\infty$ ) com aqueles obtidos da solução analítica (subíndice a) unidimensional [60] no ponto de estagnação do escoamento, que fica no ápice da ogiva do foguete, sobre a linha de simetria. O erro foi calculado por  $E = 100(\phi_n - \phi_a)/\phi_a$ , onde  $\phi$  representa o coeficiente de pressão e a temperatura. Nos cálculos analíticos, considerou-se 1,4 a razão dos calores específicos. Uma possível explicação para o elevado erro no cálculo numérico da temperatura para o problema supersônico pode estar relacionada às oscilações comentadas no item 4.4.6.

#### 4.4.5 - Número de Mach máximo.

Considerando a malha de 192x70 volumes, os valores máximos atingidos pelo número de Mach, para escoamento viscoso subsônico e transônico (problemas 1 e 2), são de 0,70 e 1,26 na região próxima a  $x/L = 0,077$ . Esta região localiza-se imediatamente após a quina entre o cone frontal e o cilindro de diâmetro maior, região 1 da Fig. 16b.

No caso do problema 3, do escoamento viscoso supersônico, o número de Mach atinge o valor máximo de 3,24 na região sobre o

cone de redução de seção, região 2 da Fig. 16b.

Tabela 3.  $C_p$  e  $T$  no ponto de estagnação.

$M_\infty$	0,50	0,90	3,0
$C_{p_a}$	1,06	1,22	1,76
$C_{p_n}$	1,13	1,29	1,73
$E_{C_p}$ [%]	6,6	5,7	1,7
$T_a$	1,05	1,16	2,80
$T_n$	1,04	1,14	2,43
$E_T$ [%]	1,0	1,7	13

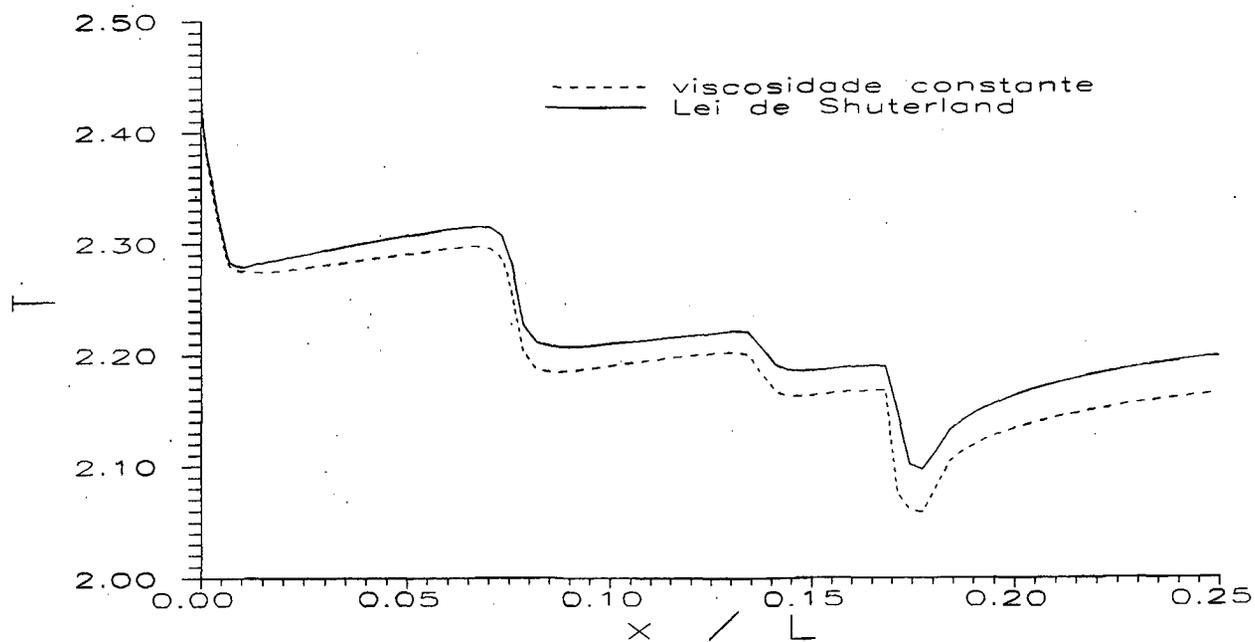


Figura 17. Influência da viscosidade no problema 3.

#### 4.4.6 - Oscilações.

Verificou-se a ocorrência de oscilações no número de Mach imediatamente antes da onda de choque, partindo-se do foguete, nas

simulações numéricas do escoamento supersônico. Segundo testes numéricos realizados, do escoamento supersônico sobre um cilindro e empregando-se uma malha igualmente espaçada, estas oscilações se devem à avaliação de algumas derivadas da pressão serem feitas considerando-se que a malha seja igualmente espaçada quando na verdade isto não acontece.

---

## 5. RESULTADOS TRIDIMENSIONAIS

---

O modelo numérico descrito no capítulo 3 foi usado na implementação de dois códigos computacionais para resolver escoamentos tridimensionais. O código MACH3D é um deles e com o qual escoamentos invíscidos podem ser resolvidos. Para resolver escoamentos viscosos, implementou-se o código computacional NAVIER.

Um dos motivos de se ter implementado dois códigos, e não apenas um como no caso bidimensional, é a restrição de memória computacional. Para se resolver um escoamento viscoso, necessita-se de muito mais memória do que aquela empregada num mesmo problema de escoamento invíscido. Após implementados os dois códigos, verificou-se que o código NAVIER usa 40% mais de memória do que o MACH3D. Outro motivo é que as equações de Navier-Stokes possuem muito mais termos do que as equações de Euler, contribuindo assim para aumentar o tempo de computação.

Os primeiros resultados a serem apresentados neste capítulo referem-se à comparação das soluções obtidas através dos códigos MACH3D e NAVIER com aquelas do MACH2D para um problema tridimensional axissimétrico.

Os três códigos acima foram implementados usando-se a linguagem Fortran 77 [73] cuja primeira versão é de 1956, conforme [14].

Finalmente, resultados de escoamentos sobre o foguete VLS com ângulo de ataque de seis graus são apresentados.

## 5.1 - DOMÍNIO E CONDIÇÕES DE CONTORNO

Considere a Fig. 5 mostrada no capítulo 4. O domínio de cálculo tridimensional é aquele obtido pela rotação de  $180^\circ$  sobre o eixo x da região limitada pelos contornos W, E, S e N. Admite-se que nos outros  $180^\circ$  o escoamento tenha o mesmo comportamento. Esta simplificação é feita devido às limitações dos recursos computacionais disponíveis para a realização deste trabalho.

O domínio de cálculo resultante (Fig. 18) é delimitado por seis superfícies ou contornos. Três dessas superfícies resultam da rotação de  $180^\circ$  dos contornos E, S e N da Fig. 5. A quarta superfície se constitui na verdade, no espaço físico, na linha W da Fig. 5. O domínio da Fig. 5 representa a quinta superfície, denominada de frontal ou F. A imagem desta em relação ao eixo x gera a sexta superfície, chamada de dorsal ou D.

A geometria do foguete considerada neste capítulo é a mesma da Fig. 6, assim como as dimensões  $L_1$  e  $L_2$  da Fig. 5.

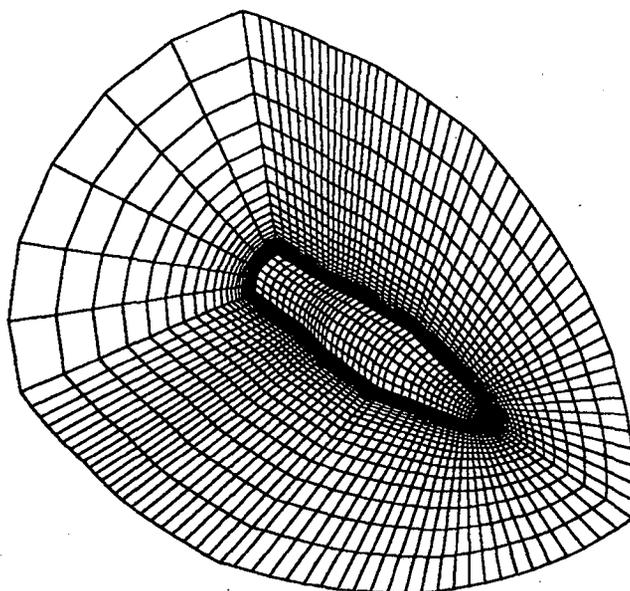
As condições de contorno para as superfícies E, S e N são aquelas descritas no item 4.1 para os respectivos contornos. A condição de simetria é aplicada aos contornos F e D.

No contorno W, para os casos tridimensionais axissimétricos, considera-se a condição de simetria. Já nos casos com ângulo de ataque, a condição de escoamento localmente parabólico é usada.

Resultados de três problemas com ângulo de ataque são apresentados neste capítulo. As condições da corrente-livre para estes três problemas são dadas nas Tabelas 4 e 5. Os parâmetros da Tabela 5 foram obtidos daqueles da Tabela 4 como descrito no item 4.1.

A discretização do domínio de cálculo se dá pela subdivisão dos  $180^\circ$  do domínio através de diversos planos radiais igualmente espaçados, onde cada um desses planos é uma malha bidimensional como aquela da Fig. 7. Seguindo este processo de discretização, uma ampliação da malha tridimensional gerada a partir daquela da Fig. 7, por exemplo, é mostrada na Fig. 18. Nesta

figura, apenas  $90^\circ$  do domínio na direção circunferencial são mostrados.



**Figura 18.** Malha de alguns planos do domínio.

Tabela 4. Dados experimentais para  $\alpha \neq 0^\circ$  [67].

Problema n <sup>o</sup>	4	5	6
$M_\infty$	0,50	0,90	3,0
$\alpha$ [graus]	6,0	6,0	6,1
$p_\infty$ [kPa]	210,916	106,414	10,901
$T_0$ [K]	290,9	302,5	321,6
$q_\infty$ [kPa]	36,473	60,101	60,615
$Re/L$ [m <sup>-1</sup> ]	$29,3 \times 10^6$	$25,0 \times 10^6$	$27,0 \times 10^6$

O sistema de referência angular que se adota é:  $\theta = 0^\circ$  no contorno frontal e  $\theta = 180^\circ$  no contorno dorsal. O plano vertical mostrado na Fig. 18 é o frontal; e o plano horizontal é um plano intermediário entre o frontal e o dorsal, ou seja,  $\theta = 90^\circ$ .

Existe uma pequena dificuldade para se comparar os resultados numéricos com os experimentais. Os resultados experimentais disponíveis [67] são para  $\theta$  de 30 em 30°. No caso da malha mostrada na Fig. 18, tem-se  $\Delta\theta = 15^\circ$ . Como se sabe, as incógnitas são armazenadas no centro dos volumes. Assim, para o  $C_p$  experimental em  $\theta = 90^\circ$ , por exemplo, os resultados numéricos mais próximos são conhecidos em  $\theta = 82,5^\circ$  e  $97,5^\circ$ . Portanto, o procedimento adotado para se realizar as comparações é o de efetuar médias aritméticas dos resultados numéricos conhecidos nos dois planos adjacentes ao plano onde são conhecidos os resultados experimentais.

Tabela 5. Dados complementares para  $\alpha \neq 0^\circ$ .

Problema n <sup>o</sup>	4	5	6
$M_\infty$	0,50	0,90	3,0
$T_\infty$ [K]	277,1	260,3	144,8
$u_\infty$ [m/s]	165,8	290,5	605,3
$\mu_\infty$ [kg/m-s]	$1,50 \times 10^{-5}$	$1,66 \times 10^{-5}$	$7,42 \times 10^{-6}$
Pr	0,714	0,719	0,765

Nos dois planos extremos,  $\theta = 0^\circ$  e  $180^\circ$ , o procedimento é diferente. Como a condição de contorno nestes planos é de simetria, ajustando-se uma parábola sobre os valores das incógnitas nos dois planos mais próximos a um extremo e com a condição de derivada nula, obtém-se

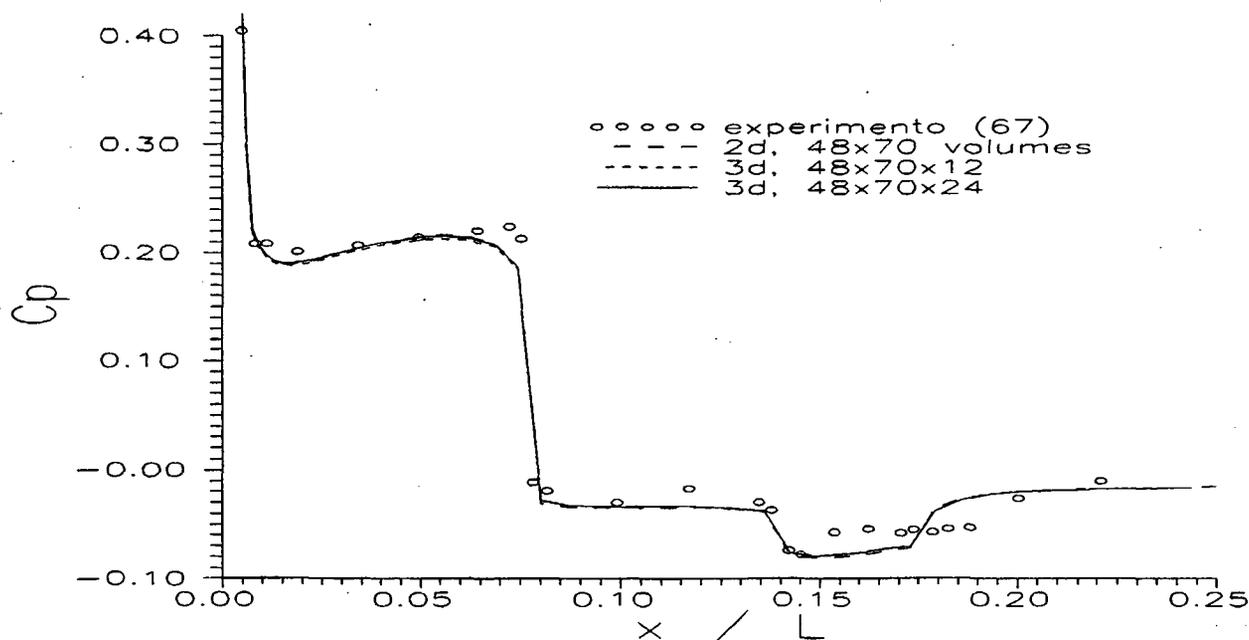
$$\phi_i = \frac{9}{8}\phi_I - \frac{1}{8}\phi_{II} \quad (100)$$

onde  $\phi$  representa o coeficiente de pressão ou a temperatura,  $i$  pode ser  $\theta = 0^\circ$  ou  $180^\circ$ , e os subíndices I e II são o primeiro e o segundo planos mais próximos de  $i$ , respectivamente.

