

UNIVERSITE DE TECHNOLOGIE DE COMPIEGNE

DIVISION SYSTEMES MECANQUES

**ETUDE ET CONCEPTION D'UN GUIDAGE LINEAIRE DE HAUTE
PRECISION A PALIER FLUIDE**

Par

Osmar POSSAMAI

TABLE DES MATIERES

NOTATION	1
I - INTRODUCTION	1
II - PALIERS A FLUIDE INCOMPRESSIBLE EN REGIME STATIONNAIRE	6
II.1 - Equations générales	6
II.2 - Palier hydrostatique rectangulaire.....	9
II.2.1- Répartition de pression	9
II.2.2- Calcul du débit	11
II.2.3- Capacité de charge	13
II.2.4- Rigidité du palier	14
II.2.5- Critères de stabilité	16
II.2.6- Influence de la vitesse de déplacement du patin	17
II.2.7- Calcul du palier avec chargement décentré	18
II.2.7.1- Equilibre des mouvements	18
II.2.7.2- Répartition de pression dans le palier	20
II.2.7.3- Résultats des forces de pression	23
II.2.7.4- Point d'application de la force résistante-Moment résistant ...	24
II.2.7.5- Capacité de charge décentrée	25
II.2.7.6- Calcul du débit dans le cas du patin incliné	26
II.2.7.7- Raideur au mouvement de roulis	28
II.2.7.8- Critères de stabilité au roulis	30
II.2.8- Effets thermiques	31
II.2 - Palier hydrostatique circulaire	34
II.3.1- Répartition de pression	34
II.3.2- Force portante	36
II.3.3- Débit du palier	37
II.3.4- Rigidité statique	38
II.3.5- Critères pour la stabilité du palier	39
II.3.6- Les effets thermiques	41
III= PALIERS AEROSTATIQUES	43
III.1= Formulation générale pour les paliers à gaz	43
III.2= Palier avec un seul orifice central	44

III.3- Palier avec alvéole	48
III.4- Rigidité statique	50
IV-DETERMINATION DES DIMENSIONS DU PALIER ET CRITERES DE CHOIX ..	52
IV.1- Choix de la géométrie	53
IV.2- Paramètres du fonctionnement hydrostatique	54
IV.3- Paramètres du fonctionnement aérostatique	55
IV.4- Choix du type de palier	56
V- ETUDE DYNAMIQUE DU PATIN ISOLE	67
V.1-Formulation dynamique des patins à fluide peu compressible	67
V.1.1- Equations générales	68
V.1.2- Calcul des forces engendrées par l'écoulement	68
V.1.3- Puissance des forces de frottement	76
V.1.4- Puissance des forces de pression	79
V.1.5- Variation instantanée de l'énergie cinétique dans le domaine	82
V.1.3- Equations finales du mouvement du patin isolé	86
V.2- Technique de linéarisation	89
V.2.1- Linéarisation des équations générales-Equations dynamiques ...	87
V.3- Critères de stabilité	92
V.4 - Analyse adimensionnelle d'un patin à fluide incompressible	93
VI- ETUDE DYNAMIQUE COUPLE DE PATINS EN OPPOSITION	99
VI.1- Fonctionnement de l'élément de pré-charge	100
VI.2- Equations du mouvement	101
VI.3- Equation d'énergie cinétique appliquée au patin de pré-charge	104
VI.4- Equations de conservation du débit	106
VI.5- Equations linéarisées	107
VI.6- Equation du mouvement de l'élément de pré-charge	112
VI.7- Ensemble des forces agissant sur le patin principal	114
VI.8- Etude de la stabilité du patin couplé	118
VI.9- Réponse dynamique des patins en opposition	121
VII- CONCEPTION DU BANC LINEAIRE	126
VII.1- Étude des solutions possibles	127
VII.2- Déformations du guidage	131
VII.3- Étude des patins	144
VII.4- La centrale hydraulique et l'alimentation des patins.....	145

VII.4.1- Alimentation du chariot	145
VII.4.2- La centrale hydraulique	150
VIII- CONCEPTION DU BANC D'ESSAIS EXPERIMENTAL	152
VIII.1- Description du banc élémentaire	152
VIII.2- Caractéristiques et étalonnages	156
VIII.2.1- Données physiques et géométriques.....	156
VIII.2.2- Etalonnage des résistances hydrauliques.....	156
VIII.2.3- Etalonnage des capteurs capacitifs	158
VIII.3- Essais du patin isolé	161
VIII.3.1- Essais statiques	162
VIII.3.2- Essais dynamique	165
VIII.4 - Essais du patin couplé	168
VIII.4.1- Essais statiques	169
VIII.4.2- Essais dynamique	170
IX- CONCLUSION	175
BIBLIOGRAPHIE	179

NOTATION

II- PALIER HYDROSTATIQUE

II.1 - TYPE RECTANGULAIRE

c	- Capacité thermique à vol. constant (Cal/kg.c°);
cf	- Coefficient de frottement;
e	- Bras d'application de la charge externe (m);
h	- Epaisseur du film de fluide (m);
h_0	- Epaisseur minimale du film de fluide avec patin incliné (m);
h_1	- Jeu du film de fluide pour patin sous inclinaison (m);
$h(x)$	- Epaisseur du film de fluide à la position x (m);
l	- Longueur du capillaire (m);
u	- Vitesse du fluide direction x (m/s);
v	- Vitesse du fluide direction y (m/s);
w	- Vitesse du fluide direction z (m/s);
A	- Demi longueur de l'alvéole (m);
B	- Largeur du palier (m);
D	- Inclinaison du chariot $(h_1 - h_0) / h_0$;
F	- Portance du patin (N);
F_x, F_z	- Forces de volume appliquées sur le fluide (N);
W	- Charge externe appliquée au patin (N);
F_d	- Force portante totale pour une charge décentrée (N);
W_v	- Composante verticale de la charge externe (N)
W_h	- Composante horizontale de la charge externe (N);
F_{r1}	- Force résistante sous partie convergente du palier (N);
F_{r2}	- Force résistante sous partie divergente du palier (N);
K_c	- Coefficient de perte de charge du capillaire ($1/m^3$);
K_w	- Facteur de forme;
K_q	- Coefficient de débit;
K_1, K_2	- Coefficient de pression de la lèvre;
L	- Longueur de la lèvre (m);

M_a	- Moment appliqué au patin (N.m);
M_r	- Moment résistant offert par le palier (N.m);
M_{r1}	- Moment résistant partie convergente du palier (N.m);
M_{r2}	- Moment résistant partie divergente du palier (N.m);
$P(x)$	- Pression sous le palier (N/m ²);
P_a	- Pression dans l'avéole (N/m ²);
P_1	- Pression d'alimentation du patin (N/m ²);
$P_1(x_1)$	- Pression sous la partie convergente du palier (N/m ²);
$P_2(x_2)$	- Pression sous la partie divergente du palier (N/m ²);
Q	- Débit total qui passe par le palier (m ³ /s);
Q^*	- Débit en cas d'inclinaison du palier (m ³ /s);
Q_1, Q_2	- Débits partiels sortant du palier (m ³ /s);
R_c	- Rayon du tube capillaire (m);
Re	- Nombre de Reynolds ;
S	- Aire totale du palier (m ²);
T	- Longueur du palier (m) ;
\bar{U}	- Vitesse moyenne du fluide dans le jeu (m/s);
V	- Vitesse de translation du chariot (m/s)
$V_{2crit.}$	- Vitesse critique pour avoir le débit négatif (m/s);
x_{ip}	- Centre de gravité de la courbe de pression P_{x0} (m);
x_{pi}	- Bras d'application des forces résistantes (m);
β	- Rapport entre les pressions P_a/P_1 ;
θ	- L'angle d'inclinaison du chariot (deg);
\mathcal{P}_1	- Puissance fournie au fluide (W);
\mathcal{P}_2	- Puissance due au cisaillement du fluide (W);
\mathcal{P}_3	- Puissance évacuée par le débit du fluide (W);
\mathcal{P}_4	- Puissance dissipée par les parois du palier (W);
μ	- Viscosité du fluide (N.s/m ²);
ρ	- Densité du fluide (kg/m ³);
ΔT	- Variation de la température du fluide (c°);
λ	- Raideur statique pour charges centrées (N/μm);
$\bar{\lambda}$	- Raideur adimensionnelle ;
λM_r	- Raideur statique pour charges décentrées (N/μm);

II.2 - TYPE CIRCULAIRE

c	- Capacité thermique à vol. constant (Cal/kg.c°);
h	- Jeu du film de fluide (m);
r	- Distance à l'axe du patin (m);
$u(r,y)$	- Vitesse du fluide direction x (m/s);
F	- Portance du patin (N) ;
K	- Rapport Re/Ri ;
K_c	- Coefficient de perte de charge du capillaire ($1/m^3$);
K_w	- Facteur de forme;
K_q	- Coefficient de débit;
P_a	- Pression dans l'avéole (N/m^2);
P_l	- Pression d'alimentation du patin (N/m^2);
$P(r)$	- Pression sous le palier au rayon r (N/m^2);
Q	- Débit total qui passe par le palier (m^3/s);
Re	- Rayon externe du palier (m);
Ri	- Rayon interne du palier (m);
S	- Aire totale du patin (m^2);
\bar{U}	- Vitesse moyenne du fluide dans le jeu (m/s);
\mathcal{P}_1	- Puissance fournie au fluide (W);
\mathcal{P}_2	- Puissance due au cisaillement du fluide (W);
\mathcal{P}_3	- Puissance évacuée par le débit du fluide (W);
\mathcal{P}_4	- Puissance dissipée par les parois du palier (W);
μ	- Viscosité du fluide (Pa.s);
ρ	- Densité du fluide (kg/m^3);
ΔT	- Variation de la température du fluide (c°);
λ	- Raideur statique du patin ($N/\mu m$);
$\bar{\lambda}$	- Raideur adimensionnelle ;
$\tau(r)$	- Contrainte de frottement (N/m^2);

III - PALIER AEROSTATIQUE

d_o	= Diamètre de l'orifice d'alimentation (m);
h	= Épaisseur du film de fluide (m);

- k - Rapport des capacités thermiques massiques à pression et à volume constants : (1,405 pour l'air);
- q_f - Débit massique du gaz dans le jeu (kg/s);
- q_o - Débit massique du gaz dans l'orifice (kg/s);
- r - Distance au l'axe du patin (m);
- A - Aire de l'orifice d'alimentation = πd_o^2 (m²);
- P(r) - Pression dans la portée du patin (N/m²);
- P_o - Pression à la sortie de l'orifice (N/m²);
- P_{at} - Pression atmosphérique (N/m²);
- P₁ - Pression d'alimentation (N/m²);
- R - Constante du gaz (J/kg K°);
- R_o - Rayon de l'orifice restricteur (m);
- R_i - Rayon interne du palier (m);
- R_e - Rayon externe du palier (m);
- T_o, T₁ - Température absolue du fluide (K°);
- C_d - Coefficient de contraction;
- μ - Viscosité du fluide N s/ m²);
- $\Sigma \dot{m}$ - Sommes des débits massiques partiels du palier (kg/s);
- λ - Raideur statique du patin (N/ μ m);

V - DYNAMIQUE DU PATIN

- e - Profondeur de l'alvéole (m) ;
- h - Jeu du patin (m) ;
- h_o - Jeu de référence du patin (m) ;
- h - Jeu adimensionnel ;
- l - Longueur du capillaire (m);
- t - Temps (s) ;
- \tilde{t} - Temps adimensionnel ;
- A_a - Aire de l'avéole = πR_i^2 (m²);
- A_e = Surface de sortie = $2\pi R_e h$ (m²);
- A_p = Aire des portées = $\pi (R_e^2 - R_i^2)$ (m²);
- A_s = Surface de sortie de l'alvéole = $2\pi R_i h$ (m²);
- A_T = Aire totale du patin (m²);
- Ω = Domaine de fluide ;

Da	- Domaine de fluide dans l'alvéole ;
Dc	- Domaine de fluide dans le capillaire ;
Dj	- Domaine de fluide dans le jeu ;
Ec	- Energie cinétique du fluide ;
Fc	- Force de frottement dans le capillaire (N/m ²);
Fp	- Portance du patin (N/m ²);
Kc	- Coefficient de perte de charge du capillaire (1/m ³);
K	- Coefficient de compressibilité du fluide (N/m ²);
M	- Masse supportée par le patin (Kg);
N(t)	- Force excitatrice extérieure (N);
Pa	- Pression dans l'avéole (N/m ²);
Pl	- Pression d'alimentation du patin (N/m ²);
P(r)	- Pression sous le palier au rayon r (N/m ²);
Qa	- Débit dans l'avéole (m ³ /s);
Qs	- Débit de sortie (m ³ /s);
Ql	- Débit d'alimentation du patin (m ³ /s);
Rl	- Rayon de l'orifice restricteur (m);
Ri	- Rayon interne du palier (m);
Re	- Rayon externe du palier (m);
S	- Surface équivalente = $\pi(Re^2 - Ri^2) / (2 \ln(Re/Ri))$ (m ²);
Sf	- Surfaces délimitées dans le fluide (m ²)
Sm	- Surfaces solides mobiles (m ²);
Sp	- Surfaces solides fixes (m ²);
V	- Volume du domaine D (m ³);
Va	- Volume de l'alvéole (m ³);
Vg	- Volume total = (Vl + Va) (m ³);
Vl	- Volume du capillaire (m ³);
Ua	- Vitesse moyenne du fluide dans l'alvéole (m/s);
Uc	- Vitesse moyenne du fluide dans le capillaire (m/s);
Uj	- Vitesse moyenne du fluide dans le jeu (m/s);
Un	- Composant normale de la vitesse (m/s);
Xn	- Nombre adimensionnel ;
Φc	- Puissance dissipée par frottement dans le capillaire (W);
Φf	- Puissance des forces de frottement dans le palier(W);
Φpm	- Puissance des forces de pression(W);
Φpf	- Puissance des forces de pression des interfaces fluide (W);
Φfi	- Puissance dissipée par frottement dans le domaine (W);
μ	- Viscosité du fluide (N.s/m ²);

- ρ_a - Densité du fluide dans l'alvéole (kg/m^3);
- ρ_l - Densité du fluide dans le capillaire (kg/m^3);
- $\tau(r,y)$ - Contrainte de frottement (N/m^2);
- ω_n - Fréquence propre du patin (rad/s);
- ω_0 - Fréquence propre de référence (rad/s);
- $\tilde{\omega}_n$ - Fréquence propre adimensionnelle;
- $\hat{P}_a, \hat{Q}_a...$ - Perturbations autour des valeurs moyens;
- $\bar{P}_a, \bar{Q}_a...$ - Paramètres moyens;

VI - PATIN COUPLE

- e - Jeu de l'alésage du piston (m);
- h - Jeu du patin principal (m);
- h_l - Jeu du patin latéral (m);
- h_p - Jeu du patin de pré-charge (m);
- l - Longueur du capillaire (m);
- u_e - Vitesse du fluide dans l'alésage du piston (m/s);
- u_l - Vitesse du fluide dans le jeu du patin latéral (m/s);
- A_a - Aire de l'avéole = πR_i^2 (m^2);
- A_p - Aire des portées = $\pi (R_e^2 - R_i^2)$ (m^2);
- A_T - Aire totale du patin (m^2);
- D_p - Diamètre du piston (m);
- D_1 - Volume de contrôle de la chambre du piston;
- D_2 - Volume de contrôle chambre alvéolaire;
- F_a - Portance du patin de pré-charge (N/m^2);
- F_i - Portance du patin principal (N/m^2);
- F_p - Force de pré-charge appliquée au piston (N/m^2);
- K_c - Coef. de perte de charge du capillaire du patin principal ($1/\text{m}^3$);
- K_{cp} - Coef. de perte de charge capillaire patin de pré-charge ($1/\text{m}^3$);
- L - Longueur du piston (m);
- M_c - Masse supporté par le patin principal (Kg);
- M_p - Masse de l'élément de pré-charge (Kg);
- $N(t)$ - Force excitatrice extérieure (N);
- P_a - Pression dans l'avéole du patin principal (N/m^2);
- P_{ap} - Pression dans l'avéole du patin de pré-charge (N/m^2);
- P_p - Pression d'alimentation du patin de pré-charge (N/m^2);
- $P(r)$ - Pression sous le palier au rayon r (N/m^2);

Q_a	- Débit dans l'avéole (m^3/s);
Q_f	- Débit de fuite de l'alésage du piston (m^3/s);
Q_s	- Débit de sortie du patin de pré-charge (m^3/s);
Q_1	- Débit d'alimentation du patin principal (m^3/s);
Q_{1c}	- Débit principal du système de pré-charge (m^3/s);
Q_{1p}	- Débit d'alimentation du patin de pré-charge (m^3/s);
R_c	- Rayon du capillaire (m);
R_i	- Rayon interne du patin principal et de pré-charge (m);
R_e	- Rayon externe du patin principal et de pré-charge (m);
R_p	- Rayon du piston (m^2);
A_{eq}	- Surface équivalente = $\pi(R_e^2 - R_i^2)/(2 \ln(R_e/R_i))$ (m^2);
S	- Surface modifiée de S_p (m^2)
S_p	- Aire du piston (m^2)
\bar{U}_a	- Vitesse moyenne du fluide dans l'alvéole (m/s);
\bar{U}_c	- Vitesse moyenne du fluide dans le capillaire (m/s);
\bar{U}_j	- Vitesse moyenne du fluide dans le jeu (m/s);
U_n	- Composant normale de la vitesse (m/s);
X_f	- Coefficient de débit ;
[A]	- Matrice d'état ;
[B]	- Matrice des coefficients d'entrée du système ;
[C]	- Vecteur de sortie ;
[Gs]	- Matrice de transfert du système couplé ;
[I]	- Matrice d'identité ;
\mathcal{P}_{fi}	- Puissance dissipée par frottement dans le domaine (W);
μ	- Viscosité du fluide ($N.s/m^2$) ;
τ_c	- Force de frottement dans le capillaire (N);
τ_e	- Contrainte de frottement dans l'alésage du piston (N);
τ_l	- Force de frottement du patin latéral (N);
τ_p	- Force de frottement des parois du piston (N);
ω_{nc}	- Fréquence propre du patin principal(rad/s) ;
ω_{np}	- Fréquence propre du patin de pré-charge (rad/s) ;
ξ_c	- Coefficient d'amortissement du patin principal ;
ξ_p	- Coefficient d'amortissement du patin de pré-charge;
ξ_o	- Coefficient d'amortissement ;
$\hat{P}_a, \hat{Q}_a...$	- Perturbations autour des valeurs moyens;
$\bar{P}_a, \bar{Q}_a...$	- Paramètres moyens;

I - INTRODUCTION

Les machines de haute précision font de plus en plus partie de l'industrie actuelle. Elles sont soit utilisées pour l'usinage de précision, soit pour la métrologie de pièces ou d'ensembles .

Pour arriver à la construction d'une machine de haute précision, il faut rassembler un certain nombre de conditions favorables telles que [9] :

- une base mécanique précise et stable; avec une rigidité et un amortissement élevés , et un faible coefficient de dilatation .
- un système d'entraînement et de contrôle performant capable d'assurer la précision de positionnement et le suivi dynamique ; absence de jeux , de glissements.
- un système de métrologie capable de quantifier le mouvement à la précision voulue; et éventuellement de permettre la correction en temps réel des défauts de trajectoire .
- une ambiance propre contrôlée et isolée des sources de vibrations extérieures.

Dans la mécanique de base on distingue deux types principaux de mouvements: les mouvements rotatifs, employés par exemple dans les broches, et les mouvements linéaires. Dans les applications industrielles en machines outils , ces deux types sont souvent employés ensembles dans une même machine.

Le mouvement des parties mobiles, s'effectue par l'intermédiaire d'éléments d'interface tels que les paliers à roulements (rouleaux, billes) films de fluide ou lévitation magnétique par exemple.

Chacun de ces éléments a des caractéristiques de fonctionnement particulières, dont les plus recherchées sont: des rigidités statique et dynamique élevées, une bonne capacité d'amortissement, un faible effort

de friction (notamment les frottements solides), une basse production de chaleur et une bonne résistance à l'usure.

Aucun élément d'interface n'étant idéal, un compromis entre les caractéristiques propres à chaque élément doit être étudié pour effectuer le bon choix.

Une analyse des paliers à roulements, basée sur une modélisation comparative des guidages à billes et rouleaux (plans et creux), montre que si les rouleaux présentent la raideur suffisante, les mouvements de perturbation induits par les entrées et sorties des éléments roulants limitent la précision [13].

Dans cette étude, l'élément d'interface choisi est un film fluide, dont nous avons comparé les deux cas possibles: fonctionnement hydrostatique et aérostatique.

Le premier utilise des fluides peu compressibles comme par exemple l'huile. Le système aérostatique fonctionne avec des fluides gazeux, dont l'air est le plus utilisé.

Chacun des ces systèmes a des caractéristiques différentes, et le choix d'implantation sur un équipement se fait en fonction du cahier de charges spécifié dans le projet.

Dans certains cas, le choix de l'un ou l'autre de ces paliers peut être lié au coût total d'implantation et de maintenance du système.

En ce qui concerne les paliers hydrostatiques et aérostatiques, les principales caractéristiques sont:

Palier Hydrostatique:

- grande capacité de charge due aux fortes pressions utilisées;
- raideur statique élevée sans nécessité d'avoir un jeu de fonctionnement très faible;
- = bon amortissement;
- = bonne capacité de réfrigération;

- frottement moyen;
- source de pression de taille moyenne.

Quelques inconvénients des paliers hydrostatiques:

- la régularité de la pression source et du débit sont difficiles à maîtriser;
- nécessité de recueillir le fluide après le passage dans le palier

Palier Aérostatique

- très faible frottement et par conséquent basse production de chaleur;
- système plus "propre", puisqu'il n'est pas nécessaire de prévoir le retour du fluide à une bache.

Quelques inconvénients des paliers aérostatiques :

- jeu de fonctionnement très faible pour que le débit et la rigidité soient optimisés ce qui conduit à avoir un état de surface très précis du palier et du guidage, et une bonne filtration du fluide.
- capacité de charge moyenne due aux faibles pressions source utilisées par rapport à un système hydrostatique équivalent;

Par ces caractéristiques les paliers aérostatiques sont beaucoup employés sur les systèmes dont les parties mobiles se déplacent à très haute vitesse, ceci a pour but de minimiser les effets thermiques.

Une autre application est sur les machines de métrologie où le chargement extérieur est faible ou constant. Il permet aussi des assemblages plus compacts puisque les conduits d'arrivée d'air ne sont pas trop encombrants. Le fait d'utiliser de l'air comme fluide, permet à ce type de palier un l'emploi dans les équipements où les conditions sont plus "propres" et où il serait impossible d'utiliser de l'huile.

Dans le cas du mouvement d'un chariot on peut distinguer six degrés de liberté (trois translations et trois rotations), qui peuvent intervenir lors d'un déplacement, voir figure 1. Ceux-ci devront être parfaitement maîtrisés pour que le mouvement devienne très précis.

Les six mouvements possibles qui subit le chariot, seul le déplacement dans la direction X est désirable. Les autres représentent des erreurs de trajectoire qui devront être minimisés.

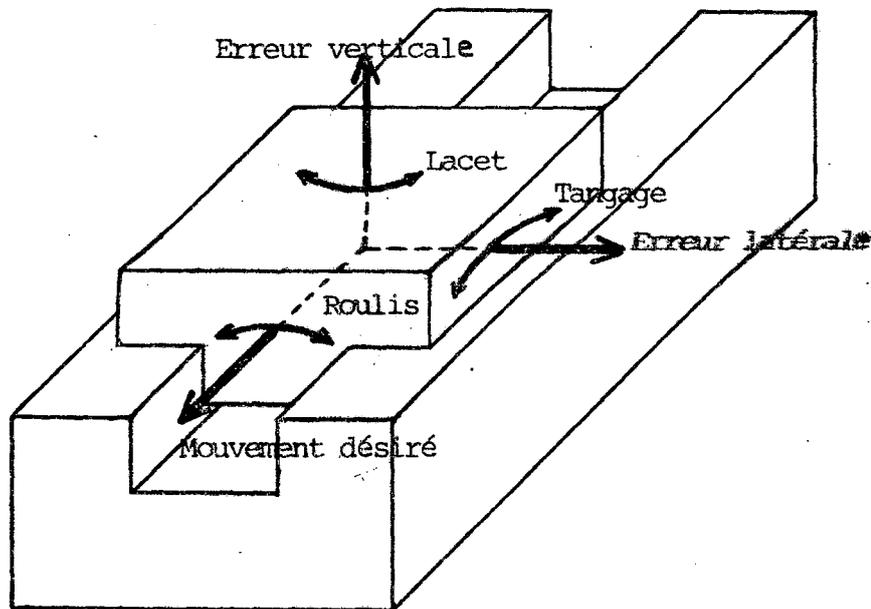


Fig. 1 - Les six mouvements possibles que subit le chariot.

Généralement, ces défauts de trajectoire sont liés aux imperfections de la construction ou de l'assemblage mécanique, aux déformations thermiques et mécaniques et aux déplacements statiques et dynamiques de l'élément d'interface ou des structures en présence d'une charge extérieure.

Dans un cas plus général les imperfections et les limitations du système d'entraînement et de contrôle telles que celles de la motorisation et de l'asservissement sont aussi considérées.

Le but que nous nous sommes fixés est de concevoir un système de guidage linéaire de haute précision, qui permette le déplacement d'un point matériel de référence placé sur un chariot (voir figure 1) ayant une masse d'au moins 50 Kg, sur une course de 250 mm, à une vitesse maximum de 10 mm/s avec une précision géométrique globale de mouvement inférieure à 1 μ m.

Le chariot se déplacera sur des paliers à fluide maintenus sous pression par une source extérieure au guidage.

Le travail débute avec une étude bibliographique sur la mécanique de précision en général , les patins et les machines de haute précision .

L'étude des caractéristiques statiques des patins hydrostatiques et aérostatiques est réalisée dans les chapitres II et III.

Le choix final du type de palier et sa définition s'effectuera au chapitre IV , sur la base des critères issus des calculs de performances effectués auparavant.

Après l'obtention des caractéristiques statiques de fonctionnement des patins pour le système hydrostatique , finalement choisi comme élément d'interface, l'étude dynamique réalisée au chapitre V permettra de modéliser le comportement vibratoire d'un patin isolé en présence d'une source excitatrice extérieure. Celle-ci peut être , par exemple, la force de réaction d'un outil d'usinage, ou la pulsation du débit provenant de la source de pression.

Le chapitre VI décrit la modélisation du comportement dynamique d'un patin de guidage couplé avec un élément de pré-charge composé d'un patin monté sur piston mobile.

Ensuite, l'étude de la conception du banc linéaire est rapportée dans le chapitre VII. Ces analyses ont conduit au projet détaillé de la construction d'un prototype.

Le chapitre VIII est dédié à la réalisation d'un banc d'essais pour les patins, permettant de vérifier les modèles mathématiques développés pour le fonctionnement statique et dynamique , avec ou sans pré-charge. L'analyse des résultats comparatifs entre les essais et le modèle théorique est aussi réalisée.

La conclusion du travail est effectuée au chapitre IX , avec la proposition de changements dans le projet initial du banc linéaire pour améliorer ses performances.

II - PALIERS A FLUIDE INCOMPRESSIBLE EN REGIME STATIONNAIRE

II.1- EQUATION GENERALE

Les équations gouvernant l'écoulement dans le palier se déduisent des équations de Navier-Stokes. L'épaisseur du film de fluide sous le palier étant très faible devant ses autres dimensions, la composante de la vitesse dans la direction perpendiculaire au guidage est négligeable. Les équations du mouvement s'écrivent donc, pour un fluide de viscosité constante [12] :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + F_x + \mu \Delta u + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial(\operatorname{div} \vec{U})}{\partial x}$$

(1)

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + F_z + \mu \Delta w + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial(\operatorname{div} \vec{U})}{\partial z}$$

où $u(x, y, z, t)$ et $w(x, y, z, t)$ sont les composantes de la vitesse \vec{U} dans le plan du palier ;

$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, est le Laplacien en coordonnées cartésiennes ;

et $\operatorname{div} \vec{U} = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z$.

Le repère est défini sur la figure 2. Soit $h(x, z)$ l'épaisseur du film de fluide.

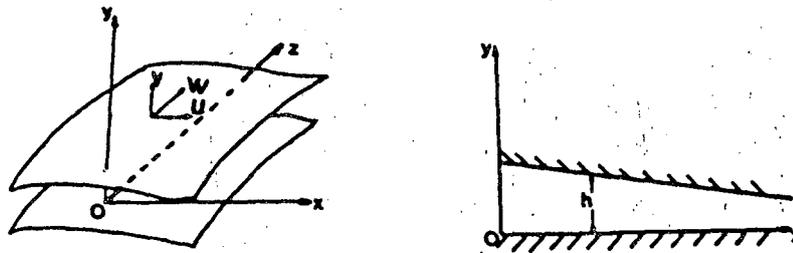


Fig. 2 - Repère global.

L'épaisseur du jeu étant très faible devant les autres dimensions, nous pouvons supposer que la pression suivant h est constante, c'est à dire $\partial p / \partial y = 0$, et que:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \gg \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \gg \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \gg \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \gg \frac{\partial w}{\partial z}$$

Les volumes de fluide situés sous les patins étant très petits, les forces de volume sur le fluide dues à la pesanteur sont négligeables devant les forces de pression ($F_x = F_y = F_z = 0$), et les forces d'inertie sont négligeables par rapport aux forces de viscosité. Les équations de mouvement du fluide dans le palier se réduisent alors à :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial(\text{div } \vec{U})}{\partial x}$$

(2)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial(\text{div } \vec{U})}{\partial z}$$

avec l'équation de continuité pour un fluide incompressible :

$$\text{div}(\vec{U}) = 0 .$$

Si la vitesse de translation de la paroi est nulle ou faible devant la vitesse du fluide, la condition aux limites s'écrit :

$$u = w = 0 \quad \text{pour } y = 0 \quad \text{et } y = h$$

$$v = dh/dt \quad \text{pour } y = h \quad \text{et } v = 0 \quad \text{pour } y = 0 .$$

Dans une première approche des paliers hydrostatiques, le fluide peut être considéré comme incompressible. L'équation de continuité intégrée par rapport à l'axe y donne :

$$\int_0^h \partial u / \partial x \, dy + \int_0^h \partial w / \partial z \, dy + v(h) - v(0) = 0$$

Comme le terme $\text{div}(\vec{U}) = 0$, les équations (2) deviennent :

$$0 = - \partial P / \partial x + \mu \partial (\partial u / \partial y) / \partial y \tag{3}$$

$$0 = - \partial P / \partial z + \mu \partial (\partial w / \partial y) / \partial y$$

A l'aide des équations du mouvement du fluide (3), nous obtenons le profil de vitesse u et w dans le jeu h :

$$u = (1/2 \mu) (dP/dx) (y^2 - y h) ,$$

$$w = (1/2 \mu) (dP/dz) (y^2 - y h) ,$$

en introduisant les expressions u et w dans l'équation de continuité intégrée, avec les conditions aux limites il résulte :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{12 \mu}{h^3} \frac{dh}{dt}$$

Dans le cas de fonctionnement du patin en régime stationnaire il vient:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

II.2 - PALIER HYDROSTATIQUE RECTANGULAIRE

II.2.1- Répartition de Pression

Le palier, de largeur B , est constitué de deux portées de longueur L encadrant une alvéole de longueur $2A$; où s'effectue l'arrivée du fluide à travers un tube capillaire, figure 3.

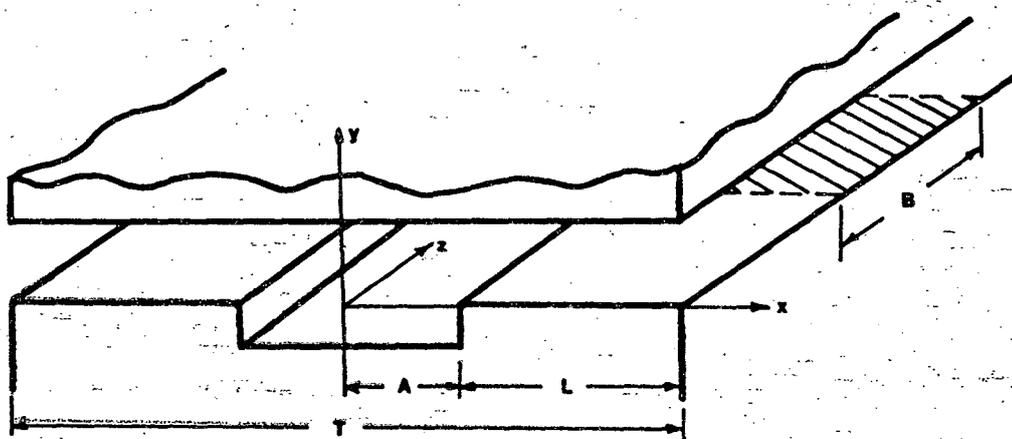


Fig. 3 = Schématisation d'un palier infiniment long.

Considérons que B est très grand devant L , il en résulte que $\partial P / \partial z = 0$ et $u \gg w$, et l'équation (4) se réduit alors à:

$$d^2P / dx^2 = 0 ; \quad (5)$$

qui s'intègre immédiatement pour donner la répartition de pression

$$P(x) = C_1 x + C_2 . \quad (6)$$

Avec C_1 et C_2 les constantes d'intégration. Les conditions aux limites sont:

$$P(x) = P_a \quad \text{pour } 0 < x \leq A ,$$

et
$$P(x) = 0 \quad \text{pour } x = (A + L)$$

Après substitution dans (6), il vient :

$$C_1 = - P_a / L \quad \text{et} \quad C_2 = P_a [1 + (A/L)] \quad (7)$$

La répartition de pression pour $A < x < (A + L)$, s'écrit donc:

$$P(x) = - (P_a/L) x + P_a (1 + A/L) . \quad (8)$$

Si P_a est la pression alvéolaire et P_1 la pression d'alimentation, la distribution de la pression sous le patin est représentée sur la figure 4.

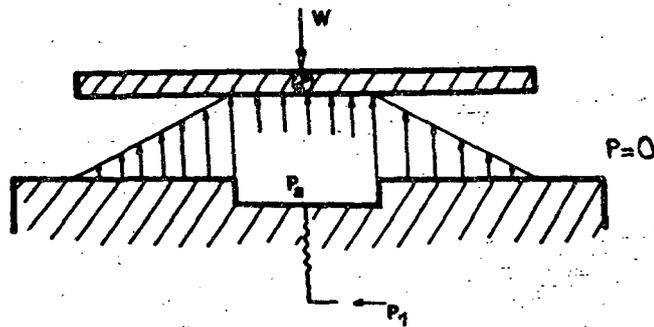


Fig. 4 - Distribution du champ de pression sous le patin.

11.2.2 - Calcul du Débit

Le débit du patin Q , se répartit entre les deux portées, figure 5.

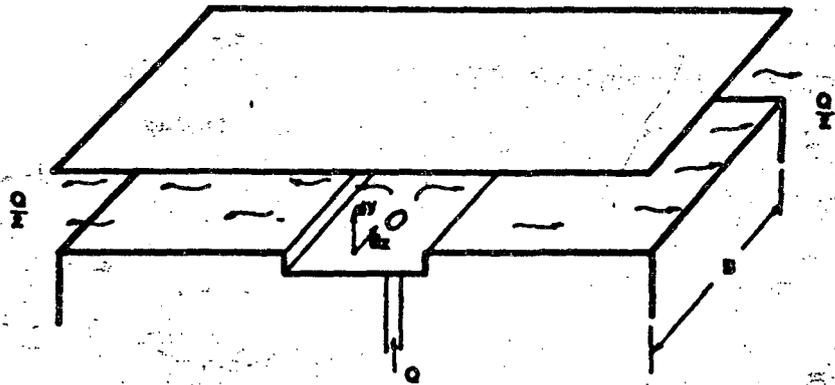


Fig. 5 - Débit à travers les surfaces du palier.

L'expression de la vitesse du fluide dans la direction de l'axe x est

$$u = (1/2 \mu) (dP/dx) (y^2 - y h),$$

et le débit qui sort du palier dans la direction x est donné par :

$$Q = 2 \int \int u \, dy \, dz$$

cette équation devient :

$$Q = [(dP/dx)/\mu] \int_0^h \int_0^B (y^2 - y h) \, dz \, dy ,$$

soit, avec $dP/dx = -Pa/L$:

$$Q = Pa B h^3 / (6 L \mu)$$

ou encore $Q = Pa h^3 K_q / \mu$ (9)

où $K_q = B / (6 L)$

Pour obtenir le rapport entre la pression dans l'alvéole et l'épaisseur du film d'huile il nous faut connaître le débit d'huile qui passe par le capillaire d'alimentation, figure 6. Si P_1 est la pression d'alimentation, la loi de Poiseuille donne :

$$Q = [\pi R_c^4 / (8 \mu l)] (P_1 - P_a) \quad (10)$$

où l est la longueur du capillaire
 R_c le rayon du capillaire.

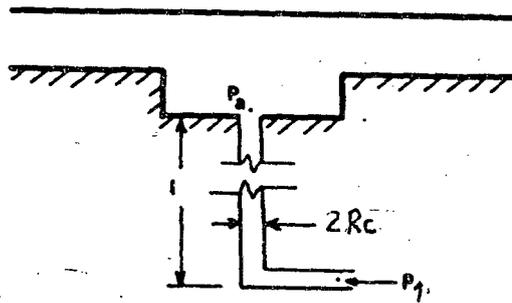


Fig. 6 - Alimentation d'huile par capillaire.

En égalant les débits (9) et (10), nous obtenons l'expression désirée:

$$P_a = \{3 \pi R_c^4 L / (4 l B h^3 + 3 \pi R_c^4 L)\} P_1 \quad (11)$$

11.2.3- Capacité de Charge

La charge qui peut être supportée par un palier est fonction de la répartition de pression qui se trouve sous celui-ci, donc :

$$F = \iint P(x) dx dz$$

Si nous remplaçons l'équation (8), dans l'expression ci-dessus et en supposant que la pression qui règne dans l'alvéole est P_a , il vient :

$$F = P_a (2 B A + B L) \quad (12)$$

Il faut noter que pour une pression source P_1 donnée, la capacité de charge est fonction de $1/h^3$, ce qui signifie que l'on doit chercher à minimiser l'épaisseur du film, pour avoir des caractéristiques de charge optimales.

II.2.4 - Rigidité du Palier

La raideur du palier s'exprime par le paramètre :

$$\lambda = - \frac{\partial F}{\partial h}$$

Avec l'utilisation de la pression alvéolaire P_a nous pouvons décomposer cette équation en deux parties :

$$\lambda = - \frac{\partial F}{\partial P_a} \frac{\partial P_a}{\partial h}$$

qui pourra être écrite après substitution des expressions (11) et (12) qui représentent, respectivement, P_a et F .

$$\lambda = \frac{\{3 S P_1 [1 - (L/T)]\}}{h} \left[\frac{P_a}{P_1} - \frac{P_a^2}{P_1^2} \right] \quad (13)$$

où : T - est la longueur totale du palier $T = 2 (A+L)$
 S - est la surface du palier donnée par $S = (B T)$

Si $P_a/P_1 = \beta$, et $(1 - L/T) = K_w$, l'équation (13) s'écrit :

$$\lambda = 3 S K_w P_1 \beta(1-\beta) / h, \quad (14)$$

ou plus simplement: $\lambda = 3 F(1-\beta) / h$.

La valeur de β pour laquelle la rigidité statique du palier, est maximale, est telle que:

$$d\lambda / d\beta = 0 ;$$

c'est à dire , pour $\beta = 1/2$. Ce qui correspond à une pression d'alimentation P_1 deux fois supérieure à la pression alvéolaire.

La courbe représentée dans la figure 7 ,montre le rapport entre la raideur adimensionnelle $\bar{\lambda} = h \lambda / (S K_w P_1)$ et β .

Si le rapport P_0/P_1 est égal à $1/2$ l'équation (11) nous permet de définir la relation optimale entre les dimensions du palier et celles de la résistance hydraulique ou tube capillaire :

$$l = \frac{3 \pi L R c^4}{4 B h^3}$$

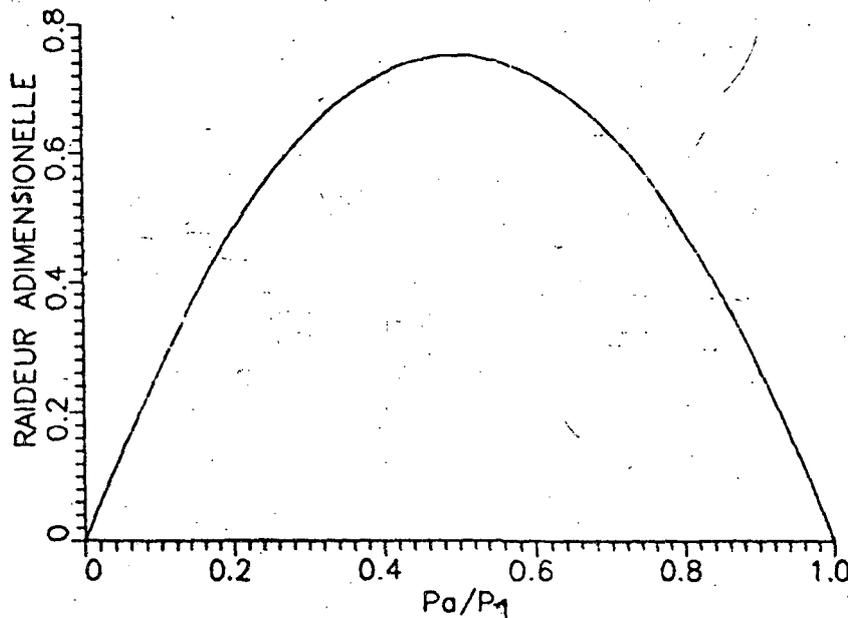


Fig. 7 - Variation de la rigidité en fonction de β .

11.2.5 - Critères de Stabilité

Le palier est stable si, à la suite d'un déplacement donné, il y a génération d'une force qui tend à ramener le palier à sa position initiale. Ceci implique que:

$$\lambda = - \frac{\partial F}{\partial Pa} \frac{\partial Pa}{\partial h} > 0$$

puisque $\partial F / \partial Pa > 0$, il faut donc, que $\partial Pa / \partial h$ soit négatif. Avec l'équation (10), la condition de stabilité devient

$$\frac{\partial Pa}{\partial h} = \frac{\mu}{Kc} \frac{\partial Q}{\partial h} < 0$$

où : $Kc = \pi Rc^4 / (8 l)$

D'après les équations (9) et (10)

$$Q = \frac{Kc P l}{\mu} \frac{1}{1 + \frac{1}{h^3} \frac{Kc}{Kq}}$$

d'où

$$\frac{\partial Q}{\partial h} = - \frac{3 Kc^2 P l}{\mu Kq h^4} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{h^3} \frac{Kc}{Kq}\right)^2}$$

qui est toujours négatif. Le palier est donc toujours stable.

D'autre part ,

- si P_a est constante, la rigidité devient égale à zéro
- si le débit est constant

$$F = 6 \mu L Q (2A + L) / h^3$$

et $\lambda = - 18 \mu L Q (2A + L) / h^4 < 0$, toujours stable.

A partir de cette expression il résulte que :

- λ augmente si Q , L et A augmentent aussi ;
- λ diminue si h augmente .

II.2.6 - Influence de la Vitesse de Déplacement de la Face Supérieure

Lorsque le palier se déplace avec une vitesse constante V par rapport au plan de guidage, un écoulement de Couette se superpose à l'écoulement de Poiseuille, figure 8.

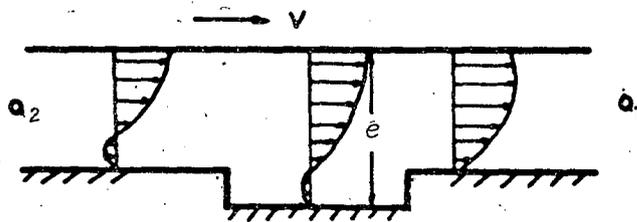


Fig. 8 - L'écoulement du fluide sous un palier en mouvement.

Si la surface inférieure du palier est parallèle au plan de glissement, la pression n'est pas affectée par la vitesse de translation, et le profil de vitesse du fluide est la somme d'une distribution linéaire et

d'un profil parabolique :

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} y(y-h) \pm y \frac{V}{h}$$

Ainsi on peut écrire les débits Q_1 et Q_2 sur les lèvres aval et amont, par intégration de l'équation précédente, respectivement par les expressions suivantes:

$$Q_1 = B \left[\frac{Pa h^3}{12\mu L} + \frac{V h}{2} \right]$$

$$Q_2 = B \left[\frac{Pa h^3}{12\mu L} - \frac{V h}{2} \right]$$

La vitesse V pour laquelle le débit Q_2 ne devient pas négatif est:

$$V_{2crit.} \leq \frac{Pa h^2}{6\mu L} \quad (15)$$

Dans le cas que nous considérons, où la vitesse de déplacement du palier est faible, l'influence de l'écoulement de Couette reste négligeable, tout au moins tant que les surfaces sont parallèles.

II.2.7- Calcul du Palier avec Chargement Décentré (Roulis)

II.2.7.1- Equilibre des mouvements

Jusqu'ici nous avons considéré que la charge extérieure était

appliquée au centre de poussé (CP) du patin, ce qui nous donnait une valeur de l'épaisseur du film h uniforme.

Si le chargement est appliqué hors de l'axe du patin, figure 9, cette force crée un moment

$$M_a = W_v \cdot e$$

où W_h la composante horizontale de la force

W_v la composante verticale de la force

e la distance du point de symétrie du patin au point d'application de la charge externe

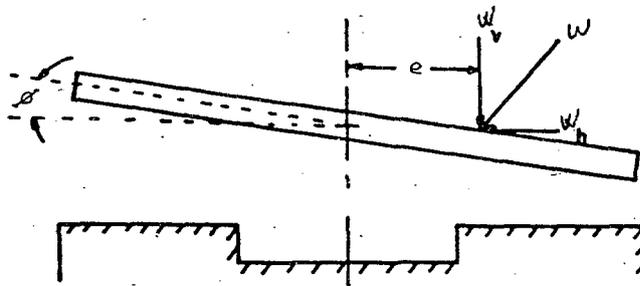


Fig. 9 - Chargement décentré sur un patin.

Ce moment appliqué doit être compensé par un autre d'égale valeur, mais de sens contraire, appelé Moment Résistant M_r .

$$M_r = M_{r1} - M_{r2}$$

où M_{r1} et M_{r2} sont les moments des forces de pression dans les parties convergente et divergente, respectivement.

Si F_{ri} est la force résultante due à l'augmentation de la pression sous le patin et x_{pi} est la distance du point de symétrie au point d'application de la force F_{ri} , on peut écrire pour chaque moment l'expression suivante :

$$M_{ri} = F_{ri} x_{pi}$$

D'autre part l'équilibre statique du palier impose :

$$M_a = M_r \quad (16)$$

11.2.7.2 - Répartition de pression dans les paliers

Si la vitesse relative du patin par rapport au plan est négligeable, avec une variation d'épaisseur h du film de fluide due à l'inclinaison du patin, l'équation de Reynolds devient :

$$\frac{\partial (h(x)^3 \frac{\partial P}{\partial x})}{\partial x (\mu \frac{\partial x}{\partial z})} + \frac{\partial (h(x)^3 \frac{\partial P}{\partial z})}{\partial z (\mu \frac{\partial z}{\partial z})} = 0 \quad (17)$$

En supposant que la largeur du palier est très grande devant sa longueur et que la viscosité μ est constante, l'équation (17) se réduit à :

$$\frac{\partial (h(x)^3 \frac{\partial P}{\partial x})}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

Le patin étant supposé incliné d'un angle α sous l'action du moment M_a , figure 10, l'épaisseur du film peut s'exprimer en définissant

l'abscisse x_1 à partir du bord de palier, par:

$$h(x_1) = h_0(1 + D x_1 / L) \quad (19)$$

avec $D = (h_1 - h_0) / h_0 = L \operatorname{tg}(\theta) / h_0$

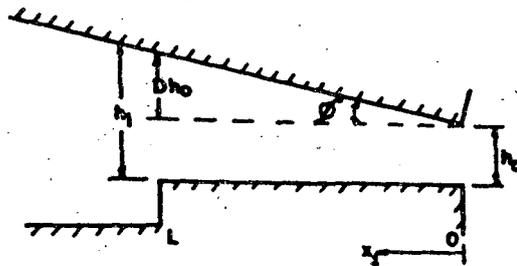


Fig.10 - Schéma pour la détermination de $h(x)$.

Si on intègre deux fois l'équation (18) on obtient :

$$P_1(x_1) = - C_1 \frac{L}{2 h_0^3 D} \frac{1}{(1 + D x_1 / L)^2} + C_2 \quad (20)$$

avec les conditions aux limites:

$$P(0) = 0 \quad \text{et} \quad P(L) = P_a$$

Les valeurs de C_1 et C_2 sont :

$$C_1 = 2 h_0^3 \frac{P_a}{L} \frac{D (1 + D)^2}{(2 + D)} \quad (21)$$

$$C_2 = P_a \frac{(1 + D)^2}{D(2 + D)}$$

La répartition de pression obtenue en remplaçant les valeurs de C_1 et C_2 données par (21), dans l'équation (20) sont, pour le jeu convergent :

$$P_1(x_1) = \frac{Pa}{[1 - 1/(1+D)^2]} \left[1 - \frac{1}{1 + (D x_1/L)^2} \right] \quad (22)$$

Pour le jeu divergent, en fonction de l'abscisse x_2 il vient :

$$P_2(x_2) = P_a - P_1(x_2) ,$$

où $P_1(x_2)$ est donnée par (22).

Le profil de la pression dû à un chargement appliqué hors du centre du patin est représenté sur la figure 11.

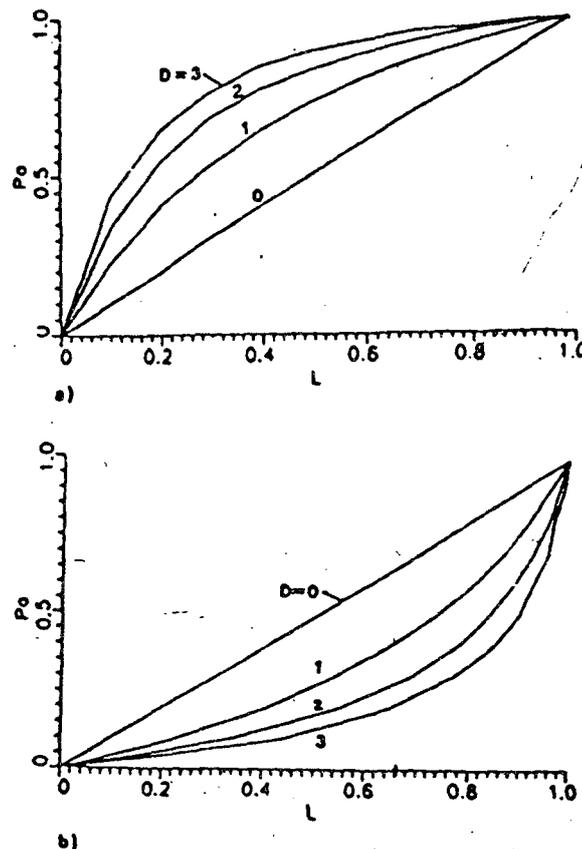


Fig.11- Profil de pression: a) partie convergente b) divergente.

