

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UM PROCEDIMENTO EM VOLUMES FINITOS PARA A SOLUÇÃO
DE ESCOAMENTOS DE QUALQUER VELOCIDADE

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANTONIO FÁBIO CARVALHO DA SILVA

FLORIANÓPOLIS, SETEMBRO - 1991

UM PROCEDIMENTO EM VOLUMES FINITOS PARA A SOLUÇÃO
DE ESCOAMENTOS DE QUALQUER VELOCIDADE

ANTONIO FÁBIO CARVALHO DA SILVA

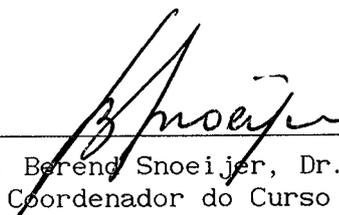
ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

NA ÁREA DE CONCENTRAÇÃO FLUIDOS, E APROVADA EM
SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO

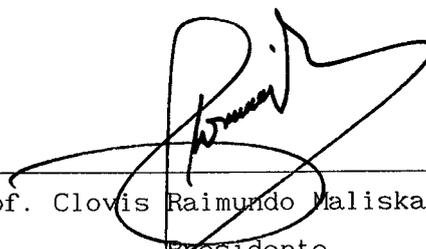


Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D.
Orientador

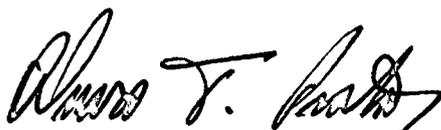


Prof. Berend Snoeijer, Dr.-Ing.
Coordenador do Curso

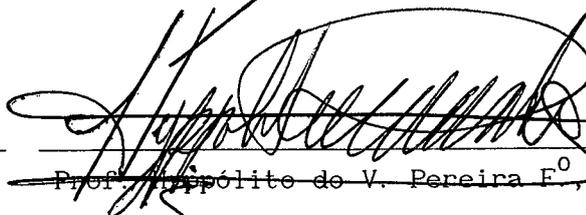
BANCA EXAMINADORA :



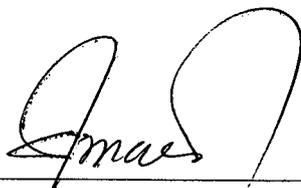
Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D.
Presidente



Prof. Álvaro Toubes Prata, Ph.D.



Prof. Hipólito de V. Pereira F.^o, Ph.D.



Prof. José C. A. do Amarante Ph.D.



Prof. João L. F. de Azevedo, Ph.D.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos ao meu orientador, Prof. Clovis R. Maliska. Sua participação foi decisiva na definição do tema desta Tese, suas recomendações sempre relevantes e suas palavras sempre de incentivo.

Este trabalho contou com o apoio de um amplo convênio de cooperação técnica e científica entre o Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência do Calor - SINMEC - do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC e o Instituto de Aeronáutica e Espaço do Centro Técnico Aeroespacial. Agradeço em especial ao Dr. Paulo Moraes Jr., Chefe de Divisão de Aerodinâmica do IAE e coordenador do convênio por essa Instituição, pelo incentivo e confiança.

Diversos resultados apresentados ao longo do texto foram gerados através de programas de pós-processamento desenvolvidos pela eficiente equipe de Bolsistas de Iniciação Científica do SINMEC. Sou grato ao Eng. Axel Dhilmann pela presteza com que sempre fui atendido em qualquer solicitação. Agradeço em especial ao estudante de graduação Marcos Antônio do Livramento por toda a tarefa de digitação e edição deste trabalho.

Por fim, agradeço ao hoje aluno de Mestrado Carlos Henrique Marchi. Sua colaboração foi valiosa em diversos testes a que os códigos computacionais foram submetidos. Alguns dos resultados apresentados ao longo deste texto foram inclusive por ele processados quando ainda aluno de graduação em Engenharia Mecânica.

INDICE

RESUMO	viii
ABSTRACT	ix
SIMBOLOGIA	x
CAPÍTULOS	
1 - INTRODUÇÃO	1
2 - EQUAÇÕES GOVERNANTES	13
2.1 - Formas Simplificadas das Equações de N-S	14
2.2 - Formas Alternativas da Equação da Energia	15
2.3 - Escoamentos de Gases Perfeitos	15
2.4 - Equação de Conservação em Forma Generalizada	16
3 - TRANSFORMAÇÃO E DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	17
3.1 - Introdução	17
3.2 - Escolha das Variáveis Dependentes	18
3.3 - Transformação da Equações Diferenciais	19
3.4 - Discretização das Equações	21
4 - LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DISCRETIZADAS	25
4.1 - Introdução	25

4.2 - Equações de Conservação da Quantidade de Movimento e Energia	25
4.2.1 - Desacoplamento das Equações	26
4.2.2 - Tratamento das Não Linearidades	27
4.2.3 - Avaliação de ϕ e suas Derivadas nas Faces dos Volumes de Controle	27
4.2.4 - Forma Final das Equações de Conservação da Quantidade de Movimento e Energia	30
4.3 - Equação de Conservação da Massa	31
4.3.1 - A Formulação Compressível	32
4.3.1.1 - Uma Estrutura Iterativa para a Formulação Compressível	32
4.3.1.2 - Aplicabilidade da Formulação Compressível	34
4.3.2 - A Formulação Incompressível	35
4.3.2.1 - Expressão de U e V em Função de P	36
4.3.2.2 - Forma Final da Equação para a Pressão	38
4.3.2.3 - Uma Estrutura Iterativa para a Formulação Incompressível	40
4.3.2.4 - Aplicabilidade da Formulação Incompressível	41
4.3.3 - Uma Formulação para Qualquer Regime de Escoamento	43
4.3.3.1 - Expressão de ρ em Função de P	45
4.3.3.2 - Uma Estrutura Iterativa para a Formulação para Qualquer Regime de Escoamento	47
4.4 - Resumo do Capítulo	48
5 - ARRANJO DOS VOLUMES DE CONTROLE	50
5.1 - Introdução	50
5.2 - Arranjo de Volumes de Controle Número 1	51
5.2.1 - Comentários sobre o Arranjo de Volumes de Controle Número 1	55
5.3 - Arranjo de Volumes de Controle Número 2	57
5.3.1 - Comentários sobre o Arranjo de Volumes de Controle Número 2	58
5.4 - Arranjo de Volumes de Controle Número 3	60
5.4.1 - O Arranjo Co-Localizado Aplicado à Discretização Cartesiana	61
5.4.2 - O Arranjo Co-Localizado Aplicado à Discretização Não-Ortogonal	64
5.4.3 - Comentários sobre o Arranjo de Volumes de Controle Número 3	66

6 - O ESQUEMA DE BEAM E WARMING	69
6.1 - Introdução	69
6.2 - Representação Vetorial das Equações Governantes	69
6.3 - Esquema para Avanço no Tempo - A Forma Delta	70
6.4 - Tratamento das Não Linearidades	72
6.5 - Solução do Sistema de Equações Lineares - O Processo de Fatoração Aproximada	74
6.6 - Dissipação Artificial no Esquema de Beam e Warming	77
7 - RESULTADOS	79
7.1 - Introdução	79
7.2 - Escoamento Contra uma Placa Plana	80
7.2.1 - Condições de Contorno na Entrada	81
7.2.2 - Condições de Contorno na Simetria	84
7.2.3 - Condições de Contorno na Fronteira Superior	84
7.2.4 - Condições de Contorno na Saída	86
7.2.5 - Condições de Contorno sobre a Placa	87
7.2.6 - Teste do Modelo para o Limite Incompressível	89
7.3 - Escoamento Bidimensional Contra um Cilindro	92
7.4 - Escoamentos Axissimétricos	96
7.4.1 - Hemisfério-Cilindro	97
7.4.2 - Escoamento Contra o Veículo Lançador de Satélites (VLS) Brasileiro	103
7.4.3 - Escoamento Contra o Veículo Lançador Scout	108
7.5 - Conclusões	108
8 - A FORMULAÇÃO SEGREGADA EM FORMA DELTA	111
8.1 - Introdução	111
8.2 - A Formulação Segregada Convencional	111
8.3 - A Formulação Segregada em Forma Delta	113
8.4 - Algumas Vantagens da Forma Delta	114
8.5 - Comentários Sobre a Positividade dos Coeficientes	117
9 - O PROCESSO DE FATORAÇÃO APROXIMADA	119
9.1 - Introdução	119
9.2 - Um Processo de Fatoração Aproximada aplicado ao Operador Diferencial	120
9.3 - Um Processo de Fatoração Aproximada aplicado às Equações Discretizadas	124

9.3.1 - Influência dos Termos Adicionais	127
9.4 - Experiências Numéricas	128
9.4.1 - Aplicação da Fatoração Aproximada à Equação da Conservação da Massa	132
9.5 - Cancelamento Parcial dos Termos Adicionais	133
9.6 - A Fatoração Aproximada ADI2 X TDMA Linha-por-Linha	134
9.7 - Resumo do Capítulo	134
10 - DISSIPACÃO ARTIFICIAL	136
10.1 - Introdução	136
10.2 - O Enfoque Matemático	138
10.3 - O Enfoque Físico	139
10.3.1 - Uma Nota sobre o Esquema CDS	146
10.4 - Consequências de Alguns Esquemas	148
10.5 - Efeito dos Termos Dissipativos em um Problema com Onda de Choque	152
10.6 - Resumo do Capítulo	156
11 - CONCLUSÕES	159
12 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	164

RESUMO

A solução numérica de problemas envolvendo escoamentos compressíveis é usualmente obtida através de métodos em que as equações diferenciais governantes são resolvidas simultaneamente. Uma das características comuns a esses métodos é o cálculo da pressão através de uma equação de estado, o que inviabiliza a sua aplicação na solução de escoamentos a baixos números de Mach. No presente trabalho é proposta uma metodologia para a simulação numérica de escoamentos compressíveis e/ou incompressíveis em coordenadas generalizadas. As equações diferenciais governantes são resolvidas segregadamente e a pressão é obtida a partir da equação de conservação da massa. A flexibilidade do modelo no tratamento de escoamentos com altos e baixos números de Mach é assegurada pelo processo de linearização dessa equação em que tanto as densidades como as velocidades são mantidas ativas. Resultados obtidos para diversos escoamentos bidimensionais e axissimétricos concordam bem com outros dados numéricos e experimentais. Algumas das características comuns à maioria dos esquemas simultâneos, como a forma delta e o processo de fatoração aproximada, foram aplicados à metodologia segregada. Conclui-se, também, que as discrepâncias observadas entre as soluções obtidas através da metodologia segregada proposta no presente trabalho e através do bem conhecido esquema de Beam e Warming se devem as diferentes formas de introdução de dissipação artificial. Por último, constata-se que os esquemas unidimensionais de interpolação empregados nas metodologias segregadas introduzem muito mais dissipação que a necessária para eliminar oscilações da solução.

ABSTRACT

The numerical solution of compressible fluid flow problems is usually carried out solving the partial differential equation set simultaneously. A common characteristic of such methods is the determination of the pressure via a state equation, which precludes the solution of low Mach number flows. In the present work it is advanced a numerical methodology for the solution of compressible and/or incompressible fluid flow problems using boundary-fitted coordinates. The partial differential equations are solved in a segregated manner and pressure is obtained through the mass conservation equation. The ability of the method in handling low as well as high Mach number flows is achieved through a Newton-Raphson-like linearization of the mass flux, where density and velocity are both kept active. Results obtained for several two-dimensional and axisymmetric flows over complex geometries agree well with other numerical and experimental data. The delta form and the approximate factorization scheme, normally employed in the context of simultaneous solution are extended to the segregated formulation. It is demonstrated that the solutions discrepancies observed when the methodology proposed here and the well known Beam and Warming method are used, is due to the different forms of introducing artificial dissipation. It is also demonstrated that the two-point unidimensional interpolation employed in the segregated methods introduces much more dissipation than it is needed to prevent solution oscillations.

SIMBOLOGIA

a_p, a_e, a_w, a_n, a_s $a_{se}, a_{sw}, a_{ne}, a_{nw}$	coeficientes das equações discretizadas
A, B	matrizes jacobianas
$[A_x], [A_y]$	matrizes tridiagonais originadas no processo de fatoração aproximada
b	vetor independente de um sistema de equações lineares
c_p	calor específico a pressão constante
c_v	calor específico a volume constante
C^p	coeficiente da equação de estado linearizada
\bar{d}^u, \bar{d}^v	termos originados na aproximação das equações de conservação da quantidade de movimento
D_1, D_2, D_3, D_4	parcelas difusivas dos coeficientes das equações discretizadas
$D_e^{(4)}$	dissipação explícita de quarta ordem
E, F	vetores de fluxo no esquema de B&W

e_i	energia interna por unidade de massa
E_t	energia total por unidade de volume
J	jacobiano da transformação de coordenadas
J_e, J_w, J_n, J_s	soma dos fluxos convectivo e difusivo nas faces indicadas pelos subíndices
k	condutividade térmica
$L[]$	aproximação numérica da expressão no interior dos colchetes
M	massa no interior de um volume de controle
\dot{M}	fluxo de massa
m^ρ, m^U, m^V, b^c	coeficientes e termo-fonte da equação discretizada de conservação da massa
P	pressão
P^*	estimativa do campo de pressões ou campo de pressões da iteração anterior
P^ϕ	termo de pressão nas equações de conservação em coordenadas cartesianas
\hat{P}^ϕ	termo de pressão nas equações de conservação transformadas
$P', u', v', U', V', \rho'$	correções nos campos de $P^*, u^*, v^*, U^*, V^*, \rho^*$
q	vetor de variáveis no esquema de B&W
R	constante particular do gás
RHS	lado direito de uma equação
S^ϕ	termo-fonte na equação para ϕ

\hat{S}^ϕ	termo-fonte na equação transformada para ϕ
t	tempo
T	temperatura
u, v	componentes cartesianas do vetor velocidade
U, V	componentes contravariantes do vetor velocidade
\vec{v}	vetor velocidade
$U^*, V^*, u^*, v^*, \rho^*$	campos de U, V, u, v e ρ associados ao campo P^*
x, y	sistema de coordenadas cartesiano
α, β, γ	componentes do tensor métrico
$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$	parâmetros envolvidos na avaliação de ϕ e suas derivadas nas faces dos volumes de controle
β	coeficiente de expansão térmica
γ	relação de calores específicos
Γ^ϕ	coeficiente de difusão na equação de conservação generalizada
Δt	intervalo de tempo
ΔV	volume de um volume de controle
ρ	massa específica
ϕ	propriedade conservada generalizada
Φ	dissipação viscosa
μ	viscosidade

τ_{ij}	tensor tensão
ξ, η	sistema de coordenadas curvilíneo generalizado
ω_e	coeficiente de dissipação explícita
ω_i	coeficiente de dissipação implícita

Subíndices

SW, S, SE, W, E, NW, N, NE	indicam os volumes vizinhos ao volume centrado em P
e, w, n, s	indicam as interfaces entre o volume centrado em P e os volumes centrados em E, W, N e S

Superíndices

u, v, ρ , P, T	indicam coeficientes ou termos-fonte das equações para o cálculo de u, v, ρ , P e T.
*	indica valores associados a pressão P*
n+1	indica variáveis avaliadas no instante de tempo (n+1)
n	indica variáveis avaliadas no instante de tempo (n)
'	indica correções
^	denota termos das equações transformadas

1 - INTRODUÇÃO

A previsão teórica dos fenômenos físicos relacionados à mecânica dos fluidos tem tido sua aplicação estendida a uma gama cada vez maior de situações reais. Dentre os problemas em que a previsão teórica se constitui numa ferramenta bastante útil pode-se citar o projeto de turbo-máquinas (bombas, compressores, turbinas, etc), projeto de trocadores de calor, projetos de câmaras de combustão, lubrificação, refrigeração de sistemas e componentes, dispersão de poluentes na atmosfera, previsão do tempo, aerodinâmica, etc.

No que se refere à aerodinâmica, é indubitável que ainda hoje se recorre intensivamente a ensaios de modelos reduzidos em túneis de vento. Essa predominância das técnicas experimentais deve-se a dois motivos principais. A simulação do escoamento em torno de configurações complexas exige necessidade de armazenamento e tempo de computação ainda além das capacidades computacionais hoje instaladas. Em segundo lugar, certos fenômenos, entre os quais turbulência é um bom exemplo, não se encontram adequadamente modelados, isto é, não se dispõe de equações matemáticas que simulem ou descrevam o comportamento físico de forma confiável. Apesar de as velocidades de processamento dos computadores estarem evoluindo rapidamente, provavelmente a modelação da turbulência persistirá por um bom tempo como um problema de difícil solução.

Por outro lado, um método de cálculo validado através da comparação com resultados experimentais para alguns valores da faixa de variação de um determinado parâmetro, pode em certas situações ser empregado com confiabilidade na obtenção de dados para alguns valores

intermediários desse parâmetro. Nesse caso, a previsão teórica apresenta algumas vantagens evidentes. Em primeiro lugar, as soluções são obtidas em pouco tempo e com possibilidade de gerar grande quantidade de dados. Em segundo lugar, o custo de um cálculo teórico é muito menor que o de um ensaio, pois não envolve a construção e instrumentação de maquetes, os custos de construção de túneis de vento, o grande consumo de energia para o acionamento dos ventiladores, etc.

Além das vantagens acima, é fundamental o fato de que a previsão teórica pode simular condições difíceis, senão impossíveis, de serem simuladas em laboratório. É bem conhecida a dificuldade de reproduzir em túneis de vento as condições de voo, no que se refere ao número de Mach e ao número de Reynolds, de grandes aviões comerciais. Embora a obtenção de números de Mach na faixa do escoamento transônico seja fácil, a reprodução simultânea do número de Reynolds exige túneis de grandes dimensões pressurizados e/ou criogênicos. Mais complicada ainda é a simulação da reentrada de veículos espaciais na atmosfera terrestre.

Por último, as previsões teóricas possibilitam a otimização dos ensaios. Na existência de diversas alternativas para a configuração de um foguete, a previsão teórica pode descartar a maioria e recomendar uma série delas para serem testadas. A própria localização das tomadas de pressão sobre o modelo pode ser sugerida pelos resultados teóricos.

Em resumo, a aplicação dos modernos procedimentos de cálculo minimiza o tempo e os custos dos projetos em aerodinâmica. Acreditamos que nenhuma indústria que pretenda manter um grau mínimo de competitividade no mercado internacional ou país com projetos aeroespaciais possa prescindir de um forte conhecimento na área de mecânica dos fluidos teórica.

Infelizmente, a previsão teórica das características do escoamento de um fluido não é uma tarefa simples, pois envolve a solução de um sistema de equações diferenciais parciais não lineares. A menos que o problema físico permita grandes simplificações nessas equações diferenciais, soluções exatas não são conhecidas.

Uma das estratégias de solução aproximada dessas equações diferenciais segue os fundamentos básicos reunidos no texto de Patankar [1]. As características principais dessa estratégia são:

- 1) as equações diferenciais são discretizadas, isto é, são transformadas em equações algébricas, através de um processo de integração aproximada em volumes de controle elementares

- convenientemente distribuídos sobre o domínio de solução;
- ii) a avaliação do valor das variáveis dependentes e suas derivadas nas faces dos volumes de controle, necessária no processo de integração, é baseada em raciocínios calcados na física do problema;
 - iii) os termos não lineares das equações algébricas são fatorados no produto de uma incógnita por um coeficiente. As equações algébricas são linearizadas através do cálculo desses coeficientes com campos estimados; e
 - iv) os sistemas de equações algébricas originados pela aplicação de cada um dos princípios de conservação são resolvidos separadamente, ou segregadamente, dos sistemas de equações gerados pelos outros princípios de conservação.

Os métodos que reúnem essas características apresentam algumas qualidades desejáveis. Independentemente da malha empregada as soluções são sempre fisicamente realistas e isentas de oscilações espúrias. Além disso, o processo iterativo normalmente converge para uma grande faixa do intervalo de tempo ou parâmetro equivalente adotado.

Dependendo da forma de linearização da equação da conservação da massa, os métodos numéricos baseadas nas características acima resultam adequados para a solução de escoamentos a baixas ou a altas velocidades. No entanto, a revisão da literatura mostra claramente que esses métodos são aplicados predominantemente na solução de escoamentos a baixas velocidades, caracterizados por um baixo número de Mach.

Neste tipo de escoamento a pressão deve ser considerada uma propriedade de escoamento ao invés de uma propriedade termodinâmica. Assim, a equação de estado pode ser apenas empregada para o cálculo da densidade de escoamentos não isotérmicos já que normalmente as variações de pressão são pequenas o suficiente para que a influência dessas variações no campo de densidade possa ser desprezada. Em consequência, a pressão deve ser calculada pela equação de conservação de massa. No entanto, como a pressão não aparece explicitamente nessa equação, a determinação do campo de pressões envolve um procedimento iterativo, conhecido como problema do acoplamento pressão-velocidade. A partir de um campo de pressões estimado são calculadas as componentes do vetor velocidade que satisfazem as equações de conservação da quantidade de movimento. O resíduo, ou erro, na conservação da massa em cada volume de controle é empregado como termo fonte de uma equação para o cálculo da

correção do campo de pressões estimado. O processo é repetido até que os resíduos sejam suficientemente pequenos.

Esse procedimento de cálculo da pressão, associado ao processo de linearização das equações, faz com que o método, rigorosamente falando, seja iterativo dentro de cada passo de tempo se soluções transientes acuradas são desejadas.

Os pesquisadores da área de mecânica dos fluidos computacional com vínculos mais estreitos com a área de aerodinâmica, envolvidos, em geral, com escoamentos a altas velocidades, adotam uma estratégia sensivelmente diferente da anterior. Resumidamente, as características básicas dessa outra estratégia são as seguintes:

- i) as equações diferenciais são linearizadas, através da expansão de seus termos não lineares em série de Taylor em torno de uma solução conhecida no tempo. Esse procedimento é análogo ao processo de Newton-Raphson aplicado à solução de equações algébricas não lineares;
- ii) as equações diferenciais resultantes do processo de linearização são escritas na forma de um operador diferencial atuando sobre variações temporais das propriedades conservadas (forma delta);
- iii) através do processo de fatoração aproximada, os operadores diferenciais parciais são decompostos no produto de operadores unidimensionais. Assim, a solução de problemas bi ou tridimensionais se reduz à solução de uma seqüência de problemas unidimensionais;
- iv) os operadores diferenciais ordinários são transformados em operadores algébricos através da substituição das derivadas espaciais, na maioria dos casos, por expressões correspondentes em diferenças finitas;
- v) dissipação é artificialmente introduzida para promover estabilidade e reduzir oscilações da solução; e
- vi) os sistemas de equações algébricas originados pelos diversos princípios de conservação são resolvidos simultaneamente.

Uma extensa revisão dos principais métodos que reúnem as características acima pode ser vista no texto de Anderson et. al. [2]. Um defeito comum é que todos apresentam dificuldades na solução de escoamento a baixos números de Mach.

É natural que pesquisadores da área de mecânica dos fluidos computacional procurem estender a aplicabilidade de metodologias

concebidas visando a solução de escoamentos a altas velocidades para a solução de escoamentos a baixas velocidades e vice-versa. De fato, diversos trabalhos podem ser encontrados na literatura com esse objetivo. Alguns dos mais representativos são os seguintes:

1) O trabalho de Chorin [3].

Chorin propõe um esquema totalmente explícito para a solução de escoamentos incompressíveis a partir de uma formulação originalmente desenvolvida para escoamentos compressíveis. A partir de campos iniciais estimados, as equações de conservação da quantidade de movimento são usadas para o cálculo de um novo campo de velocidades. O resíduo na conservação da massa originado por esses campos é empregado para o cálculo, também explícito, de um campo de densidade artificial, através de uma equação da continuidade modificada. A pressão é então calculada por uma equação de estado artificial com o uso de uma compressibilidade também artificial. Se o processo convergir o efeito da compressibilidade e da densidade artificial desaparecem e os campos obtidos são a solução das equações para um escoamento incompressível. Na realidade, a densidade artificial deve ser encarada apenas como um parâmetro de relaxação. Os principais defeitos do esquemaproposto por Chorin são: i) obtém apenas a solução de regime permanente, ii) o esquema é explícito e está portanto sujeito a critérios relativamente estreitos de convergência, e iii) é aplicável apenas a escoamentos em que a densidade pode ser assumida constante. No entanto, a idéia de introdução de uma densidade artificial, proposta por Chorin há mais de vinte anos, vem sendo aplicada em diversos trabalhos até hoje.

ii) O trabalho de Steger e Kutler [4].

Steger e Kutler desenvolveram um esquema simultâneo para a solução de escoamentos inviscidos incompressíveis. Nesse esquema, a equação da conservação da massa é substituída por uma equação auxiliar que envolve um parâmetro denotado por β . Quando β é grande, o esquema apresenta dificuldades de convergência; quanto menor o valor de β mais o transiente se afasta do transiente real de um escoamento incompressível, embora a solução de regime permanente seja correta. Através da escolha adequada do valor de β , Steger e Kutler obtém boas soluções transientes de alguns problemas. Esta metodologia é também apenas aplicável no caso limite em que a densidade do fluido pode ser considerada constante.

iii) O trabalho de Kwak et. al. [5].

Kwak et. al. estendem a metodologia proposta por Steger e Kutler para a solução de escoamentos viscosos turbulentos em coordenadas generalizadas. Apresentam também critérios para os limites superior e inferior do parâmetro β .

iv) O trabalho de Briley et. al. [6].

Briley et. al. tentam superar a dificuldade de convergência apresentada pelos métodos simultâneos na solução de escoamentos incompressíveis propondo uma nova adimensionalização das variáveis. No entanto, na solução de um problema com número de Mach do escoamento livre igual a 0.05 os autores foram obrigados a precondicionar algumas matrizes. Esse procedimento, além de retirar qualquer significado físico do transiente, demonstra que a nova adimensionalização pouco ou nada contribuiu para a extensão da aplicabilidade do método.

v) O trabalho de Harlow e Amsdem [7].

Harlow e Amsdem propõe em [8] o método ICE (Implicit Continuos-fluid Eulerian) com capacidade de resolver escoamentos com qualquer número de Mach. Essa técnica, derivada do método MAC [9] desenvolvido por Harlow e Welch para a solução de escoamentos incompressíveis, foi posteriormente aperfeiçoada pelos mesmos autores em [7]. As etapas básicas deste método são as seguintes: i) com todos os termos difusivos e convectivos avaliados explicitamente, as equações da quantidade de movimento expressam os valores do produto da densidade pela velocidade em função do gradiente de pressão; ii) as expressões obtidas na etapa anterior são substituídas na equação da continuidade. A densidade por sua vez é relacionada ao campo de pressões através de uma equação de estado linearizada de forma que a equação da continuidade resulta numa equação do tipo de Poisson para a pressão; iii) determinado o campo de pressões, a densidade é calculada pela equação de estado e as velocidades pelas equações obtidas no item i). Este procedimento de solução em que as equações da quantidade de movimento são resolvidas explicitamente é análogo ao método PRIME (Pressure Implicit Momentum Explicit) aplicado por Maliska [10] na solução de escoamentos incompressíveis.

Ao método ICE pode ser atribuída a qualidade de ser o primeiro método com capacidade de resolver escoamentos com qualquer número de Mach. Deve-se notar que, assim como os métodos desenvolvidos para escoamentos incompressíveis, a equação da conservação da massa é aplicada para o cálculo da pressão.

vi) O trabalho de Issa e Lockwood [11].

A diferença básica entre a estratégia empregada por Issa e Lockwood em relação à proposta por Harlow e Amsdem [7] se refere ao tratamento do acoplamento pressão - velocidade. Em [11] todas as equações são resolvidas implicitamente seguindo o procedimento proposto por Patankar e Spalding [12] para escoamentos parabólicos incompressíveis. Issa e Lockwood introduzem ainda algumas alterações na avaliação do gradiente de pressão nas regiões de escoamento supersônico. Resultados são obtidos para alguns problemas envolvendo inclusive interação choque-camada limite. Camadas limite turbulentas foram tratadas com a hipótese do comprimento de mistura de Prandtl.

vii) O trabalho de Van Doormaal [13].

Van Doormaal analisa com profundidade os diversos níveis iterativos envolvidos na solução de problemas compressíveis por métodos em que a solução das equações diferenciais é realizada de forma segregada, como no trabalho de Issa e Lockwood [11] acima citado. O desempenho de diversos esquemas para tratamento do acoplamento pressão - velocidade é também investigado em um problema unidimensional simples.

A revisão bibliográfica acima mostra que apenas metodologias derivadas das originalmente desenvolvidas para a solução de escoamentos a baixas velocidades puderam ter sua aplicabilidade estendida à solução de escoamentos de qualquer velocidade. Mais ainda, só no trabalho de Van Doormaal essa extensão foi implementada de acordo com o procedimentos e regras básicas reunidas no texto de Patankar [1].

No trabalho de Van Doormaal no entanto a metodologia para escoamentos de qualquer velocidade foi aplicada na solução de dois problemas simples em que foi empregada discretização cartesiana igualmente espaçada. Além disso, não há comparações com soluções obtidas por outros métodos numéricos ou resultados experimentais. Entretanto, nesses problemas simples, o esquema se revelou bastante robusto e com as mesmas qualidades dos esquemas originais desenvolvidos para escoamentos a baixas velocidades. Esses resultados preliminares indicam que o esquema é bastante promissor.

Para que essa metodologia seja aplicada na solução de problemas reais é necessária a sua extensão para a situação em que o domínio de solução é discretizado com sistemas de coordenadas naturais, isto é, que se ajustam às fronteiras dos corpos. Para assegurar flexibilidade na geração da malha, possibilitando por exemplo o uso de malhas adaptativas, essa extensão não deve ficar restrita ou limitada a sistemas de coordenadas ortogonais. Essa extensão está contemplada num dos objetivos

do presente trabalho, a ser detalhado posteriormente.

Por outro lado, metodologias numéricas em que a discretização do domínio é implementada através do uso de sistemas de coordenadas não ortogonais vem sendo aplicadas a pouco mais de uma década. Uma questão fundamental no desenvolvimento desses métodos é referente a escolha das variáveis dependentes, se são mantidas as componentes cartesianas do vetor velocidade ou adotadas componentes associadas a vetores de base do sistema não ortogonal. Na realidade, a equação da conservação da quantidade de movimento é uma equação vetorial. A escolha entre uma ou outra opção significa escolher componentes diferentes da equação para participar do processo de solução. Na primeira situação as equações diferenciais governantes em coordenadas cartesianas são transformadas, pela aplicação sucessiva da regra da cadeia, de forma que as derivadas em relação ao sistema original sejam substituídas por derivadas em relação às novas coordenadas. Após a transformação, as equações se encontram na forma adequada para o processo de discretização. No segundo caso, as equações diferenciais governantes são originalmente escritas no sistema de coordenadas não ortogonal, já aptas portanto para o processo de discretização. Poucos são os trabalhos em que a opção recai no segundo caso. O motivo principal dessa decisão, se não o único, é a forma bastante complicada [14] que assumem as equações de conservação da quantidade de movimento nas direções dos vetores de base do sistema de coordenadas generalizado.

A escolha das componentes cartesianas como variáveis dependentes apresenta por sua vez algumas dificuldades. Por exemplo, a avaliação do fluxo de massa nas faces dos volumes de controle envolve, no caso bidimensional, as duas componentes do vetor velocidade. Tal situação contrasta com a discretização cartesiana em que apenas uma componente é necessária. Uma consequência importante desse fato é que o arranjo desencontrado de armazenamento das variáveis na malha, normalmente empregado na discretização cartesiana, com a pressão no centro dos volumes e uma velocidade em cada face, não pode em princípio ser adotado nos esquemas generalizados.

Vários arranjos de armazenamento foram desenvolvidos para os esquemas não ortogonais. Todos, de uma forma ou outra, implicam no aumento do número de variáveis armazenadas e na superposição de volumes de controle aos quais é aplicado um mesmo princípio de conservação, sem a contrapartida na qualidade da solução.

Uma metodologia não ortogonal bem sucedida foi desenvolvida por Maliska [15] que manteve o arranjo desencontrado característico da discretização cartesiana porém com duas componentes cartesianas armazenadas em cada face. Cada velocidade é calculada pela equação da quantidade de movimento correspondente possibilitando a avaliação do fluxo de massa. Os resíduos na conservação da massa são então calculados e um novo campo de pressões que corrige as velocidades de forma que a massa seja conservada. Um detalhe importante desse esquema é a forma de corrigir as velocidades cartesianas, já que um mesmo fluxo de massa numa face pode ser obtido a partir de infinitas combinações dessas componentes. O esquema proposto por Maliska foi aplicado com sucesso na solução de diversos problemas de escoamento a baixas velocidades, onde a densidade do fluido foi assumida constante.

Como foi comentado, um dos objetivos do presente trabalho é a extensão da metodologia para qualquer velocidade à discretização não ortogonal. Complementando esse objetivo, um novo esquema não ortogonal que evita a superposição de volumes de controle será testado. Adicionalmente, todas as etapas do processo iterativo de solução serão investigadas em profundidade, especialmente as relativas a alguns processos de média. As soluções produzidas para problemas envolvendo escoamentos bidimensionais e tridimensionais axissimétricos serão comparados com resultados experimentais e os obtidos por outros métodos numéricos.

Por outro lado, é bastante interessante a existência de dois tipos de métodos aparentemente com características tão distintas, como os apresentados no início deste capítulo, para resolver as mesmas equações diferenciais. Essas diferenças basicamente abrangem os seguintes aspectos do processo de solução:

- i) processo de linearização das equações;
- ii) variáveis dependentes;
- iii) processo de discretização das equações; e
- iv) processo de solução de sistemas lineares.

Mais ainda, um deles exige que termos dissipativos sejam artificialmente adicionados às equações diferenciais enquanto o outro aparentemente dispensa essa providência.

Como em geral os pesquisadores em Mecânica dos Fluidos Computacional estão envolvidos com uma ou outra dessas metodologias, muito pouco trabalho tem sido realizado com o objetivo de compará-las, destacando e analisando as diferenças fundamentais, vantagens e

desvantagens, etc. É bastante provável inclusive que ambas as metodologias possam se beneficiar desse trabalho se algumas características positivas de uma metodologia puderem ser estendidas à outra e vice-versa.

Essa tarefa se constitui em outro objetivo desta Tese. Para tanto, um programa computacional baseado no esquema proposto por Beam e Warming [16] [17] será construído e resultados para alguns problemas serão comparados com os obtidos com o esquema numérico desenvolvido no presente trabalho. Fruto da experiência adquirida pelo autor, algumas características de uma metodologia serão estendidas à outra e os novos métodos originados serão testados em alguns problemas bastante simples.

Grande parte do conteúdo deste trabalho já foi publicado em anais de congressos realizados no País e no exterior [18] [19] [20] [21] [22] ou apresentado em eventos de natureza científica na área de aerodinâmica [23] [24]. Recentemente, foi publicado um artigo por Karki e Patankar [25] também com o objetivo do desenvolvimento de um esquema numérico em coordenadas não ortogonais para escoamentos de qualquer velocidade. Esse trabalho no entanto apresenta algumas diferenças fundamentais em relação ao que nos propomos, decorrentes da escolha das componentes covariantes do vetor velocidade como variáveis dependentes nas equações da quantidade de movimento. Karki e Patankar obtiveram as equações para as componentes covariantes de forma realmente bastante simples e direta através da manipulação algébrica das equações já discretizadas para as componentes cartesianas. Esses autores justificam a adoção das componentes covariantes para evitar a superposição de volumes de controle e o aumento no número de variáveis armazenadas que normalmente acompanham a escolha das componentes cartesianas. Não esclarecem no entanto como são calculadas as componentes contravariantes em cada face, necessárias para a avaliação do fluxo de massa, se em cada face só existe uma velocidade covariante armazenada. Se em realidade duas componentes covariantes são calculadas e armazenadas a alegada desvantagem desaparece. Além disso, o campo de pressão calculado através da equação da conservação da massa deve corrigir as velocidades contravariantes ou o fluxo de massa. Também não se encontra suficientemente claro se velocidades contravariantes são armazenadas e nem como através da correção de apenas uma componente contravariante em cada face (apenas uma contribui para o fluxo de massa) são reavaliadas as componentes covariantes ou cartesianas, que aliás também participam do processo de solução.

Com relação ao outro objetivo básico deste trabalho, a

comparação de metodologias, nada foi encontrado na literatura, exceto o trabalho, bastante superficial de Connell e Stow [26].

Por último deve-se mencionar que não se tem neste trabalho a preocupação em resolver um problema específico. Tem-se na verdade a atenção voltada para o desenvolvimento de métodos numéricos. Assim, em todos os casos resolvidos, mesmo aqueles em que a solução foi comparada com resultados experimentais, o escoamento foi considerado laminar ou mesmo invíscido e o fluido se comporta como gás perfeito com propriedades físicas constantes. A inclusão de modelos de turbulência, além de não estar no escopo do presente trabalho, introduziria uma perturbação adicional sem qualquer contrapartida para os objetivos que se pretende atingir.

Organização do presente trabalho. Até o Capítulo 7 a metodologia proposta no presente trabalho é descrita e os resultados obtidos são comparados com outros resultados numéricos e experimentais. Os Capítulos 8, 9 e 10 são então dedicados à comparação de diversos aspectos das metodologias segregada e simultânea. Resumidamente é o seguinte o conteúdo dos capítulos:

Capítulo 2. São expostas as equações diferenciais que modelam os escoamentos em estudo no presente trabalho.

Capítulo 3. As equações diferenciais são transformadas do sistema de coordenadas cartesiano para um sistema curvilíneo generalizado e discretizadas pelo método dos volumes finitos.

Capítulo 4. Trata da linearização das equações discretizadas. Especial ênfase é dada ao tratamento da equação da conservação da massa. O processo de linearização dos fluxos de massa através das faces dos volumes de controle dá origem à formulações adequadas à solução de escoamentos incompressíveis, compressíveis ou para qualquer velocidade. As estruturas iterativas de solução adequadas a cada uma das formulações é discutida.

Capítulo 5. Este capítulo é dedicado ao arranjo dos volumes de controle. Três diferentes arranjos são enfocados. As implicações de cada um deles no processo de solução é analisada.

Capítulo 6. Neste capítulo é exposto o esquema proposto por Beam e Warming [16] [17]. Embora se trate de um esquema bem conhecido pelos pesquisadores vinculados a área de aerodinâmica, optamos por dedicar

um capítulo à sua descrição já que metodologias simultâneas de solução são ainda pouco disseminadas entre os pesquisadores voltados para a solução de escoamentos incompressíveis. Ao longo dessa exposição serão enfatizados os aspectos que contrastam com as metodologias segregadas e especialmente aqueles que serão alvo dos capítulos finais deste trabalho.

Capítulo 7. Este capítulo é dedicado aos resultados. Escoamentos bidimensionais e tridimensionais axissimétricos sobre algumas configurações geométricas serão resolvidas pela metodologia proposta no presente trabalho. Os resultados são analisados, comparados com os resultados obtidos pelo esquema de B&W e com resultados experimentais.

Capítulo 8. Neste capítulo a formulação segregada é escrita em forma delta, isto é, as incógnitas do sistema de equações lineares passam a ser variações temporais das propriedades conservadas. Tal prática, comum nos métodos de solução simultânea, facilita a aplicação do processo de fatoração aproximada dentre outras vantagens. Algumas experiências numéricas interessantes são relatadas entre elas a que demonstra que a estabilidade do processo iterativo de solução não está relacionado à positividade do coeficientes dos sistemas de equações algébricas.

Capítulo 9. O processo de fatoração aproximada aplicado com frequência em conjunção com o esquema de B&W é estendido aos métodos de solução segregada. Suas vantagens e desvantagens são analisadas. Um outro processo de fatoração aproximada é proposto. As consequências do uso destes processos são investigadas em alguns problemas simples.

Capítulo 10. Discute algumas formas de introdução de dissipação artificial e suas consequências. Conclui-se que as diferenças apresentadas pelas soluções obtidas pelo esquema de B&W e pela metodologia proposta no presente trabalho se devem exclusivamente à forma como dissipação artificial é introduzida.

Capítulo 11. É dedicado às conclusões e recomendações para trabalhos futuros.

2 - EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações governantes que modelam os fenômenos físicos em estudo neste trabalho são a equação da conservação da massa, as equações da conservação da quantidade de movimento e a equação da energia. Em forma diferencial cartesiana estas equações podem ser expressas por:

Equação da conservação da massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (2.1)$$

Equações da conservação da quantidade de movimento

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) + \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.2)$$

Equação da energia

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(E_t + P)u_j - \tau_{ij}u_i + q_j] = 0 \quad (2.3)$$

Para que as Eqs.(2.1)-(2.3) possam ser resolvidas é necessário reduzir o número de incógnitas. Isto é conseguido através de leis particulares do fluido também denominadas relações constitutivas. Assim, considerando que o fluido seja newtoniano e admitindo-se a hipótese de Stokes [27], as tensões são relacionadas às velocidades através das expressões

$$\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{V}) \delta_{ij} \quad (2.4)$$

Adicionalmente, o fluxo de calor é relacionado ao campo de temperatura através da lei de Fourier

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.5)$$

Por fim, equações de estado do tipo

$$P = P(\rho, e_i) \quad (2.6)$$

e

$$T = T(\rho, e_i) \quad (2.7)$$

completam a formulação do problema. A energia interna por unidade de massa e_i nas Eqs.(2.6) e (2.7) é relacionada a energia total por unidade de volume através da definição desta última dada por

$$E_t = \rho \left(e_i + \frac{1}{2} u_j u_j \right) \quad (2.8)$$

Se a Eq.(2.4) é substituída no conjunto de equações (2.2), o conjunto de equações resultante é conhecido como equações de Navier-Stokes. No entanto, é comum na literatura dar-se o mesmo nome ao conjunto de equações que engloba também a equação da conservação da massa e a equação da energia.

2.1 - FORMAS SIMPLIFICADAS DAS EQUAÇÕES DE N-S

Se a viscosidade μ na eq.(2.4) é assumida constante, as equações de Navier-Stokes se reduzem a

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) = \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \vec{V}) \quad (2.9)$$

Para alguns escoamentos de líquidos, gases a baixo número de Mach e mesmo em problemas de convecção natural, pode-se assumir que a densidade é constante na equação da conservação da massa. Com esta aproximação o último termo do lado direito da Eq.(2.9) desaparece.

Se os efeitos viscosos são desprezados as equações de Navier-Stokes se reduzem às equações de Euler.

2.2 - FORMAS ALTERNATIVAS DA EQUAÇÃO DA ENERGIA

É comum encontrar-se na literatura a equação da energia tendo como variável dependente a energia total por unidade de massa, a energia interna por unidade de massa, a entalpia por unidade de massa ou ainda a temperatura.

Em trabalhos na área de aerodinâmica é frequente a adoção da energia total por unidade de volume como variável dependente. Nesse caso, a equação da energia assume a forma da Eq.(2.3). Se a temperatura é adotada como variável dependente e assumindo que a condutividade térmica seja constante, a equação da energia assume a forma

$$c_p \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho T) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j T) \right] = k \nabla^2 T + \beta T \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi \quad (2.10)$$

Na Eq.(2.10) β é o coeficiente de expansão térmica definido por

$$\beta \equiv - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P=\text{cte}} \quad (2.11)$$

Φ é a função dissipação como definida em [28] e o símbolo D/Dt indica a derivada substantiva. Para um grande número de problemas envolvendo o escoamento de fluidos não muito viscosos em velocidades moderadas os efeitos da dissipação viscosa podem ser desprezados. É frequente também, para problemas em que a densidade é admitida constante na equação da conservação da massa assumir, na equação da energia, que a pressão no escoamento é constante, o que implica em DP/Dt nulo. Esta aproximação é menos restritiva [29] que assumir na equação da energia que a densidade é constante.

2.3 - ESCOAMENTOS DE GASES PERFEITOS

Assumindo que o fluido se comporte como um gás perfeito com

calor específico constante as Eqs. (2.6), (2.7) e (2.11) se reduzem a

$$P = \rho RT = (\gamma - 1)\rho e_1 \quad (2.12)$$

$$e_1 = c_v T \quad (2.13)$$

$$\beta = 1 / T \quad (2.14)$$

onde γ é a relação entre os calores específicos.

2.4 - EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO EM FORMA GENERALIZADA

Para um fluido com μ , k e c_p constantes, as equações de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \phi) = -P^\phi + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right] + S^\phi \quad (2.15)$$

onde os valores que ϕ , P^ϕ , S^ϕ e Γ^ϕ assumem para os diversos princípios de conservação são dados na Tabela 2.1.

TABELA 2.1 - Valores assumidos por ϕ , P^ϕ , S^ϕ e Γ^ϕ na equação de conservação em forma generalizada.

ϕ	Γ^ϕ	P^ϕ	S^ϕ
1	0	0	0
u_1	μ	$\frac{\partial P}{\partial x_1}$	$\frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla \cdot \vec{V})$
T	k/c_p	0	$\left[\beta T \frac{DP}{Dt} + \mu\phi \right] / c_p$

3 - TRANSFORMAÇÃO E DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

3.1 - INTRODUÇÃO

O processo de discretização das equações diferenciais envolve a integração aproximada dessas equações sobre volumes de controle elementares convenientemente distribuídos sobre a região de solução. Na forma como foram expostas no Cap. 2, as equações diferenciais estão em forma adequada à discretização cartesiana, isto é, quando os volumes de controle são regiões retangulares compreendidas entre duas linhas de x constante e duas linhas de y constante.

No presente trabalho, pretende-se o desenvolvimento de um esquema numérico em que a região de solução seja discretizada através de um sistema de coordenadas curvilíneo ξ - η de forma que as fronteiras da região de solução coincidam com linhas (no caso bidimensional) de ξ ou η constantes. A adoção de tais sistemas de coordenadas tem por finalidade facilitar a aplicação das condições de contorno possibilitando o desenvolvimento de programas computacionais independentes da geometria do escoamento. Além disso, para um mesmo número de volumes, a discretização baseada em sistemas de coordenadas que se ajustam às fronteiras resulta em maior precisão na aplicação das condições de contorno.

Existem diversas técnicas de geração de sistemas de coordenadas. Uma extensa revisão dessas técnicas pode ser vista em [30] e os mais recentes avanços nessa área em [31]. Assumiremos no presente trabalho que a malha é gerada por um processo qualquer e que a região de solução mapeada no novo sistema de coordenadas ξ - η assume a forma retangular.

Embora o uso de sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais simplifique o esquema numérico, a geração de tais sistemas com a desejada concentração de linhas nas regiões de altos gradientes é ainda uma tarefa bastante difícil. Por essa razão, o esquema que nos propomos a desenvolver não sofrerá da desvantagem de ficar limitado à discretização ortogonal.

3.2 - ESCOLHA DAS VARIÁVEIS DEPENDENTES

A primeira questão que surge no desenvolvimento de uma metodologia numérica com discretização não ortogonal é a definição das direções as quais será aplicado o princípio da conservação da quantidade de movimento. Na prática, isso significa definir quais componentes do vetor velocidade serão as variáveis dependentes das equações de conservação da quantidade de movimento. Diversas definições são possíveis. Podem ser escolhidas as componentes cartesianas, as componentes contravariantes ou as componentes covariantes. Como os vetores de base contravariantes e covariantes não são unitários existe ainda a possibilidade da adoção das componentes físicas [32], contravariantes ou covariantes, que resultam quando os vetores de base são normalizados. Parece natural que, já que as equações de conservação serão expressas em um sistema de coordenadas generalizado $\xi-\eta$, o vetor velocidade seja expresso em componentes associadas a vetores de base nesse mesmo sistema de coordenadas. Ocorre no entanto que as equações de conservação da quantidade de movimento na direção dos vetores de base contravariantes ou covariantes assumem um forma muito complexa. São raros os trabalhos que essa opção é exercida e o de Devarayalu [14] serve como exemplo da complexidade das equações. A própria interpretação física dos diversos termos das equações fica prejudicada nessa situação.

Em função das razões acima citadas, neste trabalho o princípio da conservação da quantidade de movimento será aplicado nas direções x e y e as componentes cartesianas u e v do vetor velocidade serão conseqüentemente as variáveis dependentes. Se necessária a obtenção de expressões para outras componentes do vetor velocidade, elas serão obtidas a partir das equações de u e v já discretizadas. Oportunamente outras conseqüências dessa opção serão analisadas.

3.3 - TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações diferenciais apresentadas no Cap. 2 podem ser transformadas para o novo sistema de coordenadas se as derivadas de 1ª e 2ª ordem com a relação a x e y forem substituídas, através da aplicação da regra da cadeia, por derivadas em relação a ξ e η . Ao final desse processo as equações de conservação de um gás perfeito com μ , k e c_p constantes, podem ser postas na forma abaixo [10][33].

Equação da conservação da massa

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V) = 0 \quad (3.1)$$

Equação de conservação da quantidade de movimento na direção x

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V u) = & - \hat{P}^u + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\mu J \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \mu J \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu J \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - \mu J \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] + \hat{S}^u \end{aligned} \quad (3.2)$$

Equação de conservação da quantidade de movimento na direção y

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U v) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V v) = & - \hat{P}^v + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\mu J \alpha \frac{\partial v}{\partial \xi} - \mu J \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu J \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} - \mu J \beta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] + \hat{S}^v \end{aligned} \quad (3.3)$$

Equação da energia

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho T) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U T) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V T) = & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{k}{c_p} J \alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{k}{c_p} J \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{k}{c_p} J \gamma \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{k}{c_p} J \beta \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] + \hat{S}^T \end{aligned} \quad (3.4)$$

As equações acima podem ser ainda expressas na forma

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U\phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V\phi) = - \hat{P}^\phi + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\Gamma^\phi J_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \Gamma^\phi J_\beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\Gamma^\phi J_\gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \Gamma^\phi J_\beta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] + \hat{S}^\phi \quad (3.5)$$

onde as expressões de \hat{P}^ϕ e \hat{S}^ϕ para $\phi = 1, u, v$ ou T são dadas na Tab. 3.1. Nas equações acima α, β, γ são as componentes do tensor métrico definidas por

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \quad \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \quad (3.6)$$

e J é o jacobiano da transformação dado por

$$J = [x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi]^{-1} \quad (3.7)$$

TABELA 3.1 - Expressões para \hat{P}^ϕ e \hat{S}^ϕ .

ϕ	\hat{P}^ϕ	\hat{S}^ϕ
1	0	0
u	$\frac{\partial P}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial P}{\partial \eta} y_\xi$	$\frac{\mu}{3} \left[y_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla \vec{V}) - y_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla \vec{V}) \right]$
v	$\frac{\partial P}{\partial \eta} x_\xi - \frac{\partial P}{\partial \xi} x_\eta$	$\frac{\mu}{3} \left[x_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla \vec{V}) - x_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla \vec{V}) \right]$
T	0	$\left[\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla(P\vec{V}) - P\nabla\vec{V} \right] / (Jc_p)$

Embora todos os resultados apresentados neste trabalho assumam o escoamento de um gás termicamente e caloricamente perfeito, não há nenhuma dificuldade no tratamento com equações de estado mais complexas e com calores específicos variáveis.

As velocidades U e V são definidas por

$$U = uy_{\eta} - vx_{\eta} \qquad V = vx_{\xi} - uy_{\xi} \qquad (3.8)$$

e o divergente do vetor velocidade \vec{V} por

$$\nabla \cdot \vec{V} = J \left[\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \right] \qquad (3.9)$$

Uma útil interpretação geométrica das componentes do tensor métrico pode ser vista em [10]. Deve-se ressaltar que se o sistema ξ - η for ortogonal os valores de β se anulam e os termos envolvendo derivadas cruzadas na Eq. (3.5) se anulam.