## 5.2 - RESULTADOS 3D SEM ÂNGULO DE ATAQUE

Este item é dedicado à apresentação das comparações efetuadas entre os resultados obtidos com os códigos tridimensionais MACH3D e NAVIER e o código bidimensional MACH2D.

O problema escolhido para as comparações foi o número 3 do capítulo 4, ou seja,  $M_\infty = 3,0$  e  $\alpha = 0^\circ$ . As soluções obtidas para a distribuição do coeficiente de pressão são mostradas na Fig. 19, considerando o escoamento viscoso. Da excelente concordância entre os três resultados numéricos, pode-se concluir que 12 volumes são suficientes para discretizar os  $180^\circ$  da direção circunferencial do domínio de cálculo. Outra conclusão é a de que o código tridimensional NAVIER foi corretamente implementado pois reproduziu os resultados obtidos com o código bidimensional MACH2D, já bastante testado.



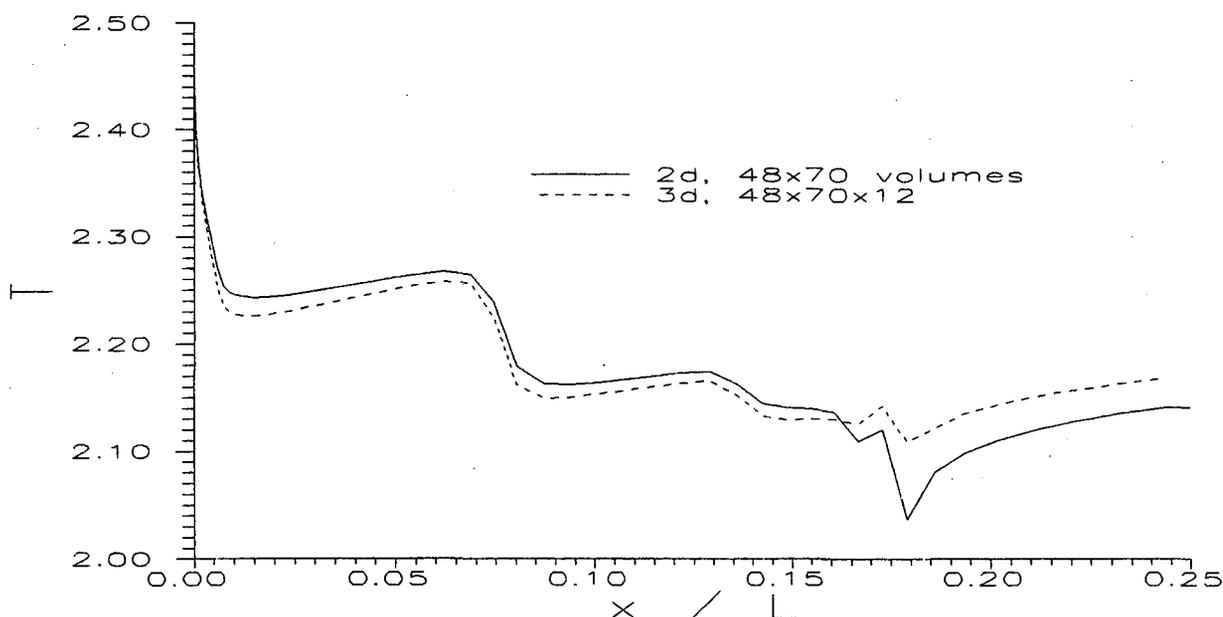
**Figura 19.** Comparação do  $C_p$  entre os códigos 2D e 3D.  $M_\infty = 3,0$  e  $\alpha = 0^\circ$ ; escoamento viscoso.

A concordância entre as soluções do escoamento invíscido do problema 3, obtidas com os códigos MACH3D e MACH2D, também foi

excelente.

Devido a problemas de convergência, o intervalo de tempo adimensional usado para obter os resultados mostrados na Fig. 19 foi de 0,05, ou seja, mais de dez vezes menor que aqueles usados nos problemas bidimensionais do capítulo 4. Apesar disso, com  $\epsilon = 10^{-4}$ , a solução para o coeficiente de pressão pode ser considerada convergida, qualquer que seja o problema tridimensional, como ocorreu também nos problemas bidimensionais. Entretanto, dada à utilização de valores muito pequenos para o intervalo de tempo, mesmo com  $\epsilon = 10^{-7}$ , a solução 3D para a temperatura não chega a convergir para a mesma solução 2D quando o escoamento é supersônico, como pode ser visto na Fig. 20. O resultado bidimensional pode ser considerado uma solução bem convergida, ou a solução final para a qual o resultado obtido com o código NAVIER, com muito mais iterações do que aquelas feitas para atingir  $\epsilon=10^{-7}$ , deverá convergir.

Esta dificuldade de convergência da temperatura não ocorre para os problemas de escoamento supersônico invíscido. Mesmo com  $\epsilon = 10^{-6}$ , a solução 3D coincide com a 2D.



**Figura 20.** Comparação de T entre os códigos 2D e 3D.  
 $M_\infty = 3,0$  e  $\alpha = 0^\circ$ .

### 5.3 - RESULTADOS 3D COM ÂNGULO DE ATAQUE

Devido às limitações computacionais, apenas soluções numéricas de escoamentos invíscidos foram obtidas com malhas refinadas. Sendo, assim, apenas as distribuições do  $C_p$  dos escoamentos invíscidos são apresentadas nas Fig. 21 a 29. Para os escoamentos subsônico e transônico, a malha usada foi de  $192 \times 70 \times 12$  volumes, e de  $96 \times 70 \times 12$  volumes para o escoamento supersônico. Os valores de  $\epsilon$  usados foram de  $10^{-4}$  para os problemas 4 e 5, e  $10^{-5}$  para o problema 6. Utilizando um computador Convex C-210, o tempo de computação ficou entre 3,4 e 7,5 horas.

Com relação aos escoamentos viscosos, a apresentação de resultados se limitará às distribuições de temperatura sobre o foguete ( $T_w/T_\infty$ ). Estes resultados são mostrados nas Fig. 30 a 32 e foram obtidos com  $\epsilon$  igual a  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$  e  $10^{-7}$ , respectivamente, para os problemas 4 a 6, sendo de 1,3 a 4,2 horas o tempo de computação. A malha usada nos três problemas de escoamentos viscosos foi de  $48 \times 70 \times 12$  volumes.

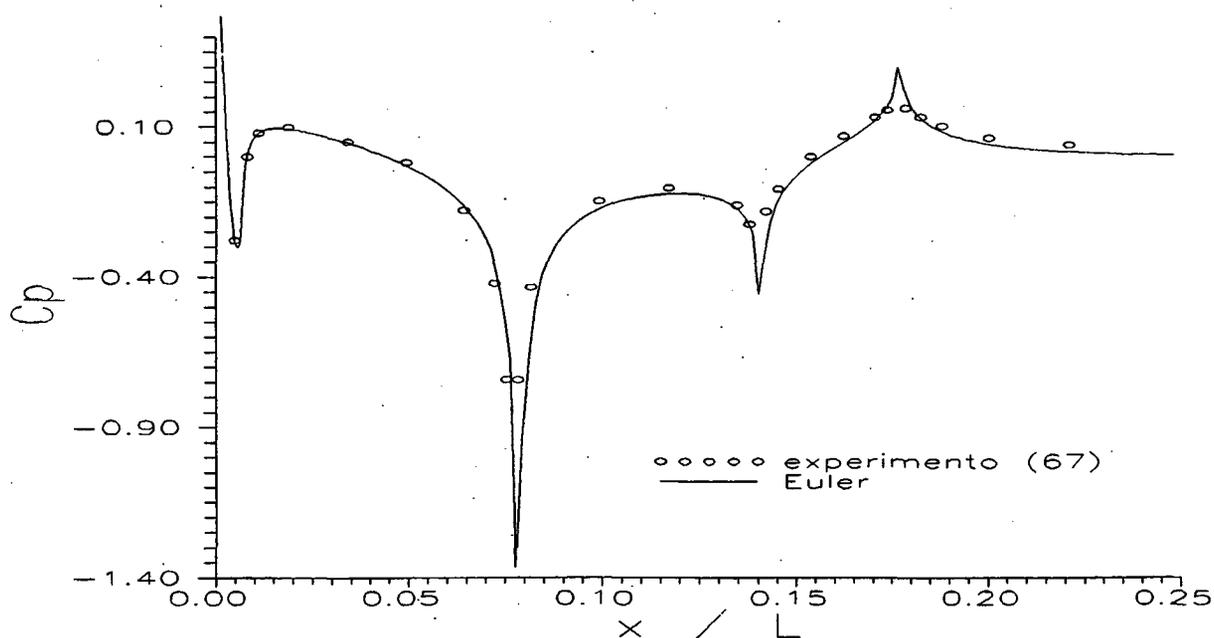


Figura 21. Resultado do  $C_p$  para  $M_\infty = 0,50$ ,  $\alpha = 6^\circ$  e  $\theta = 0^\circ$ .

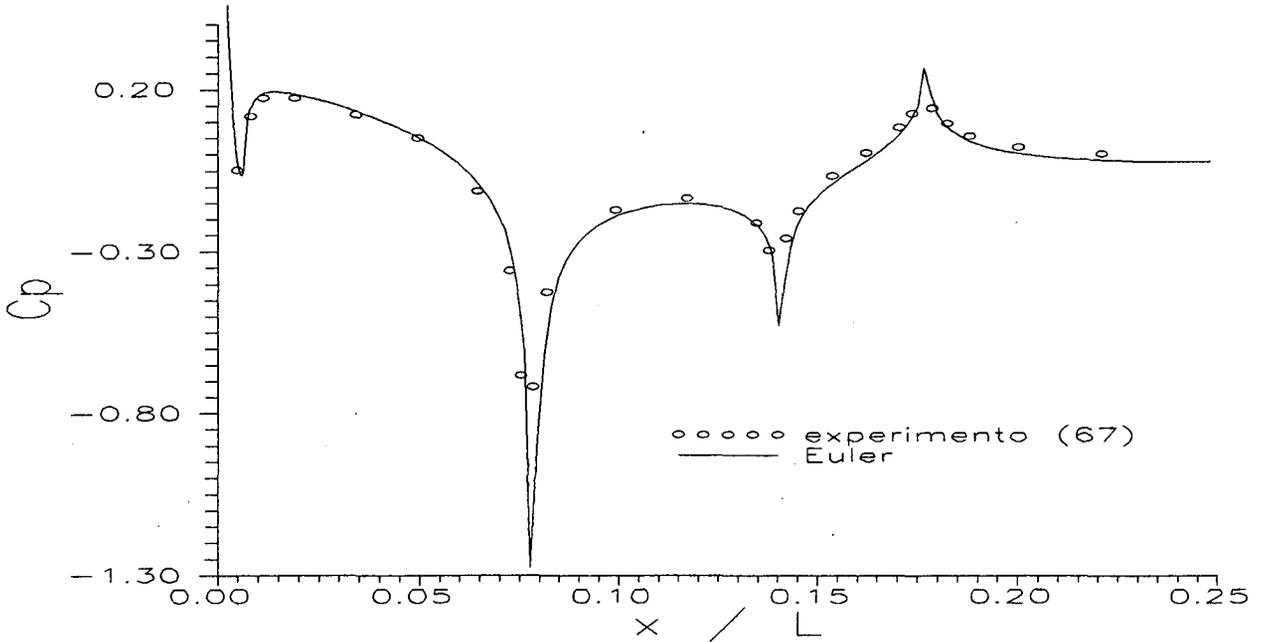


Figura 22. Resultado do  $C_p$  para  $M_\infty = 0,50$ ,  $\alpha = 6^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$ .