II.2.7.3 - Résultantes des forces de pression

La force qui opère sous le palier, et qui nous fournit le moment résistant, est obtenue par intégration des expressions de $P_1(x_1)$ et $P_2(x_2)$ sur la surface de la lèvre du palier.

Pour la partie convergente :

$$F_{r1} = \int_0^B \int_0^L P_1(x_1) dx_1 dz ,$$

soit,

$$F_{r1} = Pa B L \frac{(1+D)}{(2+D)} \quad (23)$$

et pour la partie divergente,

$$F_{r2} = Pa B L \left[\frac{1}{(2+D)} \right] \quad (24)$$

II.2.7.4 - Point d'application de la force résistante - Moment résistant

Le point d'application de la force résultante x_{pi} s'exprime dans le système de coordonnées initial, pour la partie convergente, par :

$$x_{pi} = A + (L - x_{1p}) \quad (25)$$

x_{1p} est le C.P. de la courbe de pression $P_1(x_1)$ par rapport à x_1 .

$$x_{1p} = L \frac{\{ \text{Log}(1+D)/D^2 + 1/D^2(1+D) - 1/D^2 - 1/2 \}}{\{ -1/D - 1/D(1+D) - 1 \}} \quad (26)$$

Ainsi, le moment résultant pour la partie convergente est :

$$M_{r1} = \frac{1}{2} Pa B L \left\{ \frac{2A(D+1)}{(D+2)} + \left[\frac{L(1+D)^2}{D^3} \cdot \frac{2 \cdot \text{Log}(1+D) + D(D-2)}{(D+2)} \right] \right\} \quad (27)$$

et similairement pour la partie divergente :

$$M_{r2} = Pa B L \left\{ 1 - \frac{(1+D)}{2+D} \right\} \left\{ \frac{A+L}{2} \left[\frac{(2+D)}{D^3} + \frac{2(1+D)^2}{D^3} (\text{Ln}(1+D) + \frac{1}{(1+D)} - \frac{D^2-1}{2}) \right] \right\}$$

En introduisant $S = B T$, et le coefficient K_w défini par l'équation (14), le moment résistant $M_r = M_{r1} - M_{r2}$ est donné par :

$$M_r = \frac{1}{2} Pa L S Kw \frac{D}{(2+D)}$$

et l'angle d'inclinaison est obtenu de :

$$D = L \sin(\vartheta) / [h - 0,5 T \sin(\vartheta)]$$

$$\vartheta = \arcsin \{ h / [L/D + (0,5 T)] \}$$

(28)

11.2.7.5 -Capacité de charge décentrée (Fd)

Comme le jeu est très petit devant les autres dimensions du patin, et si l'erreur d'inclinaison dû à l'assemblage, usinage et déformation de la structure reste faible [1], [16], l'angle θ le sera aussi. Si les effets hydrodynamiques dû à la vitesse de déplacement du chariot sont négligeables, la capacité de charge F_d du patin est la somme des résultantes des forces de pression dans chaque région du palier, figure 12.

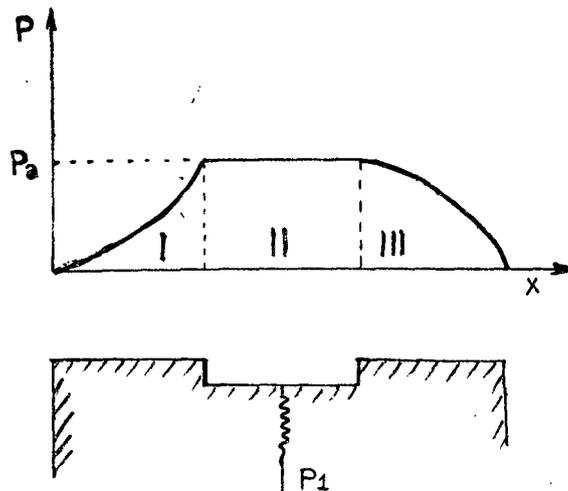


Fig. 12 - Distribution du champ de pression.

Soit l'intégrale :

$$F_d = \iint \{P^I(x) + P^{II}(x) + P^{III}(x)\} dx dz \quad (29)$$

où $P^I(x)$ est donné par l'équation de $P_2(x_2)$, $P^{III}(x)$ par $P_1(x_1)$, avec :

$$\int_0^{2A} \int_0^B P^{II}(x) dx dz = 2 A B P_a \quad (30)$$

il résulte :

$$F_D = 2 B A P_0 + B \int_0^L P_1(x_1) dx_1 + B \int_0^L P_2(x_2) dx_2$$

$$F_D = P_0 B (2 A + L) \quad (31)$$

Cette expression est la même que (12). La portance du palier est donc invariante, que la charge soit centrée ou non tant que l'angle θ reste faible et que les effets hydrodynamiques sont négligés [16].

II.2.7.6 - Calcul du débit dans le cas où le patin est incliné

Soit Q^* , le débit lorsque le patin est incliné.

$$Q^* = 2 \int_0^B \int_0^h u \, dy \, dz$$

avec, dans le cas d'un palier immobile

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} y [h(x) - y];$$

d'où

$$Q^* = \frac{B}{6\mu} \frac{dP}{dx} h(x)^3$$

Or, d'après l'équation (18)

$$\frac{dP}{dx} = \frac{C_1}{h(x)^3}$$

puis en introduisant la valeur de C_1 trouvée en (21)

$$Q^* = P_a h_0^3 \frac{B}{3 \mu L} \frac{(1+D)^2}{(2+D)}$$

et, avec (9), l'augmentation du débit en fonction de l'inclinaison D est donnée par :

$$Q^* = 2 Q \frac{(1+D)^2}{(2+D)}$$

où Q est le débit lorsque les faces sont parallèles.

La figure 13 montre la variation de Q^*/Q par rapport à D .

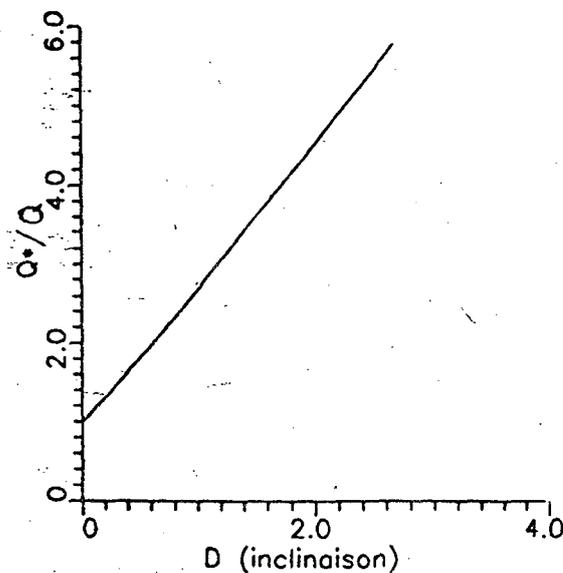


Fig. 13 - Variation de Q^*/Q avec D .

II.2.7.7 - Raideur au mouvement de roulis

Le mouvement subi par le patin lorsque la charge est appliquée en de hors de son axe de symétrie est montré dans la figure 14.

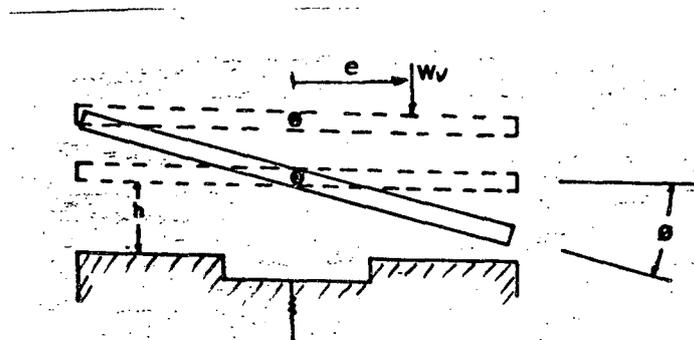


Fig.14 - Schéma du mouvement du patin avec un chargement décentré.

Dans ce cas, la rigidité à l'inclinaison du patin est donnée par le rapport $\partial M / \partial \theta$ de la variation du moment résistant avec l'angle θ .

Si le palier est stable, à la suite de l'application du moment $M_\theta = W_v e$, la pression qui s'établit sous le patin (voir les expressions de $P_1(x_1)$ et $P_2(x_2)$), va nous donner le moment résistant égal et opposé M_r qui tend à ramener le chariot à sa position initiale.

Ainsi, la résistance à l'inclinaison du patin peut être donnée par :

$$\lambda M_r = \partial M_r / \partial \theta$$

ou

$$\lambda M_r = \partial M_r / \partial D \quad \partial D / \partial \theta$$

$$\lambda M_r = (\partial M_{r1} / \partial D - \partial M_{r2} / \partial D) \partial D / \partial \theta .$$

Avec les équations (27) et (28) nous obtenons :

$$\frac{\partial M_{r1}}{\partial D} = \frac{1}{(2+D)} \left\{ \frac{2K_1}{(2+D)} + K_2 \left[(1+D) \left(\frac{2}{D} - [2 \ln(1+D) + D(D-2)] \right) \cdot \frac{6+6D+2D^2}{D^4(2+D)} \right] \right\}$$

et

$$\frac{\partial M_{r2}}{\partial D} = \frac{K_2}{(2+D)} \left(R' - \frac{R}{(2+D)} \right) - \frac{2K_1}{(2+D)}$$

où : $K_1 = Pa B L T / 2$ et $K_2 = Pa B L^2 / 2$

$$R' = 2 + \frac{[4D^3(1+D) - 6D^2(1+D)^2]}{D^6} \left(\ln(1+D) + \frac{1}{(1+D)} - \frac{D^2-1}{2} \right) + \frac{[2(1+D)^2 (1-(1+D)^2)]}{D^2 (1+D)^2}$$

$$R = (2+D) - \frac{[2(1+D)^2]}{D^3} \cdot \left[\ln(1+D) + \frac{1}{(1+D)} - \frac{D^2-1}{2} \right]$$

et si : $R_0 = (1+D) \left(\frac{2}{D} - [2 \ln(1+D) + D(D-2)] \right) \cdot \frac{6+6D+2D^2}{D^4(2+D)}$

$$\frac{\partial M_r}{\partial D} = \frac{\partial M_{r1}}{\partial D} - \frac{\partial M_{r2}}{\partial D}$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial D} = Pa B L (2A+L) \frac{1}{(2+D)^2}$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial D} = Pa L S K_w / (2+D)^2$$

et
$$\frac{\partial D}{\partial \vartheta} = \frac{L \cdot h \cdot \cos(\vartheta)}{[h - (0,5 T) \sin(\vartheta)]^2} \quad (32)$$

Alors :

$$\lambda M_r = \left[\frac{4 K_1}{(2+D)^2} + \frac{K_2}{(2+D)} \left[R_0 + R' + \frac{R}{(2+D)} \right] \right] \left[\frac{L \cdot h \cdot \cos(\vartheta)}{[h - (0,5 T) \sin(\vartheta)]^2} \right] \quad (33)$$

ou encore :

$$\lambda M_r = \frac{\lambda}{3(1-\beta)} \frac{h o^2 \cos(\vartheta)}{[\sin(\vartheta)]^2} \frac{D^2}{(2+D)^2} \quad (34)$$

où λ est la raideur du patin parallèle au guidage (13).

II.2.7.8 - Critères de stabilité au roulis

Le palier est stable si : $\lambda M_r = \partial M_r / \partial \vartheta > 0$, c'est à dire lorsque M_r augmente quand ϑ augmente. Il faut donc :

$$\frac{\partial M_r}{\partial D} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial D}{\partial \vartheta} > 0$$

a) $\partial D / \partial \vartheta > 0$, soit

$$\frac{\partial D}{\partial \vartheta} = \frac{L \cdot h \cdot \cos(\vartheta)}{[h - (0,5 T) \sin(\vartheta)]^2} > 0$$

si $\cos(\vartheta) > 0$ c'est à dire si $0 < \vartheta < \pi/2$

b) Pour : $\frac{\partial Mr}{\partial D} > 0$,

$$\frac{\partial Mr}{\partial D} = \frac{PaBL(2A+L)}{(2+D)^2} > 0,$$

ce qui est toujours vérifié.

II.2.8 - Effets Thermiques

Nous pouvons représenter le bilan thermique du fluide dans un palier par la figure 15 ci-dessous :

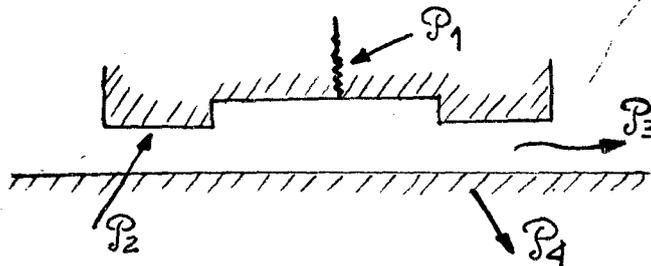


Fig. 15 - Bilan d'énergie thermique.

où :

\mathcal{P}_1 - Puissance thermique générée dans la restriction;

\mathcal{P}_2 - Puissance thermique due au cisaillement du fluide dans le jeu;

\mathcal{P}_3 - Puissance (calorifique) évacuée par le débit qui sort du palier;

\mathcal{P}_4 - Puissance due à la conduction de la chaleur dans les parois.

\mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont des puissances thermiques apportées par le fluide, ou générées dans le palier. Tandis que \mathcal{P}_3 et \mathcal{P}_4 sont les puissances évacuées du domaine. Le bilan thermique pour le palier s'exprime donc par :

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_4 \quad (35)$$

Dans cette première approche estimative, nous supposerons qu'une fois l'équilibre thermique des parois atteint, le transfert par conduction par les parois est négligeable devant l'énergie emportée par le fluide. L'équation ci-dessus se réduit alors à :

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3$$

L'énergie dissipée dans la restriction est proportionnelle à la perte de charge, d'où :

$$\mathcal{P}_1 = (P_1 - P_a) Q = (1 - \beta) P_1 Q$$

La puissance générée par le frottement dans le fluide sous la lèvre du patin s'exprime par (voir paragraphe V.1.1) :

$$\mathcal{P}_2 = \int_S \tau_s \bar{U} ds$$

où S est la surface totale des parois baignées par le fluide ;

\bar{U} est la vitesse moyenne du fluide dans le jeu ;

Cette même expression peut être estimée pour le cas du patin rectangulaire à l'aide du coefficient de frottement c_f ;

$$\mathcal{P}_2 = 4 B L c_f \rho \frac{\bar{U}^3}{2}$$

Pour un écoulement laminaire entre deux plans parallèles tel que $h \ll B$, avec Re le nombre de Reynolds :

$$c_f = \frac{24}{Re}, \text{ avec } Re = \frac{2 \rho \bar{U} h}{\mu}$$

soit :

$$\mathcal{P}_2 = 24 \mu \frac{B L \bar{U}^2}{h} = 6 \mu \frac{L}{B h^3} Q^2$$

Les dissipations d'énergie dans le palier provoquent une élévation ΔT de la température du fluide, et la puissance convectée par le fluide sortant est :

$$\mathcal{P}_3 = H u S$$

où $H = c \Delta T$ est l'enthalpie du fluide par unité de masse, et c la capacité calorifique du fluide. Soit :

$$\mathcal{P}_3 = c \Delta T Q$$

Le bilan thermique dans le palier s'exprime finalement par :

$$(1 - \beta) P_1 + 6 \mu \frac{L}{B h^3} Q = c \Delta T Q$$

$$\Delta T = \frac{1}{c} [(1 - \beta) P_1 + 6 \mu \frac{L}{B h^3} Q] \quad (36)$$

II.3 - PALIER HYDROSTATIQUE CIRCULAIRE

I.3.1- Répartition de Pression

Une analyse similaire à celle qui a été faite pour le palier hydrostatique rectangulaire, peut être faite en utilisant l'équation (4) en coordonnées cylindriques en régime stationnaire :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (37)$$

Pour le cas où h et μ sont constants dans le jeu, si l'alimentation est au centre, l'écoulement est à symétrie de révolution, et l'équation (37) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = 0$$

Le traitement de cette équation nous donne :

$$\partial P / \partial r = C_1 / r$$

et donc :

$$P(r) = C_1 \ln(r) + C_2$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration obtenues par les conditions aux limites, suivantes:

$$P(r) = P_a \quad \text{pour} \quad 0 < r \leq R_i$$

et

$$P(r) = 0 \quad \text{pour} \quad r \geq R_e$$

Ainsi,
$$C_1 = -\frac{P_a}{\ln(R_e/R_i)} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{P_a \ln(R_e)}{\ln(R_e/R_i)}$$

et
$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{P_a}{\ln(R_e/R_i)}$$

La répartition de pression sous le patin pour $R_i \leq r \leq R_e$ est alors :

$$P(r) = P_a \frac{\ln(r/R_e)}{\ln(R_i/R_e)} \quad (38)$$

La figure 16 montre une schématisation d'un palier circulaire avec une alvéole centrale.

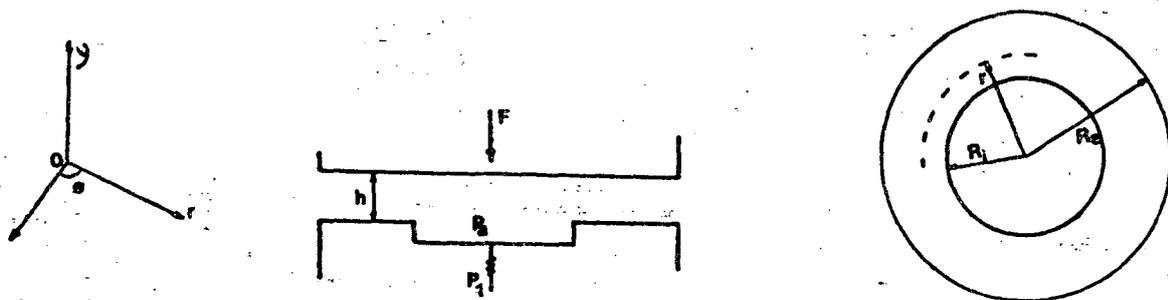


Fig. 16- Schéma du palier circulaire avec une alvéole centrale.

11.3.2 - Force Portante

La résultante des forces de pression agissant sur la face inférieure du palier s'obtient par une intégration de la pression $P(r)$, sur la lèvre du patin et de P_a à l'intérieur de l'alvéole :

Si l'aire de l'alvéole est πR_i^2 , la force générée par la pression P_a vient s'ajouter à l'intégrale de $P(r)$ dans les lèvres pour donner :

$$F = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} r P(r) dr d\theta + \pi R_i^2 P_a$$

donc :

$$F = \pi R_e^2 P_a \left[\frac{1 - (R_i^2/R_e^2)}{2 \ln(R_e/R_i)} \right] \quad (39)$$

De même que précédemment, nous allons définir des coefficients qui dépendent de la géométrie seulement.

$$F = P_a S K_w \quad (40)$$

$$\text{où } S = \pi R_e^2 \quad \text{et} \quad K_w = \frac{1 - (R_i^2/R_e^2)}{2 \ln(R_e/R_i)}$$

ou plus simplement :

$$F = \frac{P_a \pi (R_e^2 - R_i^2)}{2 \ln(R_e/R_i)}$$

11.3.3 - Débit du Palier

En coordonnées cylindriques, l'équation du mouvement d'un fluide incompressible en régime stationnaire avec les hypothèses de l'équation de Reynolds, s'écrit :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

d'où après intégration, le profil de vitesses dans le jeu est :

$$u(r, y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial r} y(y-h) \quad (41)$$

Et le débit volumique à travers une section cylindrique de rayon r et de hauteur h est :

$$Q = 2\pi r \int_0^h u(r, y) dy$$

donc

$$Q = -\frac{\pi}{\mu} r \frac{\partial P}{\partial r} \int_0^h y(h-y) dy$$

et

$$Q = -\frac{\pi h^3}{6\mu} \frac{\partial P}{\partial r} r \quad (41 a)$$

Soit avec l'équation (38)

$$Q = \frac{Pa h^3 \pi}{6 \mu \ln(Re/Ri)} \quad \text{ou,}$$

$$Q = \frac{Pa h^3}{\mu} Kq \quad (42)$$

avec
$$Kq = \frac{\pi}{6 \ln(Re/Ri)}$$

II.3.4 - Rigidité Statique

La rigidité statique d'un patin hydrostatique de géométrie circulaire avec une alvéole centrale peut être donnée par :

$$\lambda = - \frac{\partial F}{\partial Pa} \frac{\partial Pa}{\partial h}$$

En appliquant le procédé utilisé au paragraphe II.2.4 on obtient l'expression de Pa en fonction de h en égalant les équations (42) et (10):

$$Pa = \frac{Rc^4}{[Rc^4 + 41 h^3 / (3 \ln(Re/Ri))]} P1 \quad (43)$$

Nous obtenons ainsi pour la raideur statique.

$$\lambda = \frac{3 \pi Re^2}{2 h} P1 \left[\frac{1 - Ri^2/Re^2}{\ln(Re/Ri)} \right] \beta (1 - \beta) \quad (44)$$

ou

$$\lambda = \frac{3 P a \pi}{h} \left[\frac{R_e^2 - R_i^2}{2 \ln(R_e/R_i)} \right] (1-\beta) \quad (44 a)$$

Si la raideur est maximale pour $\beta = 0.5$, il est possible de déterminer d'après (43) le rapport optimal entre les dimensions du capillaire et celles du patin, par :

$$R_c^4 = \frac{4 I h^3}{3 \ln(R_e/R_i)}$$

11.3.5 - Critères de Stabilité du Palier

De même que pour le patin rectangulaire, le patin circulaire est stable si $\lambda > 0$. Si $K = R_e/R_i$, l'expression de λ devient :

$$\lambda = \frac{3 \pi R_i^2 P I (K^2 - 1) \beta (1-\beta)}{2 h \ln(K)} \quad (44 b)$$

Cette expression est toujours positive. D'autre part, pour R_i constant,

$$\partial \lambda / \partial K > 0 \quad \text{si} \quad K^2 [2 \ln(K) - 1] > -1$$

Puisque K est toujours > 1 , la raideur augmente avec K . La croissance de la raideur en fonction de K est donnée par la figure 17, en considérant une augmentation du rayon extérieur. Cette condition exprime une portance plus élevée du patin.

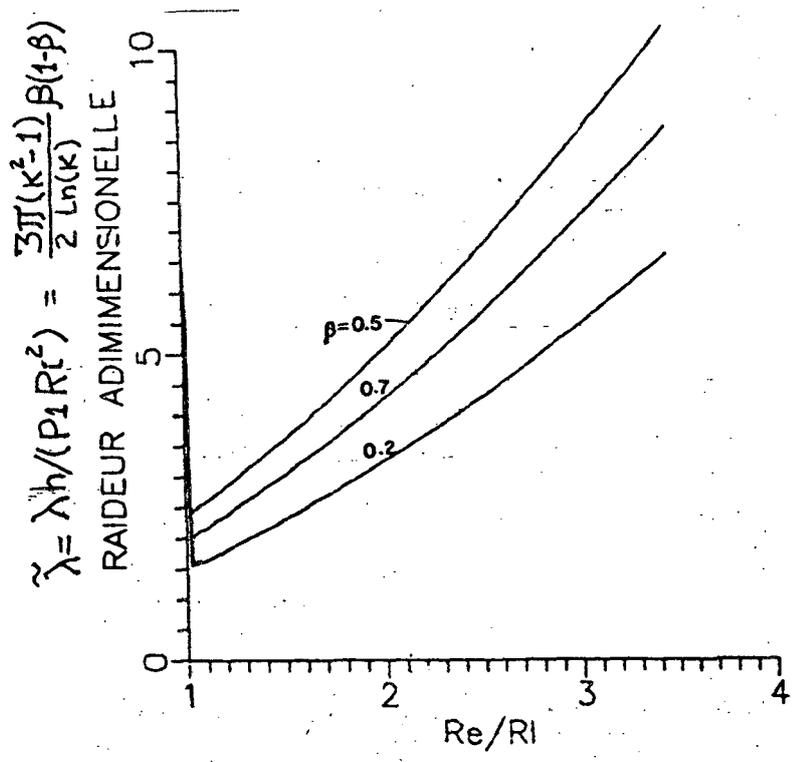


Fig.17 -Raideur adimensionnelle en fonction de K, pour Ri constant.

Dans le cas où Re est fixe , la variation de la rigidité statique est directement proportionnelle à Ri , conformément à la figure 18. Il y a une augmentation rapide de la rigidité lorsque la valeur de K se rapproche de l'unité .

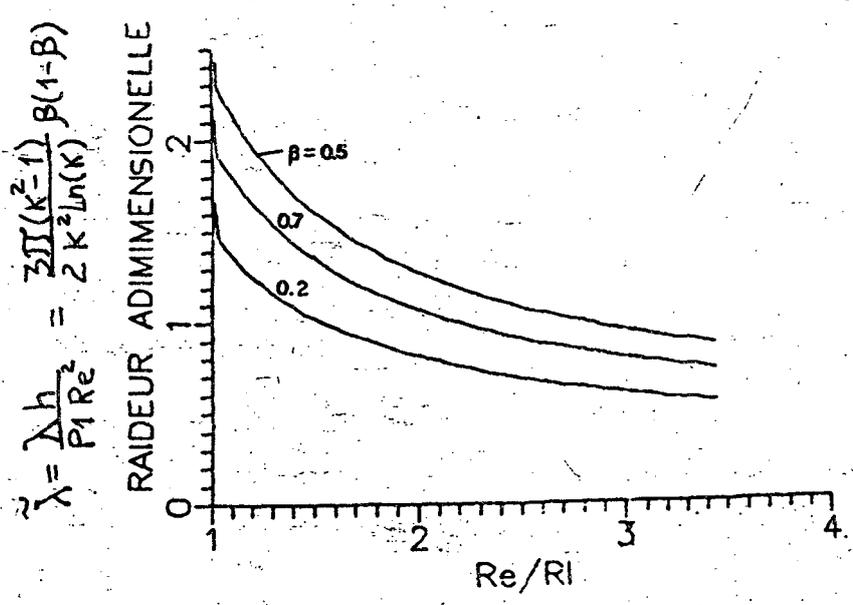


Fig.18 - Raideur adimensionnelle en fonction de K, pour Re constant.

II.3.6 -Les Effets Thermiques

Le bilan d'énergie thermique dans un patin de géométrie circulaire est analysé de manière similaire à celui du patin rectangulaire, fait au paragraphe II.2.8.

L'énergie thermique dissipée \mathcal{P}_2 , due au cisaillement du fluide dans les lèvres du patin est estimée par (voir paragraphe V.1.1).

$$\mathcal{P}_2 = - \int_S \tau_s(r, y) \bar{U} ds \quad (45)$$

où $\tau_s(r, y)$ est la contrainte de frottement sur la paroi de la lèvre, donnée par l'expression suivante :

$$\tau_s(r, y) = \mu \frac{d u(r, y)}{dy}$$

et \bar{U} est la vitesse moyenne du fluide dans le jeu :

$$\bar{U} = 1/h \int_0^h u(r, y) dy ;$$

$$\bar{U} = \frac{-1}{12 \mu} h^2 \frac{\partial P}{\partial r} \quad (46)$$

De la substitution dans $\tau_s(r, y)$ de l'expression de la vitesse du fluide donnée par (41), au paragraphe II.3.3, il résulte :

$$\tau_s(r, y) = \mu(du(r, y) / dy) = 1/2 (\partial P / \partial r) (2y - h)$$

$$\tau_s(r) = (h/2) (\partial P / \partial r) , \quad \text{pour } y = h$$

Avec $\frac{\partial P}{\partial r} = - \frac{1}{r} \frac{Pa}{\ln(Re/Ri)}$, il vient :

$$\tau_s(r) = - \frac{h}{2 r} \frac{Pa}{\ln(Re/Ri)}$$

soit

$$\mathcal{P}_2 = 2 \left[2\pi \int_{Ri}^{Re} r \tau_s(r) \bar{U} dr \right]$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{\pi h^3 Pa^2}{6 \mu \ln(Re/Ri)} \quad (47)$$

D'après ce changement, le bilan énergétique reste :

$$(1-\beta)P_1 Q + \frac{\pi h^3 Pa^2}{6 \mu \ln(Re/Ri)} = c \Delta T Q$$

et

$$\Delta T = \frac{1}{c Q} \left[(1-\beta)P_1 Q + \frac{\pi h^3 Pa^2}{6 \mu \ln(Re/Ri)} \right] \quad (48)$$

III - PALIERS AEROSTATIQUES

III.1 - FORMULATION GENERALE POUR LES PALIERS A GAZ

L'équation générale qui permet de modéliser un patin aérostatique à gaz compressible de géométrie circulaire (conformément à la figure 16) en régime stationnaire, est donnée par SZERI [2] :

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho r h^3 \frac{\partial P}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho h^3 \frac{\partial P}{r \partial \theta}) = 0 \quad (49)$$

Le terme en ρ provient du fait que l'équation de continuité est alors $\text{div}(\rho \vec{U}) = 0$, au lieu de $\text{div}(\vec{U}) = 0$

Les types de compensation ou laminages les plus couramment utilisés qui permettent d'obtenir la raideur du patin sont :

a) l'orifice en paroi mince, en général fait dans la propre surface du patin, figure 19;

b) la compensation par alvéole, figure 20. Dans ce cas il est possible d'avoir des instabilités provenant de coups de bélier pneumatiques. Ce type de patin étant très sensible aux instabilités, demande une conception soignée. Pour éviter les instabilités il faut diminuer au maximum le volume à l'intérieur de la poche [15].

Des critères expérimentaux déterminent que le volume alvéolaire doit rester de l'ordre de vingt fois plus petit que le volume qui se trouve sous les lèvres du patin [14], [15], [18]. Mais pour maintenir l'effet de poche il faut que la profondeur de l'alvéole soit au moins égal au diamètre de l'orifice d'alimentation d_0 et que [14] :

$$d_0 \ll (2 R_1 h)^{1/2}$$

III.2 - PALIER CIRCULAIRE AVEC COMPENSATION PAR ORIFICE

Les hypothèses employées dans ce calcul sont :

- les effets d'inertie sont négligeables
- les conditions sont isothermes
- la viscosité du fluide est constante

Le patin possédant un orifice central est préférable lorsqu'il n'y a que des charges axiales à supporter, voir la figure 19. Sa rigidité à l'inclinaison est plus faible que celle des autres types de patins, tels que ceux à plusieurs rangées d'orifices ou à alvéole et sa raideur axiale est inférieure (d'environ 1.5 à 3 fois) à celle d'un patin avec poche [14], [15].

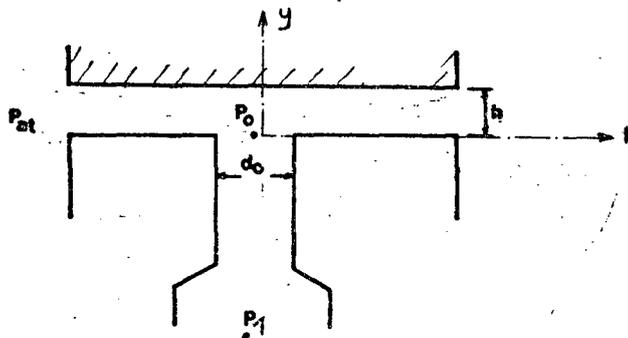


Fig. 19- Aspects géométriques du patin à gaz avec un orifice central.

Un bon critère de projet pour ces paliers est de prendre pour le diamètre de l'orifice [7],[8],[14] : $d_o \geq 8 h$.

Du fait que $\rho = P / R T_o$, l'équation de base qui régit le patin de géométrie circulaire à fluide compressible pour h constant est :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r P \frac{\partial P}{\partial r} \right) = 0 \quad (50)$$

où R constante du gaz = 288 J / kg K°
 T_0 température absolue du fluide à l'entrée des portées

Les intégrations successives nous donnent:

$$r P \frac{\partial P}{\partial r} = C_1$$

$$P(r)^2 = C_1 \ln(r) + C_2$$

où C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration obtenues par les conditions aux limites suivantes :

$$P(r) = P_0 \quad \text{pour } 0 < r \leq R_0 ;$$

$$P(r) = P_{at} \quad \text{pour } r \geq R_e ,$$

où P_0 est la pression à la sortie de l'orifice , P_{at} est la pression atmosphérique , R_e le rayon extérieur de patin et R_0 le rayon de l'orifice.

donc :

$$C_1 = - \frac{P_0^2 - P_{at}^2}{2 \ln(R_e/R_0)} \quad \text{et} \quad C_2 = P_{at}^2 + \frac{(P_0^2 - P_{at}^2)}{2 \ln(R_e/R_0)} \ln(R_e)$$

Ainsi nous avons :

$$r \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{C_1}{P} = - \frac{1}{P} \frac{(P_0^2 - P_{at}^2)}{2 \ln(R_e/R_0)} ; \quad (50 a)$$

et l'expression de la pression qui règne sous la lèvre du patin est :

$$P(r)^2 = P_{at}^2 + \frac{(P_0^2 - P_{at}^2)}{\ln(R_e/R_0)} \ln(R_e/r) . \quad (50 b)$$

Le débit massique qui s'écoule sous les portées est donné par :

$$qf = \int_S \rho u(r, y) ds \quad (51)$$

où ρ est la densité et $u(r, y)$ la vitesse du fluide exprimée par (41). Si ρ est constant l'équation du débit devient :

$$qf = - \frac{\pi \rho h^3 r}{6 \mu} \frac{\partial P}{\partial r} ; \quad (51 b)$$

Nous substituons l'expression (50 a) dans (51 b), et en introduisant l'équation du gaz $P = \rho R T_0$, il résulte :

$$P_0^2 - P_{at}^2 = \frac{12 \mu qf R T_0}{\pi h^3} \ln (R_e/R_0) \quad (51 c)$$

où μ est la viscosité dynamique

Si la détente à travers l'orifice d'alimentation est supposée subsonique et isentropique, la relation pression-débit à travers l'orifice déduite de l'équation de conservation de l'énergie, s'exprime par :

$$q_0 = C_d A P_1 \sqrt{\frac{2k}{(k-1)RT_1} \left\{ \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right\}} \quad (52)$$

avec : $T_0/T_1 = (P_0/P_1)^{(k-1)/k}$

où $A = \pi d_0^2/4$ est l'aire de l'orifice d'alimentation

k est le rapport des capacités thermiques massiques à pression et à

volume constants (environ 1.405 pour l'air).

T_1 est température absolue du fluide à l'entrée de la portée

Le coefficient de débit C_d dépend du rapport entre les sections amont et aval de l'orifice, du rapport longueur/diamètre de l'orifice, et du rapport de pression P_0/P_1 .

Avec pour la détente subcritique la condition :

$$\frac{P_0}{P_1} > [2 / (k+1)]^{k/(k-1)} \quad (52 a)$$

et pour le cas d'une détente critique ou supercritique :

$$\frac{P_0}{P_1} \leq [2 / (k + 1)]^{k/(k-1)} \quad (52 b)$$

La substitution de l'expression (52 b) dans (52), nous donne le débit massique pour une détente critique :

$$q_0 = C_d A P_1 \left(\frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)} \sqrt{\frac{2k}{(k+1) R T_1}} \quad (53)$$

L'équation (50 b), de la distribution de la pression dans les portées peut être écrite en fonction de q_f donné par (51 c) :

$$P(r) = \left\{ \frac{12 \mu R T_0 q_f \ln(Re/r) + P a t^2}{\pi h^3} \right\}^{0.5} \quad (54)$$

La portance du patin est calculée par l'intégration de l'équation (53) comme suit :

$$F = \pi R_0^2 (P_0 - P_{at}) + 2 \pi \int_{R_0}^{R_e} r [P(r) - P_{at}] dr \quad (55)$$

S'il n'y a qu'un orifice d'alimentation par patin, nous avons l'égalité : $q_f = q_0$, et les expressions (51 c) et (52) déterminent, ainsi, l'épaisseur du film de fluide sous les lèvres du patin :

$$h^3 = \frac{12 \mu R T_0 \ln(R_e/R_0) C_d A P_1}{\pi (P_0^2 - P_{at}^2)} \sqrt{\frac{2k}{(k-1) R T_1} \left\{ \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{(k+1)}{k}} \right\}} \quad (56)$$

III.3 - PALIER AVEC ALVEOLE

Le profil de la pression pour un patin avec une alvéole centrale est représenté sur la figure 20. Nous obtenons l'expression correspondante en remplaçant R_0 par R_i dans (50 b).

La portance d'un patin avec alvéole centrale est donnée par l'intégration de l'équation (55) en remplaçant R_0 par R_i . Ce type de patin a une capacité de charge plus élevée que celui avec un orifice et il a été montré par COFFEY [15] que la portance augmente avec la profondeur de l'alvéole.

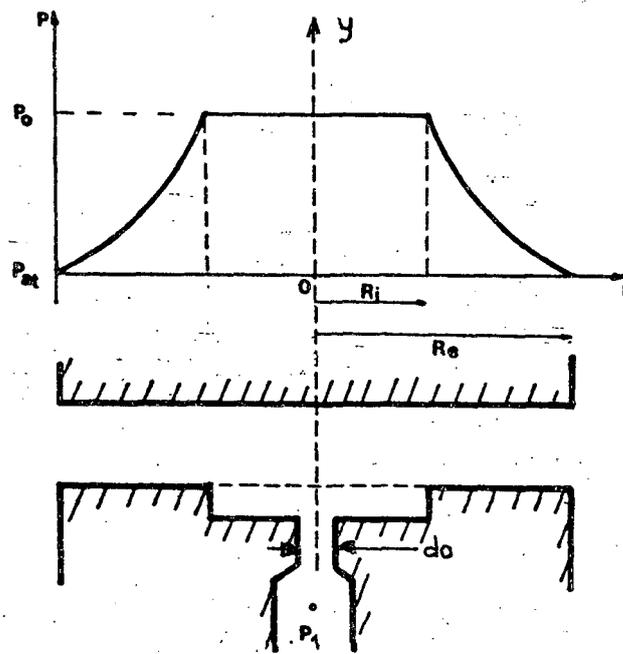


Fig. 20 - Profil de la pression pour un patin circulaire avec une alvéole.

Si la pression alvéolaire est supposée ne pas varier à l'intérieur de la poche, il vient :

$$F = \pi R_i^2 (P_0 - P_{at}) + 2 \pi \int_{R_i}^{R_e} r [P(r) - P_{at}] dr ;$$

donc, nous avons :

$$F = \frac{\pi (P_0 - P_{at})}{3} (R_e^2 + R_i R_e + R_i^2) \quad (57)$$

Les calculs du débit de fuite et du jeu se font de la même manière que pour le cas précédent avec l'orifice, en remplaçant R_0 par R_i dans les équations (51 c) et (56).

III. 4 - RIGIDITE STATIQUE

Dans le cas des patins aérostatiques, le débit est limité à la valeur sonique du fluide au passage dans l'orifice.

Pour une pression d'alimentation P_1 constante, le phénomène de limitation intervient quand la pression P_0 à la sortie de l'orifice diminue.

Le débit de sortie d'un orifice d'alimentation, calculé sous forme adimensionnelle à partir des équations (51) et (52), est représenté sur la figure 21, pour de l'air à 20°C. Le débit reste constant pour $P_0/P_1 \leq 0.528$.

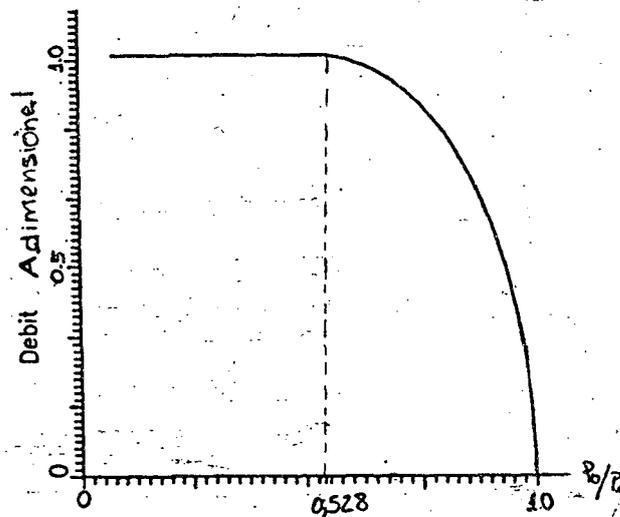


Fig. 21 - Débit d'alimentation pour les paliers aérostatiques.

De même que pour les paliers à huile, la raideur statique s'exprime par :

$$\lambda = - \partial F / \partial h$$

La rigidité axiale d'un patin aérostatique s'obtient de la même façon que pour un patin hydrostatique. Toutefois, dans le cas d'un gaz, la raideur doit être calculée pour les deux régions caractéristiques.

Dans le domaine de débit constant, la raideur statique s'exprime par :

$$\lambda = \frac{6 \mu R T q_f \ln (R_e/R_i) (R_e^3 - R_i^3)}{h^4 P_o (R_e - R_i)}$$

ou en substituant q_f par l'expression (51 c) ; il résulte :

$$\lambda = \frac{\pi [P_o^2 - P_{at}^2]}{h P_o} \frac{(R_e^3 - R_i^3)}{(R_e - R_i)}$$

IV - DETERMINATION DES DIMENSIONS DU PALIER ET CRITERES DE CHOIX

Les formulations théoriques de base qui ont été développées précédemment nous permettent de proposer un processus d'obtention de dimensions géométriques d'un patin fonctionnant en régime statique.

Cette méthodologie établie à partir du cahier des charges précisant les spécifications fonctionnelles, et certains critères définis a priori, permettra de comparer les performances des paliers à fluide compressible et incompressible.

Pour assurer les conditions de fonctionnement, le type de patin à choisir doit respecter les critères suivants :

a - La portance au démarrage F_0 impose :

$$n F_0 = n P_a S_{alv} > \text{poids du chariot}$$

où $S_{alv} = \pi R_i^2$ et n est le nombre de patins porteurs du chariot;

b - Les contraintes d'usinage et d'assemblage, les risques de grippage par les particules contenues dans le fluide, ou les poussières sur les glissières, et la limite pour que les effets elasto-hydrodynamiques restent négligeables, imposent une hauteur du jeu $h > 5$ microns.

c - afin de limiter les échauffements, et la consommation énergétique nous avons imposé une puissance consommée < 20 W/patin, c'est à dire:

· dans la restriction : $\mathcal{P}_1 = (P_1 - P_a) Q$

· dans les portées : $\mathcal{P}_2 = P_a Q$

· puissance totale : $\mathcal{P}_T = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = P_1 Q < 20$ Watt

d - Les résultats de a, b, c permettent de déterminer la pression alvéolaire P_a , la largeur de la lèvres L (cas rectangulaire) ou le rapport

Re/Ri pour le cas d'un patin circulaire.

e - La raideur doit être telle qu'une surcharge $\Delta W = 10$ N par patin n'induit qu'un déplacement $\Delta h < 0.05 \mu\text{m}$, c'est à dire $\Delta W/\Delta h > 200$ N/ μm .

f - La pré-charge est déterminée à partir des résultats précédents pour assurer la rigidité voulue.

Les étapes e et f déterminent S_{alv} , Q et P_a/P_1 , qui conduit au calcul de la restriction.

g - Précision : l'influence des pulsations de pression du groupe d'alimentation sur la précision. La pression amont P_1 doit être telle que :

$$(\Delta h)_{\Delta P_1} < 5. \times 10^{-8} \text{ m. D'où : } \Delta P_{1\text{maxi}} < 15. \times 10^{-8} (1-\beta) P_1 / h .$$

L'exploitation des équations écrites précédemment s'effectue par un programme informatique qui simule les conditions de fonctionnement statique du patin. Leur représentation sous forme de courbes permet de définir les domaines de variation des paramètres qui respectent les critères imposés.

IV.1 -CHOIX DE LA GEOMETRIE

Pour les patins de géométrie circulaire, la valeur du diamètre extérieur a été choisi a priori à 26 mm. Le rapport Re/Ri est déterminé sur la figure 18.

La valeur Re/Ri d'environ 1.44 permet d'obtenir un bon compromis entre la raideur et le débit de fuite. On peut remarquer que plus le rapport Re/Ri se rapproche de 1, plus le débit augmente (équation 42) et plus la précision d'usinage de la lèvre du patin est astreignante.

Pour le patin de géométrie rectangulaire les dimensions extérieures ont été choisies de manière à obtenir le même encombrement que pour le patin circulaire.

Les formes géométriques choisies sont montrées, à l'échelle 1 sur les figures 23 et 24.

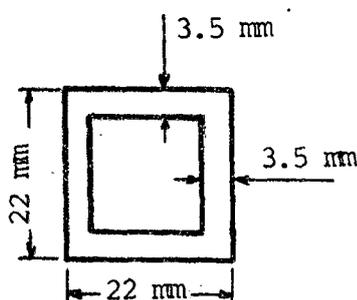


Fig. 23 - Patin hydrostatique rectangulaire.

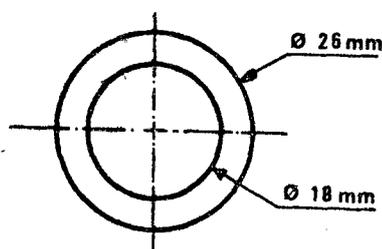


Fig. 24 - Patin hydrostatique circulaire.

IV.2 - PARAMETRES DU FONCTIONNEMENT HYDROSTATIQUE

L'application successive des critères de choix, établis auparavant a permis de définir les valeurs des paramètres de fonctionnement tels que le jeu, la pression alvéolaire et le débit de fuite, à partir des courbes caractéristiques des patins.

Les critères portent principalement sur le jeu, la raideur et la puissance consommée. Les courbes caractéristiques des patins dont la géométrie a été définie précédemment sont tracées en fonction des différents paramètres sur les figures 25 à 30.

Les calculs ont été effectués pour un fluide de lubrification standard ISO 22 de viscosité $\mu = 0.03 \text{ N.s/m}^2$ à une température de 35°C , $R_c = 4. \times 10^{-4} \text{ m}$, $l = 0.45 \text{ m}$ et $P_1 = 80. \times 10^5 \text{ N/m}^2$.

Les intervalles de points de fonctionnement pour $\lambda \geq 200 \text{ N/\mu m}$ qui s'en déduisent sont récapitulés dans le tableau ci-dessous ; L'indice C désigne le patin de géométrie circulaire et R la géométrie rectangulaire.

- Hauteur du jeu	C - 5.5 à 11. microns R - 5.2 à 9.9 microns
- Débit de fuite	C - 0.05 à $0.22 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ R - 0.06 à $0.21 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$
- Puissance dissipée	C - 0.45 à 1.72 watt/patin R - 0.47 à 1.65 watt/patin
- Pression d'alimentation	C - 34. à $68. \times 10^5 \text{ N/m}^2$ R - 36. à $67. \times 10^5 \text{ N/m}^2$
- Pré-charge	C - 130 à 260 daN R - 125 à 235 daN
- Rigidité	C - 200 à 254 N/micron R - 200 à 248 N/micron

IV.3 - PARAMETRES DU FONCTIONNEMENT AEROSTATIQUE

De même que pour le cas précédent, il faut choisir préalablement une géométrie qui permettra de satisfaire les critères de performance souhaités.

L'application successive de ces critères conduit à des surfaces de patin environ 5 fois plus grandes que pour le patin hydrostatique. Pour pouvoir descendre à des dimensions compatibles avec le système mobile envisagé, il faut donc disposer d'une source délivrant une pression d'alimentation et un débit d'air élevés.

Les deux exemples suivants donnent les résultats obtenus pour deux types de configurations avec: $Re/Ri=1.08$, $d_o = 6.4 \times 10^{-4}$ m, $T_s = 20^\circ\text{C}$.

a) Exemple 1 :

- rigidité : 200 N/ μm
- pression d'alimentation : 6×10^5 N/m²
- débit d'air : 3×10^{-4} Kg/s
- diamètre extérieur du patin : $92. \times 10^{-3}$ m.

Ce qui conduit à un encombrement trop important.

b) Exemple 2 :

- rigidité : 200 N/ μm
- pression d'alimentation : $12. \times 10^5$ N/m²
- débit d'air entre 6.5×10^{-4} à 7.2×10^{-4} Kg/s
- rayon extérieur du patin : $25. \times 10^{-3}$ m.

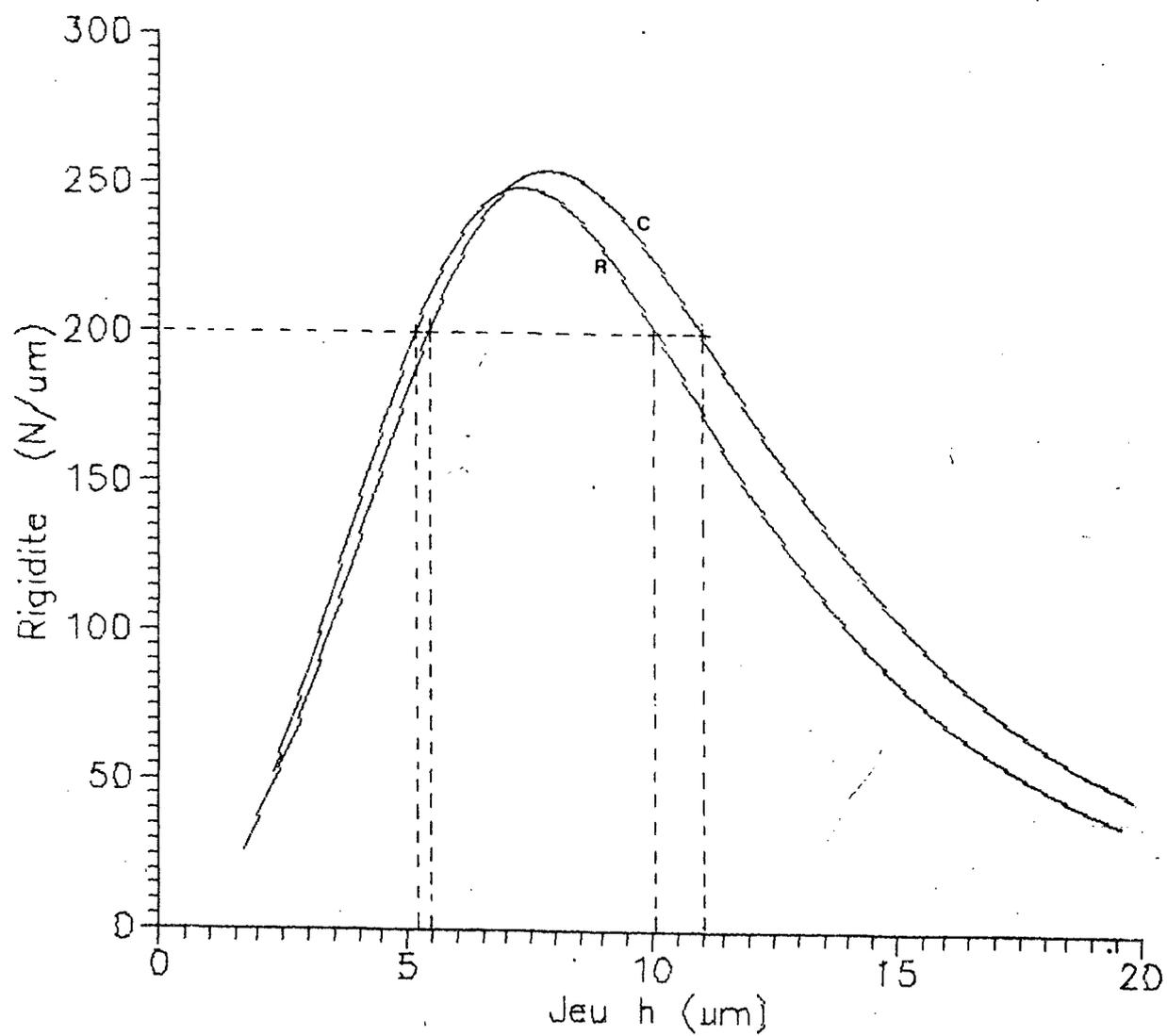
Cette géométrie impose donc l'installation d'un surpresseur.