A velocidade U é tal que a vazão que atravessa a linha de ξ constante ao longo do comprimento $\Delta\eta$ é dada pelo produto $U\Delta\eta$. Similarmente, a vazão que atravessa uma linha de η constante ao longo do comprimento $\Delta\xi$ é dada por $V\Delta\xi$. Estas velocidades U e V podem ser identificadas como componentes contravariantes físicas do vetor velocidade. As componentes contravariantes são as únicas que permitem que o cálculo da vazão que atravessa uma linha de ξ ou η constante envolva apenas uma das componentes do vetor velocidade. A Eq.(3.1) é portanto a forma mais simples e compacta de escrever a equação da conservação da massa.

3.4 - DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

As equações de conservação são discretizadas através da integração espacial de seus termos em um volume de controle delimitado por duas linhas de ξ constante e duas linhas de η constante como mostra a Fig. 3.1. A Fig. 3.2 mostra o mesmo volume de controle no plano ξ - η . A variável genérica ϕ está armazenada no centro dos volumes de controle. Deve-se ter sempre em mente que as Figs. 3.1 e 3.2 são duas representações do mesmo volume de controle. Por uma razão de comodidade o esquema da Fig. 3.2 será o normalmente adotado no presente trabalho. A Eq.(3.5) após o processo de integração resulta

$$\begin{aligned}
\frac{M_p \phi_p - [M_p \phi_p]^0}{\Delta t} + (\dot{M}\phi)_e - (\dot{M}\phi)_w + (\dot{M}\phi)_n - (\dot{M}\phi)_s &= \left(D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_e + \\
- \left(D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_w + \left(D_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_n - \left(D_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_s &- L[\hat{P}] \Delta \xi \Delta \eta + \\
+ L[\hat{S}^{\phi}] \Delta \xi \Delta \eta &\quad (3.10)
\end{aligned}$$

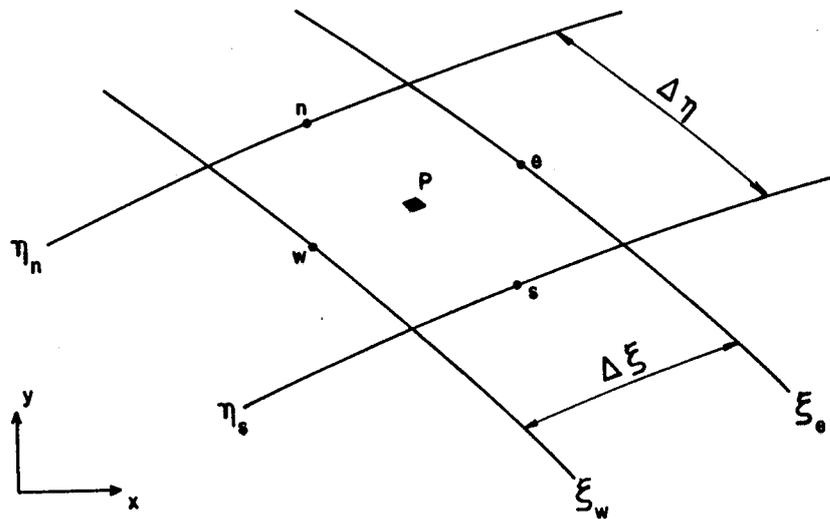


Figura 3.1 - Representação de um volume de controle elementar no plano x-y

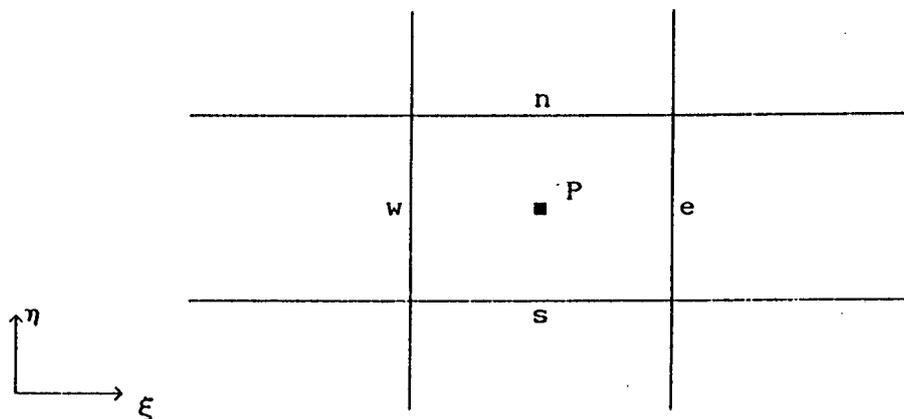


Figura 3.2 - Representação de um volume de controle elementar no plano ξ-η

Nesta equação M_p denota a massa no interior do volume de controle centrado em P, os subscritos e, w, n e s indicam respectivamente as faces este, oeste, norte e sul do volume de controle e \dot{M} indica o fluxo de massa através da face do volume de controle indicada pelo subscrito. O

operador $L[]$ denota uma aproximação numérica do termo no interior dos colchetes e

$$\begin{aligned} D_1 &= (\Gamma^\phi J_\alpha) \Delta \eta \\ D_2 &= (\Gamma^\phi J_\beta) \Delta \eta \\ D_3 &= (\Gamma^\phi J_\gamma) \Delta \xi \\ D_4 &= (\Gamma^\phi J_\beta) \Delta \xi \end{aligned} \quad (3.11)$$

Na obtenção da Eq.(3.10) assumimos que todos os termos são avaliados em $(t+\Delta t)$ e que a derivada temporal é aproximada por

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) = \frac{(\rho\phi) - (\rho\phi)^0}{\Delta t} \quad (3.12)$$

onde o superescrito 0 indica o instante t . Assim, no que concerne ao tratamento do transiente, a presente formulação pode ser qualificada como uma formulação totalmente implícita, de um passo e envolvendo dois níveis de tempo.

A Eq.(3.10) completa o processo de discretização. Como, via de regra, os fluxos de massa dependem do valor de ϕ , a Eq.(3.10) é não linear. Além disso, os valores de ϕ e suas derivadas nas faces dos volumes de controle devem ser avaliados em função dos valores de ϕ nos centros dos volumes de controle que serão as incógnitas dos sistemas de equações lineares. A forma de avaliação desses valores, isto é, a escolha das funções interpolação, tem importância decisiva no desempenho do esquema numérico. O uso de determinado tipo de função de interpolação pode conduzir o processo iterativo de solução à divergência ou produzir campos de variáveis fisicamente irrealísticos. Em outro extremo, algumas funções interpolação favorecem as taxas de convergência e, embora gerem soluções fisicamente aceitáveis, estas também se apresentam excessivamente contaminadas por erros. Essas questões serão abordadas nos Capítulos 4 e 10.

Deve-se notar que se fizermos $\phi = 1$ na Eq.(3.10), obtém-se a forma discretizada da equação da conservação da massa dada por

$$\frac{M_P - M_P^0}{\Delta t} + \dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0 \quad (3.13)$$

onde

$$\begin{aligned}
 \dot{M}_e &= (\rho U)_e \Delta \eta \\
 \dot{M}_w &= (\rho U)_w \Delta \eta \\
 \dot{M}_s &= (\rho V)_s \Delta \xi \\
 \dot{M}_n &= (\rho V)_n \Delta \xi \\
 M_p &= \frac{\rho_p \Delta \xi \Delta \eta}{J_p} \\
 M_p^0 &= \frac{\rho_p^0 \Delta \xi \Delta \eta}{J_p}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

A Eq.(3.13) é também uma equação não linear pois os fluxos de massa dados pela Eq.(3.14) envolvem o produto da densidade pela velocidade em $(t+\Delta t)$, ambas desconhecidas. O processo de linearização dessa equação e o papel que a mesma irá desempenhar no processo global de solução serão discutidos também em uma secção específica deste trabalho.

4 - LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DISCRETIZADAS

4.1 - INTRODUÇÃO

No Capítulo 3 as equações diferenciais governantes apresentadas no Capítulo 2 foram discretizadas. As equações resultantes do processo de integração mantiveram as não linearidades presentes nas equações originais. No presente capítulo será apresentado o processo de linearização das equações da conservação da quantidade de movimento e da energia, processo esse extremamente simples e bem conhecido. Em seguida serão apresentados os diversos procedimentos de linearização da equação da conservação da massa e a consequência de cada um desses procedimentos sobre o processo global de solução.

4.2 - EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO E DA ENERGIA

Na equação discretizada para a variável genérica ϕ , Eq.(3.10), aparece o produto do fluxo de massa \dot{M} pelo valor da variável ϕ nas quatro faces do volume de controle. O fluxo de massa nas faces é dado pela Eq.(3.14) e envolve obviamente a densidade nas faces e uma componente contravariante que por sua vez depende das duas componentes cartesianas. Via de regra todas essas variáveis são desconhecidas. Além disso, os termos $L[\hat{P}^\phi]$ e $L[\hat{S}^\phi]$ envolvem também o campo de pressão, que se relaciona ao campo de temperatura e de densidade através de uma equação de estado.

Estamos lidando, portanto, com dois níveis de dificuldade:

- i) as equações discretizadas são não lineares, e
- ii) as equações são interdependentes.

Uma das características do presente método de solução é o fato de ser um método segregado de solução das equações diferenciais. Isto significa que cada equação discretizada será empregada para o cálculo de uma das variáveis. Assim, a equação da conservação da quantidade de movimento na direção x é empregada para o cálculo da velocidade u , a equação da conservação da quantidade de movimento na direção y é empregada para o cálculo da velocidade v e a temperatura é calculada pela equação da energia. As outras duas incógnitas, a densidade e a pressão, serão calculadas cada uma por uma das outras duas equações que completam a formulação do problema, a equação da conservação da massa e uma equação de estado.

A seguir será apresentada a forma de desacoplar as equações discretizadas que por si só eliminará quase que a totalidade das não linearidades. Posteriormente o processo de linearização das poucas não linearidades restantes será apresentado.

4.2.1 - DESACOPLAMENTO DAS EQUAÇÕES

A equação discretizada de conservação da quantidade de movimento na direção x é desacoplada das outras através do processo extremamente simples que consiste em inicialmente estimar valores para as variáveis ρ , v e P em $(t+\Delta t)$ que aparecem nessa equação. O cálculo subsequente de novos campos da componente v , pressão e densidade permite que esses valores estimados sejam atualizados. O mesmo procedimento é empregado na equação de conservação da quantidade de movimento na direção y e na equação da energia.

Este processo para tratamento do acoplamento envolve portanto um cálculo iterativo do qual participam todas as equações de conservação e a equação de estado.

4.2.2 - TRATAMENTO DAS NÃO LINEARIDADES

Deve-se notar que ao final do processo acima, a maioria das não linearidades já foi eliminada. Note que, como a equação da energia é empregada para o cálculo da temperatura, no processo de desacoplamento são estimados valores para todas as outras variáveis dependentes, isto é, para ρ , P , u e v (e portanto U e V). Logo, a equação da energia não apresenta mais nenhuma não linearidade. Nas equações de conservação da quantidade de movimento as não linearidades estão relacionadas ao fato de o fluxo de massa nas faces do volume de controle envolverem as velocidades contravariantes que por sua vez dependem das próprias velocidades cartesianas através das Eq.(3.8). O processo para linearizar estas equações é idêntico ao empregado no desacoplamento, isto é, os fluxos de massa são calculados com velocidades contravariantes de um nível iterativo anterior.

Na realidade, o processo de solução das equações, o qual será alvo de discussão detalhada posteriormente neste trabalho, não faz distinção entre os processos iterativos devidos ao desacoplamento das equações e à eliminação das não linearidades. É natural que isso aconteça face ao tratamento idêntico dado a ambas a situações.

4.2.3 - AVALIAÇÃO DE ϕ E SUAS DERIVADAS NAS FACES DOS VOLUMES DE CONTROLE

Se a Eq.(3.10) sofre os processos descritos nos itens anteriores, a equação resultante é linear e desacoplada. No entanto, ainda envolve o valor da variável dependente ϕ e os valores das derivadas de ϕ com relação a ξ e a η nas quatro faces do volume de controle. Como as incógnitas dos sistemas de equações algébricas são valores nodais de ϕ , armazenados nos centros dos volumes de controle, os valores de ϕ e suas derivadas nas faces devem ser expressos em função destes.

Considere por exemplo a face este do volume de controle centrado em P da Fig. 4.1. Deve-se expressar ϕ na face este em função dos valores de ϕ nos centros dos volumes vizinhos. Ou, em outras palavras, deve-se escolher uma função para interpolar o valor de ϕ na face este em função dos valores de ϕ vizinhos.

Na realidade, a escolha da função de interpolação é uma decisão de extrema importância. Certos tipos de função de interpolação podem dificultar a convergência do processo iterativo de solução ou mesmo provocar a divergência. Por outro lado, algumas funções de interpolação que promovem a estabilidade do processo iterativo acelerando a convergência podem ser prejudiciais para a qualidade da solução. Há ainda esquemas em que a avaliação dos valores de ϕ nas interfaces é complicada. Nesse caso, deve-se ponderar se o tempo gasto nessa avaliação não seria melhor investido adotando-se uma malha mais refinada.

Sem dúvida, o esquema mais simples para a avaliação de ϕ na face este é assumir que

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad (4.1)$$

correspondente a uma interpolação linear entre ϕ_P e ϕ_E . O mesmo esquema da Eq.(4.1) é um caso particular do esquema mais geral em que ϕ_e é avaliado através de

$$\phi_e = (1/2 + \bar{\alpha}_e) \phi_P + (1/2 - \bar{\alpha}_e) \phi_E \quad (4.2)$$

onde $\bar{\alpha}$ é um parâmetro que pode assumir valores entre -0.5 e +0.5. Para $\bar{\alpha} = 0.0$ a Eq.(4.1) é recuperada. A vantagem da forma apresentada na Eq.(4.2) é que na realidade a mesma pode representar uma série de esquemas de interpolação. O esquema WUDS [34], entre outros, avalia $\bar{\alpha}$ baseado na solução de um problema unidimensional de convecção e difusão. Esquemas mais sofisticados para a avaliação de ϕ_e podem envolver o valor de ϕ em outros volumes além de E e P, mas há um preço a pagar. Imagine por exemplo que o valor de ϕ em EE e W também participem da avaliação de ϕ_e . Nesse caso, a equação discretizada de conservação, após a substituição dos valores de ϕ nas faces este, oeste, norte e sul passará a envolver nove pontos mesmo no caso de uma discretização ortogonal. Como consequência, o sistema de equações lineares a ser resolvido passa a ter uma estrutura matricial com 9 diagonais não nulas contra 5 quando equações do tipo da Eq.(4.2) são aplicadas em todas as faces dos volumes de controle.

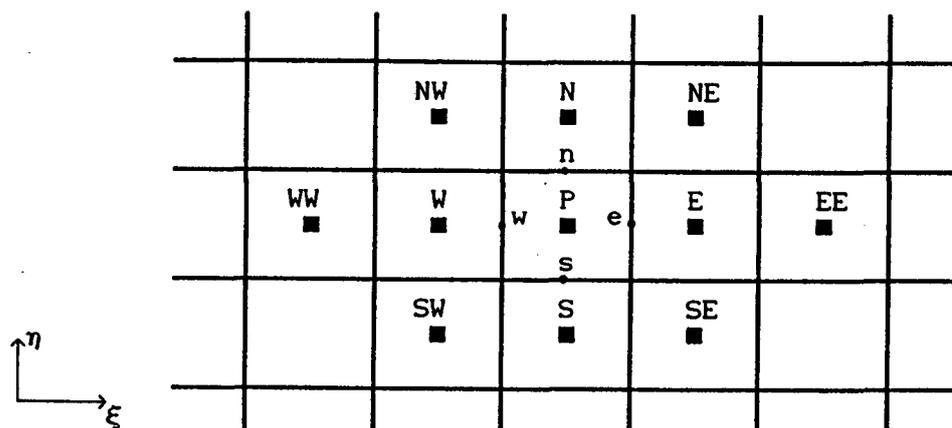


Figura 4.1 - Volume de controle centrado em P e seus vizinhos.

Todos os esquemas de interpolação comentados até o momento são esquemas unidimensionais no sentido de que o valor de ϕ_e é estimado empregando-se apenas valores de ϕ localizados sobre a mesma linha de η constante. Nos esquemas SUDS [36] e SWUDS [36] na avaliação de ϕ_e na Fig. 4.1 podem participar os valores de ϕ nos volumes centrados em S, P, N, NE, E e SE dependendo da orientação do vetor velocidade em relação a malha. Os trabalhos de Raithby [37] [38], os de Patel et. al. [39] [40] e Zurigat et. al. [41] são dedicados a comparação de diversos esquemas de interpolação. Em trabalho recente, Souza e Maliska [42] propõem funções de interpolação que visam satisfazer localmente e de forma aproximada a equação diferencial completa, isto é, todos os termos da equação diferencial, inclusive os termos referentes ao gradiente de pressão, são envolvidos no cálculo do valor da variável ϕ nas interfaces.

Diversas consequências do uso da Eq.(4.2) serão discutidos no Capítulo 10 deste trabalho. É importante no entanto que algumas dessas consequências sejam agora comentadas. Se fizermos $\bar{\alpha} = 0$ em problemas com números de Peclet de malha [1] maiores que dois e processos iterativos forem empregados na solução dos sistemas de equações lineares, esses processos iterativos podem divergir. Mesmo quando se empregam métodos de solução fortemente implícitos como o MSI [35] ou até mesmo métodos diretos não iterativos, a solução pode apresentar oscilações irrealísticas. Esse comportamento deu origem a diversos esquemas de avaliação do valor de ϕ e suas derivadas nas faces dos volumes de controle. Esses esquemas tem via de regra a característica de recuperar o esquema da Eq.(4.1), isto é, produzem $\bar{\alpha} = 0$ para baixos números de Peclet de malha na face e se aproximam do esquema UDS [1], isto é, $|\bar{\alpha}| = 0.5$, conforme o número de

Peclet de malha aumenta.

Ocorre que na realidade são muito raros os problemas que resultem em baixos números de Peclet. Por exemplo, o esquema híbrido apresentado por Patankar [1] produz $\bar{\alpha} = 0$ para números de Peclet menores que dois e $|\bar{\alpha}| = 0.5$ para números de Peclet maiores que dois. Na solução do escoamento supersônico sobre um foguete e com as facilidades computacionais hoje disponíveis dificilmente resultará algum número de Peclet de malha inferior a 1000. Nesse caso, todos os esquemas reproduzem o UDS.

Toda a discussão dos parágrafos anteriores foi dedicada a avaliação do valor da propriedade nas faces dos volumes de controle. As derivadas de ϕ com relação a η e ξ são aproximadas por expressões que, se aplicadas na face este, resultam

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \bar{\beta}_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta \xi} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{\phi_N + \phi_{NE} - \phi_S - \phi_{SE}}{4\Delta \eta} \quad (4.4)$$

O parâmetro $\bar{\beta}$ presente na Eq.(4.3) é igual a unidade para alguns esquemas e assume valores entre zero e a unidade em outros, dependendo do número de Peclet de malha.

4.2.4 - FORMA FINAL DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO E DA ENERGIA

Se expressões do tipo das Eqs.(4.2), (4.3) e (4.4) são aplicadas às quatro faces do volume de controle e substituídas na Eq.(3.10), a equação resultante pode ser posta na forma

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{NB} + b - L [\hat{P}^\phi] \Delta \xi \Delta \eta \quad (4.5)$$

onde

$$\sum (a^\phi)_{nb} = a_e \phi_E + a_w \phi_W + a_n \phi_N + a_s \phi_S + a_{se} \phi_{SE} + a_{sw} \phi_{SW} + a_{ne} \phi_{NE} + a_{nw} \phi_{NW}$$

$$a_e = - \dot{M}_e (1/2 - \bar{\alpha}_e) + (D_1 \bar{\beta})_e / \Delta \xi + (D_{4n} - D_{4s}) / 4 \Delta \xi$$

$$\begin{aligned}
 a_w &= \dot{M}_w (1/2 + \bar{\alpha}_w) + (D_1 \bar{\beta})_w / \Delta \xi + (D_{4s} - D_{4n}) / 4 \Delta \xi \\
 a_n &= -\dot{M}_n (1/2 - \bar{\alpha}_n) + (D_3 \bar{\beta})_n / \Delta \eta + (D_{2e} - D_{2w}) / 4 \Delta \eta \\
 a_s &= \dot{M}_s (1/2 + \bar{\alpha}_s) + (D_3 \bar{\beta})_s / \Delta \eta + (D_{2w} - D_{2e}) / 4 \Delta \eta
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$a_{ne} = D_{2e} / 4 \Delta \eta + D_{4n} / 4 \Delta \xi$$

$$a_{se} = -D_{2e} / 4 \Delta \eta - D_{4s} / 4 \Delta \xi$$

$$a_{sw} = D_{2w} / 4 \Delta \eta + D_{4s} / 4 \Delta \xi$$

$$a_{nw} = -D_{2w} / 4 \Delta \eta - D_{4n} / 4 \Delta \xi$$

e

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + M_p^0 / \Delta t$$

Para um dado campo de ρ , u , v , P podem ser calculados todos os coeficientes e termos fonte da Eq.(4.5). A aplicação da Eq.(4.5) a todos os volumes de controle do domínio de solução com a correta prescrição das condições de contorno dá origem a um sistema de equações lineares que em estrutura matricial possui nove diagonais não nulas. A solução do sistema produz um novo campo da variável ϕ , onde ϕ pode assumir valores de u , v ou T , que satisfaz a equação discretizada da conservação para o dado conjunto de coeficientes e termos fonte. No próximo item será abordado como a equação da conservação da massa e a equação de estado são empregadas para o cálculo da densidade e pressão.

4.3 - EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

A questão agora é a construção de um algoritmo que permita que, a partir da equação discretizada da conservação da massa, repetida abaixo

$$\frac{M_p - M_p^0}{\Delta t} + \dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0 \tag{3.13}$$

e de uma equação de estado, por conveniência escrita na forma

$$P = P(\rho, T) \tag{4.7}$$

sejam calculados campos de pressão e densidade.

A seguir serão apresentados três procedimentos distintos com esse objetivo e analisadas suas limitações. O último dos três será o adotado neste trabalho.

4.3.1 - A FORMULAÇÃO COMPRESSÍVEL

Se a Eq. (3.14) é substituída na Eq. (3.13) a equação discretizada de conservação da massa resulta

$$(\rho_p - \rho_p^0) \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{J_p} + (\rho U)_e \Delta \eta - (\rho U)_w \Delta \eta + (\rho V)_n \Delta \xi - (pV)_s \Delta \xi = 0 \quad (4.8)$$

Note que essa equação é ainda não linear por envolver o produto da densidade pela velocidade em $(t+\Delta t)$.

A Eq. (4.8), após o processo de linearização deverá ser empregada para o cálculo do campo de densidades ou do campo de pressões. Como a pressão não aparece nesta equação a opção óbvia é o uso da Eq. (4.8) para o cálculo do campo de densidades restando a equação de estado para o cálculo da pressão.

Dessa forma, adotando-se o mesmo tipo de procedimento que nas equações da conservação da quantidade de movimento e da energia, a equação da conservação da massa deve ser linearizada fazendo com que as velocidades U e V assumam os últimos valores disponíveis. Nesse caso, e aproximando o valor da densidade nas interfaces por expressões do tipo

$$\rho_e = (1/2 + \bar{\gamma})\rho_P + (1/2 - \bar{\gamma})\rho_E \quad (4.9)$$

a equação da conservação da massa pode ser posta na forma

$$a_P \rho_P = \sum a_{nb} \rho_{NB} + b \quad (4.10)$$

4.3.1.1 - Uma estrutura iterativa para a formulação compressível

Diversas estruturas iterativas podem ser construídas com o objetivo de, através da solução das equações linearizadas, calcular os campos de ρ , u , v , T e P que satisfaçam as equações não lineares.

A estrutura que será aqui apresentada separa em dois níveis iterativos as iterações devidas à linearização da equação da conservação da massa e as iterações devidas às linearizações das outras equações de conservação. Esta separação tem dois objetivos: permitir que a presente formulação seja comparada com outras a serem apresentadas posteriormente e produzir coeficientes das equações de conservação da quantidade de movimento e energia calculados com campos de ρ , u e v que conservem a massa, prática recomendada por beneficiar a convergência do método iterativo de solução.

A estrutura do procedimento iterativo assim construído consiste nos seguintes passos:

a) Conhecidos no instante $t = 0$ os campos iniciais u , v , T , P e ρ são estimados os campos u , v , ρ e T em $t = \Delta t$ (normalmente os campos estimados são os próprios campos iniciais). O campo P é calculado através da equação de estado.

b) Com os campos de u e v disponíveis são calculadas as velocidades contravariantes U e V .

c) Com os campos disponíveis de U , V e ρ são calculados os coeficientes a^u , a^v , e a^T e termos-fonte b^u , b^v e b^T da Eq.(4.5).

d) Com o campo de pressão disponível são calculados os termos $L[\hat{P}^u]$, $L[\hat{P}^v]$ e $L[\hat{P}^T]$.

e) Através da solução da Eq.(4.5) são determinados novos campos de u , v e T .

f) Com os novos campos de u e v são calculadas novas velocidades contravariantes U e V .

g) Com os campos de U e V são calculados os coeficientes da equação linearizada da conservação da massa, Eq.(4.10).

h) A solução da Eq.(4.10) fornece um novo campo de densidade.

O campo de densidade calculado neste item satisfaz a equação linearizada da conservação da massa para os campos de u e v obtidos no item e) com um campo de pressões provavelmente não correto.

i) Através da equação de estado, um novo campo de pressão é calculado com os campos de temperatura e densidade determinados nos itens e) e g).

j) Retorna-se ao item d) e itera-se até a convergência.

Até aqui foram obtidos campos de ρ , u , v , P e T que satisfazem a

equação da conservação da massa e a equação de estado. No entanto, estes campos satisfazem às equações de conservação da quantidade de movimento e da energia para os coeficientes estimados no item c).

k) Retorna-se ao item c) e itera-se até a convergência.

Ao final do item k) têm-se os campos de ρ , u , v , P e T em $t = \Delta t$.

l) Considerando-se os campos obtidos no item k) como campos iniciais volta-se ao item a) e itera-se até quando o regime permanente, se existir, seja alcançado ou até quando for de interesse avançar a solução.

4.3.1.2 - Aplicabilidade da formulação compressível

A principal dificuldade da formulação compressível reside no ciclo iterativo onde é realizada a atualização dos coeficientes da equação da conservação da massa. Na linearização dessa equação as velocidades foram assumidas conhecidas e constantes e portanto a equação da conservação da massa se transformou numa equação para o cálculo da densidade. Isso significa que o campo de densidade calculado pela equação da continuidade deve ser tal que, junto com o campo de velocidades pré-estabelecido, conserve a massa em todos os volumes de controle do domínio. Como provavelmente o campo de velocidades não é o campo correto o campo de densidade gerado também não o é. Posteriormente, esse campo de densidade gera um campo de pressão através da equação de estado que, quando aplicado nas equações de conservação da quantidade de movimento produz novos campos de u e v . Com os novos campos de u e v é calculado um novo campo de densidade e assim por diante. A experiência tem demonstrado que este processo diverge para escoamentos subsônicos a menos que um intervalo de tempo Δt muito pequeno seja adotado e que, quanto menor o número de Mach do escoamento, mais e mais difícil se torna obter a convergência.

Esse comportamento pode ser melhor compreendido através do seguinte raciocínio. Considere um escoamento em que em determinado instante os campos de ρ , u e v não conservam a massa. Embora se trate evidentemente de um escoamento irreal estes campos correspondem aos disponíveis no item e) do processo iterativo. Nós sabemos que os campos de ρ , u e v devem satisfazer a conservação da massa e portanto esses campos devem ser corrigidos se nós desejamos nos aproximar dos campos corretos. Deve-se concordar que quando o número de Mach do escoamento é baixo e portanto o fluido se aproxima do limite incompressível, é mais

'fácil' a conservação da massa ser alcançada através de alterações do campo de velocidades do que através de alterações do campo de densidades. Como o ciclo iterativo força a conservação da massa via alterações de densidade, a formulação não é adequada.

A conclusão de que é falha da formulação compressível se deve à forma de linearização da equação da conservação da massa conduz imediatamente à idéia de se empregar outro procedimento de linearização que permita a solução eficiente de escoamentos com baixo número de Mach. Este será o tema da próxima secção.

4.3.2 - A FORMULAÇÃO INCOMPRESSÍVEL

Na secção 4.3.1 optamos por adotar a equação da conservação da massa para o cálculo da densidade e a equação de estado para o cálculo da pressão. A formulação originada resultou inadequada para o cálculo de escoamentos com baixo número de Mach. Nesta secção será apresentada a formulação resultante da escolha inversa, isto é, a densidade é calculada pela equação de estado e a pressão pela equação de conservação da massa. Embora seja aqui denominada de formulação incompressível deve ficar claro que não se está tratando exclusivamente do escoamento de fluidos incompressíveis, embora desejemos que ela funcione também nesse caso limite.

De forma inversa à formulação compressível, nesta formulação as densidades assumem valores estimados na Eq.(4.8) e se incorporam aos coeficientes da equação linearizada de conservação da massa que, em contraste com a Eq.(4.10), assume agora a forma

$$m_e^u U_e + m_w^u U_w + m_s^v V_s + m_n^v V_n = b^c \quad (4.11)$$

As incógnitas nesta equação são as componentes contravariantes U nas faces este e oeste e V nas faces norte e sul. Precisamos expressar essas velocidades em função do campo de pressões para que a Eq.(4.11) resulte em uma expressão para o cálculo da pressão. Uma forma para se atingir esse objetivo seria substituir as incógnitas em favor de expressões resultantes da aplicação da conservação da quantidade de movimento, No entanto, esse procedimento implica em algumas dificuldades,

que se manifestam mesmo no caso da discretização cartesiana. Admita por simplicidade que esse seja o caso e que portanto as velocidades presentes na Eq.(4.11) sejam as componentes u e v . Ao expressarmos a componente u pela Eq.(4.5) aparecerão termos envolvendo pressões porém aparecerão também diversas velocidades vizinhas a u_e que são desconhecidas. A mesma coisa acontece ao substituirmos expressões para u_w , v_s e v_n . Ao final desse processo teríamos uma expressão envolvendo 5 pontos de pressão e 16 velocidades, todas desconhecidas. Não é difícil concluir que se tentarmos proceder da mesma forma com essas 16 velocidades o processo não será bem sucedido.

Na presente formulação a situação é mais delicada, pois não dispomos de equações da quantidade de movimento para as componentes contravariantes U e V . Sem dúvida, estas equações poderiam ser derivadas a partir de uma combinação das equações para u e v mas é claro que a equação da conservação da massa resultaria ainda mais complicada.

Uma vez que a substituição das velocidades U e V por expressões obtidas diretamente das equações da conservação da quantidade de movimento é impraticável, a estratégia empregada consiste em obter expressões que relacionem as velocidades U e V ao campo de pressões através de aproximações das equações da quantidade de movimento. Devido a essas aproximações, o cálculo de um campo de pressões que gere velocidades, através das equações da quantidade de movimento, que satisfaçam a equação de conservação da massa passa a envolver um processo iterativo. Esse tópico será discutido na próxima secção.

4.3.2.1 - Expressão de U e V em função de P

Assuma que o campo u^* seja o campo gerado por um campo de pressões P^* através da equação linearizada de conservação da quantidade de movimento na direção x , Eq.(4.5) para ϕ igual a u , e que o campo u seja gerado por um campo P . Portanto, para um volume de controle hipotético centrado na face este do volume de controle da continuidade podemos escrever que

$$a_p u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b^u - L[\hat{P}^* u] \Delta \xi \Delta \eta \quad (4.12)$$

$$a_p u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b^u - L[\hat{P}^u] \Delta \xi \Delta \eta \quad (4.13)$$

Subtraindo-se a Eq. (4.12) da Eq. (4.13) obtém-se que

$$u_e = u_e^* + \frac{1}{a_p} \left[\sum (a^u u')_{nb} - L[\hat{P}^u] \Delta \xi \Delta \eta \right] \quad (4.14)$$

onde

$$u' = u - u^* \quad (4.15)$$

e

$$P' = P - P^* \quad (4.16)$$

O próximo passo é crucial para o objetivo que se pretende atingir. Consiste em aproximar a Eq. (4.14) de forma que a velocidade u_e fique relacionada apenas às derivadas locais do campo de pressão. A expressão aproximada assume a forma

$$u_e = u_e^* - \bar{d}_e^u L[\hat{P}^u]_e \Delta \xi \quad (4.17)$$

A Eq. (4.17), uma aproximação da equação linearizada da conservação da quantidade de movimento, quantifica a resposta da velocidade u_e a uma variação do gradiente local de pressão na direção x .

Imagine agora que o princípio da conservação da quantidade de movimento na direção y seja aplicado ao mesmo volume de controle. Como o coeficiente de difusão é o mesmo, todos os coeficientes da equação linearizada da conservação da quantidade de movimento serão os mesmos e um raciocínio análogo ao anterior conduz a

$$v_e = v_e^* - \bar{d}_e^v L[\hat{P}^v]_e \Delta \xi \quad (4.18)$$

Se a Eq. (4.17) é multiplicada por y_η , a Eq. (4.18) por x_η e a segunda é subtraída da primeira obtém-se que

$$U_e = U_e^* - \bar{d}_e^u \left[L[\hat{P}^u]_{y_\eta} - L[\hat{P}^v]_{x_\eta} \right]_e \Delta \xi \quad (4.19)$$

e, aplicando-se as definições de \hat{P}^u e \hat{P}^v da Tab. 3.1 a Eq. (4.19) resulta

$$U_e = U_e^* - \bar{d}_e^u \left\{ \alpha L \left[\frac{\partial P'}{\partial \xi} \right] - \beta L \left[\frac{\partial P'}{\partial \eta} \right] \right\} \Delta \xi \quad (4.20)$$

A Eq.(4.20) quantifica a resposta da velocidade U a uma variação local no campo de pressões. A forma final desta equação depende ainda da avaliação de $L[\partial P'/\partial \xi]$ e $L[\partial P'/\partial \eta]$ que por sua vez depende da posição relativa na malha entre os volumes de controle aos quais será aplicada a conservação da massa e os volumes de controle aos quais será aplicada a conservação da quantidade de movimento nas direções x e y .

Para um volume de controle hipotético centrado na face w do volume de controle para a continuidade obtém-se, analogamente que

$$U_w = U_w^* - \bar{d}_w^u \left\{ \alpha L \left[\frac{\partial P'}{\partial \xi} \right] - \beta L \left[\frac{\partial P'}{\partial \eta} \right] \right\} \Delta \xi \quad (4.21)$$

Se procedimentos análogos são aplicados para volumes de controle centrados nas faces norte e sul do volume de controle da continuidade são obtidas as expressões

$$V_n = V_n^* - \bar{d}_n^v \left\{ \gamma L \left[\frac{\partial P'}{\partial \eta} \right] - \beta L \left[\frac{\partial P'}{\partial \xi} \right] \right\} \Delta \eta \quad (4.22)$$

e

$$V_s = V_s^* - \bar{d}_s^v \left\{ \gamma L \left[\frac{\partial P'}{\partial \eta} \right] - \beta L \left[\frac{\partial P'}{\partial \xi} \right] \right\} \Delta \eta \quad (4.23)$$

4.3.2.2 - Forma Final da Equação para a Pressão

Considere, com relação à nomenclatura empregada no item anterior, que o campo de pressões P^* seja uma estimativa do campo de pressões em $(t+\Delta t)$. Com o campo P^* são geradas, através das equações de conservação da quantidade de movimento, as velocidades cartesianas u^* e v^* que estão associadas às componentes contravariantes U^* e V^* que provavelmente não satisfazem a equação linearizada da conservação da massa, Eq.(4.11). As Eqs.(4.20) a (4.23) expressam, através de aproximações das equações da conservação da quantidade de movimento, como as velocidades U^* e V^* respondem a variações no campo de pressões. A equação para a pressão é obtida forçando-se que as velocidades U e V dadas pelas Eqs.(4.20) a (4.23) conservem a massa. Assim, se estas equações são

então substituídas na Eq.(4.11), a equação resultante assume a forma

$$a_P P'_P = \sum a_{nb} P'_{NB} + b^{P'} \quad (4.24)$$

A solução desse sistema de equações gera uma correção P' no campo de pressões P^* . O novo campo P é calculado pela Eq.(4.16). No entanto, se este campo P é aplicado nas equações da quantidade de movimento, provavelmente o novo campo de velocidades gerado ainda não irá satisfazer a conservação da massa em virtude das aproximações envolvidas na obtenção da equação para o cálculo da correção P' . O processo de cálculo da pressão envolve portanto um procedimento iterativo inexistente na formulação compressível.

O termo independente na Eq.(4.24) representa o residuo ou erro na conservação da massa no volume de controle. Quando esse erro se anula significa que o campo de pressões gera velocidades que conservam a massa e conseqüentemente a correção P' se anula também. Assim, se o processo iterativo convergir, convergirá para o campo de pressões correto, independentemente das aproximações envolvidas na Eq.(4.17) e similares.

O problema de calcular o campo de pressões através da equação de conservação da massa é comumente denominado de problema do acoplamento pressão-velocidade. Os métodos SIMPLE [12], SIMPLEC [43] e SIMPLEX [44] para tratamento deste acoplamento diferem entre si apenas na forma de avaliação dos termos \bar{d}^u e \bar{d}^v . O método PS3 [45] impõe uma subrelaxação sobre o campo P' antes do cálculo do novo campo de pressões através da Eq.4.16. No método SIMPLER [46] um campo de pressão P é calculado exatamente como no SIMPLE mas este campo é usado apenas para corrigir as velocidades de forma que a massa seja conservada. Um outro sistema de equações é resolvido para o cálculo do campo de pressões.

Outros métodos para tratamento do acoplamento pressão-velocidade, como o PRIME [10] e SUMMIT [13] não se enquadram no procedimento descrito nesta secção. No método PRIME as velocidades na equação da conservação da massa são substituídas pelas respectivas equações da quantidade de movimento, sem nenhuma aproximação, porém com todos os termos dessas expressões avaliados explicitamente com excessão dos termos de pressão. Assim, a equação da conservação da massa resulta também num sistema de equações lineares para o cálculo do campo de pressões. O trabalho de França [47] compara o desempenho dos métodos SIMPLE, SIMPLEC e PRIME para diversos problemas incompressíveis envolvendo

discretização não ortogonal. O desempenho do método CELS [48], em que as equações de conservação da quantidade de movimento e da conservação da massa são resolvidas de forma acoplada ao longo de linhas e colunas, também é investigado em [47].

Todos os métodos para tratamento do acoplamento pressão-velocidade acima citados implicam em um procedimento iterativo. Esse procedimento iterativo poderia ser evitado através da solução simultânea das equações de conservação da quantidade de movimento e da conservação da massa. Esse processo é no entanto inviabilizado face a estrutura e ao tamanho do sistema de equações lineares originado. Zedan e Schneider propõem em uma série de trabalhos [49] [50] [51] [52] o método DSVS, também direto, de solução de uma forma reduzida desse sistema de equações; o método AESVS, uma aproximação da solução simultânea, e o método CSIP que visa basicamente a eliminação dos elementos nulos existentes na diagonal principal da matriz de coeficientes, originados face a inexistência de termos de pressão na equação da continuidade.

4.3.2.3 - Uma estrutura iterativa para a formulação incompressível

Diversas estruturas podem ser construídas envolvendo os ciclos iterativos devidos ao transiente, à não linearidade e ao acoplamento entre as equações. A estrutura proposta a seguir está em forma bastante detalhada e provavelmente abrange a maioria das estruturas iterativas associadas à formulação incompressível. Algumas das etapas da estrutura abaixo dependem do arranjo de volumes de controle e a elas nos referiremos no próximo capítulo quando esse assunto será abordado.

a) Conhecidos no instante $t = 0$ os campos iniciais u , v , T , P e ρ são estimados os campos u , v , P e T em $t = \Delta t$ (normalmente, os campos estimados são os próprios campos iniciais). O campo de densidade é calculado através da equação de estado.

b) Com os campos de u e v disponíveis são calculados as velocidades contravariantes U e V .

c) Com os campos disponíveis de U , V e ρ são calculados os coeficientes a^u , a^v e a^T e os termos fonte b^u e b^v da Eq.(4.5).

d) São calculados os campos \bar{d}^u e \bar{d}^v através de aproximações das equações linearizadas de conservação da quantidade de movimento.

e) São calculados os coeficientes da equação para a pressão, Eq.(4.24).

f) Fazendo-se P^* igual ao campo de pressões disponível são

calculados os termos $L[\hat{P}^*u]$ e $L[\hat{P}^*v]$.

g) Através da solução da Eq.(4.5) são determinados os campos u^* e v^* associados ao campo de pressões P^* .

h) Com os campos u^* e v^* são calculadas as velocidades contravariantes U^* e V^* .

i) Com os campos de U^* e V^* e o campo de densidade disponível são calculados os resíduos da equação linearizada de conservação da massa, Eq.(4.24). Se os resíduos satisfazem a algum critério pré-estabelecido, significa que o campo de pressões P^* é o campo correto, isto é, gera velocidades através das equações de conservação da quantidade de movimento que conservam a massa para o campo de densidade disponível. Nesse caso, o processo passa ao item l).

j) Com os coeficientes da equação para a pressão calculados no item e) e os resíduos de massa calculados no item anterior é calculada a correção no campo de pressões P' através da solução da Eq.(4.24). Um novo campo de pressões é calculado através da Eq.(4.16).

k) Retorna-se ao item f).

l) Até aqui o campo de velocidades conserva a massa para um campo de densidades calculado com um campo de temperatura estimado.

O termo fonte b^T da equação da energia é calculado e um novo campo de temperatura é obtido através da solução da Eq.(4.5) para $\phi = T$.

m) Com o novo campo de temperaturas e o campo de pressões disponível é calculado um novo campo de densidade através da equação de estado. Como os coeficientes da equação de conservação da massa dependem da densidade, retorna-se ao item e) e itera-se até a convergência.

Até aqui foram obtidos os campos de ρ , u , v , P e T que satisfazem a equação da conservação da massa e a equação de estado. No entanto estes campos satisfazem as equações de conservação da quantidade de movimento e da energia para os coeficientes estimados calculados no item c).

n) Retorna-se ao item c) e itera-se até a convergência. Ao final deste item têm-se os campos de ρ , u , v , P e T em $t = \Delta t$.

o) Considerando-se os campos obtidos no item n) como campos iniciais volta-se ao item a) e itera-se até quando o regime permanente, se existir, seja alcançado ou até quando for de interesse avançar a solução.

4.3.2.4 - Aplicabilidade da formulação incompressível

A formulação incompressível tem sido exaustivamente aplicada na

solução de escoamentos em que a densidade do fluido é assumida constante ou uma função apenas da temperatura.

No caso de líquidos essa não é uma hipótese muito restritiva. No escoamento de gases só é possível se desprezar a influência da pressão na densidade se as variações de pressão ao longo do escoamento forem muito pequenas em relação ao nível de pressões reinantes. Pode ser demonstrado que essa variação de pressão é proporcional ao quadrado do número de Mach e portanto não devemos nos sentir encorajados a aplicar a hipótese de que $\rho = \rho(T)$ para escoamentos com Mach muito superior a 0.1.

Não há no entanto na formulação incompressível, na forma como foi apresentada, qualquer motivo para que essa hipótese tenha que ser assumida. No item m) do processo iterativo a densidade é corretamente afetada pelo campo de pressão através da equação de estado. Pode-se concluir, portanto, que a formulação incompressível tem capacidade de resolver escoamentos com qualquer número de Mach ? A resposta, infelizmente, é não.

A falha da formulação incompressível também está situada na forma de linearização da equação da conservação da massa. Nessa linearização as densidades assumem valores constantes e conhecidos de um nível iterativo anterior e se incorporam aos coeficientes. Assim, a conservação da massa é atingida através de alterações, ou correções, dos campos de velocidade. Como as correções do campo de velocidades estão relacionadas às correções no campo de pressão através de expressões do tipo da Eq. (4.19) pode-se concluir que o papel da pressão, toda vez que a equação da continuidade é aplicada, é gerar, através das equações linearizadas de conservação da quantidade de movimento, um campo de velocidades que conserva a massa. A equação da conservação da massa funciona portanto como uma equação de restrição sobre os campos de u e v que é satisfeita iterativamente.

Van Doormaal [13] no entanto demonstra através da manipulação das equações da continuidade, da conservação da quantidade de movimento e de estado para um escoamento unidimensional com alto número de Mach que a pressão é muito mais efetiva, ou ativa, atuando no campo de densidade através da equação de estado do que atuando no campo de velocidades através das equações da quantidade de movimento. É fato conhecido também que em escoamentos hipersônicos as variações no campo de velocidades são muito menores que as variações no campo de densidade, exatamente o oposto do que ocorre próximo ao limite incompressível. Consequentemente, para

escoamentos com alto número de Mach, seria fisicamente mais realista forçar a conservação da massa através de correções no campo de densidade, como é feito na formulação compressível. Ou, sob outro ponto de vista, a pressão desempenharia seu correto papel se atuasse na equação de estado gerando campos de densidade que conservam a massa ao invés de atuar nas equações da quantidade de movimento gerando campos de velocidade que conservam a massa. Como resultado, a formulação incompressível falha quando aplicada à solução de escoamentos com alto número de Mach.

4.3.3 - UMA FORMULAÇÃO PARA QUALQUER REGIME DE ESCOAMENTO

Considere novamente o processo de avaliação do fluxo de massa através das faces dos volumes de controle para continuidade. O fluxo de massa através da face este, por exemplo, é dado pela expressão

$$\dot{M}_e = (\rho U)_e A \eta \quad (4.25)$$

claramente não linear por envolver o produto da densidade pela velocidade contravariante U na face este, em $(t+\Delta t)$, ambas portanto desconhecidas.

Na formulação compressível optamos por linearizar a equação da conservação da massa assumindo que a velocidade na face este e todas as demais velocidades presentes na Eq.(4.8) assumiam valores conhecidos de um nível iterativo anterior. Assim, a equação da conservação da massa resultou numa equação para o cálculo da densidade. A formulação resultou inadequada à solução de escoamentos a baixas velocidades pois a conservação da massa é atingida unicamente via alterações no campo de densidades, o que não é fisicamente realístico quando o número de Mach é próximo de zero. Para agravar a situação, esse campo de densidades é aplicado numa equação de estado para produzir um novo campo de pressões. A realimentação do ciclo iterativo com estas novas pressões contribui para a divergência do processo.

Na formulação incompressível a equação da conservação da massa foi linearizada assumindo-se que a densidade na face este e todas as demais densidades presentes na Eq.(4.8) assumiam valores conhecidos de uma iteração anterior. Com as velocidades relacionadas ao campo de pressões através de equações aproximadas, a equação da conservação da massa se

transformou numa equação para o cálculo da pressão. Assim, o papel da pressão nessa formulação pode ser interpretado como gerar velocidades, através das equações de conservação da quantidade de movimento, que conservem a massa. No entanto como já comentado, para escoamentos com elevado número de Mach a pressão seria muito mais efetiva na produção de campos de densidade, via equação de estado, que satisfizessem a restrição da conservação da massa.

Assim, parece claro que a aplicabilidade das formulações está intimamente relacionada ao processo de linearização da equação da conservação da massa. Mais ainda, se se pretende o desenvolvimento de uma formulação adequada a qualquer regime de escoamento, a pressão não deve ser calculada por uma equação de estado.

Alguns trabalhos, como os de Harlow e Amsdem [7], Issa e Lockwood [8] e Van Doormaal [13], já comentados na introdução deste trabalho, apresentam metodologias para a solução de escoamentos a qualquer velocidade. Os esquemas numéricos propostos por esses autores não diferem muito entre si, exceto o de Harlow e Amsdem por envolver alguns procedimentos explícitos na solução das equações diferenciais. Essas metodologias, especialmente na forma apresentada por Van Doormaal [13], estendida para uma formulação não ortogonal, implicam em linearizar o fluxo de massa na forma

$$\dot{M}_e = (\rho^* U)_e \Delta\eta + (\rho U^*)_e \Delta\eta - (\rho^* U^*)_e \Delta\eta \quad (4.26)$$

onde a face este foi tomada como exemplo e as variáveis com o superíndice * assumem valores conhecidos de um nível iterativo anterior. A forma de linearização do termo \dot{M}_e antecipa que a conservação da massa será forçada através de correções tanto no campo de velocidades como no campo de densidades.

A mesma Eq.(4.26) pode ser obtida através do seguinte raciocínio. Os campos de ρ e U podem ser associados aos campos da iteração anterior através das expressões

$$\rho = \rho^* + \rho' \quad (4.27)$$

e

$$U = U^* + U' \quad (4.28)$$

onde ρ' e U' são correções a serem impostas aos campos de ρ e U de forma

que estes passem a satisfazer a equação da conservação da massa. Se as Eqs.(4.27) e (4.28) são substituídas na Eq.(4.25) a expressão para \dot{M}_e assume a forma

$$\dot{M}_e = (\rho^* + \rho')_e (U^* + U')_e \Delta\eta \quad (4.29)$$

Se desprezarmos o produto das correções obtemos que

$$\dot{M}_e = (\rho' U^*)_e \Delta\eta + (\rho^* U')_e \Delta\eta + (\rho^* U^*)_e \Delta\eta \quad (4.30)$$

Se ρ'_e e U'_e explicitados nas Eqs.(4.27) e (4.28) são substituídos na Eq.(4.30) resulta a Eq.(4.26). Se expressões análogas a Eq.(4.26) são substituídas na equação de conservação da massa, Eq.(3.13), e as densidades ρ e ρ^* nas interfaces avaliadas por expressões do tipo da Eq.(4.9), a equação discretizada e linearizada de conservação da massa resulta agora

$$m_p^\rho \rho_P + m_e^\rho \rho_E + m_w^\rho \rho_W + m_n^\rho \rho_N + m_s^\rho \rho_S + m_e^U U_e + m_w^U U_w + m_n^V V_n + m_s^V V_s = b^C \quad (4.31)$$

Expressões para os coeficientes m^ρ , m^U e m^V e para o termo fonte podem ser vistas em [33]. A Eq.(4.31) deve ser transformada numa equação para o cálculo da pressão. As velocidades U_e , U_w , V_n e V_s podem ser relacionadas à correção P' do campo de pressão através das mesmas expressões deduzidas para a formulação incompressível, Eqs.(4.20) a (4.23). No entanto, agora também as densidades ρ_P , ρ_E , ρ_W , ρ_N e ρ_S devem ser expressas em função de P .