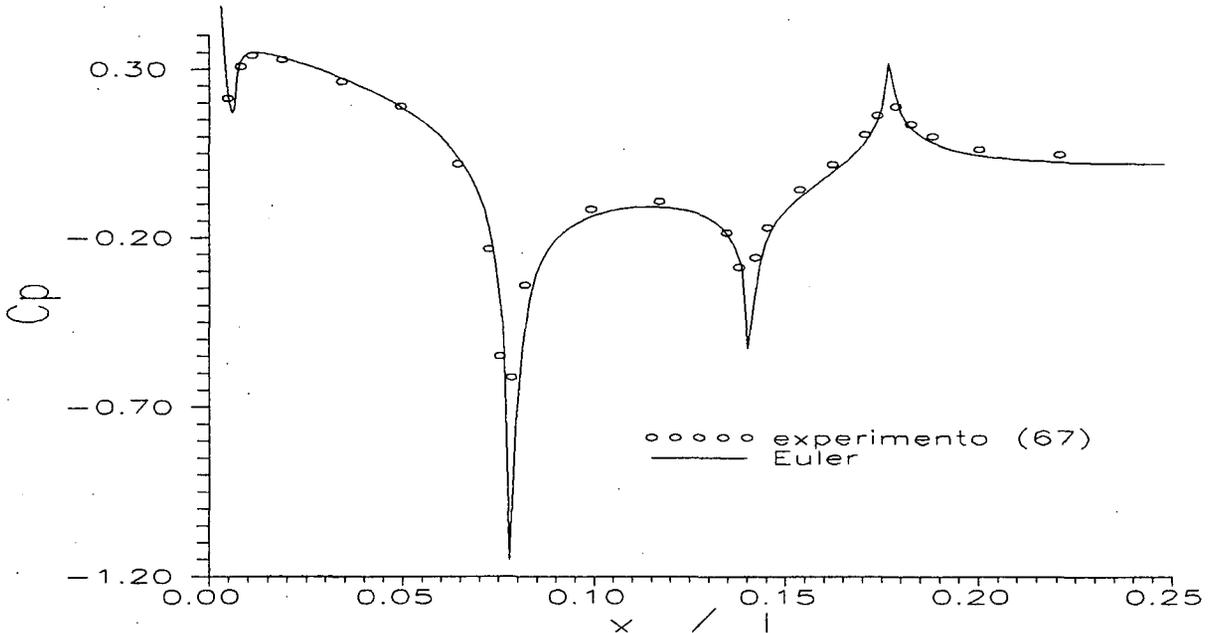


Figura 23. Resultado do  $C_p$  para  $M_\infty = 0,50$ ,  $\alpha = 6^\circ$  e  $\theta = 180^\circ$ .

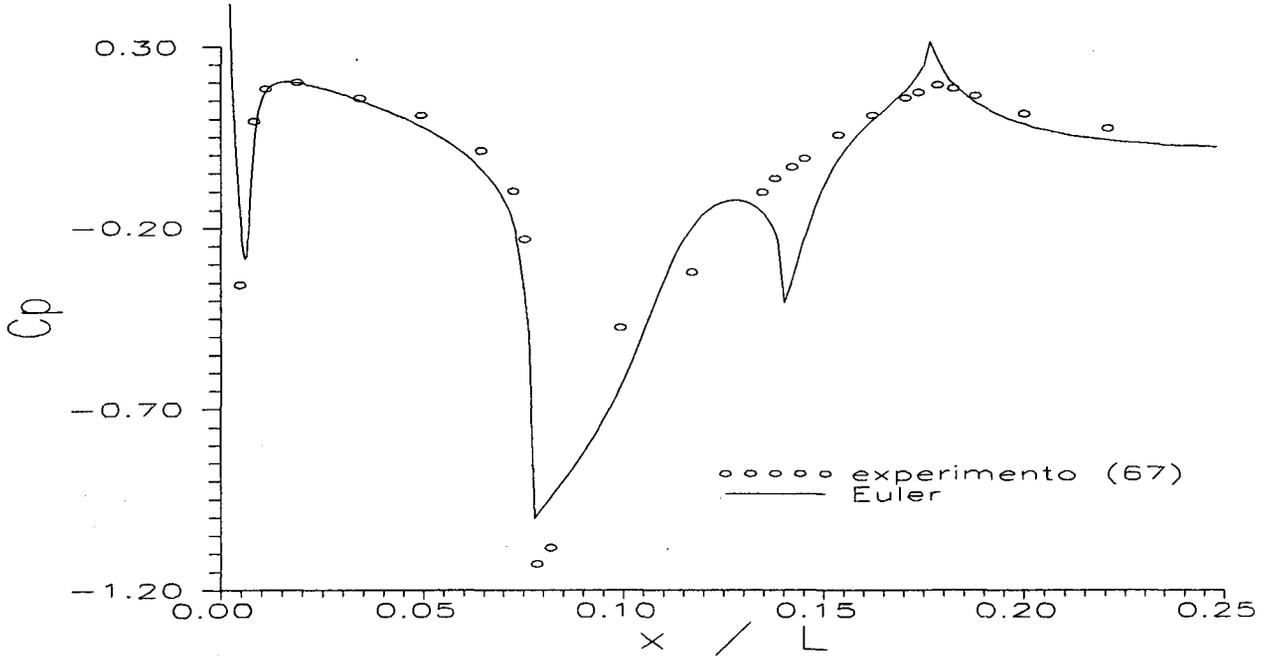


Figura 24. Resultado do  $C_p$  para  $M_\infty = 0,90$ ,  $\alpha = 6^\circ$  e  $\theta = 0^\circ$ .

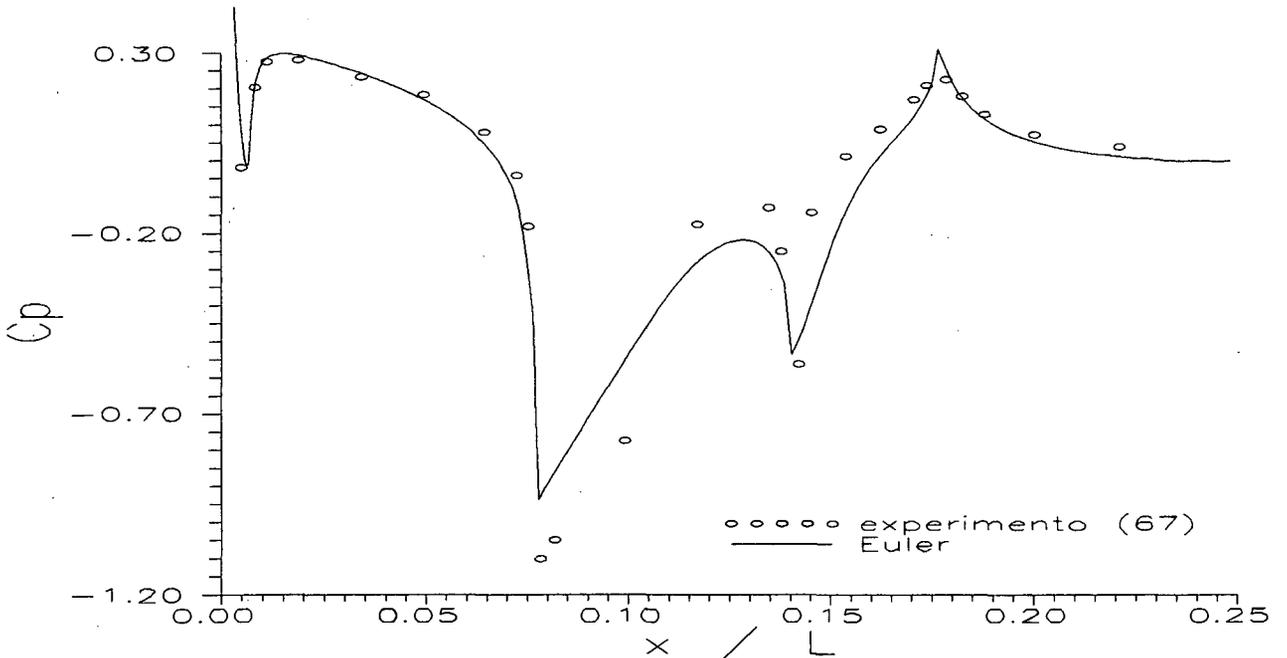


Figura 25. Resultado do  $C_p$  para  $M_\infty = 0,90$ ,  $\alpha = 6^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$ .

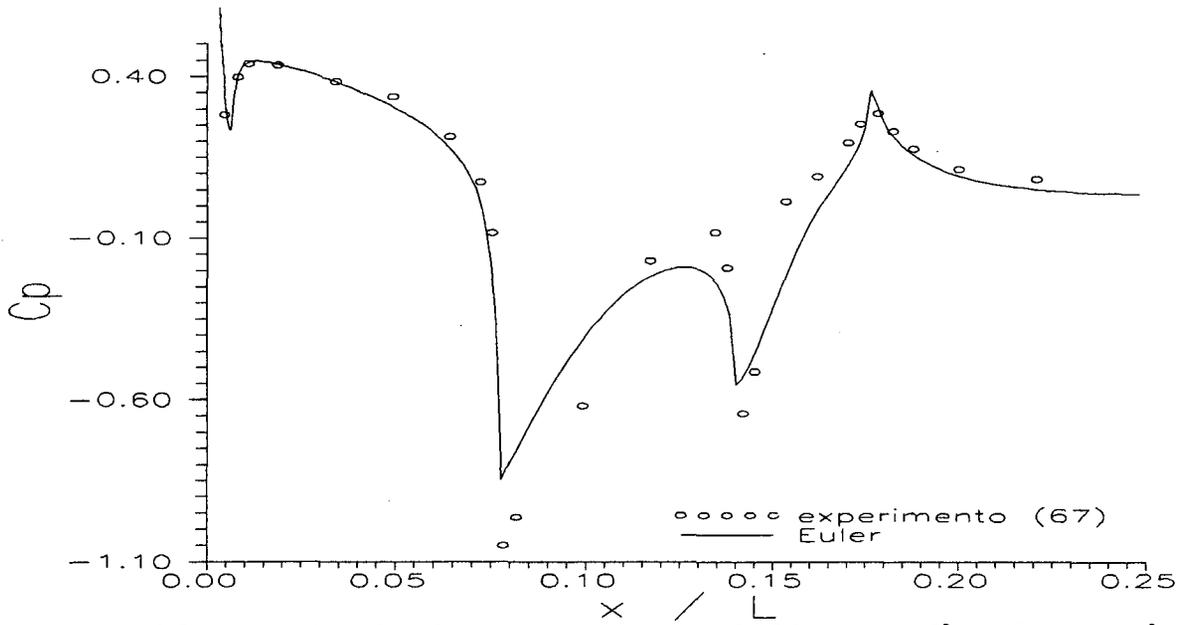


Figura 26. Resultado do  $C_p$  para  $M_\infty = 0,90$ ,  $\alpha = 6^\circ$  e  $\theta = 180^\circ$ .

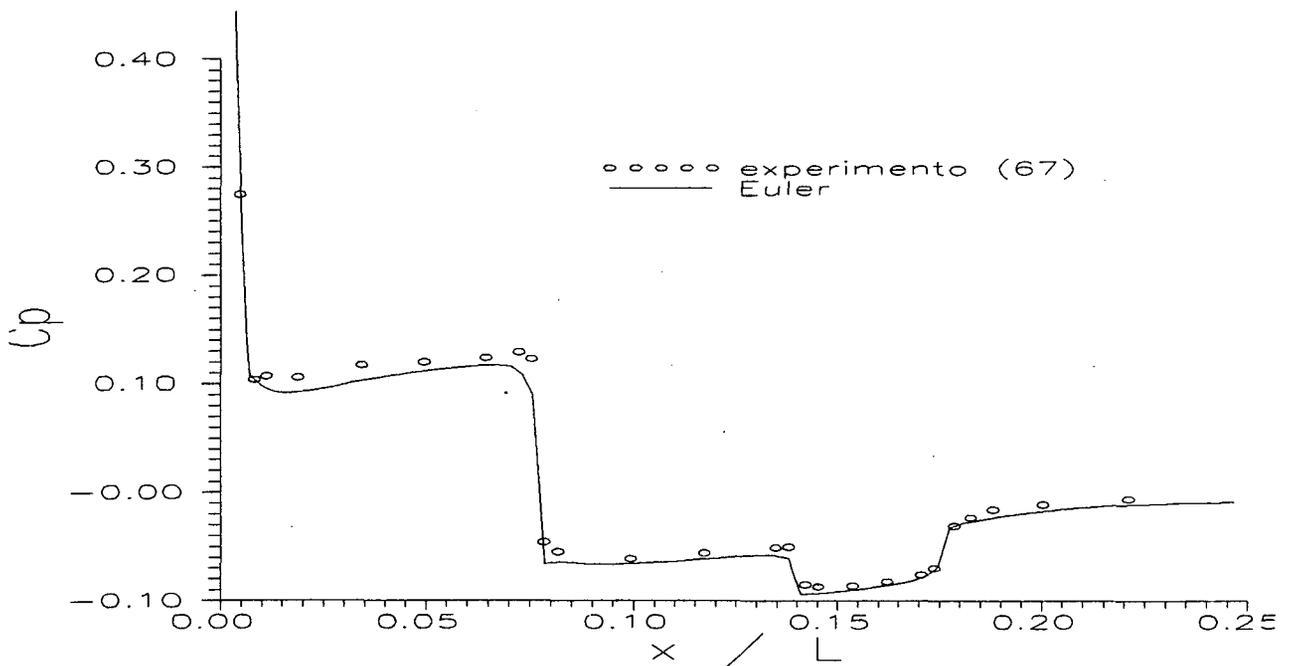


Figura 27. Resultado do  $C_p$  para  $M_\infty = 3,0$ ,  $\alpha = 6,1^\circ$  e  $\theta = 0^\circ$ .