Une analyse plus complète des caractéristiques des patins aérostatiques peut être faite à l'aide des figures 31 à 34.

IV.4 - CHOIX DU TYPE DE PATIN

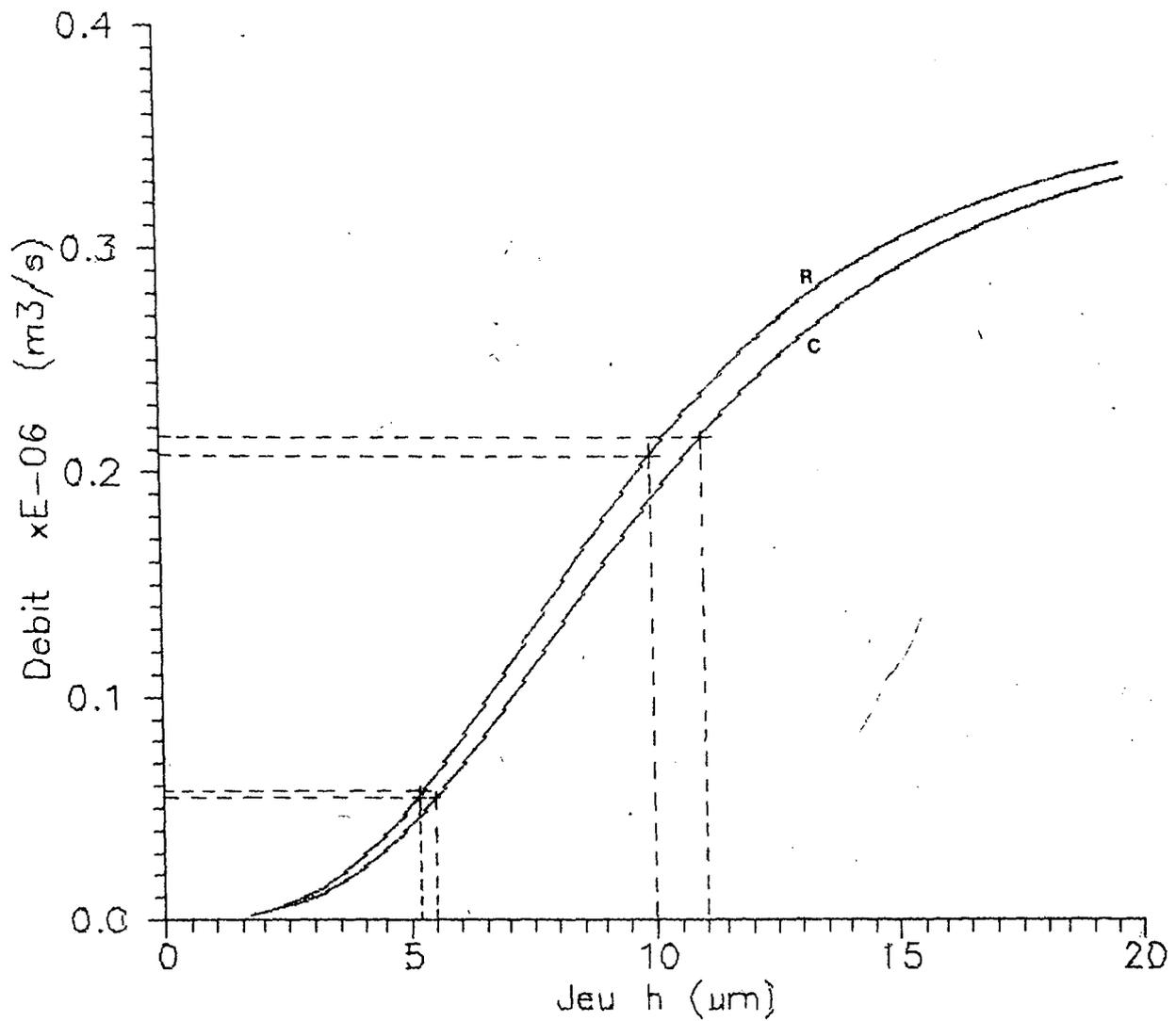
D'après l'analyse des courbes caractéristiques du fonctionnement statique des patins hydrostatiques et aérostatiques, on peut dire que le système hydrostatique est le mieux adapté pour l'application envisagée. En effet il permet une souplesse plus grande de réglage de la pression source et de la rigidité, par rapport au patin aérostatique.

Parmi les deux géométries proposées le patin circulaire a été choisi puisqu'il permet une meilleure précision d'usinage des surfaces surtout dans les lèvres du patin.



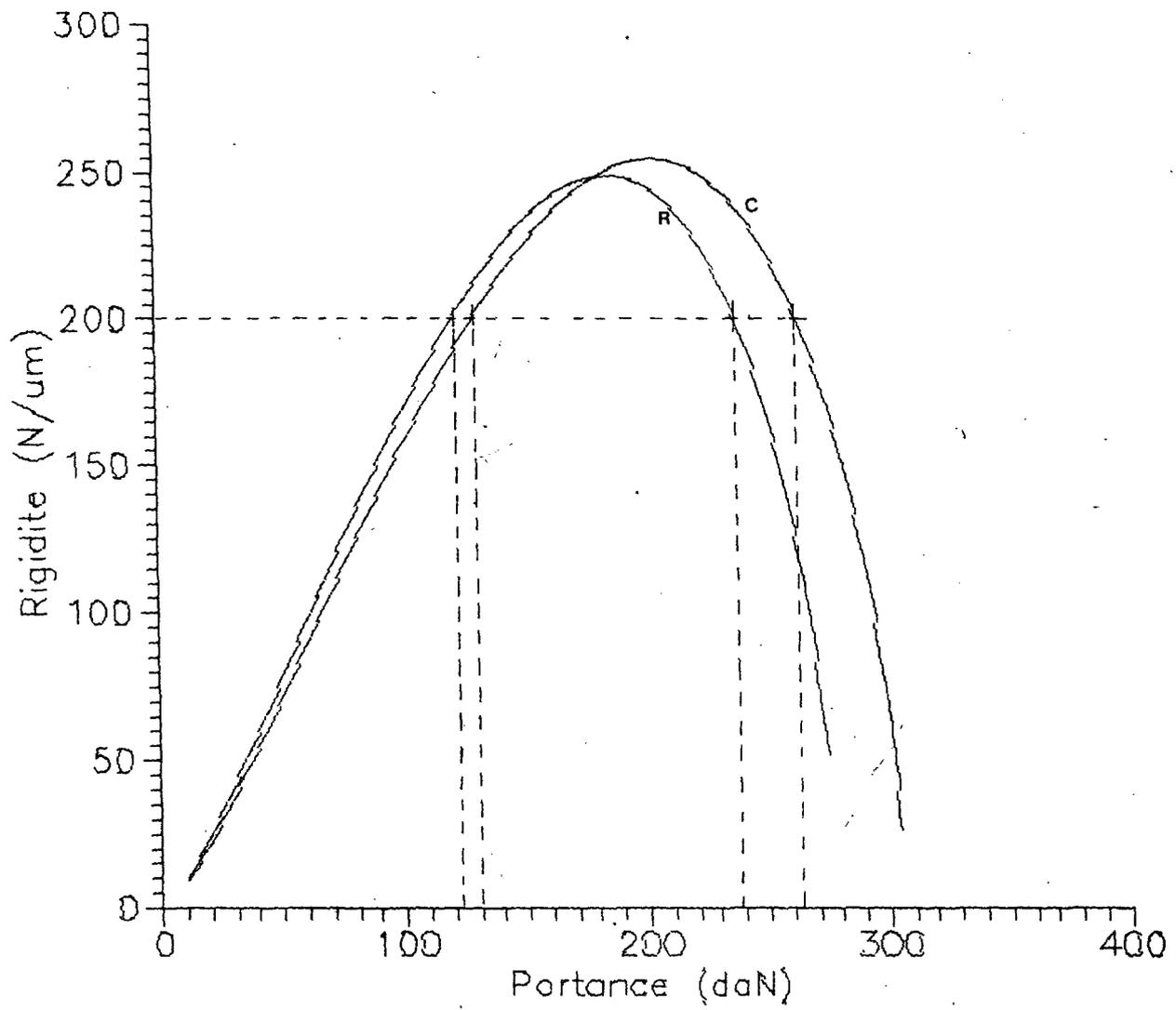
Palier Hydrostatique

Fig. 25 - Variations de la rigidité en fonction du jeu.



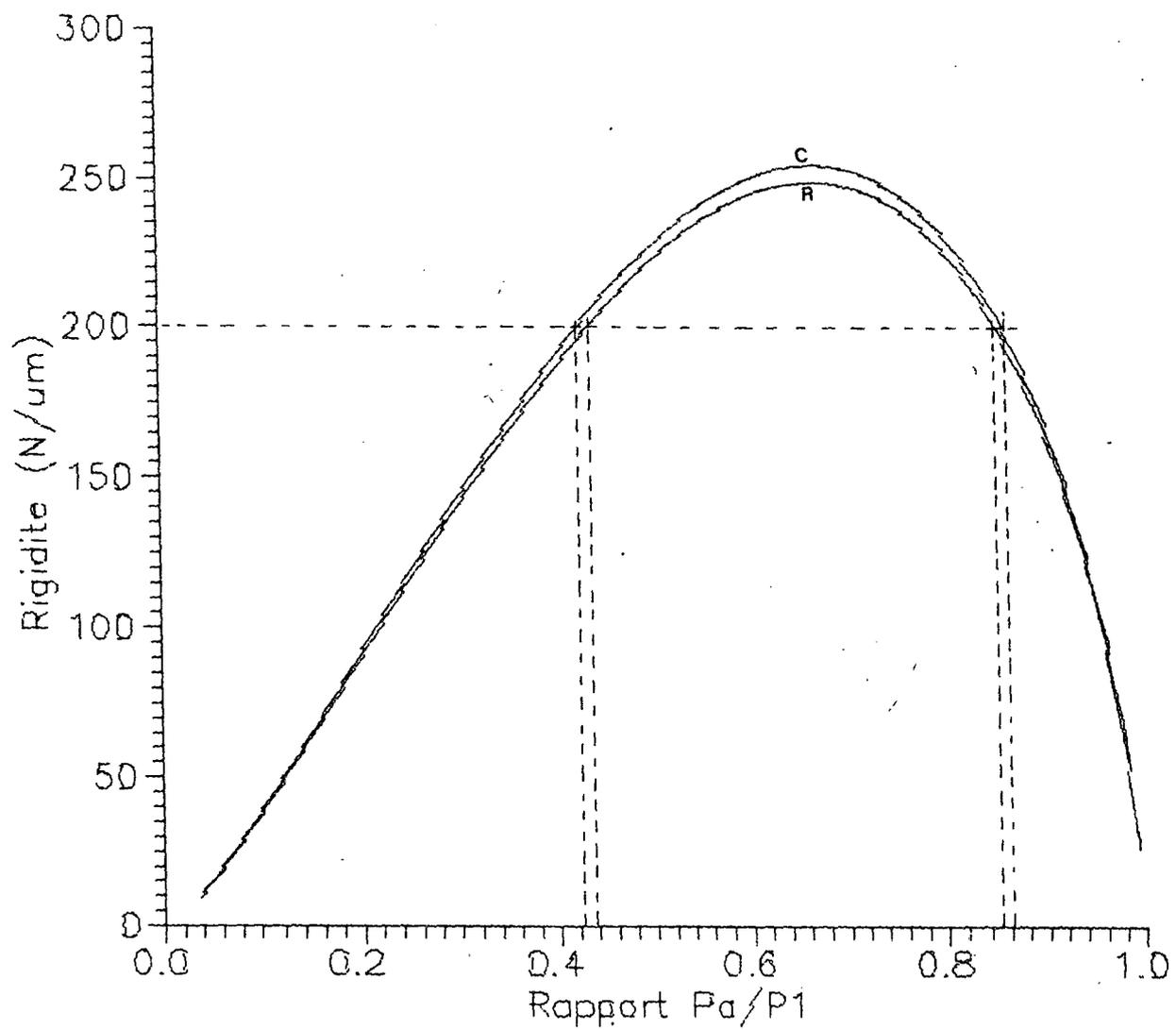
Palier Hydrostatique

Fig. 26 = Variations du débit en fonction du jeu.



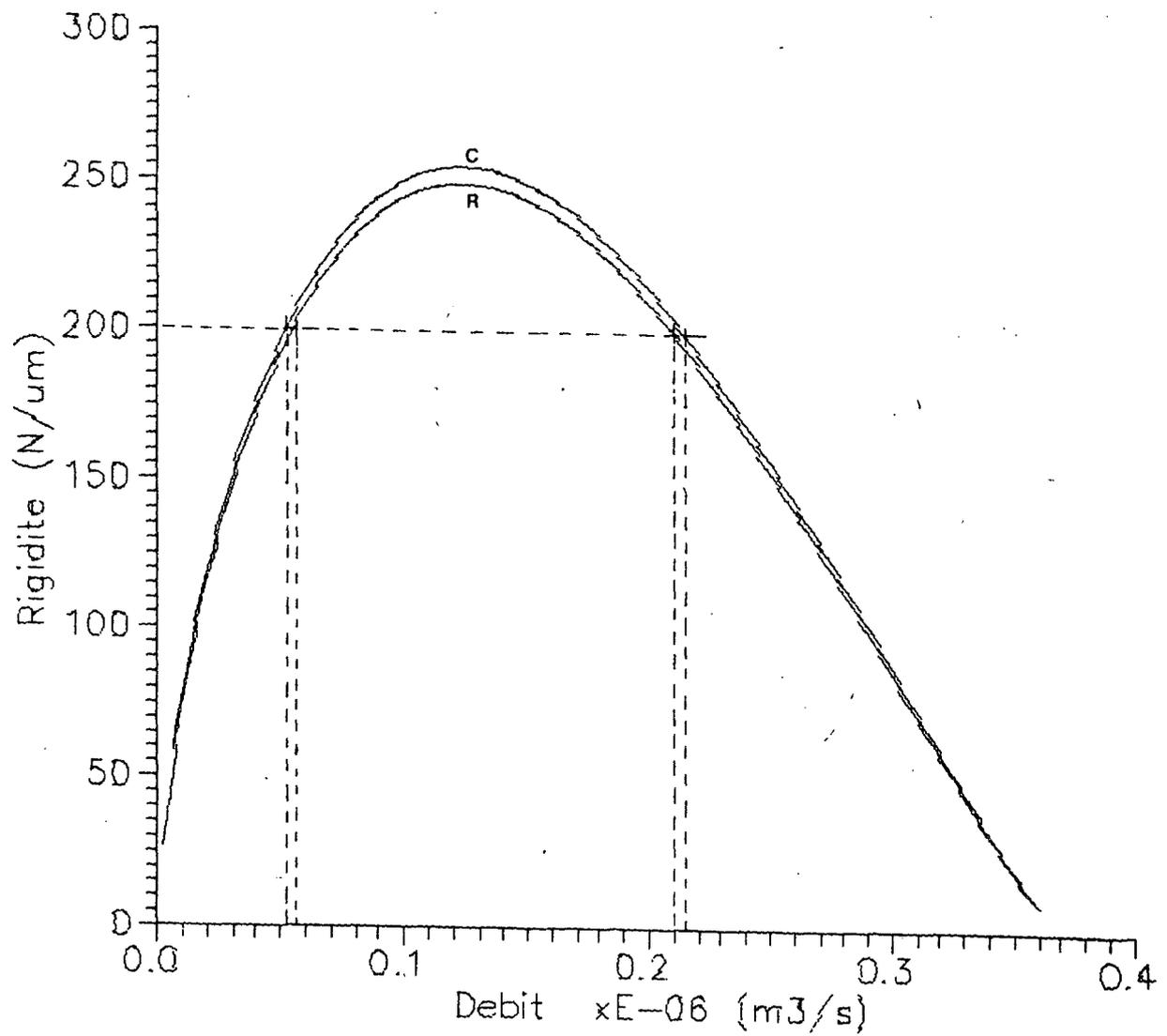
Palier Hydrostatique

Fig. 27- Variations de la rigidité en fonction de la charge appliquée.



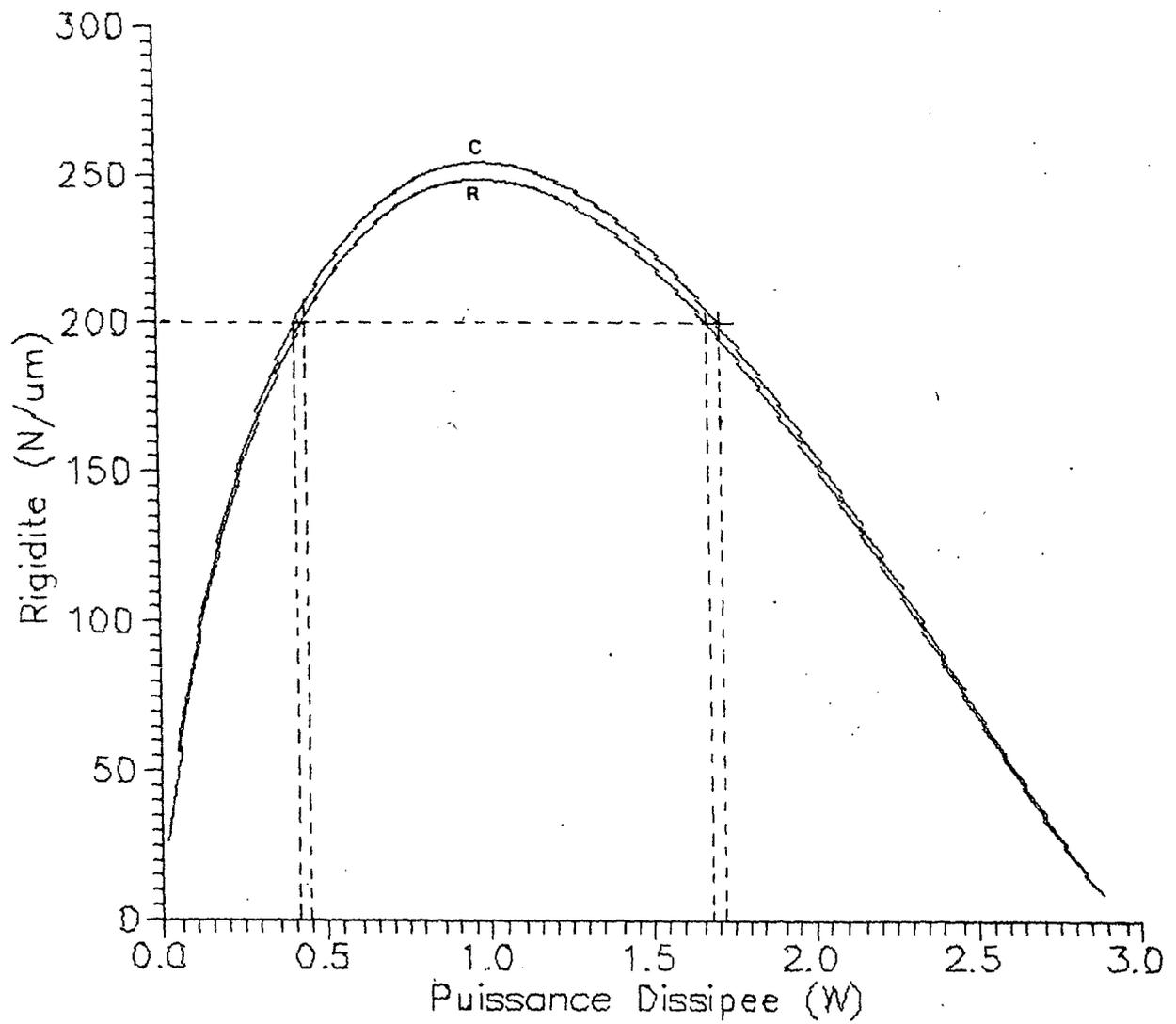
Palier Hydrostatique

Fig. 28 - Variations de la rigidité en fonction du rapport P_a/P_1 .



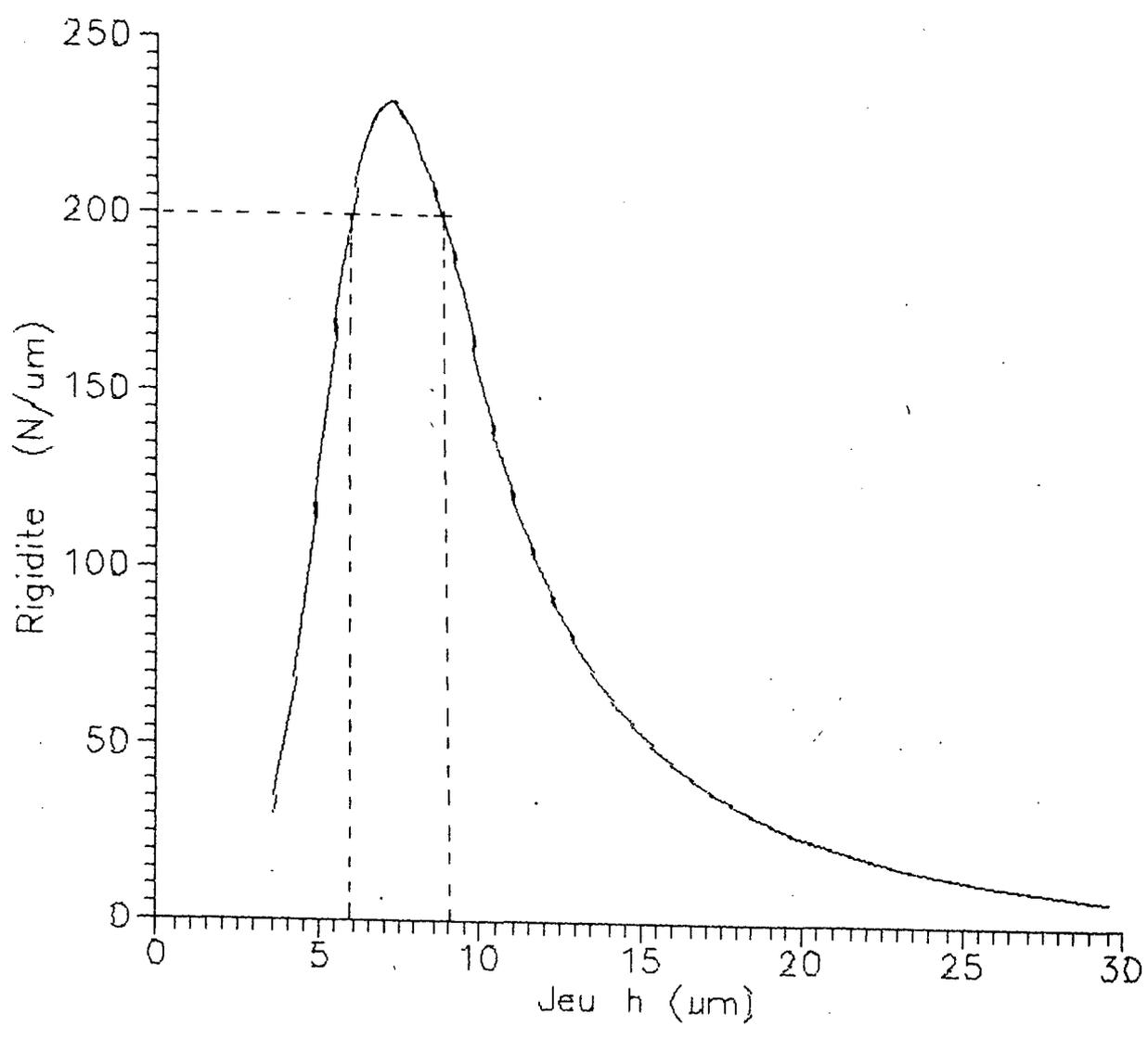
Palier Hydrostatique .

Fig. 29 - Variations de la rigidité en fonction du débit.



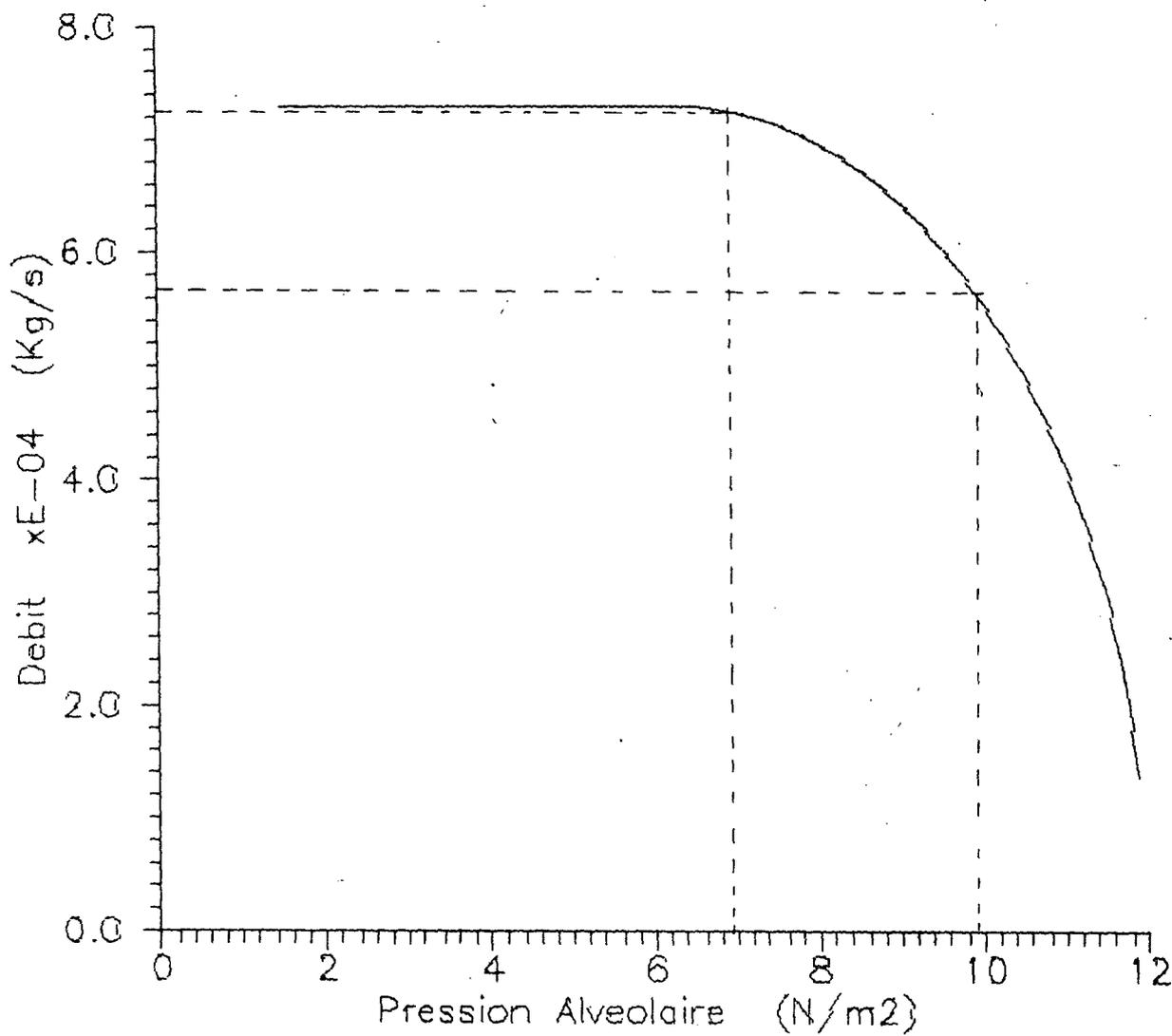
Palier Hydrostatique

Fig. 30 - Variations de la rigidité en fonction de la puissance dissipée.



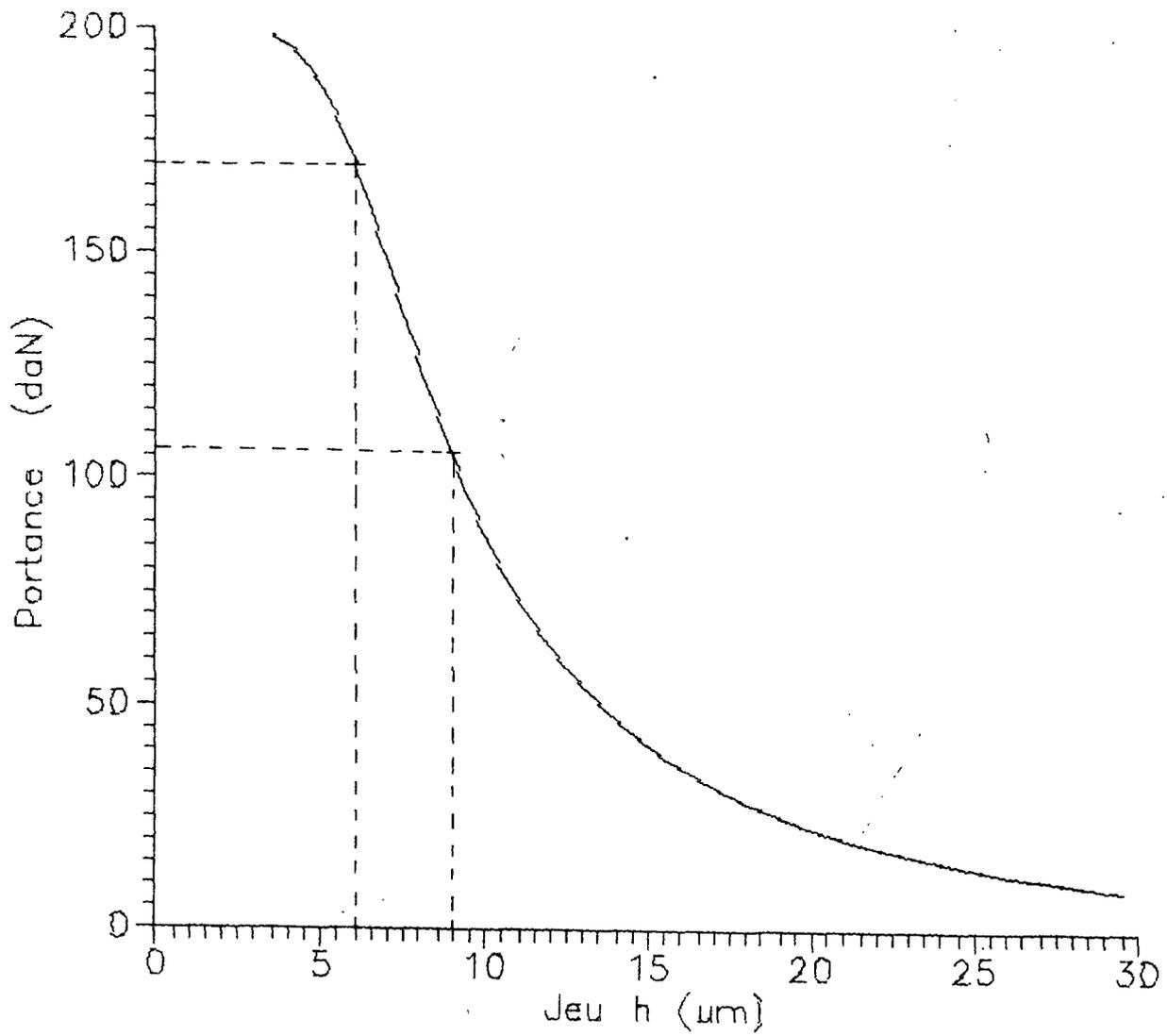
Palier Aérostatique

Fig. 31 = Variations de la rigidité en fonction du jeu.



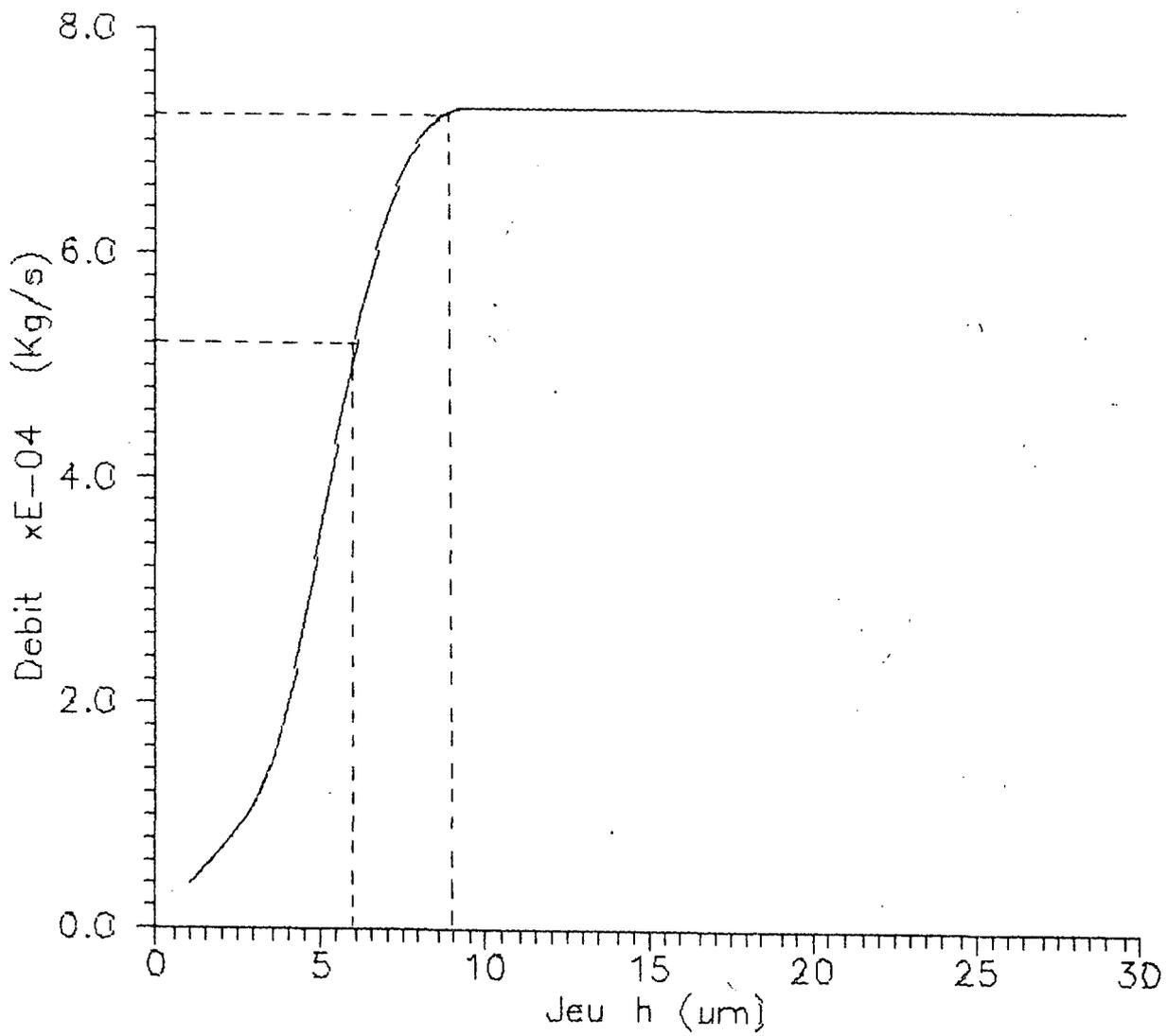
Palier Aérostatique

Fig. 32 - Variations du débit en fonction de la pression alvéolaire.



Palier Aérostatique

Fig. 33 - Variations de la portance en fonction du jeu.



Palier Aérostatique

Fig. 34 - Variations du débit en fonction du jeu.

V - ETUDE DYNAMIQUE DU PATIN ISOLE

Les mouvements de vibration du chariot engendrés par les efforts extérieurs variables génèrent une erreur de trajectoire.

Le comportement dynamique du chariot dépend de la fréquence propre non amortie et du coefficient d'amortissement des patins.

Les paramètres régissant la réponse dynamique des patins doivent donc être associés aux paramètres statiques pour réaliser une conception optimisée du guidage.

L'étude dynamique du chariot, vis à vis de ses trois erreurs de trajectoire principales (tangage, roulis et lacet) se présente d'une manière assez complexe. Ainsi on va analyser, d'abord, les caractéristiques de fonctionnement pour le patin isolé sollicité perpendiculairement au plan du guidage comme le montre la figure 35.

Ces résultats pourront être ensuite rassemblés pour définir le comportement dynamique global du chariot.

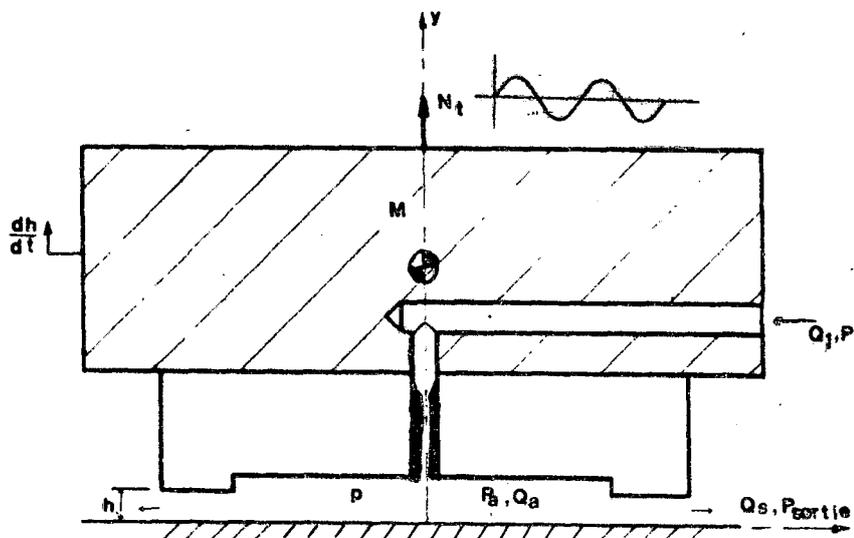


Fig. 35 - Schéma du patin et point d'application de la charge dynamique.

- où:
- M : Masse supportée par le patin
 - N (t) : Force extérieure variable normale appliquée au patin
(supposée nulle)
 - P1 : Pression d'alimentation dans le gicleur
 - Pa : Pression dans l'alvéole
 - Q1 : Débit d'alimentation
 - Qa : Débit dans l'alvéole à l'entrée du jeu
 - Qs : Débit de sortie du patin
 - h : Hauteur du jeu sous le patin.

V.1 - FORMULATION DYNAMIQUE DES PATINS A FLUIDE PEU COMPRESSIBLE

Considérons que la charge dynamique extérieure s'exerce au point de symétrie du patin, dans la direction de son axe de symétrie.

Le patin est supposé parfaitement rigide. Si la surface inférieure du patin reste parallèle à celle du guidage, la vitesse des parois solides est égale à dh/dt , dans la direction perpendiculaire au déplacement du chariot. Il a été montré au § II.2.6 que pour les vitesses de déplacement considérées, l'influence de l'effet "Couette" est négligeable. On supposera donc dans cette approche que le patin ne subit pas de translation.

V.1.1- Equations Générales

La détermination des mouvements vibratoires libres du patin, fait appel aux trois équations principales, de quantité de mouvement, de conservation du débit et de conservation de l'énergie cinétique :

a) Equation de l'énergie cinétique du fluide

La conservation de l'énergie appliquée au fluide situé à l'intérieur du patin s'exprime par [12] :

$$\frac{1}{2} \iiint_D \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial t} dw + \iint_S \frac{\rho u^2}{2} Un ds = - \iint_S p Un ds + \iint_S \tau_s \vec{t} \cdot \vec{u} ds + \mathcal{P}_i \quad (58)$$

- avec :
- D : domaine de fluide à l'intérieur du patin ;
 - ρ : masse volumique du fluide ;
 - \vec{u} : vitesse du fluide ;
 - p : pression statique ;
 - τ_s : contrainte tangentielle de viscosité induite par la paroi sur le fluide, le long de la surface considérée ($\tau_s > 0$);
 - \vec{t} : vecteur unitaire tangent à la paroi $\vec{t} = \vec{u} / |\vec{u}|$;
 - \vec{n} : est le vecteur unitaire normal à la surface et dirigé vers l'extérieur du domaine de contrôle D ;
 - S : est la surface qui entoure D, sur laquelle on distingue : les surfaces mobiles S_m , les surfaces délimitées dans le fluide S_f et les surfaces fixes S_p , telles que $S = S_m + S_f + S_p$;
 - Un: est la composante de la vitesse du fluide normale à la surface

$$Un = \vec{u} \cdot \vec{n}$$

Compte tenu des hypothèses effectuées dans le chapitre II, les termes qui se trouvent à gauche de l'équation (58), et qui représentent respectivement la variation instantanée de l'énergie cinétique du fluide dans le domaine et le débit d'énergie cinétique ne seront pas pris en compte dans ce calcul .

Le second membre de l'équation (58) exprime la puissance mécanique générée ou dissipée dans le fluide résultant des efforts extérieurs appliqués sur le patin.

\mathcal{P}_i représente la puissance des forces intérieures composée du terme $\iiint p \operatorname{div}(\vec{U}) dw$, qui est la puissance de compression élastique du domaine et du terme $\iiint \phi dw$, qui représente la puissance dissipée par frottement à l'intérieur du domaine de fluide .

$$\mathcal{P}_i = \iiint_D \rho \operatorname{div}(\vec{U}) dw - \iiint_D \tau_{ij} \frac{\partial(u_i)}{\partial x_j} dw = \iiint_D \rho \operatorname{div}(\vec{U}) dw - \iiint_D \varnothing dw$$

Si \mathcal{P}_{fi} est la puissance dissipée par frottement visqueux dans le fluide à l'intérieur du domaine D (transformée en énergie interne) :

$$\mathcal{P}_{fi} = \iiint_D \tau_{ij} \frac{\partial(u_i)}{\partial x_j} dw = - \iiint_D \varnothing dw$$

pour un fluide incompressible, avec $\varnothing = \tau_{ij} \frac{\partial(u_i)}{\partial x_j}$;

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel établi, le terme \mathcal{P}_{fi} s'exprime par :

$$\mathcal{P}_{fi} = 2 \iint_S \tau_s \bar{U} ds ;$$

Ceci peut être par exemple montré en coordonnées cylindriques. L'équation de mouvement du fluide dans un palier plan circulaire s'écrit, avec les hypothèses de l'équation de Reynolds :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial \tau_{ry}}{\partial y}$$

Si nous exprimons la contrainte tangentielle de viscosité induite par la paroi sur le fluide par $\tau_{ry} = \tau_s$, après l'intégration nous obtenons :

$$\tau(r,y) = \tau_s - \partial P / \partial r (h-y);$$

soit, avec les conditions aux limites:

$$\tau(r,0) = \tau_s - h \frac{\partial P}{\partial r} ;$$

$$\tau(r,h) = \tau_s ;$$

nous deduisons:

$$\tau_s = -\frac{\partial P}{\partial r} (h/2) .$$

En appliquant l'expression de \mathcal{P}_{fi} donnée auparavant, au volume de contrôle qui se trouve sous les portées, il résulte :

$$\mathcal{P}_{fi} = -2 \pi \int_{Ri}^{Re} \int_0^h \tau(r,y) \frac{\partial u}{\partial y} dr dy$$

ou après substitution :

$$\mathcal{P}_{fi} = -2 \pi \int_{Ri}^{Re} \int_0^h [\tau_s - (\frac{\partial P}{\partial r}) (h-y)] \frac{\partial u}{\partial y} dr dy$$

Après intégration par parties et en introduisant \bar{U} , vitesse moyenne du fluide dans le volume considéré, il résulte :

$$\mathcal{P}_{fi} = 2 \int_S \tau_s \bar{U} ds \quad (59)$$

qui est l'expression de l'énergie dissipée dans le domaine D , avec $\tau_s < 0$ et S la surface baignée par le fluide, c'est à dire, $S = S_m + S_p$.

Le terme $\iiint_D \rho \operatorname{div}(\vec{U}) dw$, peut être analysé à l'aide de l'équation

de continuité écrite en coordonnées cartésiennes sous la forme:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\vec{U}) + \vec{U} \operatorname{grad}(\rho) = 0$$

$$\operatorname{div}(\vec{U}) = -\frac{\vec{U} \operatorname{grad}(\rho)}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

avec :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

et en considérant un écoulement plan dans un jeu étroit tel que :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \text{ et } \frac{\partial P}{\partial z} \ll \frac{\partial P}{\partial x}$$

il résulte :

$$\operatorname{div}(\vec{U}) = -\frac{\vec{U}}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t}$$

d'où

$$\iiint_D \rho \operatorname{div}(\vec{U}) dw = -\kappa \iiint_D P \left\{ u \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t} \right\} dw$$

où $\kappa = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}$ est le coefficient de compressibilité du fluide.

Pour la formulation adimensionnelle de l'intégrale ci-dessus les variables utilisées sont:

$$\tilde{t} = \omega t, \quad \tilde{P} = P/P_0, \quad \tilde{\rho} = \rho/\rho_0 \approx 1, \quad \tilde{u} = u/u_0, \quad \tilde{x} = x/L, \quad \tilde{y} = y/h$$

où \tilde{t} , \tilde{P} , $\tilde{\rho}$, \tilde{u} , \tilde{x} et \tilde{y} sont les variables adimensionnelles ;
 P_0 , ρ_0 et u_0 les valeurs de référence ;
 ω la fréquence d'excitation ;
 t le temps ;
 u la vitesse du fluide .

L'intégrale devient :

$$-\chi \int \int \int_D P \left\{ u \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t} \right\} dw = -\chi L P_0^2 u_0 h \int \int \int_D \tilde{P} \left\{ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} \right\} d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z}$$

$$- \chi L^2 P_0^2 \omega h \int \int \int_D \tilde{P} \left\{ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{t}} \right\} d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z}$$

Les deux termes à droite de l'équation précédente représentent respectivement la puissance générée par les forces de pression au cours des mouvements de dilatation convectifs et , la puissance générée par les forces de pression au cours des mouvements de dilatation induits localement par les variations temporelles de pression.

Nous allons comparer cette expression avec la puissance des forces de pression générée par le mouvement de la paroi mobile , à la vitesse $U_n = dh/dt$. Avec $|dh/dt| = \omega \Delta h$ et les variables adimensionnelles il vient :

$$- \int \int \int_S \rho U_n ds = -P_0 \Delta h \omega L^2 \int \int \int \tilde{P} \tilde{u} d\tilde{x} d\tilde{z}$$

Si les valeurs des variables de référence sont :

$$\chi = 9 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$$

$$P_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$u_0 = 10^{-1} \text{ m/s}$$

$$L = 4 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$h = 10^{-5} \text{ m}$$

$$\Delta h = 10^{-6} \text{ m}, \text{ l'amplitude de la variation du jeu;}$$

L'ordre de grandeur de la puissance des forces de pression dues aux mouvements de dilatation-compression, par rapport à la puissance engendrée par les forces de pression sur la paroi mobile est donné par la quantité adimensionnelle :

$$\frac{\chi \cdot P_0 h}{\Delta h} \left\{ \frac{u_0}{\omega L} + 1 \right\} \approx 10^{-4} \left\{ \frac{2.5 \times 10^2}{\omega} + 1 \right\}$$

Ce terme est négligeable ($< 10^{-2}$), si $\omega > 2.5 \text{ rad/s} \approx N > 0.4 \text{ Hz}$. Le terme de puissance de compression élastique du domaine peut être considéré comme négligeable devant la puissance générée par la paroi mobile.

L'avant dernier terme de l'équation (58) correspond à l'énergie transmise au fluide par le mouvement des parois solides mobiles, par l'intermédiaire des forces de frottement. Si les parois sont immobiles $u=0$ à la paroi, et le terme est nul.

b) Conservation du débit massique.

La formulation mathématique est complétée par l'introduction des équations de conservation du débit dans le domaine D de fluide qui se trouve sous le patin. Sa forme générale s'écrit :

$$\rho_1 Q_1 - \rho_a Q_a - d(\rho V)/dt = 0 \quad (60)$$

où : V est le volume du domaine D ;

c) Equation du mouvement du patin

Le mouvement du patin étant supposé s'effectuer sur un axe perpendiculaire au plan de guidage (voir figure 35), la résultante suivant cet axe des forces extérieures appliquées au fluide (pression et frottement), équilibre la force d'inertie développée par la masse M , et la charge normale $N(t)$ du patin.

$$M \frac{d^2h}{dt^2} = \iint_S p \vec{n} \vec{y} ds - \iint_S \tau_s \vec{t} \vec{y} ds - N(t) \quad (61)$$

Ainsi, les mouvements subis par le patin sont régis par les échanges d'énergie entre celui-ci et le fluide en écoulement dans le capillaire, la cavité alvéolaire et dans les portées ; l'énergie du fluide étant produite par la pression de source et les mouvements du patin.

Le fluide est supposé compressible, et les effets thermiques sont négligés ; la viscosité μ du fluide est supposée constante.

Les principaux éléments géométriques du patin sont représentés sur la figure 36.

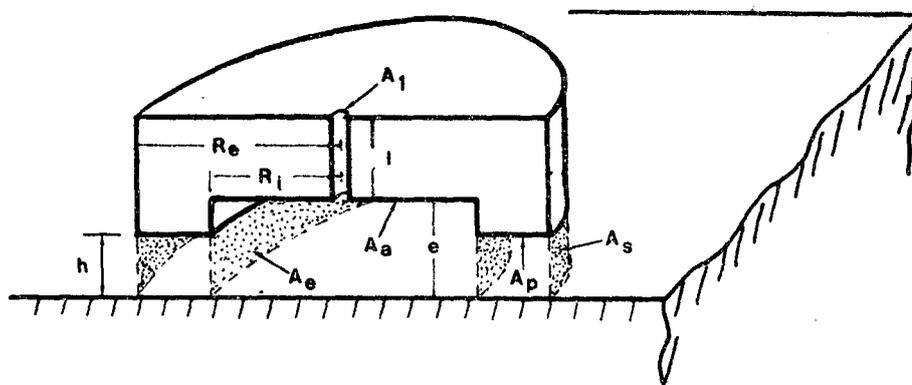


Fig. 36 - Exemple d'un patin circulaire.