4.3.3.1 - Expressão de ρ em função de P

Na formulação incompressível, para que a equação de conservação da massa se transformasse numa equação para o cálculo da pressão as velocidades presentes na Eq.(4.11) foram expressas em função do gradiente local de pressões através de aproximações das equações linearizadas de conservação da quantidade de movimento. Para que a densidade seja expressa em função do campo de pressões, a equação de estado deve ser linearizada na forma

$$\rho = C^{\rho}P + b^{\rho} \quad (4.32)$$

Assim, admita que o mesmo campo de pressões P^* que gera u^* e v^* através das equações linearizadas da quantidade de movimento gere o campo ρ^* através da equação de estado linearizada, isto é, para o volume centrado em P

$$\rho_P^* = C_P^{\rho} P_P^* + b_P^{\rho} \quad (4.33)$$

Para um campo de pressões P a densidade resulta

$$\rho_P = C_P^{\rho} P_P + b_P^{\rho} \quad (4.34)$$

Subtraindo-se a Eq.(4.33) da Eq.(4.34) obtém-se que

$$\rho_P = \rho_P^* + C_P^{\rho} P_P' \quad (4.35)$$

Expressões análogas podem ser prontamente obtidas para as outras densidades presentes na Eq.(4.31). A equação para o cálculo da correção P' é obtida forçando-se que as velocidades, dadas pelas Eqs.(4.20) a (4.23), e as densidades, dadas pela Eq.(4.35) e suas análogas, satisfaçam conjuntamente a equação linearizada da conservação da massa, Eq.(4.31). A equação para pressão assume então a forma

$$a_P P' = \sum_{nb} a_{nb} P_{NB}' + b^{P'} \quad (4.36)$$

Algumas características importantes desta formulação devem ser destacadas. Para um gás perfeito, o coeficiente C^{ρ} e o termo b^{ρ} da equação de estado linearizada resultam

$$C^{\rho} = 1 / RT \quad ; \quad b^{\rho} = 0 \quad (4.37)$$

Se por outro lado fazemos $C^{\rho} = 0$, a formulação para qualquer regime de escoamento se reduz exatamente à formulação incompressível. Deve-se enfatizar que isso não significa que a densidade não varia; ela pode

variar e nesse caso é corretamente calculada pela equação de estado como indica o item m) do processo iterativo do secção 4.3.2.3. Fazer $C^p = 0$ significa que a pressão, no ciclo iterativo referente a conservação da massa, atuará apenas sobre as velocidades, isto é, a conservação da massa é atingida apenas através de correções no campo de velocidades.

4.3.3.2 - Uma estrutura iterativa para a formulação para qualquer regime de velocidade

A estrutura iterativa apresentada a seguir é bastante semelhante àquela da formulação incompressível. As mesmas observações iniciais feitas na secção 4.3.2.3 são válidas para a formulação para qualquer regime de velocidade.

a) Conhecidos no instante $t = 0$ os campos iniciais u , v , T , P e ρ são estimados os campos u , v , P e T em $t = \Delta t$ (normalmente os campos estimados são os próprios campos iniciais). O campo de densidades é calculado através da equação de estado.

b) Com os campos de u e v disponíveis são calculadas as componentes contravariantes U e V .

c) Com os campos disponíveis de U , V e ρ são calculados os coeficientes a^u , a^v e a^T e termos fonte b^u e b^v da Eq.(4.5).

d) São calculados os campos \bar{d}^u e \bar{d}^v através de aproximações das equações linearizadas de conservação da quantidade de movimento.

e) São calculados os coeficientes da equação para a pressão, Eq.(4.36).

f) Fazendo-se P^* igual ao campo de pressões disponível são calculados os termos $L[P^u]$ e $L[P^v]$.

g) Através da solução da Eq.(4.5) são determinados os campos de u^* e v^* associados aos campos de pressão P^* .

h) Com os campos de u^* e v^* são calculadas as velocidades contravariantes U^* e V^* .

i) Com os campos de U^* e V^* e o campo de densidades disponível são calculados os resíduos da equação linearizada da conservação da massa, Eq.(4.10). Se os resíduos satisfazem a algum critério pré-estabelecido, significa que o campo de pressões P^* é o campo correto, isto é, gera velocidades através das equações de conservação da quantidade de movimento que conservam a massa para o campo de densidades disponível. Nesse caso, o processo passa ao item l).

j) Com os coeficientes da equação para a pressão calculados no

item e) e os resíduos de massa calculados no item anterior é calculada a correção no campo de pressões P' através da solução da Eq.(4.36). Um novo campo de pressões é calculado através da Eq.(4.16).

k) Retorna-se ao item f).

Até aqui o campo de velocidades conserva a massa para um campo de densidades calculado com um campo de temperatura estimado.

l) O termo fonte b^T da equação da energia é calculado e um novo campo de temperatura é obtido através da solução da Eq.(4.5) para $\phi = T$.

m) Com o novo campo de temperaturas e o campo de pressões disponível é calculado um novo campo de densidades através da equação de estado. Como os coeficientes da equação de conservação da massa dependem da densidade, retorna-se ao item e) e itera-se até a convergência.

Até aqui foram obtidos campos de ρ , u , v , P e T que satisfazem a equação de conservação da massa e a equação de estado. No entanto estes campos satisfazem as equações de conservação da quantidade de movimento e da energia para os coeficientes estimados e calculados no item c).

n) Retorna-se ao item c) e itera-se até a convergência.

Ao final do item n) têm-se os campos de p , u , v , T e P em $t = \Delta t$.

o) Considerando-se os campos obtidos no item n) como campos iniciais volta-se ao item a) e itera-se até quando o regime permanente, se existir, seja alcançado ou até quando for de interesse avançar a solução.

4.4 - RESUMO DO CAPÍTULO

O presente capítulo abordou a linearização das equações discretizadas. Especial ênfase foi dedicada a linearização da equação da conservação da massa. Foram apresentados três procedimentos de linearização correspondentes às formulações compressível, incompressível e para qualquer regime de velocidade. Na primeira delas a densidade é calculada pela equação de conservação da massa e conseqüentemente a pressão pela equação de estado. A formulação resulta inadequada para a simulação de escoamentos a baixas velocidades. Na formulação incompressível a pressão é calculada pela equação de conservação da massa. Como a pressão não aparece explicitamente nessa equação, um campo estimado de pressão é sucessivamente corrigido até que o erro na conservação da massa em cada volume de controle atenda a algum critério pré-estabelecido.

Para a construção da equação para o "avanço" da pressão são empregadas formas simplificadas das equações da quantidade de movimento. A formulação para qualquer regime de escoamento difere da formulação compressível pelo fato de que as densidades são mantidas "ativas" na equação de conservação da massa, isto é, também são afetadas pelo campo de pressões através da equação de estado linearizada.

Procedimentos iterativos completos para a solução de um problema transiente foram apresentadas para as três formulações. Aspectos extremamente importantes referentes a esses procedimentos são dependentes do arranjo relativo entre os volumes de controle aos quais serão aplicados os princípios de conservação. A análise destes aspectos será alvo do próximo capítulo.

5 - ARRANJO DOS VOLUMES DE CONTROLE

5.1 - INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores assumimos que nos volumes de controle aos quais são aplicados os princípios da conservação da massa e da energia são coincidentes e que nos centros desses volumes de controle estão armazenadas as variáveis ρ , P e T . Nada foi especificado com relação aos volumes de controle aos quais é aplicado o princípio da conservação da quantidade de movimento embora tenhamos diversas vezes mencionado que aspectos relevantes do esquema numérico dependem dessa decisão. Tal estratégia foi adotada visando conferir generalidade às equações discretizadas e linearizadas nos Caps. 3 e 4.

No âmbito da discretização cartesiana, o arranjo desconstruído de volumes de controle, proposto por Harlow e Welch [9] há mais de vinte anos, vem sendo largamente empregado desde então. Por outro lado, com discretização curvilínea e mantendo-se as componentes cartesianas do vetor velocidade como variáveis dependentes, muitos outros arranjos podem ser concebidos e empregados [53] [54]. Tais arranjos são motivados pela necessidade, inexistente na discretização cartesiana, das duas componentes cartesianas do vetor velocidade (para o caso bidimensional) para a avaliação do fluxo de massa nas faces dos volumes de controle.

Partindo-se da premissa do uso de malhas estruturadas, um dos pré-requisitos para os arranjos de volumes de controle recomendados no presente trabalho é o de gerar um método de solução que, aplicado a uma

malha cartesiana, reproduza exatamente as metodologias originalmente desenvolvidas para discretização cartesiana. Diversos dos arranjos analisados em [10] não atendem a esse pré-requisito. Maliska e Raithby [15] propõem um arranjo que satisfaz a essa restrição e esse arranjo será aqui abordado e denominado de arranjo número 1. Um outro arranjo, que apresenta algumas vantagens e algumas desvantagens quando comparado ao proposto em [15], será proposto e denominado de número 2. As consequências desses esquemas de armazenamento nos processos iterativos de solução apresentados no capítulo anterior serão também analisadas em profundidade. Por último, o arranjo de volumes de controle co-localizado, isto é, em que todos os volumes de controle são coincidentes e portanto todas as variáveis estão armazenadas no mesmo ponto é também analisado. Este arranjo é especialmente interessante para o caso da discretização não ortogonal por permitir a imediata avaliação das componentes contravariantes. Ocorre que por motivos que mais adiante serão discutidos, o arranjo co-localizado permaneceu durante muito tempo esquecido pelos autores que trabalham com a solução segregada das equações governantes. Apenas recentemente, com o trabalho de Peric et. al. [55], o arranjo co-localizado, aplicado à discretização cartesiana foi reabilitado originando um grande interesse entre os pesquisadores da área. É importante lembrar que no contexto dos métodos dos volumes finitos já em 1981 Rhie [56] e Hsu [57] destacavam a importância do emprego de variáveis co-localizadas aos métodos de solução segregada. Infelizmente, estes trabalhos não receberam a atenção devida na época. Recentemente, outros trabalhos foram desenvolvidos estendendo o esquema proposto por Peric et. al. [55] à discretização não ortogonal. Nos trabalhos de Marchi et. al. [58], Marchi et. al. [59] e Bortoli [60] o esquema para qualquer regime de velocidade, proposto no presente trabalho, foi implementado em variáveis co-localizadas apresentando bons resultados. Em função das vantagens apresentadas pelo arranjo co-localizado, que se acentuam quando da extensão da formulação para a solução de problemas tridimensionais, esse arranjo será também aqui analisado.

5.2 - ARRANJO DE VOLUMES DE CONTROLE NÚMERO 1

A Fig. 5.1 mostra, no plano (ξ, η) o arranjo de volumes de controle proposto por Maliska e Raithby [15] na solução de problemas

bidimensionais incompressíveis em coordenadas não ortogonais. Para cada ponto de pressão há dois pares de velocidades u e v . Nos volumes formados pelas linhas contínuas (linhas de ξ ou η constantes), aos quais nos referiremos como volumes principais, são aplicados os princípios da conservação da massa e da energia.

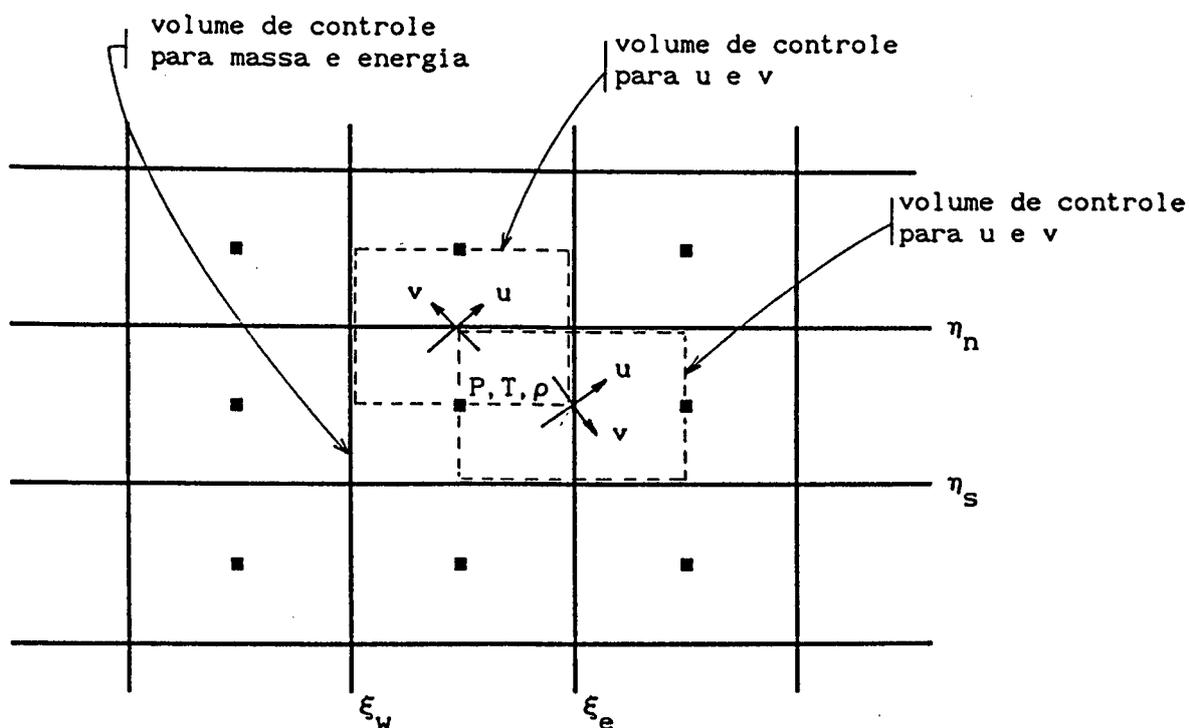


Figura 5.1 - Arranjo de volumes de controle proposto por Maliska e Ralphy [15].

No centro desses volumes estão armazenadas as variáveis P , T e ρ . Para cada volume principal existem dois volumes secundários, um deslocado na direção ξ e outro na direção η . No centro de cada um desses volumes secundários estão armazenados um par de velocidades (u, v) e a cada um desses volumes é aplicado tanto o princípio de conservação da quantidade de movimento na direção x como na direção y . Como o cálculo do fluxo de massa envolve as componentes contravariantes, são também armazenadas a componente U nas faces este e oeste e V nas faces norte e sul. A Fig. 5.2 mostra as variáveis referenciadas com um mesmo sub-índice. Como para a mesma pressão existem duas velocidades u e v , optamos por denotar as armazenadas na face norte como u_1 e v_1 e as da face este como u_2 e v_2 .

Este esquema de armazenamento origina um esquema numérico que se enquadra sem maiores dificuldades no esquema iterativo proposto no capítulo anterior para a formulação para qualquer regime de escoamento.

Assim, seguindo a sequência do processo iterativo do secção 4.3.3.2 são estimados os campos iniciais para P , T , ρ , u_1 , u_2 , v_1 e v_2 e são calculadas as velocidades U nas faces este e oeste e V nas faces norte e sul. Note a seguir que os coeficientes das equações de conservação da quantidade de movimento nas direções x e y são os mesmos para um mesmo volume de controle. Os termos de pressão $L[\hat{P}'^u]$ e $L[\hat{P}'^v]$ evidentemente são diferentes. A solução das equações de conservação da quantidade de movimento produz os campos u_1^* , u_2^* , v_1^* e v_2^* . São então calculadas as velocidades U^* e V^* , os resíduos na conservação da massa e a correção P' do campo de pressões.

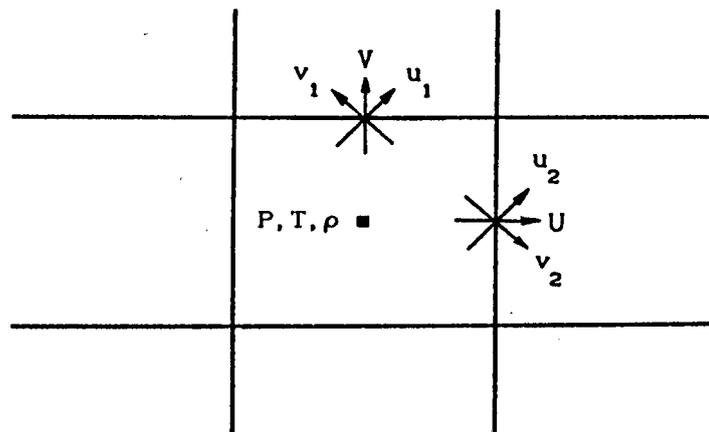


Figura 5.2 - Variáveis referenciadas pelo mesmo sub-índice.

Deve-se notar que não é obrigatório que as velocidades que satisfazem à equação da quantidade de movimento, portanto aquelas com o superescrito $*$, sejam corrigidas com o campo de pressões P' . Se o ciclo contido nos itens de f) a k) do processo iterativo da secção 4.3.3.2 é conduzido até a convergência, ao final do ciclo temos velocidades u_1 , u_2 , v_1 e v_2 (e U e V) que satisfazem a equação da conservação da massa e um campo de pressões que gera essas velocidades através das equações da quantidade de movimento. Muitas vezes no entanto esse ciclo, referente ao acoplamento pressão-velocidade, é executado apenas uma vez. Neste caso, se as velocidades não são corrigidas com um campo P' , nos ciclos iterativos mais externos os coeficientes serão calculados com velocidades contravariantes que não conservam a massa, o que pode prejudicar o comportamento global do processo de solução. É conveniente portanto que as velocidades sejam corrigidas com o campo P' de forma a conservarem a massa. Como penalidade, deixarão de satisfazer as equações linearizadas da quantidade

de movimento, o que é menos grave.

Uma importante precaução deve ser tomada referente à correção das velocidades, usando-se este arranjo. Nas faces de um volume de controle para a continuidade estão armazenados 4 pares de velocidades (u,v) , um sobre cada face. Determinada a correção P' , poderíamos optar por corrigir essas oito velocidades através das equações do tipo da Eq. (4.17). Se após essa correção forem calculadas as velocidades U nas faces este e oeste e V nas faces norte e sul, essas velocidades com certeza conservarão a massa. Ocorre no entanto que existem infinitos pares de velocidades (u,v) em cada face que podem resultar na mesma velocidade contravariante que satisfaz a conservação da massa. Essa liberdade embutida no processo pode fazer com que os valores de u e v corrigidos se afastem significativamente dos valores prévios à correção (u^*, v^*) que satisfaziam a quantidade de movimento. Se estas velocidades forem usadas em algum outro cálculo, como ocorre quando o método PRIME [10] é adotado para tratamento do acoplamento pressão-velocidade, o processo iterativo de solução pode divergir.

Para impedir que as velocidades cartesianas assumam valores irrealísticos, Maliska e Raithby [15] propõem que o campo de pressões P' corrija não as oito velocidades cartesianas e sim diretamente as quatro contravariantes armazenadas nas faces do volume de controle para a conservação da massa. Note que, em primeiro lugar, as velocidades contravariantes corrigidas diretamente pelo campo de pressões P' resultarão idênticas às obtidas pelo processo em que as cartesianas são corrigidas e após é feito o cálculo das contravariantes. Em segundo lugar, apenas as velocidades contravariantes participam da avaliação dos coeficientes e na maioria das situações a correção das cartesianas torna-se desnecessária. Ainda assim, pode ser que desejemos corrigir as velocidades cartesianas, por participarem da avaliação de algum termo-fonte ou mesmo para evitar que tenhamos, em determinada etapa do processo de solução, componentes cartesianas e componentes contravariantes que gerem vetores velocidades distintos. Nesse caso, Maliska e Raithby [15] recomendam que, por exemplo para o cálculo das componentes u e v na face este do volume de controle da Fig. 5.3, seja empregada a componente U armazenada nessa face e a média aritmética das quatro componentes V vizinhas. Deve-se ressaltar que esse processo de correção não é normalmente necessário e que o mesmo não tem absolutamente nenhuma influência nos campos convergidos.

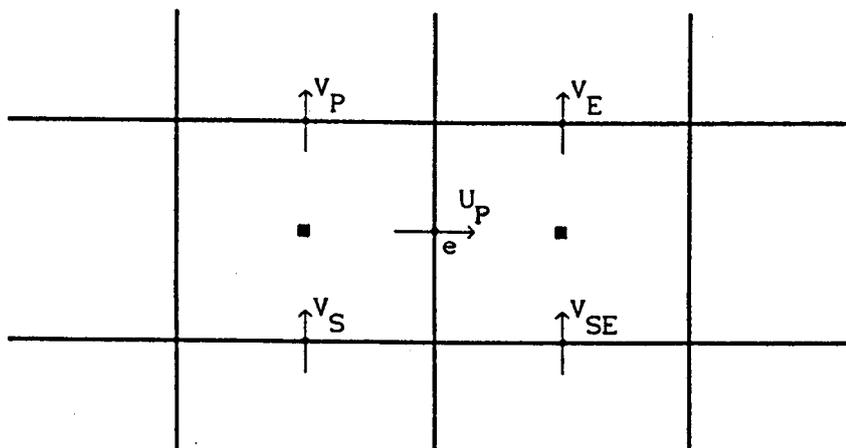


Figura 5.3 - Velocidades envolvidas na atualização das cartesianas na face este.

5.2.1 - COMENTÁRIOS SOBRE O ARRANJO DE VOLUMES DE CONTROLE NÚMERO 1

O arranjo de volumes de controle número 1 foi aplicado com sucesso na solução de uma série de problemas incompressíveis em coordenadas não ortogonais. Nesses problemas, para tratamento do acoplamento pressão-velocidade, diversos métodos foram aplicados como o SIMPLE [12], SIMPLER [46], SIMPLEC [43] e PRIME [10]. Os algoritmos resultantes apresentaram sempre convergência estável para uma ampla faixa do intervalo de tempo, ou parâmetro equivalente empregado.

Uma decorrência desse arranjo de volumes de controle é a superposição dos volumes de controle aos quais é aplicada a conservação da quantidade de movimento numa mesma direção. A Fig. 5.1 mostra que a conservação da quantidade de movimento, na direção x por exemplo, quando aplicada sobre os volumes deslocados na direção ξ , cobre todo o domínio de solução. Como a conservação da quantidade de movimento na mesma direção x é aplicada também aos volumes deslocados na direção η na realidade estamos aplicando esse princípio de conservação duas vezes sobre o domínio.

Evidentemente, essa superposição de volumes de controle acarreta em um esforço computacional extra em relação a um hipotético arranjo de volumes de controle em que a superposição não ocorresse. A avaliação de cada uma das velocidades u_1 , u_2 , v_1 e v_2 envolve a solução de um sistema de equações algébricas e portanto existem dois sistemas adicionais a serem

resolvidos em relação a um esquema sem a superposição e não se pode afirmar que esse esforço extra está sempre associado a uma melhoria na qualidade da solução.

O caso da discretização cartesiana retrata uma situação em que o acréscimo de tempo de computação não tem nenhuma contrapartida na qualidade da solução. Se esse arranjo de volumes de controle é aplicado a uma discretização cartesiana, as velocidades u armazenadas nas faces norte e sul e as velocidades v armazenadas nas faces este e oeste não contribuem para o fluxo de massa nas faces dos volumes de controle da continuidade. Em consequência, o campo de pressões, as velocidades u armazenadas nas faces este e oeste e as velocidades v armazenadas nas faces norte e sul resultarão exatamente as mesmas que as obtidas através de um esquema desenvolvido para a discretização cartesiana. Adicionalmente, a solução produzirá velocidades u nas faces norte e sul e velocidades v nas faces este e oeste que satisfazem as equações de conservação da quantidade de movimento nas direções x e y respectivamente. Estas velocidades adicionais são no entanto produzidas por um campo de pressões que gera velocidades u nas faces este e oeste e v nas faces norte e sul que conservam a massa e com coeficientes baseados nesses campos de u e v que conservam a massa.

Um último detalhe deve ser apontado em relação ao arranjo de volumes de controle em estudo. Para um mesmo volume de controle, todos os coeficientes das equações linearizadas de conservação da quantidade de movimento são idênticos. Isso significa que não há sentido em calcular-se os coeficientes para a equação linearizada de conservação da quantidade de movimento na direção x e na direção y para o mesmo volume de controle.

Em termos de construção de um programa computacional, a superposição de volumes de controle torna mais trabalhosa a aplicação das condições de contorno para a velocidade, especialmente quando se pretende códigos versáteis que é o que normalmente ocorre quando se trata de discretização não ortogonal. Em conjunto com o método PRIME [10] para tratamento do acoplamento pressão-velocidade, torna-se um procedimento atrativo pois não existe a necessidade de solução de sistemas de equações lineares para u e v , uma vez que as mesmas são calculadas de forma explícita [10].

5.3 - ARRANJO DE VOLUMES DE CONTROLE NÚMERO 2

A Fig. 5.4 mostra, também no plano ξ - η um novo arranjo de volumes de controle. A diferença entre este e o anterior é evidente. Ao volume deslocado na direção ξ é aplicada apenas a conservação da quantidade de movimento na direção x . Ao volume de controle deslocado na direção η é aplicada a conservação da quantidade de movimento na direção y . Nas faces este e oeste dos volumes principais estão armazenadas apenas as componentes u e U e nas faces norte e sul as componentes v e V . Obviamente, o objetivo é o de evitar a superposição de volumes de controle.

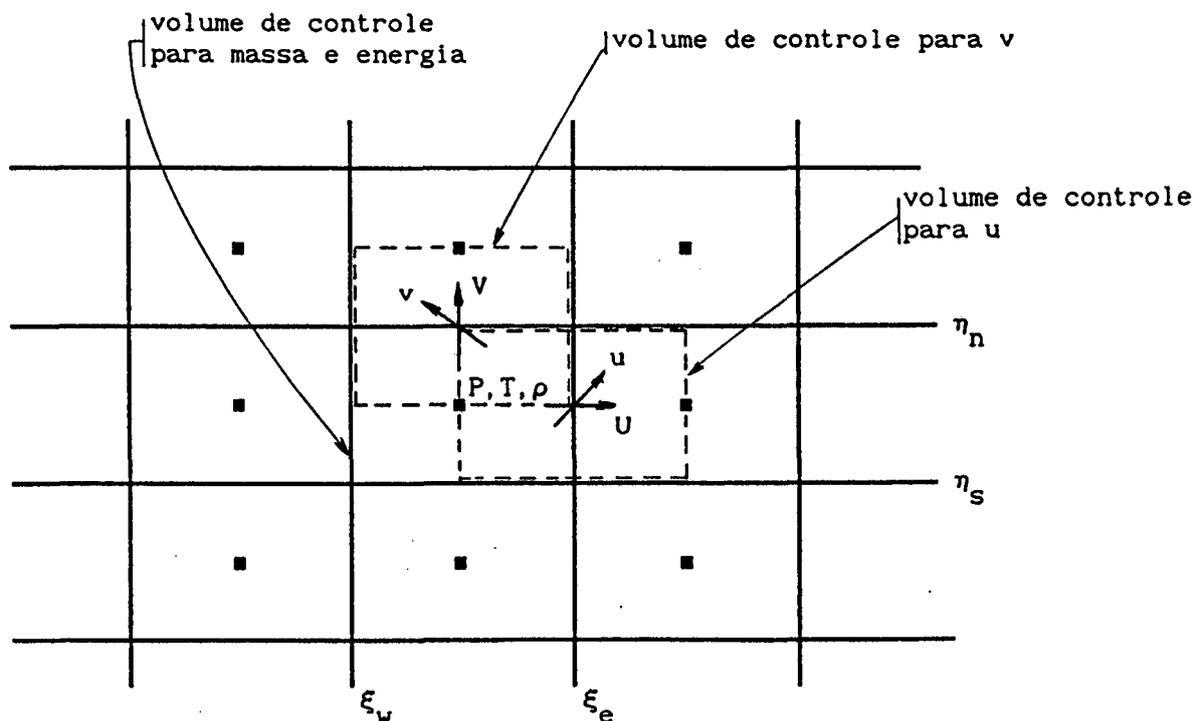


Figura 5.4 - Arranjo de volumes de controle sem superposição.

O presente esquema de armazenamento se enquadra perfeitamente na estrutura iterativa para a formulação para qualquer regime de velocidade proposta na secção 4.3.3.2., com a exceção esperada das etapas que prevêm o cálculo das velocidades contravariantes.

As componentes contravariantes participam ativamente e exclusivamente do processo de solução na avaliação do fluxo de massa através das faces dos volumes de controle para a conservação da massa. Os fluxos de massa através das faces dos volumes de controle para u e para v

são avaliados através de médias dos fluxos de massa nas faces dos volumes de controle para a conservação da massa, procedimento idêntico ao adotado no esquema associado ao arranjo de volumes de controle número 1 e também no originalmente desenvolvido para discretização cartesiana. Portanto, nossa única preocupação com o esquema de armazenamento número 2 se resume na avaliação da componente contravariante U nas faces este e oeste e da componente V nas faces norte e sul dos volumes de controle principais.

A Fig. 5.5 abaixo ilustra o problema. Temos por exemplo uma componente cartesiana u armazenada na face este de um volume para a conservação da massa e componentes v armazenadas nas faces norte e sul de volumes vizinhos. A questão é o cálculo da componente contravariante U na face este. Para isto é necessário o conhecimento da componente cartesiana v também nesta face. Embora não seja essa a única possibilidade, no presente trabalho a velocidade cartesiana v é calculada através da média aritmética das quatro velocidades v vizinhas, isto é,

$$v_e = (v_P + v_E + v_S + v_{SE}) / 4 \quad (5.1)$$

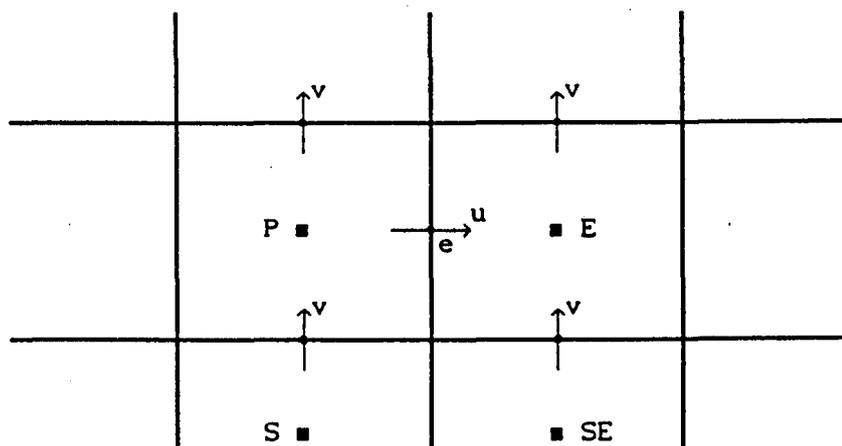


Figura 5.5 - Componentes cartesianas envolvidas no cálculo da componente contravariante U na face este.

5.3.1 - COMENTÁRIOS SOBRE O ARRANJO DE VOLUMES DE CONTROLE NÚMERO 2

O arranjo de volumes de controle número 2 sem dúvida gera um esquema numérico consideravelmente mais simples. Há no entanto um preço a

pagar, como as figuras abaixo demonstram claramente. Considere inicialmente o caso de uma malha cartesiana em que o eixo x é coincidente com o eixo ξ e o eixo y é coincidente com o eixo η como mostra a Fig. 5.6. Nesse caso, a componente cartesiana v não contribui para o fluxo de massa nas faces este e oeste e portanto a componente contravariante U nessas faces independe do valor de v na face. Um raciocínio análogo é válido para as faces norte e sul. Assim o processo de média não tem nenhuma influência na solução e os resultados obtidos com o arranjo de volumes de controle número 2 coincidem exatamente com os obtidos por um esquema originalmente desenvolvido para a discretização cartesiana.

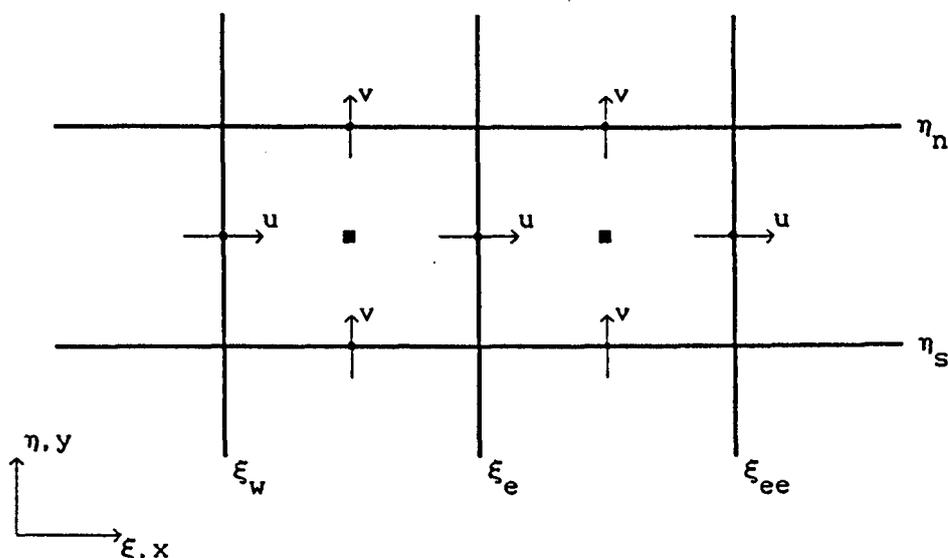


Figura 5.6 - Malha cartesiana com eixo x coincidente com eixo ξ .

Considere agora o caso inverso, mostrado na Fig. 5.7 em que o eixo x coincide com o eixo η e o eixo y coincide com o eixo ξ . Embora se trate de um caso extremo, é bastante provável que essa situação ocorra em alguma região do domínio na solução de um problema real.

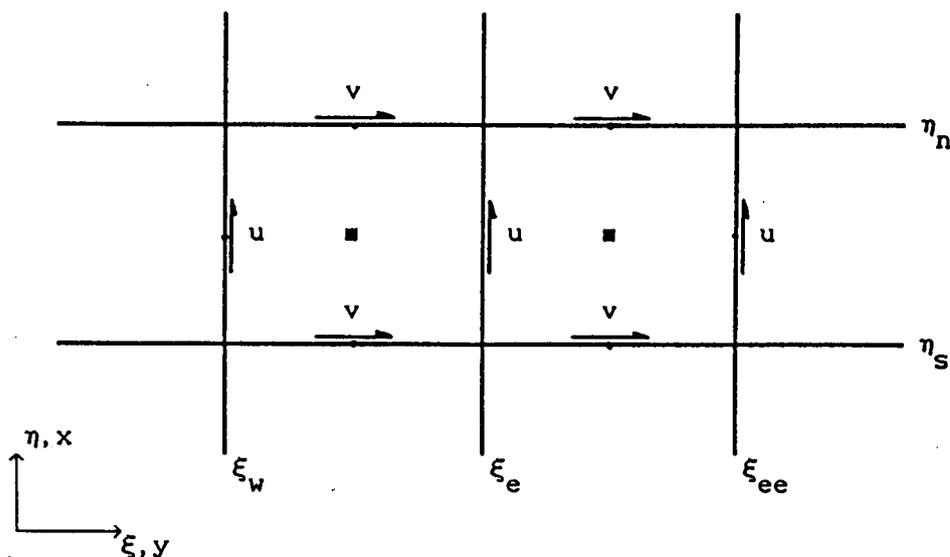


Figura 5.7. Malha cartesiana com eixo x coincidente com eixo η .

Nesse caso, a avaliação do fluxo de massa, e portanto da componente contravariante U , na face este independe da componente cartesiana u armazenada sobre a face e é função totalmente do processo de média envolvendo as componentes v vizinhas. Note que nessa situação no arranjo número 1 existe uma velocidade v armazenada na face este calculada pela equação da quantidade de movimento na direção y .

5.4 - ARRANJO DE VOLUMES DE CONTROLE NÚMERO 3

O primeiro arranjo analisado apresenta como desvantagem a superposição de volumes de controle. O conseqüente esforço computacional adicional não necessariamente se traduz em soluções de melhor qualidade. No segundo arranjo, em que não ocorre a superposição, a avaliação dos fluxos de massa nas faces dos volumes de controle principais pode ficar, em certas situações, extremamente dependente de um processo de média aritmética de velocidades cartesianas.

No arranjo de volumes de controle número 3, todos os volumes de controle são coincidentes com o volume de controle principal e todas as variáveis estão localizadas no centro desses volumes. Nos referiremos a esse arranjo de volumes de controle como arranjo co-localizado. Nesse caso, a avaliação dos fluxos de massa nas faces dos volumes de controle irá também depender de um processo de média das velocidades armazenadas

nos centros dos volumes vizinhos. Antes no entanto desse arranjo ser enfocado no âmbito da discretização não ortogonal, é conveniente que o arranjo co-localizado seja analisado para uma discretização cartesiana.

5.4.1 - O ARRANJO CO-LOCALIZADO APLICADO À DISCRETIZAÇÃO CARTESIANA

A Fig. 5.8 ilustra a situação de discretização cartesiana com o arranjo co-localizado. Embora se trate de um arranjo bastante conveniente do ponto de vista da elaboração de um programa computacional, foi condenado ao esquecimento devido aos defeitos apontados por Patankar [1]. São bem conhecidos os campos totalmente irrealísticos de u , v e P sugeridos por Patankar [1] que um esquema numérico associado ao arranjo co-localizado interpreta como campos corretos, isto é, campos que satisfazem as equações de conservação da massa e quantidade de movimento. Deve-se mencionar que em verdade o arranjo co-localizado sempre foi aplicado na área de escoamentos compressíveis desde o trabalho pioneiro de MacCormack [61], sem relatos de dificuldades associadas ao uso desse arranjo.

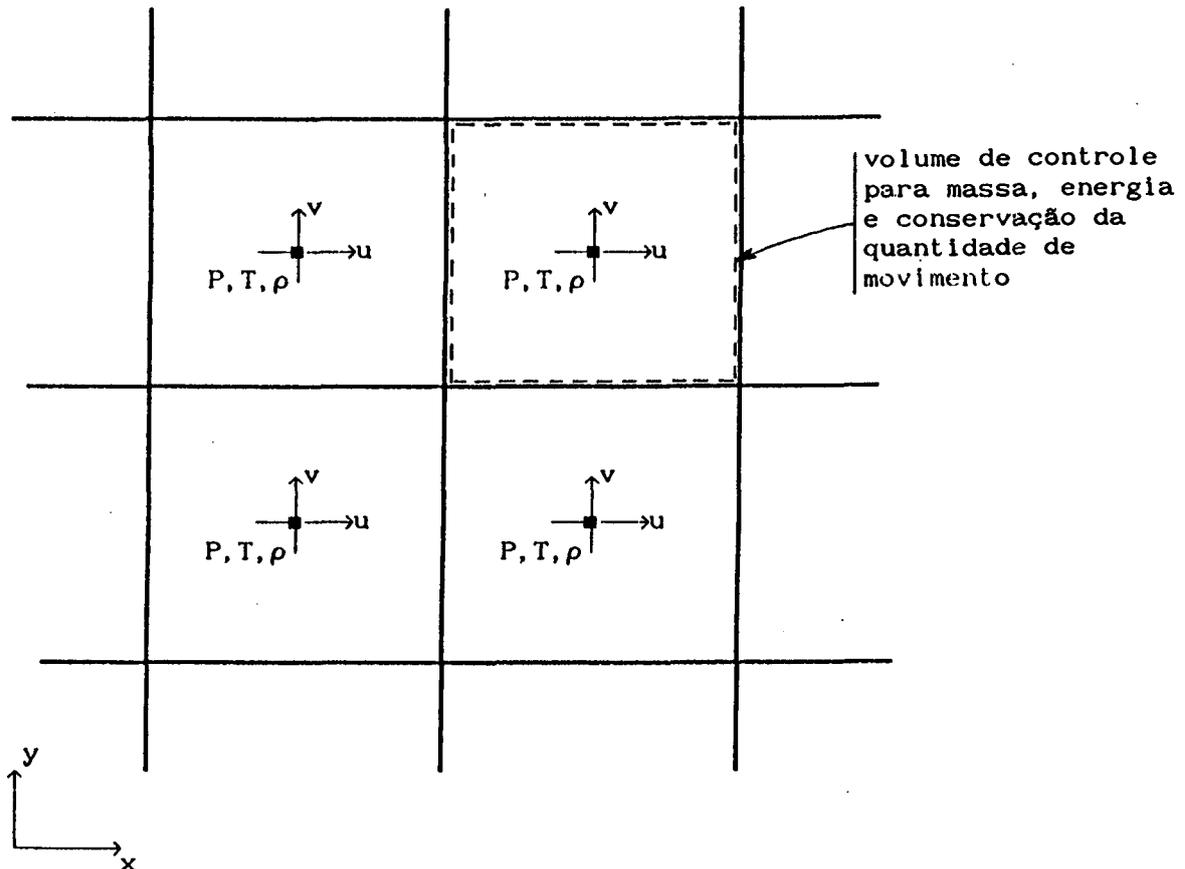


Figura 5.8 Arranjo co-localizado.

Basicamente, todos os problemas enfrentados, no âmbito dos métodos de solução segregada pelo arranjo co-localizado, são decorrência do processo de construção da equação para a pressão.

Considere um problema incompressível com uma malha igualmente espaçada nas direções x e y.

Admita por exemplo que, através da solução das equações da conservação da quantidade de movimento, as velocidades u^* e v^* tenham sido, recentemente, calculadas com um campo de pressões estimado P^* . O próximo passo é o cálculo de um novo campo de pressões. Através de aproximações na equação de conservação da quantidade de movimento na direção x a velocidade cartesiana u armazenada em P responde a uma variação do campo de pressões através de uma expressão do tipo

$$u_P = u_P^* - \bar{d}_P^u \frac{(P'_E - P'_W)}{2} \quad (5.2)$$

e as velocidades u armazenadas nos volumes este e oeste através de

$$u_E = u_E^* - \bar{d}_E^u \frac{(P'_{EE} - P'_P)}{2} \quad (5.3)$$

e

$$u_W = u_W^* - \bar{d}_W^u \frac{(P'_P - P'_{WW})}{2} \quad (5.4)$$

conforme a Fig. 5.9.

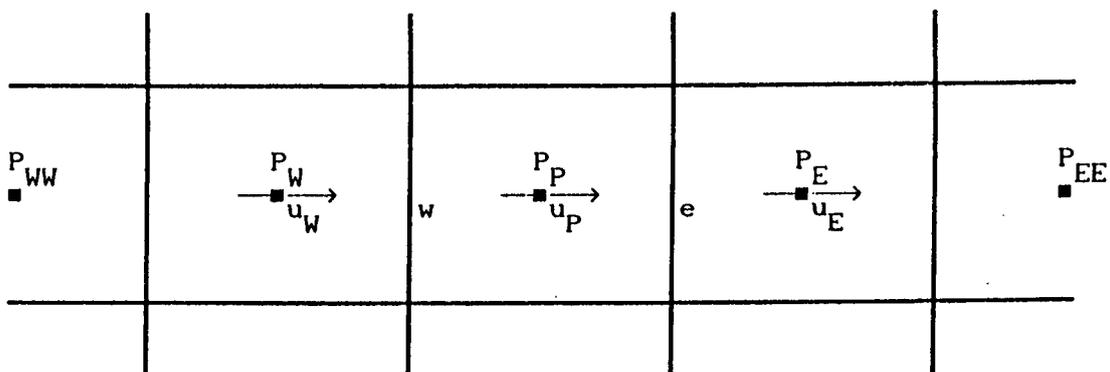


Figura 5.9 - Velocidades e pressões envolvidas nas Eqs. 5.2 a 5.6.

Se avaliarmos a velocidade u na face este através da média aritmética das velocidades armazenadas em P e E e a velocidade u na face oeste através da média das velocidades armazenadas em W e P obtemos respectivamente

$$u_e = \frac{u_P^* + u_E^*}{2} - \frac{\bar{d}_P^u(P'_E - P'_W) + \bar{d}_E^u(P'_{EE} - P'_P)}{4} \quad (5.5)$$

e

$$u_w = \frac{u_P^* + u_W^*}{2} - \frac{\bar{d}_P^u(P'_E - P'_W) + \bar{d}_W^u(P'_P - P'_{WW})}{4} \quad (5.6)$$

Expressões similares podem ser obtidas para as velocidades v nas faces norte e sul. Se obrigarmos essas velocidades nas faces a conservarem a massa, resulta uma expressão para a correção no campo de pressões P' . Resolvida essa equação, o campo de pressões estimado P^* é corrigido e o processo de solução retorna à solução das equações linearizadas da conservação da quantidade de movimento.

Uma análise desse processo mostra claramente três aspectos que, por ocorrerem simultaneamente, fazem com que campos irrealis, como os apontados por Patankar, sejam aceitos como solução das equações:

- i) as velocidades u_P^* e v_P^* determinadas através da solução das equações da conservação da quantidade de movimento nas direções x e y não dependem da pressão em P.
- ii) O termo-fonte para a equação para a pressão que é o erro na conservação da massa associado ao campo (u^*, v^*) não depende das velocidades u^* e v^* armazenadas em P; e
- iii) a equação para P' pode não envolver os valores de P' nos volumes vizinhos E, W, N e S mas os valores de P' nos volumes EE, NN, SS e WW.

Peric et. al. [55] propuseram uma alteração nesse processo de cálculo que eliminou a possibilidade da ocorrência dos campos irrealis. Basicamente, a única diferença consiste na construção da equação para o cálculo da correção P' , para a qual foi proposta uma forma de avaliação diferente das velocidades nas faces dos volumes de controle. No processo proposto por Peric et. al. [55], a velocidade u na face este responde a uma variação no campo de pressões através de

$$u_e = u_e^* - \bar{d}_e^u (P'_E - P'_P) \quad (5.7)$$

Em relação à Eq.(5.5), esta última expressão apresenta alguns aspectos distintos, um fundamental e alguns menos importantes. São eles:

- i) O gradiente de pressão na Eq.(5.7) é avaliado da mesma forma como no arranjo desencontrado. Independentemente se a avaliação do gradiente de pressão como proposto na Eq.(5.7) é mais ou menos precisa do que a forma da Eq.(5.5), a questão de extrema importância é que a equação para a pressão no volume centrado em P passa agora a envolver o valor de P' nos quatro volumes vizinhos. Apenas este fato já é suficiente para eliminar totalmente a possibilidade de ocorrência dos campos irrealis apontados por Patankar [1].
- ii) Não necessariamente a velocidade u_e^* deve ser avaliada pela média aritmética das velocidades u_p^* e u_E^* . Muito pelo contrário, Peric et. al. [55] propõe que a velocidade u_e^* seja avaliada através de algum tipo de média das equações linearizadas de conservação da quantidade de movimento aplicadas aos volumes centrados em P e em E. Nesse processo de média, os gradientes de pressão originais de cada equação são também substituídos por um gradiente de pressão local. Na realidade, é criada uma equação fictícia para as velocidades nas faces a partir das equações discretizadas localizadas nos centros dos volumes de controle.
- iii) Como visto no Cap. 4, o termo \bar{d}_e^u surge no processo de aproximação das equações da conservação da quantidade de movimento e depende basicamente dos coeficientes a_p, a_e, a_w, \dots . Como não existe um volume de controle para u centrado na face este, não existem esses coeficientes e o termo \bar{d}_e^u não pode ser calculado pelo procedimento usual. Marchi et. al. [58] analisam diversas formas de avaliação de \bar{d}_e^u entre elas o processo de média aritmética envolvendo \bar{d}_p e \bar{d}_E .

5.4.2 - O ARRANJO CO-LOCALIZADO APLICADO À DISCRETIZAÇÃO NÃO ORTOGONAL

A extensão do arranjo co-localizado à discretização não ortogonal é bastante direta. Através de aproximações da equação da

conservação da quantidade de movimento na direção x , a velocidade u_p responde a uma variação no campo de pressões através de

$$u_p = u_p^* - \bar{d}_p^u L[\hat{P}' u]_p \Delta \xi \quad (5.8)$$

Esta equação é a própria Eq. (4.17) aplicada ao nó P e é análoga a Eq. (5.2) válida para a discretização cartesiana. Para um volume centrado em E tem-se

$$u_E = u_E^* - \bar{d}_E^u L[\hat{P}' u]_E \Delta \xi \quad (5.9)$$

análoga a Eq. (5.3). Um processo de média destas duas equações conduz a

$$u_e = u_e^* - \bar{d}_e^u L[\hat{P}' u]_e \Delta \xi \quad (5.10)$$

onde, a velocidade u_e^* , o termo \bar{d}_e^u e o termo de gradiente de pressão são avaliados através dos mesmos processos aplicados na discretização cartesiana. Note que a forma da Eq. (5.10) é idêntica a da Eq. (4.17). Na discretização não ortogonal, o mesmo processo deve ser aplicado também para a avaliação da velocidade v_e resultando em

$$v_e = v_e^* - \bar{d}_e^u L[\hat{P}' v]_e \Delta \xi \quad (5.11)$$

que é idêntica a Eq. (4.18). A manipulação algébrica das Eqs. (5.10) e (5.11) conduz à Eq. (4.20). Procedimentos idênticos aplicados às outras faces permitem construir a equação para o cálculo da correção P' do campo de pressões. Portanto, o arranjo co-localizado se enquadra perfeitamente no processo iterativo proposto no Capítulo 4.

Por último, deve-se mencionar que obtido o campo de pressões, este deve ser aplicado para corrigir as velocidades contravariantes nas faces, através de equações do tipo da Eq. (5.11). A atualização das cartesianas nodais, embora não necessária, pode ser implementada por dois processos. Uma alternativa é a correção direta das cartesianas nodais através de equações do tipo da Eq. (5.8). Esse é o procedimento adotado em [58]. A outra possibilidade é a avaliação das componentes contravariantes nodais através da média das contravariantes nas faces recentemente

corrigidas pelo campo de pressões e portanto velocidades que conservam a massa, e a partir dessas, calcular-se as cartesianas nodais. Face a pequena participação que essas velocidades cartesianas nodais irão desempenhar no restante do processo de solução (note que em seguida uma nova solução das equações da conservação da quantidade de movimento irá produzir novos valores nodais para u e v), é de se esperar que a escolha por uma ou outra alternativa não tenha maiores consequências.

5.4.3 - COMENTÁRIOS SOBRE O ARRANJO DE VOLUMES DE CONTROLE NÚMERO 3

No âmbito da discretização cartesiana, o esquema co-localizado não apresenta vantagens significativas sobre o desencontrado. Acreditamos inclusive que o termo envolvendo o gradiente de pressão nas equações de conservação da quantidade de movimento é melhor avaliado neste último. Além disso, a avaliação desse mesmo termo nos volumes adjacentes às fronteiras envolve um procedimento de extrapolação da pressão que é desnecessário no arranjo desencontrado. O processo de média das velocidades nodais para a avaliação das velocidades nas faces também inexistente no arranjo desencontrado onde as velocidades já estão armazenadas onde necessárias para o cálculo do fluxo de massa. Por outro lado, com volumes de controle coincidentes, os coeficientes a_p , a_e , a_w , ... das equações de conservação da quantidade de movimento nas direções x e y são os mesmos. A parcela convectiva desses coeficientes pode ainda ser aproveitada para o cálculo dos coeficientes de outras equações de conservação. Por último, o arranjo co-localizado dá origem a algumas facilidades no desenvolvimento de programas computacionais. Por exemplo, no arranjo desencontrado, o número de variáveis u e o número de variáveis v numa linha (ou coluna) da malha são sempre diferentes o que não ocorre no arranjo co-localizado.

Na discretização não-ortogonal, o arranjo co-localizado apresenta sem dúvidas vantagens significativas em relação aos arranjos 1 e 2 apresentados anteriormente, vantagens essas que se acentuam quando na solução de problemas tridimensionais. Especificamente com relação ao arranjo número 1, o arranjo co-localizado evita a superposição de volumes de controle. Note que na solução de problemas tridimensionais, as equações da conservação da quantidade de movimento nas 3 direções devem ser aplicadas 3 vezes para cada ponto de pressão. Portanto, têm-se nove

(três equações vezes três posições) sistemas de equações lineares a serem resolvidos em cada ciclo iterativo referente ao acoplamento pressão-velocidade. No arranjo co-localizado esse número se reduz a 3.

Com relação ao arranjo número 2, o arranjo co-localizado apresenta algumas características em comum. Em ambos, para a avaliação das componentes contravariantes nas faces dos volumes de controle da continuidade, é necessário um processo de média das velocidades nodais. No arranjo número 2, uma componente cartesiana já é armazenada na face e a outra é avaliada através de um processo de média envolvendo as quatro vizinhas. No arranjo co-localizado, nenhuma das duas componentes cartesianas é conhecida e portanto as duas devem ser avaliadas através de um processo de média envolvendo as velocidades nodais armazenadas nos dois volumes adjacentes à face. Portanto, os esquemas numéricos gerados por um ou outro arranjo dependem fortemente do processo de interpolação aplicado e, para o mesmo tipo de interpolação, não se pode afirmar que um esquema é superior ao outro. Ao arranjo número 2 pode ser atribuída a vantagem de uma componente cartesiana já estar armazenada onde necessária para o cálculo da contravariante embora, como visto no item 5.3.1. possam ocorrer situações em que a componente cartesiana pouco contribua para a avaliação da contravariante.