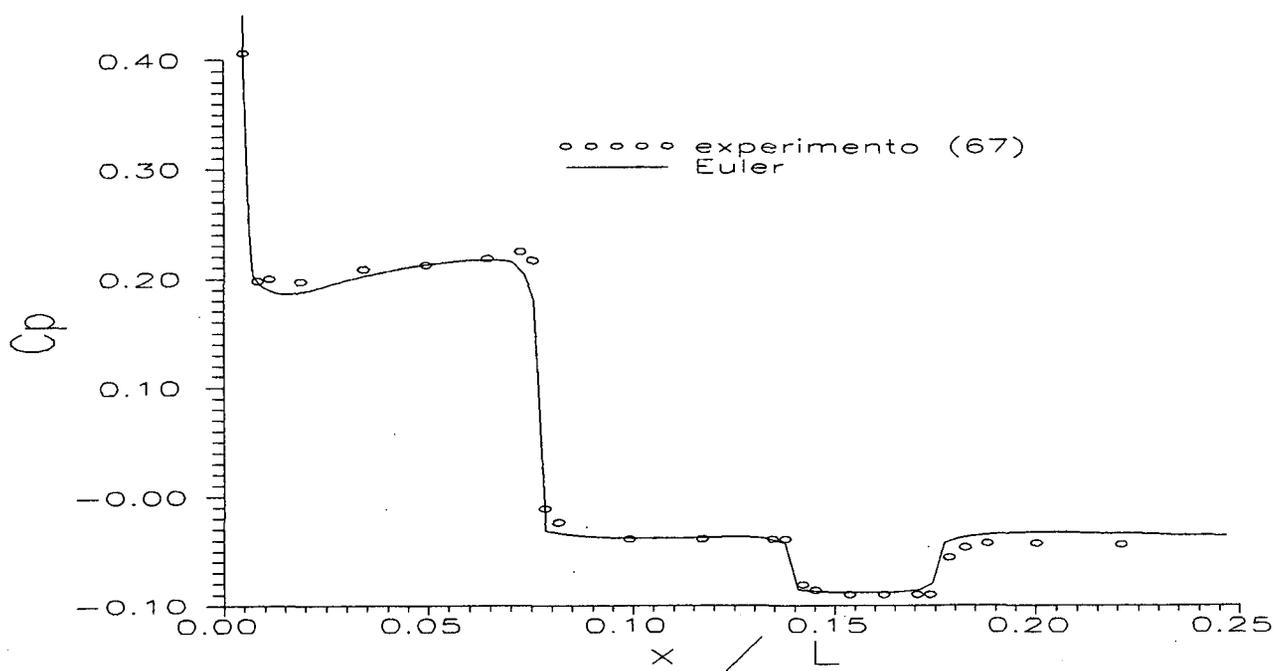


Figura 28. Resultado do  $C_p$  para  $M_\infty = 3,0$ ,  $\alpha = 6,1^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$ .

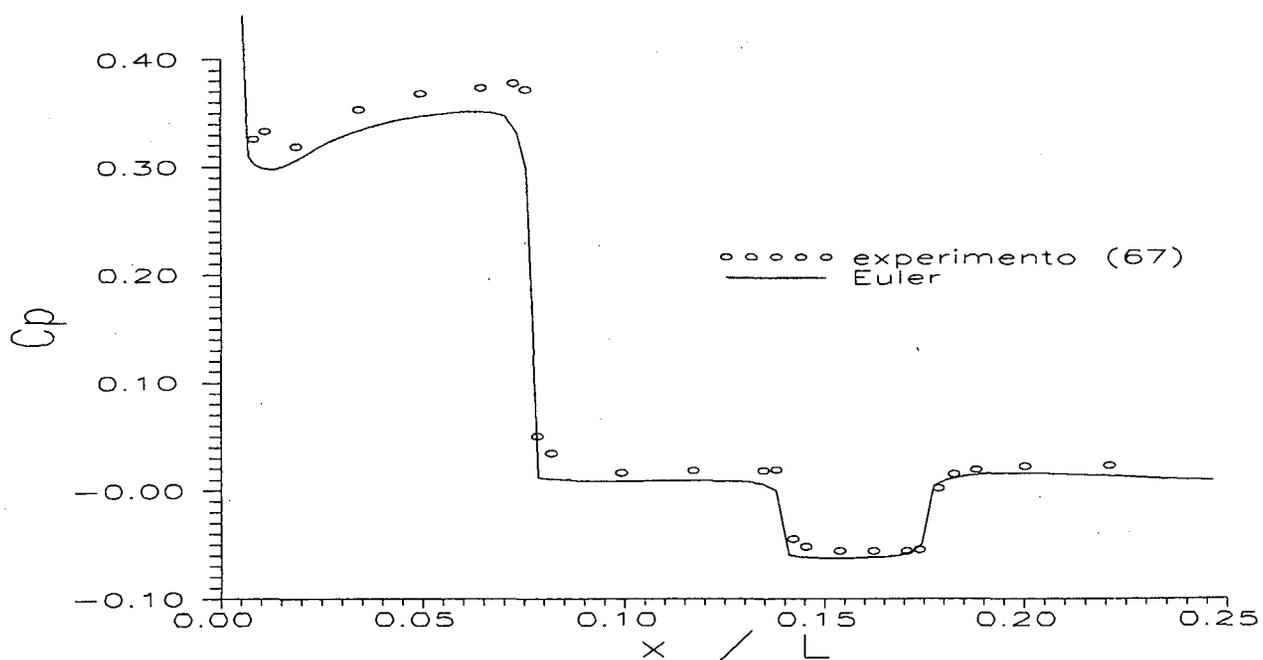


Figura 29. Resultado do  $C_p$  para  $M_\infty = 3,0$ ,  $\alpha = 6,1^\circ$  e  $\theta = 180^\circ$ .

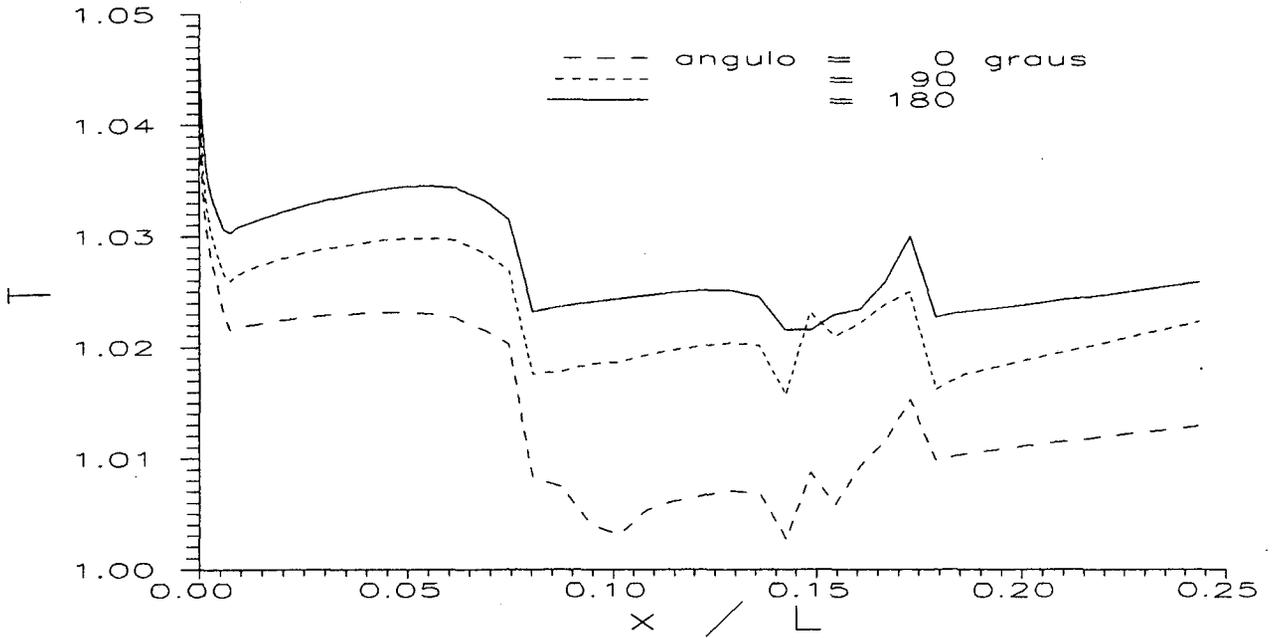


Figura 30. Resultado da temperatura para  $M_\infty = 0,50$  e  $\alpha = 6^\circ$ .

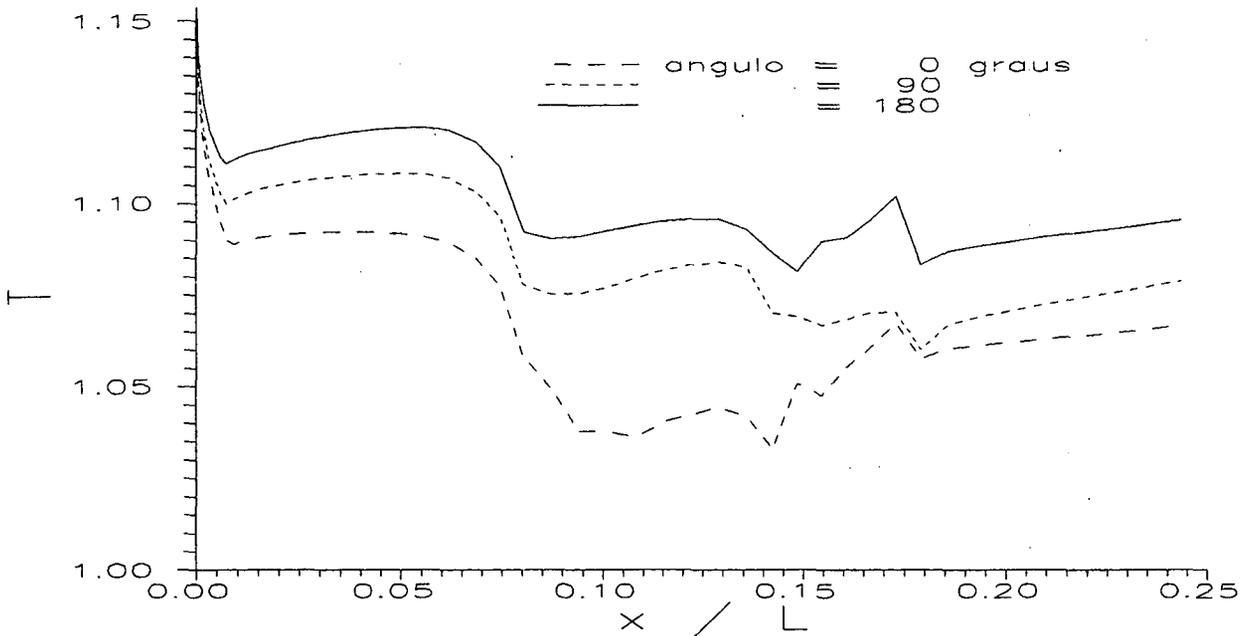
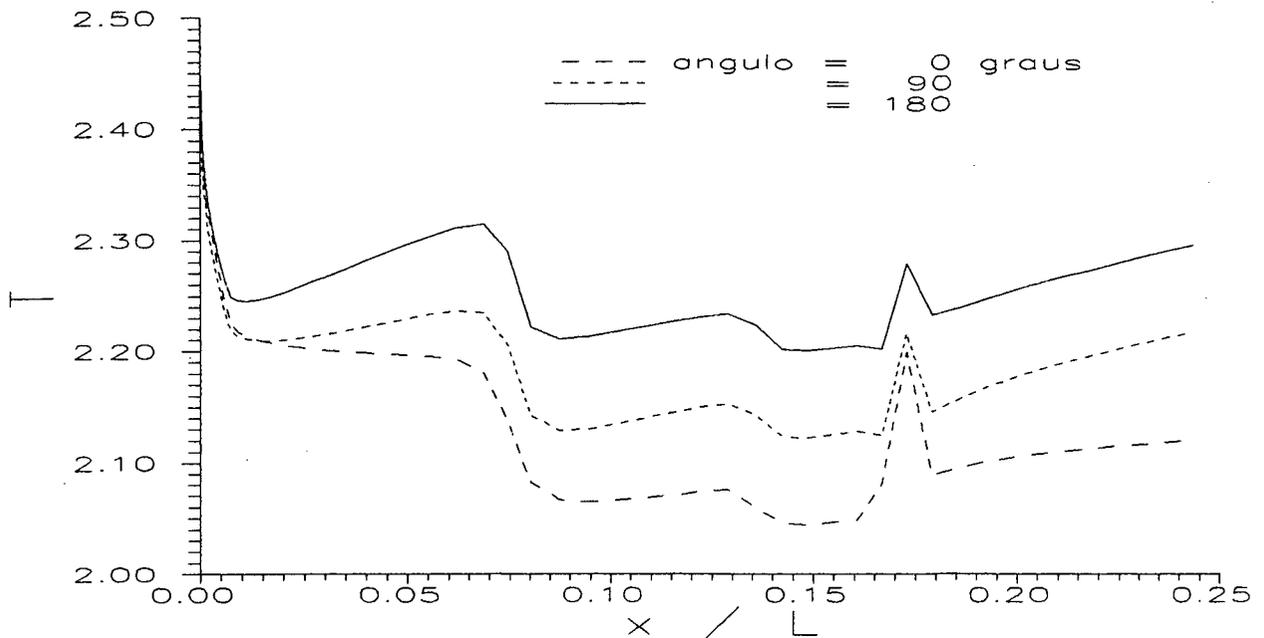


Figura 31. Resultado da temperatura para  $M_\infty = 0,90$  e  $\alpha = 6^\circ$ .