Avec : R_i : rayon de l'orifice capillaire,
 R_e : rayon de l'alvéole,

R_e : rayon extérieur du patin,
 h : jeu du patin,
 e : profondeur de l'alvéole mesuré au plan du guidage,
 l : longueur du capillaire,
 A_1 : aire de la section du capillaire (πR_i^2),
 A_a : surface de l'alvéole (πR_i^2),
 A_e : surface de sortie du fluide de l'alvéole ($2 \pi R_i h$),
 A_p : surface de la lèvre [$\pi (R_e^2 - R_i^2)$],
 A_s : surface de sortie du palier ($2 \pi R_e h$),
 A_T : surface totale du patin ($A_a + A_p$),

Dans la suite, on va déterminer tous les termes des expressions (58), (60) et (61) et les rassembler dans un système d'équations qui nous permettra alors de décrire le mouvement du patin.

V.1.2 - Calcul des Forces Engendrées par l'écoulement

a) Forces de pression

Les forces de pression exercées sous le patin sont calculées sous la forme :

$$F_p = \iint_S p \vec{n} ds = \iint_{A_a} P_a ds + \iint_{A_p} P(r) ds \quad (62)$$

où P_a est la pression qui règne dans l'alvéole, considérée comme constante, et $P(r)$ la répartition de pression sous les portées donnée par l'intégration de l'équation de Reynolds :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{12 \mu}{h^3} \frac{dh}{dt}$$

donc,

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{6 \mu}{h^3} \frac{dh}{dt} r + \frac{C1}{r}$$

$$P(r) = \frac{3 \mu}{h^3} \frac{dh}{dt} r^2 + C1 \ln(r) + C2$$

où C1 et C2 sont les constantes d'intégration obtenues par les conditions aux limites suivantes :

$$P(r) = 0 \quad \text{pour} \quad r = Re$$

$$P(r) = Pa \quad \text{pour} \quad r = Ri$$

$$C1 = - \left\{ Pa + \frac{3 \mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (Re^2 - Ri^2) \right\} \frac{1}{\ln(Re/Ri)}$$

$$C2 = - \frac{3 \mu}{h^3} \frac{dh}{dt} Re^2 + \left\{ Pa + \frac{3 \mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (Re^2 - Ri^2) \right\} \frac{\ln(Re)}{\ln(Re/Ri)}$$

et l'expression de P(r) est :

$$P(r) = - \frac{3 \mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (Re^2 - r^2) - \left\{ Pa + \frac{3 \mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (Re^2 - Ri^2) \right\} \frac{\ln(r/Re)}{\ln(Re/Ri)}$$

La substitution de l'expression de P(r) dans (62) donne :

$$Fp \equiv 2\pi \int_{Ri}^{Re} P(r) r dr = 2\pi \int_{Ri}^{Re} r \left[- \frac{3 \mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (Re^2 - r^2) - \left\{ Pa + \frac{3 \mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (Re^2 - Ri^2) \right\} \frac{\ln(r/Re)}{\ln(Re/Ri)} \right] dr$$

et le résultat après intégration est :

$$F_p = \frac{-6 \pi \mu dh}{h^3 dt} \left\{ \frac{Re^4 - Ri^4}{4} + \frac{1}{\ln(Re/Ri)} \left[\frac{-Re^4 - Ri^4}{4} + \frac{Re^2 Ri^2}{2} \right] \right\} + \frac{Pa \pi (Re^2 - Ri^2)}{2 \ln(Re/Ri)} \quad (63)$$

b) Force de frottement

La composante tangentielle de la force exercée par le fluide sur la paroi du capillaire due à l'action de la contrainte de cisaillement τ_s est exprimée par :

$$F_c = - \iint_S \tau_s \vec{t} ds = - 2 \pi R_1 l \tau_s \quad (64)$$

ou encore ; si $\tau_s = \frac{(P_1 - P_a) R_1}{2 l}$ Comolet [12], il ressort

$$F_c = - \pi R_1^2 (P_1 - P_a)$$

Si on suppose que l'inertie du fluide dans le capillaire reste négligeable, et que l'écoulement est quasi-laminaire, de (10), on obtient le rapport entre la chute de pression et le débit qui traverse le capillaire, alors on peut écrire :

$$F_c = - \frac{A l \mu Q_1}{K_c} \quad (65)$$

La récapitulation des diverses forces qui viennent d'être calculées nous fournit l'expression finale de l'équation du mouvement libre du patin en l'absence de chargement extérieur :

$$M \frac{d^2h}{dt^2} = -\frac{6 \pi \mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \left\{ \frac{Re^4 - Ri^4}{4} + \frac{1}{\ln(Re/Ri)} \left[\frac{-Re^4 - Ri^4}{4} + \frac{Re^2 Ri^2}{2} \right] \right\} + \frac{Pa \pi (Re^2 - Ri^2)}{2 \ln(Re/Ri)} - \frac{A_1 \mu Q_1^2}{K_c} \quad (66)$$

V.1.3 - Puissance des Forces de Frottement

La dissipation d'énergie s'effectue principalement dans les régions où les gradients de vitesse sont les plus élevés, c'est à dire au passage du fluide dans le capillaire et dans le jeu du palier.

a) Dissipation dans le gicleur

Nous supposons que le gicleur est constitué d'un tube capillaire. Celui-ci présente deux avantages sur les orifices : d'une part la perte de charge varie linéairement avec le débit, équation (10), d'autre part la raideur est indépendante de la viscosité du fluide (équation 44).

La perte d'énergie dans le capillaire se déduit de (10), sous la forme :

$$\Delta p_1 = \mu Q_1 / K_c \quad (67)$$

où
$$K_c = \frac{\pi R_1^4}{8 l} \quad \text{et} \quad \Delta p_1 = (P_1 - P_a)$$

Cette perte de charge est instationnaire et dépend des variations du débit Q_1 dans le capillaire, en fonction du mouvement du patin. La puissance dissipée dans le capillaire est alors:

$$\mathcal{P}_{fc} = -\Delta P_1 Q_1 = -\mu Q_1^2 / K_c \quad (68)$$

b) Puissance des forces de frottement dans le palier

Les contraintes de frottement exercées par les parois du palier sur le fluide dues à l'action de la viscosité provoquent une dissipation de puissance à l'intérieur du fluide (voir § V.1.1).

$$\mathcal{P}_{fp} = - 2 \iint_{A_p} \tau_s(r, t) U_j(r, t) ds \quad (69)$$

où $U_j(r, t)$ est la vitesse moyenne du fluide dans le jeu à la distance r de l'axe du patin. Le signe négatif correspond au fait que la contrainte est dans le sens opposé à la vitesse du fluide.

Si l'écoulement dans le jeu reste quasi-laminaire, c'est à dire que le profil de vitesse reste parabolique, mais que le gradient de pression dépend de la vitesse d'écrasement dh/dt du film d'huile dans le jeu :

$$u(r, y, t) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial r} y(y-h)$$

L'expression de la vitesse moyenne est alors :

$$U_j(r, t) = \frac{1}{h} \int_0^h u(r, y, t) dy$$

$$U_j(r, t) = \frac{-h^2}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (70)$$

D'autre part, la contrainte à la paroi est définie par :

$$\tau_s(r, t) = -\mu \left[\frac{du(r, y, t)}{dy} \right]_{y=h}$$

Donc :

$$\tau_s(r, t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial r} h \quad ; \quad (71)$$

avec , d'après le paragraphe V.1.2 :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{6 \mu}{h^3} \frac{dh}{dt} r + \frac{C1}{r}$$

ou après substitution de la valeur de C1

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{6 \mu}{h^3} \frac{dh}{dt} r - \frac{1}{r} \left\{ Pa + \frac{3 \mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (Re^2 - Ri^2) \right\} \frac{1}{\ln(Re/Ri)} \quad (72)$$

En reportant les expressions (70) et (71) dans l'intégrale (69) :

$$\mathcal{P}f_p = - \frac{\pi h^3}{6 \mu Ri} \int_{Ri}^{Re} r \left\{ \frac{\partial P}{\partial r} \right\}^2 dr \quad (73)$$

avec (72) dans l'intégrale (73) , il résulte:

$$\mathcal{P}f_p = + \frac{24 \pi \mu}{h^3} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \left\{ \frac{(Re^4 - Ri^4)}{16} - \frac{3 (Re^2 - Ri^2)}{16 \ln(Re/Ri)} \right\} + \frac{Pa^2 \pi h^3}{6 \mu \ln(Re/Ri)} \quad (74)$$

V.1.4 - Puissance des Forces de Pression

a) Puissance des forces de pression sur les parois mobiles du patin

La surface S_m des parois mobiles du patin se compose de la surface A_a de l'alvéole et de la surface A_p des lèvres du palier.

$$\mathcal{P}_{pm} = - \iint_{S_m} P(r) \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds \quad (75)$$

$$\mathcal{P}_{pm} = - \iint_{A_a} P_a \frac{dh}{dt} \, ds - \iint_{A_p} P(r) \frac{dh}{dt} \, ds \quad (76)$$

où P_a est la pression dans l'alvéole et la répartition de pression dans la lèvre $P(r)$ est donnée au § V.1.2, pour $R_i \leq r \leq R_e$:

$$P(r) = - \frac{3\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (R_e^2 - r^2) - \left\{ P_a + \frac{3\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (R_e^2 - R_i^2) \right\} \frac{\ln(r/R_e)}{\ln(R_e/R_i)}$$

Il résulte :

$$\mathcal{P}_{pm} = P_a \frac{dh}{dt} \pi R_i^2 - \frac{2dh}{dt} \pi \int_{R_i}^{R_e} r \left[\frac{3\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (R_e^2 - r^2) + \left\{ P_a + \frac{3\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (R_e^2 - R_i^2) \right\} \frac{\ln(r/R_e)}{\ln(R_e/R_i)} \right] dr$$

et le résultat après intégration est :

$$\mathcal{P}_{pm} = - \frac{6\pi\mu}{h^3} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \left\{ \frac{R_e^4 - R_i^4}{4} + \frac{1}{\ln(R_e/R_i)} \left[\frac{-R_e^4 - R_i^4}{4} + \frac{R_e^2 R_i^2}{2} \right] \right\} + \frac{P_a \pi (R_e^2 - R_i^2) dh}{2 \ln(R_e/R_i) dt} \quad (77)$$

b) Puissance des forces de pression sur les interfaces fluides.

A l'entrée du capillaire règne la pression P_1 , tandis que la sortie du palier est à la pression de référence $P_s = 0$. La puissance des forces de pression à la sortie est donc nulle, et si Q_1 est le débit d'alimentation du patin, la puissance des forces de pression à l'entrée est :

$$\mathcal{P}_{Pf} = - P_1 Q_1 \quad (78)$$

V.1.5 - Equations de Conservation du débit

Etant donné que la valeur du jeu h reste très faible devant les autres dimensions du patin, le volume de fluide contenu sous la lèvre du palier l'est aussi. Donc, on peut négliger les effets de compressibilité du fluide dans ce dernier par rapport aux volumes alvéolaire V_a et capillaire V_1 . Soit Q_1 le débit d'alimentation et Q_a le débit à l'entrée du jeu, voir figure 37, la conservation du débit massique entre l'entrée du capillaire et la sortie de la cavité alvéolaire, s'exprime alors par :

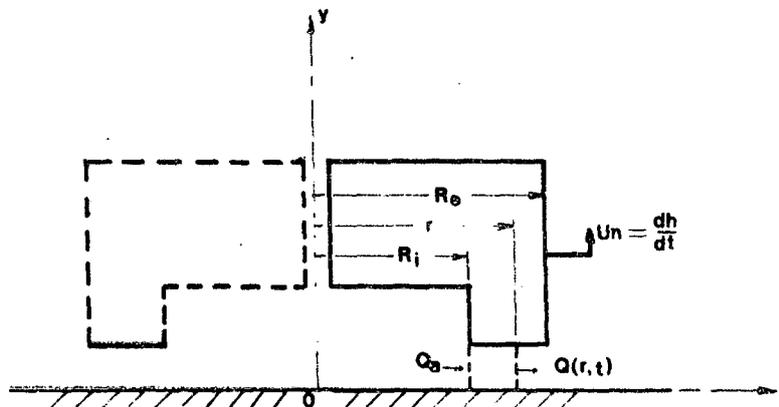


Fig. 37- Variation du débit dans le jeu.

$$\rho_a Q_a = \rho_1 Q_1 - \frac{d(\rho V)}{dt} \quad (79)$$

ou

$$\rho_a Q_a = \rho_1 Q_1 - V \frac{d\rho}{dt} - \rho \frac{dV}{dt} \quad (80)$$

comme les effets de compressibilité peuvent être supposés se produire principalement dans le volume $V = V_a + V_1$, nous avons encore:

Avec $V \frac{d\rho}{dt} = V \left(\frac{d\rho}{dP} \frac{dP}{dt} \right)$ et, $\frac{dV}{dt} = \frac{dV_a}{dt} = A_a \frac{dh}{dt}$,

il vient :

$$\rho_a Q_a = \rho_1 Q_1 - V_1 \left(\frac{d\rho_1}{dP_1} \frac{dP_1}{dt} \right) - V_a \left(\frac{d\rho_a}{dP_a} \frac{dP_a}{dt} \right) - \rho_a A_a \frac{dh}{dt} \quad (81)$$

ou, en introduisant le module de compressibilité du fluide donné par :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} \quad (82)$$

supposé constant dans le domaine de pression envisagé, il résulte :

$$\rho_a Q_a = \rho_1 Q_1 - \rho_a A_a \frac{dh}{dt} - \frac{1}{K} \left(\rho_a V_a \frac{dP_a}{dt} + \rho_1 V_1 \frac{dP_1}{dt} \right) \quad (83)$$

Si la valeur de la masse volumique varie peu et alors $\rho_a \cong \rho_1$, on obtient la forme finale de l'expression du débit Q_a qui entre dans le jeu :

$$Q_a = Q_1 - A_a \frac{dh}{dt} - \frac{V_a}{K} \frac{dP_a}{dt} - \frac{V_1}{K} \frac{dP_1}{dt} \quad (84)$$

De même, à la sortie du patin, d'après (71) :

$$Q_s = Q_a - A_p \frac{dh}{dt} \quad (85)$$

Nous pouvons comparer dans l'équation (84) l'ordre de grandeur des termes de débit de compressibilité par rapport au débit généré par le mouvement de la paroi. L'analyse s'effectue de la même façon et avec les mêmes variables que dans le paragraphe V.1.1 pour l'analyse des termes de puissance générée par les forces de pression dans l'équation d'énergie. Ici nous avons :

$$\chi = 1/K$$

$$\tilde{P} = P/P_0, \quad P_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$P_a = \beta P_1 \text{ avec } \beta = 0.5$$

$$\tilde{Q} = Q/Q_0, \quad Q \approx Q_0 = 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V_a = \pi R_i^2 e \quad \text{où } R_i = 9 \cdot 10^{-3} \text{ et } e = 10^{-3} \text{ m}$$

$$V_1 = \pi R_1^2 l \quad \text{où } R_1 = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ et } l = 0.5 \text{ m}$$

Le débit généré par la paroi mobile est supérieure au dixième du débit moyen si :

$$\frac{A_a}{Q_0} \frac{dh}{dt} = \frac{A_a h \omega d\tilde{h}}{Q_0 d\tilde{h}} \approx \frac{2.5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-5} \omega}{10^{-6}} = 2.5 \cdot 10^{-3} \omega$$

ce qui donne : $\omega > 40 \text{ rad/s}$ et $N \approx 6 \text{ Hz}$.

Pour le débit de compressibilité nous avons :

$$\frac{1}{Q} \left[\frac{V_a}{K} \frac{dP_a}{dt} + \frac{V_1}{K} \frac{dP_1}{dt} \right] = \frac{P_0 \omega \chi (\beta V_a + V_1) d\tilde{P}}{Q_0 d\tilde{h}} \tilde{Q} \approx 1.85 \cdot 10^{-4} \omega$$

pour que $\frac{P_0 \omega \chi(\beta V_a + V_1)}{Q_0} > 10^{-1}$, il faut que $\omega > 540 \text{ rad/s}$ ou $N > 86 \text{ Hz}$.

Le débit de compressibilité est environ 14 fois plus faible que le débit généré par le déplacement de la paroi, à la même fréquence.

Par ailleurs ces effets deviennent significatifs, c'est à dire que l'ordre de grandeur de leur contribution est supérieure au dixième du débit moyen :

- pour le débit généré par la paroi, si $N \geq 6 \text{ Hz}$;
- pour le débit de compressibilité, si $N \geq 86 \text{ Hz}$.

La bande de fréquence à étudier dans le cas d'un patin hydrostatique peuvent être estimée à $0 < N < 100 \text{ Hz}$, la fréquence de 86 Hz est voisine de la borne supérieure, et le terme de débit de compressibilité pour un liquide peut donc être négligé a priori. Ainsi, dans la suite nous considérons que le fluide est incompressible pour le calcul du mouvement dynamique du patin.

Dans ce cas l'équation de conservation du débit dans la poche et le capillaire se réduit à :

$$Q_a = Q_1 - A_a dh/dt \quad (86)$$

V.1.6 - Equations Finales du Mouvement du Patin isolé

Les expressions (58), (60) et (61), nous fournissent le système d'équations qui détermine le comportement dynamique du patin.

On divise le domaine du fluide D situé sous le patin, en deux volumes de contrôle principaux D_1 et D_2 comme nous montre la figure 38, pour faciliter l'expression finale de l'équation de l'énergie.

L'équation de conservation de l'énergie appliquée au domaine $D_1 = D_a + D_c$ s'écrit à partir de (68), (77) et (78) :

$$Pa(Q_1 - Q_a) + Pa A_a \frac{dh}{dt} = 0$$

L'équation de conservation de l'énergie appliquée au domaine D_2 est, d'après (74) et (75) :

$$\begin{aligned} & \frac{-6 \pi \mu (dh)^2}{h^3 dt} \left\{ \frac{Re^4 - Ri^4}{4} + \frac{1}{Ln(Re/Ri)} \left[-\frac{Re^4 - Ri^4}{4} + \frac{Re^2 Ri^2}{2} \right] \right\} + \frac{Pa \pi (Re^2 - Ri^2) dh}{2 Ln(Re/Ri) dt} \\ & - (Pa \pi Ri^2) \frac{dh}{dt} - Pa Q_a + \frac{24 \pi \mu}{h^3} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \left\{ \frac{(Re^4 - Ri^4)}{16} - \frac{3 (Re^2 - Ri^2)}{16 Ln(Re/Ri)} \right\} \\ & + \frac{Pa^2 \pi h^3}{6 \mu Ln(Re/Ri)} = 0 \end{aligned} \quad (87)$$

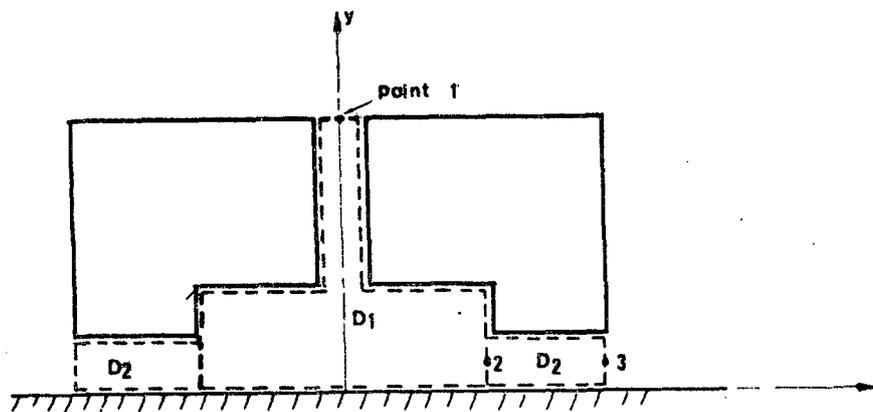


Fig. 38 - Disposition des volumes de contrôle sous le patin.

Le volume de contrôle D_1 est composé du volume du capillaire $D_c = A_1 l$ et du volume alvéolaire $D_a = e A_a$ tandis que D_2 exprime le volume compris sous le palier $D_j = A_p h$.

On remarque aussi les trois points caractéristiques (1, 2, 3) qui délimitent les deux volumes. Cette division permet le découpage de l'expression (58) en deux équations : une qui va du point 1 situé à l'entrée

du capillaire jusqu'à 2, à l'entrée du jeu du palier et l'autre du point 2 à la sortie du patin.

Nous obtenons ainsi un système de 5 équations :

1) L'équation de conservation de l'énergie appliquée au domaine D_1 :

$$P_a Q_1 - P_a Q_a + P_a A_a \frac{dh}{dt} = 0 \quad (88)$$

2) L'équation de conservation de l'énergie appliquée au domaine D_2 :

$$\begin{aligned} & -P_a Q_a - \frac{6 \pi \mu}{h^3} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \left\{ \frac{Re^4 - Ri^4}{4} + \frac{1}{\ln(Re/Ri)} \left[\frac{-Re^4 - Ri^4}{4} + \frac{Re^2 Ri^2}{2} \right] \right\} + \frac{P_a \pi (Re^2 - Ri^2) dh}{2 \ln(Re/Ri) dt} \\ & - (P_a \pi Ri^2) \frac{dh}{dt} + \frac{24 \pi \mu}{h^3} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \left\{ \frac{(Re^4 - Ri^4)}{16} - \frac{3 (Re^2 - Ri^2)}{16 \ln(Re/Ri)} \right\} \\ & + \frac{P_a^2 \pi h^3}{6 \mu \ln(Re/Ri)} = 0 \quad (89) \end{aligned}$$

3) Equation du mouvement du patin (66)

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 h}{dt^2} = & - \frac{6 \pi \mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \left\{ \frac{Re^4 - Ri^4}{4} + \frac{1}{\ln(Re/Ri)} \left[\frac{-Re^4 - Ri^4}{4} + \frac{Re^2 Ri^2}{2} \right] \right\} \\ & + \frac{P_a \pi (Re^2 - Ri^2)}{2 \ln(Re/Ri)} - \frac{A_1 \mu Q_1}{K_c} \quad (90) \end{aligned}$$

4) Equation de conservation du débit (84), entre les points 1 et 2 :

$$Q_a = Q_1 - A_a \frac{dh}{dt} \quad (91)$$

5) Equation de conservation du débit (85), entre les points 2 et 3 :

$$Q_s = Q_a - A_p \frac{dh}{dt} \quad (92)$$

Nous pouvons remplacer le terme $P_a Q_a$ de (88) dans (89) pour obtenir l'expression générale de l'équation d'énergie du point 1 jusqu'au 3.

$$\begin{aligned} & -P_a Q_1 - \frac{6 \pi \mu}{h^3} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \left\{ \frac{Re^4 - Ri^4}{4} + \frac{1}{\ln(Re/Ri)} \left[-\frac{Re^4 - Ri^4}{4} + \frac{Re^2 Ri^2}{2} \right] \right\} + \frac{P_a \pi (Re^2 - Ri^2) dh}{2 \ln(Re/Ri) dt} \\ & + \frac{24 \pi \mu}{h^3} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \left\{ \frac{(Re^4 - Ri^4)}{16} - \frac{3 (Re^2 - Ri^2)}{16 \ln(Re/Ri)} \right\} + \frac{P_a^2 \pi h^3}{6 \mu \ln(Re/Ri)} = 0 \quad (93) \end{aligned}$$

V.2 - TECHNIQUE DE LINEARISATION

On suppose qu'une perturbation dynamique due aux efforts extérieurs, provoque une petite variation de chaque variable (pression, débit, jeu ...), autour de sa valeur statique moyenne. Ainsi, les paramètres principaux peuvent être écrits de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P_1 &= \bar{P}_1 + \hat{P}_1 \\ P_a &= \bar{P}_a + \hat{P}_a \\ Q_1 &= \bar{Q}_1 + \hat{Q}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_a &= \bar{Q}_a + \hat{Q}_a \\Q_s &= \bar{Q}_s + \hat{Q}_s \\h &= \bar{h} + \hat{h}\end{aligned}$$

où, $\bar{P}_1, \bar{Q}_1, \bar{h}$ sont les valeurs moyennes, et $\hat{P}_1, \hat{Q}_1, \hat{h}$... les perturbations, telles que : $\hat{P}_1 \ll \bar{P}_1$ et $\hat{Q}_1 \ll \bar{Q}_1$, etc..

A titre d'exemple, nous écrivons :

$$Q_1^2 = \bar{Q}_1^2 + 2 \bar{Q}_1 \hat{Q}_1 + \hat{Q}_1^2 \cong \bar{Q}_1^2 + 2 \bar{Q}_1 \hat{Q}_1$$

$$P_a \frac{dh}{dt} = \bar{P}_a \frac{d\hat{h}}{dt} + \hat{P}_a \frac{d\hat{h}}{dt} \cong \bar{P}_a \frac{d\hat{h}}{dt}$$

Les variations étant infiniment petites, les produits des perturbations d'ordre supérieur à 2 sont négligeables devant les termes d'ordre 1.

V.2.1 - Linéarisation des Equations Générales. - Equations dynamiques

Le processus de linéarisation appliqué au système d'équations précédent, permet de déduire les équations du régime statique, aussi bien que les équations dynamiques. Les premières sont :

- équations de conservation du débit entre les points 1 et 3 :

$$\bar{Q}_1 = \bar{Q}_a = \bar{Q}_s ; \quad (94)$$

- équation d'énergie entre les points 1 et 2 :

$$\bar{Q}_1 \bar{P}_1 = \frac{\mu \bar{Q}_1^2}{K_c} + \bar{Q}_1 \bar{P}_a ; \quad (95)$$

- équation d'énergie entre les points 2 et 3 :

$$\bar{Q}_1 \bar{P}_a = \frac{6 \mu \text{Ln}(\text{Re}/\text{Ri}) \bar{Q}_1^2}{\pi \bar{h}^3} \quad (96)$$

Ces équations sont les équations statiques du patin circulaire obtenues auparavant dans le chapitre II.2.

D'autre part les équations (88), (89), (90), (91) et (92) deviennent:

$$1) \quad \hat{P}_a (\bar{Q}_a - \bar{Q}_1) = \bar{P}_a \hat{Q}_1 + \bar{P}_a A_a \frac{d\hat{h}}{dt} \quad (97)$$

$$2) \quad \hat{P}_a \bar{Q}_a + \bar{P}_a \hat{Q}_a + \frac{6 \pi \mu}{\bar{h}^3} \left(\frac{d\hat{h}}{dt} \right)^2 \left\{ \frac{\text{Re}^4 - \text{Ri}^4}{4} + \frac{1}{\text{Ln}(\text{Re}/\text{Ri})} \left[\frac{-\text{Re}^4 - \text{Ri}^4}{4} + \frac{\text{Re}^2 \text{Ri}^2}{2} \right] \right\}$$

$$+ \frac{3 \bar{P}_a \bar{Q}_a \hat{h}}{\bar{h}} + \frac{\bar{P}_a \pi (\text{Re}^2 - \text{Ri}^2) d\hat{h}}{2 \text{Ln}(\text{Re}/\text{Ri}) dt} + \frac{24 \pi \mu}{\bar{h}^3} \left(\frac{d\hat{h}}{dt} \right)^2 \left\{ \frac{(\text{Re}^4 - \text{Ri}^4)}{16} - \frac{3(\text{Re}^2 - \text{Ri}^2)}{16 \text{Ln}(\text{Re}/\text{Ri})} \right\}$$

$$+ \frac{\bar{P}_a \pi \text{Ri}^2 d\hat{h}}{dt} + \frac{\bar{P}_a^2 \pi \hat{h} h^2}{\mu \text{Ln}(\text{Re}/\text{Ri})} + \frac{\bar{P}_a \hat{P}_a \pi h^3}{3 \mu \text{Ln}(\text{Re}/\text{Ri})} = 0 \quad (98)$$

$$3) \quad M \frac{d^2 \hat{h}}{dt^2} = \frac{6 \pi \mu}{\bar{h}^3} \frac{d\hat{h}}{dt} \left\{ \frac{\text{Re}^4 - \text{Ri}^4}{4} + \frac{1}{\text{Ln}(\text{Re}/\text{Ri})} \left[\frac{-\text{Re}^4 - \text{Ri}^4}{4} + \frac{\text{Re}^2 \text{Ri}^2}{2} \right] \right\}$$

$$+ \frac{\hat{P}_a \pi (\text{Re}^2 - \text{Ri}^2)}{2 \text{Ln}(\text{Re}/\text{Ri})} - \frac{A_1 \mu \hat{Q}_1}{K_c} \quad (99)$$

$$4) \quad \hat{Q}_a = \hat{Q}_1 - A_a \frac{d\hat{h}}{dt} ; \quad (100)$$

$$5) \hat{Q}_s = \hat{Q}_a - A_p \frac{d\hat{h}}{dt} \quad (101)$$

Le processus de calcul continue à l'aide des équations statiques (94), (95) et (96), des équations de conservation du débit linéarisées et de (97), il résulte de (98) l'expression de \hat{P}_a :

$$\hat{P}_a = -\frac{3\bar{P}_a}{\bar{Q}_1 \bar{h}} \hat{h} - \frac{\bar{P}_a \pi (Re^2 - Ri^2)}{2 \text{Ln}(Re/Ri)} \frac{d\hat{h}}{dt} + \frac{\bar{P}_a \hat{Q}_1}{\bar{Q}_1} \quad (102)$$

Si l'entrée de notre système est la pulsation de débit \hat{Q}_1 , pour obtenir l'équation du mouvement dynamique du patin, il faut remplacer l'expression (102) dans (99) :

$$M \frac{d^2 \hat{h}}{dt^2} + \left\{ \frac{6\pi \mu}{h^3} \left[\frac{Re^4 - Ri^4}{4} - \frac{1}{\text{Ln}(Re/Ri)} \left(\frac{Re^4 + Ri^4}{4} - \frac{Re^2 Ri^2}{2} \right) \right] + \frac{\bar{P}_a [\pi (Re^2 - Ri^2)]^2}{[2 \text{Ln}(Re/Ri)]^2} \right\} \frac{d\hat{h}}{dt} + \frac{3 \bar{P}_a \pi (Re^2 - Ri^2)}{\bar{h} 2 \text{Ln}(Re/Ri)} \hat{h} = \left[-\frac{A_1 \mu}{K_c} + \frac{\bar{P}_a \pi (Re^2 - Ri^2)}{\bar{Q}_1 2 \text{Ln}(Re/Ri)} \right] \hat{Q}_1 \quad (103)$$

L'expression (103) représente le mouvement dynamique d'un patin hydrostatique à fluide incompressible.

V.3 - CRITERES DE STABILITE

L'expression (103) nous permet d'obtenir la réponse vibratoire du patin à pour une entrée \hat{Q}_1 quelconque. Les caractéristiques principales

du mouvement libre du patin se trouvent à gauche de l'équation (103), qui représente l'équation caractéristique du système.

A partir des racines de cette équation caractéristique, on peut en déduire les critères de fonctionnement dans le régime dynamique, ainsi que la fréquence propre non amortie, le coefficient d'amortissement et les conditions de stabilité.

En utilisant les critères de Routh, il est possible de connaître les conditions pour lesquelles le patin fonctionne dans un régime dynamique stable.

Si on considère un cas plus général d'un système d'ordre n , dont le polynôme caractéristique en s (avec $s = d\hat{h}/dt$), est donné par [10] :

$$A_0 s^n + A_1 s^{n-1} + \dots + A_{n-1} s + A_n = 0$$

où les coefficients A_n sont réels; la règle de Routh impose que tous les coefficients A_n de l'équation caractéristique aient le même signe, pour qu'il y ait stabilité, c'est à dire, que les racines du polynôme caractéristique aient leur partie réelle négative. Cette condition est nécessaire mais pas suffisante pour affirmer que le système est stable, si le polynôme est d'ordre supérieur à deux.

Dans notre cas, il y a stabilité si tous les termes à gauche de l'équation (103), sont positifs; ceci est toujours vérifié pour un patin fonctionnant avec les paramètres géométriques et les conditions statiques montrées dans les figures 25 à 30.

V.4 - ANALYSE ADIMENSIONNELLE D'UN PATIN A FLUIDE INCOMPRESSIBLE

L'équation caractéristique du mouvement dynamique du patin donnée par le côté gauche de l'expression (103), est :

$$M \frac{d^2 \hat{h}}{dt^2} + \left\{ \frac{6\pi \mu}{h^3} \left[\frac{Re^4 - Ri^4}{4} - \frac{1}{\ln(Re/Ri)} \left(\frac{Re^4 + Ri^4}{4} - Re^2 Ri^2 \right) \right] + \frac{\bar{P}a}{[2 \ln(Re/Ri)]^2} \right\} d\hat{h} + \frac{3 \bar{P}a \pi (Re^2 - Ri^2)}{\bar{h} 2 \ln(Re/Ri)} \hat{h} = 0 \quad (104)$$

ou, avec la substitution de (96) dans le terme d'amortissement de (104), il résulte après simplifications :

$$M \frac{d^2 \hat{h}}{dt^2} + \left\{ \frac{\bar{P}a \pi^2}{\bar{Q}1 \ln(Re/Ri)} \left[\frac{Re^4 - Ri^4}{4} \right] \right\} d\hat{h} + \frac{3 \bar{P}a \pi (Re^2 - Ri^2)}{\bar{h} 2 \ln(Re/Ri)} \hat{h} = 0 \quad (105)$$

En définissant les trois paramètres principaux du fonctionnement du patin, de façon à faire intervenir seulement les données géométriques, la masse supportée par le patin et la viscosité du fluide on peut écrire, d'après les équations (39), (10) et (43) du fonctionnement statique :

$$\bar{P}a = \frac{2 M g \ln(Re/Ri)}{\pi (Re^2 - Ri^2)}$$

$$\bar{Q}1 = \frac{\pi D1^4 \bar{P}1 (1-\beta)}{128 \mu l} \quad (106)$$

$$\bar{h} = \left\{ [3 D1^4 A_p \bar{P}1 (1-\beta)] / (128 M g l) \right\}^{(1/3)}$$

En imposant $\beta = \bar{P}a / \bar{P}1$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, et en substituant les expressions (106) dans l'équation (105), il vient après simplifications :

$$M \frac{d^2 \hat{h}}{dt^2} + \frac{64 M g \mu l (Re^4 - Ri^4)}{D_1^4 \bar{P}_1 (1-\beta) (Re^2 - Ri^2)} \frac{d\hat{h}}{dt} + \frac{3 M g}{\bar{h}} \hat{h} = 0 \quad (107)$$

En divisant l'équation (107) par M puis en définissant les variables adimensionnelles suivantes:

$$\tilde{t} = \omega_0 t, \quad \tilde{h} = \hat{h} / \bar{h} \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}_n = \omega_n / \omega_0$$

où \tilde{t} est le temps adimensionnel, $\tilde{\omega}_n$ la fréquence propre adimensionnelle, ω_n la pulsation propre en rad/s, ω_0 la fréquence de référence, t le temps en secondes, \tilde{h} le jeu adimensionnel et \bar{h} le jeu de référence, l'équation (115) devient:

$$\omega_0^2 \frac{d^2 \tilde{h}}{d\tilde{t}^2} + \frac{64 \omega_0 g \mu l (Re^4 - Ri^4)}{D_1^4 \bar{P}_1 (1-\beta) (Re^2 - Ri^2)} \frac{d\tilde{h}}{d\tilde{t}} + \frac{3 g}{\bar{h}} \tilde{h} = 0 \quad (108)$$

nous en déduisons que:

$$\omega_n^2 = 3 g / \bar{h} \quad (109)$$

On peut conclure que l'expression de la raideur dynamique du patin est donnée par :

$$\lambda_d = 3 M g / \bar{h}$$

Si nous comparons l'équation précédente avec celle de la rigidité statique (43), nous constatons que cette dernière est $(1-\beta)$ fois inférieure à la raideur dynamique du patin.

Ici le patin est considéré comme chargé par une masse M . Dans le cas plus général où la charge est constituée d'une force constante F à

laquelle peut éventuellement participer une force extérieure N , ceci donne : $F = M g + N$.

En utilisant les équations (106), l'expression de la fréquence propre devient:

$$\omega_n^2 = 3 g / \{ [3 D_1^4 A_p \bar{P}_1 (1-\beta)] / (128 F_1) \}^{(1/3)} \quad (110)$$

La fréquence propre du patin apparait ainsi dépendre de la pression d'alimentation, de l'aire de l'alvéole et des dimensions du capillaire. Nous pouvons dire d'après (110), que ω_n diminue si P_1 , A_p et R_c augmentent; D'autre part ω_n augmente si h diminue.

En substituant (109) dans (108), avec $\tilde{\omega}_n = \omega_n / \omega_0$ et en divisant le tout par ω_0^2 il reste:

$$\frac{d^2 \tilde{h}}{d\tilde{t}^2} + \frac{64 g \mu l (Re^4 - Ri^4)}{\omega_0 D_1^4 \bar{P}_1 (1-\beta) (Re^2 - Ri^2)} \frac{d\tilde{h}}{d\tilde{t}} + \tilde{\omega}_n^2 \tilde{h} = 0 \quad (111)$$

L'équation (111) est connue dans la littérature classique sous la forme:

$$\frac{d^2 \tilde{h}}{d\tilde{t}^2} + 2 \xi_0 \tilde{\omega}_n \frac{d\tilde{h}}{d\tilde{t}} + \tilde{\omega}_n^2 \tilde{h} = 0 \quad (112)$$

où ξ_0 représente le coefficient d'amortissement du patin. Donc si nous faisons l'égalité entre les équations (111) et (112), il résulte :

$$\xi_0 = \frac{32 g \mu l (Re^4 - Ri^4)}{\tilde{\omega}_n D_1^4 \bar{P}_1 (1-\beta) (Re^2 - Ri^2)} \quad (113)$$

et , après l'introduction de (110), la forme finale devient :

$$\xi_0 = X_n [1 - (R_i/Re)^2]^{(-5/6)} \quad (114)$$

ou

$$\xi_0 = \tilde{\xi} [1 - (R_i/Re)^2]^{(-5/6)}$$

Le coefficient d'amortissement dépend des dimensions du capillaire , de la viscosité du fluide, de la largeur des lèvres et de la pression d'alimentation .

De même il est possible d'écrire pour ω_n l'expression suivante:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{X_n}} \frac{51.28}{(F/\mu)^{(1/2)}} \left\{ \frac{F l}{[D_1^4 \bar{P}_1 (1-\beta)]} \right\}^{(7/12)} \frac{\{ Re^4 - Ri^4 \}^{(1/2)}}{\{ Re^2 - Ri^2 \}^{(1/6)}} \quad (115)$$

où $\tilde{\omega}_n = 1/\sqrt{X_n}$ et X_n un nombre adimensionnel, dont l'expression est:

$$X_n = \frac{3.82 \mu \left\{ \frac{F l}{[D_1^4 \bar{P}_1 (1-\beta)]} \right\}^{(5/6)} (Re^4 - Ri^4)}{M (Re)^{(5/3)}} \quad (116)$$

La fréquence de référence est définie comme étant: $\omega_0 = \omega_n / \tilde{\omega}_n$

$$\omega_0 = \frac{51.28}{(F/\mu)^{(1/2)}} \left\{ \frac{F l}{[D_1^4 \bar{P}_1 (1-\beta)]} \right\}^{(7/12)} \frac{\{ Re^4 - Ri^4 \}^{(1/2)}}{\{ Re^2 - Ri^2 \}^{(1/6)}} \quad (117)$$

Maintenant il est possible de tracer les courbes du coefficient

d'amortissement $\tilde{\xi}$ et de la fréquence propre adimensionnelle $\tilde{\omega}_n$ en fonction du nombre sans dimension X_n ; Voir figure 39.

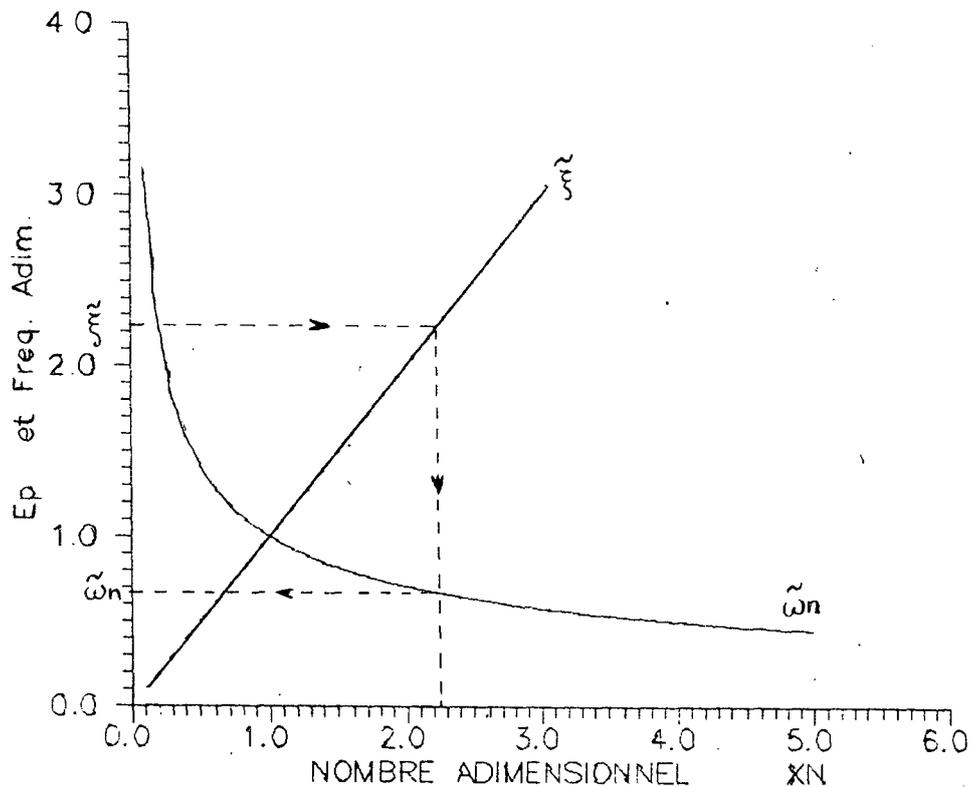


Fig. 39 - Courbes de $\tilde{\xi}$ et $\tilde{\omega}_n$ en fonction de X_n .

Pour réaliser la conception dynamique du patin pour que la réponse aux perturbations extérieures soit acceptable, il nous faut connaître la valeur du coefficient d'amortissement ξ_0 et de la fréquence propre ω_n .

Rentrons avec la valeur de $\tilde{\xi}$ obtenue de (114) pour un rapport (R_i/R_e) choisi auparavant, sur la courbe qui se trouve dans la figure 39, pour obtenir ainsi le nombre X_n . Ensuite, avec le nombre X_n nous obtenons la fréquence adimensionnelle $\tilde{\omega}_n$. Avec la valeur de ω_n choisie on fait le rapport $\omega_n / \tilde{\omega}_n$ et on substitue dans l'équation (117) de manière à déterminer les paramètres statiques de fonctionnement du patin qui satisfont les conditions dynamiques imposées.

VI - ETUDE DYNAMIQUE DE PATINS COUPLES EN OPPOSITION

Conformément à ce qui suit dans le chapitre VII, le système de pré-charge choisi fait intervenir un deuxième patin monté sur un piston mobile, comme le montre la figure 40 .

La démarche établie au chapitre V pour le calcul du comportement dynamique d'un patin isolé, est reconduite pour l'élément de pré-charge, qui sera ensuite couplé au patin principal pour donner, finalement, le comportement dynamique complet du chariot.

Pour assurer la raideur nécessaire, chaque patin de sustentation est couplé à un patin mobile placé coaxialement dans la face opposée du guidage et qui permet d'appliquer une pré-charge déterminée .

Cette configuration permet de régler la capacité de charge totale des patins principaux, et par suite, la rigidité de l'ensemble.

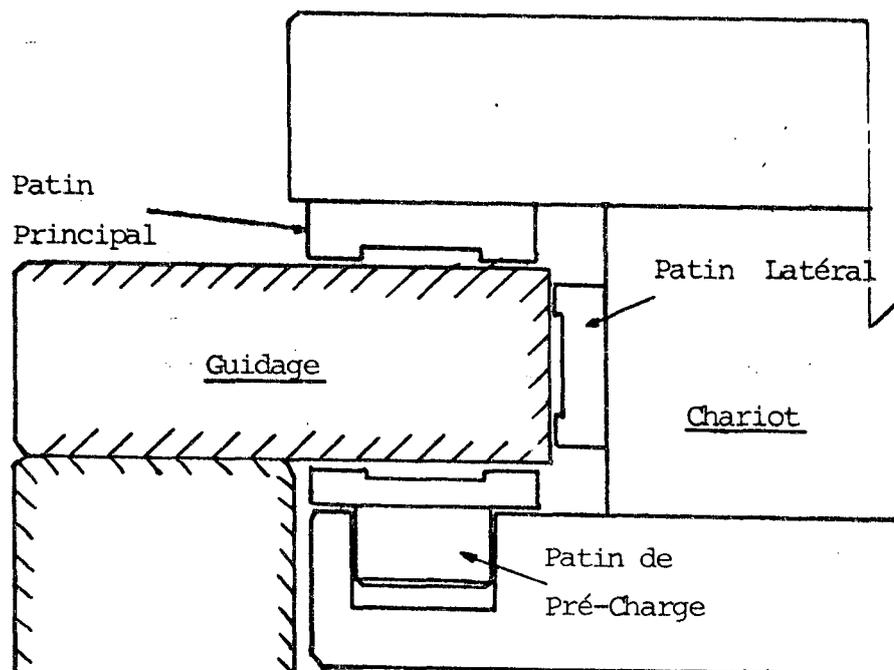


Fig. 40 - Schéma d'un patin principal avec son élément de pré-charge.

Le modèle mathématique fait appel à trois équations principales

(voir chapitre V.1.1): équation du mouvement, de conservation du débit et de l'énergie cinétique appliquées aux patins de guidage et de pré-charge.

VI.1 - FONCTIONNEMENT DE L'ELEMENT DE PRE-CHARGE

Les paramètres principaux qui sont utilisés pour décrire le fonctionnement de patins de pré-charge sont montrés sur la figure 41 .

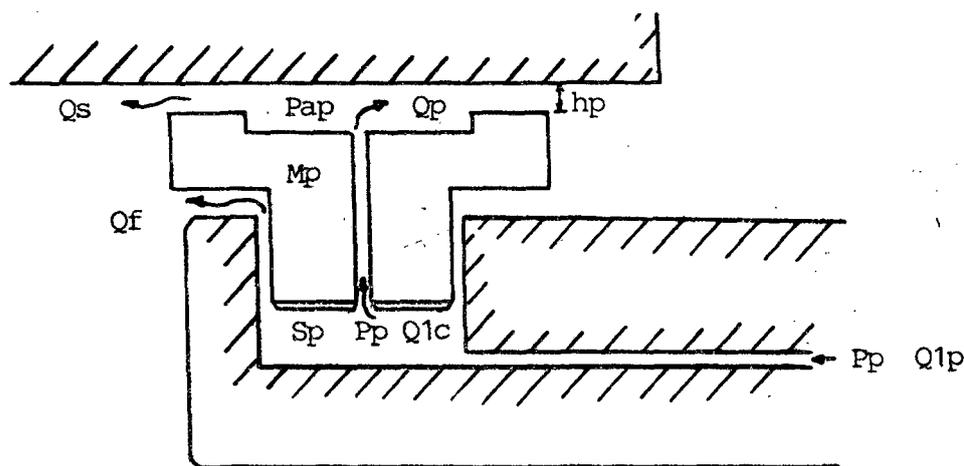


Fig. 41 - Schéma du patin de pré-charge.

- avec:
- P_p - pression principale de pré-charge
 - P_{ap} - pression dans l'alvéole
 - Q_{1p} - débit principal
 - Q_{1c} - débit d'alimentation du patin de pré-charge
 - Q_a - débit dans l'alvéole
 - Q_f - débit de fuite du palier du piston
 - Q_s - débit de sortie
 - h_p - jeu du patin de pré-charge
 - S_p - aire de la section transversale du piston
 - M_p - masse du patin de pré-charge

Une pression P_p appliquée à la tête du piston fournit la force portante supportée par le patin de pré-charge. Un équilibre statique des forces s'établit entre la portance du palier et celle fournie par le piston de telle sorte que pour une pression d'alimentation donnée la force d'appui et le jeu h_p restent constants.

L'application d'une charge supplémentaire sur le chariot, ou la variation de la force de pré-charge, induisent un changement dans la position d'équilibre du chariot avec modification du jeu des patins. Le mouvement relatif entre le patin principal et celui de pré-charge s'effectue par translation de l'alésage sur le piston.

Cette configuration permet, à la fois de changer facilement la force de pré-charge appliquée au système par simple ajustage de la pression de pré-charge, et aussi une compensation des défauts géométriques des guidages sans interférer avec le mouvement des patins principaux.

Ainsi, la précision de mouvement du chariot est liée uniquement à la planéité des surfaces sur lesquelles se déplacent les patins principaux. Le même principe de fonctionnement est utilisé pour les patins latéraux de guidage, qui servent à contrôler les mouvements de lacet du chariot pendant son déplacement.

VI.2 - EQUATIONS DU MOUVEMENT

a)- Equation du mouvement du patin de pré-charge

Les forces qui agissent sur l'élément de pré-charge sont montrées sur la figure 42.

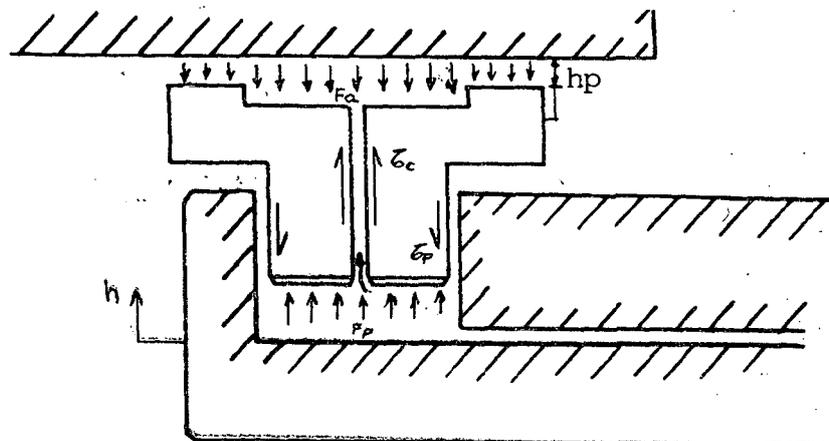


Fig. 42 = Forces agissant sur l'élément de pré-charge.

avec: F_p - la force de pré-charge appliquée à la tête du piston: $F_p = P_p S_p$

F_a - la force portante du patin (voir § V.1.2, équations (62) et (63))

τ_p - la force de frottement sur les parois du piston

τ_c - force de frottement due au passage du fluide dans le capillaire

h - déplacement subi par le patin principal solidaire du chariot

h_p - déplacement subi par le patin de pré-charge

Supposons que les dimensions des patins principaux et de pré-charge, rayon intérieur R_i et rayon extérieur R_e sont identiques.