Com relação ao processo de interpolação citado no parágrafo anterior, é óbvio que se deva procurar um processo que privilegie a física do escoamento em relação a um processo puramente matemático. No esquema proposto por Peric et. al. [55] e estendido para discretização não ortogonal por Marchi et. al. [58], associado ao arranjo co-localizado, as velocidades cartesianas u^* e v^* nas faces são avaliadas através de um processo de média das equações da conservação da quantidade de movimento aplicadas aos dois volumes adjacentes. Embora tal processo pudesse também ser aplicado ao arranjo número 2, este passaria a envolver quatro volumes, conforme Fig. 5.5, o que tornaria o processo mais complicado. Além disso, nos volumes adjacentes às fronteiras do domínio de solução, participariam do processo de média velocidades localizadas sobre as fronteiras que normalmente são avaliadas através da aplicação das condições de contorno e portanto não se dispõe de uma equação de conservação da quantidade de movimento para elas. Por esse motivo, recomenda-se no presente trabalho, que associado ao arranjo de volumes número 2, seja aplicado o processo de média aritmética conforme a Eq. 5.1.

Como última vantagem do esquema co-localizado, deve-se mencionar

que o número de posições no domínio em que métricas da transformação de coordenadas devem ser calculadas e/ou armazenadas se reduz significativamente em relação aos arranjos número 1 e 2 especialmente na solução de problemas tridimensionais.

6 - O ESQUEMA DE BEAM E WARMING

6.1 - INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores foi exposta uma metodologia segregada para a solução de escoamentos de qualquer regime de velocidade em coordenadas generalizadas. No Cap. 7 essa metodologia será aplicada na solução de diversos problemas e os resultados serão comparados com dados experimentais e resultados obtidos através do esquema numérico devido a Beam e Warming [16]. Visando inclusive facilitar essa comparação foi construído um programa computacional baseado no trabalho desses dois autores. Além disso, como já comentado no Cap. 1, um dos objetivos deste trabalho é a comparação dos diversos aspectos distintos existentes entre os métodos segregados e os simultâneos, como o de Beam e Warming, de solução das equações diferenciais. Essa comparação será abordada em capítulos posteriores. Portanto, em função da relevância que o esquema de B&W assume no contexto deste trabalho, o presente capítulo é dedicado a descrição de suas características principais com destaque para aqueles tópicos que necessariamente serão referenciados nos próximos capítulos.

6.2. - REPRESENTAÇÃO VETORIAL DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

Para os propósitos deste capítulo é suficiente considerar um

escoamento bidimensional invíscido. Em função do algoritmo de solução é conveniente que as equações governantes sejam expressas na forma vetorial abaixo

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0 \quad (6.1)$$

onde

$$q = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix} ; \quad E = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x P \\ \rho v U + \xi_y P \\ (E_t + P)U \end{bmatrix} ; \quad F = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x P \\ \rho v V + \eta_y P \\ (E_t + P)V \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

As componentes contravariantes U e V do vetor velocidade são aqui definidas por

$$U = \xi_x u + \xi_y v \quad V = \eta_x u + \eta_y v \quad (6.3)$$

enquanto todas as demais variáveis obedecem à nomenclatura anteriormente exposta. Adicionalmente, admitindo-se o escoamento de um gás perfeito, obtém-se das Eqs. (2.12), (2.13) e (2.8) que

$$P = (\gamma - 1) [E_t - 1/2 \rho(u^2 + v^2)] \quad (6.4)$$

e

$$T = (1/\rho c_v) [E_t - 1/2 \rho(u^2 + v^2)] \quad (6.5)$$

O conjunto de Eqs. (6.1)-(6.5) é exatamente o mesmo conjunto dados pelas Eqs. (3.1)-(3.5) simplificado para o escoamento de um fluido invíscido e não condutor.

6.3. - ESQUEMA PARA AVANÇO NO TEMPO - A FORMA DELTA

Beam e Warming adotam a expressão geral, de um passo,

$$\Delta q = \frac{\theta \Delta t}{1 + \xi} \frac{\partial}{\partial t} \Delta q + \frac{\Delta t}{1 + \xi} \frac{\partial q^n}{\partial t} + \frac{\xi}{1 + \xi} (q^n - q^{n-1}) \quad (6.6)$$

para o avanço da solução da Eq. (6.1) no tempo. Na Eq. (6.6) o operador Δ , quando aplicado por exemplo à variável q , indica

$$\Delta q = q^{n+1} - q^n \quad (6.7)$$

onde o superescrito $(n+1)$ indica o instante em que as variáveis são desconhecidas e estão portanto sendo calculadas. A escolha de valores convenientes para os parâmetros θ e ξ particulariza a expressão geral para diversas aproximações temporais conhecidas [62]. Assumiremos daqui por diante a adoção de um esquema totalmente implícito ($\theta = 1$) envolvendo dois níveis de tempo ($\xi = 0$).

Para aplicar o esquema de avanço no tempo dado pela Eq. (6.6) inicialmente deve-se explicitar $\partial q / \partial t$ na Eq. (6.1) e usar a expressão resultante para avaliar $\partial q / \partial t$ nos instantes $(n+1)$ e (n) , isto é,

$$\frac{\partial q^{n+1}}{\partial t} = - \frac{\partial E^{n+1}}{\partial \xi} - \frac{\partial F^{n+1}}{\partial \eta} \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial q^n}{\partial t} = - \frac{\partial E^n}{\partial \xi} - \frac{\partial F^n}{\partial \eta} \quad (6.9)$$

Se a Eq. (6.9) é subtraída da Eq. (6.8) obtém-se que

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta q = - \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta E - \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta F \quad (6.10)$$

Se as Eq. (6.10) e (6.9) são substituídas na Eq. (6.6), com $\theta = 1$ e $\xi = 0$ chega-se finalmente a

$$\Delta q = -\Delta t \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \Delta E + \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta F \right] - \Delta t \left[\frac{\partial E^n}{\partial \xi} + \frac{\partial F^n}{\partial \eta} \right] \quad (6.11)$$

A expressão acima é análoga a Eq. (6.1) com a derivada em relação ao tempo discretizada. A incógnita nessa equação é o incremento Δq da variável q e por isso a Eq. (6.11) é dita estar em forma delta.

6.4 - TRATAMENTO DAS NÃO LINEARIDADES

O problema agora é resolver a Eq.(6.11). Como optou-se por uma formulação implícita, no lado direito dessa equação aparecem os termos ΔE e ΔF que são desconhecidos. Além disso os vetores E e F são funções não lineares das componentes do vetor incógnita q. Uma forma de superar essa dificuldade seria estimar um campo para o vetor q^{n+1} , com esse campo calcular os vetores E e F e, através da simples aplicação da Eq.(6.11), provida de um esquema para aproximação das derivadas espaciais, atualizar, ou corrigir, a estimativa inicial para o vetor q no instante (n+1). Tal procedimento implica em um processo iterativo para cada intervalo de tempo. Se esse ciclo iterativo é executado uma única vez e a estimativa inicial para o vetor q for o próprio campo existente no instante (n), o que seria o procedimento usual, não haveria distinção entre este processo e uma formulação explícita para tratamento do transiente.

Antes que a forma de linearização aplicada no esquema de B&W seja descrita é interessante que outras possibilidades sejam abordadas, além da já exposta no parágrafo anterior, visando o estabelecimento de um paralelo com o procedimento de linearização adotado nos métodos segregados. Para tanto considere a equação

$$P = (\gamma - 1) \left[q_4 - \frac{1}{2} \left(\frac{q_2 q_2}{q_1} + \frac{q_3 q_3}{q_1} \right) \right] \quad (6.12)$$

derivada da Eq.(6.4), em que a pressão, que aparece nos vetores E e F, é expressa em função das componentes do vetor q. Admita ainda que se queira resolver segregadamente, isto é, de forma não simultânea, cada uma das quatro componentes da Eq.(6.11). Nesse caso, na solução da segunda equação, cuja incógnita é q_2 ($\rho u/J$), todos os valores das variáveis q_1 , q_3 e q_4 deveriam ser estimados para eliminar o acoplamento entre as equações. Ainda assim permanecem não linearidades como pode ser observado na Eq.(6.12). Para a linearização por exemplo do termo $q_2 q_2$ uma possibilidade consiste em fazer um dos termos do produto assumir um valor estimado e agregá-lo a um coeficiente. Se procedimentos semelhantes são empregados em todos os termos da segunda equação resulta um sistema de equações lineares para q_2 . O mesmo procedimento deve ser aplicado às outras 3 equações e o processo global de solução requer iterações para atualização dos coeficientes e devido ao acoplamento entre as equações.

Deve-se destacar que esse processo de linearização é análogo ao aplicado no Cap. 4 deste trabalho.

Admita agora que se tenha optado pela solução simultânea das 4 componentes da Eq.(6.11). Nesse caso, evidentemente, não é mais correto associar o cálculo de uma determinada variável a uma determinada equação. As quatro variáveis são obtidas pela solução simultânea das quatro equações. Portanto, a variável q_4 que participa através da Eq.(6.12) da segunda e terceira componentes da Eq.(6.11) não precisa mais ser estimada, como na solução segregada, mas participa de forma ativa no processo de solução. De qualquer forma, iterações seriam ainda necessárias devido as não linearidades.

No esquema proposto por Beam e Warming as quatro equações são resolvidas de forma simultânea. Para superar o problema das não linearidades é aplicado um processo que consiste basicamente no método de Newton-Raphson comumente empregado na solução de sistemas de equações algébricas não lineares. Esse processo consiste na avaliação de E e F no instante (n+1) através de expansões em série de Taylor na forma

$$E^{n+1} = E^n + \left[\frac{\partial E}{\partial q} \right]^n \left[q^{n+1} - q^n \right] + O(\Delta t^2) \quad (6.13)$$

$$F^{n+1} = F^n + \left[\frac{\partial F}{\partial q} \right]^n \left[q^{n+1} - q^n \right] + O(\Delta t^2) \quad (6.14)$$

e portanto, omitindo-se o erro de truncamento que

$$\Delta E = A^n \Delta q \quad (6.15)$$

e

$$\Delta F = B^n \Delta q \quad (6.16)$$

onde A e B são matrizes jacobianas definidas por

$$A = (\partial E / \partial q) \quad B = (\partial F / \partial q) \quad (6.17)$$

Se as Eqs.(6.15) e (6.16) são substituídas na Eq.(6.11) obtém-se após algum rearranjo que

$$\left\{ I + \Delta t \left[\frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\partial B}{\partial \eta} \right] \right\} \Delta q = - \Delta t \left\{ \frac{\partial E^n}{\partial \xi} + \frac{\partial F^n}{\partial \eta} \right\} \quad (6.18)$$

O sistema de equações dado pela Eq.(6.18) é agora linear e, provido algum esquema para discretização das derivadas espaciais, pode ser resolvido para determinação do vetor incógnita Δq . O processo de solução será abordado na próxima secção deste trabalho.

É importante destacar que este processo de solução é aplicado de forma não iterativa, isto é, determinado o vetor incógnita Δq , o vetor q no instante $(n+1)$ é determinado pela aplicação da Eq.(6.7) e a solução avança para outro intervalo de tempo. Tal procedimento contrasta em princípio com o processo de solução de sistemas de equações não lineares via Newton-Raphson onde sucessivas iterações são executadas até que a solução satisfaça algum critério de convergência. A justificativa para essa característica não iterativa é baseada na análise da ordem do erro envolvido nas diversas aproximações. O erro de truncamento da expansão em série de Taylor dada pelas Eqs.(6.13) e (6.14) é da ordem de Δt^2 . Na Eq.(6.11) os vetores ΔE e ΔF são multiplicados por Δt portanto o erro envolvido na avaliação do vetor Δq , devido ao truncamento da série de Taylor, é da ordem de Δt^3 . Ocorre que o processo de discretização temporal da Eq.(6.1) que resultou na Eq.(6.11) embute por si próprio um erro da ordem de Δt^2 . Resumindo, se desejamos maior precisão na avaliação do transiente, é mais eficaz dispender esforço computacional reduzindo-se o intervalo de tempo Δt , do que aplicar um processo iterativo na solução do sistema de equações dentro de um mesmo intervalo de tempo.

6.5 - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES - O PROCESSO DE FATORAÇÃO APROXIMADA

Suponha por hipótese que o domínio de solução seja discretizada em $(j \times i)$ pontos, ordenados conforme mostra a Fig.6.1.

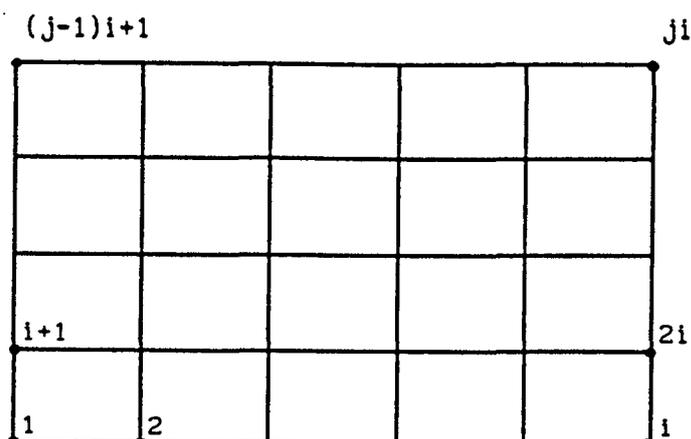


Figura 6.1 - Malha hipotética para o esquema de Beam e Warming

A Eq.(6.18), discretizada espacialmente, aplicada aos $(j \times i)$ pontos resultará em um sistema de equações lineares que em representação matricial assume a forma pentadiagonal de blocos abaixo

$$\begin{bmatrix}
 [C][D] & [E] & & & \\
 [B][C][D] & [E] & & & \\
 & & & & \\
 & & & & \\
 [A] & [B][C][D] & [E] & & \\
 & & & & \\
 & & & & \\
 & & & & \\
 [A] & [B][C][D] & & & \\
 [A] & [B][C] & & &
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \Delta q_1 \\
 \Delta q_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \Delta q_k \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \Delta q_{1j}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 RHS_1 \\
 RHS_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 RHS_k \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 RHS_{1j}
 \end{bmatrix}
 \quad (6.19)$$

Neste sistema, cada elemento é uma matriz (4×4) , Δq_k é um vetor com 4 componentes $[\Delta p/J, \Delta(\rho u)/J, \Delta(\rho v)/J, \Delta E_t/J]$ do k -ésimo ponto e RHS_k , também um vetor com 4 componentes, representa o lado direito da Eq.(6.18). Tem-se portanto um sistema com $(4 \times j \times i)$ equações e o mesmo número de incógnitas. A solução desse sistema é muito mais complicada que a solução dos sistemas originados nos métodos segregados, pois nestes, embora a estrutura pentadiagonal seja mantida, cada elemento é um escalar e não uma matriz. Como atenuante, nos métodos segregados, a solução da Eq.(6.19) é substituída pela solução, para o mesmo problema bidimensional, de 4 sistemas de equações lineares.

No esquema proposto por Beam e Warming a solução da Eq.(6.19) é evitada pelo processo de fatoração aproximada que consiste em fatorar o operador diferencial presente no lado esquerdo da Eq.(6.18) no produto de dois operadores unidimensionais. A Eq.(6.18) é então substituída pela equação

$$\left[I + \Delta t \frac{\partial A}{\partial \xi} \right] \left[I + \Delta t \frac{\partial B}{\partial \eta} \right] \Delta q = - \Delta t \left\{ \frac{\partial E^n}{\partial \xi} + \frac{\partial F^n}{\partial \eta} \right\} \quad (6.20)$$

que não reproduz exatamente o problema original. A grande vantagem da equação acima é que ela possui a forma

$$L_{\xi} L_{\eta} \Delta q = \text{RHS} \quad (6.21)$$

Definindo Δq^* por

$$\Delta q^* = L_{\eta} \Delta q \quad (6.22)$$

a Eq.(6.21) resulta

$$L_{\xi} \Delta q^* = \text{RHS} \quad (6.23)$$

que apresenta uma estrutura tridiagonal de blocos e pode ser resolvida [2] com esforço consideravelmente menor. Após a solução da Eq.(6.23), o vetor incógnita Δq pode ser determinado através da solução de mais de um sistema tridiagonal de blocos representado pela Eq.(6.22).

Se efetuado o produto dos operadores unidimensionais presentes no lado esquerdo da Eq.(6.20) será obtido o lado esquerdo da Eq.(6.18) mais um termo adicional dado por

$$\Delta t^2 \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial B}{\partial \eta} \Delta q \quad (6.24)$$

Este erro é da ordem de Δt^2 e limita o passo de tempo usado, especialmente quando a fatoração aproximada é aplicada na solução de problemas tridimensionais [63]. Deve-se destacar que, na formulação em forma delta, se a solução de regime permanente for atingida o lado direito da Eq.(6.20) se anula. Nesse caso, a solução do processo de fatoração aproximada produzirá a solução correta, isto é, Δq também identicamente nulo.

6.6 - DISSIPACÃO ARTIFICIAL NO ESQUEMA DE BEAM E WARMING

No esquema original de Beam e Warming, as derivadas espaciais presentes no lado direito da Eq.(6.20) são discretizadas por diferenças centrais de segunda ordem. Sabe-se que o esquema de derivadas centrais, mesmo quando aplicado a problemas lineares com coeficientes constantes, não provê mecanismos para dissipação dos erros ou imprecisões existentes nos campos durante o processo de solução [64]. Para controlar as instabilidades Pulliam e Steger [65] incorporam ao lado direito da Eq.(6.20) um termo dissipativo de quarta ordem, $D_e^{(4)}$, dado por

$$D_e^{(4)} = -\Delta t \omega_e J^{-1} \left\{ (\nabla_{\xi} \Delta_{\xi})^2 + (\nabla_{\eta} \Delta_{\eta})^2 \right\} J q^n \quad (6.25)$$

onde ω_e é um coeficiente de dissipação. O subíndice e indica que se trata de uma dissipação adicionada à parte explícita (lado direito) da Eq.(6.20). Pulliam [64] analisa com detalhes esse termo dissipativo e algumas de suas observações devem ser citadas. Em primeiro lugar, embora seja de quarta ordem e conseqüentemente não altere a precisão formal da discretização espacial, esse termo dissipativo modifica a equação diferencial original e portanto o coeficiente ω_e adotado deve ser o menor possível. Deve-se notar que a dissipação atua nos campos do vetor q multiplicados pelo jacobiano da transformação de coordenadas. Esta precaução tem por objetivo evitar que a dissipação seja afetada por variações bruscas no espaçamento da malha mesmo quando os campos de propriedades sejam uniformes ou apresentem variações suaves. Por último, o termo dissipativo é multiplicado por Δt para que as soluções de regime permanente sejam independentes no intervalo de tempo.

Pulliam [64], considerando um problema linear e aplicando discretização espacial por derivadas centrais e discretização temporal pelo esquema implícito de primeira ordem demonstra, através da análise do fator de amplificação, que para valores elevados do produto $(\omega_e \Delta t)$ o esquema dissipativo de quarta ordem não é estável. Para estender o limite de estabilidade da dissipação explícita Pulliam [64] e Pulliam e Steger [65] recomendam o uso de termos dissipativos implícitos de segunda ordem. A Eq.(6.20) assume então a forma final

$$\left[I + \Delta t \frac{\partial A}{\partial \xi} - \omega_i \Delta t J^{-1} \nabla \xi \Delta \xi J \right] \left[I + \Delta t \frac{\partial B}{\partial \eta} - \omega_i \Delta t J^{-1} \nabla \eta \Delta \eta J \right] \Delta q =$$

$$- \Delta t \left(\frac{\partial E^n}{\partial \xi} + \frac{\partial F^n}{\partial \eta} \right) - \Delta t \omega_e J^{-1} \left[(\nabla \xi \Delta \xi)^2 + (\nabla \eta \Delta \eta)^2 \right] J q^n \quad (6.26)$$

Apesar de agora a análise de estabilidade linear indicar que o esquema é incondicionalmente estável se $\omega_i = 2\omega_e$, o fator de amplificação tende rapidamente a 1 quando Δt tende a infinito mesmo para o um problema unidimensional. A adoção de dissipação implícita de quarta ordem embora produza um esquema incondicionalmente estável destrói a estrutura tridiagonal da Eq.(6.26). Por último deve-se enfatizar que as análises de estabilidade supracitadas foram aplicadas a problemas unidimensionais. O processo de fatoração aproximada, já embutido na Eq.(6.26), interfere nas características de convergência através do termo adicional dado pela Eq.(6.24).

Embora a dissipação explícita de quarta ordem com coeficientes constantes seja ainda empregada é comum que as soluções apresentem oscilações nas regiões do escoamento antes e após os choques. Diversos outros esquemas tem sido desenvolvidos e embora mais complicados, conferem estabilidade ao processo de solução sem atenuar os choques e produzem soluções livres de oscilações. O trabalho de Pulliam e Steger [65] comenta diversos desses esquemas e demonstra que são equivalentes ao esquema de derivadas centrais com alguma forma de dissipação. Este assunto será novamente discutido neste trabalho no Cap. 10.

7 - RESULTADOS

7.1 - INTRODUÇÃO

Na grande maioria dos trabalhos envolvendo a solução de escoamentos compressíveis, as metodologias de solução das equações diferenciais governantes são baseadas em processos que envolvem a solução simultânea das equações diferenciais governantes, como no esquema proposto por Beam e Warming [17]. Como já comentado no Cap. 1 deste trabalho, essas metodologias enfrentam dificuldades na solução de escoamentos a baixo número de Mach. Neste capítulo serão apresentados alguns resultados obtidos para escoamentos compressíveis através da metodologia segregada apresentada nos capítulos anteriores, apta à solução de escoamentos em qualquer regime de velocidade.

O objetivo dos testes implementados é verificar se a metodologia tem capacidade de simular as características principais dos escoamentos compressíveis inclusive supersônicos. Os testes incluem o escoamento bidimensional plano contra um cilindro e uma série de escoamentos tridimensionais axissimétricos. Não houve em nenhum dos casos a intenção de realmente obter-se a solução do problema. Os escoamentos foram assumidos como laminares e muitas vezes os fluidos admitidos como não viscosos. Embora em alguns testes a malha tenha sido refinada com o objetivo de captar-se de forma mais precisa os altos gradientes existentes em determinadas regiões, notadamente nos choques, não se procurou de fato obter soluções independentes da malha.

Os resultados foram comparados, especialmente coeficientes de pressão, com resultados experimentais e outros resultados teóricos. Unicamente para facilitar este último objetivo foi especialmente construído um código computacional baseado no esquema de Beam e Warming [17]. Na realidade, em [17] o método foi desenvolvido em coordenadas cartesianas. No trabalho de Pulliam e Steger [65] o esquema foi implementado em coordenadas curvilíneas generalizadas. Este código foi inicialmente validado através da solução de dois problemas transientes bastante simples; um envolvendo o escoamento de Couette e outro um escoamento periódico entre duas placas planas e paralelas, uma das quais submetida a um movimento oscilatório. Embora a solução numérica desses problemas esteja exposta graficamente no próprio artigo em que o esquema de B&W é proposto, as soluções analíticas foram também computadas e utilizadas para comparações. Estes resultados não serão aqui apresentados.

Antes que os problemas mais complexos, envolvendo discretização não ortogonal, sejam enfocados, será abordado o problema do escoamento supersônico contra uma placa plana. O mesmo problema foi considerado por Van Doormaal [13]. Nosso objetivo nesse teste foi o de verificar a correção de um código construído para discretização cartesiana. Será no entanto aqui incluído para exemplificar o procedimento de aplicação das mais variadas condições de contorno e porque o mesmo tipo de configuração geométrica e condições de contorno foram aplicados na solução de um problema incompressível.

7.2. - ESCOAMENTO CONTRA UMA PLACA PLANA

A Fig. 7.1 mostra o domínio de solução. Através da fronteira esquerda entra uma corrente uniforme de ar a 103.4 kPa, 278 K e com número de Mach igual a 2.0. A fronteira inferior é uma fronteira de simetria. A placa (apenas metade é mostrada na figura) tem espessura zero e é não condutora. A malha empregada é uniformemente espaçada com 22 volumes na direção x e 18 volumes na direção y. Cada volume de controle resulta portanto em um quadrado com uma polegada de lado. Estes valores geométricos foram usados para reproduzir exatamente o problema testado em [13].

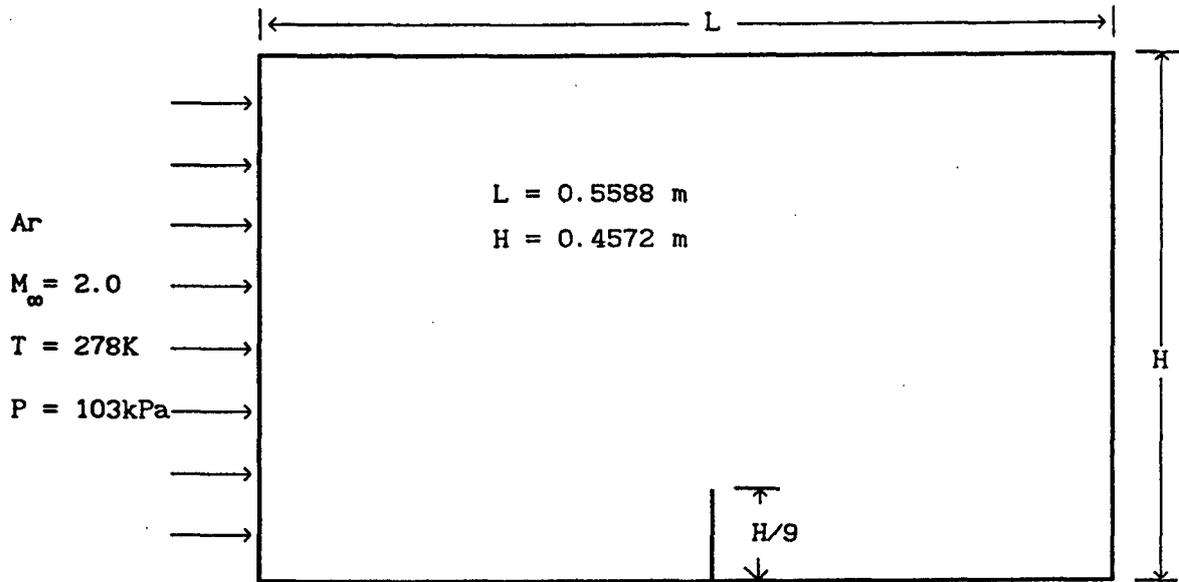


Figura 7.1 - Problema do escoamento em torno de uma placa plana.

Na solução desse problema foi adotado o arranjo desencontrado. O problema do acoplamento pressão-velocidade foi tratado pelo método SIMPLEC [43] e os sistemas de equações lineares resolvidos pela aplicação do MSI [35]. O critério de convergência é o mesmo de [13]. As condições iniciais são de escoamento uniforme em toda a região com condições iguais às da corrente livre. No instante $t = 0$ a placa é subitamente colocada contra a corrente de ar. Apesar de um único valor do intervalo de tempo Δt ter sido adotado para todos os volumes de controle, não houve nesta solução nem nas demais apresentadas neste capítulo preocupação em se reproduzir o comportamento real do escoamento durante o transiente. Dessa forma, o intervalo de tempo desempenha o papel de um parâmetro de relaxação.

As Figs. 7.2 e 7.3 mostram respectivamente linhas de pressão constante e linhas de corrente e são praticamente indistinguíveis das apresentada por Van Doormaal [13].

7.2.1 - CONDIÇÕES DE CONTORNO NA ENTRADA

Para aplicação das condições de contorno foi empregado o artifício do uso de volumes fictícios. A Fig. 7.4 mostra um volume

adjacente à fronteira de entrada e um volume fictício em linhas tracejadas.

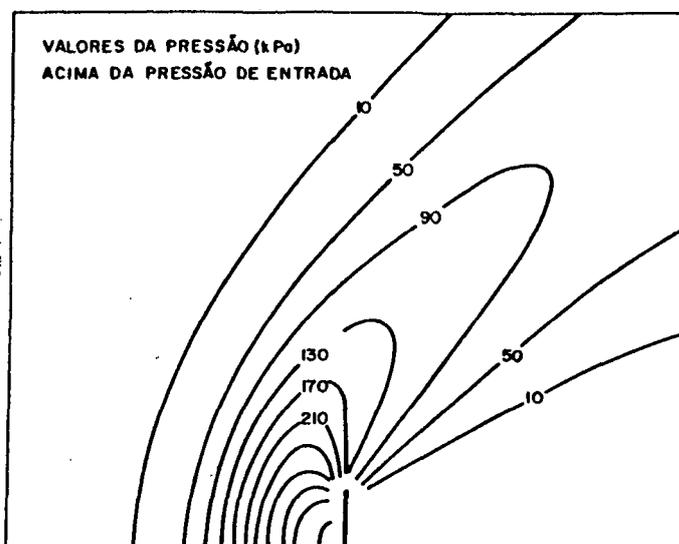


Figura 7.2 - Isobáricas. Valores em kPa acima da pressão de entrada.

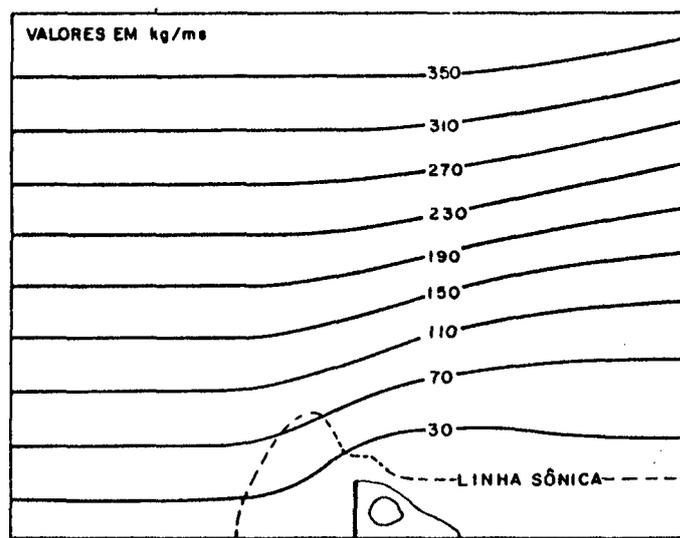


Figura 7.3 - Linhas de corrente. Valores em (kg/s) por metro na direção perpendicular ao papel.

A velocidade u_p , localizada sobre a fronteira, é prescrita igual ao valor da velocidade da corrente livre, correspondente ao número de Mach igual a 2.0. Considere agora a aplicação da condição de contorno para v , que deve ser prescrita igual a zero sobre a fronteira. É comum a aplicação dessa condição de contorno através da construção de uma equação para v_p do tipo

$v_P = -v_E$. Assim, a velocidade v sobre a fronteira, se calculada pela média aritmética entre v_P e v_E , resulta obviamente zero. Esse não é no entanto

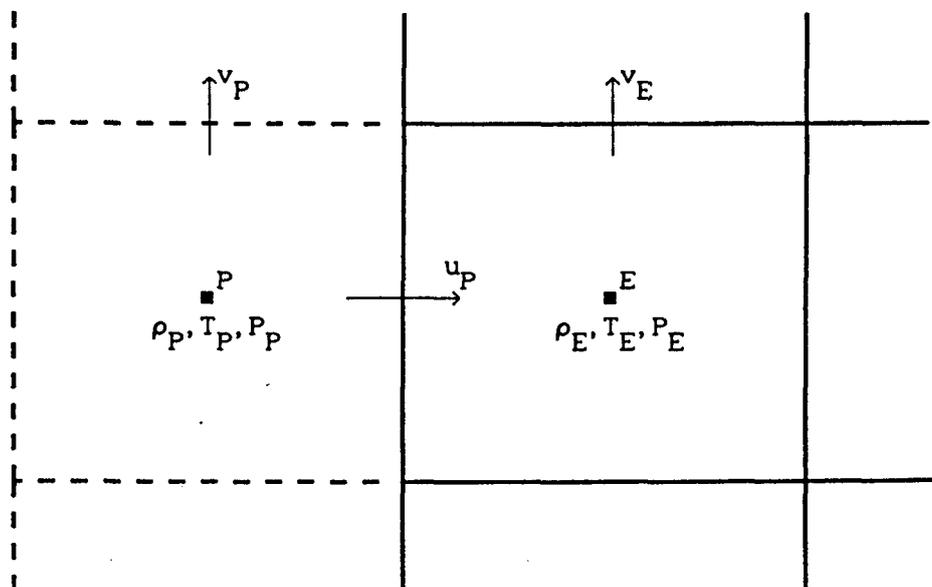


Figura 7.4 - Volume adjacente a fronteira de entrada.

o procedimento correto. A velocidade v_P participa do processo de solução na avaliação dos fluxos convectivo e difusivo da quantidade movimento na direção y na face oeste do volume de controle centrado em v_E . Na obtenção da equação discretizada para esse volume de controle, a velocidade v na face oeste (sobre a fronteira de entrada portanto) foi avaliada através de um perfil não linear produzido por equações do tipo da Eq. (4.2). Assim, para um alto número de Reynolds de malha, a velocidade v sobre a fronteira resulta igual a v_P . Nesse caso, o correto portanto é prescrever $v_P = 0$. Esse foi o procedimento adotado para aplicação da condição de contorno para v . Pelo mesmo motivo a temperatura T_P e a densidade ρ_P são prescritas iguais aos valores da corrente livre. Não é necessário especificar o valor da pressão P_P pois esta não participa do processo de solução. É óbvio no entanto que ao serem prescritos os valores de ρ_P e T_P , a pressão do escoamento livre está automaticamente especificada através da equação de estado. Em resumo, para a fronteira esquerda

$$\begin{aligned}
 u_P &= u_\infty \\
 v_P &= 0 \\
 T_P &= T_\infty \\
 \rho_P &= \rho_\infty
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

7.2.2 - CONDIÇÕES DE CONTORNO NA SIMETRIA

No presente problema, em que a fronteira de simetria coincide com uma linha de $y = \text{cte}$, as condições de contorno são evidentes e de fácil aplicação. Para o volume centrado em P da Fig. 7.5 as condições de contorno são aplicadas através de

$$\begin{aligned} T_P &= T_N \\ u_P &= u_N \\ v_P &= 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Como o fluxo de massa através da fronteira é nulo, a densidade ρ_P não influi na solução. Novamente, a pressão P_P não participa do processo de solução.

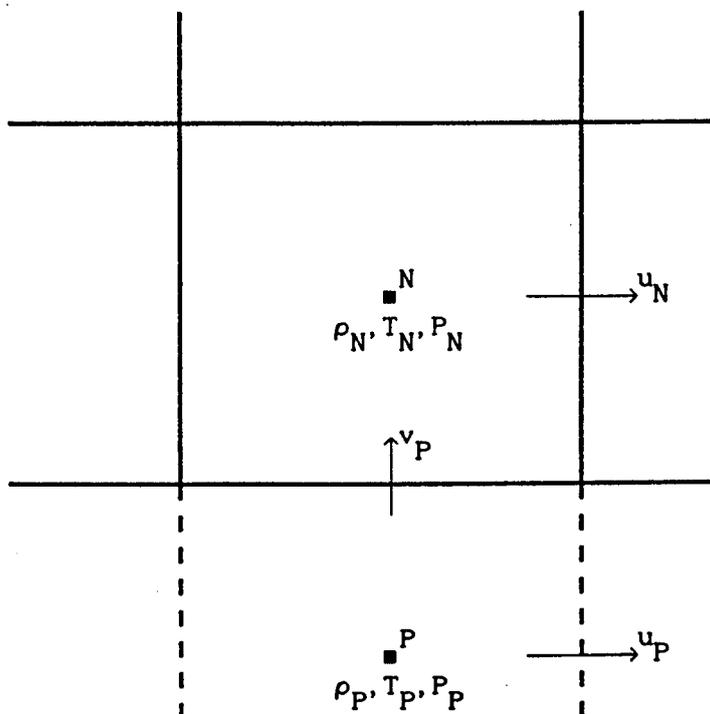


Figura 7.5 - Volume adjacente a linha de simetria.

7.2.3 - CONDIÇÕES DE CONTORNO NA FRONTEIRA SUPERIOR

A Fig. 7.6 ilustra a situação. Novamente, a pressão P_P não

participa da solução. Como a fronteira superior é uma fronteira de saída, a densidade sobre a fronteira resulta igual a ρ_S e portanto ρ_P também não precisa ser especificada. Para altos números de Peclet de malha, a temperatura na fronteira resultará igual a T_S e nesse caso a influência de T_P desaparece. Para números de Peclet baixos, a temperatura da fronteira deve ser extrapolada em função dos valores internos. É comum, nesse caso, usar uma extrapolação de ordem zero que significa assumir que a temperatura na fronteira é igual a T_S e portanto $T_P = T_S$. Exatamente o mesmo raciocínio é aplicado para a velocidade u e portanto $u_P = u_S$.

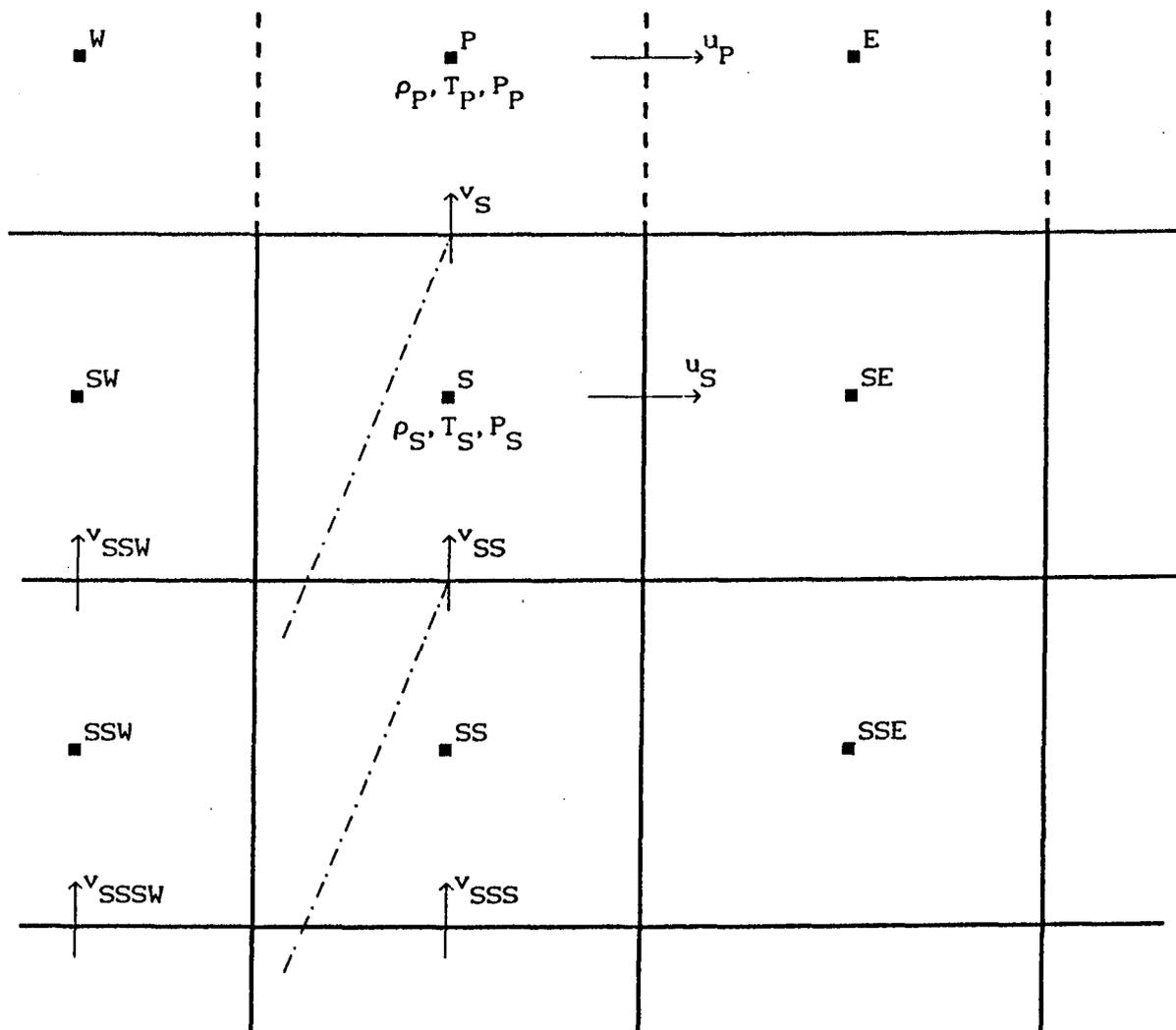


Figura 7.6 - Volume adjacente a fronteira superior.

A aplicação da condição de contorno para v exige no entanto cuidados especiais pois a mesma participa da conservação da massa dos volumes adjacentes à fronteira. A prescrição de v_S igual a zero por

exemplo faria com que a fronteira superior fosse interpretada como uma superfície impermeável. Nesse caso a solução seria provavelmente contaminada por reflexões de ondas originadas pela presença da placa. Uma alternativa seria, da mesma forma que para a temperatura, prescrever $v_S = v_{SS}$, isto é, aplicar uma extrapolação de ordem zero. Van Doormaal [13] no entanto, baseado em uma recomendação de Roache [66], busca na teoria das características um processo de extrapolação associado, mesmo que de forma bastante simplificada, à física do escoamento. Admitindo-se um escoamento de pequenas perturbações, as propriedades deste escoamento (u , v , P , T e ρ) são constantes ao longo de linhas características. A condição de contorno para v é aplicada assumindo-se que uma característica que passe sobre v_S tenha a mesma inclinação da característica sobre v_{SS} . Note que a inclinação desta característica é fácil de ser calculada determinando-se, através de uma interpolação linear, em que ponto do segmento entre v_{SSW} e v_{SS} a velocidade v é igual a v_{SS} . A velocidade v_S é então prescrita assumindo um valor entre v_{SSW} e v_{SS} . A inclinação da característica é avaliada com o último campo de v disponível e portanto atualizada a cada iteração. Assim, para a fronteira superior

$$\begin{aligned} u_P &= u_S \\ T_P &= T_S \\ v_S &= f(v_{SSW}, v_{SS}) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Deve-se enfatizar que a aplicação da condição de contorno para v através de uma extrapolação de ordem zero, isto é, $v_S = v_{SS}$, não introduz nenhuma dificuldade no processo de convergência e produz uma solução essencialmente igual às exibidas nas Figs. 7.2 e 7.3.

7.2.4 - CONDIÇÕES DE CONTORNO NA SAÍDA

Considere a Fig. 7.7 abaixo. Assim como em todas as demais fronteiras, a pressão nos volumes fictícios não participa do processo de solução. Por ser uma fronteira de saída a densidade fictícia também não precisa ser especificada. Adotando o mesmo raciocínio seguido na análise da fronteira superior, a velocidade v_P é prescrita igual a v_W a temperatura T_P igual a T_W .

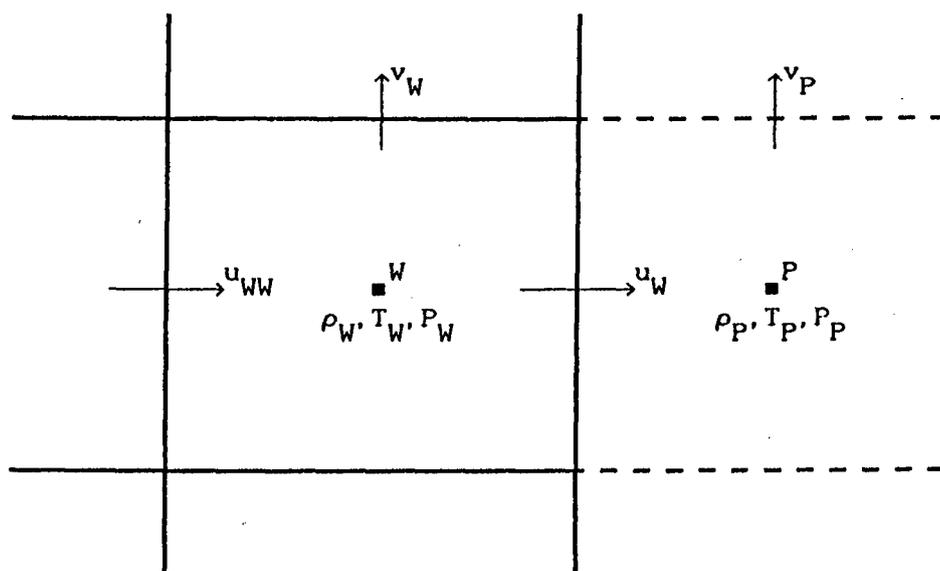


Figura 7.7 -- Volume adjacente a fronteira de saída.

Em que pese a velocidade u_W participar da conservação da massa e a fronteira de saída apresentar uma região subsônica e uma região supersônica, a condição $u_W = u_{WW}$ foi aplicada indistintamente sobre toda a fronteira. Assim, na fronteira de saída

$$\begin{aligned} v_P &= v_W \\ T_P &= T_W \\ u_W &= u_{WW} \end{aligned} \quad (7.4)$$

7.2.5 - CONDIÇÕES DE CONTORNO SOBRE A PLACA

Existem duas velocidades u armazenadas sobre a placa conforme mostra a Fig. 7.8 abaixo. Ambas evidentemente foram prescritas iguais a zero. A equação da conservação da massa foi também "informada" que essas velocidades u são insensíveis a variações no campo de pressões. As condições de contorno para v e T foram aplicadas através de alterações na própria equação de balanço já que não é possível nesse caso o uso de volumes fictícios. Esse procedimento admite algumas alternativas distintas para as velocidades v que estão à mesma altura que o topo da placa, isto é, as velocidades v_P e v_E mostradas na Fig. 7.8. Considere, por exemplo, o volume centrado em v_P . O fluxo de massa através

da face este deve ser calculado através do mesmo procedimento adotado para os volumes internos que envolve a média dos fluxos de massa nas faces este dos volumes centrados em P e N. A dificuldade reside em avaliar o valor de v e $\partial v/\partial x$ na face este, para que os fluxos convectivo e difusivo possam ser calculados. As alternativas mais simples são:

(a) desconsiderar a existência da placa. Neste caso a velocidade v e a derivada $\partial v/\partial x$ na face este serão calculadas da mesma forma que para um volume interno; e

(b) admitir v na face este igual a zero. Neste caso o fluxo convectivo da quantidade de movimento vai a zero apesar de existir fluxo de massa na face.

Embora alternativas mais sofisticadas possam ser elaboradas, a implementação das duas opções acima descritas não produziu diferenças notáveis nos resultados. Van Doormaal [13] não faz qualquer referência à aplicação das condições de contorno sobre a placa.

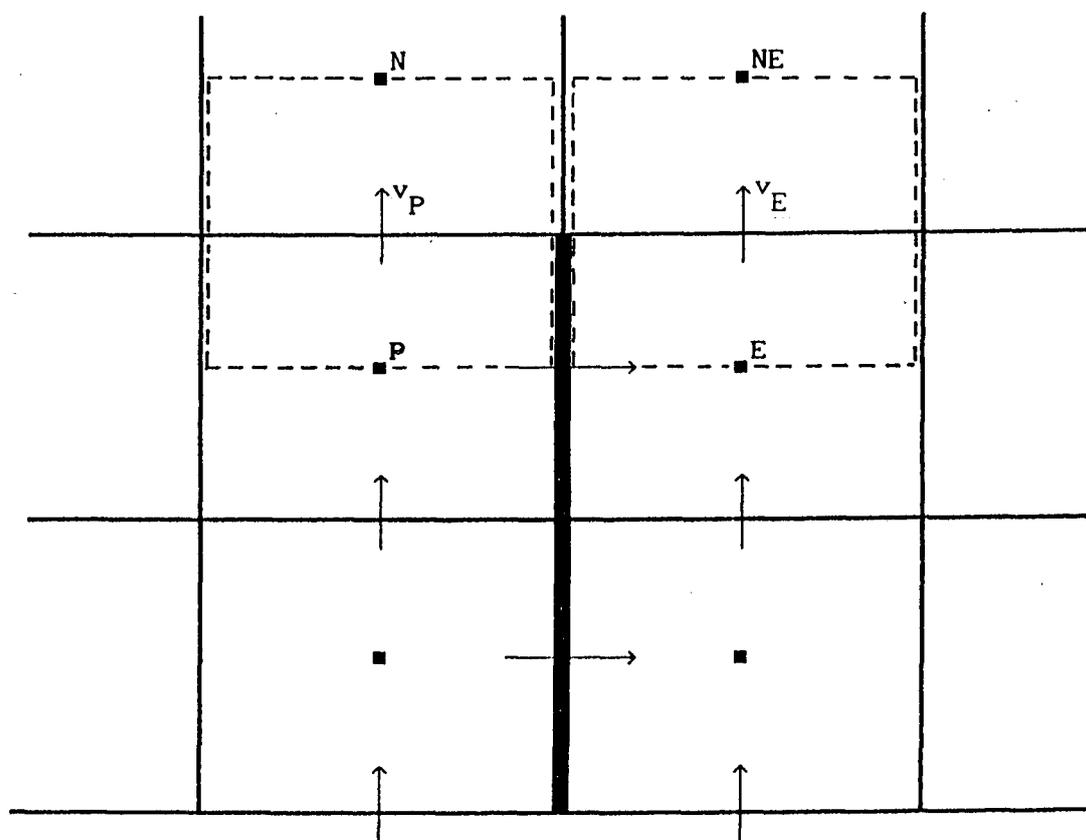


Figura 7.8 – Volumes vizinhos à placa

7.2.6 - TESTE DO MODELO PARA O LIMITE INCOMPRESSÍVEL

Após a verificação da correção do código computacional o mesmo foi aplicado na solução de um problema geometricamente semelhante porém no qual o número de Mach igual a 2.0 prescrito na entrada foi alterado para um valor muito próximo de zero. O objetivo é testar a capacidade do modelo em resolver escoamentos com baixo número de Mach. A velocidade na entrada foi prescrita de forma a resultar em um número de Reynolds, baseado na semi-altura da placa, igual a 5.0. Exatamente esse mesmo problema incompressível foi também resolvido por um código computacional escrito unicamente para problemas de escoamentos incompressíveis, usando a formulação descrita em 4.3.2. A Fig. 7.9 mostra o comportamento do tempo de CPU para que a formulação incompressível e a para que qualquer regime de velocidade alcançassem a convergência em função do intervalo de tempo adimensional definido por

$$\Delta t^* = \frac{\Delta t u_\infty}{L} \quad (7.5)$$

Embora os tempos mínimos das duas formulações sejam próximos, a formulação geral apresenta um comportamento nitidamente superior pois o esforço computacional é menos sensível ao valor de Δt^* empregado.