**Figura 32.** Resultado da temperatura para  $M_\infty = 3,0$  e  $\alpha = 6,1^\circ$ .

Os resultados numéricos do coeficiente de pressão  $C_p$  mostrados nas Fig. 21 a 29 são rerepresentados nas Fig. 33 a 35 para mostrar as variações em função da posição angular.

## 5.4 - COMENTÁRIOS

O único problema tridimensional em que se usou uma malha mais refinada para se resolver escoamentos viscosos foi com número de Mach 0,50. Como observado nas soluções numéricas dos escoamentos tridimensionais axissimétricos viscosos, ao se refinar a malha de  $48 \times 70 \times 12$  para  $96 \times 70 \times 12$  volumes, verificou-se que a solução numérica tende a afastar-se dos resultados experimentais. Mas, surpreendentemente, para  $M = 0,50$  e  $\alpha = 6^\circ$  isto só ocorreu na posição angular  $\theta = 0^\circ$ . Para  $\theta = 90$  e  $180^\circ$ , as soluções das equações de Euler e Navier-Stokes apresentaram o mesmo comportamento e

praticamente coincidiram com os resultados experimentais.

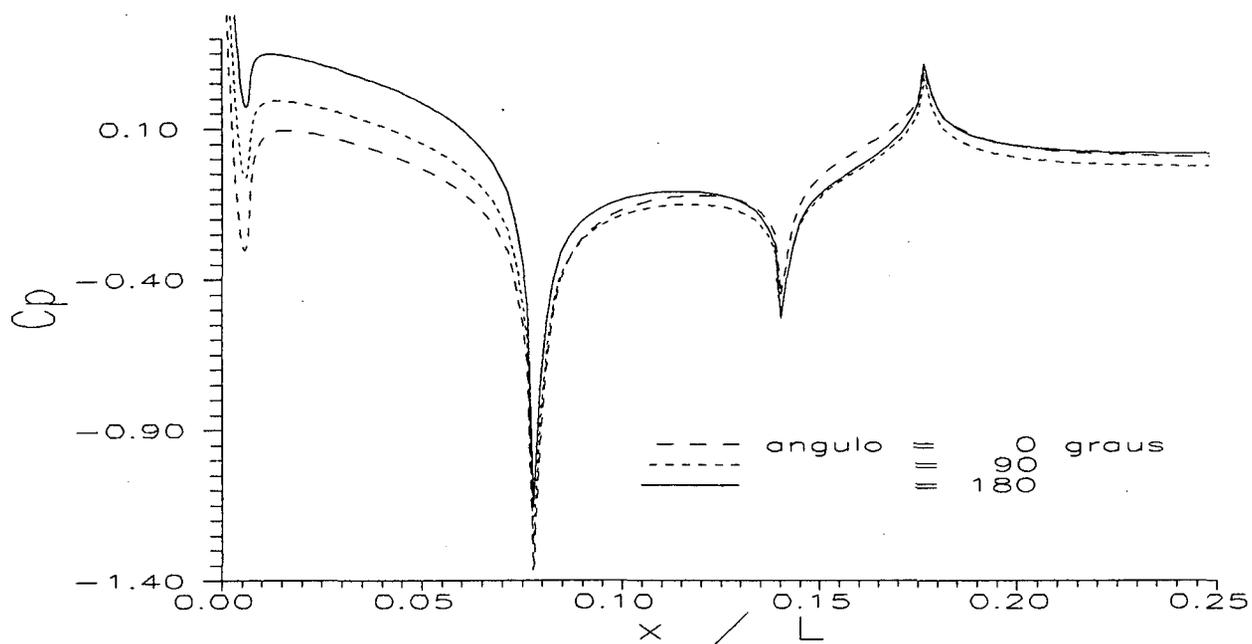


Figura 33. Resultado do  $C_p$  para  $M_\infty = 0,50$  e  $\alpha = 6^\circ$ .

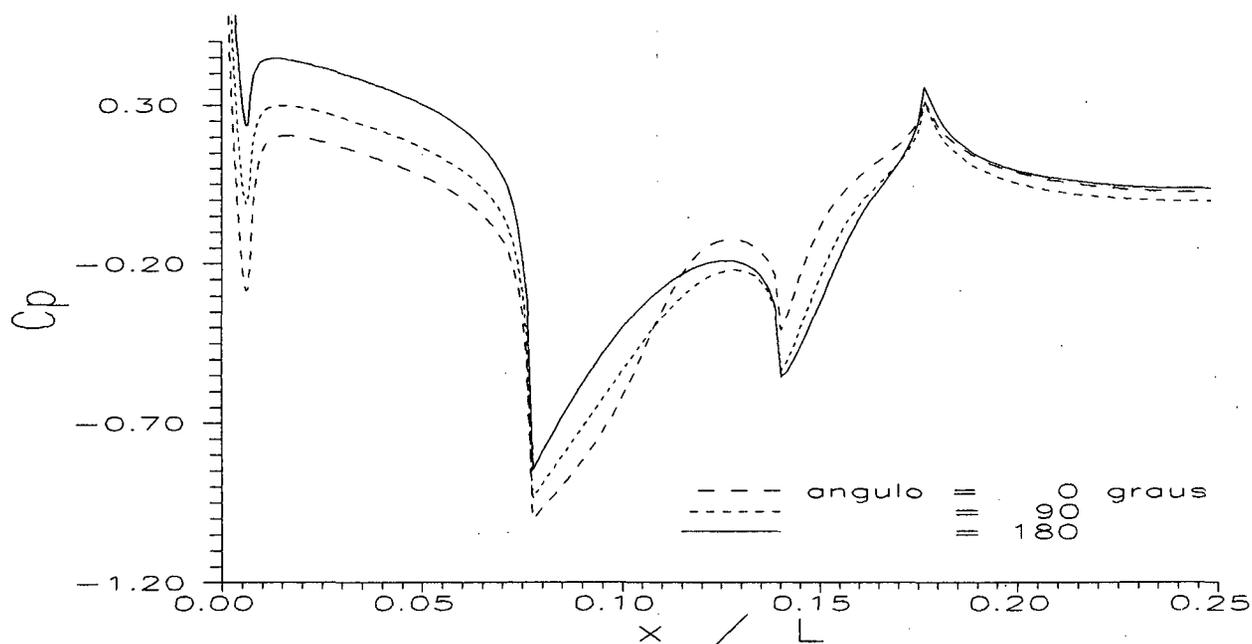
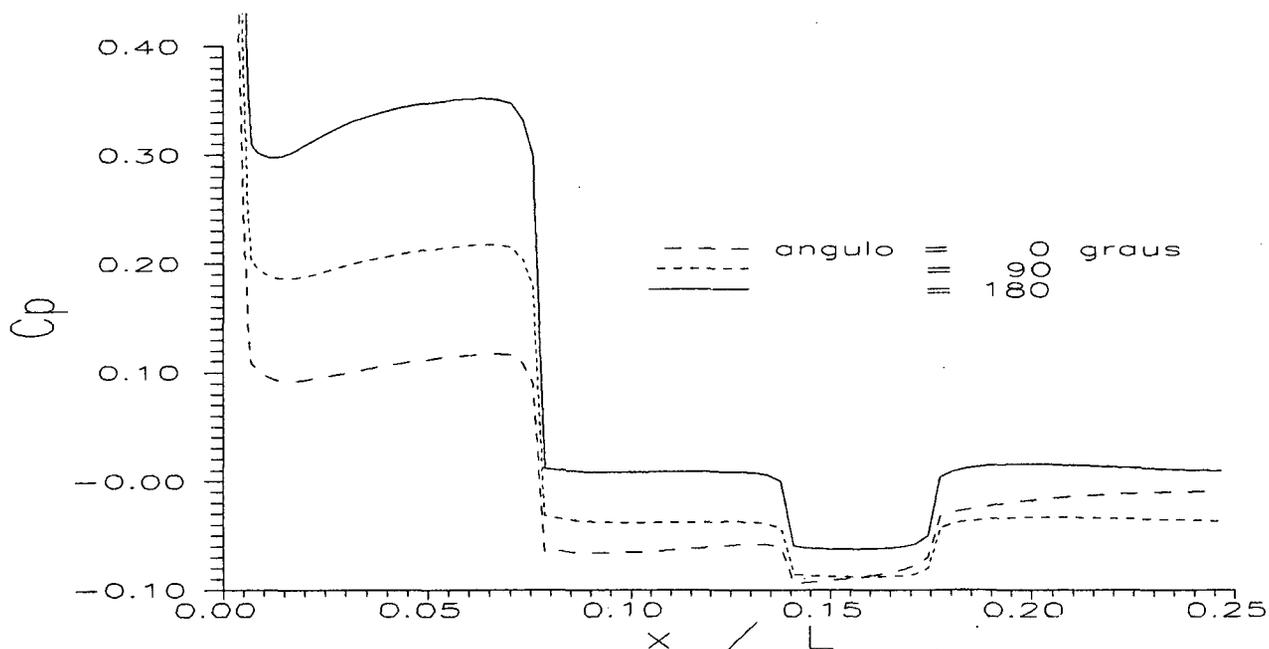


Figura 34. Resultado do  $C_p$  para  $M_\infty = 0,90$  e  $\alpha = 6^\circ$ .



**Figura 35.** Resultado do  $C_p$  para  $M_\infty = 3,0$  e  $\alpha = 6,1^\circ$ .

Hsieh [74] realizou uma investigação experimental de escoamentos tridimensionais supersônicos sobre uma geometria do tipo hemisfério-cilindro. Neste trabalho são mostrados esquemas que explicam a topologia do escoamento, principalmente com relação à bolha de separação que se forma e aos dois vórtices que ocorrem ao longo do cilindro. No livro de Anderson [17] são dadas explicações sobre a topologia de escoamentos tridimensionais sobre cones e cones-cilindros. As duas referências acima esclarecem sobre alguns aspectos dos resultados experimentais, dentre os quais, o motivo pelo qual o  $C_p$  na região cilíndrica, a partir de  $x/L = 0,18$ , apresenta valores menores para  $\theta = 90^\circ$ . A explicação está associada ao escoamento transversal que ocorre sobre a parte cilíndrica do VLS.

É interessante mencionar o resultado a que chegou Jaivin [75] ao estudar o escoamento de um jato de líquido contra uma placa plana. Segundo ele, os mesmos valores da distribuição de pressão, ao longo da placa, foram obtidos quando usaram-se tomadas de pressão com diâmetros de 0,041 mm e 0,102 mm. Back et alii [76]

verificaram diferenças relativas de até 7% entre os resultados obtidos com tomadas de pressão de 0,254 mm e 1,016 mm em escoamentos no interior de bocais do tipo convergente-divergente. De acordo com o Dr. Paulo Moraes Jr. [19], do Instituto de Aeronáutica e Espaço, o diâmetro das tomadas de pressão empregadas no modelo do foguete VLS foi de 0,50 mm, em geral, e 0,30 mm nas regiões próximas às quinas. Portanto, é muito provável que erros consideráveis estejam incluídos nos dados experimentais [67] usados nas comparações com os resultados numéricos do presente trabalho.

No apêndice 4 são mostradas algumas fotos dos resultados numéricos relativos aos escoamentos tridimensionais abordados neste capítulo e obtidas com o software gráfico ISO-3D [78].

---

## 6. CONCLUSÃO

---

O modelo numérico implementado reproduz adequadamente a maioria dos fenômenos físicos que ocorrem nos escoamentos tridimensionais sobre o foguete brasileiro VLS.

As discrepâncias observadas entre os resultados numéricos e experimentais podem ser atribuídas aos seguintes fatores:

- modelo matemático que não representa todos os fenômenos físicos do problema, como a turbulência; e
- tamanho inadequado da malha e que se deveu às limitações computacionais às quais o trabalho esteve sujeito.

Uma dúvida foi levantada sobre a incerteza envolvida na obtenção dos resultados experimentais, devido ao diâmetro das tomadas de pressão usadas, e que pode ter comprometido a qualidade da validação do modelo numérico.

Comprovou-se que a metodologia de qualquer regime de velocidade não tem tão bom desempenho na faixa transônica quanto nos demais regimes. Pode-se especular que isto seja devido à função de interpolação adotada e que pode estar associado ao fato de a massa específica e a velocidade apresentarem seus maiores gradientes justamente no regime transônico.

Recentemente, uma técnica de multiblocos foi incorporada com sucesso ao modelo numérico deste trabalho. Isto permitirá resolver, em breve, escoamentos sobre a configuração completa do foguete VLS.