La portance du patin de pré-charge est calculée d'après le paragraphe V.1.2, en utilisant l'équation de Reynolds avec le mouvement de la paroi, par l'équation (62) et le résultat est donné par (63) .

Dès qu'il y a une variation de la pression P_p ou un changement de la hauteur h du chariot, le patin secondaire se déplace et son mouvement dans le système d'axes absolu lié au bâti est régi par l'équation :

$$M_p \frac{d^2 h_p}{dt^2} + \tau_p = \tau_c + P_p S_p - P_a p \frac{\pi (R_e^2 - R_i^2)}{2 \ln(R_e/R_i)} + \frac{6 \pi \mu R^*}{h_p^3} \frac{dh_p}{dt} \quad (118)$$

$$\text{où } R^* = \frac{(R_e^4 - R_i^4)}{4} - \frac{(R_e^2 - R_i^2)^2}{4 \ln(R_e/R_i)} \quad (118 a)$$

b) - Équation du mouvement du chariot

Pour le patin principal fixé au chariot, le bilan des forces fait apparaître la force supplémentaire de frottement sur les lèvres des patins latéraux, figure 43.

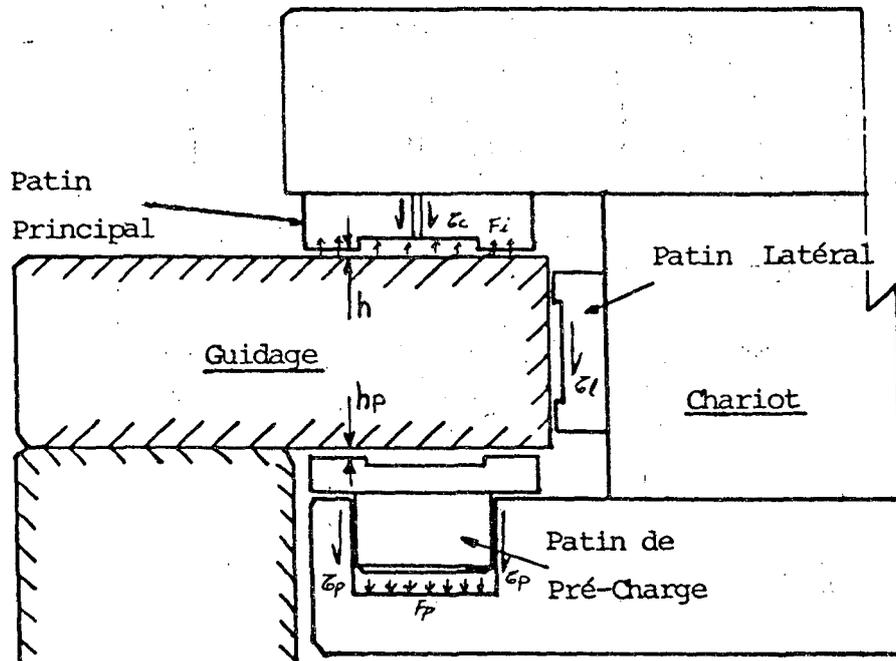


Fig. 43 - Forces agissant sur le patin principal de sustentation.

où: F_i - la force portante du patin principal (voir l'équation (63))

z_l - la force de frottement due au patin latéral

M_c - masse du chariot

Comme pour le cas précédent, l'apparition de perturbations entraîne des changements dans la position d'équilibre. L'équation du mouvement pour le patin principal est donc:

$$M_c \frac{d^2h}{dt^2} + z_l + z_c + z_p = - P_p S_p + P_{ap} \frac{\pi (R_e^2 - R_i^2)}{2 \ln(R_e/R_i)} - \frac{6 \pi \mu R^*}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad (119)$$

Les termes à droite des expressions (118) et (119), représentant les forces de pression qui contrebalancent les inerties des masses en

mouvement. Elles sont calculées à partir de l'équation de l'énergie cinétique appliquée au fluide qui s'écoule dans le système.

VI.3- EQUATION D'ENERGIE CINETIQUE APPLIQUEE AU PATIN DE PRE-CHARGE

Dans le chapitre V , l'équation générale qui régit les échanges d'énergie dans un domaine de fluide D a été donnée par :

$$\int_D \frac{\rho}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} dV + \int_S \frac{\rho}{2} u^2 U_n ds = \int \vec{\tau} \vec{\tau} \vec{u} ds - \int p U_n ds + \mathcal{P}fi \quad (120)$$

Les hypothèses alors formulées font que les termes qui se trouvent à gauche de l'équation (120) sont négligeables devant les forces de pression mises en jeu. Le premier terme à droite de (120), intervient dans l'alésage du piston par les variations de vitesse relative entre les parois; comme le jeu de l'alésage est très faible devant les autres dimensions , ce terme peut être négligé par rapport à la puissance dissipée par frottement .

Ainsi, l'équation qui décrit le bilan d'énergie dans le domaine de fluide considéré peut s'écrire sous la forme condensée:

$$\int_{Sf+Sm} p U_n ds = \mathcal{P}fi \quad (121)$$

où Sf et Sm sont, respectivement les surfaces des interfaces fluide et des parois mobiles .

Le volume de contrôle choisi pour la modélisation du patin de pré-charge est montré dans la figure 44 .

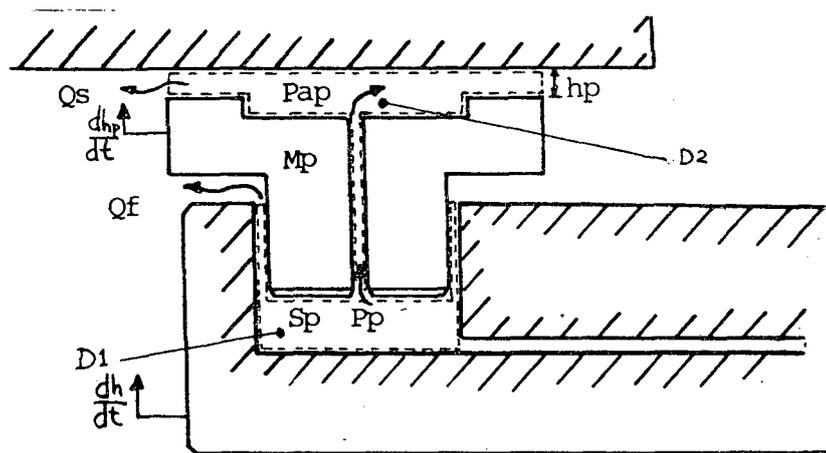


Fig. 44 - Schéma des volumes de contrôle D1 et D2.

Le domaine D1 de fluide est composé des volumes situés dans la chambre du piston et dans le jeu de l'alésage, et le domaine D2 du volume qui se trouve dans le capillaire et sous le patin.

L'application de l'équation d'énergie (121), au volume de fluide contenu en D1, nous donne :

$$P_p Q_{1p} = P_p Q_{1c} + P_p S_p \left(\frac{dh_p}{dt} - \frac{dh}{dt} \right) + P_p Q_f, \quad (122)$$

où $P_p Q_f$ est l'énergie dissipée par frottement dans l'alésage.

De même pour D2, il vient:

$$P_p Q_{1c} = \left\{ -P_{ap} A_{eq} + \frac{6 \pi \mu R^* dh_p}{hp^3} \frac{dh}{dt} + \frac{\mu Q_{1c}^2}{K_{cp}} + \frac{P_a^2 \pi hp^3}{6 \ln(R_e/R_i)} \right. \\ \left. + \frac{24 \pi \mu (dh_p)^2}{hp^3 dt} \left\{ \frac{(R_e^4 - R_i^4)}{16} - \frac{3 (R_e^2 - R_i^2)^2}{16 \ln(R_e/R_i)} \right\} \right\} \quad (123)$$

avec $A_{eq} = \frac{\pi (R_e^2 - R_i^2)}{2 \ln(R_e/R_i)}$

où les trois derniers termes de (123), représentent l'énergie dissipée dans le capillaire et les lèvres du patin respectivement .

VI.4 - EQUATIONS DE CONSERVATION DU DEBIT

Au chapitre V il a été démontré que les effets de la compressibilité du fluide sur le mouvement du patin sont négligeables , dans la plage de fréquence étudiée car les volumes capillaire et alvéolaire et les variations de pression enregistrées sont petites.

Si les dimensions des patins principaux et secondaires sont identiques, et que les paramètres de fonctionnement tels que le débit et la pression utilisés pour le patin de pré-charge sont du même ordre de grandeur que ceux du patin principal, l'influence des effets de compressibilité sur la conservation du débit seront aussi négligés pour le patin de pré-charge .

Ainsi, l'équation de conservation du débit appliquée aux volumes D1 et D2 fournit les relations suivantes:

- le débit à la sortie du patin

$$Q_s = Q_a + \pi(R_e^2 - R_i^2) \frac{dh_p}{dt};$$

- le débit alvéolaire

$$Q_a = Q_{1c} + \pi R_i^2 \frac{dh_p}{dt}; \quad (124)$$

- le débit à l'entrée du capillaire

$$Q_{1c} = Q_{1p} - Q_f - S_p \left(\frac{dh_p}{dt} - \frac{dh}{dt} \right);$$

où Q_f représente le débit de fuite dans l'alésage du piston, donné par :

$$Q_f = \frac{\pi D_p P_p e^3}{12 \mu L} ; \quad (125)$$

avec:

D_p - le diamètre du piston ,
 e - le jeu entre le piston et le cylindre ,
 L - la longueur du piston .

VI.5 - EQUATIONS LINEARISEES

En appliquant la technique de linéarisation d'écrite au chapitre V.2 aux équations (118), (122), (123), (124) et (125), nous obtenons un ensemble d'équations dynamiques qui serviront à déterminer le mouvement vibratoire de l'élément de pré-charge isolé autour de sa position d'équilibre.

D'abord pour l'équation (118) qui régit le mouvement vibratoire du patin de pré-charge, il vient:

$$M_p \frac{d^2 \hat{h}_p}{dt^2} + \hat{z}_p = \hat{z}_c + \hat{P}_p S_p - \frac{\hat{P}_{ap} \pi (R_e^2 - R_i^2)}{2 \ln(R_e/R_i)} + \frac{6 \pi \mu R^*}{h_p^3} \frac{d\hat{h}_p}{dt} \quad (126)$$

Des équations (122) et (123), il résulte après avoir négligé les termes d'ordre supérieur à deux et avec les simplifications :

$$\hat{P}_p (\hat{Q}_{ip} - \hat{Q}_f) = \bar{P}_p \hat{Q}_{ic} - \bar{P}_p \hat{Q}_{ip} + \bar{P}_p \hat{Q}_f + \bar{P}_p S_p \left(\frac{d\hat{h}_p}{dt} - \frac{d\hat{h}}{dt} \right) + \bar{P}_p \hat{Q}_{ic} , \quad (127)$$

$$\hat{P}_p \bar{Q}_{1c} = -\bar{P}_p \hat{Q}_{1c} - P_{ap} A_{eq} \frac{d\hat{h}_p}{dt} + \frac{2\mu \bar{Q}_{1c} \hat{Q}_{1c}}{K_{cp}} + \frac{12 \text{Ln}(Re/Ri) \bar{Q}_s \hat{Q}_s}{\pi \bar{h}_p^3} - \frac{3 \bar{P}_{ap} \bar{Q}_{1c} \hat{h}_p}{\bar{h}_p} \quad (128)$$

Les perturbations de débit s'expriment avec les équations de conservation du débit (124) et (125) :

$$\hat{Q}_s = \hat{Q}_a + \pi(Re^2 - Ri^2) \frac{d\hat{h}_p}{dt} \quad (129)$$

$$\hat{Q}_a = \hat{Q}_{1c} + \pi Ri^2 \frac{d\hat{h}_p}{dt}$$

$$\hat{Q}_{1c} = \hat{Q}_{1p} - \hat{Q}_f + Sp \left(\frac{d\hat{h}_p}{dt} - \frac{d\hat{h}}{dt} \right)$$

$$\hat{Q}_f = \frac{\pi D_p \hat{P}_p e^3}{12 \mu L}$$

avec les expressions en régime stationnaire suivantes:

$$\bar{Q}_s = \bar{Q}_a = \bar{Q}_{1c}$$

et

$$\bar{Q}_{1c} = \bar{Q}_{1p} - \bar{Q}_f \quad , \quad \text{avec} \quad \bar{Q}_f = \frac{\pi D_p e^3 \bar{P}_p}{12 \mu L} \quad (130)$$

Pour résoudre l'équation (126), il faut connaître l'expression de la pression \hat{P}_p . Pour cela si on remplace l'équation (128) dans (127), il vient:

$$\begin{aligned} \hat{P}_p(\bar{Q}_{1p} - \bar{Q}_f) = & -\bar{P}_p \hat{Q}_{1p} + \bar{P}_p \hat{Q}_f + \bar{P}_p S_p \left(\frac{d\hat{h}_p}{dt} - \frac{d\hat{h}}{dt} \right) - \bar{P}_{ap} A_{eq} \frac{d\hat{h}_p}{dt} + \frac{2 \mu \bar{Q}_{1c} \hat{Q}_{1c}}{K_{cp}} \\ & + \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) \bar{Q}_s \hat{Q}_s}{\pi \bar{h}_p^3} + \frac{3 \bar{P}_{ap} \bar{Q}_{1c} \hat{h}_p}{\bar{h}_p}; \quad (131) \end{aligned}$$

ou, en exprimant les perturbations des débits à l'aide des expressions linéarisées (129) :

$$\begin{aligned} \hat{P}_p(\bar{Q}_{1p} - \bar{Q}_f) = & -\bar{P}_p \hat{Q}_{1p} + \bar{P}_p \left(\frac{\pi D_p \hat{P}_p e^3}{12 \mu L} \right) + \bar{P}_p S_p \left(\frac{d\hat{h}_p}{dt} - \frac{d\hat{h}}{dt} \right) - \bar{P}_{ap} A_{eq} \frac{d\hat{h}_p}{dt} \\ & + \frac{2 \mu \bar{Q}_{1c} \{ \hat{Q}_{1p} - \hat{Q}_f - S_p \left(\frac{d\hat{h}_p}{dt} - \frac{d\hat{h}}{dt} \right) \}}{K_{cp}} + \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) \bar{Q}_s \{ \hat{Q}_a + \pi(Re^2 - Ri^2) \frac{d\hat{h}_p}{dt} \}}{\pi \bar{h}_p^3} \\ & + \frac{3 \bar{P}_{ap} \bar{Q}_{1c} \hat{h}_p}{\bar{h}_p}. \quad (132) \end{aligned}$$

Les débits permanents qui interviennent dans (132), peuvent ensuite, être ramenés au débit d'alimentation du capillaire \bar{Q}_{1c} , en utilisant les égalités (130).

Ainsi, l'expression finale de la pression \hat{P}_p , en fonction des perturbations \hat{h} , \hat{h}_p et \hat{Q}_{1p} des jeux des patins et du débit d'alimentation, est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{P}_p \left\{ 1 - \left[\frac{\bar{Q}_f}{\bar{Q}_{1c}} - \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri)}{\pi \bar{h}_p^3} + \frac{2 \mu}{K_{cp}} \right] \frac{\pi D_p e^3}{12 \mu L} \right\} = & \left[\frac{\bar{P}_p}{\bar{Q}_{1c}} + \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri)}{\pi \bar{h}_p^3} + \frac{2 \mu}{K_{cp}} \right] \hat{Q}_{1p} \\ & + \frac{3 \bar{P}_{ap} \hat{h}_p}{\bar{h}_p} + \left[\frac{\bar{P}_p S_p}{\bar{Q}_{1c}} - \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) S_p}{\pi \bar{h}_p^3} - \frac{2 \mu S_p}{K_{cp}} \right] \left(\frac{d\hat{h}_p}{dt} - \frac{d\hat{h}}{dt} \right) \\ & + \left[\frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) A_T}{\pi \bar{h}_p^3} - \frac{\bar{P}_{ap} A_{eq}}{\bar{Q}_{1c}} \right] \frac{d\hat{h}_p}{dt}; \quad (133) \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \hat{P}_p = \frac{1}{\chi_f} \left\{ \left[\frac{\bar{P}_p}{\bar{Q}_{1c}} + \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri)}{\pi \bar{h}_p^3} + \frac{2 \mu}{K_{cp}} \right] \hat{Q}_{1p} + \frac{3 \bar{P}_{ap} \hat{h}_p}{\bar{h}_p} \right. \\ \left. + \left[\frac{\bar{P}_p S_p}{\bar{Q}_{1c}} - \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) S_p}{\pi \bar{h}_p^3} - \frac{2 \mu S_p}{K_{cp}} \right] \left(\frac{d\hat{h}_p}{dt} - \frac{d\hat{h}}{dt} \right) \right. \\ \left. + \left[\frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) A_T}{\pi \bar{h}_p^3} - \frac{\bar{P}_{ap} A_{eq}}{\bar{Q}_{1c}} \right] \frac{d\hat{h}_p}{dt} \right\} ; \end{aligned} \quad (134)$$

avec,

$$\chi_f = \left\{ 1 - \left[\frac{\bar{Q}_f}{\bar{Q}_{1c}} - \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri)}{\pi \bar{h}_p^3} + \frac{2 \mu}{K_{cp}} \right] \frac{\pi D_p e^3}{12 \mu L} \right\}.$$

D'autre part l'équation (126) fait intervenir la valeur de la pression \hat{P}_{ap} dans l'alvéole du patin secondaire. En appliquant l'équation (121) au domaine de fluide situé sous le patin on trouve:

$$\hat{P}_{ap} \bar{Q}_{1c} = - \frac{6 \mu \pi R^*}{h_p^3} \left\{ \frac{d\hat{h}_p}{dt} \right\}^2 + \hat{P}_{ap} A_{eq} \frac{d\hat{h}_p}{dt} + \frac{6 \mu \text{Ln}(Re/Ri) \bar{Q}_s^2}{\pi h_p^3} \quad (135)$$

Après linéarisation de l'expression (135), et en substituant les expressions des débits données par (129) et (130) on a:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{ap} = \left\{ \left[\frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri)}{\pi \bar{h}_p^3} - \frac{\bar{P}_{ap}}{\bar{Q}_{1c}} \right] \hat{Q}_{1p} + \frac{3 \bar{P}_{ap} \hat{h}_p}{\bar{h}_p} \right. \\ \left. + \left[\frac{\bar{P}_{ap} S_p}{\bar{Q}_{1c}} - \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) S_p}{\pi \bar{h}_p^3} \right] \left(\frac{d\hat{h}_p}{dt} - \frac{d\hat{h}}{dt} \right) + \left[\frac{\bar{P}_{ap}}{\bar{Q}_{1c}} - \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri)}{\pi \bar{h}_p^3} \right] \left(\frac{\pi D_p e^3}{12 \mu L} \right) \hat{P}_p \right. \\ \left. + \left[\frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) A_T}{\pi \bar{h}_p^3} - \frac{\bar{P}_{ap} A_{eq}}{\bar{Q}_{1c}} \right] \frac{d\hat{h}_p}{dt} \right\} . \end{aligned} \quad (136)$$

La contrainte de frottement τ_p exercée par le fluide sur la paroi du piston est déduite de l'expression de la vitesse du fluide qui s'écoule dans le jeu de l'alésage, donnée par :

$$u_e = \frac{P_p}{2 \mu L} (x^2 - x e) + \frac{x}{e} \left(\frac{dh_p}{dt} - \frac{dh}{dt} \right) ;$$

pour $x = e$, il vient:

$$\tau_e = \mu \left(\frac{du_e}{dx} \right) = \frac{P_p e}{2 L} + \frac{\mu}{e} \left(\frac{dh_p}{dt} - \frac{dh}{dt} \right) .$$

La force τ_p est : $\tau_p = \pi D_p L \tau_e$

$$\text{et ,} \quad \tau_p = \frac{\pi D_p P_p e}{2} + \frac{\pi D_p L \mu}{e} \left(\frac{dh_p}{dt} - \frac{dh}{dt} \right) ; \quad (137)$$

$$\text{soit ,} \quad \hat{\tau}_p = \frac{\pi D_p \hat{P}_p e}{2} + \frac{\pi D_p L \mu}{e} \left(\frac{d\hat{h}_p}{dt} - \frac{d\hat{h}}{dt} \right) ; \quad (138)$$

La force τ_c qui agit dans le capillaire est donné par :

$$\tau_c = (P_p - P_{ap}) \pi R_c^2 ;$$

$$\text{d'où :} \quad \hat{\tau}_c = (\hat{P}_p - \hat{P}_{ap}) \pi R_c^2 \quad (139)$$

VI.6 - EQUATION DU MOUVEMENT DE L'ELEMENT DE PRE-CHARGE

En reprenant l'équation (126) du mouvement dynamique du patin de pré-charge et en substituant les valeurs de \hat{z}_p et \hat{z}_c données respectivement par les équations (138) et (139), il résulte:

$$M_p \frac{d^2 \hat{h}_p}{dt^2} + \frac{\pi D_p L}{e} \mu \left(\frac{d \hat{h}_p}{dt} - \frac{d \hat{h}}{dt} \right) = \hat{P}_p (S_p - \frac{\pi D_p e}{2} + \pi R_c^2) - \hat{P}_{ap} (A_{eq} - \pi R_c^2) + \frac{6 \mu \pi R^*}{h_p^3} \frac{d \hat{h}_p}{dt} \quad (140)$$

Etant donné que les valeurs de e et R_c sont très petites devant les autres dimensions considérées, nous pouvons les négliger devant les surfaces du piston et du patin, ce qui nous conduit à :

$$M_p \frac{d^2 \hat{h}_p}{dt^2} + \frac{\pi D_p L}{e} \mu \left(\frac{d \hat{h}_p}{dt} - \frac{d \hat{h}}{dt} \right) = \hat{P}_p S_p - \hat{P}_{ap} A_{eq} + \frac{6 \mu \pi R^*}{h_p^3} \frac{d \hat{h}_p}{dt} \quad (141)$$

Puis en remplaçant l'expression (136) de \hat{P}_{ap} dans (141) :

$$M_p \frac{d^2 \hat{h}_p}{dt^2} + \frac{\pi D_p L}{e} \mu \left(\frac{d \hat{h}_p}{dt} - \frac{d \hat{h}}{dt} \right) = \hat{P}_p S_p - A_{eq} \left\{ \left[\frac{12 \mu \ln(R_e/R_i)}{\pi \bar{h}_p^3} - \bar{P}_{ap} \right] \bar{Q}_{1p} + \left[\bar{P}_{ap} S_p - \frac{12 \mu \ln(R_e/R_i) S_p}{\pi \bar{h}_p^3} \right] \left(\frac{d \hat{h}_p}{dt} - \frac{d \hat{h}}{dt} \right) + \left[\bar{P}_{ap} - \frac{12 \mu \ln(R_e/R_i)}{\pi \bar{h}_p^3} \right] \left(\frac{\pi D_p e^3}{12 \mu L} \right) \right\} \hat{P}_p + \frac{3 \bar{P}_{ap} \hat{h}_p}{\bar{h}_p} + \left[\frac{12 \mu \ln(R_e/R_i) A_T}{\pi \bar{h}_p^3} - \frac{\bar{P}_{ap} A_{eq}}{\bar{Q}_{1c}} \right] \frac{d \hat{h}_p}{dt} + \frac{6 \mu \pi R^*}{h_p^3} \frac{d \hat{h}_p}{dt} \quad (142)$$

Par la suite on rassemble les termes en \hat{P}_p de l'équation (142), et on remplace sa valeur par l'expression (134), il vient:

$$\begin{aligned}
 M_p \frac{d^2 \hat{h}_p}{dt^2} + \frac{\pi D_p L \mu (d\hat{h}_p - d\hat{h})}{e dt dt} &= S \left\{ \left[\frac{\bar{P}_p}{\chi_f \bar{Q}_{1c}} + \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri)}{\pi \bar{h}_p^3} + \frac{2 \mu}{K_{cp}} \right] \hat{Q}_{1p} + \frac{3 \bar{P}_{ap} \hat{h}_p}{\bar{h}_p} \right. \\
 &+ \left. \left[\frac{\bar{P}_p S_p}{\bar{Q}_{1c}} - \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) S_p}{\pi \bar{h}_p^3} - \frac{2 \mu S_p}{K_{cp}} \right] \frac{(d\hat{h}_p - d\hat{h})}{dt dt} + \left[\frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) A_T}{\pi \bar{h}_p^3} - \frac{\bar{P}_{ap} A_{eq}}{\bar{Q}_{1c}} \right] \frac{d\hat{h}_p}{dt} \right\} \\
 &- A_{eq} \left\{ \left[\frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri)}{\pi \bar{h}_p^3} - \frac{\bar{P}_{ap}}{\bar{Q}_{1c}} \right] \hat{Q}_{1p} + \left[\frac{\bar{P}_{ap} S_p}{\bar{Q}_{1c}} - \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) S_p}{\pi \bar{h}_p^3} \right] \frac{(d\hat{h}_p - d\hat{h})}{dt dt} \right. \\
 &+ \left. \frac{3 \bar{P}_{ap} \hat{h}_p}{\bar{h}_p} + \left[\frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) A_T}{\pi \bar{h}_p^3} - \frac{\bar{P}_{ap} A_{eq}}{\bar{Q}_{1c}} \right] \frac{d\hat{h}_p}{dt} \right\} + \frac{6 \mu \pi R^*}{h_p^3} \frac{d\hat{h}_p}{dt} \quad (143)
 \end{aligned}$$

$$\text{avec: } S = \left\{ S_p - \frac{[\bar{P}_{ap} A_{eq} - \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) A_{eq}}{\pi \bar{h}_p^3}] (\pi D_p e^3)}{12 \mu L} \right\}$$

La forme finale de l'expression linéarisée du mouvement dynamique du patin de pré-charge isolé est donc:

$$\begin{aligned}
 M_p \frac{d^2 \hat{h}_p}{dt^2} + \left\{ \frac{6 \mu \pi R^*}{h_p^3} + \frac{[12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) A_T - \bar{P}_{ap} A_{eq}] (A_{eq} - S)}{\pi \bar{h}_p^3 \bar{Q}_{1c}} \right\} \frac{d\hat{h}_p}{dt} + \\
 \left\{ A_{eq} \left[\frac{\bar{P}_{ap} S_p}{\bar{Q}_{1c}} - \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) S_p}{\pi \bar{h}_p^3} \right] S_p - \frac{S}{\chi_f \bar{Q}_{1c}} \left[\frac{\bar{P}_p S_p}{\bar{Q}_{1c}} - \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) S_p}{\pi \bar{h}_p^3} - \frac{2 \mu S_p}{K_{cp}} \right] \right\} \frac{(d\hat{h}_p - d\hat{h})}{dt dt} \\
 + \frac{3 \bar{P}_{ap} (A_{eq} - S) \hat{h}_p}{\bar{h}_p \chi_f} = \left\{ A_{eq} \left[\frac{\bar{P}_{ap}}{\bar{Q}_{1c}} - \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri)}{\pi \bar{h}_p^3} \right] + \right. \\
 \left. \frac{S}{\chi_f \bar{Q}_{1c}} \left[\frac{\bar{P}_p}{\bar{Q}_{1c}} + \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri)}{\pi \bar{h}_p^3} + \frac{2 \mu}{K_{cp}} \right] \right\} \hat{Q}_{1p} \quad (144)
 \end{aligned}$$

VI.7 - ENSEMBLE DES FORCES AGISSANT SUR LE PATIN PRINCIPAL

D'après la figure 43, la plupart des forces qui interviennent dans le mouvement du patin principal, défini par l'équation (119), ont été déjà obtenues aux paragraphes précédents, puisque ces mêmes forces agissent aussi sur l'élément de pré-charge.

Il nous reste donc à déterminer seulement la force de frottement τ_L , due aux patins latéraux de guidage.

Pour ce calcul on suppose que le patin latéral suit le même mouvement que le patin principal, dont la vitesse est dh/dt . Si la force de frottement agit surtout sur la lèvre du patin, la répartition de vitesse dans le jeu est donnée par :

$$u_1 = \frac{z}{hl} \frac{dh}{dt}$$

où : u_1 désigne la vitesse du fluide sous la lèvre du patin ;
 hl , le jeu du patin latéral .

La contrainte de cisaillement est:

$$\tau_{l(z)} = \mu \frac{du_1}{dz}$$

Pour $z = 0$ il résulte:

$$\tau_{l(z=0)} = \mu \frac{dh}{hl dt}$$

et la force de frottement sur toute la surface de la lèvre est:

$$\tau_1 = \pi(R_e^2 - R_i^2) \frac{\mu}{h_1} \frac{dh}{dt} ;$$

soit, sous la forme linéarisée:

$$\hat{\tau}_1 = \frac{A_p \mu}{\bar{h}_1} \frac{d\hat{h}}{dt} \quad (145)$$

L'expression de la portance F_i du patin, d'après le chapitre V et (118 a), est:

$$F_i = P_a A_{eq} - \frac{6 \mu \pi R^*}{h^3} \frac{dh}{dt}$$

de même, la valeur de \hat{P}_a est :

$$\hat{P}_a = \frac{[12\mu \ln(R_e/R_i) - \bar{P}_a] \hat{Q}_1}{\pi \bar{h}^3} + \frac{[\bar{P}_a A_{eq} - \frac{12\mu \ln(R_e/R_i) A T}{\pi \bar{h}^3}] d\hat{h}}{\bar{h}} - \frac{3 \bar{P}_a \hat{h}}{\bar{h}} \quad (146)$$

Le processus d'obtention de l'équation du mouvement linéarisée pour le patin principal est similaire à celui de l'élément de pré-charge (voir § VI.6). Linéarisons d'abord l'équation (119), pour obtenir:

$$M_c \frac{d^2 \hat{h}}{dt^2} + \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_p = \hat{P}_a A_{eq} - \hat{P}_p S_p - \frac{6 \mu \pi R^*}{\bar{h}^3} \frac{d\hat{h}}{dt} \quad (147)$$

ensuite, remplaçons les expressions correspondantes de $\hat{\tau}_1$, $\hat{\tau}_p$, \hat{P}_a et \hat{P}_p , données respectivement par (145), (138), (146) et (134), dans (147). Le résultat, après regroupement est:

$$\begin{aligned}
& Mc \frac{d^2 \hat{h}}{dt^2} + \left\{ \frac{\mu A_p}{\bar{h}_1} - \frac{6 \mu \pi R^*}{\bar{h}^3} - Aeq \left[\frac{\bar{P}_a Aeq}{\bar{Q}_1} - \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) AT}{\pi \bar{h}^3} \right] \right\} \frac{d \hat{h}}{dt} + \frac{3 \bar{P}_a Aeq \hat{h}}{\bar{h}} \\
& + \left\{ \frac{\pi D_p L \mu}{e} - \frac{S_p}{X_f} \left[\frac{\bar{P}_p S_p}{\bar{Q}_{1c}} - \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) S_p}{\pi \bar{h}_p^3} - \frac{2 \mu S_p}{K_{cp}} \right] \right\} \left(\frac{d \hat{h}_p}{dt} - \frac{d \hat{h}}{dt} \right) + \frac{3 \bar{P}_p S_p \hat{h}_p}{\bar{h}_p X_f} \\
& + \frac{S_p}{X_f} \left[\frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) AT}{\pi \bar{h}_p^3} - \frac{\bar{P}_p Aeq}{\bar{Q}_{1c}} \right] \frac{d \hat{h}_p}{dt} =
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri) Aeq}{\pi \bar{h}^3} - \frac{\bar{P}_a Aeq}{\bar{Q}_1} \right] \hat{Q}_1 - \frac{S_p}{X_f} \left[\frac{\bar{P}_p}{\bar{Q}_{1c}} + \frac{12 \mu \text{Ln}(Re/Ri)}{\pi \bar{h}_p^3} + \frac{2 \mu}{K_{cp}} \right] \hat{Q}_1_p \quad (148)$$

Les expressions (148) et (144), décrivent respectivement le fonctionnement dynamique du patin principal et de pré-charge isolés. Ces mêmes équations peuvent encore être écrites sous la forme:

-patin principal

$$\frac{d^2 \hat{h}}{dt^2} = - \frac{\alpha_1}{Mc} \frac{d \hat{h}}{dt} - \frac{\alpha_2}{Mc} \hat{h} - \frac{\alpha_3}{Mc} \frac{d \hat{h}_p}{dt} - \frac{\alpha_4}{Mc} \hat{h}_p + \frac{\alpha_5}{Mc} \hat{Q}_1 ; \quad (149)$$

-patin de pré-charge

$$\frac{d^2 \hat{h}_p}{dt^2} = - \frac{\beta_1}{M_p} \frac{d \hat{h}_p}{dt} - \frac{\beta_2}{M_p} \hat{h}_p - \frac{\beta_3}{M_p} \frac{d \hat{h}}{dt} - \frac{\beta_4}{M_p} \hat{h} + \frac{\beta_5}{M_p} \hat{Q}_1 ; \quad (150)$$

d'où : α_1 - coefficient de frottement du patin principal ;
 α_2 - raideur hydraulique du patin principal ;
 β_1 - coefficient de frottement du patin de pré-charge ;
 β_2 - raideur hydraulique du patin de pré-charge ;
 α_3, β_3 - coefficients de frottement du couplage ;

α_4, β_4 - raideurs de couplage ;
 α_5 et β_5 - gains du système ;

avec:

$$\alpha_1 = \left\{ \frac{\mu A_p}{\bar{h}l} - \frac{\pi D_p L \mu}{e} - A_{eq} \left[\frac{\bar{P}_a A_{eq}}{\bar{Q}_1} - \frac{12 \mu \ln(Re/Ri) AT}{\pi \bar{h}^3} \right] - \frac{6 \mu \pi R^*}{\bar{h}^3} \right\} \\ - \left\{ \frac{S_p [\bar{P}_p S_p - 12 \mu \ln(Re/Ri) S_p - 2 \mu S_p]}{X_f \bar{Q}_{1c}} - \frac{2 \mu S_p}{K_{cp}} \right\} ;$$

$$\alpha_2 = \frac{3 \bar{P}_a A_{eq}}{\bar{h}} ;$$

$$\alpha_3 = \frac{S_p}{X_f} \left\{ \frac{12 \mu \ln(Re/Ri) [AT - S_p]}{\pi \bar{h} p^3} + \frac{\bar{P}_p S_p}{\bar{Q}_{1c}} - \frac{\bar{P}_a p A_{eq} - 2 \mu S_p}{\bar{Q}_{1c} K_{cp}} \right\} - \frac{\pi D_p L \mu}{e} ;$$

$$\alpha_4 = \frac{3 \bar{P}_a p S_p}{\bar{h} p X_f} ;$$

$$\alpha_5 = \left[\frac{12 \mu \ln(Re/Ri) A_{eq} - \bar{P}_a A_{eq}}{\pi \bar{h}^3} - \frac{S_p [\bar{P}_p + 12 \mu \ln(Re/Ri) + 2 \mu]}{X_f \bar{Q}_{1c}} \right] - \frac{2 \mu S_p}{K_{cp}} ;$$

$$\beta_1 = \frac{12 \mu \ln(Re/Ri) \{ AT A_{eq} - AT \frac{S}{X_f} - S_p A_{eq} + S_p \frac{S}{X_f} \}}{\pi \bar{h}^3} + \frac{\bar{P}_a p A_{eq} \{ S - A_{eq} + S_p \}}{\bar{Q}_{1c} X_f} \\ + \frac{6 \mu \pi R^*}{\bar{h} p^3} - \frac{\bar{P}_p S_p S}{\bar{Q}_{1c} X_f} + \frac{2 \mu S_p S}{K_{cp} X_f} ;$$

$$\beta_2 = \frac{3 \bar{P}_a p (A_{eq} - S)}{\bar{h} X_f} ;$$

$$\beta_3 = \left\{ \frac{12 \mu \ln(Re/Ri) Sp [Aeq - S]}{\pi \bar{h} p^3 X_f} - \frac{\bar{P}ap Aeq Sp}{\bar{Q}_{1c}} + \frac{Pp Sp S}{\bar{Q}_{1c} X_f} - \frac{2 \mu Sp S}{Kcp X_f} \right\};$$

$$\beta_4 = 0;$$

$$\beta_5 = \left\{ \frac{Aeq [\bar{P}ap - 12 \mu \ln(Re/Ri)]}{\bar{Q}_{1c} \pi \bar{h} p^3} + \frac{S [\bar{P}p + 12 \mu \ln(Re/Ri) + \frac{2 \mu}{Kcp}]}{X_f \bar{Q}_{1c} \pi \bar{h} p^3} \right\};$$

VI.8 - ETUDE DE LA STABILITE DU PATIN COUPLE

Les équations (149) et (150), qui décrivent le mouvement des patins principal et secondaire peuvent être mises sous une forme plus condensée comme suit:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -A_c \dot{x}_1 - B_c x_1 - D_c \dot{x}_2 - C_c x_2 + E_c Q_1; \\ \ddot{x}_2 &= -A_p \dot{x}_2 - B_p x_2 - D_p \dot{x}_1 - C_p x_1 + E_p Q_1; \end{aligned} \tag{151}$$

$$\text{où: } \ddot{x}_1 = \frac{d^2 \hat{h}}{dt^2}, \quad \dot{x}_1 = \frac{d \hat{h}}{dt}, \quad x_1 = \hat{h};$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{d^2 \hat{h}_p}{dt^2}, \quad \dot{x}_2 = \frac{d \hat{h}_p}{dt}, \quad x_2 = \hat{h}_p;$$

$$A_c = \frac{\alpha_1}{M_c}, \quad B_c = \frac{\alpha_2}{M_c}, \quad D_c = \frac{\alpha_3}{M_c}, \quad C_c = \frac{\alpha_4}{M_c}, \quad E_c = \frac{\alpha_5}{M_c}, \tag{152}$$

$$A_p = \frac{\beta_1}{M_p}, \quad B_p = \frac{\beta_2}{M_p}, \quad D_p = \frac{\beta_3}{M_p}, \quad C_p = \frac{\beta_4}{M_p}, \quad E_p = \frac{\beta_5}{M_p};$$

L'étude de la stabilité sera effectuée par les équations d'Etat, dont le système d'équations s'écrit sous la forme générale, Ogatta [10]:

$$\dot{y} = [A] y + [B] Q_1(t) \quad (153)$$

avec [A] la matrice d'état du système
[B] matrice contenant les coefficients de l'entrée du système

Les éléments qui composent la matrice [A] constituent les variables d'état, définies par:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ \dot{y}_1 &= \dot{x}_1 = y_2, \\ y_2 &= \dot{x}_1, \\ \dot{y}_2 &= \ddot{x}_1, \\ y_3 &= x_2, \\ \dot{y}_3 &= \dot{x}_2 = y_4, \\ \dot{y}_4 &= \ddot{x}_2, \end{aligned}$$

En les substituant dans les équations (151) et (152), le système d'Etat devient :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -B_c y_1 - A_c y_2 - C_c y_3 - D_c y_4 + E_c Q_1, \\ \dot{y}_3 &= y_4, \\ \dot{y}_4 &= -C_p y_1 - D_p y_2 - B_p y_3 - A_p y_4 + E_p Q_1, \end{aligned}$$

ou sous la forme matricielle il résulte:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -Bc & -Ac & -Cc & -Dc \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -Dp & -Bp & -Ap \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Ec \\ 0 \\ Ep \end{bmatrix} Q_1$$

Les valeurs propres λ de la matrice $[A]$, sont les racines de l'équation :

$$\det |\lambda I - A| = 0$$

dont le polynôme caractéristique est :

$$Z_1 \lambda^4 + Z_2 \lambda^3 + Z_3 \lambda^2 + Z_4 \lambda + Z_5 = 0 \quad (154)$$

Etant donné que ces valeurs pourront être réelles ou complexes, les critères de Routh (voir § V.3), imposent que pour que le système soit stable, il faut que la partie réelle des valeurs propres soit négative.

Pour satisfaire cette condition il est nécessaire que les coefficients Z_1 à Z_5 de (154), aient le même signe, autrement dit :

- $(Ac + Ap) > 0$
- $(Ac Ap - Dc Dp + Bc + Bp) > 0$ (155)
- $(Ac Bp + Bc Ap - Cc Dp) > 0$
- $(Bc Bp) > 0$

Toutefois cette condition n'est pas suffisante puisque, même si

tous les coefficients de l'équation caractéristique sont positifs, on ne peut pas affirmer que le système est stable. D'où la nécessité de compléter les équations (155), par les deux expressions suivantes:

$$E = \{(Ac + Ap)(Ac Ap + Bc + Bp - Dc Dp) - (Ac Bp + Bc Ap - Cc Dp)\} > 0$$

$$\{(Ac Bp + Bc Ap - Cc Dp) E - (Ac Bc Bp + Bc Ap Bp)\} > 0$$
(156)

L'étude de la stabilité pour le patin principal isolé a été effectuée au chapitre V.3. Une étude similaire en appliquant les critères de Routh pour le patin de pré-charge nous permet de conclure que celui-ci est aussi stable. En effet, l'amortissement est plus élevé, puisque la force de frottement entre le piston et l'alésage qui s'ajoute à celle du patin.

Ceci veut dire que pour une condition de fonctionnement donnée, si on remarque l'existence d'instabilités sur le chariot, celles ci ne peuvent provenir que des éléments de couplage.

VI.9 - REPONSE DYNAMIQUE DES PATINS EN OPPOSITION

Le comportement vibratoire du système couplé entre le patin principal et de pré-charge a été étudié à partir d'une matrice de transfert obtenue en utilisant les matrices [A] et [B] de (153), sous la forme [10]:

$$G(s) = C (SI - A)^{-1} B$$
(157)

où $G(s)$ = est la matrice de transfert du système couplé ,
 \vec{C} = vecteur de sortie ,
 I = matrice identité ,

A - matrice d'Etat du système ,
 B - matrice d'entrée .

Ainsi d'après (157), la fonction de transfert correspondant au patin principal de guidage s'écrit:

$$G_c = \frac{s^2 + s (A_p E_c - D_c E_p) + (B_p E_c + C_c E_p)}{s^4 + s^3(A_c + A_p) + s^2(A_c A_p - D_c D_p + B_c + B_p) + s(A_c B_p - C_c D_p + B_c A_p) + B_c B_p} \quad (158)$$

De même pour le patin de pré-charge, il vient:

$$G_p = \frac{s^2 E_p + s(A_c E_p - D_p E_c) + (B_c E_p)}{s^4 + s^3(A_c + A_p) + s^2(A_c A_p - D_c D_p + B_c + B_p) + s(A_c B_p - C_c D_p + B_c A_p) + B_c B_p} \quad (159)$$

La réponse dynamique dans le domaine fréquentiel avec une entrée harmonique pour le débit a été faite autour d'un point caractéristique de fonctionnement, dont les principaux paramètres sont:

$$\begin{aligned} P_1 &= 80. \times 10^5 \text{ N/m}^2 \\ R_e &= 13. \times 10^{-3} \text{ m} \\ R_i &= 9. \times 10^{-3} \text{ m} \\ R_c &= 2. \times 10^{-4} \text{ m} \\ L_c &= 4. \times 10^{-1} \text{ m} \\ R_p &= 8.5 \times 10^{-3} \text{ m} \\ L_p &= 15. \times 10^{-3} \text{ m} \\ \text{Portance} &= 180 \text{ daN} \end{aligned}$$

Les diagrammes de Bode de l'amplitude et de la phase sont respectivement montrés sur les figures 45 et 46 pour deux valeurs caractéristiques de la viscosité du fluide.

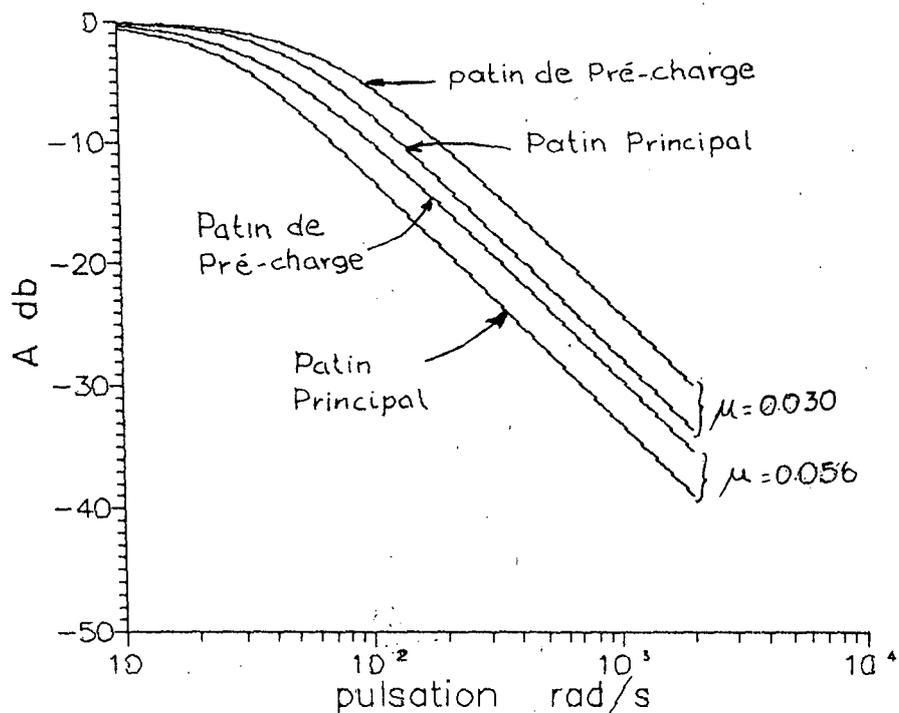


Fig. 45 - Courbe de l'amplitude en fonction de la fréquence d'excitation.

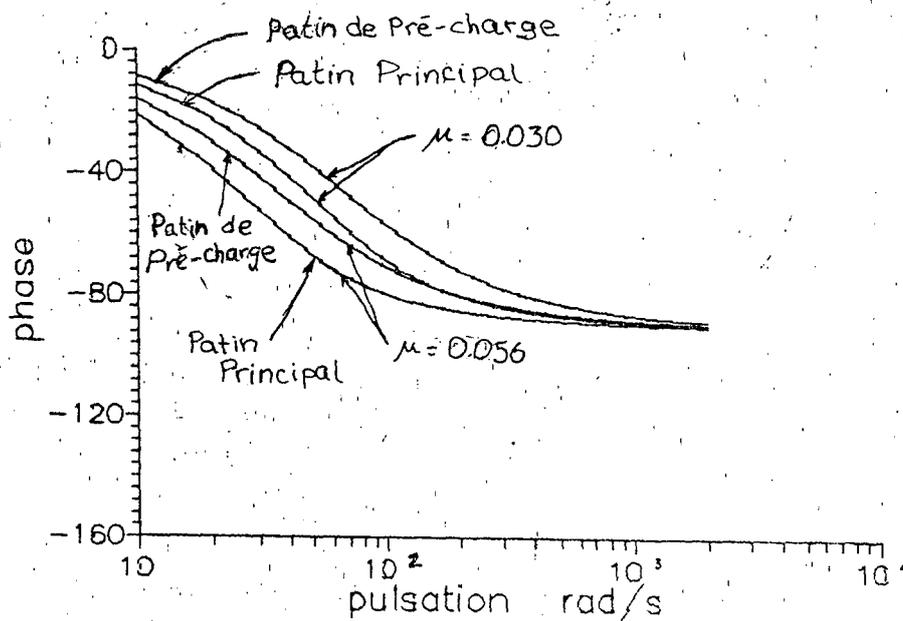


Fig. 46 - Courbe de la phase en fonction de la fréquence d'excitation.

On remarque sur les courbes précédentes que le système couplé entre les patins principal et de pré-charge représente un système super amorti et donc sans risque d'entrer en résonance. En effet, l'introduction du patin de pré-charge provoque une augmentation générale de

l'amortissement de l'ensemble.

Les expressions des coefficients d'amortissement du patin principal couplé et du patin de pré-charge, d'après (149) et (150) sont données respectivement par:

$$\xi_c = \frac{\alpha_1}{2 (Mc + \alpha_2)^{1/2}} \quad (160)$$

$$\xi_p = \frac{\beta_1}{2 (Mp + \beta_2)^{1/2}} \quad (161)$$

où

- α_1 - coefficient de frottement du patin principal ;
- α_2 - raideur hydraulique du patin principal ;
- β_1 - coefficient de frottement du patin de pré-charge ;
- β_2 - raideur hydraulique du patin de pré-charge ;
- Mc - masse supportée par le patin principal ;
- Mp - masse du patin de pré-charge.

De même, on peut exprimer respectivement, la fréquence propre du patin principal et celle du patin de pré-charge par :

$$\omega_{nc} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{Mc}} \quad (162)$$

$$\omega_{np} = \sqrt{\frac{\beta_2}{Mp}} \quad (163)$$

Prenons les mêmes paramètres de fonctionnement que ceux utilisés pour tracer les courbes 45 et 46, avec $\mu = 0.03$, nous obtenons pour le patin principal: $\omega_{nc} = 4195$ rad/s et $\xi_c = 31.9$, et pour le patin de

pré-charge: $\omega n_p = 39165 \text{ rad/s}$ et $\xi_p = 306$. Les valeurs correspondantes au patin de pré-charge sont élevées car la masse M_p du piston est très petite devant la masse du chariot M_c .

Comme $\omega n_p \approx 10 \omega n_c$, le patin de pré-charge suivra très bien le mouvement, et jouera donc toujours parfaitement son rôle. En outre, l'écart de fréquence interdit la résonance du couplage.

Comme le système couplé présente un grand amortissement, il faut utiliser un fluide de faible viscosité pour que la réponse du système soit plus rapide.

VII - CONCEPTION DU BANC LINEAIRE

D'après le cahier de charges qui a été défini au début du travail, le guidage à concevoir doit permettre le déplacement linéaire d'un point de référence sur une course de 250 mm avec une vitesse de 10 mm/s.

La précision globale du mouvement doit être meilleure que $1 \mu\text{m}$ c'est à dire que le point repère doit se déplacer dans un cylindre imaginaire de rayon égal à $0.5 \mu\text{m}$ sur la longueur correspondant à la course.

L'erreur globale prend en compte les défauts d'usinage et d'assemblage du chariot et du bâti, aussi bien que les mouvements parasites de tangage, roulis et lacet, voir figure 47.