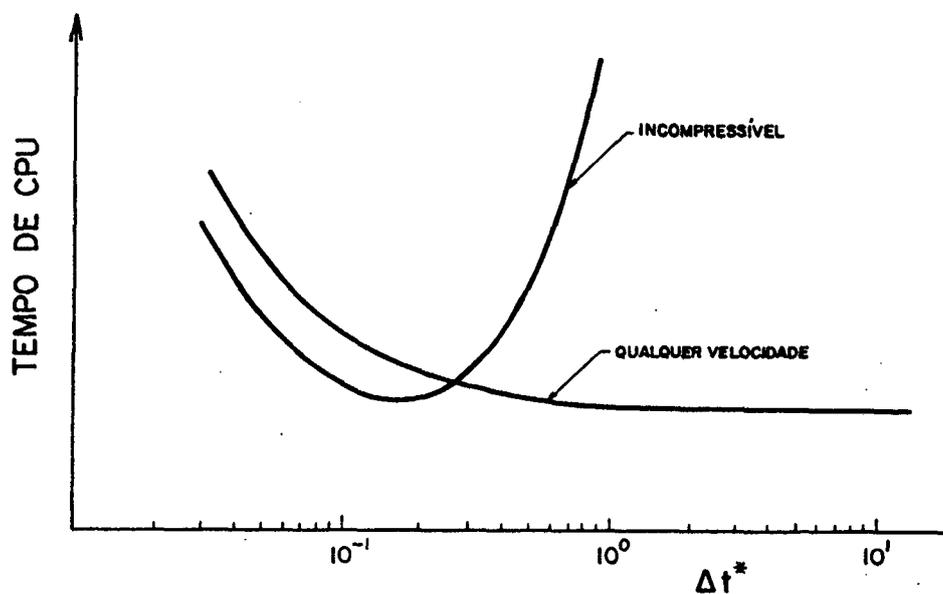


Figura 7.9 - Comportamento do tempo de CPU consumido pelas formulações incompressível e para qualquer regime de velocidade.

Após uma análise detalhada das duas formulações, conclui-se que a diferença de comportamento deve ser atribuída unicamente ao método SIMPLEC [43] empregado para tratamento do acoplamento pressão-velocidade. Neste método, o termo \bar{d}^u da Eq.(4.17) é avaliado por

$$\bar{d}^u = \frac{\Delta y}{\left[a_p^u - \sum a_{nb}^u \right]} \quad (7.6)$$

Para o presente problema, que envolve discretização cartesiana, o termo \bar{d}^u assume a forma [18]

$$\bar{d}^u = \frac{\Delta y}{\rho^0 \Delta x \Delta y u_\infty / (L \Delta t^*) + 2\mu \Delta y / (3\Delta x)} \quad (7.7)$$

quando a formulação para qualquer regime de velocidades é empregada. O último termo do denominador é originário do deslocamento para o coeficiente a_p de parte do termo $(\mu/3)(\partial/\partial x)(\nabla \cdot \vec{V})$ presente na equação da conservação da quantidade de movimento na direção x. Observa-se na Eq. (7.7) que \bar{d}^u só varia de volume para volume face a variações de densidade. Na Tab. 7.1 estão mostrados valores de \bar{d}^u em função do intervalo de tempo adimensional Δt^* para um valor de ρ^0 igual a 1.3 kg/m^3 .

No programa incompressível todos os termos associados a variações de densidade foram eliminados e portanto inexiste o segundo termo do denominador. A Tab. 7.1 mostra também os valores de \bar{d}^u assim computados.

TABELA 7.1 - Valores de \bar{d}^u ($\text{m}^2\text{s/kg}$) para $\rho^0 = 1.3 \text{ kg/m}^3$ nos programas compressível e incompressível

Δt^*	Compressível	Incompressível
0.01	120	130
0.1	810	1300
1.0	1860	13000
10.0	2140	130000
∞	2180	∞

Verifica-se que para baixo Δt^* os valores de \bar{d}^u das duas formulações são semelhantes resultando em um esforço computacional próximo conforme a Fig 7.9. Deve-se mencionar que é natural que nesse caso a formulação incompressível leve vantagem em termos de esforço computacional pois alguns cálculos presentes na formulação para qualquer velocidade foram eliminados.

Para concluir, no entanto, porque a formulação compressível tem desempenho superior para valores de Δt^* elevados é necessário levar em conta a influência desse parâmetro em todo o processo de solução. Além de participar na avaliação de \bar{d}^u , o intervalo de tempo influi na magnitude dos termos referentes ao transiente nas equações de conservação discretizadas. Conforme Δt^* cresce, a influência destes termos diminui e se Δt^* é suficientemente grande, da solução de cada equação de conservação obter-se-á os campos de regime permanente para um dado conjunto de coeficientes. Ou, em outras palavras, para altos Δt^* os campos de u e v calculados pelas respectivas equações de conservação independem do valor de Δt^* . É como se os campos resultantes "esquecessem" dos campos do instante anterior. A observação da Tab. 7.1 no entanto mostra que na formulação incompressível os valores de \bar{d}^u crescem indefinidamente com Δt^* . Assim, para altos valores de Δt^* , tem-se também altos valores de \bar{d}^u . Isso significa que pequenas correções no campo de pressões são suficientes para alterar o campo de velocidades de forma que a equação de conservação da massa seja satisfeita, conforme a Eq.(4.17). Entretanto, esse campo de pressões pouco alterado, quando aplicado nas equações de conservação da quantidade de movimento, gerará campos de velocidade muito próximos dos anteriores e a solução não avança. Na formulação compressível, por outro lado, à medida que Δt^* cresce e deixa de influir na solução das equações de conservação da quantidade de movimento, também deixa de influir no cálculo do campo de pressões devido ao comportamento assintótico de \bar{d}^u .

Como teste final, no programa compressível a parcela do termo $(\mu/3)(\partial/\partial x)(\nabla \cdot \vec{V})$ inicialmente presente no coeficiente a_p foi deslocada para o termo-fonte. Como esperado, este passou a ter exatamente o mesmo comportamento do programa incompressível.

Concluindo, o desempenho da formulação para qualquer regime de escoamento quando aplicada à solução de problemas incompressíveis é exatamente igual ao da formulação incompressível. As diferenças de comportamento sumarizadas na Tab. 7.1 não tem relação alguma com a forma de linearização da equação da conservação da massa que é o ponto chave da

formulação geral. Os resultados obtidos indicam no entanto que mesmo no caso de programas computacionais visando unicamente a solução de escoamentos a baixas velocidades é interessante manter os termos de compressibilidade nas equações da quantidade de movimento face ao melhor desempenho do método SIMPLEC [43] na presença deste.

7.3 - ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL CONTRA UM CILINDRO

A metodologia não ortogonal proposta no Cap. 5, com o arranjo de volumes de controle proposto na secção 5.2, foi aplicada na solução do escoamento bidimensional contra um cilindro. A Fig. 7.10 mostra a região de solução. Testes foram conduzidos para M_∞ entre 1.5 e 6.0. A Fig. 7.11 mostra uma malha empregada para $M_\infty = 4.0$ gerada através da solução de um sistema de equações diferenciais elípticas [30].

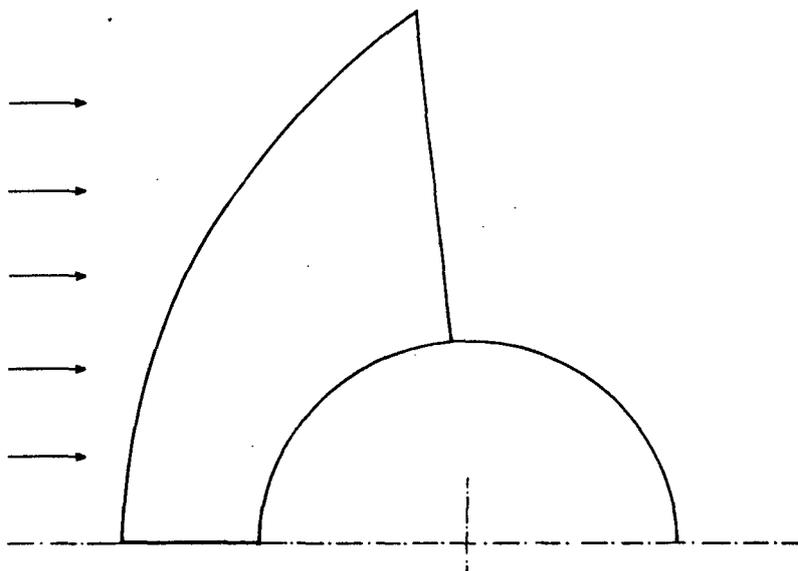


Figura 7.10 - Região de solução em torno de um cilindro.

A Fig 7.12 mostra linhas de número de Mach constante para $M_\infty = 4.0$. Não se observa nessa solução uma variação muito acentuada do número de Mach, assim como das outras variáveis, através do choque. Esse comportamento, comum às técnicas que capturam naturalmente os choques presentes no escoamento, está no presente caso amplificado devido a malha grosseira empregada.

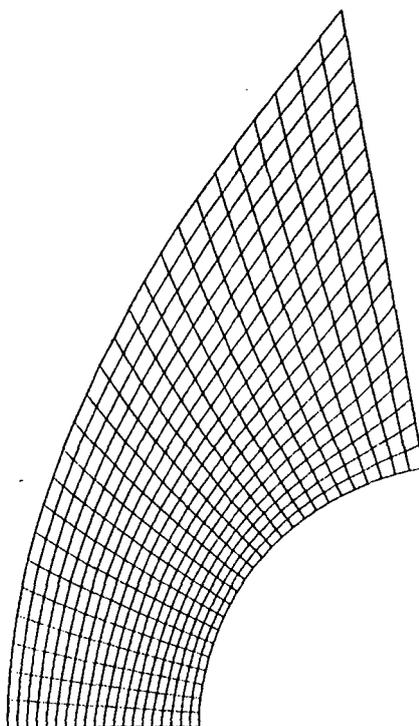


Figura 7.11 - Malha 20X26 empregada na solução do escoamento com $M_\infty = 4.0$ contra um cilindro.

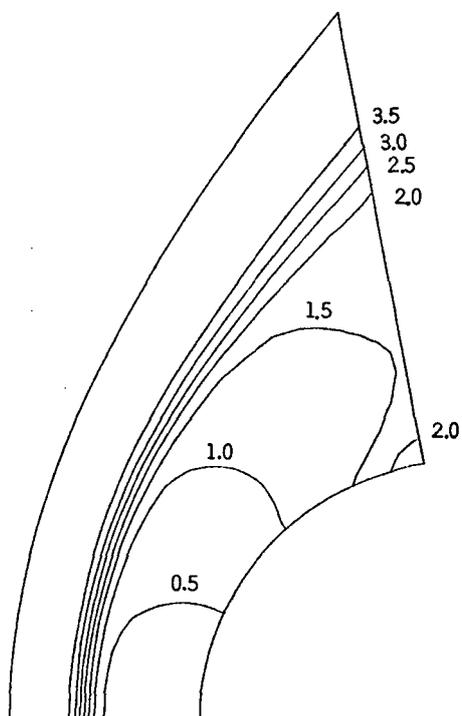


Figura 7.12 - Curvas de número de Mach constante no escoamento contra um cilindro ($M_\infty = 4.0$).

Uma verificação interessante é se o esquema numérico posiciona corretamente o choque. Como não existe de fato uma descontinuidade na solução, um critério plausível é definir como posição do choque o local onde ocorre o máximo gradiente de pressão. Se essa verificação é conduzida na linha de estagnação a posição do choque fica estabelecida apenas por $\partial P/\partial x$ já que $\partial P/\partial y$ é nulo. Se esse critério é aplicado, a presente solução indica que o choque está localizado a uma distância do corpo, adimensionalizada em relação ao raio do cilindro, em torno de 0.41 que concorda com as observações visuais da Fig 7.12 e da Fig. 7.13 onde são expostos vetores velocidade. Esse resultado deve ser comparado com o valor observado experimentalmente aproximadamente igual a 0.6 [86]. A

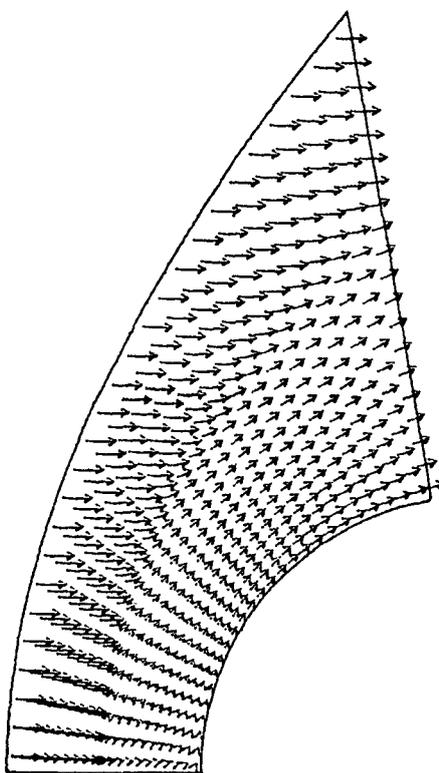


Figura 7.13 - Vetores velocidade no escoamento contra um cilindro.

Fig. 7.14 mostra uma malha mais refinada empregada ainda na solução para $M_\infty = 4.0$ e a Fig. 7.15 novamente linhas de número de Mach constante obtidas com essa malha. Embora se perceba uma melhor definição do choque sua posição é praticamente coincidente com aquela obtida com a malha mais grosseira.

Os testes feitos com outros números de Mach exibem um comportamento semelhante. O processo iterativo de solução converge estavelmente e os campos de regime permanente gerados são sempre

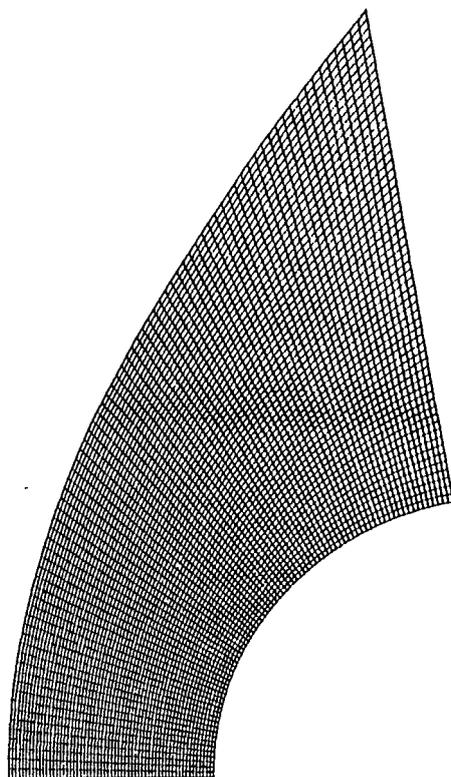


Figura 7.14 - Malha 60X80 empregada na solução do escoamento com $M_\infty = 4.0$ contra um cilindro.

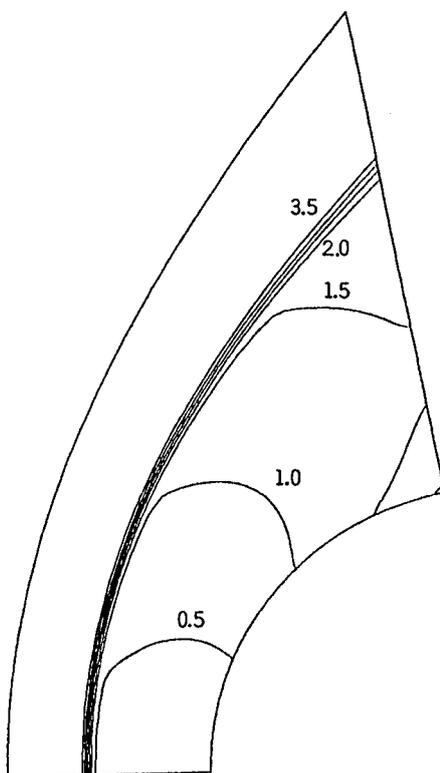


Figura 7.15 - Curvas de número de Mach constante obtidas com a malha da figura 7.14 ($M_\infty = 4.0$).

fisicamente realísticos. Os choques aparecem atenuados, tanto mais atenuados quanto mais grosseira a malha e posicionados a distâncias menores do corpo que as verificadas experimentalmente.

Resultados a serem apresentados posteriormente indicam que a capacidade da solução em captar satisfatoriamente os altos gradientes existentes no escoamento está intimamente relacionada, além da malha, com o processo de interpolação envolvido na avaliação das propriedades nas faces dos volumes de controle. Nas soluções recentemente apresentadas os valores de $|\bar{\alpha}|$ presentes na Eq.(4.2) e similares resultam igual a 0.5. Com $|\bar{\gamma}|$, aplicado na avaliação da densidade nas interfaces através da Eq.(4.9) e similares também assumindo o valor de 0.5 resulta em um esquema de aproximações "upwind", ou de primeira ordem, aplicado a todas as variáveis. Será demonstrado que o esquema "upwind", introduz uma excessiva quantidade de dissipação artificial e esta implica na atenuação do choque. A discussão de alguns esquemas menos dissipativos, e a penalidade que se paga em contrapartida, serão assuntos de um capítulo posterior.

7.4 - ESCOAMENTOS AXISSIMÉTRICOS

Estão incluídos nesta secção um conjunto de testes envolvendo a solução de escoamentos tridimensionais axissimétricos. Estes testes visam simular as condições de voo de um foguete com ângulo de ataque nulo.

Nos capítulos anteriores as equações diferenciais foram escritas, previamente à transformação de coordenadas, no sistema cartesiano. Assim as componentes cartesianas u e v nas direções x e y respectivamente resultaram as variáveis dependentes. Para a solução de escoamentos axissimétricos, o sistema de coordenadas original deve ser o cilíndrico. Alguns termos das equações transformadas e o jacobiano da transformação passam em consequência a envolver a coordenada radial. Mais detalhes podem ser vistos em [19].

Com relação ao esquema de B&W, além da inclusão da coordenada radial no jacobiano da transformação, a solução de escoamentos axissimétricos dá origem apenas a uma alteração no termo de pressão da equação da conservação da quantidade de movimento na direção radial. Essas equações são apresentadas em [69], para o caso do escoamento próximo a um projétil rotativo, onde existe a axissimetria mas acompanhada de uma velocidade azimutal. O trabalho de Deiwert [70] também apresenta com

detalhes as equações para o escoamento axissimétrico mas deve ser evitada face a algumas incorreções.

Os resultados expostos nesta secção serão comparados com outros dados teóricos e experimentais. Especial ênfase será dada à comparação com resultados obtidos através do bem conhecido esquema de Beam e Warming [17], largamente empregado para solução de problemas de escoamentos compressíveis. Como já comentado, um código baseado nesse esquema foi especialmente construído com esse objetivo. As comparações envolverão o coeficiente de pressão C_p , definido por

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2} \quad (7.8)$$

que, para um gás perfeito se reduz a

$$C_p = \frac{(P/P_\infty - 1)}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2} \quad (7.9)$$

7.4.1 - HEMISFÉRIO-CILINDRO

O escoamento de ar sobre um corpo com a forma mostrada na Fig. 7.16, daqui para frente denominado de hemisfério-cilindro, foi utilizado para diversas comparações e análises. Tal configuração foi escolhida para possibilitar a comparação com alguns resultados experimentais e com os obtidos por Azevedo [67].

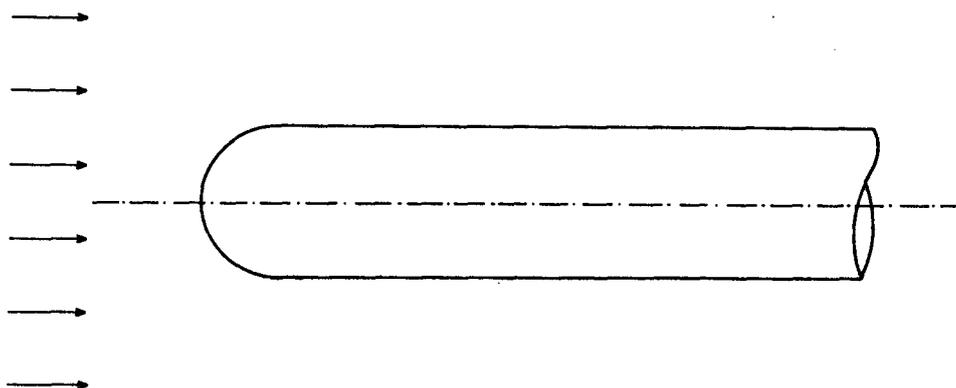


Figura 7.16 - Geometria do hemisfério-cilindro.

A Fig. 7.17 mostra uma das malhas empregadas na solução, idêntica àquela utilizada em [67]. Trata-se de uma malha de 40 pontos na direção radial por 50 na direção axial. Se a origem do sistema (r,x) é posicionada no centro da esfera e as distâncias adimensionalizadas em relação ao raio, o cilindro tem 14 unidades de comprimento e o domínio de solução inicia-se, na linha de simetria, na coordenada $x = -30$. O afastamento entre os pontos da malha na direção radial cresce a partir da superfície do corpo a uma taxa de 25%. Alguns resultados foram obtidos com uma malha semelhante porém com 30×30 volumes. As soluções obtidas com as duas malhas são quase indistinguíveis.

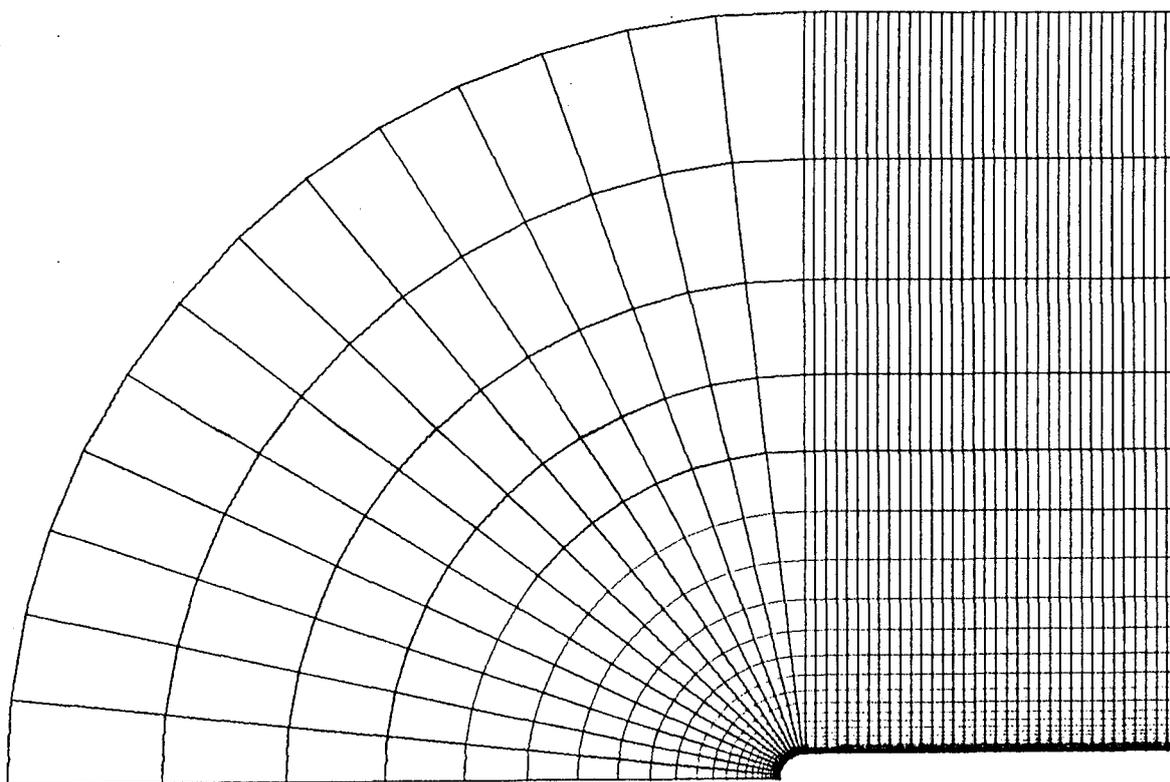


Figura 7.17 - Malha 40X50 sobre o hemisfério-cilindro.

A Fig. 7.18 mostra as distribuições do coeficiente de pressão C_p sobre o corpo para $M_\infty = 0.6$ obtidas no presente trabalho através da metodologia para qualquer regime de velocidade e pelo programa baseado no esquema B&W. Constam também dessa figura resultados experimentais citados em [67] e os resultados obtidos pelo código tridimensional desenvolvido em [67] (baseado também no esquema de B&W). As duas soluções numéricas obtidas no presente trabalho para este problema subsônico envolveram a mesma malha, mesmo intervalo de tempo e satisfizeram os mesmos critérios

de convergência em número de iterações semelhantes. Nesta figura a solução numérica obtida através da metodologia numérica proposta no presente trabalho é referenciada por S-FV, indicando tratar-se de uma metodologia segregada em volumes finitos.

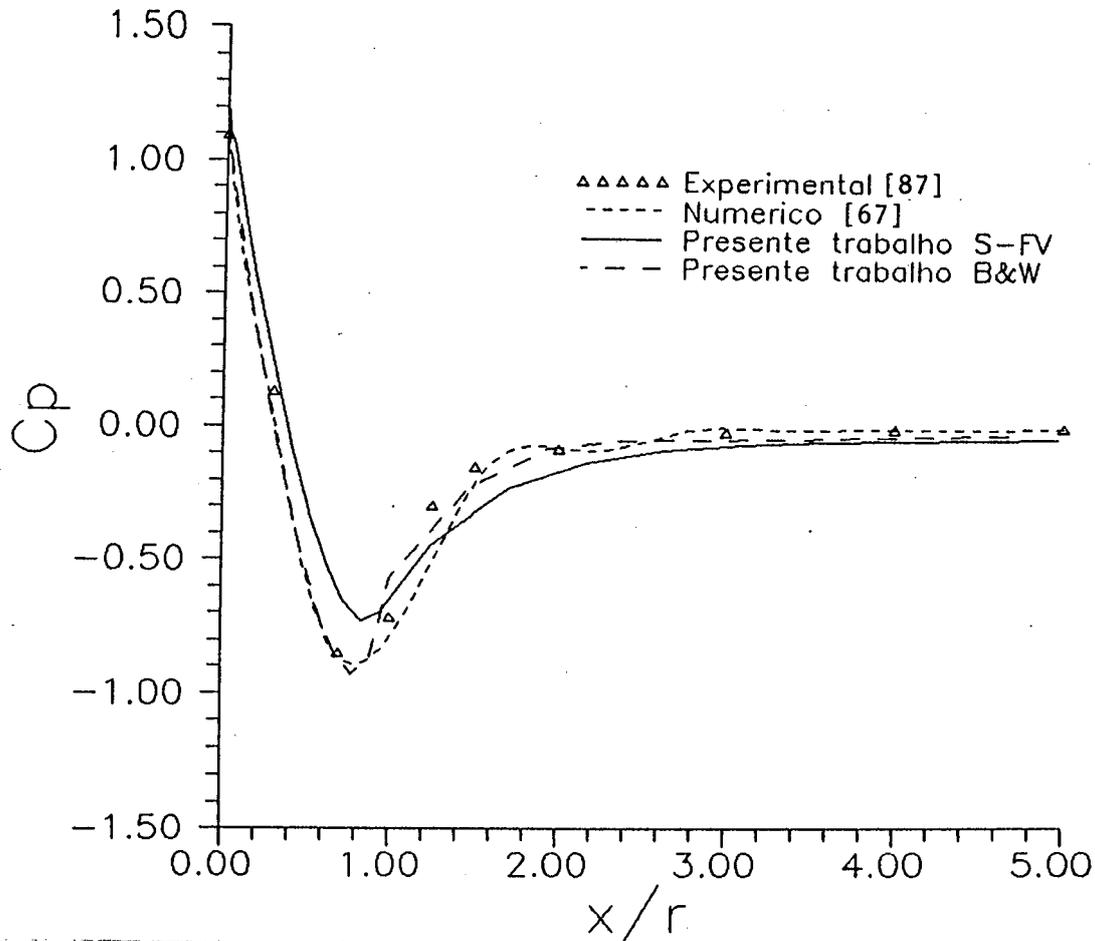


Figura 7.18 - Coeficiente de pressão sobre a superfície do hemisfério-cilindro para $M_\infty = 0.6$.

A solução obtida via B&W apresenta sem dúvida boa concordância com os resultados experimentais. É bom salientar entretanto, que diversas soluções foram obtidas variando-se o coeficiente de dissipação explícita artificialmente adicionado às equações. Os resultados expostos são referentes a um coeficiente de dissipação explícita igual a 0.2, valor que pode ser considerado baixo. A solução difere da apresentada em [67] provavelmente devido ao uso de coeficientes de dissipação diferentes e aos maiores erros de discretização envolvidos neste último trabalho por se tratar de uma formulação tridimensional tendo como sistema de coordenadas original o cartesiano.

A solução obtida através do esquema para qualquer regime de velocidade apresenta uma característica indesejável. Nota-se que os resultados não conseguiram acompanhar adequadamente as variações mais bruscas do coeficiente de pressão. O pico negativo e o subsequente crescimento foram suavizados. Essa tendência a "arredondar" as curvas deve ser creditada também a excessiva dissipação numérica presente na discretização espacial das equações diferenciais.

A Fig. 7.19 a seguir mostra a distribuição do coeficiente de pressão ao longo da linha de estagnação para $M_\infty = 1.5$ obtida através da metodologia proposta no presente trabalho e a obtida, também no presente trabalho, através do esquema devido a B&W. As diferenças marcantes entre as duas curvas refletem características distintas envolvidas no desenvolvimento dos dois métodos.

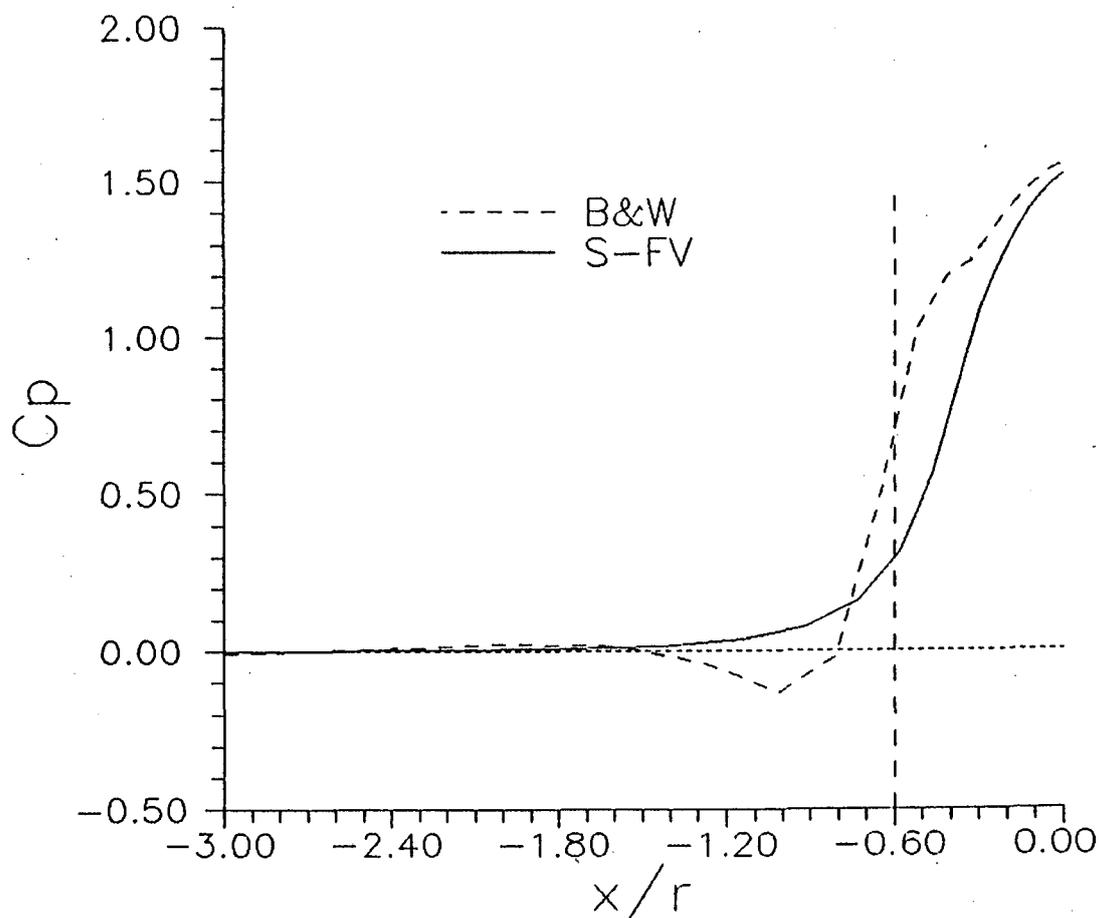


Figura 7.19 - Coeficiente de pressão ao longo da linha de estagnação para o escoamento contra o hemisfério cilindro ($M_\infty = 1.5$).

O esquema de B&W produz valores de C_p negativos originados da

aplicação do esquema de diferenças centrais associado a dissipação artificial de quarta ordem com coeficientes constantes. Se o coeficiente de dissipação explícita é reduzido o processo iterativo de solução diverge. Se esse coeficiente é incrementado os irrealis valores negativos se acentuam. É comum também aparecer, associado a esse tipo de dissipação artificial, uma superestimativa do valor de C_p após o choque além da subestimativa antes do choque.

Resultados experimentais indicam a ocorrência de um choque a uma distância do corpo, adimensionalizada em relação ao raio do cilindro, igual a 0.6. Os resultados numéricos obtidos via B&W indicam uma região de maior gradiente de pressão, com o centro dessa região em x/R aproximadamente igual a 0.6. Após essa região de gradiente elevado a pressão continua a subir, a uma taxa menor, até o valor na estagnação. A Fig. 7.20 mostra curvas de pressão constante. Corroborando os resultados da Fig. 7.19, percebe-se uma região de gradiente de pressão elevado e aproximadamente uniforme a uma distância do corpo igual a 0.6.

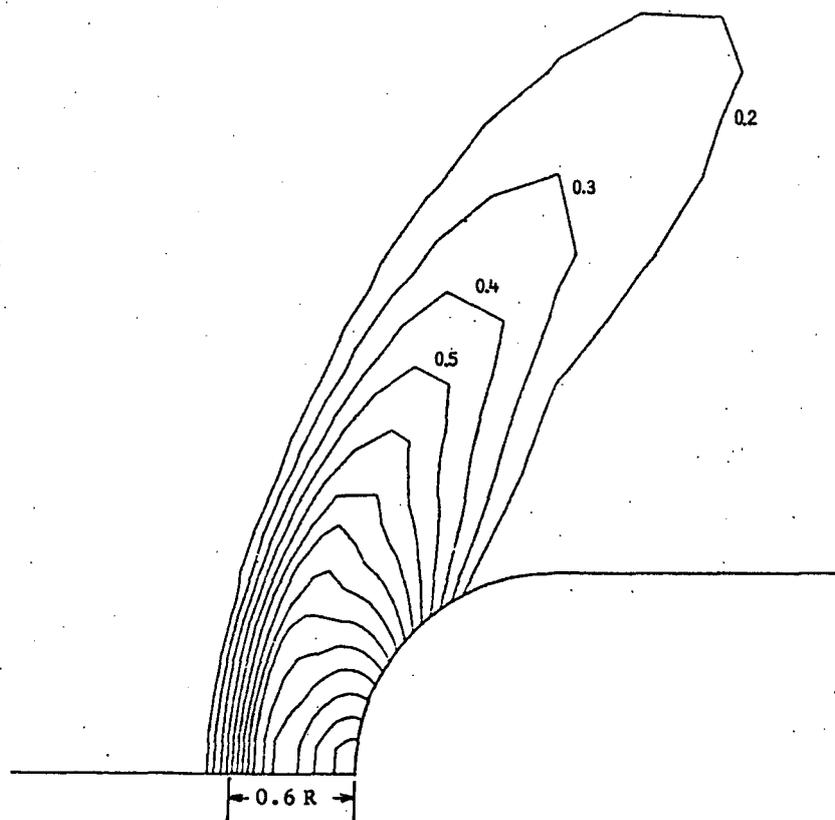


Figura 7.20 - Curvas de C_p constante obtidas via B&W ($M_\infty = 1.5$)

Já a curva para C_p ao longo da linha de simetria obtida pela

metodologia segregada não apresenta os valores negativos não físicos. Por outro lado, a região na qual dever-se-ia esperar um aumento mais acentuado da pressão é deslocada em direção ao corpo e se confunde com a região subsônica em que a pressão sobe de maneira mais suave para o seu valor na estagnação. A Fig. 7.21 mostra curvas de pressão constante obtidas através da metodologia segregada e reforça a conclusão já observada na solução do escoamento contra o cilindro, de que a metodologia segregada tende a aproximar do corpo as regiões de variações mais acentuadas das propriedades em relação à correta posição do choque. No Cap. 10 será mostrado que essa característica deve também ser creditada a excessiva dissipação numérica gerada na discretização espacial das equações diferenciais. Não obstante, a solução é fisicamente realística e o processo de solução converge estavelmente a partir da estimativa inicial para a solução de regime permanente. Os resultados a serem apresentados na próxima secção demonstrarão que apesar dos defeitos apontados, os valores do coeficiente de pressão sobre o corpo são razoavelmente bem previstos.

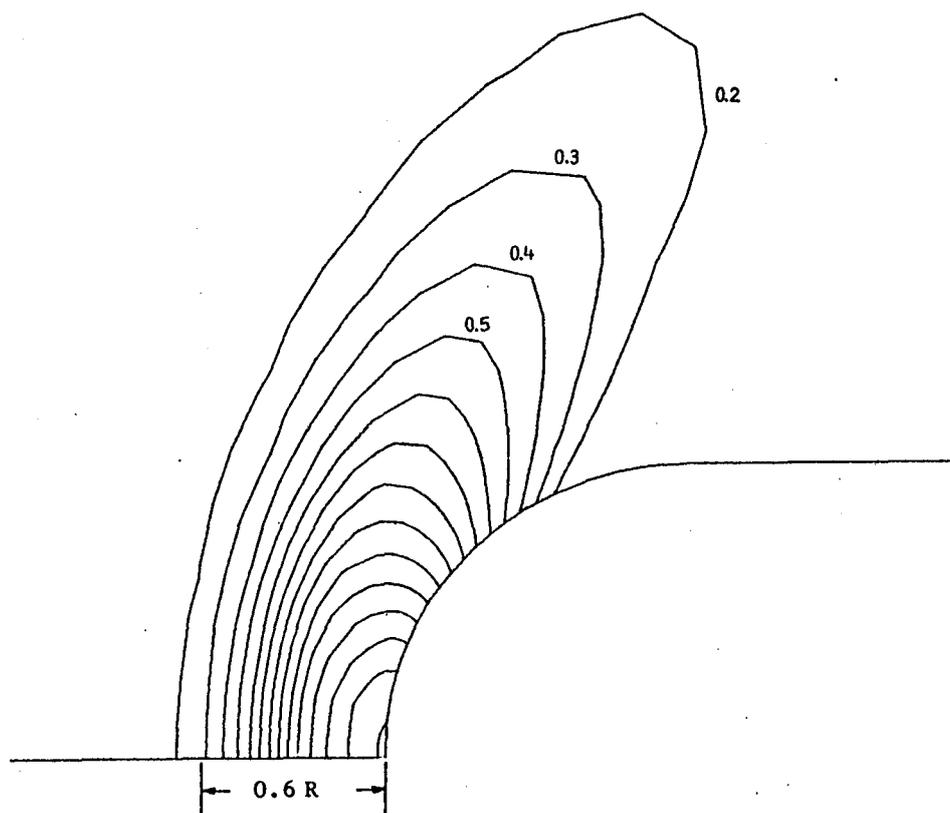


Figura 7.21 - Curvas de C_p constante obtidas através da metodologia segregada ($M_\infty = 1.5$)

7.4.2 - ESCOAMENTO CONTRA O VEÍCULO LANÇADOR DE SATÉLITES (VLS) BRASILEIRO

Os resultados apresentados até aqui foram obtidos com o objetivo de verificar o comportamento do modelo e sua capacidade de resolver problemas no regime de baixa velocidade e no de alta velocidade envolvendo choques. Nesta secção são apresentados resultados para o escoamento sobre o Veículo Lançador de Satélites brasileiro (VLS), para diferentes números de Mach. Resultados experimentais obtidos em túnel de vento [71] são comparados com os numéricos deste trabalho. O VLS está sendo desenvolvido pelo Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE) do CTA de São José dos Campos e trata-se do veículo que colocará em órbita o primeiro satélite brasileiro de exploração científica, projeto conhecido como Missão Espacial Completa Brasileira. A necessidade de se desenvolver no país modelos numéricos na área de aerodinâmica para fazer frente às necessidades do projeto VLS bem como em futuros projetos nacionais foi a motivação principal deste trabalho.

A previsão do escoamento contra a parte frontal do VLS foi obtida para três números de Mach.

A Fig. 7.22 mostra uma das malhas empregada enquanto as Figs. 7.23, 7.24 e 7.25 mostram curvas teóricas para o coeficiente de pressão

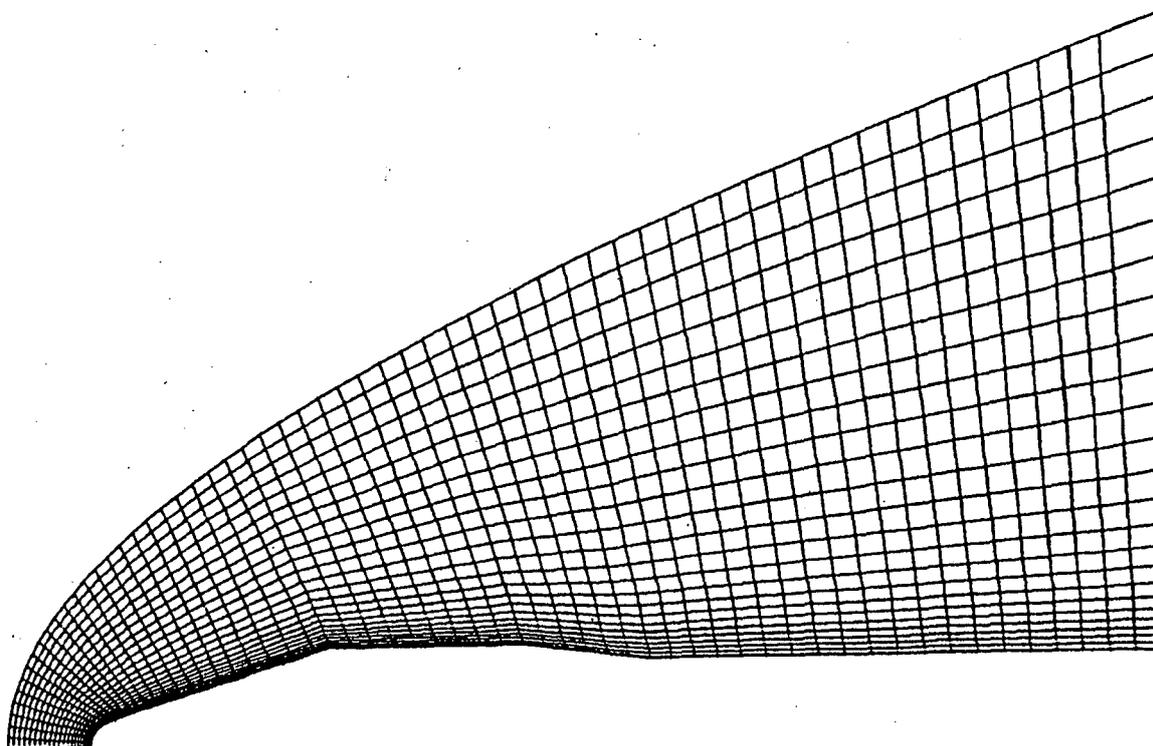


Figura 7.22 - Malha 60X24 sobre o VLS.

sobre o corpo em comparação com os resultados experimentais para M_∞ igual a 3.75, 2.50 e 1.50 respectivamente. Os resultados numéricos acompanham, com maior sucesso nos dois primeiros casos, as diversas compressões e expansões existentes sobre o corpo. Para os escoamentos com números de Mach mais alto mesmo a comparação quantitativa é satisfatória em vista da malha empregada. A tendência de atenuar os gradientes maiores, já esperada, se manifesta porém não de forma exagerada. Para $M_\infty = 1.5$ no entanto o próprio comportamento dos dados experimentais é mais complexo e mais a solução numérica se afastou desses dados. A tendência de "arredondar" os máximos e mínimos locais é bastante evidente especialmente nas expansões.

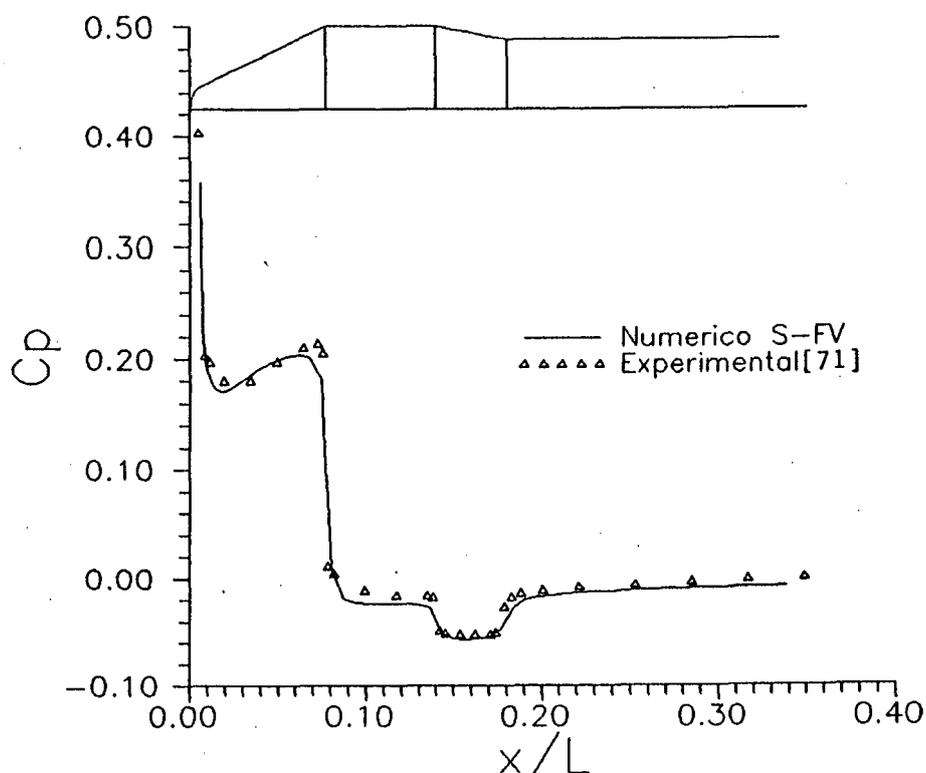


Figura 7.23 - Coeficiente de pressão sobre o VLS para $M_\infty = 3.75$.

O mesmo caso $M_\infty = 1.5$ foi resolvido com a malha mais refinada da Fig.7.26 produzindo os resultados da Fig 7.27. É evidente que o refino da malha contribuiu para a qualidade dos resultados.

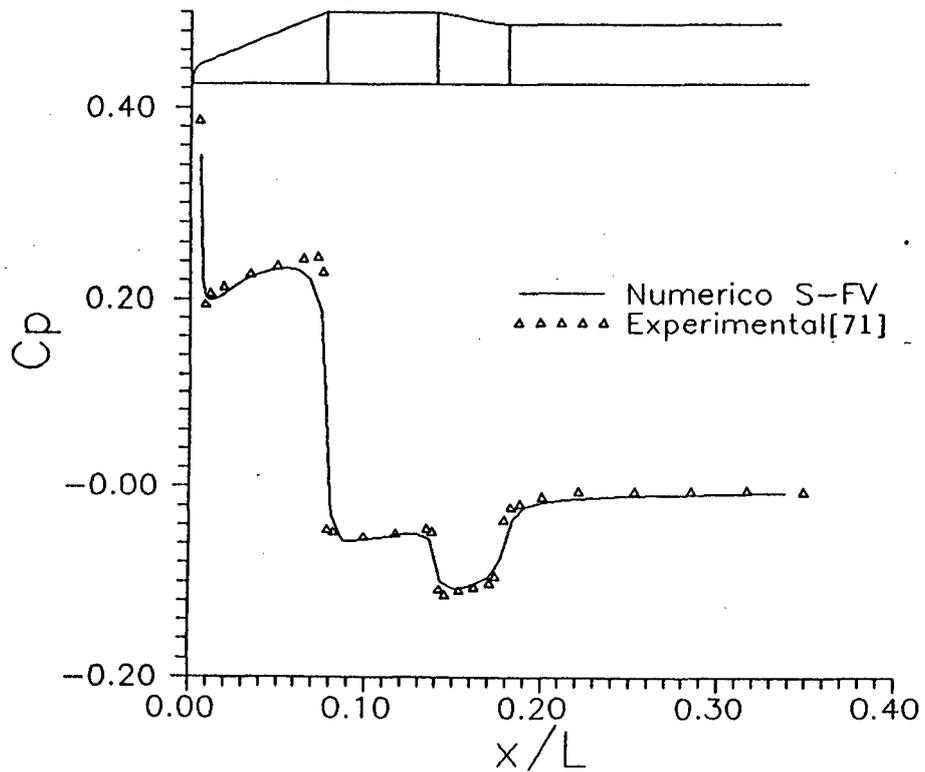


Figura 7.24 - Coeficiente de pressão sobre o VLS para $M_\infty = 2.50$.

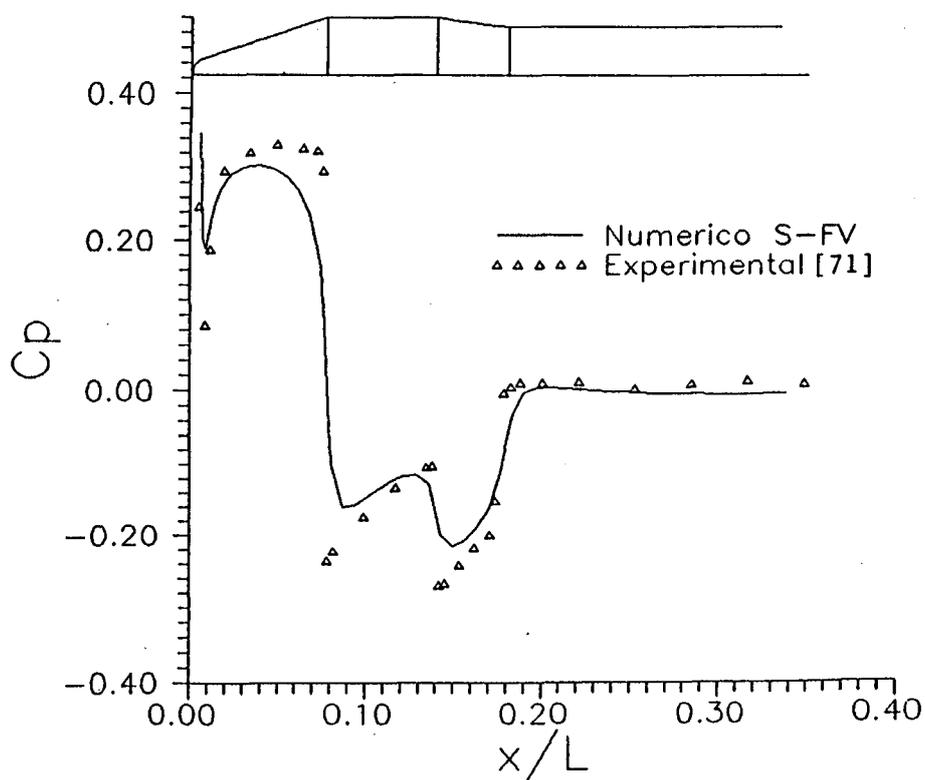


Figura 7.25 - Coeficiente de pressão sobre o VLS para $M_\infty = 1.50$.