Enfatiza-se que o modelo numérico proposto neste trabalho é geral, isto é, apesar de ter sido usado para resolver escoamentos sobre foguetes, pode ser aplicado na solução de escoamentos sobre edificações, veículos de transporte terrestre e marítimo, entre outros.

---

## 7. REFERÊNCIAS

---

1. MALISKA, C. R. & SILVA, A. F. C. *Desenvolvimento de códigos computacionais para a solução de problemas de escoamentos de alta velocidade; relatório ao IAE/CTA; parte II.* Florianópolis, SINMEC/EMC/UFSC, dez. 1987.
2. MALISKA, C. R. & SILVA, A. F. C. *Desenvolvimento de códigos computacionais para a solução de problemas de escoamentos de alta velocidade; relatório ao IAE/CTA; parte III.* Florianópolis, SINMEC/EMC/UFSC, set. 1988.
3. SILVA, A. F. C. & MALISKA, C. R. Uma formulação segregada em volumes finitos para escoamentos compressíveis e/ou incompressíveis em coordenadas generalizadas. *Anais do II Encontro Nacional de Ciências Térmicas.* Águas de Lindóia, ABCM, dez. 1988. p. 11-4.
4. ZEDAN, M. & SCHNEIDER, G. E. 3-D Modified strongly implicit procedure for finite difference heat conduction modelling. *AIAA Journal*, Washington, DC, 21(2):295-306, Feb. 1983.
5. MALISKA, C. R.; SILVA, A. F. C.; MARCHI, C. H.; AZEVEDO, J. L. F. *Vetorização e análise de desempenho do programa tridimensional co-localizado; relatório ao IAE/CTA; parte VI.* Florianópolis, SINMEC/EMC/UFSC, jan. 1991.
6. SILVA, A. F. C.; MARCHI, C. H.; LIVRAMENTO, M. A.; AZEVEDO, J. L. F. On the effects of vectorization for efficient computation of three dimensional segregated finite volume solutions. *Anais do XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica.* São Paulo, ABCM, dez. 1991. p. 109-12.
7. PEACEMAN, D. W. & RACHFORD, H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *SIAM Journal*, 3:28-41. 1955.
8. MEN, W. S. *Simulação numérica de escoamentos supersônicos turbulentos com dissipação viscosa.* Florianópolis, UFSC, set. 1991. Dissertação de Mestrado.
9. BALDWIN, B. S. & LOMAX, H. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *Proceedings of the AIAA 16th Aerospace Sciences Meeting.* Huntsville, Jan. 1978. Paper 78-257.
10. MALISKA, C. R.; SILVA, A. F. C.; MARCHI, C. H.; CARPES Jr., W. P. *Técnica de solução multibloco para problemas axissimétricos; relatório ao IAE/CTA; parte VIII.* Florianópolis, SINMEC/EMC/UFSC, jun. 1991.

11. MARCHI, C. H.; MALISKA, C. R.; SILVA, A. F. C. Solução numérica de escoamentos em geometrias complexas utilizando a técnica de multiblocos. *Anais do IV Encontro Nacional de Ciências Térmicas*. Rio de Janeiro, ABCM, dez. 1992. p. 353-6.
12. MALISKA, C. R.; SILVA, A. F. C.; MARCHI, C. H.; HULSE, E. R. Validação do modelo numérico tridimensional viscoso; relatório ao IAE/CTA; parte X. Florianópolis, SINMEC/EMC/UFSC, dez. 1992.
13. CORNELISSE, J. W.; SCHOYER, H. F. R.; WAKKER, K. F. *Rocket propulsion and spaceflight dynamics*. London, Pitman, 1979.
14. HAYES, L. J. Programming of supercomputers. In: Minkowycz, W. J. et alii. *Handbook of numerical heat transfer*. New York, John Wiley & Sons, 1988. p. 949-99.
15. A busca da velocidade máxima, uma corrida sem fim. *Globo Ciência*. Rio de Janeiro, 1(12):29, jul. 1992.
16. KUTLER, P. A perspective of computational fluid dynamics. In: Hauser, J. & Taylor, C. *Numerical grid generation in computational fluid dynamics*. Landshut, West Germany, July 1986. p. 547-65.
17. ANDERSON Jr., J. D. *Modern compressible flow; with historical perspective*. New York, McGraw-Hill, 1990.
18. MORAES Jr., P. Utilização do espaço exterior: programas e aplicações pacíficos. III SEBAE. São José dos Campos, ABAEE, out. 1992. Palestra.
19. MORAES Jr., P. *Comunicação pessoal*. São José dos Campos, out. 1992.
20. TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. C.; TOPP, L. P. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aeron. Soc.*, 23:805.
21. HARLOW, F. H. & WELCH, J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*, 8:2182-9, 1965.
22. PATANKAR, S. V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. New York, Hemisphere, 1980.
23. HIRSCH, C. *Numerical computation of internal and external flows*. Chichester, J. Wiley & Sons, 1988. 2 v.
24. BALIGA, B. R. & PATANKAR, S. V. A control volume finite-element method for two-dimensional fluid flow and heat transfer. *Numerical Heat Transfer*, 6:245-61, 1983.
25. SCHNEIDER, G. E. & ZEDAN, M. Control-volume-based finite element formulation of the heat conduction equation, spacecraft thermal control, design and operation. *Prog.*

- Astronaut. Aeronaut.*, 86:305-27, 1983.
26. MINKOWYCZ, W. J.; SPARROW, E. M.; SCHNEIDER, G. E.; PLETCHER, R. H. *Handbook of numerical heat transfer*. New York, J. Wiley & Sons, 1988.
  27. MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. Florianópolis, SINMEC/EMC/UFSC, maio 1988.
  28. WINSLOW, A. M. Numerical solution of the quasi-linear Poisson equation in nonuniform triangle mesh. *J. Comp. Phys.*, 2:149-72, 1967.
  29. CHU, W. H. Development of a general finite difference approximation for a general domain, part I: machine transformation. *J. Comp. Phys.*, 8:392-408, 1971.
  30. THOMPSON, J. F.; THAMES, F. C.; MASTIN, C. W. Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *J. Comp. Phys.*, 15:299-319, 1974.
  31. RAITHBY, G. D. & TORRANCE, K. E. Upstream-weighted differencing schemes and their application to elliptic problems involving fluid flow. *Comp. Fluids*, 2:191-206, 1974.
  32. SPALDING, D. B. A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 4:551-9, 1972.
  33. RAITHBY, G. D. *Prediction of dispersion by surface discharge; report to Canada Centre for Inland Waters*. Burlington, Ontario, 1976.
  34. SOUZA, S. M. A. G. U. *Um esquema numérico utilizando variáveis co-localizadas com função de interpolação completa para a solução de problemas de escoamento de fluidos*. Florianópolis, UFSC, mar. 1992. Tese de doutorado.
  35. ANDERSON, D. A.; TANNEHILL, J. C.; PLETCHER, R. H. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. New York, McGraw-Hill, 1984.
  36. PATANKAR, S. V. & SPALDING, D. B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*. Great Britain, Pergamon Press, 15:1787-808, 1972.
  37. Van DOORMAAL, J. P. & RAITHBY, G. D. Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer*, 7:147-63, 1984.
  38. Van DOORMAAL, J. P. & RAITHBY, G. D. An evaluation of the segregated approach for predicting incompressible fluid flows. *Proceedings of the ASME Heat Transfer Conference*. Denver, aug. 1985. Paper 85-HT-9.

39. SILVA, A. F. C. *Um procedimento em volumes finitos para a solução de escoamentos de qualquer velocidade*. Florianópolis, UFSC, set. 1991. Tese de doutorado.
40. HSU, C. *A curvilinear-coordinate method for momentum, heat and mass transfer in domains of irregular geometry*. Minnesota, University of Minnesota, 1981. Ph.D. Thesis.
41. RHIE, C. M. *A numerical study of the flow past an isolated airfoil with separation*. Urbana-Champaign, University of Illinois, 1981. Ph.D. Thesis.
42. PERIC, M.; KESSLER, R.; SCHEUERER, G. Comparison of finite-volume numerical methods with staggered and colocated grids. *Computers and Fluids*, 16(4):389-403, 1988.
43. MARCHI, C. H. *Relatório de estágio curricular em engenharia mecânica; período de março a abril de 1989*. Florianópolis, SINMEC/EMC/UFSC, maio 1989.
44. MARCHI, C. H.; MALISKA, C. R.; BORTOLI, A. L. The use of co-located variables in the solution of supersonic flows. *Anais do X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*. Rio de Janeiro, ABCM, dez. 1989. p. 157-60.
45. MARCHI, C. H. *Relatório de estágio curricular em engenharia mecânica; período de maio a julho de 1989*. Florianópolis, SINMEC/EMC/UFSC, ago. 1989.
46. BORTOLI, A. L. *O uso de variáveis co-localizadas na solução de escoamentos supersônicos sobre corpos de geometrias arbitrárias*. Florianópolis, UFSC, set. 1990. Dissertação de Mestrado.
47. MARCHI, C. H. *Discretização das equações de Euler para escoamentos tridimensionais em qualquer regime de velocidade em coordenadas generalizadas*. Florianópolis, SINMEC/EMC/UFSC, jul. 1989.
48. MARCHI, C. H.; MALISKA, C. R.; SILVA, A. F. C. A boundary-fitted numerical methods for the solution of three dimensional all speed flows using co-located variables. *Anais do III Encontro Nacional de Ciências Térmicas*. Itapema, ABCM, dez. 1990. p. 351-6.
49. MALISKA, C. R.; SILVA, A. F. C.; MARCHI, C. H.; VALERIM Jr., J. Validação dos modelos numéricos bi e tridimensionais - equações de Euler; relatório ao IAE/CTA; parte IX. Florianópolis, SINMEC/EMC/UFSC, ago. 1991.
50. ANDERSON Jr., J. D. *Hypersonic and high temperature gas dynamics*. New York, McGraw-Hill, 1989.
51. CHORIN, A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, 2:12-26, 1967.

52. HARLOW, F. H. & AMSDEN, A. A. Numerical calculation of almost incompressible flow. *Journal of Computational Physics*, 32:80-93, 1968.
53. HARLOW, F. H. & AMSDEN, A. A. A numerical fluid dynamics calculation method for all flow speeds. *Journal of Computational Physics*, 8:197-213, 1971.
54. Van DOORMAAL, J. P. *Numerical methods for the solution at compressible and incompressible flows*. Waterloo, University of Waterloo, 1985. Ph.D. Thesis.
55. KARKI, K. C. & PATANKAR, S. V. Pressure based calculation procedure for viscous flows at all speeds in arbitrary configurations. *AIAA Journal*, 27(9):1167-74, 1989.
56. VISBAL, M. & KNIGHT, D. The Baldwin-Lomax turbulence model for two-dimensional shock-wave/boundary-layer interactions. *AIAA Journal*, 22:921-8, July 1984.
57. HAH, C. A Navier-Stokes analysis of three-dimensional turbulent flows inside turbine blade rows at design and off-design conditions. *J. Eng. Gas Turbines Power*, 100:421-9, 1984.
58. AZEVEDO, J. L. F. Aerodynamic flow simulation using a finite difference method. *Anais do II Encontro Nacional de Ciências Térmicas*. Águas de Lindóia, dez. 1988. p.3-6.
59. RIEGER, H. & JAMESON, A. Solution of the three-dimensional compressible Euler and Navier-Stokes equations by an implicit LU scheme. *Proceedings of the AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting*, 1988. Paper 88-0619.
60. JOHN, J. E. A. *Gas dynamics*. Boston, Allyn and Bacon, 1984.
61. BEJAN, A. *Convection heat transfer*. New York, John Wiley & Sons, 1984.
62. MALISKA, C. R. Solução numérica de problemas de transferência de calor e mecânica dos fluidos em coordenadas generalizadas. *Anais do I Encontro Nacional de Ciências Térmicas*. Rio de Janeiro, ABCM, dez. 1986. p. 27-38.
63. MALISKA, C. R. *A solution method for three-dimensional parabolic fluid flow problems in nonorthogonal coordinates*. Waterloo, University of Waterloo, 1981. Ph.D. Thesis.
64. MILIOLI, F. E.; MALISKA, C. R.; SILVA, A. F. C. Convecção natural laminar em cavidades arbitrárias simplesmente conexas. *Anais do VII Congresso Brasileiro de Eng. Mecânica*. São José dos Campos, ABCM, dez. 1985. p. 85-8.
65. MALISKA, C. R.; SILVA, A. F. C.; MARCHI, C. H. *Solução numérica de escoamentos compressíveis utilizando-se variáveis co-localizadas em coordenadas generalizadas; relatório ao IAE/CTA; parte V*. Florianópolis,

SINMEC/EMC/UFSC, jun. 1990.

66. MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C.; MALISKA, C. R. Solução numérica de escoamentos invíscidos em tuberias com velocidade supersônica na saída. *Anais do IV Encontro Nacional de Ciências Térmicas*. Rio de Janeiro, ABCM, dez. 1992. p. 145-8.
67. MORAES Jr., P. *Comunicação ao SINMEC*. São José dos Campos, 1991.
68. HOLMAN, J. P. *Transferência de calor*. São Paulo, McGraw-Hill, 1983.
69. MORAES Jr., P. & NETO, A. A. Aerodynamic experimental investigation of the brazilian satellite launch vehicle (VLS). *Anais do III Encontro Nacional de Ciências Térmicas*. Itapema, ABCM, dez. 1990. p. 211-5.
70. DONGARRA, J. J. *Performance of various computers using standard linear equations software*. Knoxville, University of Tennessee, July 1991. CS-89-85.
71. AZEVEDO, J. L. F. *Comunicação pessoal*. Florianópolis, 1991.
72. SCHLICHTING, H. *Boundary layer theory*. New York, McGraw-Hill, 1955.
73. PEREIRA Filho, J. C. & LOIOLA, C. R. A. *Fortran; ANSI 77 e WATFIV-S*. Rio de Janeiro, Campus, 1987.
74. HSIEH, T. Low supersonic flow over hemisphere-cylinder at incidence. *J. Spacecraft*, 14(11):662-8, Nov. 1977.
75. JAIVIN, G. I. *Effect of hole size on pressure measurements made with a flat-plate dynamic-head probe*. Pasadena, Jet Propulsion Lab., June 1964. TR 32-617.
76. BACK, L. H.; MASSIER, P. F.; GIER, H. L. Comparison of measured and predicted flows through conical supersonic nozzles, with emphasis on the transonic region. *AIAA Journal*, 3(9):1606-14, Sep. 1965.
77. COURANT, R.; ISAACSON, E.; REES, S. M. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. *Comm. Pure and Applied Mathematics*, 5:243-55, 1952.
78. MALISKA Jr.; C. R. & DIHLMANN, A. ISO-3D Visualizador tridimensional para campos escalares e vetoriais. *Anais do XII Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para a Engenharia*. Porto Alegre, AMC, nov. 1992.
79. BAKER, A. J. *Finite element computational fluid mechanics*. New York, Hemisphere/McGraw-Hill, 1983.

80. ROACHE, P. J. *Computational fluid dynamics*. Albuquerque, New Mexico, Hermosa, 1976.
81. PATANKAR, S. V. *Calculation of unsteady compressible flows involving shocks; rept. UF/TN/A/4*. London, Mechanical Engineering Dept., Imperial College, 1971.
82. RUSHMORE, W. L. & TAULBEE, D. B. Numerical investigation of developing pipe flows of arbitrary curvature. *Computers and Fluids*, Pergamon Press, 6:125-40, 1978.
83. AZEVEDO, J. L. F. *Transonic aeroelastic analysis of launch vehicle configurations*. Stanford, Stanford University, Feb. 1988. Ph.D. Thesis.
84. BRILEY, W. R. & MCDONALD, H. Solution of the multidimensional compressible Navier-Stokes equation by a generalized implicit method. *Journal of Computational Physics*, 24:327-97, 1977.
85. RAKICH, J. V. Three-dimensional flow calculations by the method of characteristics. *AIAA Journal*, 5(10):1906-8, Oct. 1967.
86. WILLIAMS, G. P. Numerical integration of the three-dimensional Navier-Stokes equation for incompressible flow. *J. Fluid Mechanics*, 37(4):727-50, 1969.
87. BRILEY, W. R. Numerical method for predicting three-dimensional steady viscous flow in ducts. *J. Computational Physics*, 14:8-28, 1974.
88. PULLIAM, T. H. & STEGER, J. L. Implicit finite-difference simulations of three-dimensional compressible flow. *AIAA Journal*, 18(2):159-67, Feb. 1980.
89. PRABHU, D. K. & TANNEHILL, J. C. Numerical solution of space shuttle orbiter flowfield including real-gas effects. *J. Spacecraft*, 23(3):264-72, 1986.
90. BAUDART, P. A.; DUTHOIT, V.; HARLAY, J. C. Numerical simulation of cryotechnic rocket engine ignition. *Proceedings of the AIAA/SAE/ASME 27th Joint Propulsion Conference*. Sacramento, June 1991. Paper 91-2290.
91. RAMASWAMY, M. A. & RAJENDRA, G. Experimental investigation of transonic flow past a blunt cone-cylinder. *J. Spacecraft*, 15(2):120-3, 1978.
92. ZDRAVISTCH, F. & AZEVEDO, J.L.F. Numerical simulation of high speed flows over complex satellite launchers. *Anais do III Encontro Nacional de Ciências Térmicas*. Itapema, ABCM, dez. 1990. p. 233-8.
93. RUDY, D.H.; THOMAS, J.L.; KUMAR, A.; GNOFFO, P.A.; CHAKRAVARTHY, S.R. Computation of laminar hypersonic compression-corner flows. *AIAA Journal*, 29(7):1108-13, 1991.

---

# APÊNDICE I

---

## COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES E DA ENERGIA.

$$a_P \phi_P = \Sigma(a_{nb} \phi_{NB})_P + b_P \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \Sigma(a_{nb} \phi_{NB}) &= a_e \phi_E + a_w \phi_W + a_n \phi_N + a_s \phi_S + a_d \phi_D + a_f \phi_F \\ &+ a_{ne} \phi_{NE} + a_{se} \phi_{SE} + a_{nw} \phi_{NW} + a_{sw} \phi_{SW} + a_{de} \phi_{DE} + a_{fe} \phi_{FE} \\ &+ a_{dw} \phi_{DW} + a_{fw} \phi_{FW} + a_{dn} \phi_{DN} + a_{ds} \phi_{DS} + a_{fn} \phi_{FN} + a_{fs} \phi_{FS} \end{aligned}$$

$$a_e = - \dot{M}_e (1/2 - \alpha_e) + D_{1e} \beta_d / \Delta \xi + (D_{4n} - D_{4s}) / 4 \Delta \xi + (D_{7d} - D_{7f}) / 4 \Delta \xi$$

$$a_w = + \dot{M}_w (1/2 + \alpha_w) + D_{1w} \beta_w / \Delta \xi + (D_{4s} - D_{4n}) / 4 \Delta \xi + (D_{7f} - D_{7d}) / 4 \Delta \xi$$

$$a_n = - \dot{M}_n (1/2 - \alpha_n) + D_{5n} \beta_n / \Delta \eta + (D_{2e} - D_{2w}) / 4 \Delta \eta + (D_{8d} - D_{8f}) / 4 \Delta \eta$$

$$a_s = + \dot{M}_s (1/2 + \alpha_s) + D_{5s} \beta_s / \Delta \eta + (D_{2w} - D_{2e}) / 4 \Delta \eta + (D_{8f} - D_{8d}) / 4 \Delta \eta$$

$$a_d = -\dot{M}_d(1/2 - \alpha_d) + D_{9d}\beta_d/\Delta\gamma + (D_{3e} - D_{3w})/4\Delta\gamma + (D_{6n} - D_{6s})/4\Delta\gamma$$

$$a_f = +\dot{M}_f(1/2 + \alpha_f) + D_{9f}\beta_f/\Delta\gamma + (D_{3w} - D_{3e})/4\Delta\gamma + (D_{6s} - D_{6n})/4\Delta\gamma$$

$$a_{ne} = D_{2e}/4\Delta\eta + D_{4n}/4\Delta\xi$$

$$a_{nw} = -D_{2w}/4\Delta\eta - D_{4n}/4\Delta\xi$$

$$a_{de} = D_{3e}/4\Delta\gamma + D_{7d}/4\Delta\xi$$

$$a_{dw} = -D_{3w}/4\Delta\gamma - D_{7d}/4\Delta\xi$$

$$a_{dn} = D_{6n}/4\Delta\gamma + D_{8d}/4\Delta\eta$$

$$a_{fn} = -D_{6n}/4\Delta\gamma - D_{8f}/4\Delta\eta$$

$$a_{se} = -D_{2e}/4\Delta\eta - D_{4s}/4\Delta\xi$$

$$a_{sw} = D_{2w}/4\Delta\eta + D_{4s}/4\Delta\xi$$

$$a_{fe} = -D_{3e}/4\Delta\gamma - D_{7f}/4\Delta\xi$$

$$a_{fw} = D_{3w}/4\Delta\gamma + D_{7f}/4\Delta\xi$$

$$a_{ds} = -D_{6s}/4\Delta\gamma - D_{8d}/4\Delta\eta$$

$$a_{fs} = D_{6s}/4\Delta\gamma + D_{8f}/4\Delta\eta$$

$$a_P = \frac{\dot{M}_P}{\Delta t} + \Sigma a_{nb}$$

$$\Sigma a_{nb} = a_e + a_w + a_n + a_s + a_d + a_f$$

$$b_P = M_P \dot{\phi}_P / \Delta t - L[\hat{P}^\phi]_P \Delta V + L[\hat{S}^\phi]_P \Delta V$$

$$L[\hat{P}^\phi]_P = \frac{(p_E - p_W)}{2\Delta\xi} \cdot (\bar{\xi}_h)_P + \frac{(p_N - p_S)}{2\Delta\eta} \cdot (\bar{\eta}_h)_P + \frac{(p_D - p_F)}{2\Delta\gamma} \cdot (\bar{\gamma}_h)_P$$

Para  $\phi = (u, v, w)$  tem-se  $h = (x, y, z)$ , respectivamente.

$$L[\hat{P}^T]_P = \frac{1}{c_p} \left\{ \left[ \frac{1}{J_P \Delta t} + \frac{(U_w - U_e)}{2\Delta\xi} + \frac{(V_s - V_n)}{2\Delta\eta} + \frac{(W_f - W_d)}{2\Delta\gamma} \right] p_P - \frac{p_P}{J_P \Delta t} \right. \\ \left. + \frac{(U_e p_E - U_w p_W)}{2\Delta\xi} + \frac{(V_n p_N - V_s p_S)}{2\Delta\eta} + \frac{(W_d p_D - W_f p_F)}{2\Delta\gamma} \right\}$$

$$L[\hat{S}^\phi]_P = \frac{\mu}{3} \left\{ (\bar{\xi}_h)_P [(\bar{\nabla} \cdot \bar{V})_e - (\bar{\nabla} \cdot \bar{V})_w] / \Delta\xi \right. \\ \left. + (\bar{\eta}_h)_P [(\bar{\nabla} \cdot \bar{V})_n - (\bar{\nabla} \cdot \bar{V})_s] / \Delta\eta + (\bar{\gamma}_h)_P [(\bar{\nabla} \cdot \bar{V})_d - (\bar{\nabla} \cdot \bar{V})_f] / \Delta\gamma \right\}$$

Para  $\phi = (u, v, w)$  tem-se  $h = (x, y, z)$ , respectivamente.

onde, por exemplo,

$$(\bar{\nabla} \cdot \bar{V})_e = J_e \left[ \frac{(U_E - U_P)}{\Delta\xi} + \frac{(\bar{V}_E + \bar{V}_P - \bar{V}_S - \bar{V}_{SE})}{2\Delta\eta} + \frac{(\bar{W}_E + \bar{W}_P - \bar{W}_F - \bar{W}_{FE})}{2\Delta\gamma} \right]$$

As componentes contravariantes da velocidade, acima, com barra, são avaliadas nas faces dos volumes de controle (por exemplo,  $V_P = V_n$ ), e aquelas sem barra, no centro dos volumes.

---

## APÊNDICE 2

---

### TERMOS FONTES DOS FLUXOS CONVECTIVOS.

$$L[\hat{P}^\phi]_e = \frac{(P_E - P_P)}{\Delta \xi} \cdot (\bar{\xi}_h)_e + \frac{(P_N + P_{NE} - P_S - P_{SE})}{4\Delta \eta} \cdot (\bar{\eta}_h)_e + \frac{(P_D + P_{DE} - P_F - P_{FE})}{4\Delta \gamma} \cdot (\bar{\gamma}_h)_e$$

$$L[\hat{P}^\phi]_n = \frac{(P_E + P_{NE} - P_W - P_{NW})}{4\Delta \xi} \cdot (\bar{\xi}_h)_n + \frac{(P_N - P_P)}{\Delta \eta} \cdot (\bar{\eta}_h)_n + \frac{(P_D + P_{DN} - P_F - P_{FN})}{4\Delta \gamma} \cdot (\bar{\gamma}_h)_n$$

$$L[\hat{P}^\phi]_d = \frac{(P_E + P_{DE} - P_W - P_{DW})}{4\Delta \xi} \cdot (\bar{\xi}_h)_d + \frac{(P_N + P_{DN} - P_S - P_{DS})}{4\Delta \eta} \cdot (\bar{\eta}_h)_d + \frac{(P_D - P_P)}{\Delta \gamma} \cdot (\bar{\gamma}_h)_d$$

Para  $\phi = (u, v, w)$  tem-se  $h = (x, y, z)$ , respectivamente.