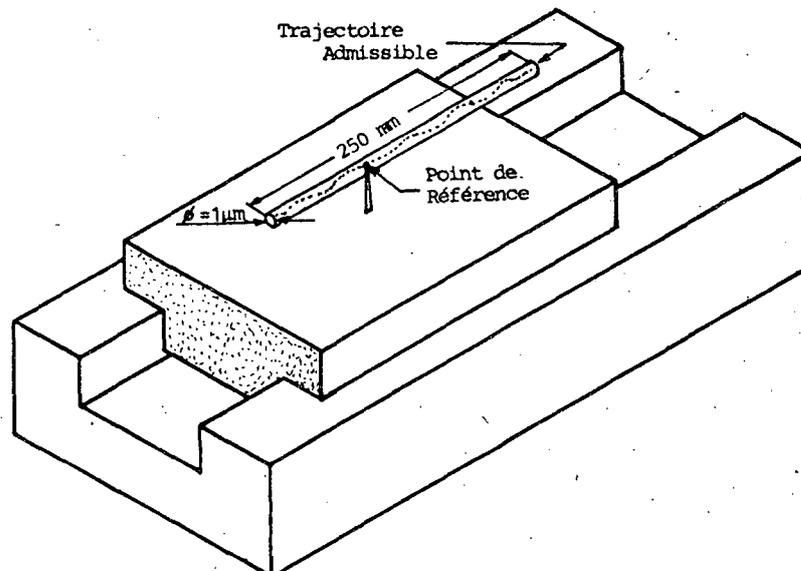


Fig. 47- Schéma du cylindre imaginaire de précision.

La phase initiale qui suit comprend la recherche des solutions capables d'atteindre les objectifs décrits dans le cahier des charges et une étude de synthèse justifiant les choix effectués.

VII.1 - ETUDE DES SOLUTIONS POSSIBLES

Des six degrés de liberté que peut subir le chariot, seul le déplacement linéaire est permis, les autres sont considérés comme des erreurs de trajectoire, et doivent être minimisés.

Un des facteurs essentiels de la précision du mouvement est la rigidité du film de fluide généré par le patin. Plus la rigidité est élevée, plus la qualité du mouvement est accrue, puisque le patin devient moins sensible aux perturbations extérieures.

Dans le cas des patins hydrostatiques, la rigidité dépend de paramètres de construction tels que la résistance hydraulique et le rapport Re/Ri entre autres, et de paramètres réglables comme la pression de source.

Le meilleur compromis doit donc être défini dès la conception:

a) L'influence du rapport Re/Ri , est représenté sur les figures 17 et 18 ; dès que cette valeur se rapproche de l'unité la rigidité du film de fluide est accrue, mais il se produit une augmentation considérable du débit dans le palier conformément à l'équation (42). D'autre part, la aire de la lèvre diminue ce qui impose une précision d'usinage plus grande.

b) Le maintien d'un jeu de travail très faible augmenterait les risques d'atterrissage du patin sur la glissière, et impliquerait un fonctionnement assez délicat.

c) La rigidité s'accroît avec la pression d'alimentation, ce qui a

pour effet d'augmenter en même temps la portance du patin qui pour une géométrie donnée est proportionnelle à la pression alvéolaire.

Un moyen d'éviter de mettre en oeuvre des chariots de poids très élevé est d'utiliser des systèmes de pré-charge .

Dans notre cas le système de pré-charge est le meilleur adapté pour permettre à la fois d'obtenir la rigidité nécessaire, soit plus de 200 N/ μ m/patin, et de satisfaire l'exigence que le système de guidages soit le plus compact possible.

Pour que la distribution des efforts appliqués au chariot soit la plus homogène possible, dans toutes les solutions retenues la force totale de pré-charge a été répartie et placée en opposition à la portance de chaque patin fixe.

La deuxième caractéristique recherchée dans les solutions étudiées, consiste à pouvoir identifier rapidement le patin responsable d'une erreur de trajectoire lorsque le chariot effectue son déplacement. Cette exigence a conduit au choix d'un système de guidage isostatique du chariot.

Ceci se compose donc de trois patins définissant le plan horizontal formé par les guidages et deux patins latéraux pour le contrôle du mouvement de lacet. Cette configuration permet d'envisager ultérieurement un contrôle actif.

Parmi toutes les conceptions envisagées, celle qui satisfait au mieux les critères précédents est schématisée dans la figure 48 .

Le principe de conception est basé sur un chariot en forme de H , constitué de l'assemblage de trois plateaux rectangulaires A, B et C.

Le chariot est supporté par trois patins hydrostatiques fixés au dessous de la platine A , de manière à former une géométrie triangulaire. Ceux-ci permettent que le chariot puisse glisser sur le plan formé par les deux surfaces supérieures du guidage.

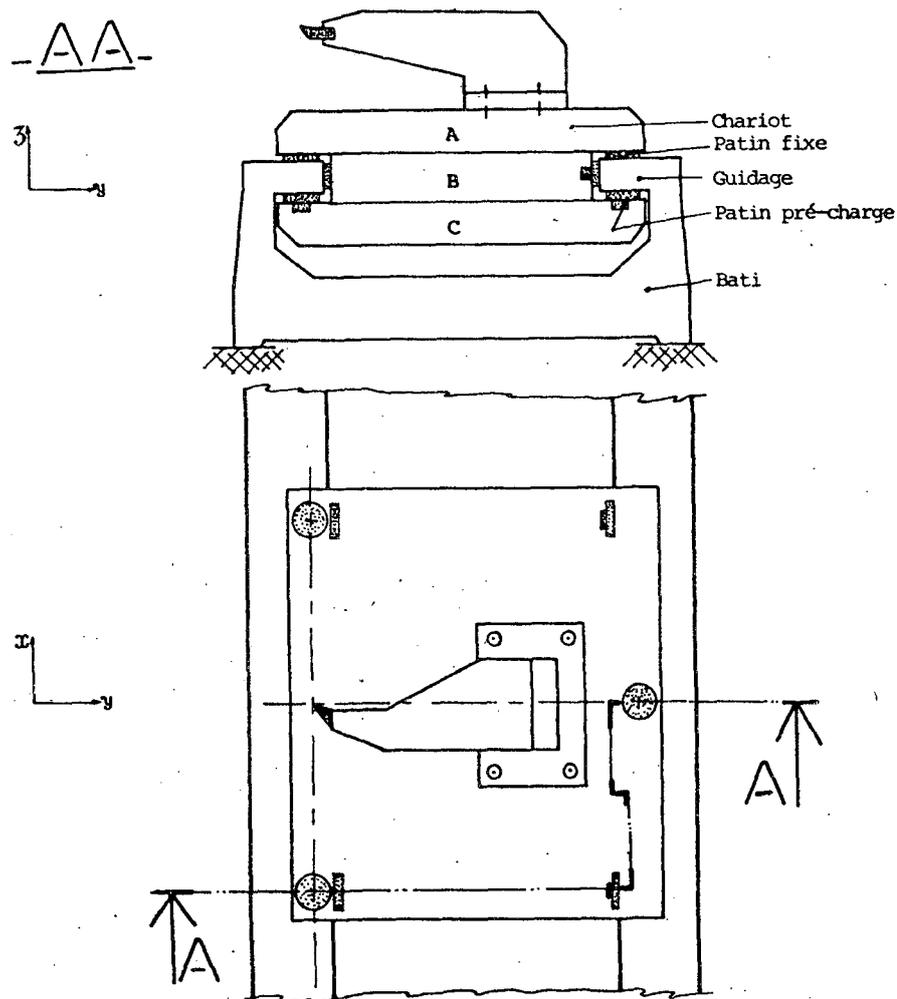


Fig. 48- Schéma du guidage avec le chariot.

Les trois patins ainsi disposés correspondent à un choix d'isostatisme qui permet de distinguer les causes des mouvements de tangage et roulis de celles du lacet pendant le déplacement du chariot.

La platine inférieure C comporte trois patins géométriquement identiques aux patins principaux, placés coaxialement à ces derniers et glissant sur les faces inférieures des guidages. Ce sont les patins de pré-charge. Chacun d'eux est fixé sur la tête d'un piston qui coulisse dans un alésage aménagé dans le plateau C.

Pour une pression d'alimentation donnée, les patins de pré-charge fournissent une force statique constante et opposée à la portance des

patins principaux. Ils constituent une charge ajustable qui s'ajoute au poids et à la résultante des efforts extérieurs exercés sur le chariot et permettent ainsi d'obtenir des rigidités de film hydrostatique élevées avec des dimensions de chariot assez compactes .

La force produite par les pistons peut être facilement modifiée, ce qui permet d'avoir une souplesse dans le choix de la rigidité du guidage.

Le mouvement du piston dans son alésage permet une indépendance de la pré-charge, vis à vis des défauts d'usinage ou d'assemblage des plateaux A, B et C , qui composent le chariot. D'autre part, grâce à la mobilité des pistons , la hauteur du film d'huile sous les patins de pré-charge reste constante, quel que soit l'état de parallélisme du plateau C , par rapport au plan de glissement.

Ainsi, le système étant intrinsèquement stable, s'il existe un défaut de planeité sur les deux faces inférieures du guidage, la capacité d'auto correction de l'ensemble patin-piston empêche que ces erreurs ne soient transmises au chariot .

De ce fait, la précision du mouvement du chariot est directement liée à l'état de la surface supérieure du guidage ce qui démontre le grand avantage de ce système.

Les mêmes caractéristiques que celles décrites pour le guidage en ce qui concerne les mouvements de tangage et roulis s'appliquent au mouvement de lacet .

En effet , la direction du mouvement de translation est assurée par deux patins fixés au corps du chariot B , voir figure 48 , glissant sur les faces latérales du guidage.

Comme précédemment, chaque patin fixe est chargé par un patin piston placé coaxialement dans la face opposée du corps du chariot.

La capacité d'auto correction du système couplé permet que les

erreurs de parallélisme qui peuvent exister entre les faces du guidage ou les parois verticales de B soient moins sensibles.

Comme précédemment, c'est le plan où glissent les patins fixes latéraux, qui détermine toute la rectitude du mouvement et de la trajectoire.

VII.2- DEFORMATIONS DU GUIDAGE

Néanmoins, cette conception présente quelques inconvénients difficiles à maîtriser et qui influencent directement la précision du mouvement.

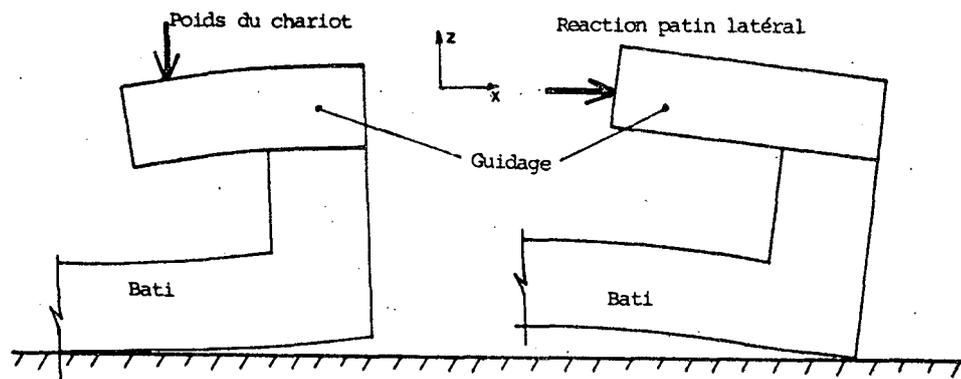
Tout d'abord, pour minimiser les défauts parasites de roulis et tangage, il faut que les deux surfaces supérieures du guidage forment un plan horizontal le meilleur possible.

Le poids du chariot qui se trouve appliqué sur le guidage par les trois patins fixes, engendre des déformations difficiles à éliminer. A ce phénomène vient s'ajouter la déformation produite par les efforts de réaction des patins latéraux, qui tendent à écarter les deux faces intérieures du guidage, provoquant ainsi une inclinaison du plan supérieur, dirigée vers l'extérieur.

La figure 49, présente schématiquement les déformations dues au poids du chariot et aux patins latéraux.

Ces déformations ont fait l'objet d'une étude plus approfondie afin de prévoir avec précision l'influence de chaque effort sur la déformation totale du guidage.

Les calculs ont été effectués par la méthode des éléments finis, pour l'ensemble du guidage.



a- du au poids du chariot

b- efforts des patins latéraux.

Fig. 49- Schéma des déformations sur le guidage.

Due à la symétrie de la construction par rapport au plan médian du bâti nous allons limiter le calcul à la moitié de la structure la plus chargée (par deux patins).

Le maillage correspondant au calcul est montré dans la figure 54; les charges appliquées sont les suivantes : 500 daN sur les patins latéraux et de pré-charge , et 534 daN pour les patins principaux . Les conditions aux limites imposées sur les noeuds sont : déplacement nul dans la direction X sur le plan médian du bâti, et déplacement nul suivant l'axe Z sur l'arête inférieure de la face latérale avec la base , voir figure 50 .

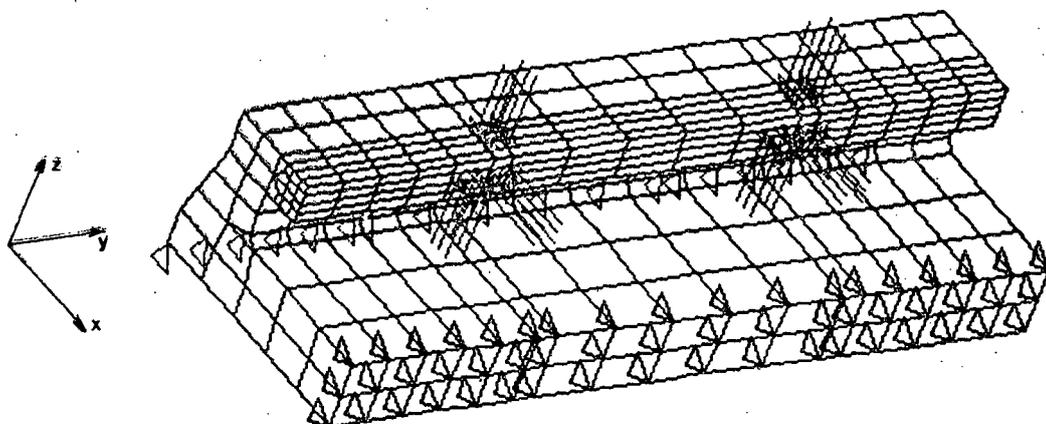


Fig. 50 = Maillage du guidage et bâti avec les conditions limites.

Le résultat nous montre que les déformations engendrées par les efforts de pré-charge sur les glissières restent quant à elles négligeables (inférieures à $0.1 \mu\text{m}$). Les résultats du calcul sont représentés sur les figures 51, 52, 53 et 54 .

D'après les résultats du calcul , il est possible de remarquer que l'influence de la charge horizontale appliquée par les patins latéraux sur la face de guidage latérale est celle qui cause le plus de déformations sur l'ensemble du guidage.

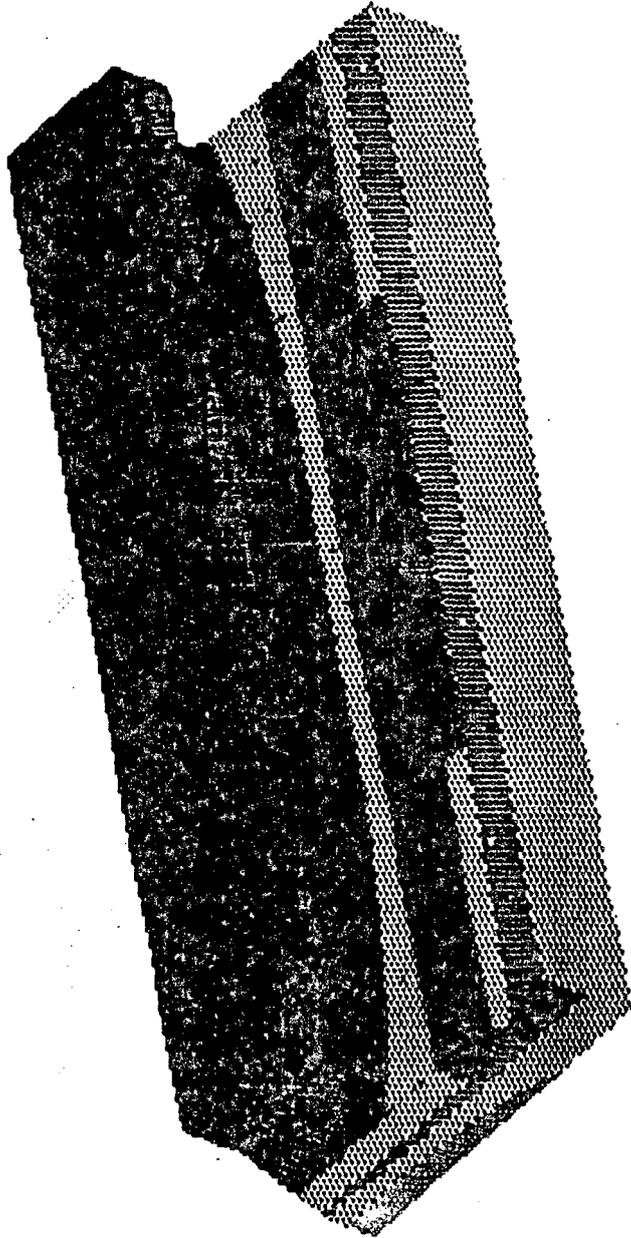
En effet nous constatons un écartement des guidages d'environ $10 \mu\text{m}$ et une déformation suivant l'axe Z de l'ordre de $8 \mu\text{m}$.

Les résultats du calcul ont prouvé que les déformations sur le guidage sont trop importantes pour assurer la précision voulue, d'où la nécessité d'effectuer des modifications qui permettront d'éliminer complètement ces inconvénients.

Faible No 1

DIVISION SYSTEMES MECANIQUE
7-DEC-88/11:06:25 DEFOX.SAV

0.107E-04
0.941E-05
0.813E-05
0.684E-05
0.556E-05
0.427E-05
0.299E-05
0.171E-05
0.422E-06
0.862E-06
0.215E-05



DEFORMATION SUIVANT L'AXE X

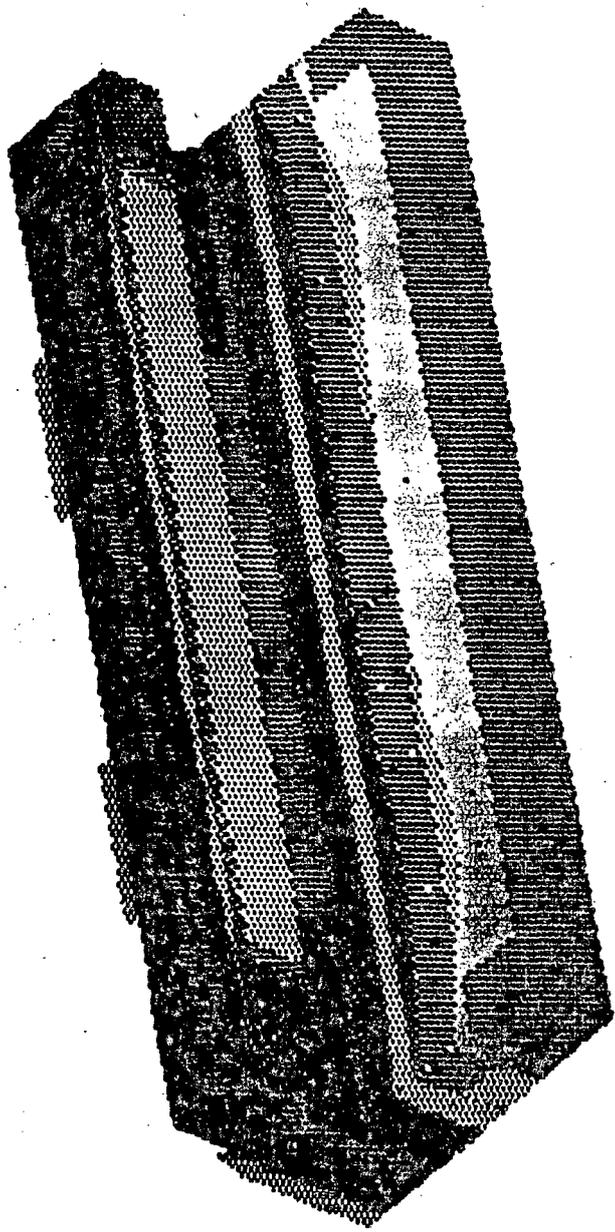
MOSAIC V2.4;3

Fig. 54 - Déformation du guidage suivant l'axe X

Fenetre No 1

DIVISION SYSTEMES MECANIQUE
7-DEC-88/11:18:12 DEFOX.SAV

-	0.894E-07
▒	0.954E-06
▓	0.200E-05
█	0.304E-05
▒	0.408E-05
▓	0.513E-05
█	0.617E-05
▒	0.721E-05
▓	0.826E-05
█	0.930E-05
▒	0.103E-04



MOSAIC V2.4;3

DEFORMATION SUIVANT L'AXE Z

Fig. 52 - Déformation du guidage suivant l'axe z

Fenêtre No 1

DIVISION SYSTEMES MECANIQUE
7-DEC-88/11:35:54 BATITRI.SAV

0.232E+05
0.418E+06
0.812E+06
0.121E+07
0.160E+07
0.200E+07
0.239E+07
0.278E+07
0.318E+07
0.357E+07
0.397E+07



MOSAIC V2.4;3

CONTRAINTE EQUIVALENTE DE VON MISES

Fig. 53 - Contraintes équivalentes.

DIVISION SYSTEMES MEQUANIQUE
12-DEC-88/15:38:08 BATITRI.SAV

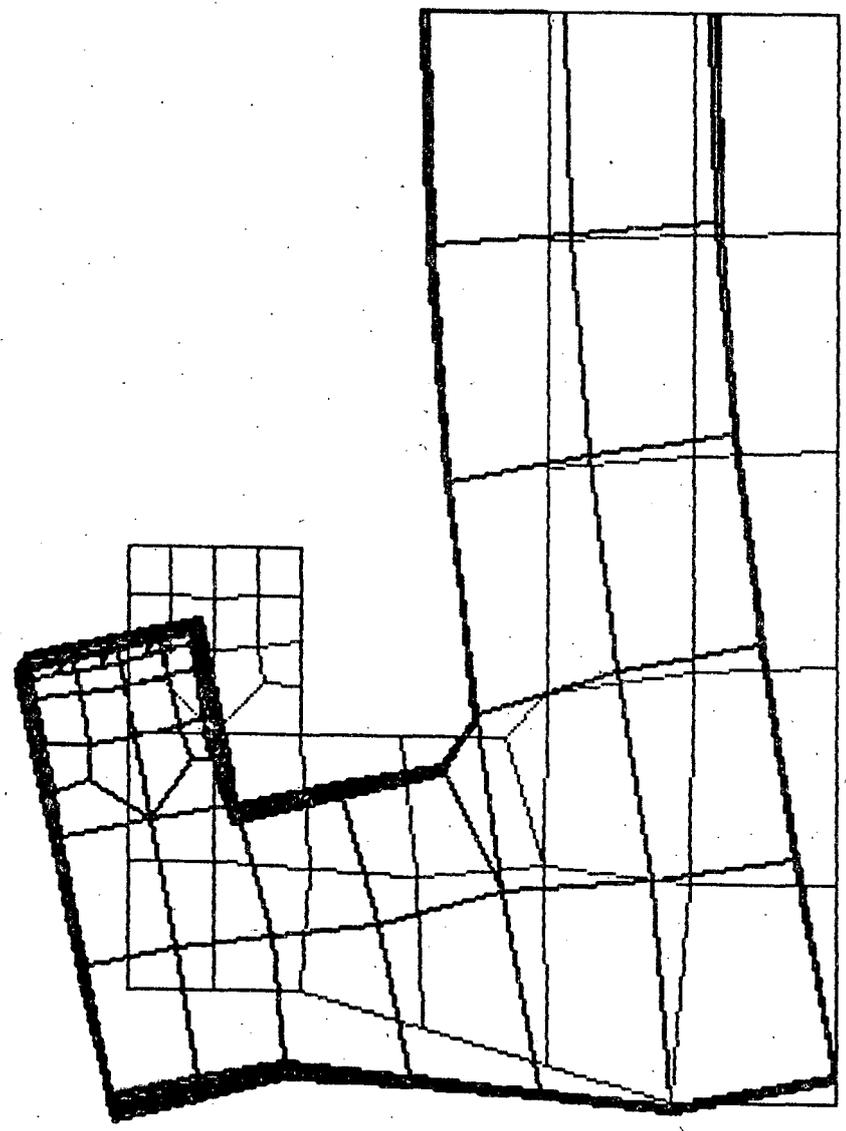


Fig. 54 - Représentation dans le plan des déformations suivant l'axe X et Z.

Suite à l'analyse des résultats précédents, une nouvelle forme de guidage a été envisagée, dont un schéma est montré sur la figure 55.

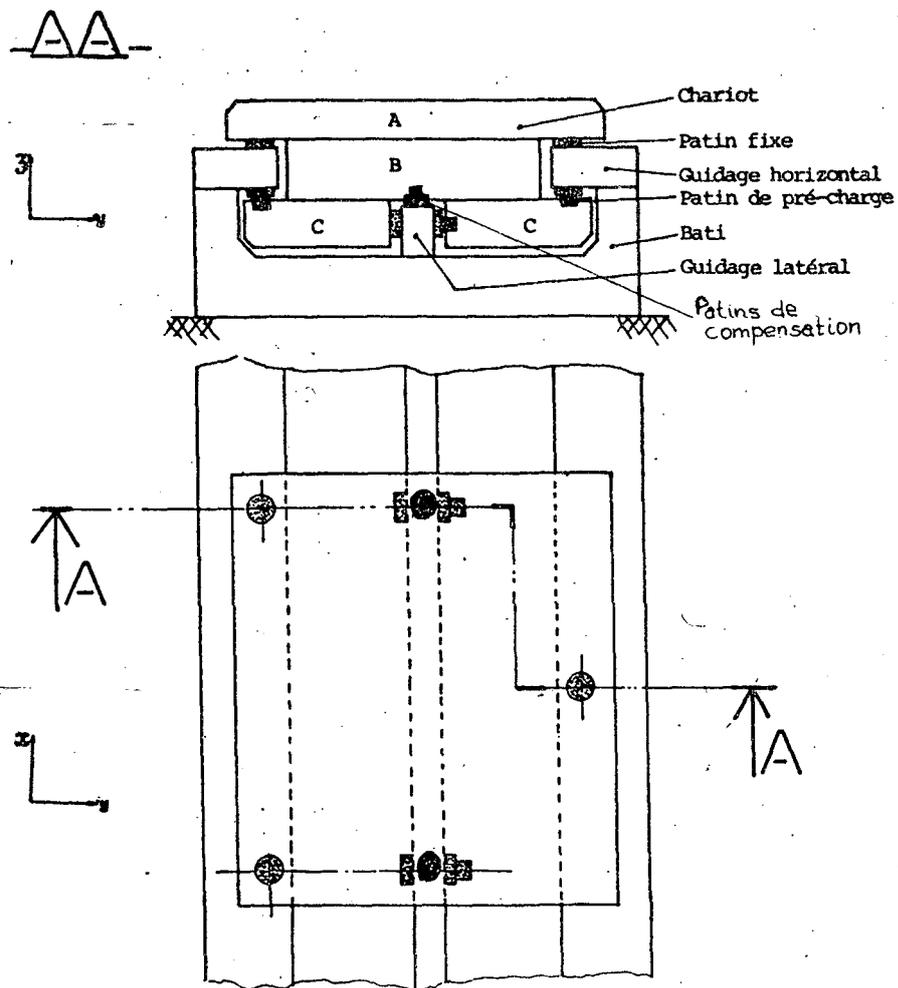


Fig. 55 - Schéma du bâti à trois guidages indépendants.

En utilisant le même principe de fonctionnement que la conception antérieure avec les avantages du système couplé entre un patin fixe et un patin mobile de pré-charge, cette nouvelle conception élimine les deux inconvénients majeurs de la solution antérieure ; à savoir : l'écartement des guidages par les patins latéraux et l'application du poids du chariot

sur les guidages par l'intermédiaire des trois patins fixés sur le plateau A.

Un troisième guidage a été placé au fond du bâti, dont le rôle est d'assurer le guidage latéral et de supporter le poids du chariot par l'intermédiaire des patins de compensation.

Cette nouvelle configuration permet d'éliminer les déformations engendrées sur le guidage horizontal par le poids du chariot. Celui-ci va être supporté entièrement par deux patins mobiles montés sur des pistons disposés dans la partie inférieure du corps du chariot, dans la platine B, et qui glissent sur la face supérieure du guidage central.

Le fonctionnement de ces deux patins est similaire à celui des patins de pré-charge, sauf que dans ce cas, la charge qui correspond à leur portance est égale au poids du chariot.

L'introduction du troisième guidage a permis l'élimination complète de tout effort appliqué aux parois intérieures des guidages horizontaux. Ainsi dans cette conception, tous les guidages sont soumis principalement à des efforts en compression ce qui permet d'augmenter la précision du mouvement.

Néanmoins, le poids du chariot reste toujours appliqué sur le bâti par l'intermédiaire du troisième guidage et par conséquent, les déformations ainsi produites sur tout l'ensemble suivent le déplacement du chariot.

Cette déformation peut être minimisée à condition que le bâti soit posé sur une base de travail convenable.

Supposons, tout d'abord, que le bâti soit posé sur trois plots disposés de manière à former un système isostatique. Dans ce cas, il est possible de calculer les déformations résultantes dues à la réaction de chaque point d'appui.

L'avantage de cette solution réside dans le fait que l'état de planéité de la base de travail sur laquelle le bâti va être posé ne requiert

alors pas une grande précision, voir figure 56.

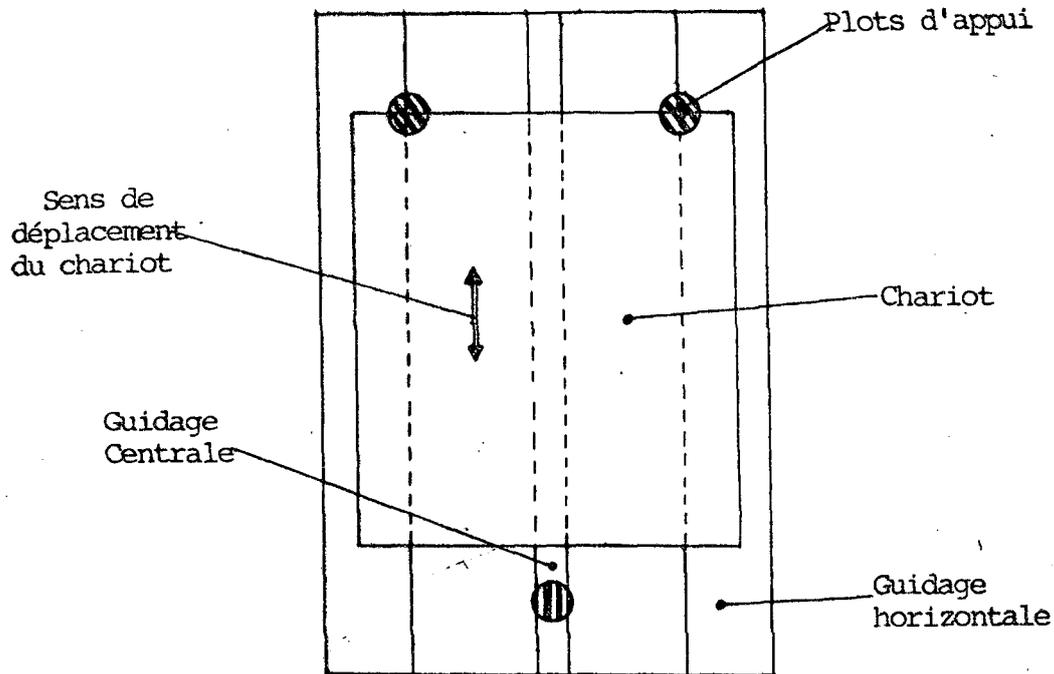


Fig. 56 - Bâti posé sur trois plots.

Un calcul de la déformation du bâti dans ce cas a été effectué par la méthode des éléments finis, et les résultats sont présentés sur les figures 57 et 58, dans les cas les plus défavorables de déport maximal de la charge. Les conditions aux limites imposent que les noeuds situés en contact avec les plots ont leur degré de liberté nul suivant l'axe Z.

Ces résultats ont montré que l'appui du bâti en trois points s'avère inacceptable du point de vue de la déformation engendrée sur les guidages lors du déplacement du chariot. En effet, il se produit des déflexions maximales respectivement de l'ordre de 0.8 et 1.2 μm suivant la position du chariot au milieu (fig. 57), et fin de course (fig. 58).

La solution consiste à augmenter le nombre de points de contact entre le bâti et la base. L'utilisation d'un bloc support posé entre le bâti et la table de travail permet d'obtenir une surface de contact bien précise pour pouvoir moyenner les erreurs dues aux déformations engendrées par le poids du chariot lors de son déplacement.

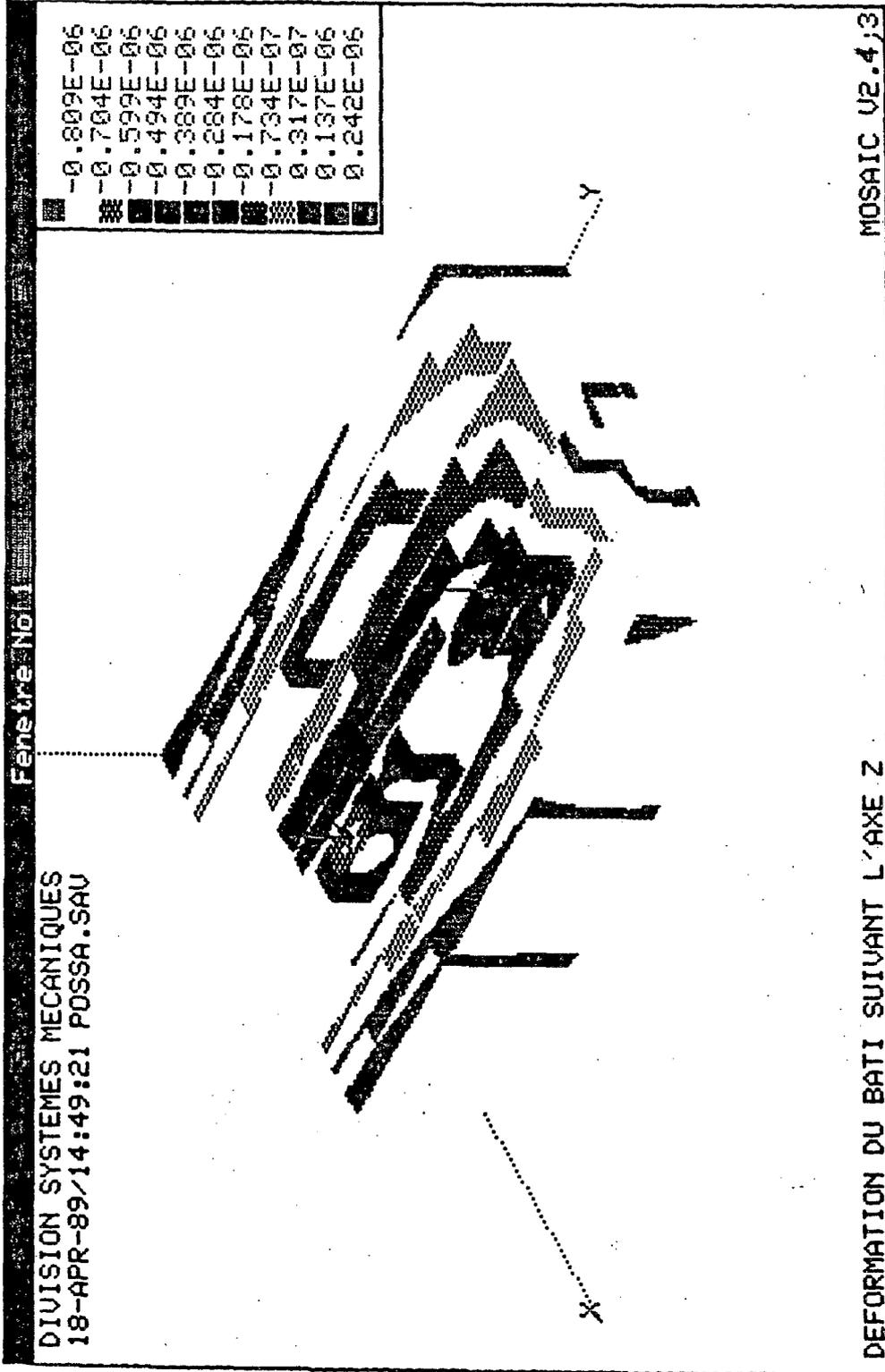


Fig.57 - Déformation du bâti suivant l'axe Z ; au milieu de la course .

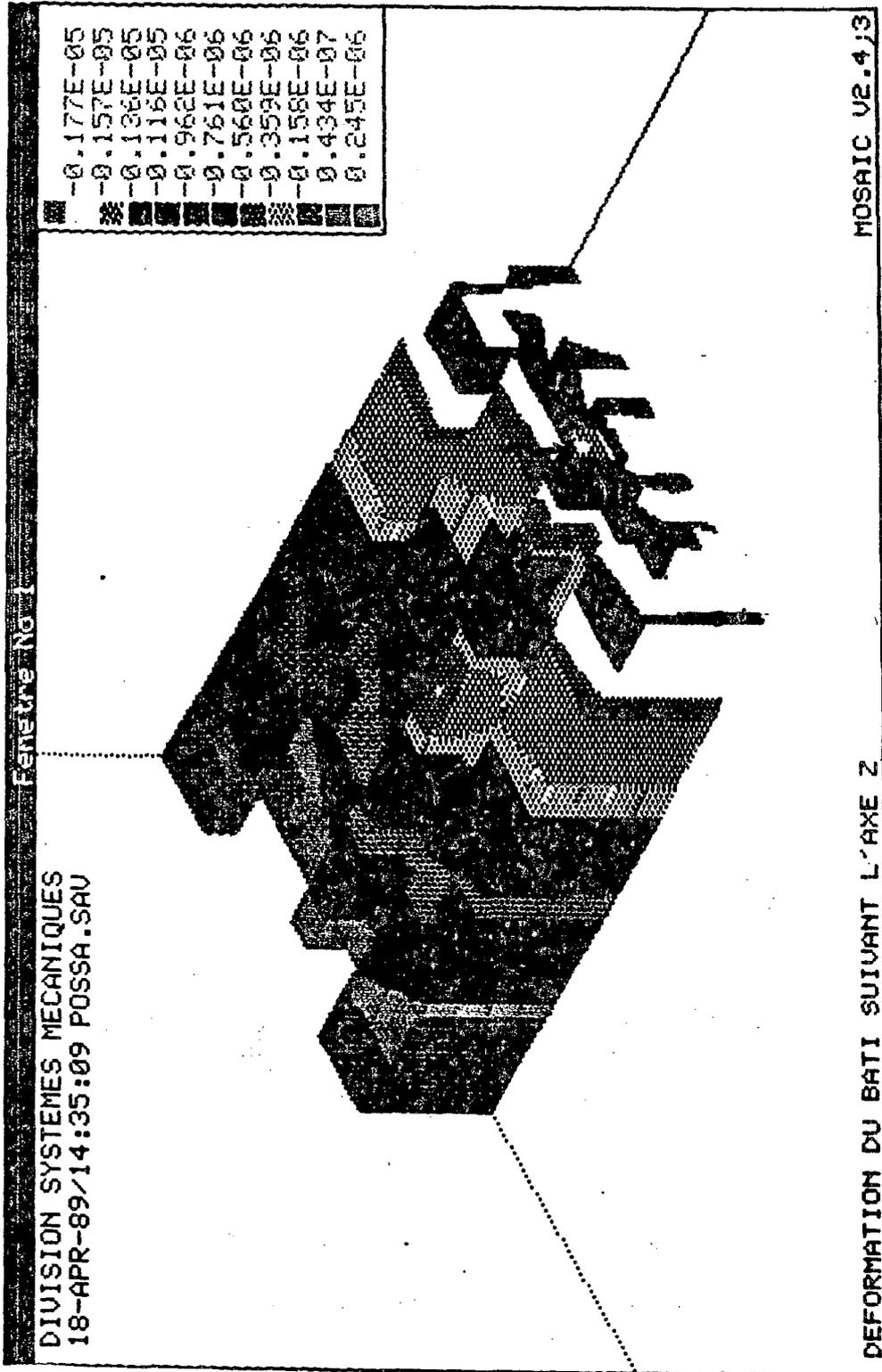


Fig. 58 - Déformation du bâti suivant l'axe Z ; en fin de course.

La figure 59 , présente un schéma dans lequel est montrée la solution finale retenue.

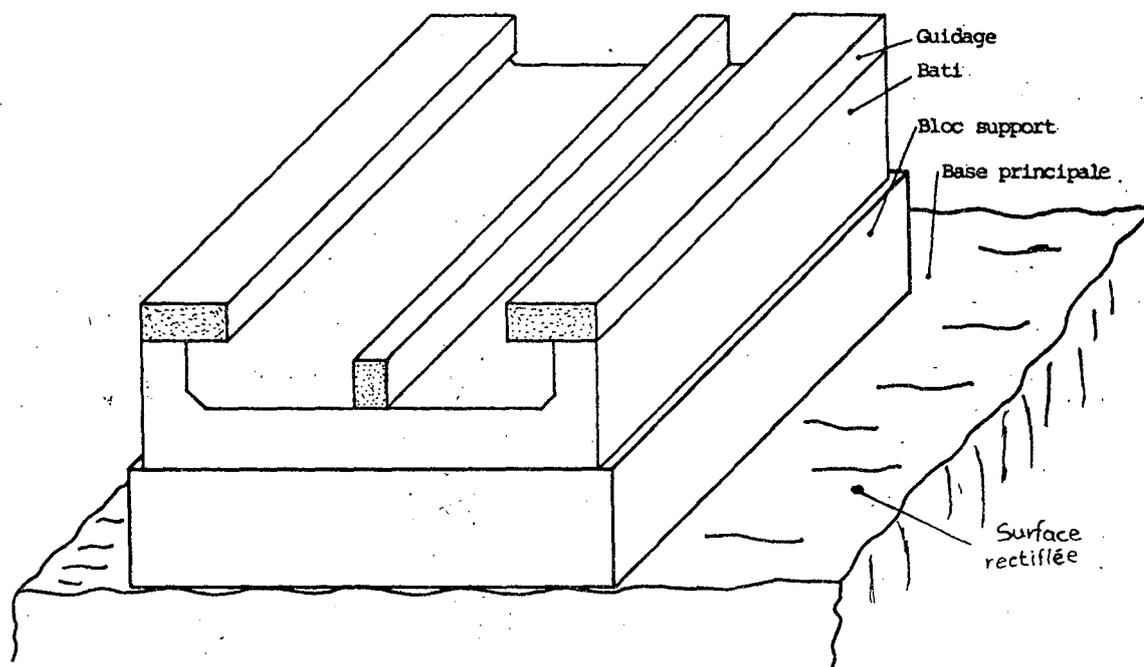


Fig. 59 - Ensemble de support du bâti.

Le bloc support est fabriqué en marbre "DIABASE", lequel présente de bonnes caractéristiques de stabilité dimensionnelle et une faible dilatation thermique. Sa surface de contact a des dimensions similaires à celles du bâti, et l'épaisseur du bloc est de 250 mm. Celui-ci va être posé sur la base ou table de travail, dont les dimensions sont plus importantes pour supporter aussi, tout le système de mesure et d'entraînement.

Cette configuration a l'avantage de pouvoir utiliser une base dont l'état de planéité de la face supérieure ne demande pas de précision au-dessus de la normale.

D'autre part, l'utilisation d'un bloc de support assez épais permettra de minimiser les déformations transmises au guidage par l'imperfection du contact qui peut exister entre celui-ci et la base.

Le bâti et les guidages sont construits en matériau

vitro-céramique et assemblés par une très mince couche de colle , durcie par lumière ultra violet .

Par rapport à la fonte et l'acier, la vitro -céramique présente deux avantages importants et décisifs pour le choix du matériau : d'une part sur le plan de la stabilité dimensionnelle à long terme et d'autre sur son coefficient de dilatation qui est environ vingt fois inférieur ; ceci réduit donc considérablement les déformations dues aux effets thermiques.

VII.3 - ETUDE DES PATINS

Le chariot subit les efforts de réaction de tous les patins provoquant ainsi des déformations analogues à celles qui ont été évitées sur le guidage.

Les déformations les plus importantes sont dues à l'écartement des éléments A et C , engendrées par les patins qui glissent sur le plan horizontal. Cette déformation conduit à une inclinaison du patin par rapport au plan de guidage, ce qui contribue à la diminution de ses performances, notamment la portance et la raideur lors du déplacement du chariot. Le cas des patins inclinés a été étudié au § II.2.7 .

Ce phénomène d'inclinaison sur les patins du guidage latéral, oblige à assurer une perpendicularité à 20 secondes d'arc près entre les plans de guidage horizontal et latéral, ce qui implique des précisions élevées d'usinage et d'assemblage du bâti .

Pour minimiser ces inconvénients , tous les patins ont été montés sur des rotules sphériques semi-compensées en force par une poche où le fluide se trouve à la pression source, dont une vue en coupe est représentée sur la figure 60 .

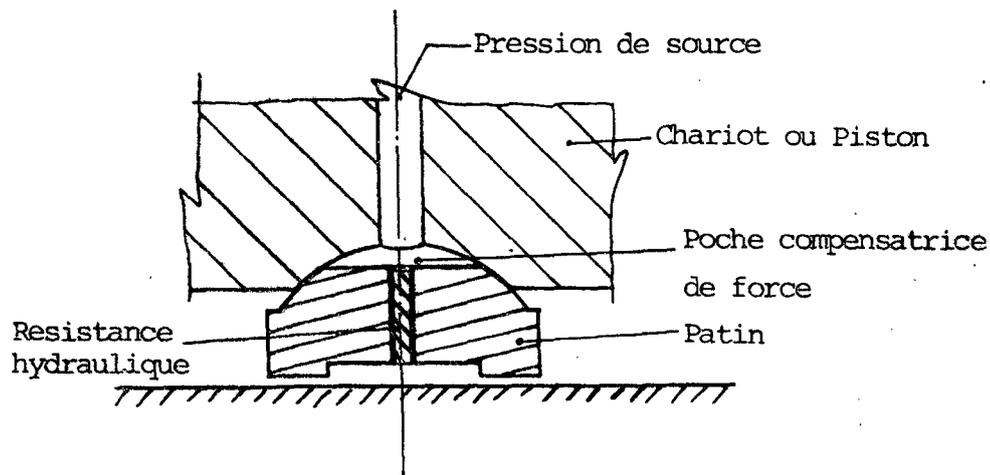


Fig. 60 - Coupe d'un patin avec le couplage sphérique.

Cette compensation en force par la pression, permet de réduire la force nécessaire au patin pour vaincre l'effort de friction sur la surface de contact sphérique et donc en principe de venir se positionner toujours parallèlement au plan du guidage quelle que soit sa position initiale.

La poche de compensation génère environ 90% de la force de réaction du patin. Les autres 10% restent appliqués sur la surface de contact, pour assurer l'étanchéité du système.

VII.4 - LA CENTRALE HYDRAULIQUE ET L'ALIMENTATION DES PATINS

VII.4.1 - Alimentation du Chariot

Jusqu'ici nous avons considéré que les erreurs de trajectoire que peut subir le chariot étaient liés principalement à l'état de planéité et de rectitude des guidages et au bon fonctionnement des patins.

Dès que le chariot se déplace, il entraîne avec lui les conduits d'acheminement de l'huile sous pression provenant de la centrale hydraulique et qui va alimenter les patins.

La course de 250 mm qui doit être accomplie par le chariot exige une souplesse du système d'alimentation pour minimiser toute interférence sur la précision du mouvement.

La solution initiale consiste à raccorder le chariot à la centrale hydraulique par l'intermédiaire de deux tuyaux flexibles (un pour l'alimentation des patins principaux et l'autre pour ceux de pré-charge), sur lesquels serait réalisé une grande boucle verticale de façon à ce qu'ils puissent suivre le mouvement du chariot sans offrir beaucoup de résistance, voir figure 61.

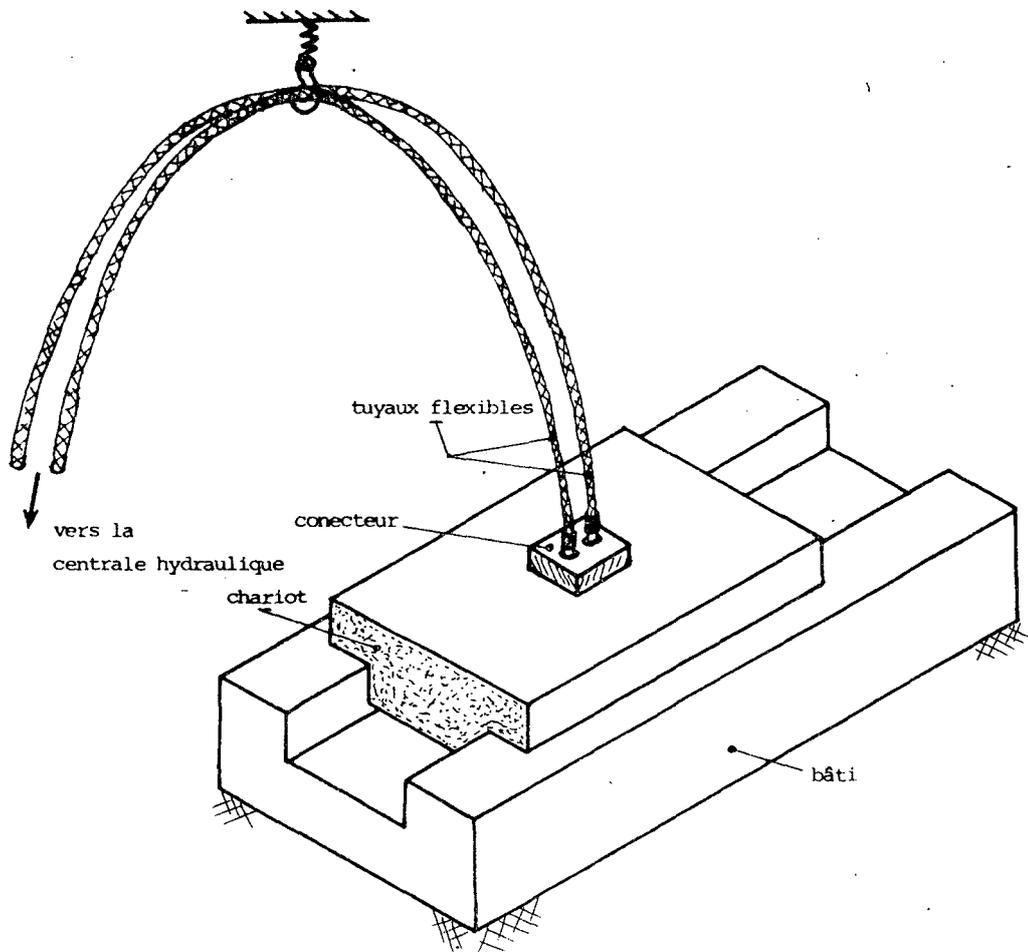


Fig. 61 - Schéma de l'installation des tuyaux d'alimentation.