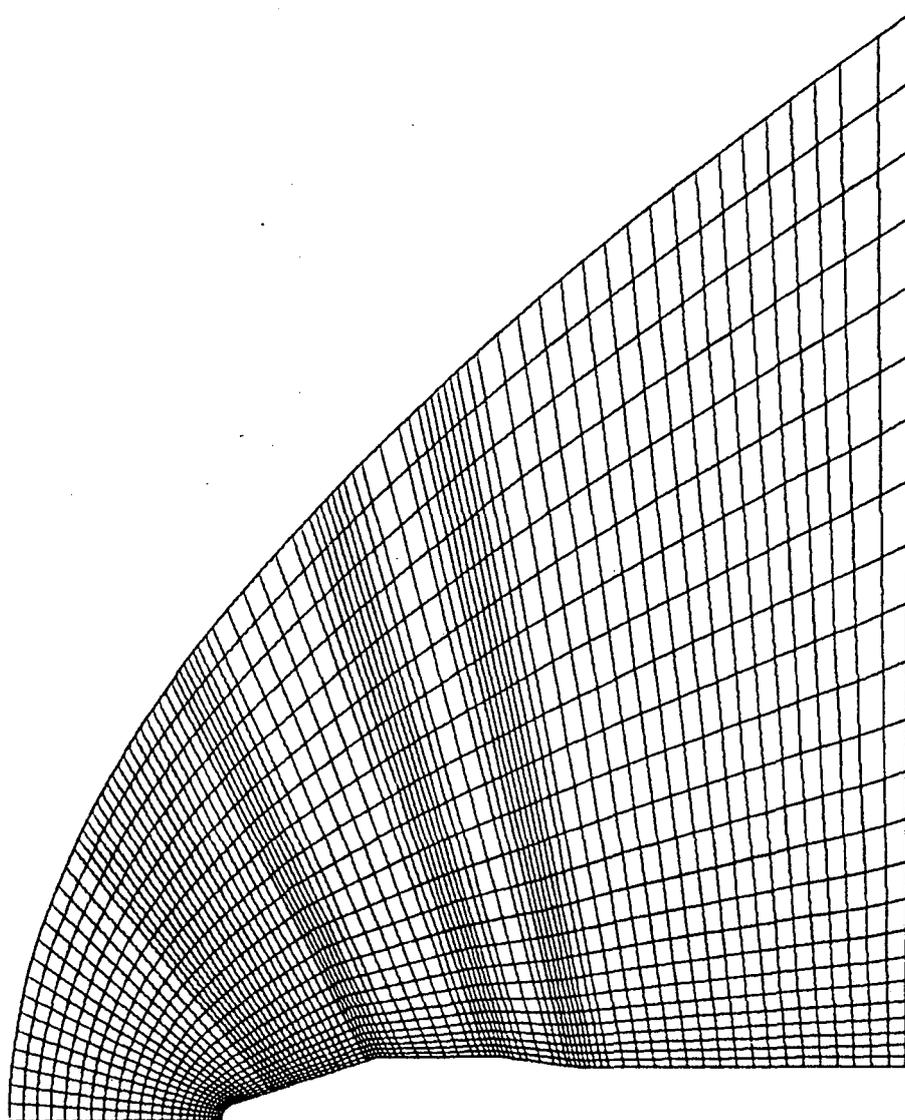


Figura 7.26 - Malha 86X24 sobre o VLS.

Por último, a Fig. 7.28 mostra os resultados da aplicação do esquema de B&W também para o caso $M_\infty = 1.5$ com a malha mais refinada. Apesar do pico de C_p antes da expansão da secção cônica para a secção cilíndrica, estes resultados podem ser considerados de melhor qualidade dos que os previstos pelo esquema para qualquer regime de escoamento. Deve-se enfatizar que novamente diversas soluções foram obtidas com o esquema B&W variando-se o coeficiente de dissipação artificial. A solução apresentada foi a que visualmente melhor se ajustou aos dados experimentais.

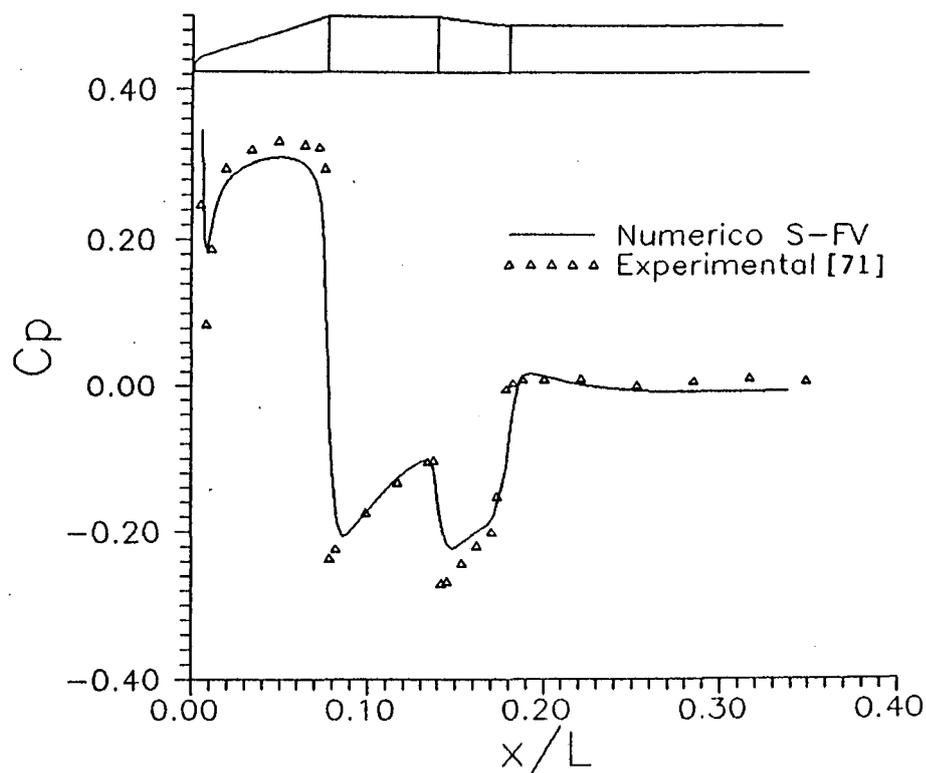


Figura 7.27 - Coeficiente de pressão sobre o VLS para $M_\infty = 1.50$ obtido com a malha da Fig. 7.26.

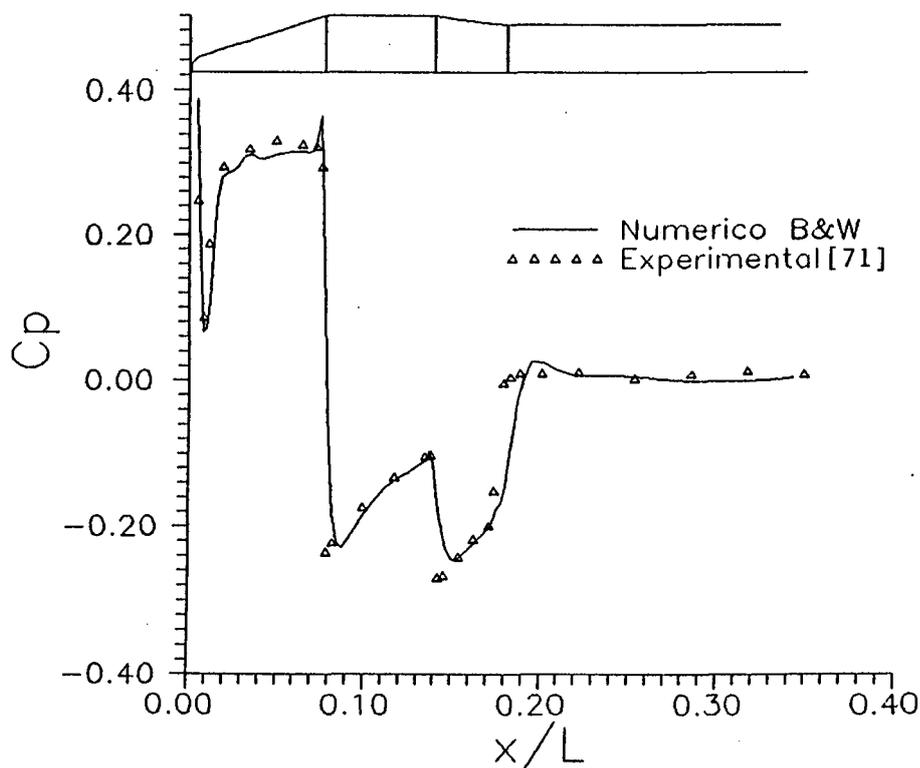


Figura 7.28 - Coeficiente de pressão sobre o VLS para $M_\infty = 1.50$ obtido com a malha da Fig. 7.26 e o esquema de B&W.

7.4.3 - ESCOAMENTO CONTRA O VEÍCULO LANÇADOR SCOUT

A metodologia segregada para qualquer regime de velocidade proposta no presente trabalho foi ainda empregada na solução do escoamento com $M_\infty = 2.16$ contra o veículo lançador Scout. A geometria e dados experimentais para escoamento de ar sobre esse veículo podem ser vistos em [68]. A Fig. 7.29 mostra uma malha utilizada enquanto a Fig. 7.30 mostra a distribuição do coeficiente de pressão sobre o corpo em comparação com resultados de túnel de vento. A malha realmente empregada na produção destes resultados teve os dois primeiros volumes junto ao corpo subdivididos respectivamente em quatro e dois volumes menores. A concordância pode ser considerada muito boa.

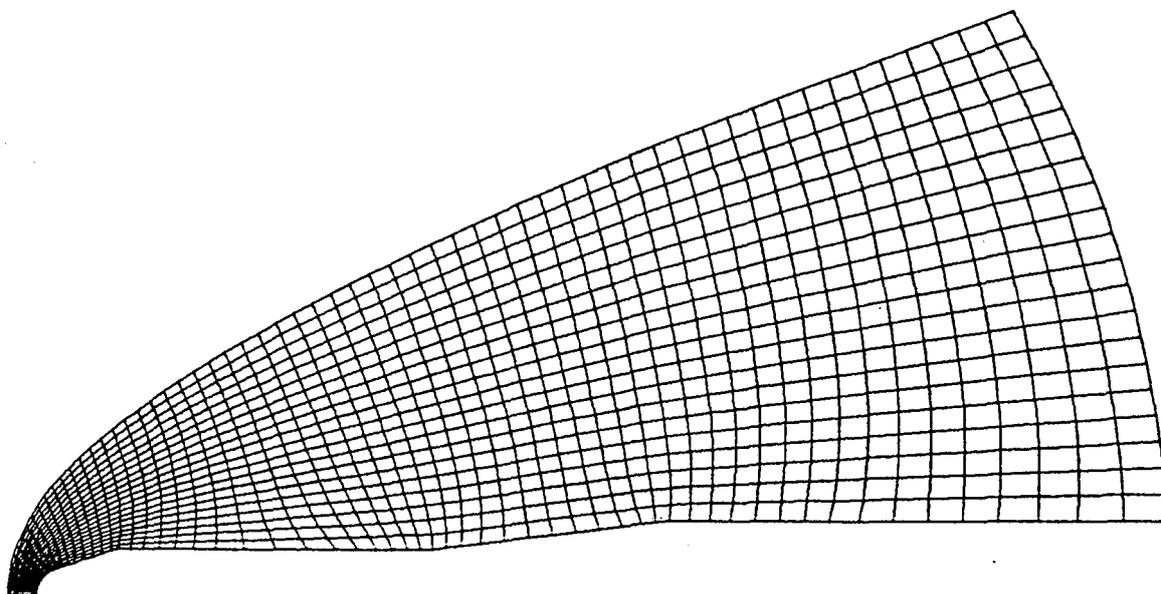


Figura 7.29 - Malha 60X20 sobre o veículo lançador Scout.

7.5 - CONCLUSÕES

A metodologia segregada em volumes finitos para a solução de escoamentos de qualquer velocidade foi aplicada em diversos problemas envolvendo escoamentos bidimensionais planos e axissimétricos. Em todos os casos o processo iterativo de solução convergiu estavelmente para uma solução de regime permanente. Escoamentos em bocais [72], não relatados no presente trabalho foram também atacados sem dificuldade.

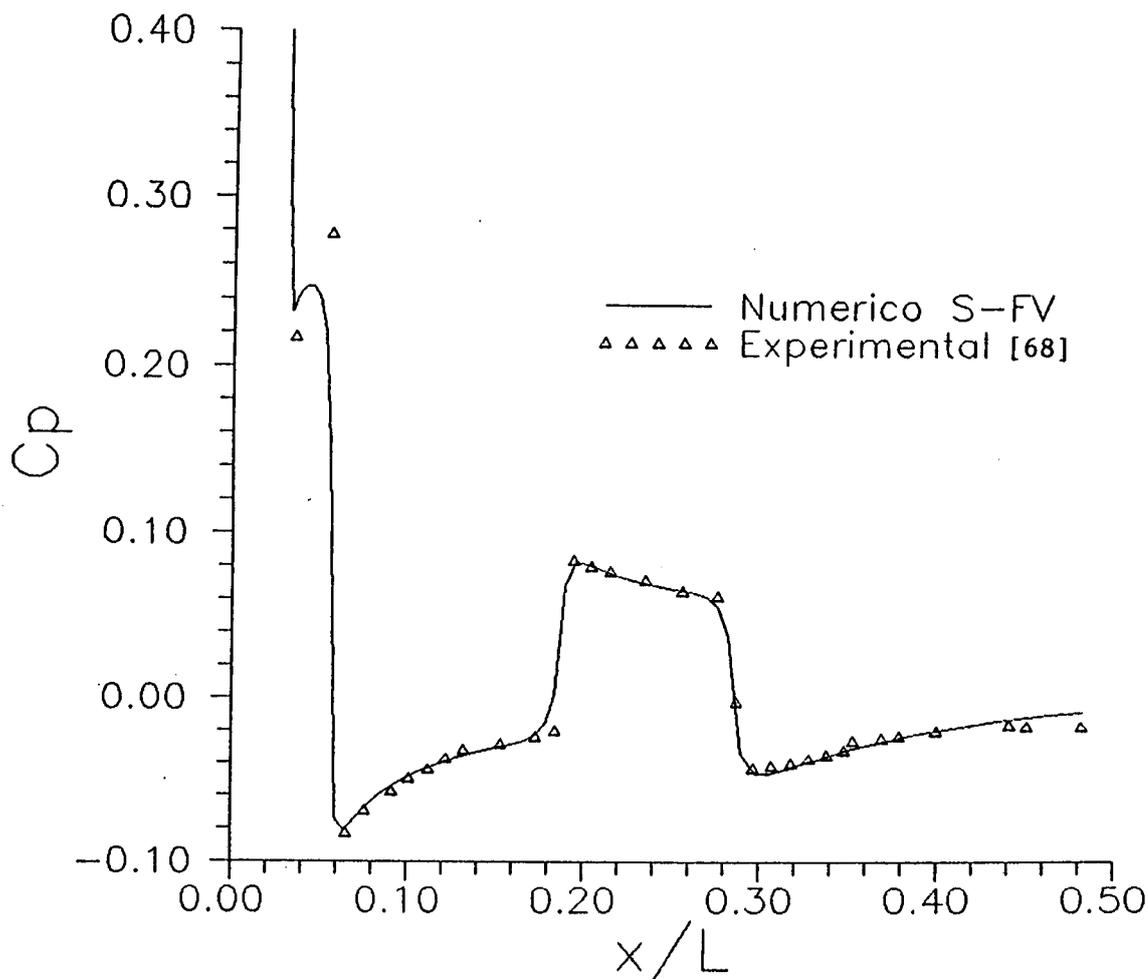


Figura 7.30 - Coeficiente de pressão sobre o veículo lançador Scout para $M_\infty = 2.16$.

O esquema numérico se revelou bastante robusto e flexível não só com relação a possibilidade de solução de escoamentos compressíveis e/ou incompressíveis como para alterações de geometria e condições de contorno. Deve-se ressaltar que, embora o uso de relações características seja recomendado [73] [74] para a extrapolação das condições de contorno, em todas as fronteiras de saída, com exceção do problema envolvendo a placa plana, as variáveis sofreram uma extrapolação de ordem zero. Nenhuma instabilidade pôde ser detectada devida a este procedimento.

Todos os resultados obtidos apresentaram sempre um comportamento fisicamente realístico. O coeficiente de pressão sobre a superfície dos corpos concordou razoavelmente bem, em alguns casos muito bem, com os valores experimentais e, sempre que a malha foi refinada, essa concordância melhorou. Os choques apareceram atenuados em alguns resultados mas esse comportamento deve ser creditado em grande parte às

malhas grossas empregadas. Na realidade os choques se diluem em apenas dois ou três volumes e com o refino da malha resultam conseqüentemente mais concentrados como a comparação entre as Figs. 7.12 e 7.15 demonstra.

Alguns aspectos negativos devem ser mencionados. A distância do choque ao corpo foi subestimada e algumas expansões e compressões sobre a superfície dos corpos não foram adequadamente captadas. Resultados expostos no Cap. 10 responsabilizam as funções de interpolação, aplicadas na avaliação do valor das variáveis nas faces dos volumes de controle, por esse comportamento.

8 - A FORMULAÇÃO SEGREGADA EM FORMA DELTA

8.1 - INTRODUÇÃO

No esquema de Beam e Warming [17], sucintamente descrito no Cap.6, as incógnitas dos sistemas de equações lineares são diferenças das propriedades conservadas entre dois níveis de tempo. Essa forma de escrever as equações da conservação é conhecida como 'forma delta'. Já nos métodos segregados de solução que empregam as variáveis primitivas, as incógnitas são normalmente as próprias componentes do vetor velocidade, a temperatura, etc. Embora não seja essa uma diferença fundamental, entendemos que a formulação em forma delta apresenta uma série de vantagens sobre a formulação que chamaremos de convencional. Com o objetivo de estender essas vantagens à formulação segregada e como a forma delta possibilita a realização de interessantes experiências numéricas, no presente capítulo será proposta uma formulação segregada em forma delta. Algumas dessas experiências serão aqui retratadas enquanto outras serão objetivo do próximo capítulo.

8.2 - A FORMULAÇÃO SEGREGADA CONVENCIONAL

Por simplicidade considere a equação de conservação de uma variável genérica ϕ , Eq.(2.15), para um escoamento bidimensional laminar

Incompressível de um fluido com propriedades físicas constantes.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v\phi) = -P\phi + \Gamma\phi \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] \quad (8.1)$$

Nosso interesse primário se concentra em obter o campo de velocidades. Assim, ϕ pode assumir o papel das componentes u e v . Integrando a Eq. (8.1) sobre um volume de controle elementar ΔV no instante $(t+\Delta t)$ obtém-se que

$$M_P \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_P^{t+\Delta t} + \left[J_e - J_w + J_n - J_s \right]^{t+\Delta t} + L[\phi]^{t+\Delta t} \Delta V = 0 \quad (8.2)$$

onde J denota a soma dos fluxos difusivo e convectivo de ϕ na face do volume de controle indicado pelo subscrito e $L[]$ denota uma aproximação numérica do termo entre colchetes. Se a derivada temporal é aproximada por

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_P^{t+\Delta t} = \frac{\phi_P^{t+\Delta t} - \phi_P^t}{\Delta t} \quad (8.3)$$

a Eq. (8.2) resulta

$$\frac{M_P}{\Delta t} \phi_P^{t+\Delta t} + \left[J_e - J_w + J_n - J_s \right]^{t+\Delta t} + L[\phi]^{t+\Delta t} \Delta V = \frac{M_P}{\Delta t} \phi_P^t \quad (8.4)$$

Como já comentado no Cap.4, a solução da Eq. (8.4) requer a linearização dos termos convectivos. Isso normalmente é alcançado tomando o fluxo convectivo como o produto de um fluxo de massa, avaliado com valores prévios do campo de velocidades, vezes a incógnita ϕ . Para obter as equações algébricas, os valores de ϕ e suas derivadas nas faces dos volumes de controle devem ser expressos como uma função dos valores de ϕ nos centros dos volumes de controle. É ainda necessário fornecer a pressão que está presente na Eq. (8.4) para que a solução possa ser obtida. O procedimento usual de solução envolve: i) um campo de pressões em $(t+\Delta t)$ é estimado (normalmente o próprio campo de pressões em t); ii) através da solução da Eq. (8.4) para $\phi = u$ e $\phi = v$ novos campos para u e v em $(t+\Delta t)$ são determinados para o campo de pressões estimado; iii) com este novo campo de velocidades os erros locais na conservação da massa são obtidos; iv) uma equação para a correção na pressão é construída tendo como termo fonte os erros locais na conservação da massa, e v) com o novo campo de

pressões o procedimento de solução retorna ao item i) até que uma convergência especificada seja alcançada. Ao final deste processo, o campo de pressões obtido gera através das equações da quantidade de movimento campos de velocidades u e v que conservam a massa. Iterações são ainda necessárias para atualização dos coeficientes e avançar a solução no tempo.

8.3 - A FORMULAÇÃO SEGREGADA EM FORMA DELTA

Integrando-se a Eq.(8.1) sobre um volume de controle elementar no instante t obtém-se

$$M_p \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]^t + \left[J_e - J_w + J_n - J_s \right]^t + L[\phi]^t \Delta V = 0 \quad (8.5)$$

Subtraindo a Eq.(8.5) da Eq.(8.2) resulta que

$$M_p \frac{\partial}{\partial t} \Delta \phi_p + \Delta J_e - \Delta J_w + \Delta J_n - \Delta J_s + L[\Delta P \phi] \Delta V = 0 \quad (8.6)$$

onde o operador Δ , já definido no Cap. 6, quando aplicado a ϕ significa

$$\Delta \phi = \phi^{t+\Delta t} - \phi^t \quad (8.7)$$

Empregando novamente o esquema implícito de primeira ordem para discretização da derivada temporal, a variação temporal de ϕ pode ser escrita como

$$\Delta \phi_p = \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial t} \Delta \phi_p + \frac{\partial}{\partial t} \phi_p^t \right] \quad (8.8)$$

A Eq.(8.8) é equivalente à Eq.(8.3) adotada na formulação convencional e é a mesma Eq.(6.6) particularizada para $\theta = 1$ e $\xi = 0$. Se o primeiro termo dentro dos colchetes é substituído pelo obtido na Eq.(8.6) e o segundo pelo obtido na Eq.(8.5), a Eq.(8.8) resulta

$$\frac{M_P}{\Delta t} \Delta\phi_P + \Delta J_e - \Delta J_w + \Delta J_n - \Delta J_s + L[\Delta P^\phi] \Delta V = - \left[J_e - J_w + J_n - J_s \right]^t - L[\Delta P^\phi]^t \Delta V \quad (8.9)$$

Adotando o mesmo procedimento de linearização da formulação convencional, a Eq.(8.9) pode ser posta na forma

$$a_P \Delta\phi_P - a_e \Delta\phi_E - a_w \Delta\phi_W - a_n \Delta\phi_N - a_s \Delta\phi_S = - L[\Delta P^\phi] \Delta V + \{RHS\}_P \quad (8.10)$$

onde

$$\{RHS\}_P = - \left[J_e - J_w + J_n - J_s \right]^t - L[P^\phi]^t \Delta V \quad (8.11)$$

É importante destacar que $\{RHS\}$ corresponde à discretização da parte estacionária da equação diferencial. Além disso, é um termo explícito pois depende apenas de campos no instante t . Desta forma, desde que se tenha disponível um campo estimado de pressões em $(t+\Delta t)$, o lado direito da Eq.(8.10) pode ser avaliado e a variação de ϕ ($\Delta\phi$) pode ser determinada. Nesta formulação a estimativa de pressão em $(t+\Delta t)$ para determinar u e v em $(t+\Delta t)$ é uma questão análoga à da formulação convencional. Se o ciclo iterativo necessário para o tratamento do acoplamento pressão-velocidade é realizado apenas uma vez e se a pressão estimada em $(t+\Delta t)$ é igual a pressão em t , automaticamente ΔP^ϕ desaparece do lado direito da Eq.(8.10). Assumiremos que esse é o procedimento adotado.

A Eq.(8.10) completa a formulação segregada em forma delta. As incógnitas são as variações temporais Δu e Δv . Quando o $\{RHS\}$, que corresponde à discretização da parte estacionária da equação diferencial se anula, significa que o regime permanente foi atingido. Nesse caso, a solução da Eq.(8.10) resultará em variações temporais $\Delta\phi$ também nulas.

8.4 - ALGUMAS VANTAGENS DA FORMA DELTA

O sistema de equações dado pela Eq.(8.10) em representação matricial assume a forma

$$[A]\{\Delta\phi\} = \{RHS\} \quad (8.12)$$

Como já comentado, quando a solução de regime permanente é atingida o $\{RHS\}$ se anulará e isso implica que a parte estacionária da equação diferencial estará satisfeita. Resolver a Eq.(8.12) significa avançar a solução a partir dos campos iniciais para o regime permanente. Portanto, a solução de regime permanente depende apenas das aproximações envolvidas na avaliação do $\{RHS\}$ e independe totalmente da forma de avaliação dos coeficientes a_p, a_e, \dots da Eq.(8.10) e que compõe a matriz $[A]$ da Eq.(8.12). Baseado nisso, a forma delta apresenta algumas vantagens, relatadas a seguir, sobre a formulação convencional.

Os esquemas numéricos adotados para aproximar os fluxos difusivo e convectivo nas faces dos volumes de controle na avaliação dos coeficientes da Eq.(8.10) pode ser diferente dos adotados na avaliação do $\{RHS\}$. Por exemplo, esquemas de quarta ordem podem ser empregados na avaliação do $\{RHS\}$ mantendo-se o esquema de segunda ordem na avaliação dos coeficientes. Se o processo iterativo convergir para a solução de regime permanente esta apresentará melhor qualidade mantendo a estrutura pentadiagonal da matriz dos coeficientes $[A]$. Deve-se mencionar que no método de Beam e Warming [17] descrito no Cap. 6, é usual introduzir termos dissipativos de quarta ordem no $\{RHS\}$ mantendo a aproximação de segunda ordem para a parte implícita. Em problemas que a viscosidade seja variável com a temperatura, ou mesmo problemas que envolvem escoamentos turbulentos, a forma delta possibilita que, por exemplo, valores médios sobre todo um volume sejam empregados na avaliação dos coeficientes e inclusive que assim permaneçam por algumas iterações. É claro no entanto que as variações temporais calculadas através da solução da Eq.(8.12) devem contribuir para que a solução se dirija para o regime permanente. Assim, as aproximações envolvidas no cálculo dos coeficientes podem comprometer evidentemente a convergência do processo.

Diversas experiências numéricas bastante simples foram conduzidas relacionadas com a avaliação diferenciada das partes implícita e explícita da Eq.(8.12), duas das quais serão aqui relatadas. Esses testes envolveram a solução do bem conhecido problema do escoamento no interior de uma cavidade quadrada provocado pelo movimento de uma de suas faces. Foi empregada uma malha 10X10, o método SIMPLEC [43] para tratamento do acoplamento pressão-velocidade e o MSI [35] para a solução dos sistemas de equações lineares. Esse problema tem como parâmetro o

número de Reynolds definido em função da velocidade da parede.

No primeiro teste, usando $Re = 100$, todos os termos convectivos presentes nos coeficientes foram desprezados. A parcela difusiva dos coeficientes e toda parte explícita foram aproximados usando o esquema de diferenças centrais (CDS). A solução convergida, para o mesmo critério de convergência, foi obtida em 43 iterações contra 52 quando os coeficientes são 'corretamente' avaliados. Deve-se enfatizar que as soluções são absolutamente idênticas já que a solução de regime permanente é independente dos coeficientes.

Usando $Re = 10000$, os termos difusivos foram eliminados dos coeficientes. A solução convergida foi obtida em 1740 iterações contra 1733 quando esses termos são mantidos. Se o esquema UDS (Upstream Differencing Scheme) é aplicado para avaliar os termos convectivos dos coeficientes e o {RHS}, estes números se reduzem para 215 e 214 respectivamente. Note que na formulação convencional, a não inclusão dos termos difusivos nos coeficientes implica em ter no interior da cavidade um fluido que não 'sente' o movimento da parede e portanto não se movimenta.

Outra qualidade que deve ser atribuída à forma delta está relacionada ao processo de solução dos sistemas de equações lineares, como o representado pela Eq.(8.12). No Cap. 6, dedicado ao esquema de Beam e Warming, foi ressaltado que a solução do sistema de equações lineares era implementada de forma não iterativa empregando um processo de fatoração aproximada. Esta é inclusive uma das características do esquema de Beam e Warming a qual é atribuída grande importância. No Cap. 9 deste trabalho esse esquema de fatoração aproximada será aplicado aos métodos segregados de solução das equações diferenciais e seus resultados analisados. Embora, como será demonstrado, o processo de fatoração aproximada seja análogo a alguns dos procedimentos de solução já empregados no âmbito dos métodos de solução segregada, será demonstrado também que a forma delta facilita a implementação desse processo.

Por último, a forma delta é menos suscetível a erros de arredondamento (erros de máquina). Imagine uma situação em que os campos iniciais sejam a solução exata da parte estacionária das equações discretizadas. Nesse caso, o vetor {RHS} resultará nulo e as variações temporais de $\Delta\phi$ resultarão também nulas independentemente dos erros de arredondamento envolvidos no processo de solução da Eq.(8.12). Na formulação convencional mesmo que os coeficientes e o vetor independente sejam calculados com campos que sejam exatamente a solução das equações

discretizadas, durante o processo de solução os campos podem, dependendo do algoritmo adotado, ser contaminados por erros de arredondamento. Deve-se mencionar que na formulação convencional, a equação da conservação da massa, representada pela equação de P', está numa forma equivalente à forma delta.

8.5 - COMENTÁRIOS SOBRE A QUESTÃO DA POSITIVIDADE DOS COEFICIENTES

No segundo teste descrito na secção anterior, referente ao número de Reynolds igual a 10000, chama a atenção o fato de a solução ter convergido com aproximadamente 1700 iterações quando o esquema CDS é adotado contra 200 referentes ao esquema UDS. Especificamente nesse problema da cavidade quadrada estudos de refino de malha demonstraram que as soluções obtidas via CDS são de melhor qualidade que as obtidas via UDS. Ainda relacionado a esse resultado, podemos ser tentados a justificar a diferença entre o número de iterações dizendo que no esquema UDS todos os coeficientes são positivos e que no CDS não há, nesse caso, nenhuma predominância de sinal. A formulação em forma delta permite no entanto que um interessante teste possa ser conduzido. Por que não avaliar os coeficientes usando UDS, resultando todos positivos, e avaliar o {RHS} usando o CDS, tendo assim uma solução isenta de dissipação artificial? O resultado desse teste demonstra que as mesmas 1700 iterações são consumidas para se obter a solução. Por outro lado, se o {RHS} é avaliado usando o UDS as mesmas 200 iterações são consumidas, independentemente da forma como os coeficientes são avaliados. Portanto o esforço computacional não depende da positividade dos coeficientes mas depende apenas do {RHS}. Na verdade, a baixa taxa de convergência apresentada quando o CDS é usado para avaliar o {RHS} deve ser atribuída ao fato de que o esquema de derivadas centrais não provê os efeitos dissipativos necessários para a atenuação dos erros e oscilações apresentados pelos campos durante o processo de solução. Já o esquema UDS por ser de primeira ordem é fortemente dissipativo e é equivalente ao esquema CDS adicionado de uma dissipação artificial não linear de segunda ordem [64][22]. Assim, a recomendação usual de que todos os coeficientes devam ser sempre positivos não é exatamente correta. O importante é ter nas equações discretizadas efeitos dissipativos que promovam rápida convergência sem deteriorar a solução.

Há no entanto algumas situações em que a positividade dos coeficientes é necessária. É bem conhecido [1] que métodos de solução dos sistemas de equações lineares com características explícitas (ponto-a-ponto, linha-por-linha) podem divergir na presença de coeficientes negativos. Experiências realizadas na solução do problema envolvendo a cavidade quadrada sempre divergiram para altos números de Reynolds quando tais métodos foram empregados na solução de qualquer uma das equações de conservação da quantidade de movimento. Se no entanto estas equações são resolvidas via MSI [35] e a equação para P' é resolvida por uma técnica ponto-a-ponto, não se manifestam problemas de convergência já que a equação de conservação da massa sempre apresenta coeficientes positivos.

Alguns métodos para tratamento do acoplamento pressão-velocidade também divergem na presença de coeficientes negativos. No método PRIME (PRessure Implicit Momentum Explicit) [10], as velocidades que aparecem na equação da conservação da massa são substituídas por expressões derivadas das equações da conservação da quantidade de movimento, gerando uma equação do tipo de Poisson para a pressão. Tal procedimento é equivalente a uma solução iterativa tipo ponto-a-ponto das equações de conservação da quantidade de movimento onde, ao final de cada iteração, as velocidades são corrigidas de forma a satisfazerem a restrição de conservação da massa. Todas as tentativas de solução do problema da cavidade quadrada para alto número de Reynolds usando-se o CDS também divergiram quando o método PRIME foi aplicado. O método SUMMIT [13], uma variante do PRIME, deve com certeza apresentar o mesmo comportamento.

9 - O PROCESSO DE FATORAÇÃO APROXIMADA

9.1 - INTRODUÇÃO

Quando uma formulação implícita é aplicada para tratamento do transiente, o processo de cálculo do campo de escoamento envolve a solução de sistemas de equações lineares. Por exemplo, se a metodologia numérica segregada proposta no Cap. 7 deste trabalho é aplicada, é necessária a solução de um sistema de equações lineares para a determinação da componente u do vetor velocidade, um para a componente v , um para a correção do campo de pressões P' e, finalmente, um outro para a temperatura. Via de regra, cada sistema deve ser resolvido pelo menos uma vez em cada intervalo de tempo. Em problemas tridimensionais ou turbulentos ou que envolvam reações químicas entre outros, novos sistemas de equações lineares devem ser adicionados aos quatro anteriormente citados.

Em problemas tridimensionais, ou mesmo bidimensionais com malhas refinadas, a solução direta não iterativa desses sistemas de equações é inviável. Os métodos iterativos mais empregados evoluíram desde técnicas ponto-a-ponto (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR), técnicas linha-por-linha até procedimentos fortemente implícitos como o SIP [75], o MSI [35] [76] [77] e as variações do MSI propostas por Peric [78]. Com a crescente difusão de processadores vetoriais, é provável que estes últimos procedimentos, por se constituírem em algoritmos com elevado grau de recursividade, sejam progressivamente abandonados em favor das técnicas ponto-a-ponto ou de

técnicas linha-por-linha [79]. Esforços vem sendo conduzidos no sentido do desenvolvimento de novos métodos de solução adequados à arquitetura dos computadores e de adaptação dos métodos atuais ao processamento vetorial [80].

Nos métodos de solução simultânea, como o de Beam e Warming [17], é necessário resolver apenas um sistema de equações lineares por intervalo de tempo. Em compensação, esse sistema de equações apresenta, em representação matricial, a mesma estrutura que na formulação segregada porém com cada elemento sendo constituído por uma sub-matriz de ordem igual ao número de variáveis dependentes. Como visto no Cap.6 deste trabalho, a solução desse sistema de equações é implementada de forma não iterativa através de um processo de fatoração aproximada.

Neste capítulo, inicialmente o processo de fatoração aproximada, como aplicado no esquema de Beam e Warming, será adaptado aos métodos de solução segregada. Essa adaptação seguirá basicamente o mesmo procedimento empregado no Cap. 6. As diferenças se referem ao processo de linearização e de integração das equações diferenciais que seguirão os princípios apresentados nos Caps.3 e 4 referentes às metodologias segregadas em volumes finitos. A seguir um outro processo de fatoração aproximada desenvolvido no presente trabalho, na verdade um caso particular da técnica linha-por-linha de uso bastante difundido, será exposto. Os erros introduzidos na fatoração serão analisados sob a ótica de volumes de controle. Por último, os dois processos de fatoração aproximada serão aplicados em alguns problemas bidimensionais incompressíveis e os resultados comparados com os obtidos através do procedimento MSI [35].

9.2 - UM PROCESSO DE FATORAÇÃO APROXIMADA APLICADO AO OPERADOR DIFERENCIAL

Por simplicidade, considere novamente a Eq.(8.1), repetida abaixo, válida para um escoamento bidimensional laminar incompressível de um fluido com propriedades físicas constantes

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v\phi) = - P\phi + \Gamma\phi \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] \quad (9.1)$$

Explicitando a derivada temporal nesta equação e aplicando a

expressão resultante nos instantes t e $(t+\Delta t)$ obtemos respectivamente que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi)^t = \left[-\frac{\partial}{\partial x} (\rho u\phi) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v\phi) - P^\phi + \Gamma^\phi \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] \right]^t \quad (9.2)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi)^{t+\Delta t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} (\rho u\phi) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v\phi) - P^\phi + \Gamma^\phi \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] \right]^{t+\Delta t} \quad (9.3)$$

Subtraindo a Eq. (9.2) da Eq. (9.3) resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(\rho\phi) = -\frac{\partial}{\partial x} \Delta(\rho u\phi) - \frac{\partial}{\partial y} \Delta(\rho v\phi) - \Delta P^\phi + \Gamma^\phi \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta\phi \right] \quad (9.4)$$

onde o operador Δ é como definido na Eq. (6.7). Aplicando para a discretização da derivada temporal a mesma Eq. (6.6) particularizada para $\theta = 1$ e $\xi = 0$, obtém-se que

$$\begin{aligned} \Delta(\rho\phi) = & \Delta t \left[-\frac{\partial}{\partial x} \Delta(\rho u\phi) - \frac{\partial}{\partial y} \Delta(\rho v\phi) - \Delta P^\phi + \Gamma^\phi \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta\phi \right] \right] + \\ & + \Delta t \left[-\frac{\partial}{\partial x} (\rho u\phi) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v\phi) - P^\phi + \Gamma^\phi \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] \right]^t \end{aligned} \quad (9.5)$$

A Eq. (9.5), que deve ser resolvida segregadamente para o cálculo de $\Delta\phi$, apresenta uma série de não-linearidades. No Cap.4 foi discutido o processo de linearização que consiste em fatorar as não-linearidades no produto de um coeficiente avaliado com campos estimados, ou de uma iteração prévia, pela incógnita. Aplicando esse mesmo processo de linearização à Eq. (9.5) e assumindo, assim como no Cap.8, que a estimativa inicial para o campo de pressões em $(t+\Delta t)$ é o próprio campo existente em t , resulta que

$$\Delta\phi + \frac{\Delta t}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u\Delta\phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v\Delta\phi) - \Gamma^\phi \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta\phi \right] \right] = \text{RHS} \quad (9.6)$$

onde

$$\text{RHS} = - \frac{\Delta t}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \phi) + P^\phi - \Gamma^\phi \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] \right]^t \quad (9.7)$$

A Eq.(9.6) pode ser escrita na forma de um operador aplicado a variável $\Delta\phi$ resultando

$$\left\{ 1 + \frac{\Delta t}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u - \Gamma^\phi \frac{\partial}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v - \Gamma^\phi \frac{\partial}{\partial y} \right] \right] \right\} \Delta\phi = \text{RHS} \quad (9.8)$$

É bastante interessante a esta altura comparar a Eq.(9.8) com a Eq.(6.18). A Eq.(6.18), referente a uma metodologia simultânea, é na verdade um sistema de quatro equações a quatro incógnitas. Na Eq.(9.8) a matriz identidade é portanto substituída pelo escalar 1. Na Eq.(6.18), as componentes do vetor q assumem sempre o papel de uma propriedade conservada por unidade de volume: massa por unidade de volume, quantidade de movimento por unidade de volume e energia total por unidade de volume. Na Eq.(9.8), a variável genérica ϕ representa sempre uma propriedade conservada por unidade de massa: massa por unidade de massa, quantidade de movimento por unidade de massa e energia por unidade de massa. As matrizes jacobianas A e B presentes na Eq.(6.18), originadas do processo de linearização via Newton-Raphson, são na Eq.(9.8) substituídas pelos escalares (ρu) e (ρv) respectivamente. Por último, na Eq.(6.18) as derivadas segundas não estão presentes porque os termos difusivos foram excluídos das equações diferenciais.

Se o mesmo processo de fatoração aproximada aplicado no esquema de B&W é aplicado à Eq.(9.8) esta resulta em

$$\left\{ 1 + \frac{\Delta t}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u - \Gamma^\phi \frac{\partial}{\partial x} \right] \right] \right\} \left\{ 1 + \frac{\Delta t}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v - \Gamma^\phi \frac{\partial}{\partial y} \right] \right] \right\} \Delta\phi = \text{RHS} \quad (9.9)$$

que difere da equação original pelo termo adicional

$$\left\{ \frac{\Delta t^2}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u - \Gamma^\phi \frac{\partial}{\partial x} \right] \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v - \Gamma^\phi \frac{\partial}{\partial y} \right] \right\} \Delta\phi \quad (9.10)$$

Esta equação é análoga a Eq.(6.20). Se definirmos $\Delta\phi^*$ através de

$$\left\{ 1 + \frac{\Delta t}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v - \Gamma^{\phi} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \right\} \Delta \phi = \Delta \phi^* \quad (9.11)$$

a equação Eq. (9.11) resulta

$$\left\{ 1 + \frac{\Delta t}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u - \Gamma^{\phi} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \right\} \Delta \phi^* = \text{RHS} \quad (9.12)$$

Se a Eq.(9.12) é multiplicada por $(\rho/\Delta t)$ e integrada, de acordo com as técnicas descritas no Cap. 3 sobre um volume de controle elementar centrado em P resulta

$$a_P \Delta \phi_P^* - a_e \Delta \phi_E^* - a_w \Delta \phi_W^* = L[\text{RHS}] \Delta V \quad (9.13)$$

onde

$$a_e = - \dot{M}_e (1/2 - \bar{\alpha}_e) + \bar{\beta}_e \Gamma^{\phi} \Delta y / \Delta x \quad (9.14)$$

$$a_w = \dot{M}_w (1/2 + \bar{\alpha}_w) + \bar{\beta}_w \Gamma^{\phi} \Delta y / \Delta x$$

$$a_P = a_e + a_w + M_P / \Delta t$$

e $L[\text{RHS}] \Delta V$ indica o resultado da integração aproximada de RHS.

A solução do problema dado pela Eq.(9.13) pode ser facilmente obtida através da aplicação do TDMA [1]. Conhecido $\Delta \phi^*$, a incógnita $\Delta \phi$ deve ser determinada através da solução da Eq.(9.11). Multiplicando essa equação por $(\rho/\Delta t)$ e integrando novamente sobre um volume de controle elementar centrado em P obtém-se que

$$a_P \Delta \phi_P - a_n \Delta \phi_N - a_s \Delta \phi_S = M_P \Delta \phi_P^* / \Delta t \quad (9.15)$$

onde agora

$$a_n = - \dot{M}_n (1/2 - \bar{\alpha}_n) + \bar{\beta}_n \Gamma^{\phi} \Delta x / \Delta y$$

$$a_s = \dot{M}_s (1/2 + \bar{\alpha}_s) + \bar{\beta}_s \Gamma^{\phi} \Delta x / \Delta y \quad (9.16)$$

$$a_P = a_n + a_s + M_P / \Delta t$$

Mais uma aplicação do TDMA à Eq.(9.15) gera o campo desejado $\Delta \phi$.

O processo descrito acima é exatamente equivalente ao processo de fatoração aproximada normalmente aplicado nos métodos de solução simultânea. Os resultados de sua aplicação a um problema incompressível serão discutidos ainda neste capítulo. Antes porém será exposto um outro processo de fatoração aproximada.

9.3 - UM PROCESSO DE FATORAÇÃO APROXIMADA APLICADO ÀS EQUAÇÕES DISCRETIZADAS

Na secção anterior, um operador diferencial bidimensional foi fatorado no produto de dois operadores unidimensionais e cada um desses operadores discretizados independentemente. Consequentemente, a parte implícita das equações, responsável pelo cálculo da variação temporal $\Delta\phi$, resultou a mesma que a da solução de dois problemas unidimensionais. Deve-se notar inclusive a existência de dois coeficientes a_p , dados pelas Eqs.(9.14) e (9.16), um para cada direção. Na presente secção será abordado outro processo de fatoração aproximado que atua já sobre o sistema de equações algébricas, isto é, as equações diferenciais já discretizadas.

No Cap.8 foi demonstrado que o sistema de equações originado pela Eq.(9.1) pode ser escrito em forma delta resultando

$$a_p \Delta\phi_p - a_e^* \Delta\phi_e - a_w^* \Delta\phi_w - a_n^* \Delta\phi_n - a_s^* \Delta\phi_s = b^* \quad (9.17)$$

onde

$$a_p = a_p^* + \frac{M_p}{\Delta t} \quad e \quad a_p^* = a_e^* + a_w^* + a_n^* + a_s^* \quad (9.18)$$

Se a Eq.(9.17) é dividida por a_p resulta

$$\Delta\phi_p - a_e \Delta\phi_e - a_w \Delta\phi_w - a_n \Delta\phi_n - a_s \Delta\phi_s = b \quad (9.19)$$

onde os coeficientes sem o superíndice * denotam os mesmos coeficientes da Eq.(9.17) divididos por a_p .

Por simplicidade, considere o caso em que o domínio tenha sido discretizado pela malha 3x3, sem o uso de volumes fictícios, mostrada na Fig. 9.1

A presença na equação discretizada de valores de $\Delta\phi$ nos volumes NE, NW, SE e SW é típica de problemas que envolvem derivadas cruzadas na equação diferencial governante (que não é o caso). Tal situação é análoga ao que ocorre quando o processo de fatoração aproximada é aplicado ao operador diferencial. A Eq.(6.24) (referente à solução simultânea) e a Eq.(9.10) (referente à solução segregada) mostra que os termos adicionais envolvem derivadas cruzadas, inexistentes nas equações diferenciais originais.

9.3.1 - INFLUÊNCIA DOS TERMOS ADICIONAIS

Deve-se relembrar que o processo de fatoração aproximada é empregado para a avaliação das variações temporais das propriedades conservadas. Na formulação em forma delta, a solução de regime permanente não é afetada pelas aproximações envolvidas na fatoração. O que pode ocorrer, e de fato geralmente ocorre, é que sob certas condições o processo de solução divirja ou consuma mais iterações para que a solução de regime permanente seja alcançada. Imagine por exemplo que o processo de fatoração aproximada seja empregado na solução das equações da quantidade de movimento. Isso significa que os campos obtidos de u e v não satisfazem exatamente as equações discretizadas da conservação da quantidade de movimento. Esses campos serão então empregados (na formulação segregada) para o cálculo dos resíduos na conservação da massa em cada volume de controle. A seguir é calculado um novo campo de pressões que participará, na próxima iteração, no lado direito da Eq.(9.20). Mesmo que os campos de velocidade não estejam contaminados por erros, esse processo iterativo está normalmente submetido à restrições de passo de tempo. Parece claro que se os campos u e v forem muito afetados pelos erros introduzidos na fatoração, com a conseqüente propagação desses erros para o campo de pressões que por sua vez realimenta os novos campos de u e v , o processo torna-se mais suscetível à divergência.

Para que os erros introduzidos pela fatoração sejam pequenos devemos assegurar, de acordo com a Eq.(9.27), que os produtos dos coeficientes a_{s_e} , a_{s_w} , a_{n_e} e a_{n_w} sejam pequenos e que portanto os próprios coeficientes a_s , a_e , a_n e a_w não sejam grandes. Através de simples manipulações algébricas da Eq.(9.18) é fácil verificar que esses coeficientes obedecem à relação

$$a_e + a_w + a_n + a_s + \frac{M_p}{a_p \Delta t + M_p} = 1 \quad (9.28)$$

Portanto, admitindo-se que os coeficientes sejam todos positivos, eles tendem a zero quando Δt tende a zero. Como os termos adicionais envolvem o produto de dois coeficientes, o erro da fatoração aproximada é proporcional a Δt^2 o que vem a concordar com as Eqs.(6.20) e (9.10).

9.4 - EXPERIÊNCIAS NUMÉRICAS

Os dois processos de fatoração aproximada descritos nos itens 9.2 e 9.3 foram aplicados na solução do problema do escoamento no interior de uma cavidade quadrada provocado pelo movimento de uma de suas faces. O primeiro processo, em que a fatoração é aplicada ao operador diferencial será referenciado com ADI1 enquanto o segundo, aplicado às equações já discretizadas, de ADI2. Inicialmente, tanto o ADI1 como o ADI2 foram aplicados apenas na solução das equações da conservação da quantidade de movimento. Na equação da conservação da massa manteve-se o MSI [35]. Em todos os testes os campos iniciais de u , v e P foram assumidos iguais a zero e foi observado o número de iterações para que a solução satisfizesse o critério de convergência dado por

$$\frac{|\Delta u|}{u_{\text{wall}}} \leq 10^{-6} \quad (9.29)$$

onde u_{wall} é a velocidade da parede móvel, em função do intervalo de tempo adimensional Δt^* definido por

$$\Delta t^* = \frac{\Delta t u_{\text{wall}}}{L} \quad (9.30)$$

Para tratamento do acoplamento pressão-velocidade foi aplicado o método SIMPLEC [43]. Experiências foram realizadas variando-se ainda os seguintes fatores:

Malha - 10x10, 20x20 e 30x30

Número de Reynolds - 100, 1000 e 10000

Esquemas de interpolação - CDS e UDS

A apresentação completa de todos os resultados demandaria um grande volume de tabelas ou figuras. Assim, optou-se pela apresentação apenas de alguns casos extremos. As Figs. 9.1 e 9.2 mostram o número de iterações para que a convergência seja alcançada em função de Δt^* obtidos com o esquema UDS para a malha 10x10, $Re = 10000$ e para a malha 30x30, $Re = 100$ respectivamente.

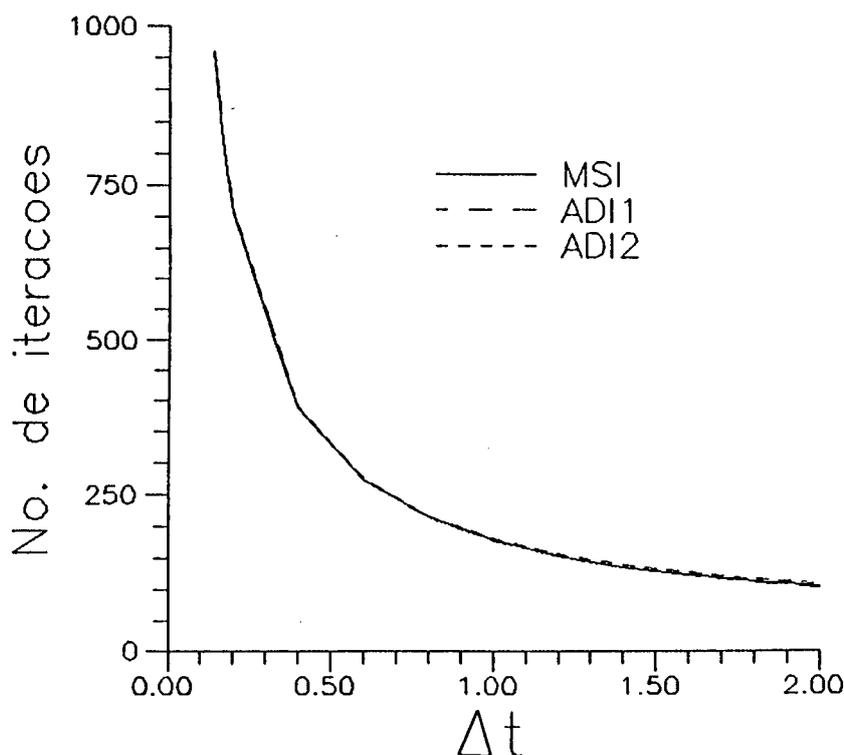


Figura 9.1 - Comportamento dos processos ADI1 e ADI2 para malha 10x10, $Re = 10000$ e esquema UDS.