## APÊNDICE 3

### COEFICIENTES DA EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA.

$$\begin{aligned}
 m_P^p \rho_P + m_e^p \rho_E + m_w^p \rho_W + m_n^p \rho_N + m_s^p \rho_S + m_d^p \rho_D + m_f^p \rho_F \\
 + m_e^U U_e + m_w^U U_w + m_n^V V_n + m_s^V V_s + m_d^W W_d + m_f^W W_f = b^c
 \end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
 m_P^p = \frac{\Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma}{J_p \Delta t} + (1/2 + \bar{\gamma}_e) U_e \Delta \eta \Delta \gamma - (1/2 - \bar{\gamma}_w) U_w \Delta \eta \Delta \gamma + (1/2 + \bar{\gamma}_n) V_n \Delta \xi \Delta \gamma \\
 - (1/2 - \bar{\gamma}_s) V_s \Delta \xi \Delta \gamma + (1/2 + \bar{\gamma}_d) W_d \Delta \xi \Delta \eta - (1/2 - \bar{\gamma}_f) W_f \Delta \xi \Delta \eta
 \end{aligned}$$

$$m_e^p = (1/2 - \gamma_e) U_e \Delta \eta \Delta \gamma \quad m_w^p = - (1/2 + \gamma_w) U_w \Delta \eta \Delta \gamma$$

$$m_n^p = (1/2 - \gamma_n) V_n \Delta \xi \Delta \gamma \quad m_s^p = - (1/2 + \gamma_s) V_s \Delta \xi \Delta \gamma$$

$$m_d^p = (1/2 - \gamma_d) W_d \Delta \xi \Delta \eta \quad m_f^p = - (1/2 + \gamma_f) W_f \Delta \xi \Delta \eta$$

$$m_e^U = [(1/2 + \gamma_e) \rho_P + (1/2 - \gamma_e) \rho_E] \Delta \eta \Delta \gamma \quad m_w^U = - [(1/2 + \gamma_w) \rho_W + (1/2 - \gamma_w) \rho_P] \Delta \eta \Delta \gamma$$

$$m_n^V = [(1/2 + \gamma_n) \rho_P + (1/2 - \gamma_n) \rho_N] \Delta \xi \Delta \gamma \quad m_s^V = - [(1/2 + \gamma_s) \rho_S + (1/2 - \gamma_s) \rho_P] \Delta \xi \Delta \gamma$$

$$m_d^W = [(1/2 + \gamma_d) \rho_P + (1/2 - \gamma_d) \rho_D] \Delta \xi \Delta \eta \quad m_f^W = - [(1/2 + \gamma_f) \rho_F + (1/2 - \gamma_f) \rho_P] \Delta \xi \Delta \eta$$

$$b^c = \rho_P^{\circ} \frac{\Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma}{J_P \Delta t} + m_e^U U_e + m_w^U U_w + m_n^V V_n + m_s^V V_s + m_d^W W_d + m_f^W W_f$$

$$A_P \dot{p}_P = \Sigma(A_{nb} \dot{p}_{NB})_P + B_P \quad (76)$$

$$A_P = m_P^{\rho} C_P^{\rho} + m_e^U d_e^U(\alpha_{11})_e - m_w^U d_w^U(\alpha_{11})_w + m_n^V d_n^V(\alpha_{22})_n \\ - m_s^V d_s^V(\alpha_{22})_s + m_d^W d_d^W(\alpha_{33})_d - m_f^W d_f^W(\alpha_{33})_f$$

$$\Sigma(A_{nb} \dot{p}_{NB}) = A_e \dot{p}_E + A_w \dot{p}_W + A_n \dot{p}_N + A_s \dot{p}_S + A_d \dot{p}_D + A_f \dot{p}_F$$

$$A_e = -m_e^{\rho} C_E^{\rho} + m_e^U d_e^U(\alpha_{11})_e \quad A_w = -m_w^{\rho} C_W^{\rho} - m_w^U d_w^U(\alpha_{11})_w$$

$$A_n = -m_n^{\rho} C_N^{\rho} + m_n^V d_n^V(\alpha_{22})_n \quad A_s = -m_s^{\rho} C_S^{\rho} - m_s^V d_s^V(\alpha_{22})_s$$

$$A_d = -m_d^{\rho} C_D^{\rho} + m_d^W d_d^W(\alpha_{33})_d \quad A_f = -m_f^{\rho} C_F^{\rho} - m_f^W d_f^W(\alpha_{33})_s$$

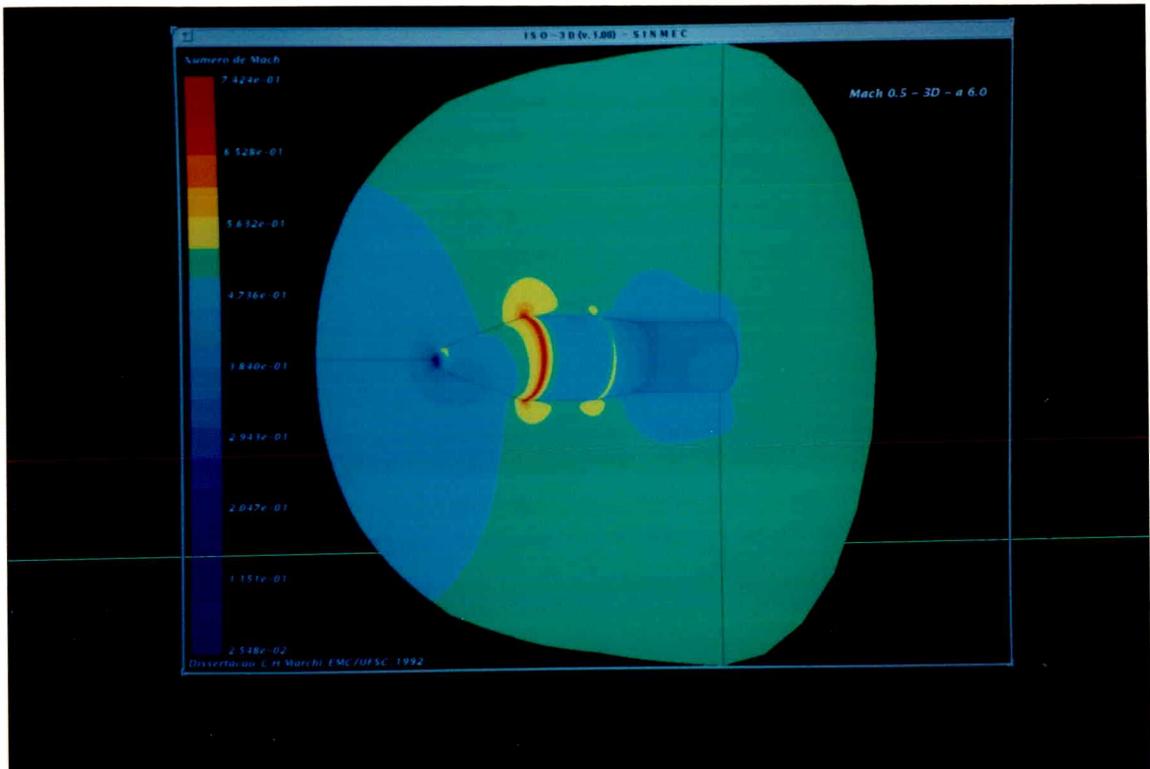
$$B_P = \rho_P^{\circ} \frac{\Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma}{J_P \Delta t} - m_P^{\rho} \rho_P - m_e^{\rho} \rho_E - m_w^{\rho} \rho_W - m_n^{\rho} \rho_N - m_s^{\rho} \rho_S - m_d^{\rho} \rho_D - m_f^{\rho} \rho_F$$

---

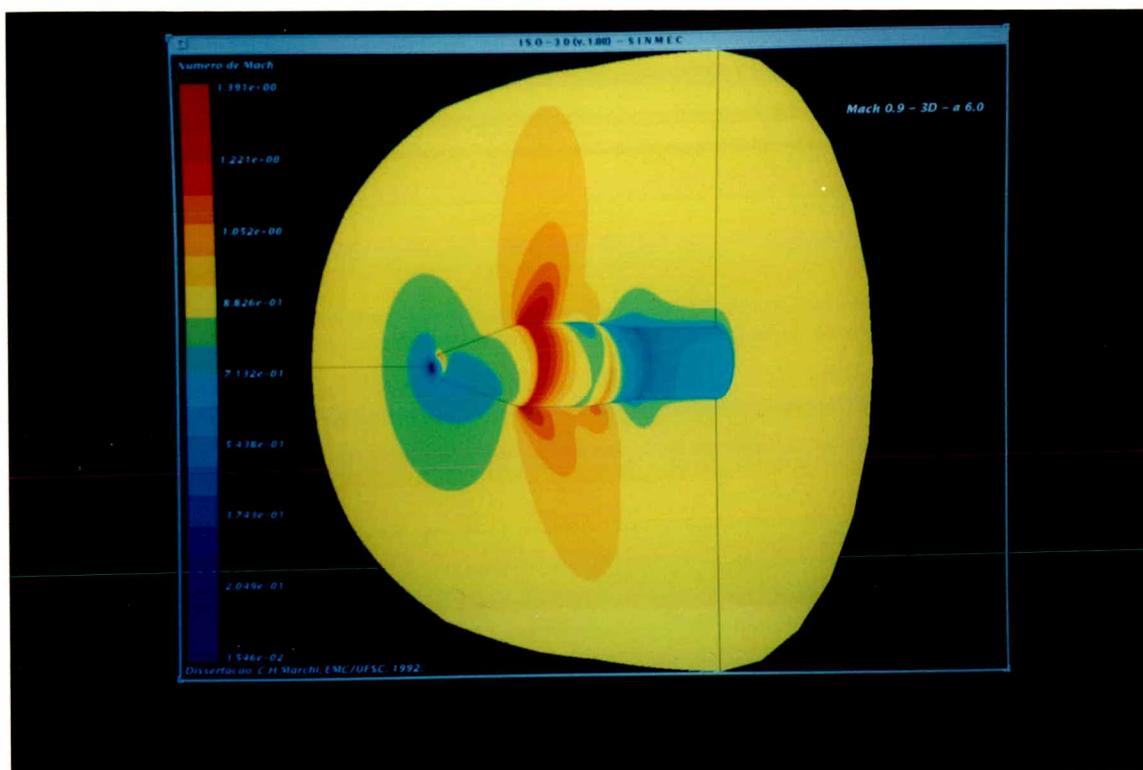
## **APÊNDICE 4**

---

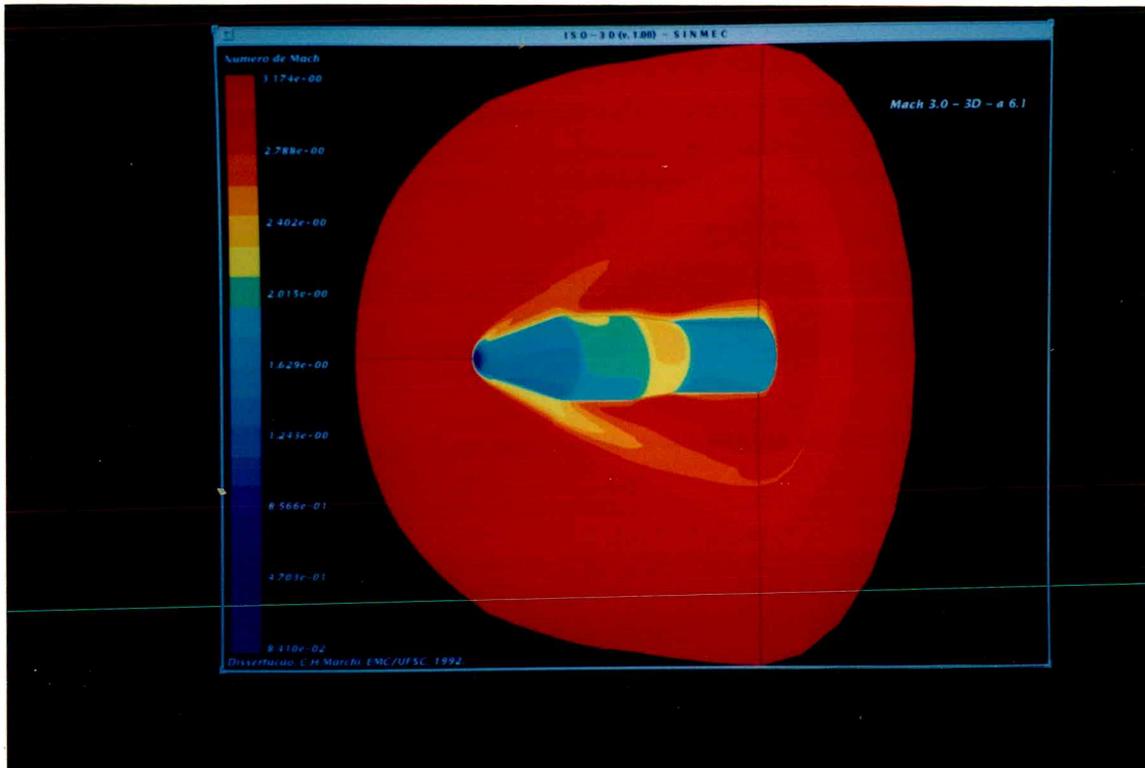
**FOTOS DOS RESULTADOS NUMÉRICOS.**



Campo de número de Mach para o escoamento tridimensional invíscido sobre a parte frontal do foguete VLS.  $M_\infty = 0,50$  e  $\alpha = 6,0^\circ$ . Malha  $192 \times 70 \times 12 = 161.280$  volumes.



Campo de número de Mach para o escoamento tridimensional invíscido sobre a parte frontal do foguete VLS.  $M_\infty = 0,90$  e  $\alpha = 6,0^\circ$ . Malha  $192 \times 70 \times 12 = 161.280$  volumes.



Campo de número de Mach para o escoamento tridimensional invíscido sobre a parte frontal do foguete VLS.

$M_{\infty} = 3,0$  e  $\alpha = 6,1^{\circ}$ . Malha  $96 \times 70 \times 12 = 80.640$  volumes.