Toutefois, sous l'action d'une pression moyenne de $100 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ les tuyaux flexibles restent assez rigides pour créer des efforts parasites qui peuvent engendrer des erreurs lors déplacement du chariot. Le moyen idéal pour minimiser ces erreurs de trajectoire serait de raccorder les tuyaux au milieu de la platine supérieure A, en passant par le centre de poussée du chariot.

L'inconvénient majeur de cette solution réside dans l'encombrement du raccord et des tuyaux qui limitent beaucoup l'espace de travail sur le chariot. De ce fait, une deuxième solution a été proposée dont le schéma est montré dans la figure 62.

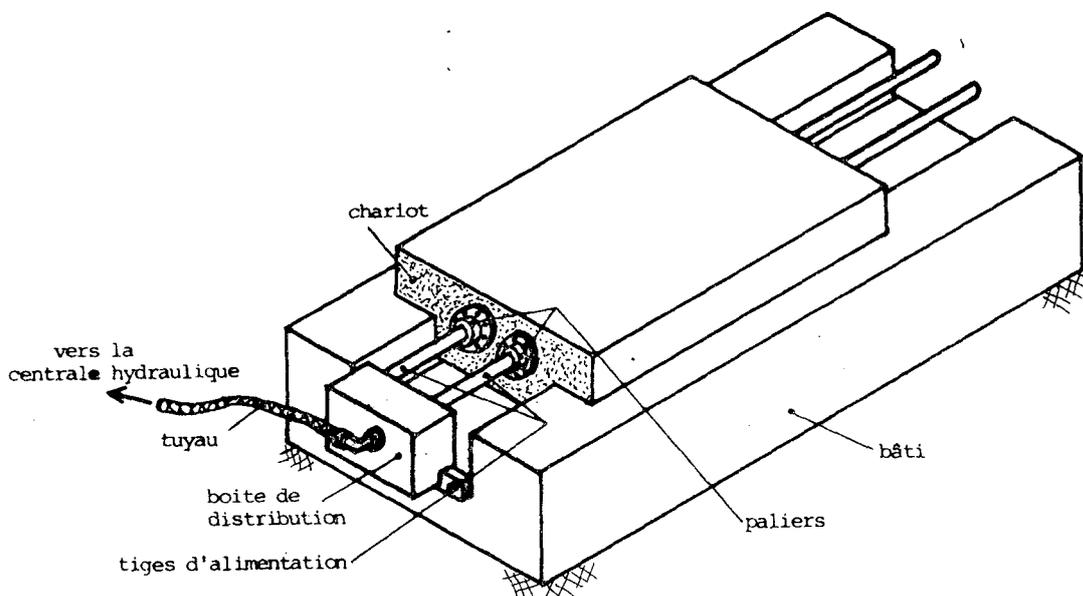


Fig. 62 - Alimentation du chariot par tiges coulissantes.

Le principe de fonctionnement de ce système d'alimentation consiste à faire passer à travers le corps du chariot deux tiges chargées de conduire le fluide sous pression jusqu'à l'intérieur. Les tiges présentent une extrémité libre et l'autre est couplée à un bloc distributeur fixé au bâti, relié à la centrale hydraulique par des tuyaux.

Cette solution présente quelques avantages par rapport à la précédente; d'une part, la surface supérieure du chariot reste libre de tout élément qui limite l'espace de travail et d'autre part les efforts engendrés par les tiges sont mieux répartis, par rapport au centre de poussée du chariot, ce qui augmente la précision du mouvement.

Le bloc de distribution permet à chaque tige un mouvement libre sur cinq degrés de liberté (elles sont maintenues immobiles dans la direction de déplacement du chariot). Ceci permet que les tiges puissent suivre tous les mouvements du chariot sans introduire une résistance supplémentaire (à la force de frottement près).

Le distributeur est composé de deux parties identiques, une pour l'alimentation des patins principaux et l'autre pour ceux de pré-charge. Chaque ensemble est formé d'un croisillon dans lequel vient se fixer la tige, voir figure 63.

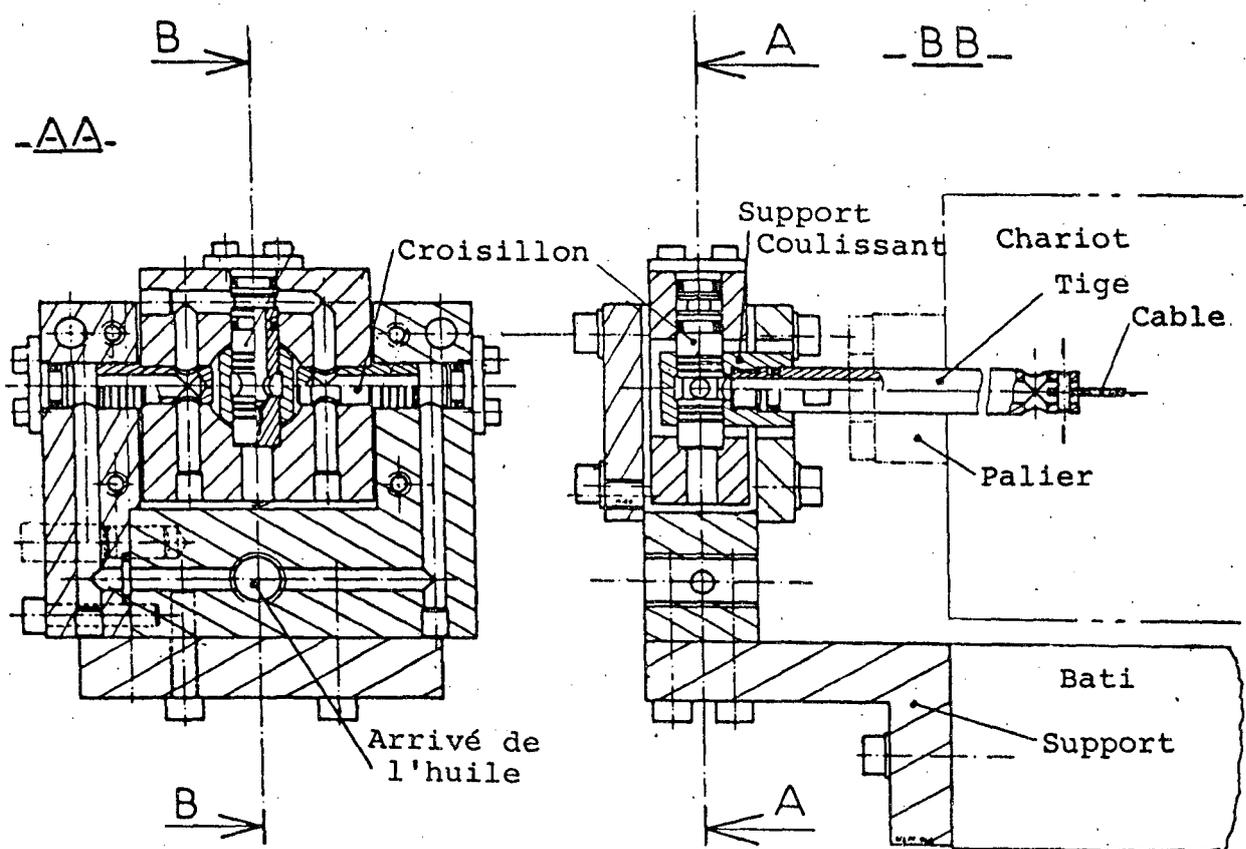


Fig. 63 - Système mobile pour les tiges.

Comme les tiges sont immobiles dans le sens du déplacement, c'est le chariot qui coulisse sur ces premières par l'intermédiaire des paliers fixés dans la platine B.

Pour faciliter la fabrication et la mise en œuvre de ce système, chaque tige a été découpé en deux parties qui seront ensuite reliées coaxialement par un câble flexible. Pendant le fonctionnement du banc linéaire, les deux éléments sont maintenus écartés sous l'effet de la pression qui règne à l'intérieur du chariot et l'ensemble procure les mêmes caractéristiques que la tige monobloc, voir figure 64.

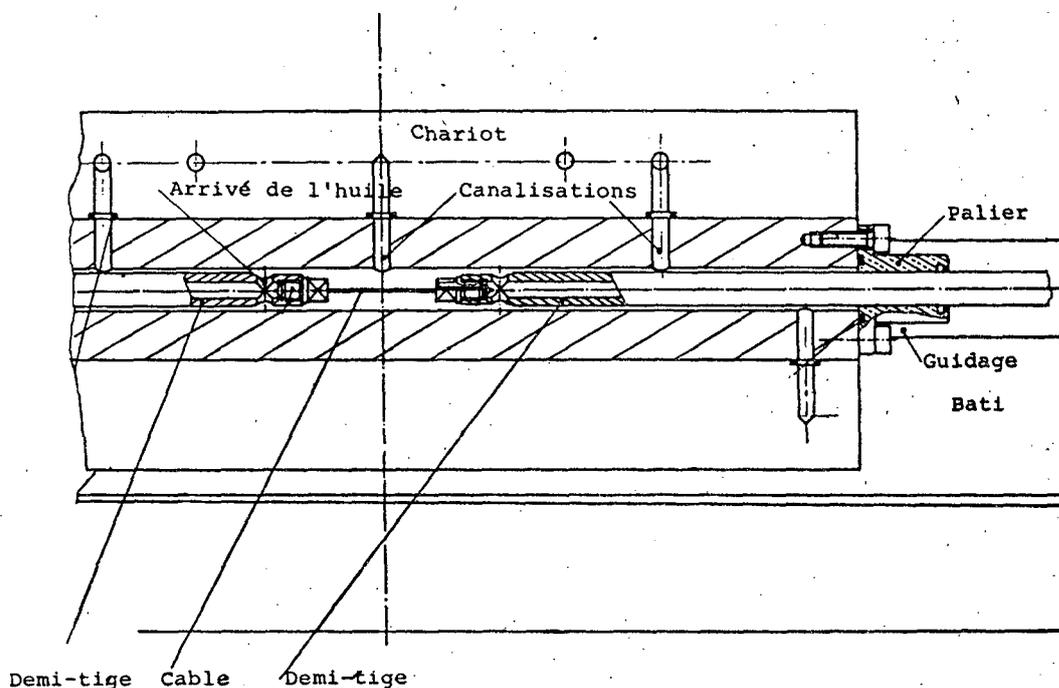


Fig. 64 - Coupe longitudinale du chariot avec la tige d'alimentation.

Toutefois, lors du déplacement du chariot les poids des tiges ne sont plus répartis symétriquement sur les patins principaux et on peut craindre qu'il se produise un petit mouvement de tangage. Seul les essais avec le banc linéaire pourront quantifier cette erreur.

VII.4.2 - La Centrale Hydraulique

La précision du mouvement du chariot est fortement liée aux conditions dans lesquelles le fluide arrive aux patins . Pour satisfaire cette exigence , une conception soignée de la centrale hydraulique est donc requise et, l'établissement de critères nous impose :

a) - générer un débit de fluide supérieur à 0.6 l/min avec un minimum de pulsation;

b) - fournir une pression de source stable avec une variation maximale égale à : $15 \cdot 10^{-8} P_1 (1-\beta)/h$ N/m² ;

c) - filtrer le fluide de toute impureté de taille supérieure à 3 μm qui puisse venir boucher les capillaires ou rayer les guidages ;

d) - permettre au fluide d'arriver au chariot sous une température constante avec une variation inférieure à 0.2 °C ;

La figure 65 montre un schéma de la centrale hydraulique utilisée dans le banc linéaire avec une description de ses composants.

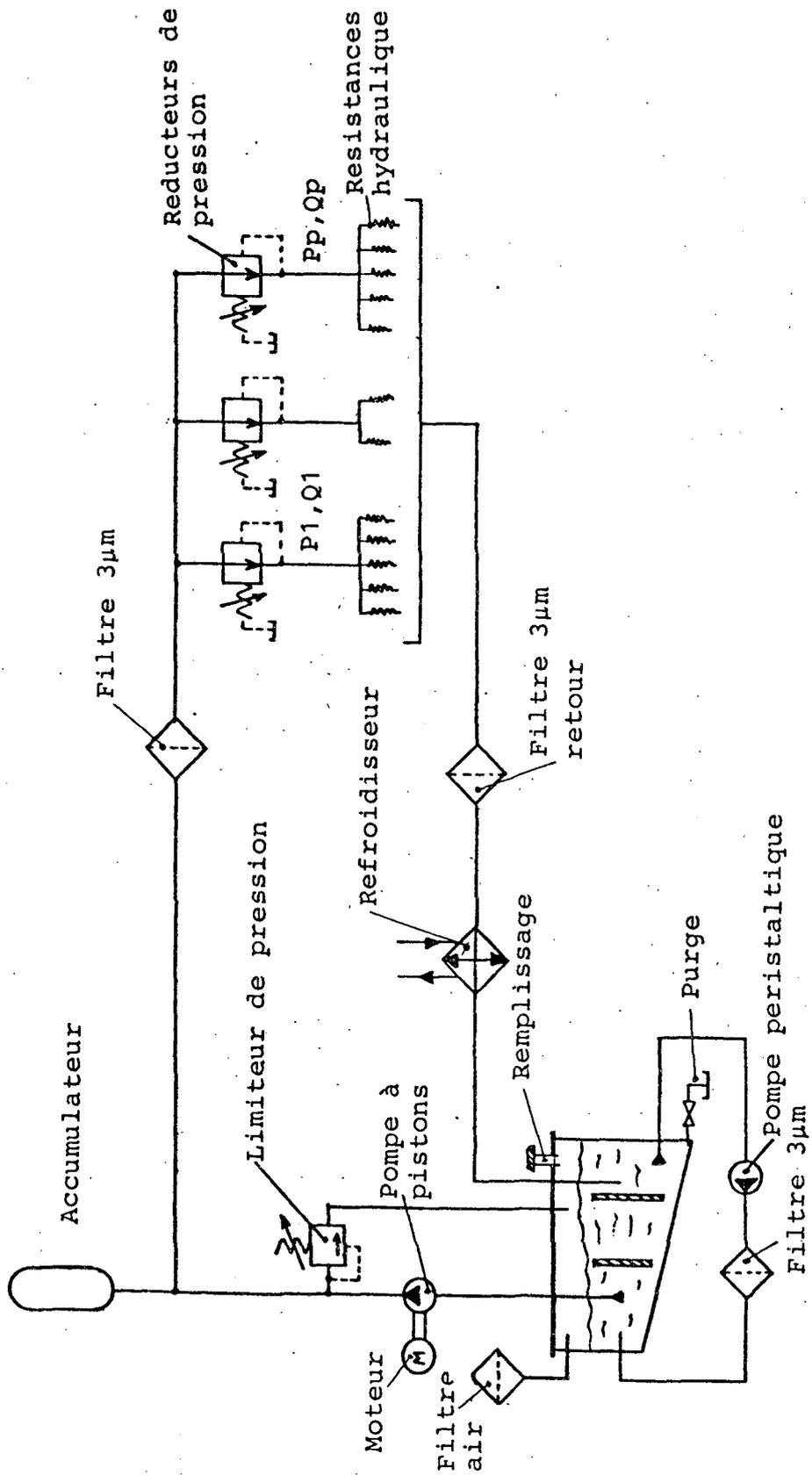


Fig. 65 - Schéma de l'installation de la centrale hydraulique.

VIII - ESSAIS STATIQUES ET DYNAMIQUES DES PATINS HYDROSTATIQUES

La validation des calculs statiques et dynamiques a été effectuée au travers d'une série d'expériences effectuées sur un banc d'essais spécialement construit autour d'un patin identique à celui installé dans le banc linéaire.

Le banc expérimental est destiné à identifier les caractéristiques de fonctionnement de patins isolés ou couplés en régime statique et dynamique.

VIII.1- DESCRIPTION DU BANC ELEMENTAIRE

La figure 66 montre une vue de l'ensemble du banc élémentaire avec l'emplacement des capteurs de pression et de déplacement.

Le système se compose d'un cylindre principal (6), coulissant autour du piston (4), lequel est maintenu dans la position verticale et fixé par l'intermédiaire de l'axe (5), au bâti (9).

Le piston contient à chacune de ses extrémités huit patins aérostatiques chargés d'assurer le centrage et un mouvement relatif sans contact entre celui-ci et le cylindre (6), tout en gardant une rigidité aux mouvements parasites autres que celui de translation dans la direction Z.

Dans la partie supérieure du cylindre (6) est placé le patin principal construit dans la pièce (3). Celle-ci est fixée au cylindre par l'intermédiaire de la plaque (1).

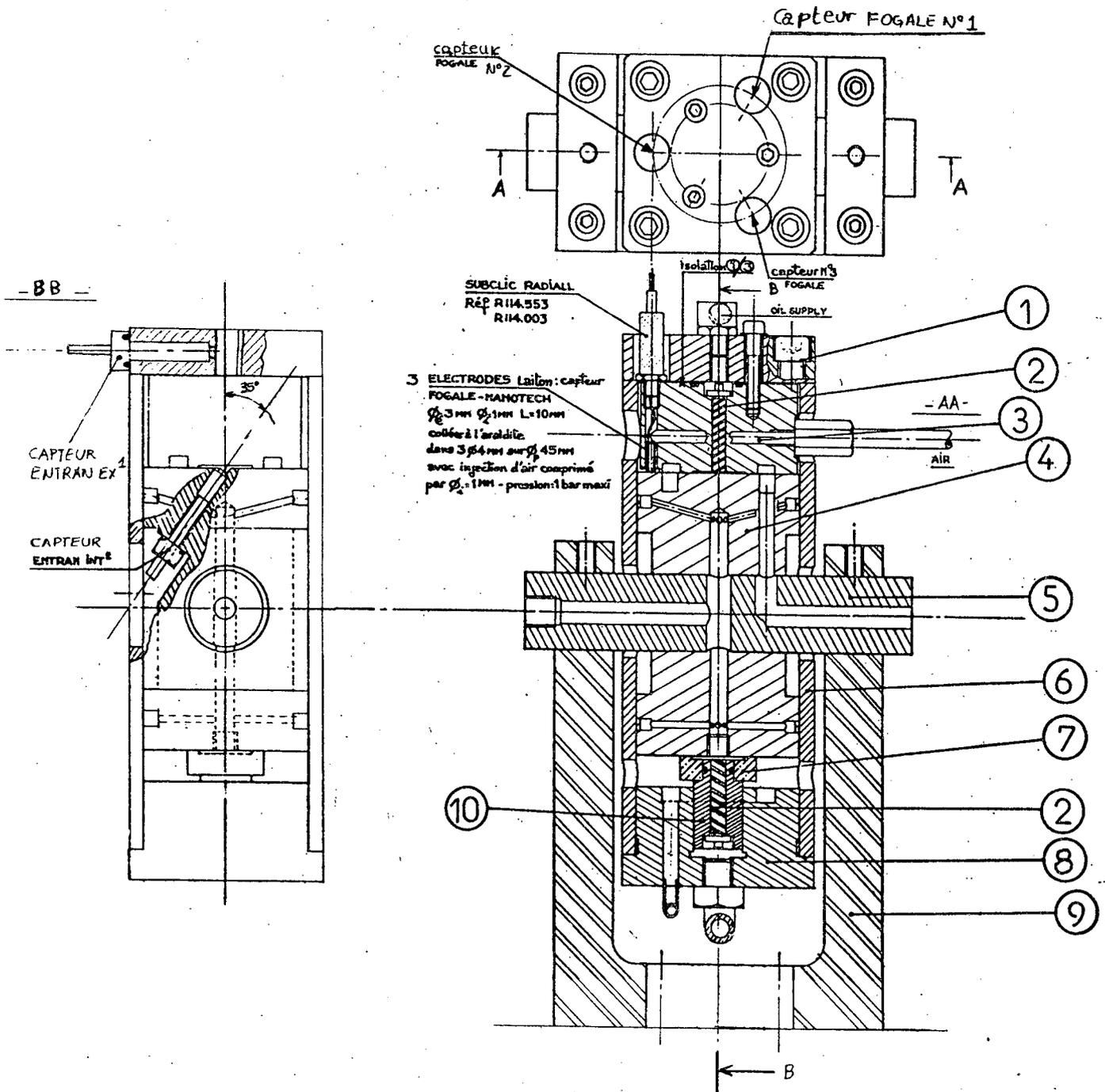


Fig. 66 - Vue générale du banc élémentaire.

A l'extrémité inférieure du cylindre (6), la pièce (8) contient un alésage coaxial au cylindre (6) et au patin principal où coulisse le piston mobile (10) qui supporte le patin de pré-charge (7).

Les patins principal et de pré-charge se trouvent ainsi, respectivement, en regard à des faces supérieure et inférieure du piston (4), de façon à simuler le guidage dans le banc linéaire.

L'arrivée d'air qui alimente les patins aérostatiques s'effectue à travers une canalisation aménagée dans l'axe (5), qui communique avec un circuit d'alimentation disposé à l'intérieur du piston, voir figure 67.

Le débit du patin principal est recueilli dans une gorge annulaire construite dans la face supérieure du piston (4) reliée au conduit aménagé dans l'axe (5), où le débit d'huile pourra être mesuré.

Le même principe est utilisé pour évacuer le débit d'huile qui sort de l'ensemble patin-piston de pré-charge par la gorge usinée dans la pièce (8).

La pression qui règne à l'intérieur de l'alvéole du patin principal est mesurée par un capteur de type ENTRAN EPX 35 (précision de 0.5%, étendue de mesure 35 bars), logé dans le piston fixe (4). La pression source est mesurée par un deuxième capteur identique au premier placé dans la pièce (1), juste en amont de la résistance hydraulique qui alimente le patin.

Le jeu du patin principal, entre les pièces (3) et (4), est mesuré par l'intermédiaire de trois capteurs capacitifs installés dans la pièce (3).

Ces trois capteurs sont coplanaires avec la surface inférieure du patin principal, et disposés équidistants à 120 degrés sur une circonférence extérieure à la lèvre du patin. Ils permettent en principe de déceler (résolution) des variations de jeu de l'ordre de 5 nanomètres.

A l'intérieur de chaque capteur il existe une canalisation de faible diamètre qui conduit de l'air sous une faible pression jusqu'à la surface de mesure; ceci à pour but d'éviter que l'huile puisse se déposer entre le capteur et le piston lors des essais.

L'huile arrive de la centrale hydraulique sous une pression P_1 maximale de $25 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, par l'intermédiaire d'un raccord fixé à la plaque (1). Le schéma du circuit hydraulique est montré dans la figure 67.

Après la résistance hydraulique (2), le fluide atteint la poche alvéolaire à la pression P_a où la force créée par le champ de pression soulève le patin et par suite le cylindre (6).

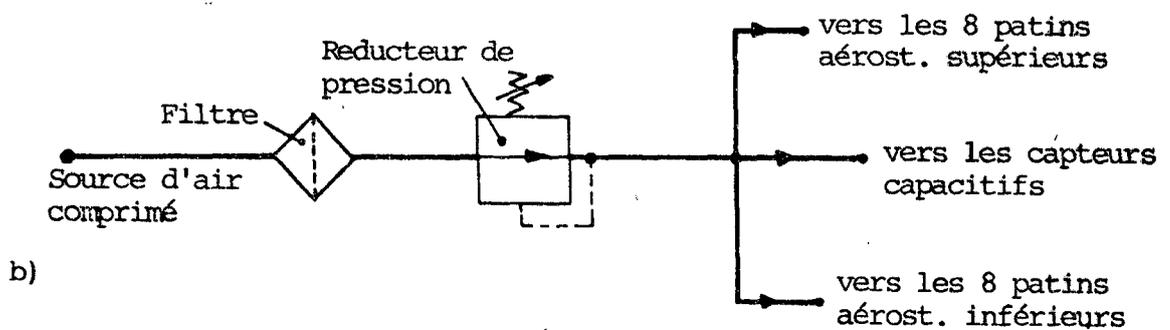
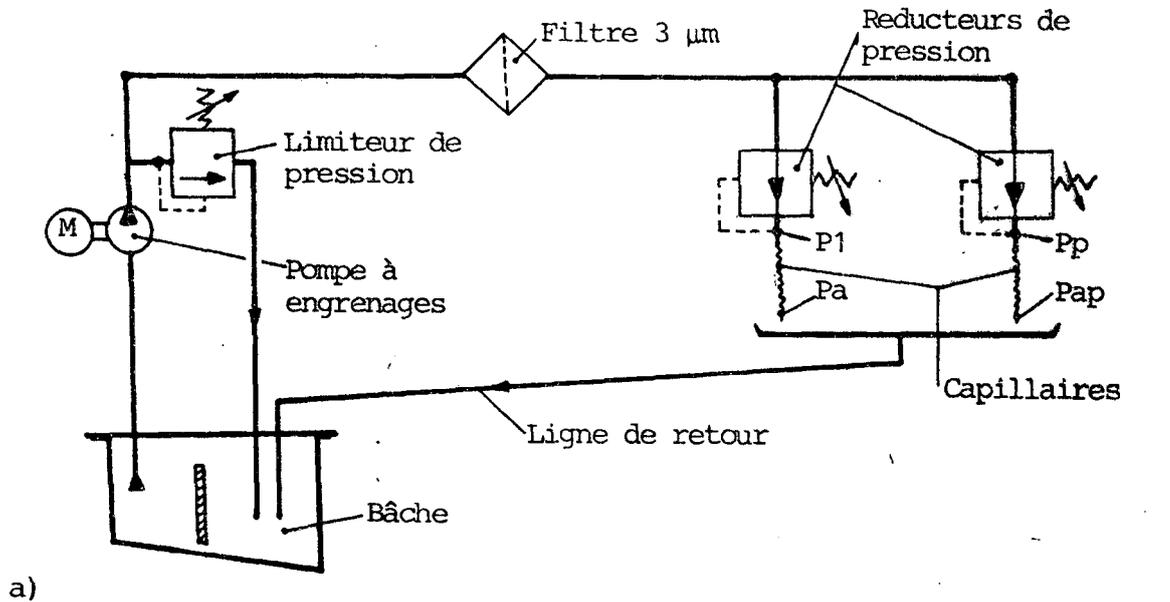


Fig. 67 - Circuits d'alimentation : a) pour l'huile, b) pour l'air.

Le jeu qui s'établit entre le patin principal et le piston fixe (4) permet de créer sous la lèvre du patin un film de fluide qui lui confère sa rigidité aux perturbations extérieures.

VIII.2 - CARACTERISTIQUES ET ETALONNAGE

VIII.2.1 - Données Physiques et Géométriques

Les patins principal et de pré-charge sont identiques à ceux utilisés pour le banc linéaire. Les dimensions sont:

Rayon extérieur:	$Re = 13. \times 10^{-3} \text{ m}$
Rayon intérieur :	$Ri = 9. \times 10^{-3} \text{ m}$
Profondeur de l'alvéole:	$e = 1. \times 10^{-3} \text{ m}$
Diamètre du piston:	$Dp = 17. \times 10^{-3} \text{ m}$
Longueur du piston:	$Lp = 20. \times 10^{-3} \text{ m}$

La résistance hydraulique a les mêmes dimensions pour les deux patins, avec une longueur de capillaire de $124. \times 10^{-3} \text{ m}$ et un diamètre équivalent de $4. \times 10^{-4} \text{ m}$, ce qui donne à priori un coefficient de résistance $Kc = 5.07 \times 10^{-15} \text{ m}^3$.

Tous les essais sont effectués avec les caractéristiques suivantes:

- fluide : huile minérale ISO 46 de viscosité dynamique 0.1166 N.s/m^2 à une température de $20 \text{ }^\circ\text{C}$ et masse volumique $\rho = 877 \text{ Kg/m}^3$.
- pression d'alimentation de l'huile: $10 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ à $25 \times 10^5 \text{ N/m}^2$;
- pression d'alimentation de l'air : $5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$.

VIII.2.2 - Etalonnage des Résistances Hydrauliques

Avant d'effectuer les essais des patins, il faut connaître avec précision la valeur du coefficient de résistance Kc du tube capillaire.

Ainsi, une série de trois groupes d'essais avec des pressions différentes a été réalisée, soit $10, 15$ et $20 \times 10^5 \text{ N/m}^2$. La sortie du capillaire s'effectuait à la pression atmosphérique.

Pour chaque pression d'alimentation il a eu trois mesures de débit correspondant à des temps de $10, 15$ et 20 minutes. La masse d'huile recueillie a été pesée et converti ensuite en débit volumique. La température lors des essais était d'environ 19°C , ce qui donne une viscosité pour l'huile de $\mu = 0.12 \text{ N.s/m}^2$.

L'expression du coefficient de résistance K_c est obtenue à partir de (10) sous la forme, pour $P_a = 0$: $K_c = \mu Q / P_1$. Les résultats expérimentaux sont donnés ci-dessous :

$P_1(\text{N/m}^2)$	Temps(min)	Débit(m^3/s)	$K_c(\text{m}^3)$
10×10^5	10	4.181×10^{-8}	5.13×10^{-15}
10×10^5	15	4.150×10^{-8}	5.09×10^{-15}
10×10^5	20	4.135×10^{-8}	5.07×10^{-15}
15×10^5	10	6.258×10^{-8}	5.12×10^{-15}
15×10^5	15	6.232×10^{-8}	5.10×10^{-15}
15×10^5	20	6.220×10^{-8}	5.09×10^{-15}
20×10^5	10	8.410×10^{-8}	5.16×10^{-15}
20×10^5	15	8.410×10^{-8}	5.15×10^{-15}
20×10^5	20	8.430×10^{-8}	5.16×10^{-15}

Donc la valeur moyenne de K_c est $5.12 \times 10^{-15} \text{ m}^3$. L'erreur maximale du débit obtenu sur les mesures est de 0.8% pour le débit et de 0.9% du coefficient K_c , ce qui correspond à un erreur de 1.2 millimètre sur les 124 millimètres de la longueur théorique du capillaire.

La courbe d'étalonnage est représentée sur la figure 68, avec la droite de régression linéaire construite autour des points d'essai.

L'équation correspondant de la droite de régression linéaire est:

$$P_1 = 2.345585 Q + 0.29$$

avec un coefficient de corrélation égal à 0.999 . La valeur K_c peut alors en être déduite et vaut $5.116 \times 10^{-15} \text{ m}^3$.

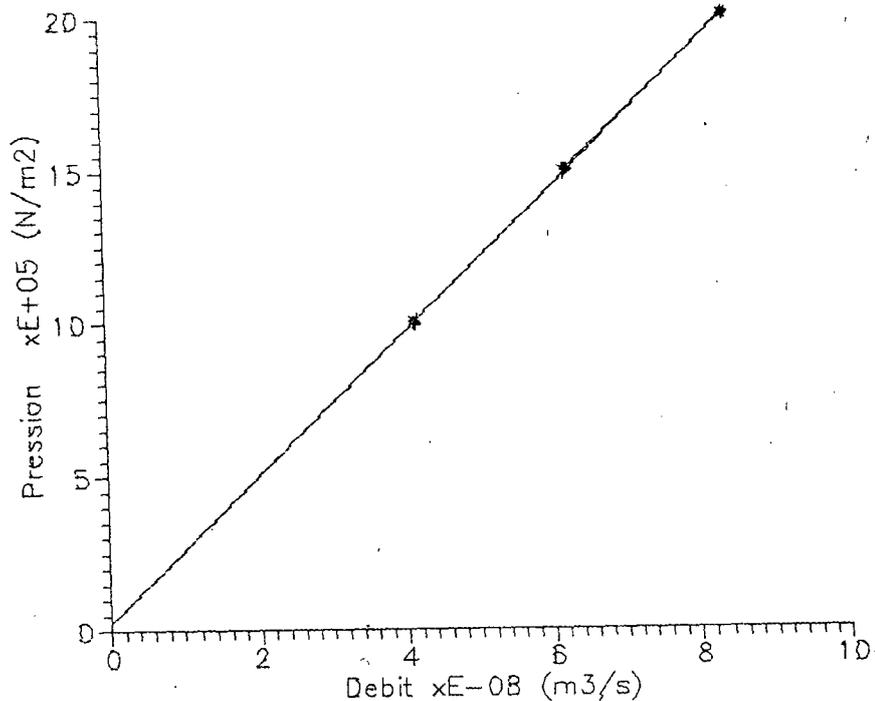


Fig. 68 - Courbe du débit en fonction de la pression .

VIII.2.3 - Etalonnage des capteurs Capacitifs

Il nous reste encore à étalonner les capteurs de déplacement capacitifs installés à côté du patin. Les essais ont été réalisés amicalement au CETIM par monsieur CHARON, avec l'aide d'une table de déplacement linéaire MICRO CONTROLÉ dont la précision est de 0.1 microns. Le mouvement du plateau de la table a été mesuré avec un capteur linéaire inductif et montré sur un afficheur digital.

L'essai consiste à faire rapprocher et éloigner le plateau situé en face de la pièce contenant les trois capteurs maintenus dans une position fixe pendant toute la durée des essais .

Les capteurs capacitifs NANOTECH ayant été montés affleurants,

il ne fut pas possible d'arriver jusqu'au contact avec le plateau pour obtenir le "zéro"; en effet, dans cette position il existe un court circuit électrique et la chaîne d'acquisition devient saturée. Ainsi la position "zéro" a due être obtenue par extrapolation des courbes relevées lors des essais.

Le jeu existant entre le capteur et le plateau est transformé par la chaîne électronique en une tension qui peut varier de 0 à 10 volts pour une distance allant jusqu'à 50 microns.

Les résultats obtenus lors des essais pour les trois capteurs sont montrés dans la figure 69.

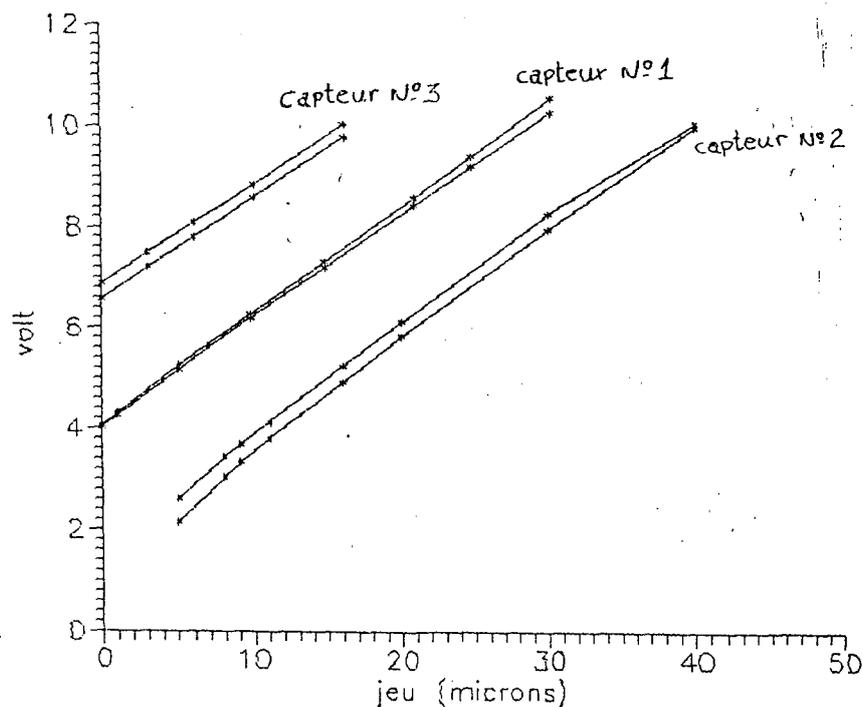


Fig. 69 - Les essais d'étalonnage des capteurs capacitifs.

Pour chacun des trois capteurs nous avons obtenu une droite de régression linéaire qui minimise les erreurs entre les diverses mesures effectuées ; les coefficients de corrélation pour les trois droites sont du même ordre, soit 0.99. La figure 70 montre les courbes d'étalonnage des trois capteurs avec l'extrapolation du point zéro.

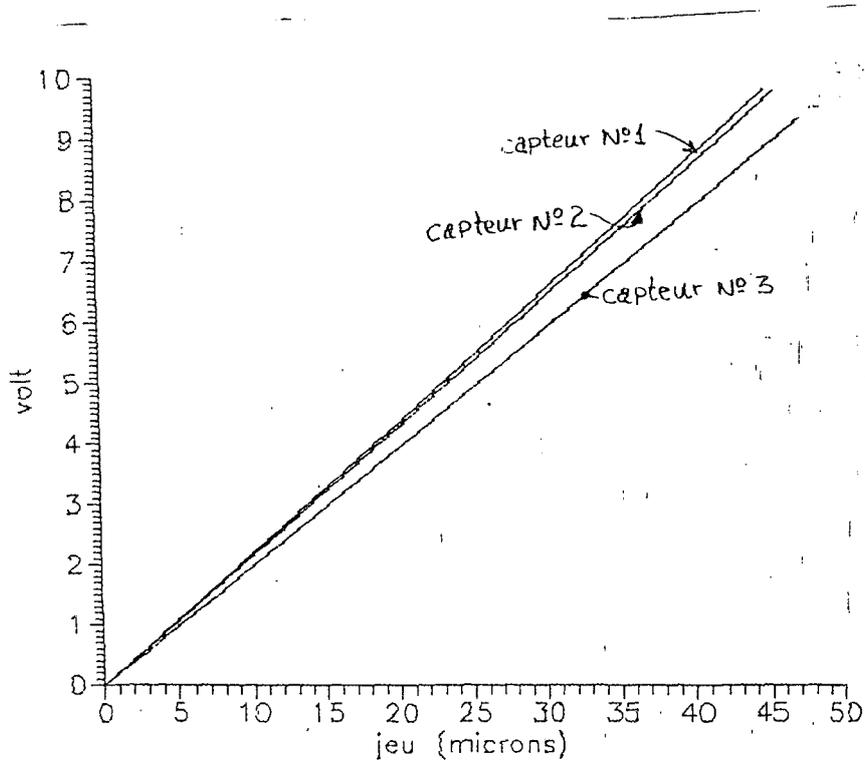


Fig. 70 - Courbes d'étalonnage des capteurs capacitifs.

Pour chacun des capteurs nous avons tracé une courbe qui montre l'erreur existant entre les mesures effectuées et sa droite de régression, voir les figures 71, 72 et 73.

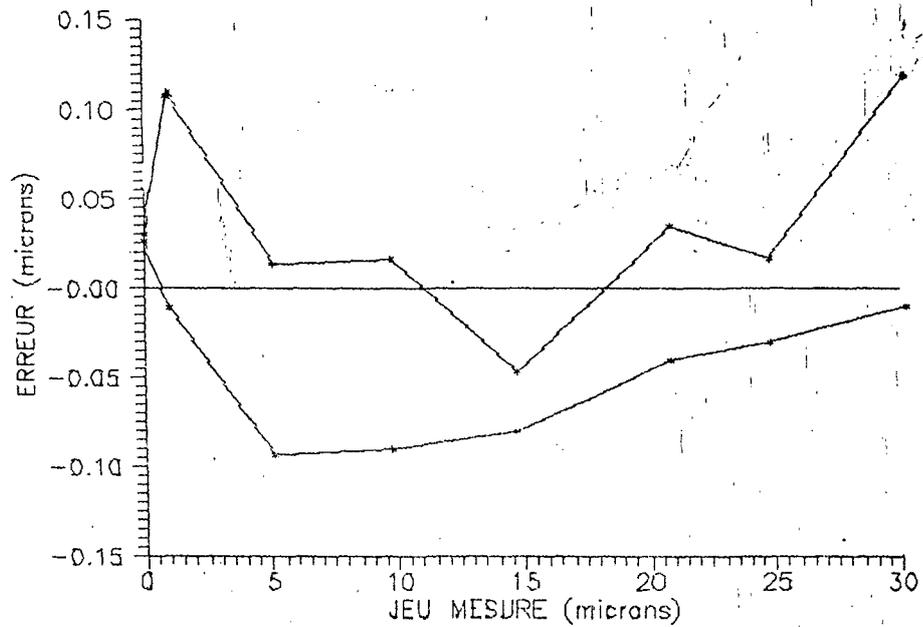


Fig. 71 - Erreur entre les mesures et la droite d'approximation pour le capteur n° 1 ($\text{volt} = 0.213341 \text{ jeu} + 4.0959835$).

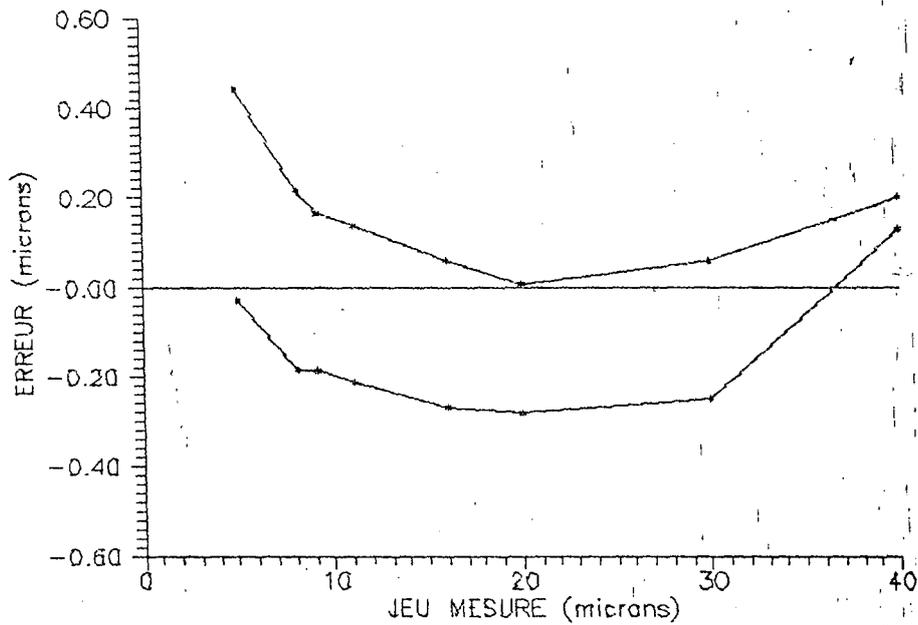


Fig. 72 - Erreur entre les mesures et la droite d'approximation pour le capteur n° 2 (volt= 0.2170795 jeu + 1.508018).

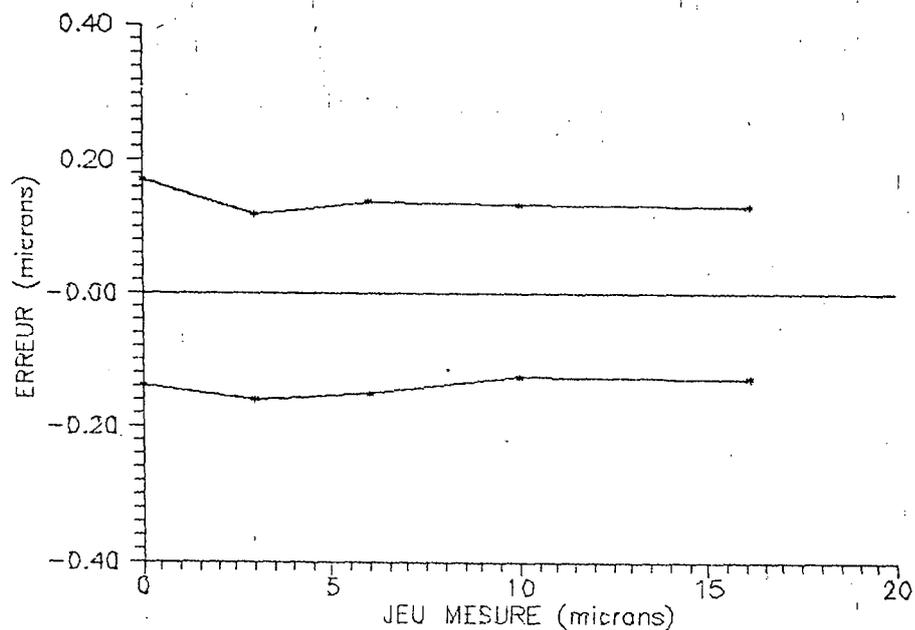


Fig. 73 - Erreur entre les mesures et la droite d'approximation pour le capteur n° 3 (volt= 0.1963025 jeu + 6.751961).

Maintenant, après l'étalonnage de la résistance hydraulique et des capteurs capacitifs, les essais pourront être effectués; ils seront divisés en deux parties principales, à savoir pour le patin isolé puis pour le patin couplé.

VIII.3 - ESSAIS DU PATIN ISOLE

Les essais pour la validation du modèle mathématique du patin isolé ont été réalisés sans tenir compte de l'élément de pré-charge, c'est à dire qu'au lieu d'utiliser le patin de pré-charge pour créer la force qui s'oppose à la portance du patin principal, nous avons employé des poids calibrés installés sous la pièce (8) voir figure 74.

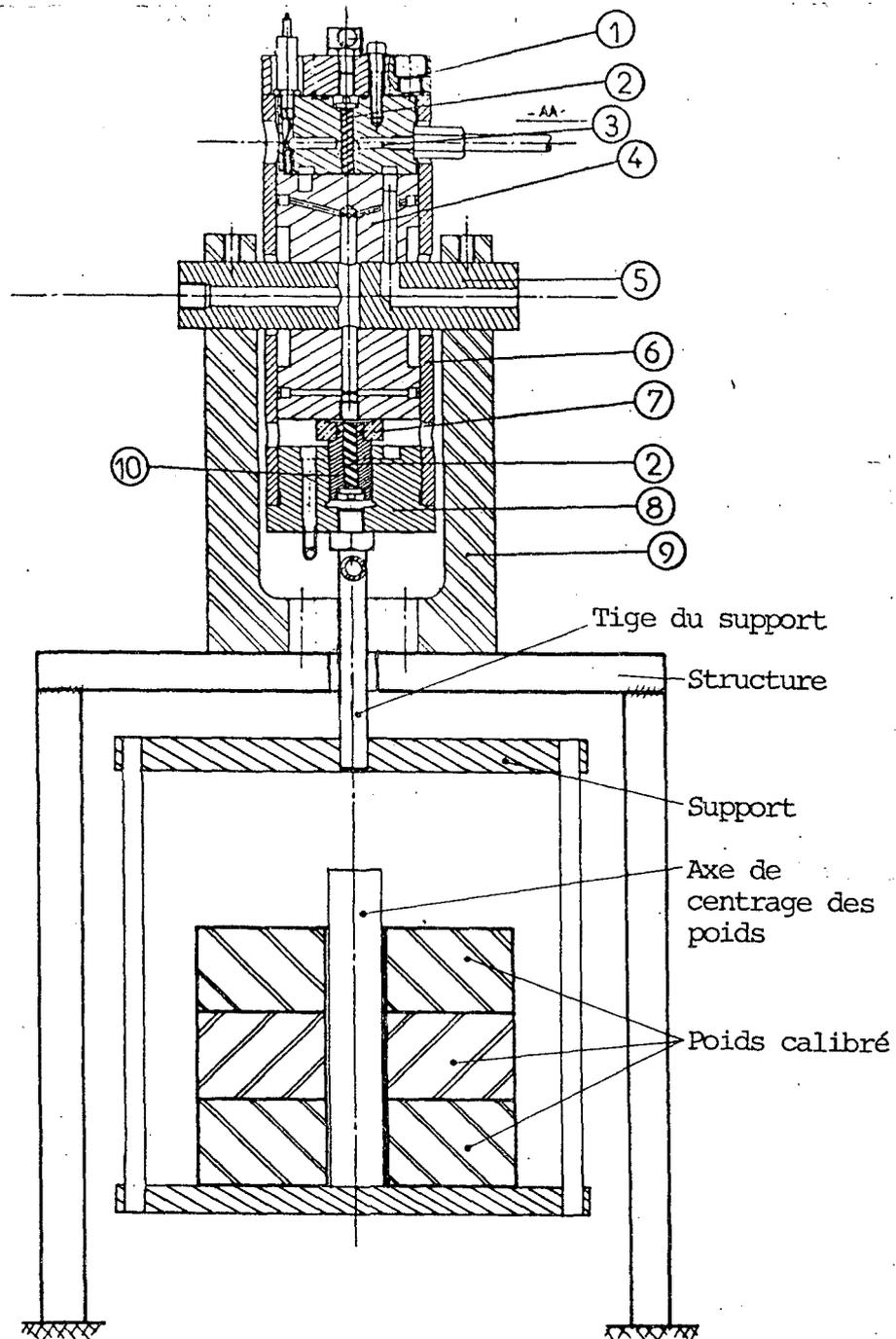


Fig. 74 - Support pour le chargement du patin .

Plus exactement , la charge totale appliquée sur le patin est composée d'éléments dont le poids est de 5 daN chacun.

Les éléments qui composent le chargement choisi sont placés à l'intérieur d'une enceinte ou support, et suspendus par l'intermédiaire d'une tige reliée à la pièce (8) . L'effort est transmis au patin principal par le cylindre (6) , voir figure 74 .

Aux poids calibrés, il faut ajouter celui du cylindre (6) ,et des pièces (1), (3), et (8) , ce qui donne 3.64 daN et du support, 13.58 daN ce qui fait un total de 18.2 daN .

VIII.3.1 - Essais statiques

Pour les essais en régime statique du patin isolé, la pression d'alimentation est maintenue fixe et nous faisons varier la charge supportée par le patin. De cette manière il est possible relever sur les capteurs de pression la variation de la pression alvéolaire et d'en déduire le rapport P_a/P_i . Le jeu est mesuré par les capteurs capacitifs dont la tension relevée sur la chaîne d'acquisition et convertie en à l'aide des courbes (70). Le débit est mesuré à la sortie de l'axe (5).

La température lors des essais a été d'environ 18°C, ce qui donne une viscosité de 0.13 N s/m^2 . La valeur de la résistance hydraulique utilisée est de $5.12 \times 10^{-15} \text{ m}^3$.

Les courbes qui suivent présentent la comparaison des résultats expérimentaux et théoriques concernant les variations de la pression alvéolaire , du débit et de la rigidité statique en fonction du jeu.

Tous les essais ont été réalisés deux fois pour montrer la répétabilité des résultats .