A Fig.9.1 mostra um desempenho quase idêntico entre os processos ADI1, ADI2 e MSI. Nesse caso, os dois processos ADI são vantajosos pois o consumo de tempo por iteração em relação ao MSI é cerca de 30% menor (para processamento escalar). Já a Fig.9.2 mostra que o ADI1 tem comportamento idêntico ao MSI até Δt^* em torno de 0.12. A partir daí o número de iterações cresce rapidamente. Os outros resultados obtidos para o esquema UDS permitem identificar claramente que o desempenho dos processos ADI se aproxima do MSI quanto maior o número de Reynolds e mais grosseira a malha. Entre os casos testados portanto, as Figs.9.1 e 9.2 representam os que os processos ADI apresentam o melhor e o pior desempenho. Além disso, todos os resultados confirmam, como esperado, que os três processos

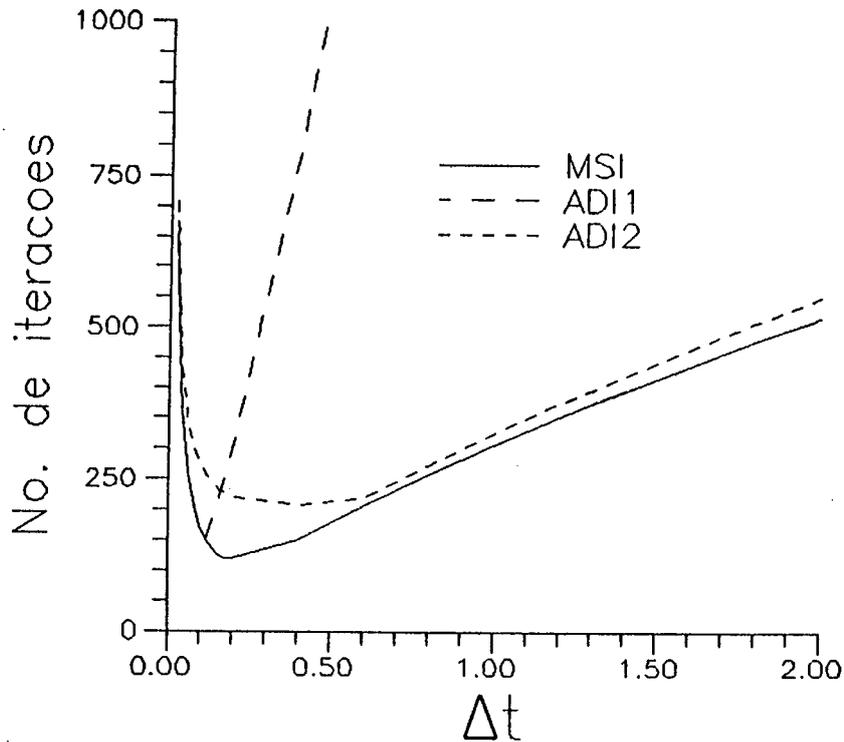


Figura 9.2 - Comportamento dos processos ADI1 e ADI2 para malha 30x30, $Re = 100$ e esquema UDS.

resultam no mesmo número de iterações quando Δt^* é pequeno. É interessante o fato que para Δt^* baixos, o ADI1 se aproxima mais do MSI que o ADI2, mas em todos os testes o comportamento do ADI1 acaba se deteriorando conforme Δt^* aumenta.

A aplicação do esquema CDS se constitui num teste muito mais severo pois pode conduzir o processo iterativo de solução a divergência mesmo quando o MSI ou métodos diretos (não iterativos) de solução são adotados. Essas dificuldades são consequência de dois fatores independentes. Em primeiro lugar, o esquema CDS é não dissipativo. Isso significa que se por exemplo uma perturbação é propositadamente introduzida no campo de ϕ durante o processo iterativo, essa perturbação pode crescer ou se propagar para outras regiões do domínio gerando oscilações. O mesmo pode acontecer inclusive com os erros de máquina (erros de arredondamento) que também representam uma perturbação na solução exata das equações discretizadas. Quando o número de Reynolds de malha é baixo, a própria difusão presente no escoamento se constitui num mecanismo para atenuação desses erros, porém para altos números de Reynolds a probabilidade de que o processo iterativo divirja é grande. Por esse motivo, apenas em alguns problemas de interesse mais acadêmico do que prático o esquema CDS é aplicado. Em problemas reais, ou esquemas que

envolvam alguma forma de 'upwinding' são aplicados ou termos dissipativos artificiais são acrescentados às equações diferenciais. Em segundo lugar, o uso do esquema CDS gera matrizes mal condicionadas. No esquema UDS, como já comentado, todos os coeficientes da Eq.(9.28) são positivos e portanto todos menores que 1 (tanto menores quanto menor o intervalo de tempo Δt). No esquema CDS os coeficientes podem assumir valores positivos ou negativos e com valor absoluto muito maior que 1. Tal fato inviabiliza a utilização de métodos de solução predominantemente explícitos (como as técnicas ponto-a-ponto) para a solução dos sistemas de equações lineares, quando o esquema CDS é empregado.

Para os esquemas ADI1 e ADI2, o uso do esquema CDS produz consequências mais dramáticas. Como os erros gerados pelo processo de fatoração são proporcionais ao produto de dois coeficientes, a existência de coeficientes maiores que a unidade agrava mais a situação. As Figs.9.3 e 9.4 mostram o comportamento dos esquemas ADI para a malha 20X20 e $Re = 100$ e $Re = 1000$ respectivamente. Para $Re = 100$, o ADI2 ainda opera adequadamente para toda a faixa de Δt^* investigada enquanto o ADI1 já provoca divergência para valores de Δt^* maiores que 0.4. Com o aumento do número de Reynolds o desempenho dos dois esquemas se deteriora.

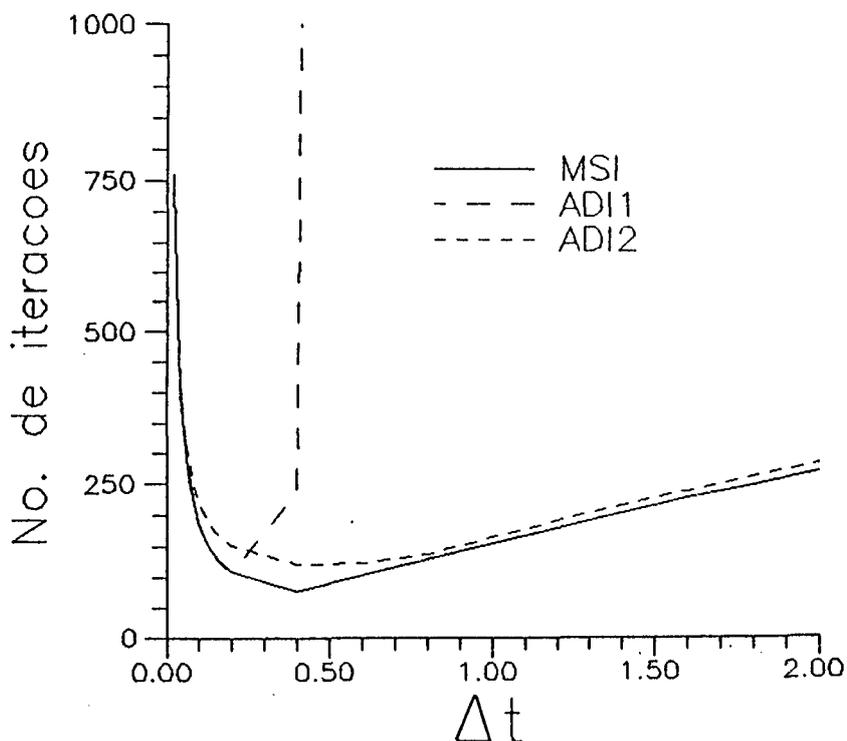


Figura 9.3 - Comportamento dos processos ADI1 e ADI2 para malha 20X20, $Re = 100$ e esquema CDS.

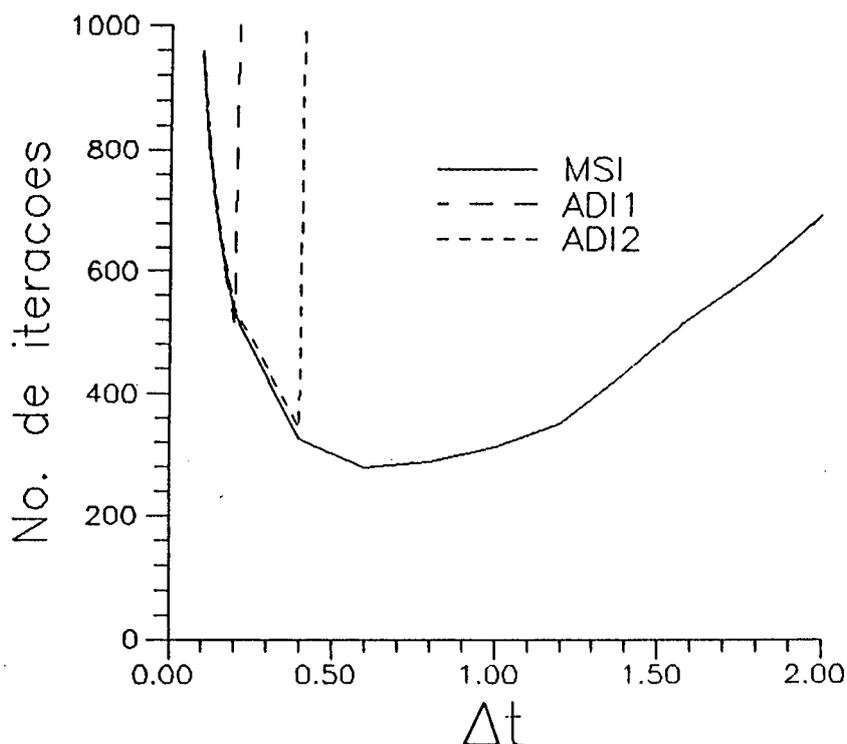


Figura 9.4 - Comportamento dos processos ADI1 e ADI2 para malha 20X20, $Re = 1000$ e esquema CDS.

9.4.1 - APLICAÇÃO DA FATORAÇÃO APROXIMADA À EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA

Na secção anterior foram apresentados resultados da aplicação do ADI1 e ADI2 na solução das equações da quantidade de movimento. Alguns poucos testes foram realizados com a aplicação do ADI2 também na solução da equação da conservação da massa. A expectativa de que o desempenho deveria ser prejudicado se confirmou totalmente. Ou a solução diverge para valores de Δt^* mais baixos do que antes ou consome mais iterações para que a solução de regime permanente seja alcançada. Alguns desses resultados podem ser vistos em [21].

Essa queda de eficiência era esperada já que ao aplicarmos o ADI2 na solução da equação para a pressão estamos produzindo, durante o transiente, campos de velocidade que não conservam a massa. Portanto, mais um erro, antes inexistente ou pequeno (depende do critério de convergência aplicado na solução via MSI) está agora se superpondo aos originados pela aplicação do ADI2 às equações da quantidade de movimento.

Finalmente, deve-se ressaltar que, para o problema físico em

questão, com as malhas empregadas e a adoção do método SIMPLEX [43] para tratamento do acoplamento pressão-velocidade, os coeficientes a_e , a_w , a_n e a_s das matrizes $[A_x]$ e $[A_y]$ são todos iguais a 0.25 independentemente do intervalo de tempo. Mesmo assim, para pequenos intervalos de tempo, o uso do esquema ADI2 nos 3 princípios de conservação consome o mesmo número de iterações que se o MSI fosse empregado. Tal fato não chega a ser vantajoso, pois a solução pode ser obtida muito mais rapidamente usando-se o MSI com valores mais elevados de Δt .

9.5 - CANCELAMENTO PARCIAL DOS TERMOS ADICIONAIS

A solução dos sistemas de equações lineares através do ADI2 é um processo aproximado devido à presença dos termos adicionais presentes na Eq.(9.27). A influência desses termos pode ser reduzida se na equação algébrica original, Eq.(9.19), o cancelamento parcial desses termos é conduzido antes que o processo de solução seja aplicado. A Eq.(9.19) é então substituída por

$$\Delta\phi_P - a_e\Delta\phi_E - a_w\Delta\phi_W - a_n\Delta\phi_N - a_s\Delta\phi_S + \\ - \alpha (a_s a_e \Delta\phi_{SE} + a_n a_e \Delta\phi_{NE} + a_s a_w \Delta\phi_{SW} + a_n a_w \Delta\phi_{NW}) = b \quad (9.31)$$

onde α é como um parâmetro de relaxação. Para manter a estrutura pentadiagonal de matriz da Eq.(9.20), os valores de ϕ em NE, NW, SE e SW devem ser expressos como função de ϕ em P, E, W, N e S. Se expansões em série de Taylor em torno de P são aplicadas resulta por exemplo para ϕ em NE que

$$\phi_{NE} = \phi_N + \phi_E - \phi_P \quad (9.32)$$

Um procedimento similar foi usado em [35]. A aplicação desse procedimento revelou resultados bastante promissores. Para a malha 10X10, para os três números de Reynolds e os esquemas UDS e CDS, o processo ADI2 passou a apresentar comportamento igual ou, surpreendentemente, melhor que o MSI mesmo adotando-se como parâmetro de comparação o número de iterações.

9.6 - A FATORAÇÃO APROXIMADA ADI2 X TDMA LINHA-POR-LINHA

Para a solução de sistemas de equações do tipo

$$a_P \phi_P - a_E \phi_E - a_W \phi_W - a_N \phi_N - a_S \phi_S = b \quad (9.33)$$

é bastante comum aplicar-se iterativamente o algoritmo TDMA em linhas e colunas do domínio [1]. Por exemplo, para a aplicação do TDMA ao longo de uma linha, a equação efetivamente resolvida resulta

$$a_P \phi_P - a_E \phi_E - a_W \phi_W = b + a_N \phi_N^* + a_S \phi_S^* \quad (9.34)$$

onde os valores com asterisco se referem aos valores disponíveis de ϕ nos volumes N e S. Um desses valores de ϕ , dependendo do sentido de varredura, é um valor recentemente calculado. Evidentemente, há uma grande semelhança entre a aplicação do TDMA em linhas e colunas e o ADI2, semelhança essa parcialmente mascarada pelo fato de, como é usual, a Eq.(9.33) não estar escrita em forma delta. No entanto, se a Eq.(9.33) é escrita em forma delta e os passos envolvidos na aplicação do TDMA linha-por-linha analisados, chega-se a conclusão que o processo ADI2 é equivalente (idêntico) a uma varredura do tipo Jacobi do TDMA em cada direção. Entende-se aqui por varredura tipo Jacobi a situação em que os valores de ϕ deslocados para o termo fonte (ϕ_N^* e ϕ_S^* na Eq.(9.34)) não assumem os valores que acabaram de ser calculados quando da aplicação do TDMA na linha anterior. Estes valores só serão atualizados depois da varredura cobrir todas as linhas do domínio.

9.7 - RESUMO DO CAPÍTULO

O objetivo principal do presente capítulo foi trazer para o contexto dos métodos segregados em volumes finitos o processo de fatoração aproximada aplicado no esquema de B&W. A característica principal desse processo é a fatoração de um operador diferencial bi ou tridimensional em um produto de operadores diferenciais unidimensionais. Portanto, o processo de discretização da parte implícita das equações é aplicado em

problemas unidimensionais. Em consequência resultam por exemplo dois coeficientes a_p , um para cada direção. Outra consequência importante e ainda não mencionada é que para que tenhamos esses coeficientes a_p igual ao somatório dos coeficientes vizinhos (a menos do termo transiente) foi necessário assumir que a conservação da massa se dê em cada uma das direções.

Adicionalmente, foi proposto um outro processo de fatoração aproximada, o ADI2, que é aplicado às equações já discretizadas. Nesse caso, as aproximações resultantes do processo de fatoração incidem apenas na etapa referente ao processo de solução dos sistemas lineares. Assim, toda a fundamentação física envolvida na discretização é preservada e a análise dos erros envolvidos na fatoração tendem mais para um problema de álgebra linear. Evidentemente o correto entendimento e interpretação física desses erros se constitui numa ferramenta fundamental para minimizá-los. Nesse aspecto, na nossa opinião, o processo ADI2 também apresenta vantagens sobre o ADI1.

Alguns resultados da aplicação desses processos revelaram o comportamento esperado. O passo de tempo fica limitado a valores menores do que quando o MSI é aplicado. Naturalmente essa restrição é mais sentida quanto menor for a dissipação, artificial ou não, presente na equação diferencial ou na equação discretizada. Pôde-se detectar no entanto um desempenho superior do ADI2 em relação ao ADI1. Embora o número de iterações consumidas pelos processos ADI resulte maior que quando o MSI é aplicado deve-se lembrar que o consumo de tempo de CPU por iteração é maior neste último. Essa diferença se acentua quando processadores vetoriais são empregados. Assim, é bastante provável que a aplicação dos processos ADI venha a substituir progressivamente métodos fortemente implícitos, e de natureza recursiva, como MSI e outros. Algumas experiências nesse sentido foram já realizadas em problemas bi e tridimensionais [79] e confirmaram as expectativas. Nesse contexto, técnicas para minimizar a influência dos erros da fatoração, como apresentada neste capítulo, passam a ter importância considerável.

10 - DISSIPACÃO ARTIFICIAL

10.1 - INTRODUÇÃO

No método dos volumes finitos as equações diferenciais em forma divergente são integradas sobre volumes de controle convenientemente arranjados sobre o domínio de solução. Em consequência do procedimento de integração o valor da variável dependente e suas derivadas espaciais são requeridas nas interfaces dos volumes de controle. Como a variável dependente está armazenada no centro do volume de controle, funções de interpolação são necessárias para a sua avaliação nas interfaces.

A escolha da função de interpolação é de importância fundamental na metodologia de solução. Diversas são as possibilidades existentes e cada uma dá origem a uma diferente solução numérica para o mesmo problema físico. Além disso, a estabilidade do método, normalmente de natureza iterativa, é fortemente dependente da função de interpolação.

A escolha mais simples, a interpolação linear, não é sempre a recomendada devido a diversas razões. Em primeiro lugar, quando o número de Reynolds de malha na interface é maior que dois, o coeficiente que conecta a variável dependente do volume em consideração com o volume adjacente resulta negativo. Se métodos iterativos de solução, do tipo ponto-a-ponto por exemplo, são empregados na solução dos sistemas de equações lineares, a presença de coeficientes negativos pode conduzir o processo iterativo à divergência. Adicionalmente o esquema de diferenças

centrais (CDS), como é conhecido o esquema em que a interpolação é linear, não é dissipativo, isto é, ele não provê mecanismos extras para a dissipação de erros e perturbações que podem ocorrer durante a solução, como pode ser demonstrado através da análise de estabilidade linear aplicada aos operadores algébricos [64]. Em consequência a taxa de convergência do esquema CDS é baixa e a solução convergida pode apresentar oscilações espúrias.

Para evitar esse comportamento indesejável outros esquemas são empregados visando principalmente assegurar a positividade dos coeficientes, independentemente do número de Reynolds de malha, permitindo assim que métodos iterativos sejam aplicados na solução dos sistemas lineares. Muitos desses esquemas têm a característica de recuperar o CDS, quando o número de Reynolds de malha é pequeno, e o UDS (Upstream Differencing Scheme) quando o número de Reynolds de malha é grande. Para valores intermediários do número de Reynolds esses esquemas normalmente se baseiam na solução exata de um problema unidimensional de convecção e difusão. Devido a essa fundamentação física envolvendo a avaliação da propriedade dependente e suas derivadas nas faces dos volumes de controle, estes esquemas são considerados fisicamente mais consistentes que o esquema CDS.

Como já discutido no Cap.8 deste trabalho, embora a positividade dos coeficientes seja uma condição suficiente para garantir a convergência de processos iterativos de solução dos sistemas lineares, a mesma não está diretamente relacionada com a estabilidade do processo de solução como um todo. Naquele capítulo, um mesmo problema físico apresentou o mesmo histórico de convergência com coeficientes positivos ou sem qualquer predominância de sinal. Na realidade, o que ocorre é que os esquemas que visam assegurar a positividade dos coeficientes, simultaneamente adicionam às equações discretizadas o que se convencionou chamar de dissipação artificial. Assim, o esquema UDS normalmente produz soluções fisicamente realísticas, isentas de oscilações espúrias e com altas taxas de convergência não porque dá origem a coeficientes positivos mas sim porque o esquema UDS é um esquema de primeira ordem (sob a ótica de expansões em séries de Taylor) e portanto fortemente dissipativo.

Voltando agora a atenção aos esquemas de diferenças finitas, como o esquema de B&W, já foi visto que o processo de discretização é conceitualmente diferente. Nestes métodos as derivadas de primeira e segunda ordem presentes nas equações diferenciais são substituídas por

expressões numéricas correspondentes, normalmente em forma central com o objetivo de minimizar o erro de truncamento da aproximação. Para promover a estabilidade, termos dissipativos artificiais são adicionados às equações diferenciais. No esquema originalmente proposto por B&W, esses termos dissipativos são de quarta ordem e portanto não alteram a precisão formal da aproximação que permanece de segunda ordem. Termos dissipativos artificiais de segunda ordem são também adicionados à parte implícita das equações diferenciais sem no entanto influir na solução de regime permanente.

No Cap.7 foram expostos resultados que demonstram que as soluções obtidas para um mesmo problema físico apresentam comportamentos significativamente distintos quando obtidas através da metodologia em volumes finitos proposta no presente trabalho ou quando obtidas pelo esquema B&W (vide Fig. 7.19). Essa constatação, as técnicas de introdução de dissipação artificial e o próprio enfoque como a dissipação artificial é encarada nas duas famílias de métodos motivaram os trabalhos do presente capítulo.

Embora a expressão "dissipação artificial" (as vezes substituída por "difusão numérica", "falsa difusão", etc.) já tenha sido diversas vezes empregada neste trabalho não definimos até o presente momento o que se entende como tal. Essa é uma questão importante haja vista a existência na literatura [1] de pelo menos duas interpretações distintas a esse respeito. As duas próximas sessões são dedicadas a essa questão.

10.2 - O ENFOQUE MATEMÁTICO

Sob o ponto de vista matemático a dissipação artificial deve ser entendida como: i) todos os termos artificialmente adicionados à equação diferencial, ou ii) tudo o que comprometa a ordem do erro envolvido no processo de discretização em relação a um erro desejável ou considerado padrão.

O termo dissipativo dado pela Eq.(6.25) se enquadra no primeiro caso. Embora por ser de quarta ordem, não altere a ordem do erro das equações discretizadas, é um termo originalmente não existente, e portanto artificial, que passa a fazer parte da equação diferencial. Normalmente nenhuma tentativa de interpretação física desse termo é conduzida. É

simplesmente adicionado às equações diferenciais com o único objetivo de melhorar as características de estabilidade do processo de solução.

O segundo caso é fonte de maiores controvérsias. Considere por exemplo a avaliação dos termos ϕ e $\partial\phi/\partial x$ na face este do volume centrado em P da Fig.10.1. Se se opta por envolver apenas os valores de ϕ em P e E nessa avaliação, as aproximações que implicam no menor erro de truncamento na expansão da função ϕ em série de Taylor são dadas por

$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \quad ; \quad \left. \frac{\partial\phi}{\partial x} \right|_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} \quad (10.1)$$

Aceitas essas aproximações como padrão, todas as aproximações diferentes, envolvendo apenas ϕ_P e ϕ_E , são consideradas contaminadas por dissipação artificial.

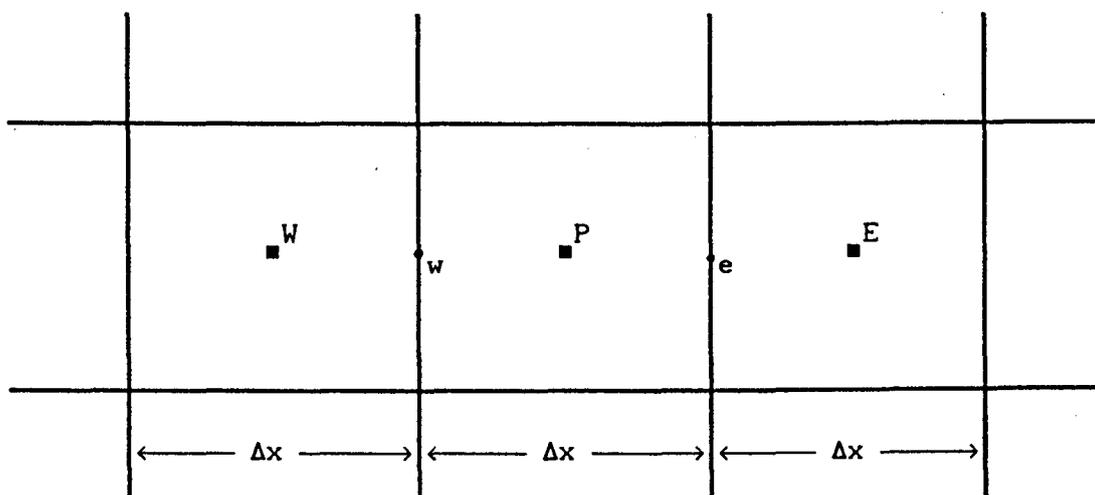


Figura 10.1 - Malha cartesiana igualmente espaçada.

10.3 - O ENFOQUE FÍSICO

Considere agora a avaliação de ϕ na face este do volume de controle centrado em P da Fig. 10.2. Sob o enfoque físico, não se está preocupado com a ordem do erro de truncamento nessa avaliação. Parte-se do princípio que os valores nodais de ϕ nos volumes vizinhos são conhecidos e procura-se expressar o valor de ϕ_e em função desses valores nodais de forma a respeitar, da melhor maneira possível, a física do

escoamento. Ou, em outras palavras, a física do escoamento é a linha mestra do processo de interpolação. Dessa forma, poderíamos imaginar um sub-domínio de solução centrado no ponto "e" (originado por exemplo pelo retângulo formado na união dos pontos nodais da Fig. 10.2) e, nessa região, resolvermos a própria equação diferencial governante. Os valores nodais de ϕ nos volumes vizinhos seriam de alguma forma prescritos como condições de contorno e, deve-se concordar, a física do escoamento estaria assim intimamente relacionada ao processo de interpolação. Obviamente, a solução exata da equação diferencial completa nessa região não é conhecida. Uma alternativa seria implementar uma discretização desse sub-domínio e obter numericamente o valor de ϕ_e , lembrando uma técnica de multi-grid [81].

Para contornar a dificuldade de se lidar com todos os termos da equação diferencial a solução evidente é desprezar alguns deles. Se o termo transiente e o termo de pressão são desprezados, mantidos portanto apenas os difusivos e convectivos, uma solução analítica já é possível. O esquema SWUDS [36] faz uso dessa simplificações e no SUDS [36] também a difusão é desprezada. Mesmo assim, a implementação desses esquemas é computacionalmente complicada especialmente em problemas tridimensionais.

A discussão a seguir ficará restrita ao caso em que, na avaliação de ϕ_e , são usadas funções de interpolação unidimensionais. E, mais ainda, apenas os valores nodais em P e E participam do processo.

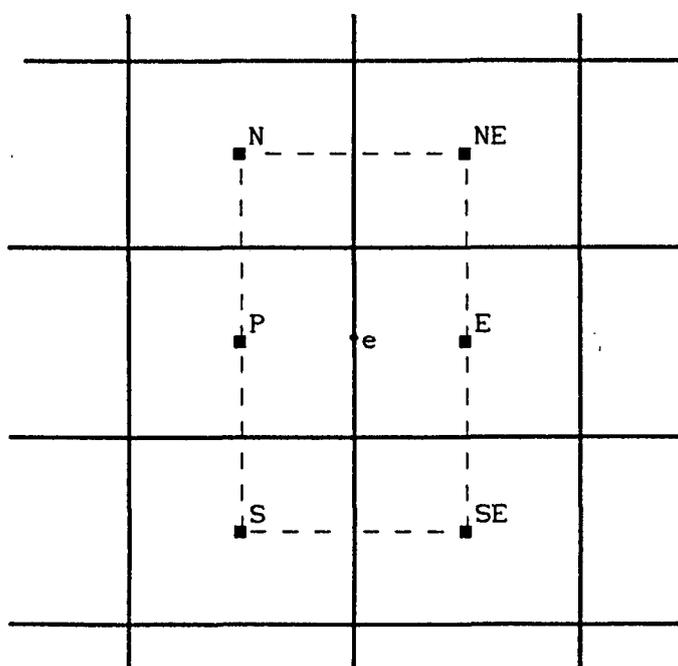


Figura 10.2 - Volume de controle hipotético para a avaliação de ϕ_e .

Considere novamente por simplicidade a malha cartesiana igualmente espaçada da Fig. 10.1. Se funções de interpolação unidimensionais são empregadas, o valor de ϕ e da derivada $\partial\phi/\partial x$ na face este podem ser expressas na forma

$$\phi_e = (1/2 + \bar{\alpha})\phi_P + (1/2 - \bar{\alpha})\phi_E \quad (10.2)$$

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial x} \right|_e = \bar{\beta} \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} \quad (10.3)$$

Note que se $\bar{\alpha} = 0$ e $\bar{\beta} = 1$ a Eq.(10.1) é recuperada.

O esquema exponencial adota como função de interpolação a solução exata do problema de convecção e difusão dado por

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - Pe \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \quad (10.4)$$

$$\phi(x_P) = \phi_P, \quad \phi(x_E) = \phi_E$$

onde Pe é o número de Peclet de malha. Da solução da Eq.(10.4), resulta que

$$\bar{\alpha} = 0.5 - \frac{e^{Pe/2} - 1}{e^{Pe} - 1} \quad (10.5)$$

$$\bar{\beta} = Pe \frac{e^{Pe/2}}{e^{Pe} - 1} \quad (10.6)$$

O uso da Eqs.(10.5) e (10.6) é normalmente evitado pois exponenciais são custosas em termos de tempo de computação e, como o esquema não é exato para situações bi ou tridimensionais, termos-fonte diferentes de zero, etc., o esforço extra de calcular exponenciais não se justifica [1]. Adicionalmente, as Eqs.(10.5) e (10.6) acarretam também em dificuldades de cálculo quando Pe tende a zero ou quando Pe é muito grande.

Se computada a razão entre o coeficiente a_e pela parcela difusiva D_e desse mesmo coeficiente obtém-se que

$$\frac{a_e}{D_e} = - Pe (0.5 - \bar{\alpha}) + \bar{\beta} \quad (10.7)$$

Se as Eqs. (10.5) e (10.6) para α e β são substituídas na Eq. (10.7) resulta

$$\frac{a_e}{D_e} = Pe / (e^{Pe} - 1) \quad (10.8)$$

No esquema "Power-law" [1] a Eq. (10.8) é ajustada por expressões mais simples que não envolvem o cálculo de exponenciais. No esquema WUDS [34] as Eqs. (10.5) e (10.6) é que são ajustadas. A Tab. 10.1 abaixo mostra o comportamento do coeficiente a_e dividido pelo termo difusivo D_e para o "Power-law", o WUDS e a solução exata. Constam também da tabela os comportamentos dos esquemas CDS e UDS. Note que os esquemas UDS, WUDS, "Power-law" e o exponencial dão origem a coeficientes sempre positivos. No esquema CDS, para números de Peclet, em valor absoluto maiores que dois, ocorrerão coeficientes negativos (se o coeficiente este da malha centrada em P for positivo, o coeficiente oeste da malha centrada em E será negativo).

TABELA 10.1 - Razão a_e/D_e para diversos esquemas de interpolação

PECLET	CDS	UDS	WUDS	POWER LAW	EXATO
-1000.0	501.000	1001.000	1000.097	1000.000	1000.000
-500.0	251.000	501.000	500.095	500.000	500.000
-200.0	101.000	201.000	200.088	200.000	200.000
-100.0	51.000	101.000	100.077	100.000	100.000
-50.0	26.000	51.000	50.057	50.000	50.000
-20.0	11.000	21.000	20.019	20.000	20.000
-10.0	6.000	11.000	10.012	10.000	10.001
-5.0	3.500	6.000	5.083	5.031	5.034
-4.0	3.000	5.000	4.124	4.078	4.075
-3.0	2.500	4.000	3.185	3.168	3.157
-2.0	2.000	3.000	2.294	2.328	2.313
-1.0	1.500	2.000	1.540	1.590	1.582
-0.5	1.250	1.500	1.251	1.274	1.271
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.5	0.750	1.000	0.751	0.774	0.771
1.0	0.500	1.000	0.540	0.590	0.582
2.0	0.000	1.000	0.294	0.328	0.313
3.0	-0.500	1.000	0.185	0.168	0.157
4.0	-1.000	1.000	0.124	0.078	0.075
5.0	-1.500	1.000	0.083	0.031	0.034
10.0	-4.000	1.000	0.012	0.000	0.001
20.0	-9.000	1.000	0.019	0.000	0.000
50.0	-24.000	1.000	0.057	0.000	0.000
100.0	-49.000	1.000	0.077	0.000	0.000
200.0	-99.000	1.000	0.088	0.000	0.000
500.0	-249.000	1.000	0.095	0.000	0.000
1000.0	-499.000	1.000	0.098	0.000	0.000

Já a Tab. 10.2 mostra o comportamento desses mesmos esquemas em termos dos parâmetros $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ para três situações do número de Peclet onde R é um número grande e positivo. Note que para Peclet igual a zero todos os esquemas são idênticos pois nessa situação o valor de $\bar{\alpha}$ não interessa já que os termos convectivos se anulam.

TABELA 10.2 - Valores de $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ para os diversos esquemas para 3 situações do número de Peclet: R é um número positivo e grande.

Peclet	CDS		UDS		WUDS		Power-law		Exato	
	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$								
-R	0.0	1.0	-0.5	1.0	-0.5	0.1	-0.5	0.0	-0.5	0.0
0	0.0	1.0	0.5	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
+R	0.0	1.0	0.5	1.0	0.5	0.1	0.5	0.0	0.5	0.0

Nos problemas de aerodinâmica e na maioria dos problemas de interesse prático os números de Peclet de malha assumem valores elevados. Por exemplo, para ar escoando a 15 m/s numa temperatura em torno de 30°C, seria necessária uma dimensão da malha na direção do escoamento inferior a 10^{-6} m para que o número de Reynolds de malha resultasse inferior a 10. O exame da Tab. 10.2 mostra que nessa situação, com excessão do CDS, os esquemas WUDS, Power-law e o próprio exponencial tendem ao esquema UDS ($\alpha = \pm 0.5$). Embora a aproximação dos termos difusivos seja bastante diferente, para altos números de Peclet os termos difusivos é que não são importantes. Dessa forma, a análise que segue a respeito da dissipação artificial ficará restrita ao esquema UDS.

Se calculado o coeficiente a_e para o volume centrado em P da Fig.10.1 através do esquema UDS este resulta idêntico ao coeficiente obtido através do CDS [22] desde que o coeficiente de difusão Γ^ϕ seja substituído por um coeficiente efetivo dado por

$$\Gamma_{\text{eff}}^\phi = \Gamma^\phi [1 + |\text{Pe}|/2] \quad (10.9)$$

Essa constatação faz com que o esquema UDS seja considerado um esquema, do ponto de vista matemático, que introduz muita dissipação artificial. Patankar [1] contesta essa interpretação pois a solução numérica do problema unidimensional com o esquema exponencial reproduz a

solução analítica e estaria também, por esse critério, contaminado por dissipação artificial. Além disso, a tentativa de solução do mesmo problema unidimensional através do CDS produz resultados irrealísticos. Sua conclusão é que a chamada dissipação artificial presente na Eq.(10.9) é uma contribuição desejável em escoamentos com altos números de Peclet que tende a corrigir os erros originados pelo esquema CDS. Continuando sua discussão sobre a falsa difusão, Patankar [1] faz uso da situação exposta na Fig. 10.3 na qual duas correntes de mesma velocidade porém diferentes temperaturas entram em contato. Se o coeficiente de difusão real é zero, a descontinuidade na temperatura deve persistir ao longo do escoamento. Logo, se a solução numérica apresentar qualquer perfil diferente do apresentado na Fig. 10.3, é sinal que essa solução está contaminada por falsa difusão.

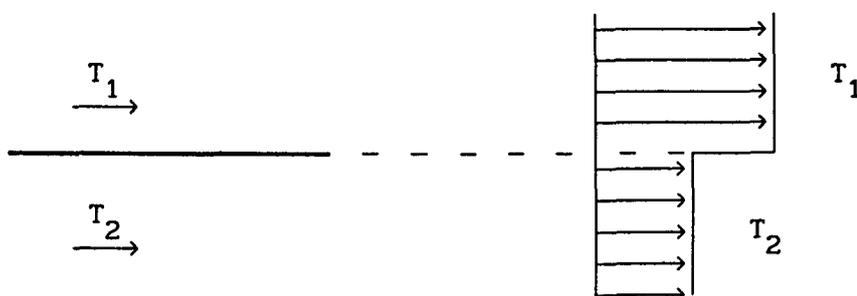


Figura 10.3 - Problema físico para detecção da falsa difusão.

Patankar inicialmente propõe a malha cartesiana alinhada com o escoamento da Fig. 10.4. Nesse caso, como não existe velocidade na

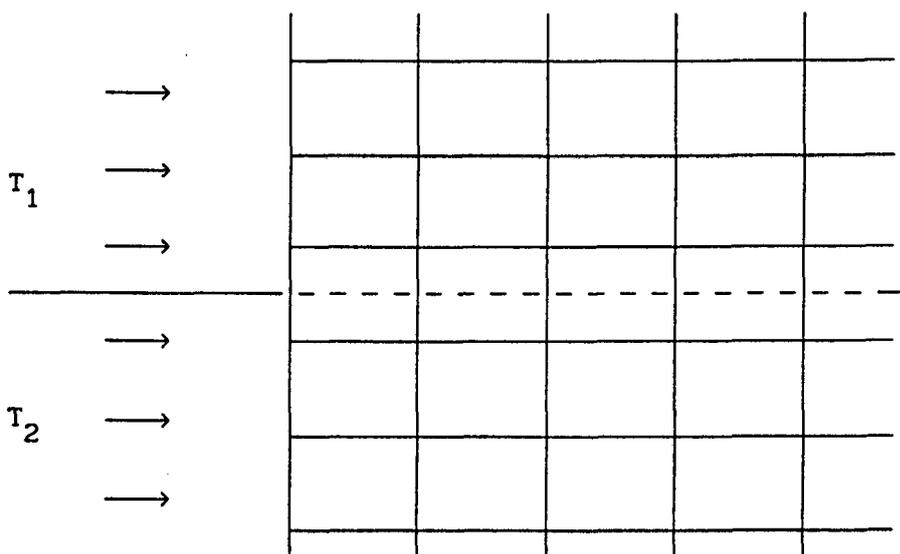


Figura 10.4 - Malha alinhada com o escoamento.

direção y e o coeficiente de difusão é zero, os coeficientes a_n e a_s resultam zero. Com o esquema UDS o coeficiente a_e resulta também zero. Se uma formulação para regime permanente é empregada resulta portanto que $a_p = a_w$ e portanto $\phi_p = \phi_w$. Assim, o valor de ϕ prescrito na fronteira de entrada se propaga para todos os volumes na mesma linha e a descontinuidade no perfil de temperatura se preserva. Portanto, nesse caso, apesar do uso do esquema UDS, a solução não é contaminada por falsa difusão.

A seguir, Patankar apresenta a solução do mesmo problema físico, com uma malha orientada a 45° com a direção do escoamento. Mantendo-se o esquema UDS, a_n e a_e resultam zero. Assumindo-se $\Delta x = \Delta y$ os coeficientes a_s e a_w são iguais e como $a_p = a_s + a_w$ a equação discretizada resulta

$$\phi_p = 0.5\phi_w + 0.5\phi_s \quad (10.10)$$

A solução para o problema é exposta na Fig. 10.5 e é evidentemente contaminada por falsa difusão. Patankar conclui finalmente que a dissipação artificial só ocorre quando o escoamento é oblíquo às linhas coordenadas e quando houver um gradiente diferente de zero da variável dependente na direção normal ao escoamento. Conclui também que o uso do esquema CDS não é remédio para a falsa difusão devido às soluções irrealísticas geradas por esse esquema na presença de altos números de Peclet

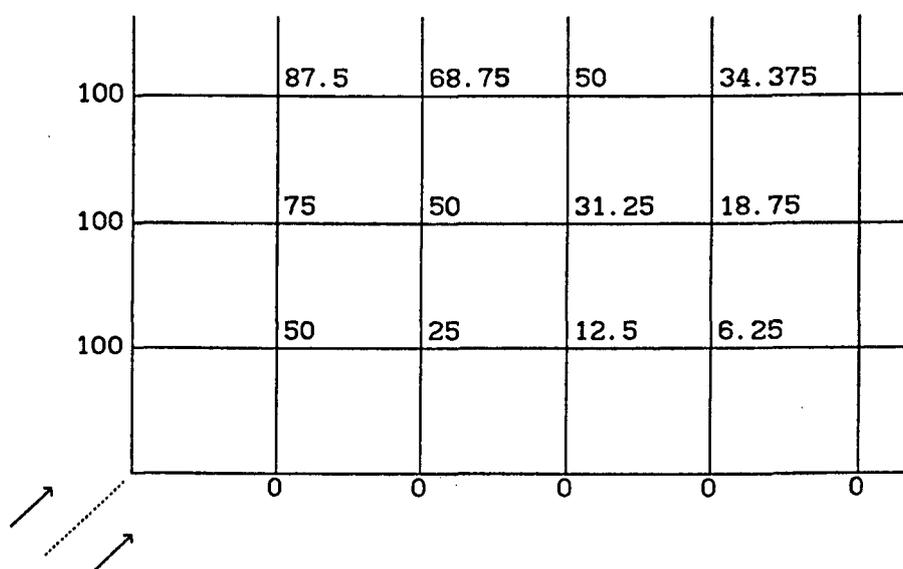


Figura 10.5 - Malha a 45° com o escoamento

10.3.1 – UMA NOTA SOBRE O ESQUEMA CDS

O esquema exponencial e seus derivados vem sendo amplamente adotados pelos adeptos do método dos volumes finitos a cerca de duas décadas. Como já comentado, suas principais vantagens são:

- i) dá origem a coeficientes positivos possibilitando o emprego de processos iterativos predominantemente explícitos para a solução dos sistemas de equações lineares;
- ii) produz campos de variáveis fisicamente realísticos; e
- iii) tem alta capacidade de dissipar os erros e oscilações durante o processo iterativo favorecendo as taxas de convergência.

Já o emprego do esquema CDS foi praticamente eliminado. Sua aplicação ficou restrita ao caso limite dos esquemas unidimensionais quando o número de Peclet e malha tende a zero. Contribuiu para isso a afirmação categórica de Patankar que, se referindo ao problema da Fig. 10.4, conclui, em tradução livre, que "para $\Gamma = 0$ (Peclet infinito), o esquema CDS produz $a_p = 0$. Portanto os métodos iterativos comuns de solução dos sistemas de equações não podem ser empregados. Se uma tentativa é feita de resolver os sistemas por um método direto, ou uma solução única não é obtida ou a solução é altamente irrealística". Experiências realizadas não confirmam essa afirmação. O problema da Fig. 10.4 foi resolvido sem nenhuma dificuldade adotando-se o MSI [35] na solução dos sistemas lineares. Embora o esquema CDS realmente dê origem a coeficientes a_p nulos para todos os volumes internos, as equações de prescrição das condições de contorno asseguram a unicidade e a consistência física da solução. Note ainda que para todos os volumes internos $a_e = a_w$ e portanto $\phi_E = \phi_W$.

Ainda Patankar [1], referindo-se agora ao problema da Fig. 10.5 afirma que "o uso do esquema CDS não é remédio para a falsa difusão. Como mencionado anteriormente, o esquema CDS origina soluções altamente irrealísticas quando aplicado a problemas com alto número de Peclet". Novamente, resultados obtidos para o problema da Fig. 10.5 contradizem essa afirmação. Usando-se o esquema CDS uma solução totalmente isenta de falsa difusão foi obtida. As temperaturas resultam exatamente 100 acima da diagonal, zero abaixo e 50 sobre a diagonal. Deve-se mencionar no entanto que na obtenção desta solução foi necessário seguir um transiente.

Se aplicada uma formulação para regime permanente ($\Delta t = \infty$), o processo de solução diverge. Dão suporte a esses resultados as conclusões do trabalho de Thompson et. al. [82] que afirmam serem incorretas as restrições de número de Peclet de malha para a estabilidade das soluções de problemas lineares unidimensionais de convecção e difusão. As experiências acima e outras, a serem apresentadas nas próximas secções, demonstram que o ostracismo a que o esquema CDS foi relegado não é totalmente justificado. Realmente, quando aplicado na solução do problema unidimensional dado pela Eq.(10.4) e na presença de números de Peclet maiores que dois, soluções fisicamente irrealísticas são sempre obtidas. Deve-se concordar portanto com Patankar que, nesse caso, a "dissipação artificial" introduzida pelos esquemas unidimensionais como o UDS, WUDS [34], etc., não degrada a qualidade da solução e sim é um fato desejável. O que se deve em parte contestar é a extrapolação dessa conclusão para problemas bi ou tridimensionais, transientes, com termos fonte diferentes de zero e, especialmente, com outras condições de contorno. Deve-se enfatizar que não é muito comum um problema de difusão-convecção como o dado pela Eq.(10.4) apresentar apenas condições de contorno de Dirichlet. Normalmente, na fronteira de saída do escoamento as variáveis são extrapoladas em função dos valores internos ao domínio, isto é, é como se o problema fosse parabólico, viabilizando um processo de marcha, na fronteira de saída. Se um problema transiente análogo ao da Eq.(10.4) é resolvido com condição de contorno de derivada nula na saída, a solução converge para o perfil uniforme através do CDS qualquer que seja o número de Peclet de malha. É também por apresentar condições de contorno de derivada nula que o problema da Fig. 10.4, como já comentado, convergiu para a solução exata através do CDS. Na realidade os campos obtidos durante o transiente apresentam algumas oscilações espúrias que acabam se dissipando conforme a solução avança para os campos de regime permanente. Provavelmente, a dificuldade de dissipar essas oscilações, característica do esquema CDS, limitou o passo de tempo empregado na solução do problema da Fig. 10.5. Não obstante, uma solução de regime permanente totalmente isenta de falsa difusão foi obtida através do CDS.

Na próxima secção as consequências da aplicação dos esquemas CDS, UDS e dos esquemas que envolvem termos dissipativos de quarta ordem com coeficientes constantes serão investigadas na solução do problema do escoamento no interior de uma cavidade quadrada.

10.4 - CONSEQUÊNCIAS DE ALGUNS ESQUEMAS

A solução do escoamento no interior de uma cavidade quadrada, induzido pelo movimento de uma de suas faces, se constitui num excelente problema para teste de metodologias numéricas. Embora a geometria seja simples e adequada à discretização cartesiana, trata-se de um problema especialmente interessante para a investigação da difusão numérica por não apresentar uma direção predominante de escoamento. Inicialmente, alguns resultados obtidos através do esquema UDS serão comparados aos obtidos pelo CDS.

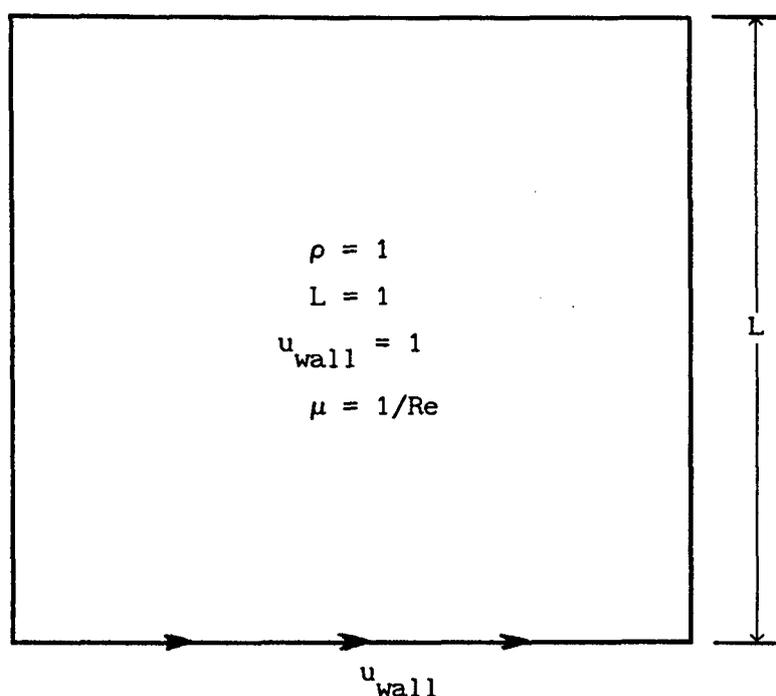


Figura 10.6 - Problema da cavidade quadrada.

Para um número de Reynolds igual a 1000, usando o esquema CDS com uma malha 10X10, a máxima velocidade nodal, adimensionada pela velocidade da parede é 0.3732. Usando o esquema UDS a mesma velocidade reduz seu valor para 0.3098. Sem dúvida, a diferença não ocorre apenas na velocidade máxima. Todos os campos de u , v e P apresentam diferenças consideráveis. É claro que com uma malha muito refinada ambos os resultados devem ser coincidentes já que, de acordo com a Eq.(10.9), a dissipação artificial introduzida pelo esquema UDS reduz de intensidade conforme o número de Reynolds de malha diminui.

O entendimento de que o esquema UDS é equivalente ao esquema CDS com uma dissipação artificial ajuda a explicar porque a velocidade máxima é menor quando o UDS é aplicado. O cálculo do coeficiente de dissipação artificial, de acordo com a Eq.(10.9), nas interfaces dos volumes de controle mostra que esse coeficiente chega a superar em 15 vezes o coeficiente molecular. Usando o UDS a dissipação artificial será zero apenas nas paredes da cavidade pois elas são impermeáveis, reduzindo o número de Reynolds de malha a zero. Portanto, a solução via UDS é fisicamente equivalente à solução via CDS com um fluido que apresenta uma viscosidade molecular maior no interior da cavidade do que adjacente a parede. Como o movimento do fluido no interior da cavidade é induzido pela tensão na parede, torna-se claro porque a velocidade máxima é menor usando-se o UDS.

Inevitavelmente surge a discussão sobre qual esquema é o mais vantajoso. A resposta a essa questão exige evidentemente que critérios de comparação sejam estabelecidos. Se o tempo de computação é o critério, o esquema UDS leva vantagem. O esquema CDS, em função do seu caráter não dissipativo, exige maior número de iterações para que a solução de regime permanente seja alcançada. Já se a qualidade da solução é o objetivo principal, a solução obtida através do CDS é superior como demonstram os resultados a seguir.

A Tab. 10.3 abaixo mostra o valor máximo da função de corrente na cavidade para número de Reynolds igual a 1000 para os esquemas CDS, UDS e WUDS em função da malha empregada na solução. O valor "bench-mark" para ψ_{max} foi obtido em [83] através de um método de volumes finitos com malha 127X127 e é igual a 0.1179.

O esquema CDS exhibe sem dúvida melhores resultados especialmente para malhas pouco refinadas quando a falsa difusão promovida pelo UDS é mais intensa. Se o processo de refino de malha é avançado além do exposto na tabela é de se esperar que os resultados se aproximem mais entre si e do resultado correto.