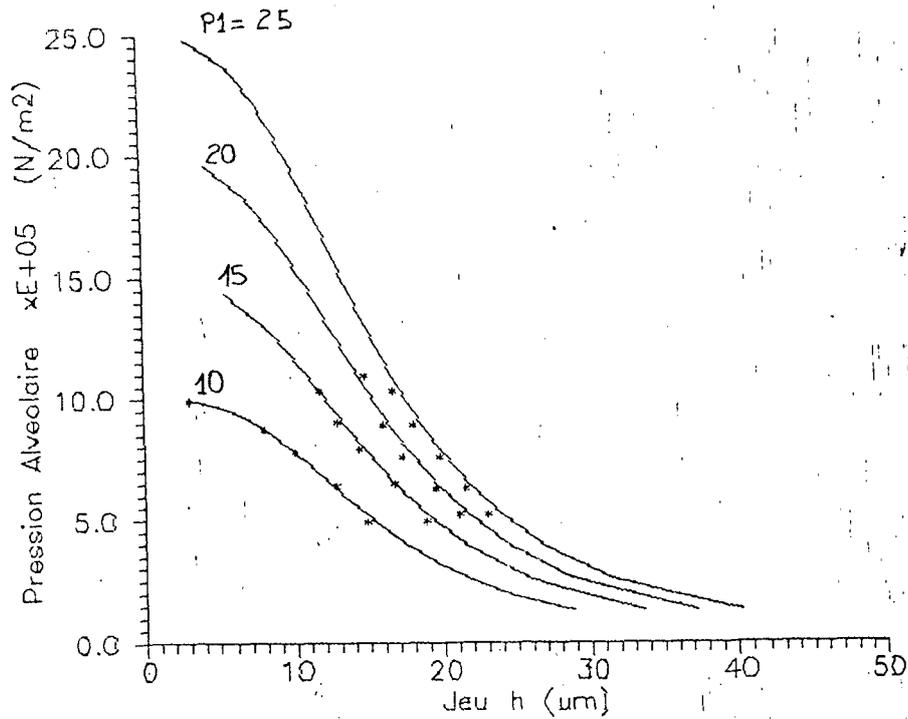


Fig.75-Courbes théoriques et expérimentales de Pa en fonction du jeu.

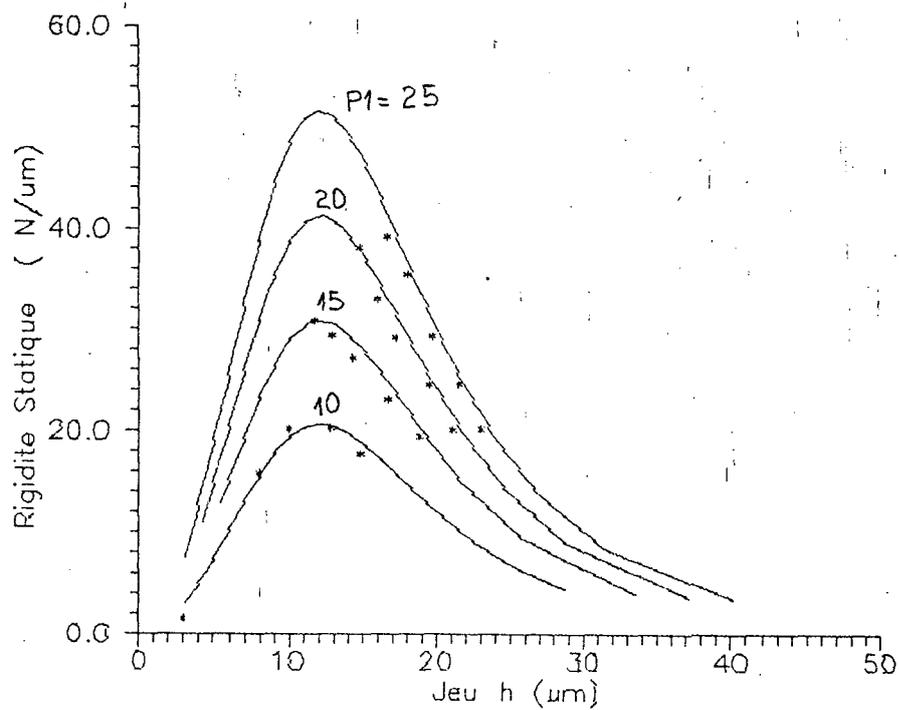


Fig.76-Courbes théoriques et expérimentales de la rigidité en fonction du jeu.

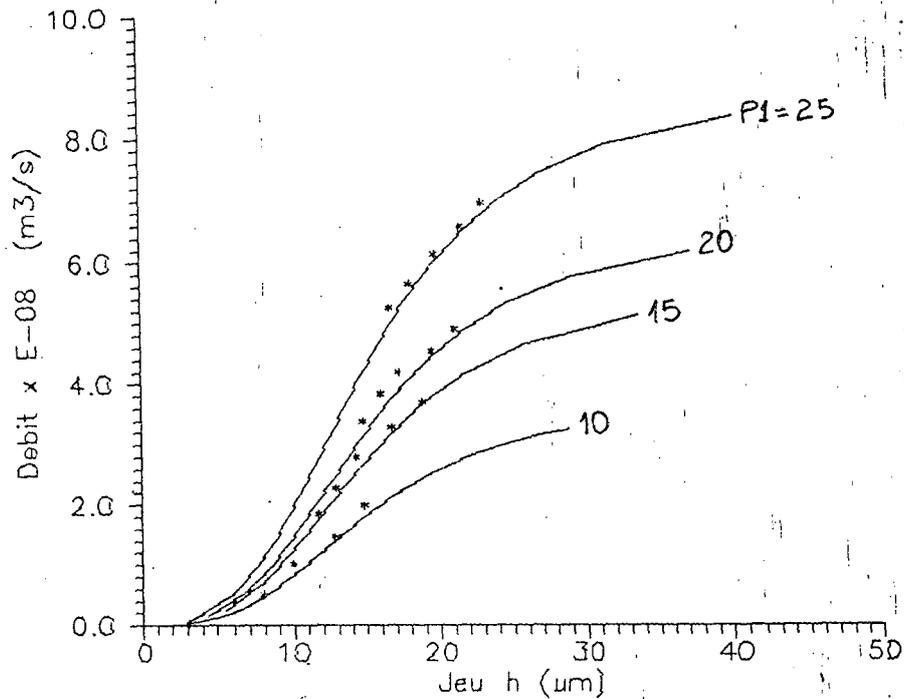


Fig.77-Courbes théoriques et expérimentales du débit en fonction du jeu.

Les résultats expérimentaux sont conformes au modèle mathématique développé dans le chapitre II. La pression alvéolaire présente une différence inférieure à 0.15 Pascals. Dans tous les essais la répétabilité est de l'ordre de 1%.

Les points expérimentaux correspondant au débit de fuite du patin présentent une valeur légèrement supérieure au débit calculé. En effet, nous avons relevé lors des expériences que le patin avait une faible inclinaison (inférieure à 40 seconds d'arc), par rapport à la surface du piston.

VIII.3.2 - Essais dynamiques

Pour les essais du patin isolé en régime dynamique nous allons appliquer un chargement du type palier, voir figure 78.

Dans ce cas , l'aquisition de la valeur de la tension à la sortie de la chaîne capacitive a été effectuée par un micro ordinateur.

Le signal analogique de la tension passe d'abord par un convertisseur analogique/digital de 12 bits, pour ensuite être traité par un programme informatique qui fournit directement le jeu du patin en microns . La fréquence d'acquisition pouvait être variée de 20 à 1500 Hz.

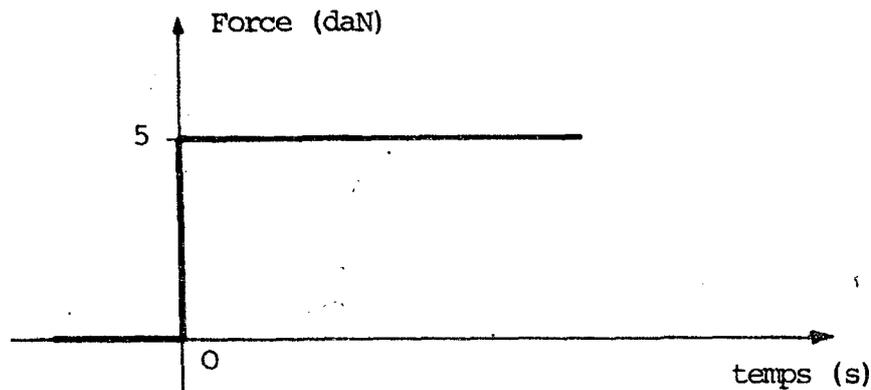


Fig. 78 - Chargement dynamique du type palier.

Les caractéristiques du point de fonctionnement autour du quel sont effectués ces essais sont :

pression d'alimentation de 20 et 25×10^5 N/m² ;

portance du patin de 23.2 et 28.2 daN ;

$K_0 = 5.12 \times 10^{-15}$ m³ ;

température de 17°C et $\mu = 0.15$ N s/m².

Tous les essais ont été répétés huit fois pour s'assurer des résultats obtenus. Les résultats expérimentaux sont comparés avec les courbes théoriques sur les figures 78, 79, 80 et 81.

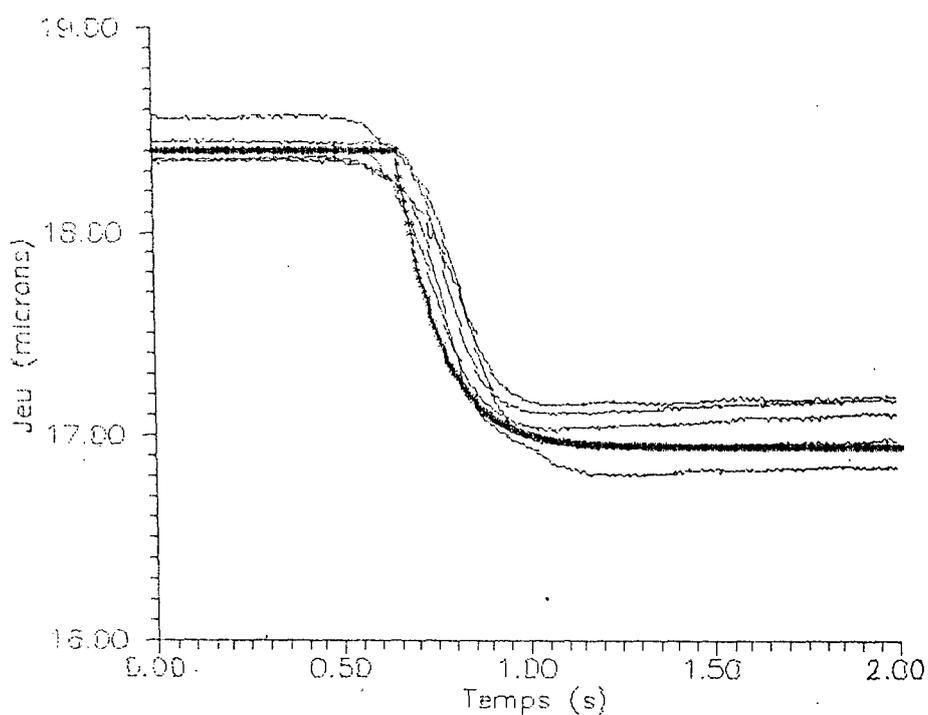


Fig.78-Comparaison des résultats théoriques(points) et expérimentaux pour le patin alimenté à $20 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ avec une portance de 23.2 daN.

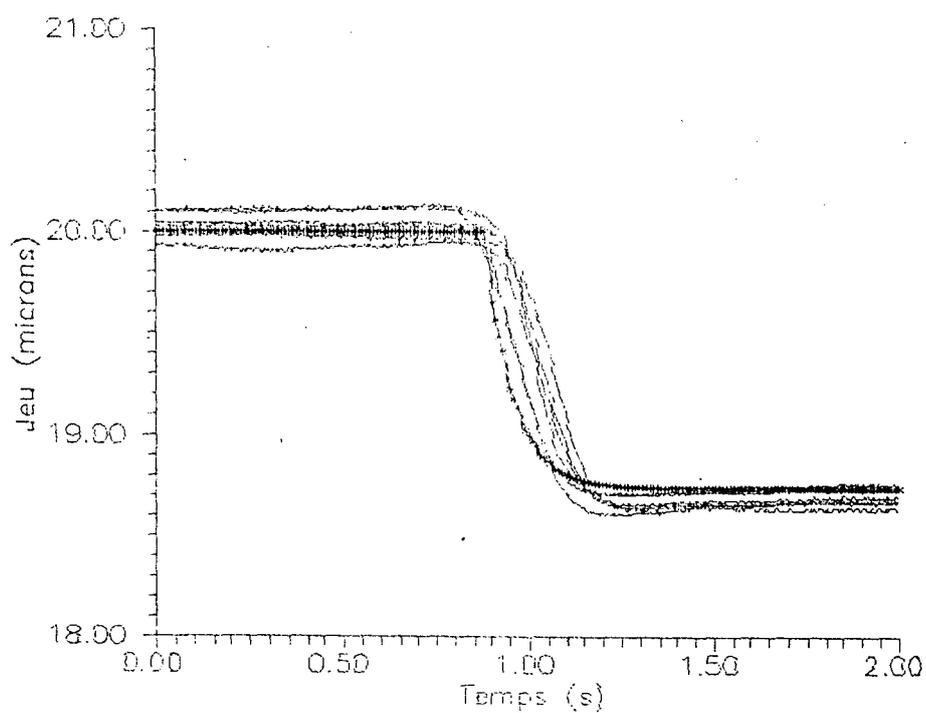


Fig.79-Comparaison des résultats théoriques(points) et expérimentaux pour le patin alimenté à $25 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ avec une portance de 23.2 daN.

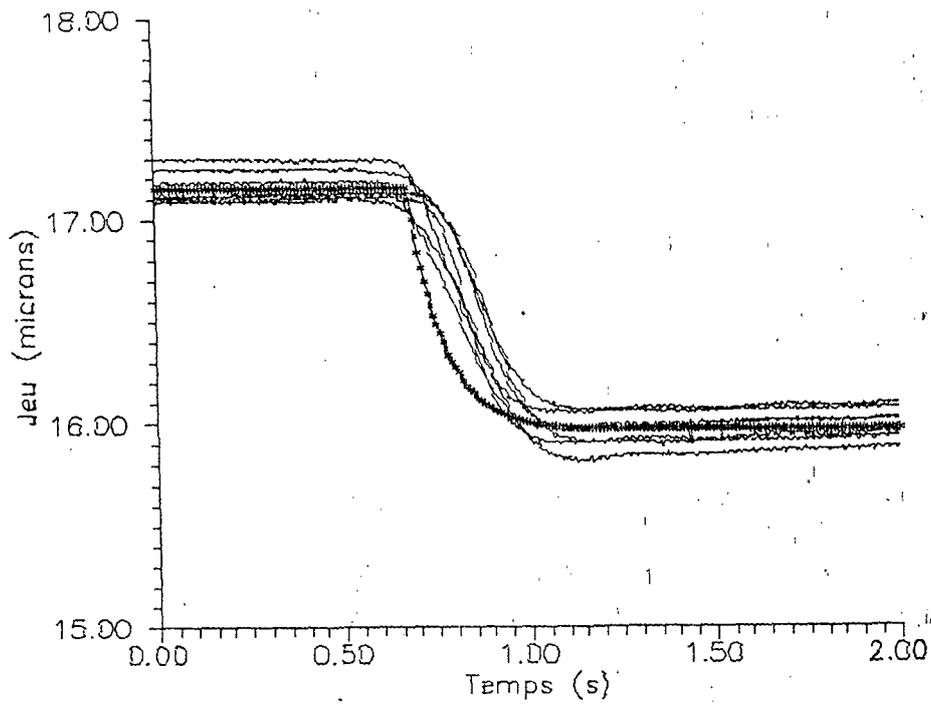


Fig.80-Comparaison des résultats théoriques(points) et expérimentaux pour le patin alimenté à $20 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ avec une portance de 28.2 daN.

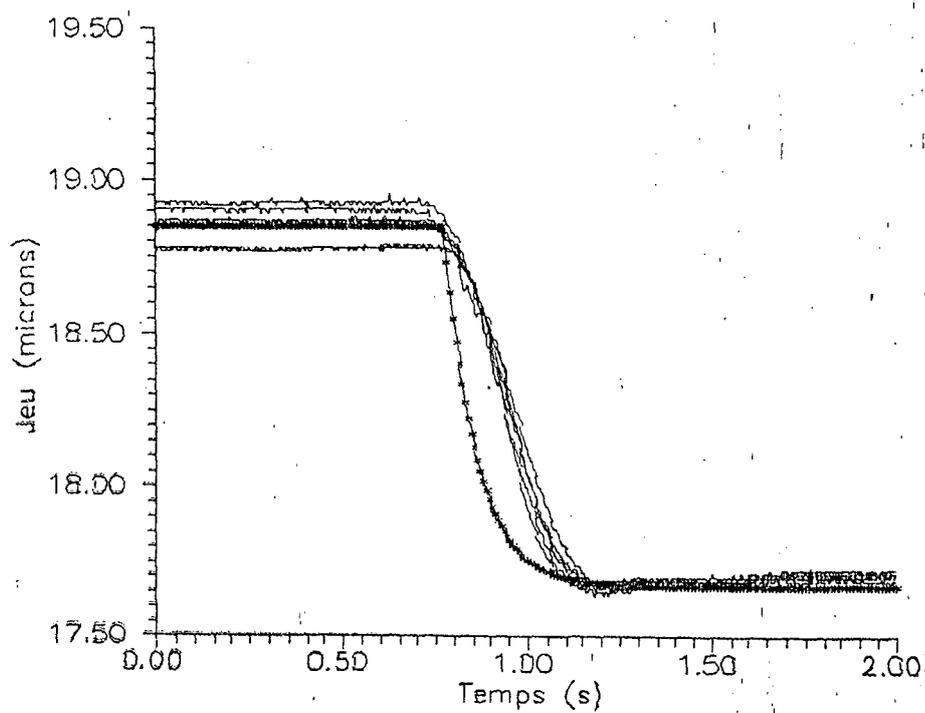


Fig.81-Comparaison des résultats théoriques(points) et expérimentaux pour le patin alimenté à $25 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ avec une portance de 28.2 daN.

Nous pouvons remarquer sur ces figures que les points théoriques et les résultats expérimentaux présentent une bonne concordance.

Les différences observées au début du mouvement transitoire sont dues à la difficulté d'appliquer la charge dynamique d'une manière instantanée.

Les valeurs théoriques de la fréquence propre et du coefficient d'amortissement calculés par les formules (109) et (113), montrés dans le tableau ci dessous ont été obtenus de façon à faire superposer les courbes expérimentales et théoriques:

ω_n calculé	ω_n expérimental	ξ_0 calculé	ξ_0 expérimental
1206	1238	31.31	35.21
1146	1180	24.26	30.23
1267	1292	32.89	36.66
1198	1221	24.92	29.57

Nous pouvons remarquer aussi que le coefficient d'amortissement calculé est légèrement inférieur à celui obtenu lors des expériences; ceci est dû au fait qu'il existe un frottement résiduel entre le piston fixe (4) et le cylindre (6).

VIII.4 - ESSAIS DES PATINS COUPLES

Les essais du système couplé constitué par le patin principal et le patin de pré-charge ont été effectués en régime statique et dynamique.

Dans ce cas c'est le patin de pré-charge qui fournit la force principale de chargement qui s'oppose à la portance du patin principal. La pression d'alimentation en tête du piston mobile peut être facilement changée pour simuler diverses valeurs de chargement statique.

Le chargement dynamique appliqué sur le support est du même type que celui utilisé dans le cas du patin isolé.

VIII.4.1 -Essais statiques

Les courbes qui suivent montrent la comparaison des résultats des essais avec les courbes théoriques pour différentes pressions d'alimentation ; les points de fonctionnement autour desquels nous avons réalisé les essais sont les mêmes que ceux utilisés pour le patin isolé.

Dans ce cas il faut préciser que la pression de pré-charge est de 10 et 15 $\times 10^5$ N/m² avec une température de 19°C soit $\mu = 0.12$ N s/m².

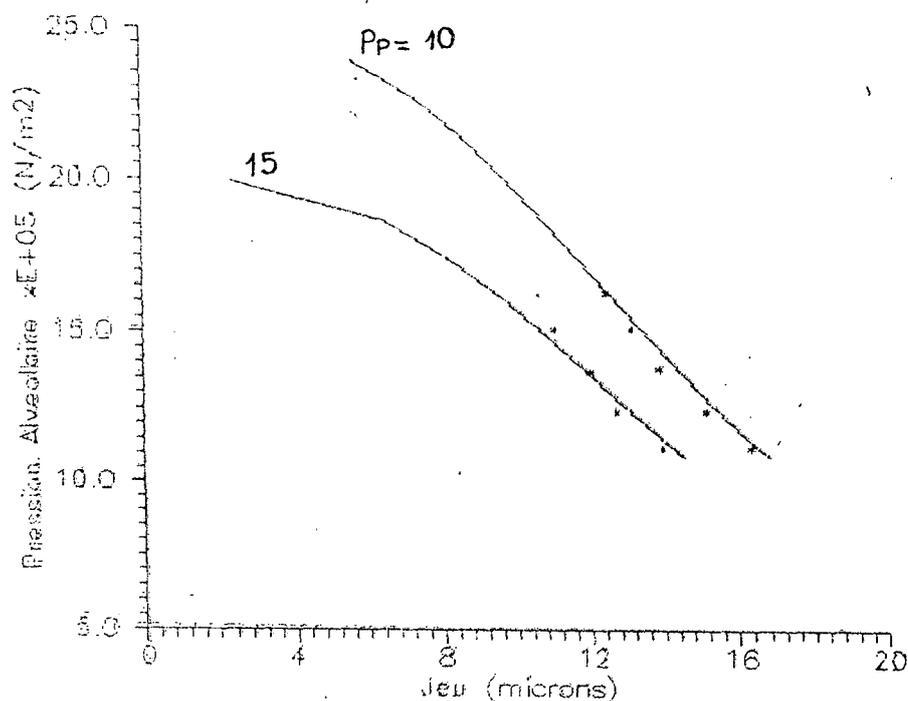


Fig.82-Comparaison des résultats théoriques(points) et expérimentaux pour le patin couplé alimenté à 20×10^5 N/m² avec une portance variant de 18.2 à 38.2 daN.

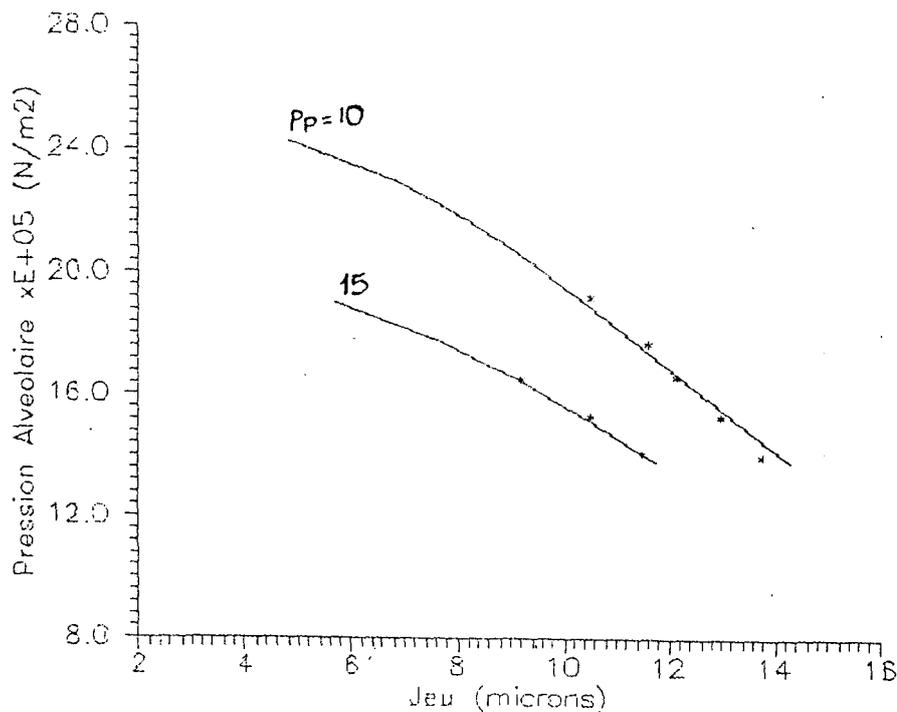


Fig.83-Comparaison des résultats théoriques(points) et expérimentaux pour le patin couplé alimenté à $25 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ avec une portance variant de 18.2 à 38.2 daN.

VIII.4.2-Essais dynamiques

Ces essais ont été faits de façon similaire à ceux effectués pour le patin isolé et répétés huit fois. Dans ce cas la température est de 17°C et $\mu = 0.15 \text{ N s/m}^2$.

Les pressions d'alimentation sont de 20 et $25 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ et celles de pré-charge de 10 et $15 \times 10^5 \text{ N/m}^2$. Les résultats sont montrés sur les figures 84 à 88.

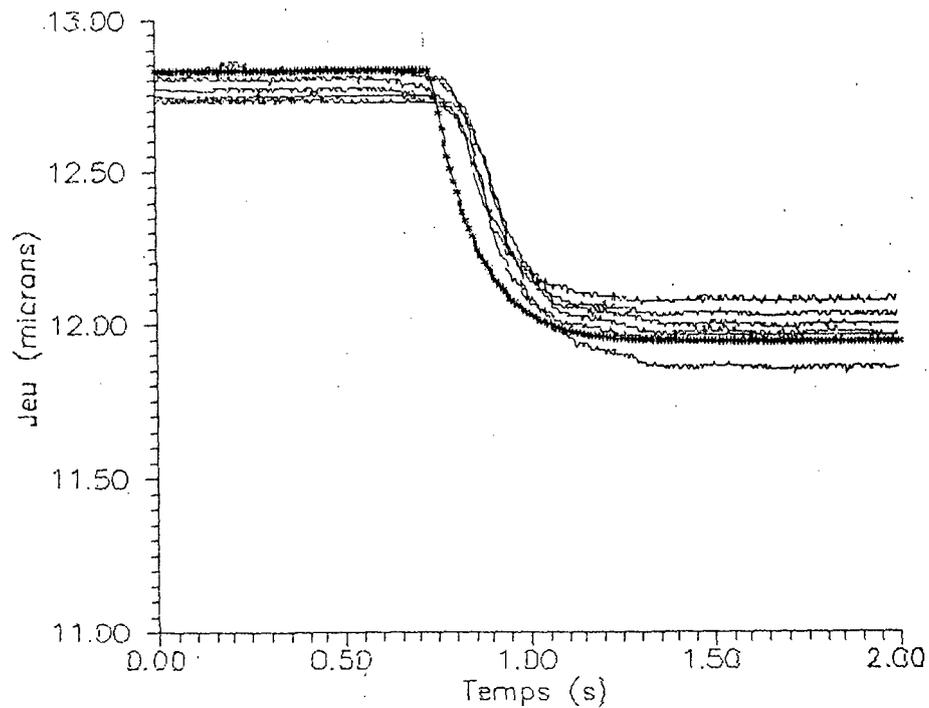


Fig.84-Comparaison des résultats théoriques(points) et expérimentaux pour le patin couplé alimenté à $20 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, pression de pré-charge de $10 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, la portance est de 23.2 daN.

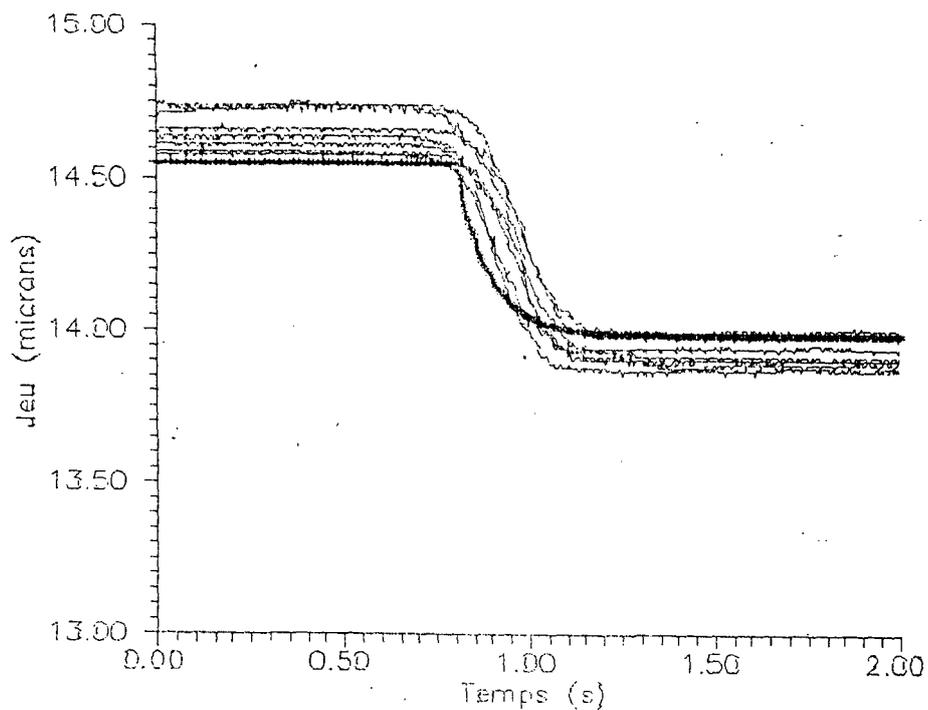


Fig.85-Comparaison des résultats théoriques(points) et expérimentaux pour le patin couplé alimenté à $25 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, pression de pré-charge de $10 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, la portance est de 23.2 daN.

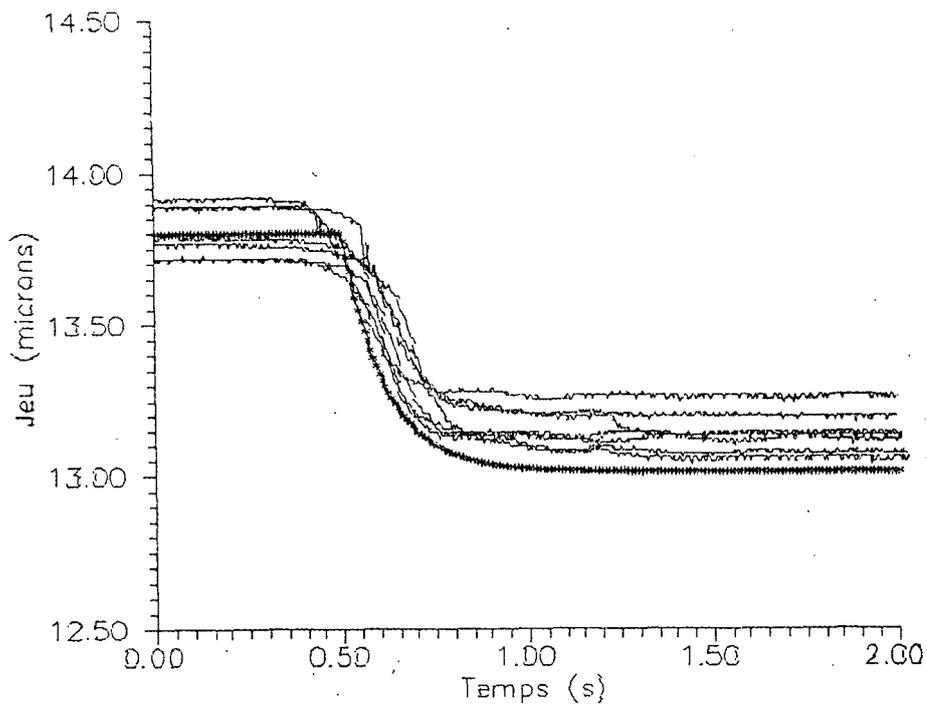


Fig.86-Comparaison des résultats théoriques(points) et expérimentaux pour le patin couplé alimenté à $25 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, pression de pré-charge de $10 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, la portance est de 33.2 daN.

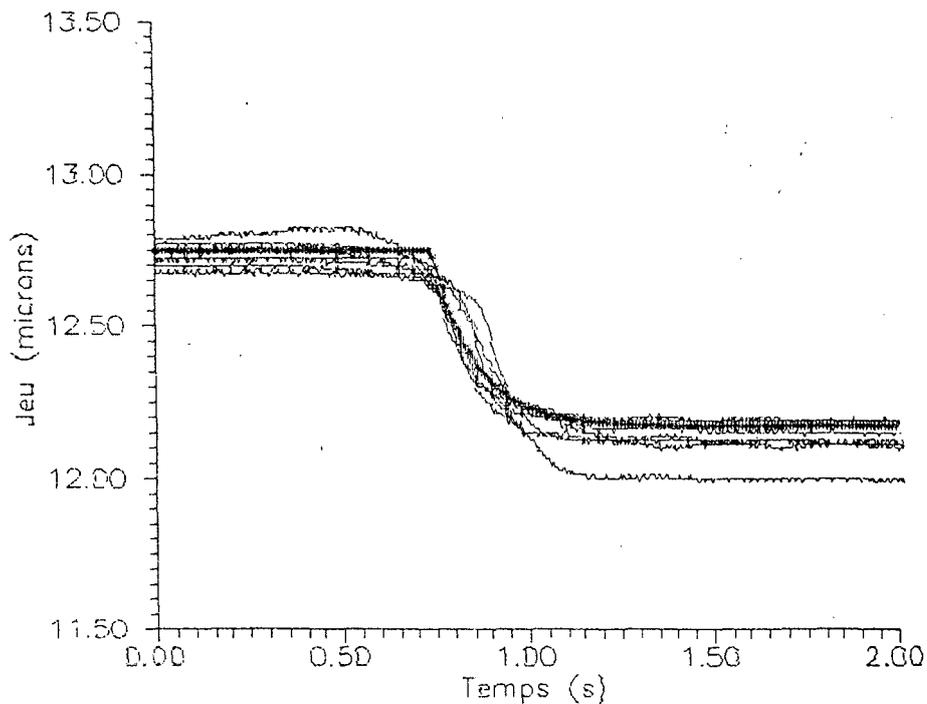


Fig.87-Comparaison des résultats théoriques(points) et expérimentaux pour le patin couplé alimenté à $25 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, pression de pré-charge de $15 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, la portance est de 23.2 daN.

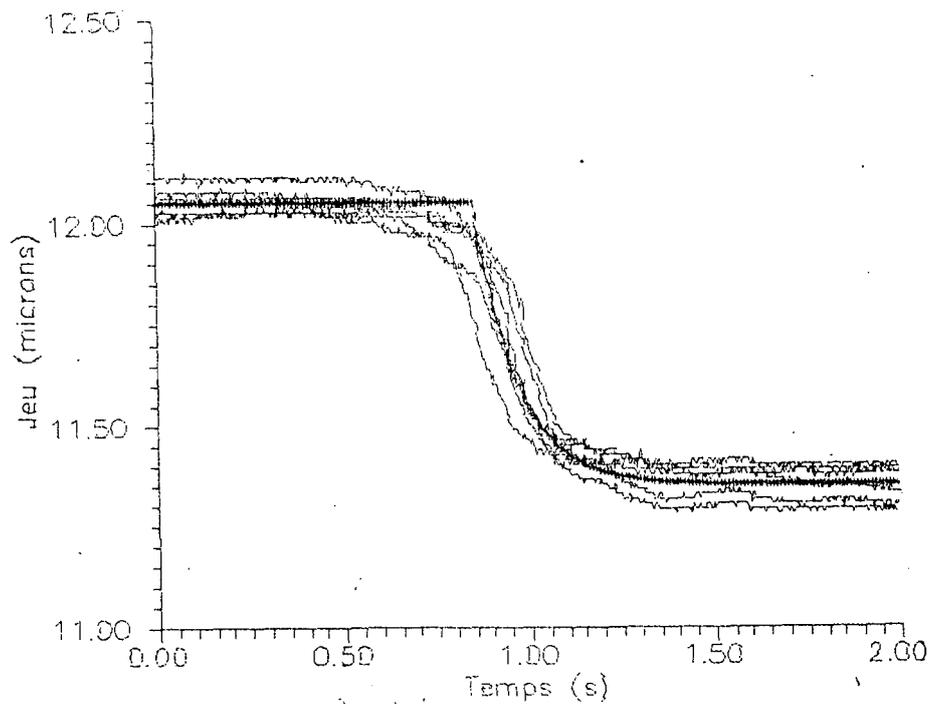


Fig.88-Comparaison des résultats théoriques(points) et expérimentaux pour le patin couplé alimenté à $25 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, pression de pré-charge de $15 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, la portance est de 33.2 daN.

Comme pour le cas du patin isolé, les courbes présentent une bonne conformité avec le modèle mathématique, et les différences remarquées se trouvent de nouveau au début du mouvement transitoire et dans le coefficient de frottement résiduel.

IX - CONCLUSION

L'étude du comportement statique et dynamique des patins hydrostatiques, isolés ou couplés, a été entreprise dans le but de maîtriser les caractéristiques de rigidité, raideur et amortissement de ce type de palier, pour la conception d'un guidage de haute précision.

Dans l'étude des patins hydrostatiques en régime stationnaire nous avons utilisé un tube capillaire pour créer la rigidité du patin.

Avec l'utilisation du capillaire le jeu sous la portée ne dépend pas de la viscosité du fluide, puisque ce sont les forces de viscosité au sein du tube qui sont responsables de la chute de pression entre l'alimentation et l'alvéole.

La rigidité est maximale quand la pression alvéolaire atteint la moitié de la pression d'alimentation, et intervient lorsque nous avons la les pertes de charge dans le capillaire et les portées sont identiques.

En dehors de ce point de fonctionnement la rigidité décroît paraboliquement avec le rapport des pressions.

Comme la rigidité est proportionnelle à la portance du patin, celle-ci est d'autant plus élevée que la surface de portée est réduite. Toutefois la diminution de la surface provoque deux désavantages: le débit augmente considérablement et le jeu de fonctionnement diminue ce qui augmente les risques d'atterrissage des patin sur les glissières.

Si le patin est faiblement incliné par rapport au plan du guidage, la portance n'est pas affectée tant que les effets hydrodynamiques restent négligeables, mais le débit de fuite est augmenté.

Dans le cas des patins aérostatiques les pressions d'alimentation employées sont beaucoup plus faibles que celles utilisées dans les systèmes hydrostatiques, dans ce cas il faut donc prévoir des patins dont la taille est plus importante. Même si la compressibilité permet d'augmenter un peu la portance, ce type de patin ne permet pas d'atteindre les spécifications du cahier de charges sans avoir recours à un surpresseur. D'autre part, il faudrait travailler avec un jeu très faible pour que le débit devienne acceptable ce qui conduit à un fonctionnement

délicat.

En outre, à cause des risques d'instabilité favorisés par la compressibilité du fluide, il faut diminuer au maximum le volume alvéolaire par rapport au volume sous la portée, ce qui contribue à la diminution de la portance du patin.

Donc, dans notre cas le système le plus adapté et qui permet de mieux atteindre les spécifications exigées est composé par des patins hydrostatiques.

La géométrie choisie est circulaire parce que celle-ci permet une plus grande précision d'usinage des surfaces, notamment celle des portées. D'après le modèle mathématique, le patin circulaire avec des rayons extérieur de 13 millimètres et intérieur de 9 millimètres est celui qui présente les caractéristiques optimales de fonctionnement pour notre cas.

L'étude dynamique du patin hydrostatique de géométrie circulaire a été réalisée en considérant que le fluide est incompressible. En effet nous avons montré que les effets de la compressibilité restent négligeables dans le domaine de fréquences de réponse envisageable, étant donné la fréquence propre et le coefficient d'amortissement du système.

La fréquence propre du patin apparaît comme dépendante de la pression d'alimentation, de l'aire de la portée, des dimensions du capillaire et du jeu. En effet, la fréquence augmente si le jeu diminue et elle diminue quand P_i , R_c , et A_p augmentent.

Pour le coefficient d'amortissement nous pouvons dire qu'il augmente avec la viscosité du fluide, la surface de la portée, la longueur du capillaire et la pression alvéolaire; et il diminue si le diamètre du capillaire et le jeu augmentent.

Ainsi, la stabilité du patin est garantie et nous pouvons affirmer que le patin hydrostatique qui a été conçu est toujours stable.

Pour augmenter la rigidité du patin nous avons employé un système de pré-charge constitué d'un deuxième patin hydrostatique monté sur un piston mobile aménagé à l'intérieur du chariot.

Pour chaque patin principal, il existe un patin de pré-charge placé coaxialement dans la face opposée du guidage.

Ce système présente un coefficient d'amortissement beaucoup plus élevé que celui du patin isolé, dû au fait que le piston mobile a un amortissement assez important.

La validation expérimentale a été effectuée sur un banc d'essais équipé de capteurs capacitifs donnant une résolution de l'ordre du 1/100 de micron.

Les résultats théoriques issus du modèle développé pour les cas du patin isolé et des patins couplés, en régime statique et dynamique, ont présenté une très bonne concordance avec les résultats expérimentaux.

La différence qui existe entre les courbes dynamiques expérimentales et théoriques se situe au début du mouvement transitoire, et est due à la difficulté d'appliquer le chargement dynamique d'une manière instantanée.

Nous avons remarqué aussi que le coefficient d'amortissement calculé est inférieur à celui relevé lors des expériences; ceci est dû au fait qu'il existe un frottement résiduel entre le piston fixe (4) et le cylindre (6) dans le montage expérimental.

L'erreur présentée entre les courbes expérimentales est au maximum de 0.1 microns pour des jeux compris entre 8 et 20 microns, ce qui représente une erreur relative de répétabilité meilleure que 1.25%.

Dans la conception du banc linéaire nous avons utilisé un chariot posé sur trois patins, correspondant à un choix d'isostatisme. Ce système a l'avantage de permettre d'identifier très rapidement le patin où se produit un changement du jeu.

L'utilisation du patin de pré-charge monté sur un piston mobile permet une correction automatique des défauts de rectitude et de parallélisme entre les faces des guidages. Ainsi, la précision du mouvement ne dépend que de l'état de la surface où glissent les patins principaux.

Ce système permet encore un changement rapide de la rigidité du chariot par simple réglage de la pression appliquée en tête du piston.

Les différents calculs de bâtis effectués par la méthode des éléments finis, ont montré que la solution optimale est l'introduction d'un troisième guidage où glissent les patins latéraux. Ce guidage a permis de surcroît l'emploi des patins supplémentaires pour compenser le poids du chariot et éviter ainsi le fléchissement des guidages horizontaux.

Si le bâti n'est pas posé sur une surface bien plane nous risquons d'induire des déformations sur les guidages; ce problème est résolu lorsque l'on pose sur trois points.

Mais cette solution s'avère mauvaise lorsque le chariot se

déplace; un calcul réalisé par la méthode des éléments finis nous montre qu'il existe une déflexion de l'ordre de 1.2 microns sur l'ensemble des guidages.

La solution adoptée consiste à augmenter le nombre de points de contact entre le bâti et sa base; ainsi il est prévu de poser le guidage sur un bloc de marbre présentant une très bonne planéité, le tout étant installé sur une table plus importante et moins précise.

Pour réduire les efforts parasites engendrés par les tuyaux d'alimentation des patins, installés sur le chariot, un système d'alimentation à tiges coulissantes qui conduisent le fluide jusqu'à l'intérieure du chariot a été conçu. Les erreurs sont ainsi minimisés par la symétrie des efforts engendrés par l'écoulement.

Le travail réalisé a contribué à l'identification les éléments sensibles qui interviennent lors de la conception des patins hydrostatiques et de connaître l'influence des divers paramètres qui pourront intervenir lors de la mise en œuvre du banc linéaire

BIBLIOGRAPHIE

- 1- THOMA J. U. - Modern Oilhydraulic Engineering .
Trade & Technical, 1970.
- 2- SZERI A. Z. - Tribology . McGraw-Hill, 1980.
- 3- WADHWA S. S. , SINHASAN R. - Analysis of Externally
Pressurized Gas Bearings by Incremental Finite Element
Methode. WEAR ,1981, pg. 133-141.
- 4- SATOMI T. - Studies on the Aerostatic Guiding System. B. J. S. P. E.
Vol.17, N° 2. 1983, pg.107-112.
- 5- THICHY J.A. et CHEN S.H. - Plane Slider Bearing Load Due to Fluid
Inertia-Experiments and Theory. Trans. ASME, Vol. 10 ,january
1985 . pg. 32-38.
- 6- BOFFEI D. A. et BARROW A. A. - Experimental Investigation Into
The Performance of on Aerostatic Industrial Thrust Bearing.
Tribology Intern. Vol.18 N° 3 ,1985, pg.165-168.
- 7- STOUT K. J. - Design of Aerostatic Flat Pad Bearings using
Annular Orifice Restrictors. Tribology Intern. Vol.18, 1985, p.
209-214.
- 8- STOUT K. J. - Design of Aerostatic Flat Pad Bearings using
Pocketed Orifice. Tribology International. Vol. 17, N° 4 1984
p. 191-198.
- 9- McKEOWN P. A. - High Precision Manufacturing and the British
Economy . Proceedings Inst. Mechanical Engrs. Vol. 200 N° 76
pg. 1-19.

- 10 - OGATA K. - Modern Control Engineering. Prentice-Hall, Inc. 1970.
- 11 - PELEGRIN M., GILLE J. C. - Dynamique de la Comande Linéaire. Dunod. 1985.
- 12 - COMOLET R. - Mécanique Experimental des Fluides. Tome II.
- 13 - LEE S. S. - Modélisation d'un Guidage Linéaire à Roulements de Haute Précision. Rapport de DEA, Université de Techn. de Compiègne. 1988.
- 14 - Design of Externally Pressurized Gas Bearing. International Workshop, june 1986. Paris .
- 15 - BOFFEY D. A., BARROW A. A. - Experimental Investigation Into the Performance of Aerostatic Industrial Thrust Bearing. Tribology International, Vol. 18, n° 3. 1985.
- 16 - JAYACHANDRA P., GANESAN N. - Non Parallel Operation of Rectangular Hydrostatic Thrust Bearings. Wear, n° 94. 1984.
- 17 - SATO Y., MARUTA K., HARADA M. - Dynamic Characteristics of Hydrostatic Thrust Air Bearing Whith Actively Controlled Restictor. Journal of Tribology. ASME, 1987.
- 18 - TIAN Y. - Programme de Resolution de patins Hydrostatiques par la Méthode des Eléments Finis. D. S. M. - U T C .
- 19 - MOORE W. R. - Fondations of Mechanical Accurancy. The Moore Special Tool Company. 1970.
- 20 - TANIGUCHI N. - Current Status in, and Future Trends of Ultraprecision Machining and Ultrafine Materials Processing. Annals of the CIRP. Vol.32, n° 2. 1983.
- 21 - ROBLEE J. W., MOTE C. D. - Design of Externally Pressuring Gas Bearings for Stiffness and Damping. 9th Int. Gas Bearing Symposium. 1986.

- 22 - INGERT G. K. , LUR'E B. G. - Dynamic Stiffness of Open-circuit Hydrostatic Slideways with Slotted-spring Regulators. Machine & Tooling. Vol. 47, n° 2 .1976.
- 23 - AOYAMA T. , INASAKI I. ,YONETSU S. - Friction and Tilting Characteristics of Hydrostatic Thrust Bearings. Bulletin J.S.P.E. Vol. 10, n°2. 1986.
- 24 - HARUYAMA Y. , KAZAMAKI T. - Effets of Fluid Inertia Forces on the Dynamic Performance of Externally Pressurized Circular thrust Bearings. Proceedings of the J.S.L.E International Tribology Conference. july 1985.
- 25 - SALEM E. A. - The Use of Air Bearings in the Design of a Micro Torque Meter. Microtecnic , Vol. 4. 1987.
- 26 - JAYACHANDRA P. , GANESAN N. - Behavior of Multirecess Plane Hydrostatic Thrust Bearings under Conditions of Tilt and Rotation. WEAR , Vol. 92, pg. 243 - 251.1983.
- 27 - JAYACHANDRA P. , GANESAN N. - Behavior of Multirecess Plane Hydrostatic Thrust Bearings under Conditions of Tilt and no Rotation. WEAR , Vol. 92, pg. 269 - 277. 1983.
- 28 - KOGURE K. , MITSUYA Y. - Dynamic Characteristics of Air Lubricated Slider Bearings under Submicron Spacing Conditions. Bulletin J.S.P.E. ,Vol. 22 , n° 173 .1979.
- 30 - YUKENG H. , DARONG C. - Effet of Surface Topography of Scraped Machine Tool Guideways on Their Tribological Behavior. Tribology International , Vol. 18 n° 2. 1985.
- 31 - HASHIMOTO H. - Ultra Precision Machine Drive System. Bulletin J.S.P.E. , Vol. 16 , n° 1. 1982.
- 32 - YAP Y. K. - A Galerkin Finit Element scheme for the Rectangular Gas - Lubricated Slider Bearing - The Transient Case . WEAR , Vol. 105 , pg. 109-122. 1985.

- 33 - SHINANOVICH M. A.- A Hydrostatic Bearing . Machine & Tooling, Vol. 47, n° 7 , p 22-25 .
- 34 - IDO S., TSUYUZAKI H. - Precision X-Y Stage for Electron Beam Lithography System. B.J.S.P.E , Vol. 18, n° 3 , 1984.
- 35 - JAYACHANDRA P. , GANESAN N. - Theoretical Analysis of the Dynamic Stiffness of Conical Hydrostatic Thrust Bearings under Tilt, Eccentricity and Rotation. WEAR , Vol. 91, pg. 149 - 159. 1983.
- 36 - HARGREAVES D. J. , TAYLOR C. M. - An Experimental and Theoretical Study of Lubricant Film Extent and Flowrate in Grooved Rectangular Pad Slider Thrust Bearings . Proc. Instn. Mech. Engrs . , Vol. 198C, n° 16, 1984.
- 37 - HARUYAMA Y. , KAZAMAKI T. , MORI A., MORI H.- Evaluation of Various Approximate Solutions for Fluid Inertia Effects on the Dynamic Performance of Stepped thrust Bearings. ASME, Journal of Tribology . 1984.
- 38 - ELROD H. G., CHU T. Y. - Inertia and Energy Effects in the Developing Gas Film Between Two Parallel Flat Plates . ASME Journal of Lubrication Technology.
- 39 - TICHY J. A., CHAN A. S. - Plane Slider Bearing Load due to Fluid Inertia Experiment and theory. ASME Journal of Tribology. Vol. 107, 1985
- 40 - INAMURA T. - Dynamic Analysis of a Machine Tool Structure and its Problems. B.J.S.P.E. 1983.
- 41 - YOSHIMURA A. - Analysis of Evaluative Parametres for Static and Vibrational Characteristics of the Fundamental Design of Machine Tool Structures. B.J.S.P.E., VOL. 16, N° 4, 1982.
- 42 - DOWSON D., TAYLOR C. M. - Cavitation Bearings . Rev.Fluid Mech. 1979.
- 43 - SAFROMOVICH S. , SUKHOLUTSKII- Circular Hydrostatic Slideways on High-precision Turning and Boring Mills. Machine & Tooling. Vol. 47, n° 7.

- 44 - LUCHIN G. A. - Experience of Designing Aerostatic Lubricated Bearings. Russian Eng. Journal, Vol. 59, n° 4.
- 45 - MORI A., TANAKA K., MORI H. - Effets of Fluid Inertia Forces on the Performance of a Plane Inclined Sector Pad for an Annular Thrust Bearing under Laminar Conditions. ASME Journal of Tribology, 1985
- 46 - SHIMOKOHBE A., AOYAMA H. - A High-precision Straight Motion System. Precision engineering, Vol.8 n° 3, 1986.
- 47 - KATO S. - Ultra Precision Surface Grinder Suspended by Externally Pressurized Air Bearings. B.J.S.P.E., Vol.16, n°1, 1982.
- 48 - PAKZAD, Mehras - Stabilité d'un Clapet Piloté à l'Ecoulement Inverse. Thèse présentée à l'Université de Technologie de Compiègne, juin 1984.