Na verdade, a melhor maneira de comparar os esquemas seria comparar soluções obtidas com o mesmo esforço computacional. Nesse caso, para o mesmo esforço computacional, o esquema UDS permitiria o uso de malhas mais refinadas que o esquema CDS. Este teste não foi implementado porque, entre outros motivos, a conclusão ficaria restrita ao problema específico em análise e portanto, não poderia ser generalizada. De qualquer forma, mesmo aceitando-se que o valor de ψ_{max} talvez não seja o

critério mais adequado para aferir-se a qualidade da solução, é significativo que o valor de ψ_{\max} obtido com o esquema CDS e uma malha 30X30 seja comparável ao valor obtido no esquema WUDS para uma malha 70X70.

TABELA 10.3 - Valor de ψ_{\max} na cavidade quadrada para número de Reynolds igual a 1000 e para os esquemas CDS, WUDS e UDS em função da malha.

Malha	CDS	WUDS	UDS
10X10	0.07307	0.04934	0.04668
20X20	0.09216	0.06743	0.06428
30X30	0.10105	0.07883	0.07364
40X40	0.10686	0.08719	0.08017
50X50	0.11056	0.09342	0.08504
60X60	0.11290	0.09817	0.08879
70X70	0.11435	0.10184	0.09172
80X80	0.11535	0.10472	0.09409

Algumas consequências da introdução de dissipação artificial via termos do tipo da Eq.(6.25) serão também abordadas. Trata-se de um teste interessante haja vista que esse tipo de dissipação é normalmente adotada na solução de escoamentos a altas velocidades. Embora, quando se usa dissipação artificial com coeficientes constantes esta seja de quarta ordem, inicialmente um termo dissipativo de segunda ordem foi empregado.

Dissipação de segunda ordem pode ser introduzida simplesmente adicionando-se ao termo RHS dado pela Eq.(8.11) um termo $D_e^{(2)}$ do tipo

$$D_e^{(2)} = \omega_e (\phi_N - 2\phi_P + \phi_S) + \omega_e (\phi_E - 2\phi_P + \phi_W) \quad (10.11)$$

onde ω_e é o coeficiente de dissipação artificial e o subscrito indica que

ele atua na parte explícita das equações discretizadas. Se o problema da cavidade quadrada é resolvido usando-se o CDS com $\omega_e = 0.003$, número de Reynolds igual a 1000 e uma malha 10X10 obtêm-se para a máxima velocidade nodal o valor 0.5601 contra 0.3732 e 0.3098 referentes aos esquemas CDS e UDS respectivamente. É fácil verificar que a solução via CDS com $\omega_e = 0.003$ é idêntica a solução via CDS com $\omega_e = 0.0$ e número de Reynolds Re dado por

$$Re = \frac{1}{0.001 + 0.003} = 250 \quad (10.12)$$

Note que a parcela 0.001 do denominador corresponde a viscosidade molecular para o caso $Re = 1000$.

De fato, adicionar o termo dissipativo dado pela Eq.(10.11) é equivalente a aumentar a viscosidade do fluido. Note que o coeficiente de dissipação introduzido é três vezes o coeficiente molecular, enquanto na solução via UDS (equivalente também a uma dissipação de segunda ordem porém não linear) este coeficiente, no problema analisado, varia de zero a quinze vezes o coeficiente molecular. Note ainda que o mesmo resultado obtido com $\omega_e = 0.003$ pode ser obtido simplesmente fazendo-se $\beta = 4$ na Eq.(10.3) e suas similares para as outras faces dos volumes de controle.

Dissipação artificial de quarta ordem pode ser introduzida se adicionarmos ao RHS um termo dado por

$$D_e^{(4)} = \omega_e (\phi_{NN} - 4\phi_N + 6\phi_P - 4\phi_S + \phi_{SS}) + \omega_e (\phi_{EE} - 4\phi_E + 6\phi_P - 4\phi_W + \phi_{WW}) \quad (10.13)$$

Adotando-se o esquema CDS, o número de iterações para que a convergência seja alcançada cai com o aumento de ω_e , de 212 iterações para $\omega_e = 0.0$ até 145 com $\omega_e = 0.001$. No entanto, neste último caso, o valor máximo, da velocidade nodal alcança 0.5106. Para valores maiores de ω_e o processo de solução diverge. Como esperado [64], o uso de dissipação implícita estende o limite de ω_e porém sem ganhos na taxa de convergência e com maior deterioração da solução. Maiores detalhes da aplicação da dissipação implícita podem ser vistos em [64].

10.5 - EFEITOS DOS TERMOS DISSIPATIVOS EM UM PROBLEMA COM ONDA DE CHOQUE

Todas as discussões deste item serão ilustrados com ajuda das soluções produzidas pelo esquema simultâneo de B&W e o esquema segregado proposto no presente trabalho para a solução do escoamento inviscido de ar com número de Mach igual a 1.5 contra o hemisfério-cilindro da Fig. 7.16. Como foi comentado no item 10.1, este capítulo foi motivado pelas soluções bastantes diferentes obtidas por essas metodologias para esse problema.

Já foi enfatizado também que nas formulações em forma delta, a solução de regime permanente depende unicamente da avaliação da parte explícita das equações diferenciais. É evidente portanto que é nestes termos da equação diferencial que deve-se atuar. Considere inicialmente a formulação de B&W e o termo $(\partial/\partial\xi)(\rho uU/J)$ presente no lado direito da equação de conservação da quantidade movimento na direção x, isto é, a segunda componente da Eq.(6.20). No esquema de B&W essa derivada é aproximada por

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\rho uU}{J}\right) \cong \left[\left(\frac{\rho uU}{J}\right)_E - \left(\frac{\rho uU}{J}\right)_W\right] / (2\Delta\xi) \quad (10.14)$$

onde as posições E e W são as expostas na Fig. 10.7. Por outro lado, podemos imaginar um volume de controle em torno de P e avaliar a mesma derivada através de

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\rho uU}{J}\right) = \left[\left(\frac{\rho uU}{J}\right)_e - \left(\frac{\rho uU}{J}\right)_w\right] / \Delta\xi \quad (10.15)$$

Considere agora o primeiro termo no interior dos colchetes. O termo $(\rho uU/J)_e$ pode ser fatorado no produto de um fluxo de massa por um fluxo de quantidade de movimento, i.e.,

$$(\rho uU/J)_e = (\rho U/J)_e u_e \quad (10.16)$$

Da mesma forma que na formulação segregada, o fluxo de massa pode ser estimado através do processo de média dado por

$$(\rho U/J)_e = [(\rho U/J)_P + (\rho U/J)_E] / 2 \quad (10.17)$$

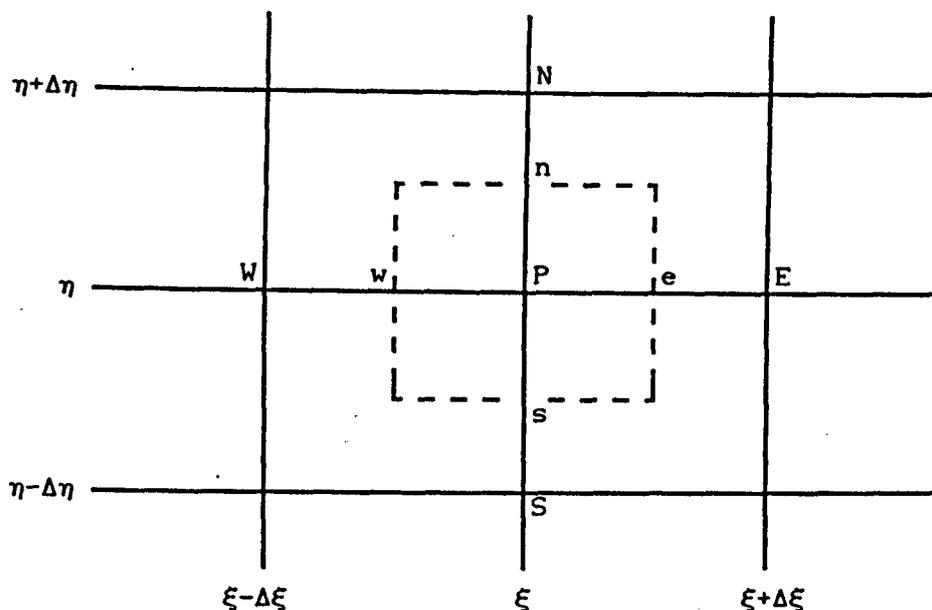


Figura 10.7 - Um volume de controle para o esquema de B&W.

A velocidade u na face este pode ser calculada por vários esquemas. Por exemplo, podemos assumir que

$$u_e = (u_P + u_E) / 2 \quad (10.18)$$

Se esse procedimento é aplicado a todas as interfaces dos volumes de controle, resulta o esquema CDS apesar do fato de a Eq.(10.15) resultar diferente da Eq.(10.14). Apesar dessa diferença, o método de B&W com o lado direito das equações avaliado desta forma produz resultados que são essencialmente iguais aos obtidos com o esquema original. No entanto, se a velocidade u é avaliada através do UDS, isto é,

$$u_e = \begin{cases} u_P & \text{se } (\rho U/J)_e \geq 0 \\ u_E & \text{se } (\rho U/J)_e < 0 \end{cases} \quad (10.19)$$

resultados bastantes diferentes são obtidos. A curva de C_p ao longo da linha de simetria produzida pelo código baseado no esquema de B&W com todas as variáveis dependentes (ρ, u, v, E_t) avaliada pelo UDS, resulta praticamente idêntica à obtida pela formulação segregada exposta na Fig. 7.19. Diferenças insignificantes devem ser creditadas ao diferente

armazenamento das variáveis nas duas metodologias. Deve-se enfatizar que neste caso não foi necessário adicionar termos dissipativos do tipo da Eq.(6.25) ao esquema B&W. Estes resultados demonstram que as diferenças apresentadas pelas soluções obtidas pelo esquema simultâneo de B&W e a metodologia segregada proposta no presente trabalho se devem exclusivamente ao tipo de dissipação artificial empregada.

A constatação do parágrafo anterior no entanto não ofusca o fato de que as soluções obtidas através dos dois procedimentos de introdução de dissipação artificial são insatisfatórias. A solução via UDS produz um choque extremamente atenuado e a que faz uso de dissipação de quarta ordem com coeficientes constantes produz valores de C_p irrealísticos.

As experiências bem sucedidas de aplicação de esquema CDS relatadas no item 10.3.1 poderiam sugerir que melhores resultados seriam obtidos com esse esquema. A Fig. 10.8 mostra a curva de C_p obtida através do CDS. Embora o processo iterativo de solução não tenha atingido o rígido critério de convergência pré-estabelecido, essa solução permaneceu basicamente invariante durante as cem últimas iterações. A solução é obviamente irrealística, mas o choque é bem localizado e bastante concentrado. Deve-se notar que, na região próxima à linha de simetria, o escoamento é predominantemente unidimensional e com condições de contorno de u e v prescritas tanto na fronteira de entrada como na superfície do corpo. Assim, nesta região, o problema se assemelha ao problema dado pela Eq.(10.4), que se resolvido para altos números de Peclet através do esquema CDS, produz, como é bem conhecido, soluções com o mesmo comportamento apresentado na Fig. 10.8.

Como não é possível eliminar totalmente a dissipação artificial, o programa foi executado com $|\bar{\alpha}|$, presente na Eq.(10.2) e similares, assumindo valores menores que 0.5. A Fig.10.9 mostra a curva de C_p obtida para $|\bar{\alpha}| = 0.05$, isto é, com dez vezes menos dissipação artificial que no esquema UDS. A solução é livre de oscilações, o choque aparece menos atenuado e mais bem localizado que na solução obtida com $|\bar{\alpha}| = 0.5$ exposta na Fig. 7.19. Outro teste interessante foi realizado aplicando-se o CDS nas equações de conservação da quantidade de movimento e da energia e o UDS na equação da conservação da massa. A solução obtida, semelhante a da Fig. 7.19, mostra que a dissipação artificial introduzida apenas na equação da conservação da massa foi suficiente para estabilizar todo o conjunto de quatro equações diferenciais acopladas. A aplicação do CDS na equação da conservação da massa e do UDS nas outras equações de conservação demonstrou que a recíproca também é verdadeira. Note que como

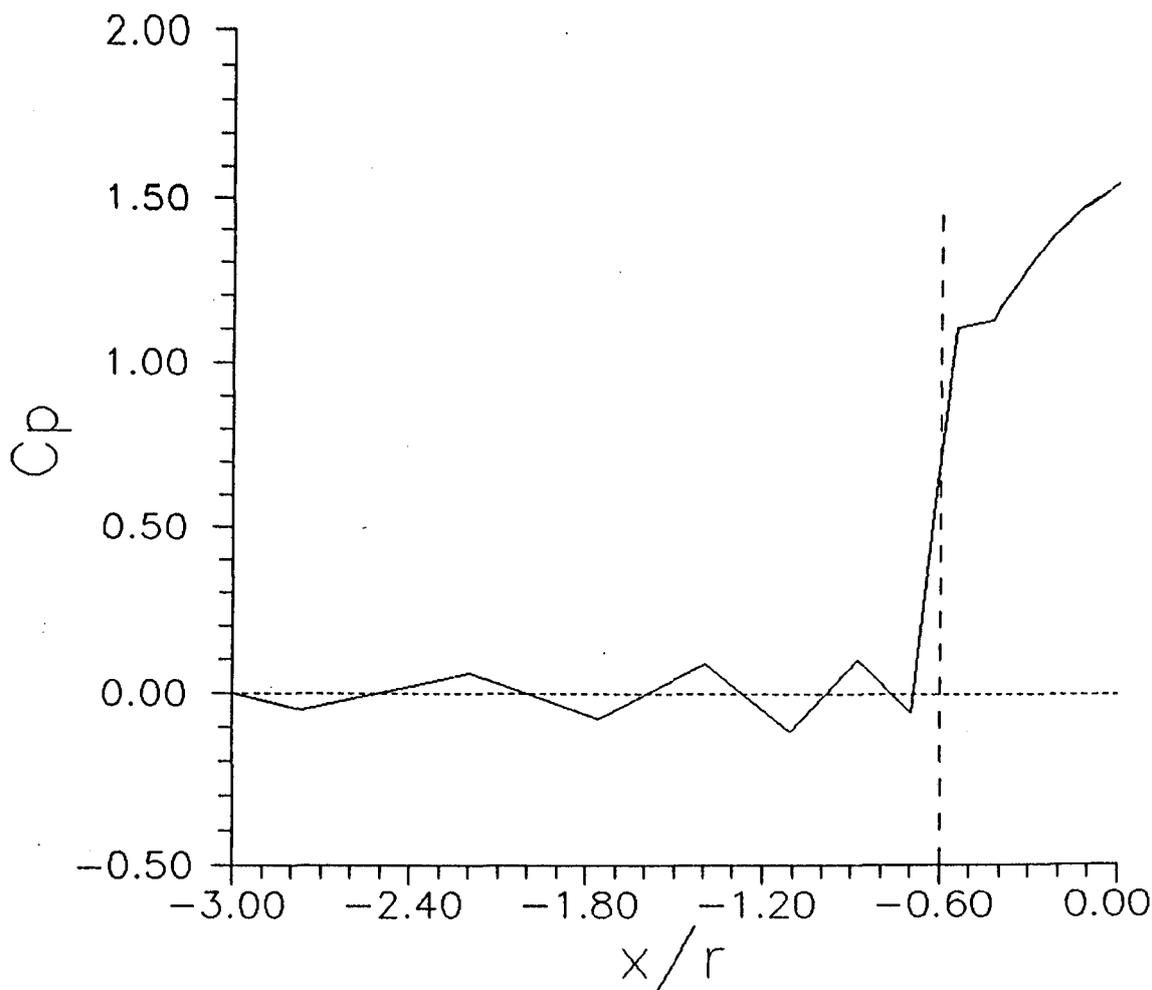


Figura 10.8 - Distribuição de C_p ao longo da linha de estagnação para o escoamento contra o hemisfério-cilindro obtida com o esquema CDS ($M_\infty = 1.5$).

a equação da conservação da massa não apresenta termos difusivos, a recomendação usual [13] é empregar-se sempre o esquema UDS para avaliação da densidade nas interfaces. Estas soluções demonstram que a quantidade de dissipação adicionada pelo esquema UDS é muito maior que a necessária para assegurar a estabilidade da solução e eliminar oscilações espúrias. Deve-se também enfatizar que as matrizes de coeficientes nestes casos apresentam elementos positivos e negativos com aproximadamente o mesmo valor absoluto.

Por último, a Fig. 10.10 expõe os resultados obtidos com $|\bar{\alpha}| = 0.05$ e uma malha também 30X30 mais refinada na região do choque. A solução pode ser considerada bastante boa para uma técnica que captura naturalmente o choque.

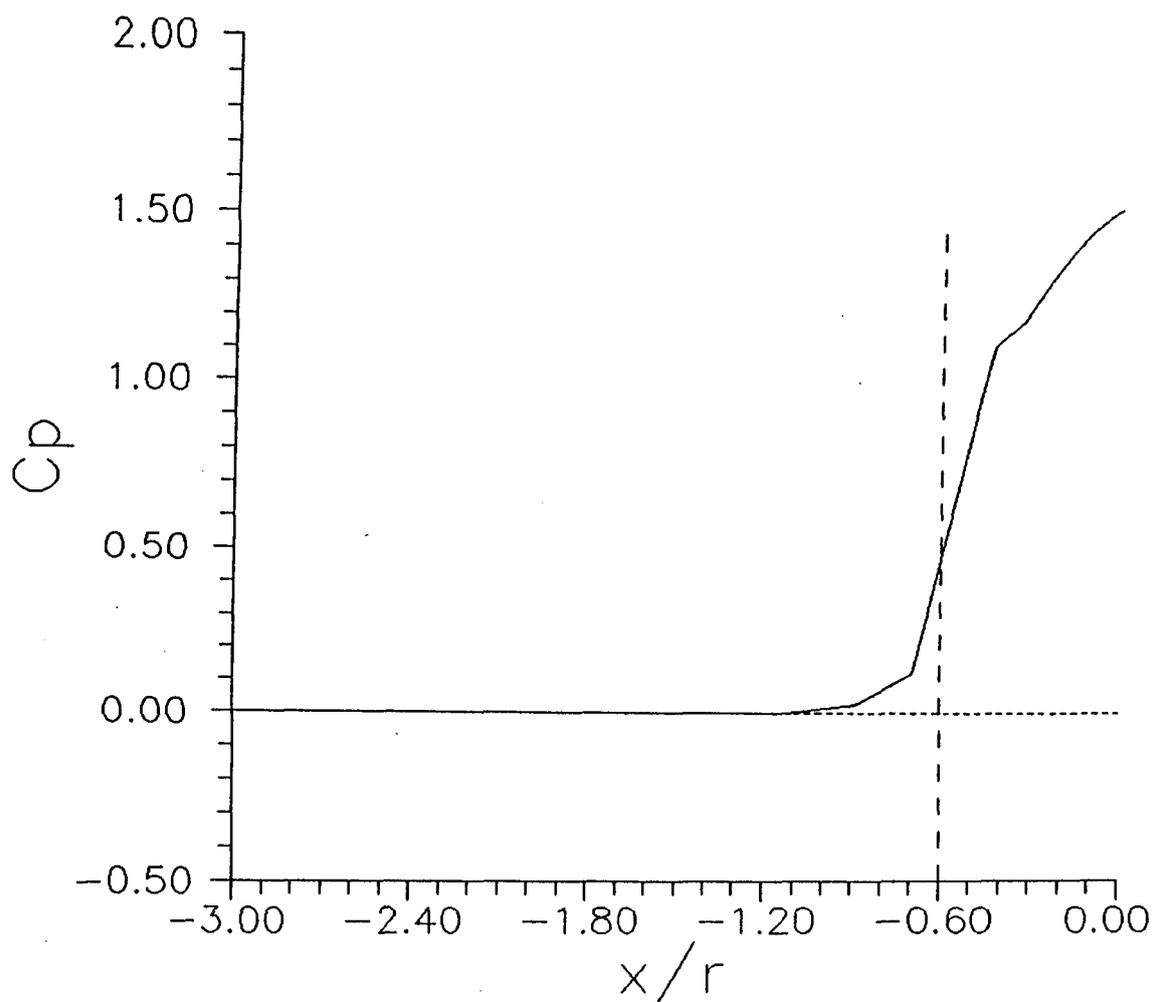


Figura 10.9 - Distribuição de C_p na linha de estagnação para o escoamento contra o hemisfério-cilindro obtida com $|\bar{\alpha}| = 0.05$ ($M_\infty = 1.5$)

10.6 - RESUMO DO CAPÍTULO

Basicamente, este capítulo mostrou que as diferenças apresentadas pela solução via B&W e via a metodologia segregada se devem à forma como é introduzida dissipação artificial. Adicionalmente, demonstrou-se, através da solução do problema da cavidade quadrada, que a maioria das soluções apresentadas na literatura de métodos numéricos nas últimas décadas, esteve desnecessariamente contaminada por excessiva falsa difusão em função da utilização indiscriminada do esquema unidimensional exponencial (e seus derivados). Sem dúvida, em muitos casos, melhores soluções poderiam ter sido obtidas através do CDS. Mesmo nos casos em que o esquema CDS gera soluções irrealísticas, o uso de esquemas como o Power

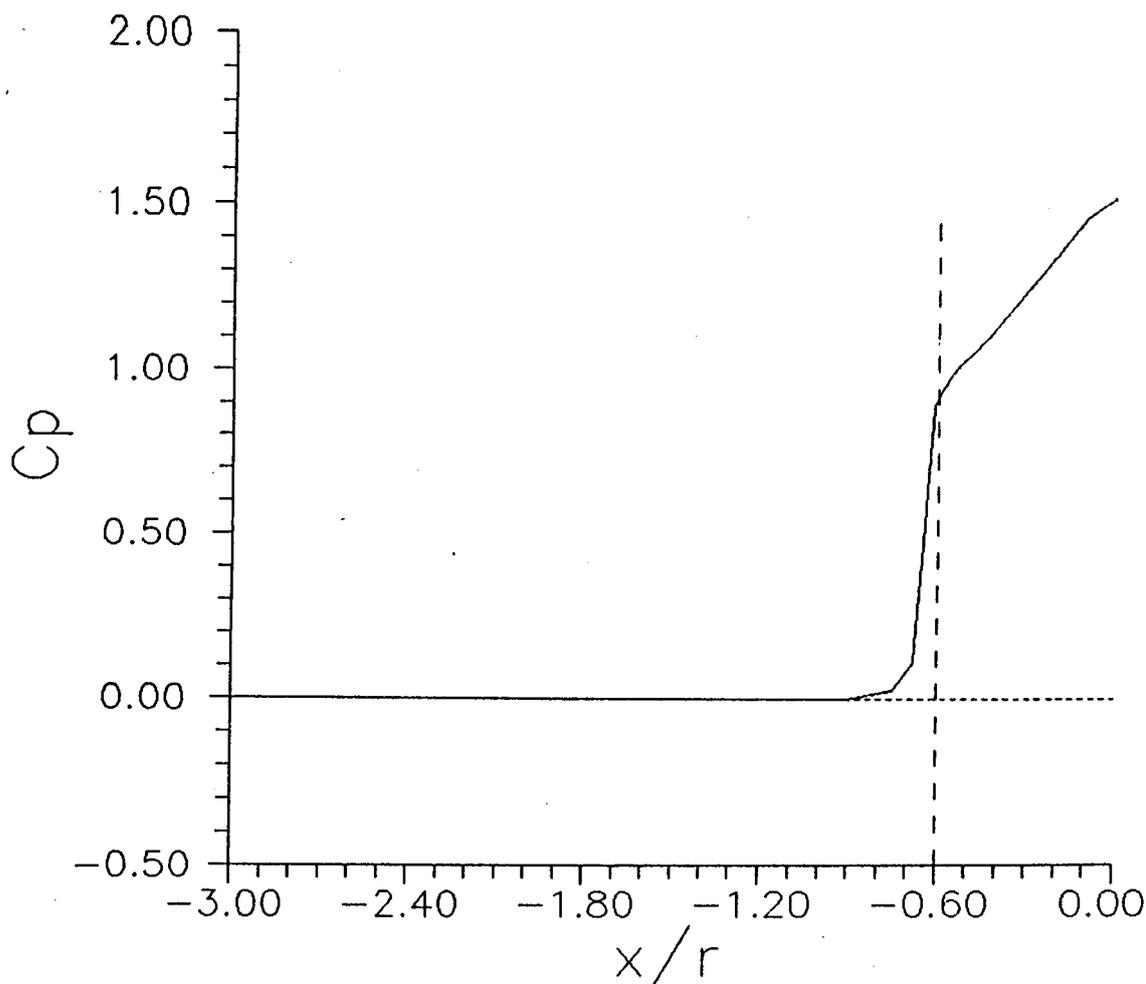


Figura 10.10 - Distribuição de C_p na linha de estagnação para o escoamento contra o hemisfério-cilindro obtida com $|\bar{\alpha}| = 0.05$ e uma malha mais refinada na região do choque ($M_\infty = 1.5$).

-Low, o WUDS, etc., parece acrescentar muito mais dissipação que o necessário, como verificado na solução do problema envolvendo uma onda de choque.

O problema da falsa difusão remonta à mesma época que as primeiras soluções numéricas de problemas convectivos foram obtidas. Evidentemente centenas ou talvez milhares de artigos foram já publicados sobre o assunto. No entanto, as técnicas propostas para minimizar os efeitos da falsa difusão não se encontram ainda suficientemente difundidas e em plena aplicação.

No âmbito dos métodos segregados em volumes finitos, a tendência é produzir funções de interpolação para a avaliação da propriedade dependente e suas derivadas nas faces dos volumes de controle mais vinculadas com a física do problema. O ideal, em princípio inatingível, é

usar como função de interpolação a própria solução exata da equação diferencial. Este foi o caminho na obtenção do esquema exponencial, neste caso possível face a simplicidade do problema. Por fim, uma última questão deve ser abordada. Como já comentado na Introdução deste trabalho, os métodos segregados tem tido aplicação quase que restrita à solução de problemas incompressíveis. Nesse caso, não há a formação de ondas de choque e os esforços para minimizar a falsa difusão são destinados a evitar que soluções do tipo da apresentada na Fig. 10.5 sejam geradas. Já na solução de problemas que envolvem ondas de choque, há a preocupação de que estas não sejam demasiadamente atenuadas e que as soluções não sejam contaminadas por oscilações irrealísticas pré e pós-choque. Face ao mal desempenho dos esquemas dissipativos explícitos de quarta ordem, como o que originalmente acompanha o esquema de B&W, muitos outros foram já propostos e testados. Alguns desses esquemas são ainda explícitos, isto é, termos extras são adicionados às equações diferenciais. Mantém, como o de quarta ordem, a desvantagem de que um coeficiente de dissipação deve ser especificado. Esquemas "upwind", de primeira e segunda ordem, têm também sido propostos [84]. Excelentes resultados têm sido obtidos com esquemas TVD (Total Variation Diminishing), esquemas não lineares que transitam automaticamente de segunda ou mais alta ordem, nas regiões em que a solução apresenta variações suaves, para esquemas "upwind", nas regiões de variações bruscas da variável dependente. Os resultados da aplicação de diversos desses esquemas num problema hiperbólico de condução de calor podem ser vistos no trabalho de Yang [85] assim como a relação dos principais trabalhos dedicados ao desenvolvimento de esquemas TVD.

11 - CONCLUSÕES

As contribuições e conclusões do presente trabalho podem ser classificadas em dois grandes grupos, relacionados respectivamente a:

- I) Desenvolvimento e teste de uma metodologia segregada em volumes finitos para a solução de problemas de escoamentos compressíveis e/ou incompressíveis em coordenadas generalizadas; e
- II) Análise comparativa de diversos aspectos distintos existentes entre a metodologia proposta no presente trabalho e o esquema simultâneo de Beam e Warming, ainda largamente empregado na solução de escoamentos compressíveis e precursor de uma série de novos métodos hoje disponíveis na literatura.

As contribuições e principais conclusões enquadradas no grupo I foram:

- i) Demonstrou-se que a solução segregada das equações diferenciais se constitui numa alternativa real aos métodos tradicionalmente empregados na solução de escoamentos compressíveis. Testes foram realizados para escoamentos compressíveis contra diversos tipos de corpos e configurações de foguetes.
- ii) A metodologia, por calcular a pressão através da equação da conservação da massa, possibilita a solução de problemas que apresentam regiões de escoamento compressível e regiões de escoamento incompressível.

- iii) Em todos os testes a metodologia demonstrou manter as mesmas qualidades das originalmente desenvolvidas em volumes finitos para a solução de escoamentos incompressíveis. A partir de campos iniciais estimados e uniformes o processo iterativo de solução sempre convergiu estavelmente para uma solução de regime permanente. Esse processo de convergência não é muito afetado pelo valor de Δt e as soluções são sempre fisicamente realísticas. O processo de linearização das equações, menos sofisticado que o aplicado nos métodos de solução simultânea, não comprometeu a estabilidade do processo iterativo de solução mesmo em problemas que envolvem fortes ondas de choque.
- iv) Os choques eventualmente presentes no escoamento mostraram-se atenuados ao longo de uma região não tão estreita. As bruscas variações da pressão sobre os corpos, próximas as arestas de compressão e expansão, não foram algumas vezes bem captadas. Esses defeitos devem ser atribuídos em grande parte às malhas grosseiras empregadas. Todas as vezes que as malhas foram refinadas o esforço computacional adicional resultou na melhoria da solução.
- v) Alguns arranjos de volumes de controle aplicados à discretização não ortogonal foram analisados. Um deles, proposto no presente trabalho, evita a superposição de volumes de controle para o mesmo princípio de conservação e dá origem a um esquema numérico que recupera exatamente os originalmente desenvolvidos para discretização cartesiana com arranjo desencontrado. Simultaneamente, foi analisada a importância e a consequência das diversas correções, atualizações e processos de média existentes nos vários níveis iterativos existentes nas metodologias numéricas não ortogonais. Este último aspecto se reveste de maior importância já que o assunto é raramente abordado com clareza na literatura.
- vi) A estratégia de manter-se as velocidades cartesianas como variáveis dependentes utilizando-se as contravariantes apenas para a avaliação dos fluxos de massa revelou-se correta. O esquema numérico resultou consideravelmente mais simples do que quando as velocidades contravariantes são as variáveis dependentes e mesmo daqueles dos quais participam também as componentes covariantes.

vii) Procedimentos de aplicação de condições de contorno normalmente empregados na solução de escoamentos incompressíveis foram aplicados tanto a regiões subsônicas como supersônicas das fronteiras sem que nenhuma instabilidade ou prejuízo aos campos convergidos pudesse ser detectada. A prescrição de condições de contorno em protuberâncias que avançam para o interior da região de escoamento (como no problema do escoamento contra uma placa plana) é inclusive muito mais simples na metodologia segregada que no esquema simultâneo de Beam e Warming.

Algumas das características do esquema de Beam e Warming foram estendidas aos métodos de solução simultânea:

viii) Inicialmente, o esquema segregado foi implementado em forma delta, que, dentre outras vantagens, facilita a aplicação de processos de fatoração aproximada para a solução dos sistemas de equações lineares.

ix) Experiências numéricas, possibilitadas pelo uso da forma delta, demonstraram que a estabilidade do processo iterativo de solução dos métodos segregados não está relacionada a positividade dos coeficientes dos sistemas de equações lineares. Soluções idênticas são obtidas e no mesmo número de iterações com coeficientes avaliados pelo UDS, todos positivos portanto, e pelo CDS, em que não há nenhuma predominância de sinal.

x) O processo de fatoração aproximada, exatamente como aplicado nos métodos de solução simultânea, foi aplicado ao método de solução segregada e seu desempenho analisado em um problema simples envolvendo discretização cartesiana. Um outro processo de fatoração aproximada associado a solução segregada e que é aplicado às equações de conservação já discretizadas foi proposto. Os erros introduzidos por este último foram analisados e um procedimento foi sugerido para a sua minimização. O estudo de processos de fatoração aproximada ganha importância por serem muito mais adequados ao processamento vetorial do que procedimentos como o MSI que envolvem elevado grau de recursividade.

xi) A parte explícita (responsável pela solução de regime permanente) das equações no esquema de Beam e Warming foi avaliada por um procedimento de volumes finitos. Aplicando-se o esquema UDS para a avaliação das propriedades nas interfaces dos volumes de

controle, foi obtida uma solução para o problema de escoamento contra o hemisfério-cilindro essencialmente idêntica àquela obtida através da metodologia segregada. Esse resultado demonstra inequivocamente que as diferenças destacadas no Cap. 7 entre as soluções obtidas pelos dois métodos se deve exclusivamente à forma como dissipação artificial é introduzida, ou, sob outro ponto de vista, à forma de avaliação das propriedades nas faces dos volumes de controle.

- xii) Motivado pelo uso intensivo, pelos autores da área de aerodinâmica, de esquemas centrados para aproximação das derivadas espaciais, alguns problemas incompressíveis, normalmente resolvidos via esquemas que envolvem alguma forma de "upwinding", foram resolvidos pelo esquema CDS. Os resultados indicaram que o esquema CDS, nos problemas analisados, é capaz de gerar soluções de muito melhor qualidade que os esquemas usualmente empregados na mesma situação.
- xiii) Em função dos resultados acima, no problema envolvendo o escoamento supersônico contra o hemisfério-cilindro foi testado um esquema de interpolação menos dissipativo que o UDS. Em relação à solução em que o UDS foi aplicado, a nova solução apresentou um choque mais bem definido e posicionado. Em relação a solução obtida através do esquema de B&W, a definição e o posicionamento do choque são comparáveis porém sem as indesejáveis oscilações pré-choque. Estes resultados indicam que o esquema UDS introduz muito mais dissipação que o necessário para estabilizar a solução e eliminar oscilações espúrias. Além disso, outros testes demonstraram que a aplicação do UDS apenas na equação da conservação da massa introduz dissipação suficiente para estabilizar todo o conjunto de quatro equações diferenciais acopladas.

Por último, deve-se ressaltar que face ao bom desempenho da metodologia proposta no presente trabalho, detectado desde que os primeiros resultados foram obtidos, diversos outros trabalhos se desenvolveram envolvendo alunos de pós-graduação e bolsistas de iniciação científica vinculados ao Grupo de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor - SINMEC - do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina. Parte destes trabalhos contemplou atividades previstas em um convênio de cooperação

técnica e científica firmado entre o Departamento de Engenharia Mecânica e o Instituto de Aeronáutica e Espaço - IAE - do Centro Técnico Aeroespacial. Assim, um código voltado para a solução das equações de Euler em escoamentos tridimensionais encontra-se hoje já operando e apresentando bons resultados. A inclusão dos termos viscosos nesse programa foi já implementada e os primeiros resultados em breve serão obtidos. A avaliação de um modelo algébrico de turbulência é alvo de outro trabalho cujos primeiros resultados estão sendo agora analisados.

Em função da experiência que adquirimos durante a realização deste trabalho e no acompanhamento de outros realizados no SINMEC, nos parece que dois tópicos em especial merecem a dedicação dos pesquisadores interessados no assunto. O uso de malhas não estruturadas se constitui numa arma poderosa que confere extrema flexibilidade na discretização de regiões complicadas e possibilita que refinamentos localizados sejam implementados. Sem dúvida, este é um tema que deve ser atacado. Por último, consideramos que as técnicas de introdução de dissipação artificial hoje disponíveis no âmbito dos métodos de solução segregada ainda deixam muito a desejar. A adaptação das modernas técnicas hoje empregadas nas soluções simultâneas aos métodos segregados deve contribuir para a melhoria das características de captura de choques destes últimos.

12 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Co., Washington, DC., 1980.
- [02] Anderson, D.A., Tannehill, J.C. e Pletcher, R.H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, McGraw-Hill, Washington, 1984.
- [03] Chorin, A.J., A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems, Journal of Computational Physics, Vol.2, pp.12-26, 1967.
- [04] Steger, J.L. e Kutler, P., Implicit Finite-Difference Procedures for the Computation of Vortex Wakes, AIAA Journal, Vol.15, no.4, pp.581-590, 1977.
- [05] Kwak, D., Chang, J.L.C., Shanks, S.P. e Chakravarthy, S.R. A Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Flow Solver Using Primitive Variables, AIAA Journal, Vol.24, no.3, pp.390-396, 1986.
- [06] Briley, W.R., McDonald, H. e Shamroth, S.J., A Low Mach Number Euler Formulation and Application to Time-Iterative LBI Schemes, AIAA Journal, Vol.21, no.10, pp.1467-1469, 1983.
- [07] Harlow, F.H. e Amsden, A.A., A Numerical Fluid Dynamics Calculation Method for All Flow Speeds, Journal of Computational Physics, Vol.8, pp.197-213, 1971.

- [08] Harlow, F.H., e Amsden, A.A., Numerical Calculation of Almost Incompressible Flow, Journal of Computational Physics, Vol.3, pp.80-93, 1968.
- [09] Harlow, F.H. e Welch, J.E., Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, The Physics of Fluids, Vol.8, no.12, pp.2182-2189, 1966.
- [10] Maliska, C.R., A Solution Method for Three-Dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinates, Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canada, 1981.
- [11] Issa, R.I. e Lockwood, F.C., On the Prediction of Two-Dimensional Supersonic Viscous Interactions Near Walls, AIAA Journal, Vol.15, no.2, pp.182-188, 1977.
- [12] Patankar, S.V. e Spalding, D.B., A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows, International Journal for Heat and Mass Transfer, Vol.15, pp.1787-1806, 1972.
- [13] Van Doormaal, J.P., Numerical Methods for the Solution of Incompressible and Compressible Fluid Flows, Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canada, 1985.
- [14] Devarayalu, K., Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for Super-Sonic Flows with Strong Shocks, Ph.D. Thesis, Mississippi State University, USA, 1978.
- [15] Maliska, C.R. e Raithby, G.D., A Method for Computing Three Dimensional Flows Using Non-Orthogonal Boundary-Fitted Co-ordinates, International Journal For Numerical Methods in Fluids, Vol.4, pp.519-537, 1984.
- [16] Beam, R.M. e Warming, R.F., An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation Law Form, Journal of Computational Physics, Vol.22, pp.87-110, 1976.

- [17] Beam, R.M. e Warming, R.F., An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations, AIAA Journal, Vol.16, no.4, pp.393-402, 1978.
- [18] Silva, A.F.C. e Maliska, C.R., Avaliação no Limite Incompressível de uma Formulação para Qualquer Regime de Escoamento, anais do IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, IX COBEM, pp.241-244, Florianópolis, 1987.
- [19] Silva, A.F.C. e Maliska, C.R., Uma Formulação Segregada em Volumes Finitos para Escoamentos Incompressíveis e/ou Compressíveis em Coordenadas Generalizadas, anais do II Encontro Nacional de Ciências Térmicas, ENCIT 88, pp.11-14, Águas de Lindóia, São Paulo, 1988.
- [20] Maliska, C.R. e Silva, A.F.C., A Boundary-Fitted Finite Volume Method for the Solution of Compressible and/or Incompressible Fluid Flows using Both Velocity and Density Corrections, proceedings of the 7th International Conference on Finite Element Methods in Flow Problems, pp.405-412, Huntsville, Alabama, USA, 1989.
- [21] Silva, A.F.C. e Maliska, C.R., An Approximate Factorization Scheme Applied to the Segregated Finite-Volume Methods, anais do III Encontro Nacional de Ciências Térmicas, ENCIT 90, Itapema, Santa Catarina, 1990.
- [22] Silva, A.F.C. e Maliska, C.R., On the Introduction of Artificial Dissipation in Numerical Methods for Fluid Flow Problems, anais do III Encontro Nacional de Ciências Térmicas, Santa Catarina, 1990.
- [23] Maliska, C.R. e Silva, A.F.C., A Boundary-Fitted Finite Volume Method for the Solution of All Speed Flows using Both Velocity and Density Correction, trabalho apresentado no German-Brazilian Workshop on Computational Fluid Dynamics in Aerodynamics, Goettigen, RFA, 1990.
- [24] Silva, A.F.C. e Maliska, C.R., A Discussion about Two Methodologies for Solving Fluid Flow Problems, trabalho apresentado no German-Brazilian Workshop on Computational Fluid Dynamics in Aerodynamics, Goettigen, RFA, 1990.

- [25] Karki, K.C. e Patankar, S.V., Pressure Based Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Arbitrary Configurations, AIAA Journal, Vol.27, no.9, pp.1167-1174, 1989.
- [26] Connell, S.D. e Stow, P., A Discussion and Comparison of Numerical Techniques used to Solve the Navier-Stokes and Euler Equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.6, pp.155-163, 1986.
- [27] White, F.M., Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill, New York, 1974.
- [28] Burmeister, L.C., Convective Heat Transfer, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [29] Prata, A.T., Note on the Low Eckert Number Form of the Energy Equation, Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, Vol.IX, no.2, pp.129-136, maio de 1987
- [30] Thompson, J.F., Grid Generation Techniques in Computational Fluid Dynamics, AIAA Journal, Vol.22, no. 11, pp. 1505-1523, 1984.
- [31] Hauser, J. e Taylor, C.(edited by), Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1986.
- [32] Sokolnikoff, I.S., Tensor Analysis - Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua, Applied Mathematics Series, John Wiley & Sons, New York, 1964.
- [33] Maliska, C.R. e Silva, A.F.C., Desenvolvimento de Códigos Computacionais para Solução de Problemas de Escoamentos de Alta Velocidade, Relatório ao CTA/IAE, Parte II, Dep. Eng. Mec., UFSC, 1987.
- [34] Raithby, G.D., Prediction of Dispersion by Surface Discharge, Basin Investigation and Modelling Section, Canada Centre for Inland Waters, Burlington, Ontario, Canada, 1976.
- [35] Schneider, G.E. e Zedan, M., A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems, Numerical Heat Transfer, Vol.4, pp.1-19, 1981.

- [36] Raithby G.D., Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.9 pp.153-164. 1976.
- [37] Raithby, G.D. e Torrance, K.E., Upstream-weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow, Computer and Fluids, Vol.2, pp.191-206, 1974.
- [38] Raithby, G.D., A Critical Evaluation of Upstream Differencing Applied to Problems Involving Fluid Flow, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.9, pp.75-103, 1976.
- [39] Patel, M., Cross, M. e Markatos, N.C., An Evaluation of Eleven Discretization Schemes for Predicting Elliptic Flow and Heat Transfer in Supersonic Jets, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.30, no.9, pp.1907-1925, 1987.
- [40] Ratel, M.K., Markatos, N.C. e Cross, M., A Critical Evaluation of Seven Discretization Schemes for Convection-Difusion Equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.5, pp.225-244, 1985.
- [41] Zurigat, Y.H. e Ghajar, A.J., Comparative Study of Weighted Upwind and Second Order Upwind Difference Schemes, Numerical Heat Transfer, Vol.18, pp.61-80, 1990.
- [42] Souza, S.M.A.G.U. de e Maliska, C.R., Arranjo de Variáveis Co-localizadas no Método de Volumes Finitos, Anais do XI Congresso Ibero-Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, pp.177-191, Rio de Janeiro, 1990.
- [43] Van Doormaal, J.P. e Raithby, G.D., Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows, Numerical Heat Transfer, Vol.7, pp.147-163, 1984.
- [44] Van Doormaal, J.P. e Raithby, G.D., An Evaluation of the Segregated Approach for Predicting Incompressible Fluid Flows, presented at the National Heat Transfer Conference, Denver, Colorado, August 4-7, 1985.

- [45] Raithby, G.D. e Schneider, G.E., Numerical Solution of Problems in Incompressible Fluid Flow: Treatment of the Velocity-Pressure Coupling, Numerical Heat Transfer, Vol.2, pp.417-440, 1979.
- [46] Patankar, S.V., A Calculation Procedure for Two-Dimensional Elliptic Situations, Numerical Heat Transfer, Vol.4, pp.409-425, 1981.
- [47] França F^o, M. F., Estudo Comparativo de Métodos para Tratamento do Acoplamento Pressão-Velocidade, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1991.
- [48] Galpin, P.F., Van Doormaal, J.P. e Raithby, G.D., Solution of the Incompressible Mass and Momentum Equations by Application of a Coupled Equation Line Solver, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.5, pp.615-625, 1985.
- [49] Zedan, M. e Schneider. G.E., Investigation of the Simultaneous Variable Solution for Velocity and Pressure in Incompressible Fluid Flow Problems, AIAA Paper no.83-1519, presented at the AIAA 18th Thermophysics Conference, Montreal, Quebec, Canada, 1983.
- [50] Zedan, M. e Schneider. G.E., A Strongly Implicit Simultaneous Variable Solution Procedure for Velocity and Pressure in Fluid Flow Problems, AIAA Paper no.83-1569, presented at the AIAA 18th Thermophysics Conference, Montreal, Quebec, Canada, 1983.
- [51] Schneider, G.E. e Zedan, M., A Coupled Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Coupled Continuum Problems, AIAA Paper no.84-1743, presented at the AIAA 19th Thermophysics Conference, Snowmass, Colorado, USA, 1984.
- [52] Zedan, M. e Schneider G.E., A Coupled Strongly Implicit Procedure for Velocity and Pressure Computation in Fluid Flow Problems, Numerical Heat Transfer, Vol.8, pp.537-557, 1985.
- [53] Vanka, S.P., Chen, C.J. e Sha, W.T., A Semi-Implicit Calculation Procedure for Flows Described in Boundary Fitted Coordinate Systems, Numerical Heat Transfer, Vol.3, pp.1-19, 1980.

- [54] Shih, T.M., Tan, C.H. e Hwang, B.C., Effects of Grid Staggering on Numerical Schemes, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.9, pp.193-212, 1989.
- [55] Peric, M., Kessler, R. e Scheuerer, G., Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids, Computers & Fluids, Vol.16, No.4, pp.389-403, 1988.
- [56] Rhie, C.M., A Numerical Study of the Flow Past an Isolated Airfoil with Separation, PhD Thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, 1981.
- [57] Hsu, C., A Curvilinear-Coordinate Method for Momentum, Heat and Mass Transfer in Domains of Irregular Geometry, PhD Thesis, University of Minnesota, 1981.
- [58] Marchi, C.H., Maliska, C.R. e Bortoli, A.L., The Use of Co-Located Variables in the Solution of Supersonic Flows, anais do X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Vol.1, pp.157-160, Rio de Janeiro, 1989.
- [59] Marchi, C.H., Maliska, C.R. e Silva, A.F.C., A Boundary Fitted Numerical Method for the Solution of Three Dimensional All Speed Flows using Co-Located Variables, anais do III Encontro Nacional de Ciências Térmicas, Vol.1, pp.351-356, Itapema, 1990.
- [60] Bortoli, A.L., O Uso de Variáveis Co-Localizadas na Solução de Escoamentos Supersônicos sobre Corpos de Geometrias Arbitrárias, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1990.
- [61] MacCormack, R.W., The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering, AIAA Paper no.69-354, 1969.
- [62] Peyret, R. e Taylor, T.D., Computational Methods for Fluid Flow, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, 1985.
- [63] MacCormack, R.W., On the Development of Efficient Algorithms for Three Dimensional Fluid Flow, Revista da Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, Vol.X, no.4, pp.323-346, 1988.

- [64] Pulliam, T.H., Artificial Dissipation Models for the Euler Equations, AIAA Journal, Vol.24, no.12, pp.1931-1940, 1986.
- [65] Pulliam, T.H. e Steger, J.L., Implicit Finite-Difference Simulations of Three-Dimensional Compressible Flow, AIAA Journal, Vol.18, no.2, pp.159-167, 1980.
- [66] Roache, P.J., Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, Albuquerque, N.M., USA, 1976.
- [67] Azevedo, J.L.F., Transonic Aeroelastic Analysis of Launch Vehicle Configurations, Ph.D. Thesis, Stanford University, USA, 1988.
- [68] Jernell, L.S., Aerodynamic Loading Characteristics of a 1/10-Scale Model of the Three-Stage Scout Vehicle at Mach Numbers from 1.57 to 4.65, NASA Technical Note D-1930, 1963.
- [69] Nietubicz, C.J., Pulliam, T.H. e Steger, J.L., Numerical Solution of the Azimuthal-Invariant Thin-Layer Navier-Stokes Equations, AIAA Paper 79-0010, 1979.
- [70] Deiwert, G.S., Supersonic Axisymmetric Flow over Boattails Containing a Centered Propulsive Jet, AIAA Journal, Vol.22, No.1, pp.1358-1365, 1984.
- [71] ONERA, Essai du Lanceur Bresilien au 1/15 soufflerie S2MA; Configuration VC-C (5 dards), Mach 1.500, 2.502, 3.747, França, dezembro, 1988.
- [72] Marchi, C.H., Silva, A.F.C. e Maliska C.R., Solução Numérica de escoamentos de Fluidos Compressíveis em Tuberias, submetido ao 4º Workshop de Combustão e Propulsão, Santos, 1991.
- [73] Azevedo, J.L.F., Euler Solution of Transonic Nozzle Flows, Anais do III Encontro Nacional de Ciência Térmicas, Vol.1, pp.243-248, Itapema, 1990.

- [74] Pulliam, T.H. e Steger, J.L., Recent Improvements in Efficiency, Accuracy and Convergence for Implicit Approximate Factorization Algorithms, AIAA Paper no. 85-0360, presented at 23rd Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, USA, 1985.
- [75] Stone, H.L., Iterative Solution of Implicit Approximations of Multi-dimensional Partial Differential Equations, SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol.5, pp.530-558, 1968.
- [76] Schneider, G.E. e Zedan, M., Investigation into the Stability Characteristics of the Modified Strongly Implicit Procedures, ASME Paper 82-HT-23, 1982.
- [77] Zedan, M. e Schneider, G.E., 3-D Modified Strongly Implicit Procedure for Finite Difference Heat Conduction Modelling, AIAA Journal, Vol.21, No.2, pp.295-303, 1983.
- [78] Peric, M., Efficient Semi-Implicit Solving Algorithm for Nine-Diagonal Coefficient Matrix, Numerical Heat Transfer, Vol.11, pp.251-279, 1987.
- [79] Silva, A.F.C., Marchi, C.H., Livramento, M.A. e Azevedo, J.L.F., On the Effects of Vectorization for Efficient Computation of Three Dimensional Segregated Finite Volume Solutions, submetido ao XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, 1991.
- [80] Rodrigues, J.R.P., Cavalcanti, A.A. e Prodan, V., Vetorização na Área de Simulação de Reservatórios, Relatório Técnico No.1074, Cenpes, Petrobras, 1990.
- [81] Hutchinson, B.R. e Raithby, G.D., A Multigrid Method Based on the Additive Correction Strategy, Numerical Heat Transfer, Vol.9, pp.511-537, 1986.
- [82] Thompson, H.D., Webb, B.H. e Hoffman, J.D., The Cell Reynolds Number Myth, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.5, pp.305-310, 1985.

- [83] Chia, U., Chia, K.N e Shin, T.N., High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, Journal of Computational Physics, Vol.48, pp.387-411, 1982.
- [84] Coakley, T.J., Implicit Upwind Methods for the Compressible Navier-Stokes Equations, AIAA Journal, Vol.23, No.3., pp.374-380, 1985.
- [85] Yang, H.Q., Characteristics-based, High-order Accurate and Nonoscillatory Numerical Method for Hyperbolic Heat Conduction, Numerical Heat Transfer, Vol.18, pp.221-241, 1990.
- [86] Hayes, W.D. e Probstein, R.F., Hypersonic Flow Theory - Inviscid Flows, Academic Press, New York, 1966.
- [87] Hsieh, T., Low Supersonic Flow over Hemisphere-Cylinder at Incidence, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol.14, No.11, pp.662-668, Nov. 1977.