

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

PREVISÃO NUMÉRICA DA CONVECÇÃO NATURAL  
LAMINAR EM CAVIDADES HEXAGONAIS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA  
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

SERGIO POLINA

FLORIANÓPOLIS, JULHO - 1988

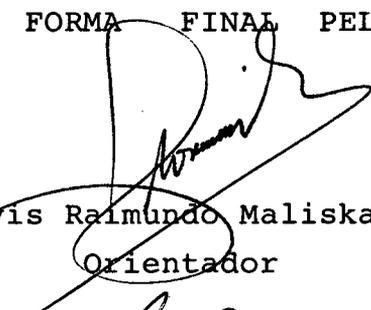
**PREVISÃO NUMÉRICA DA CONVECÇÃO NATURAL  
LAMINAR EM CAVIDADES HEXAGONAIS**

**SERGIO POLINA**

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

**MESTRE EM ENGENHARIA**

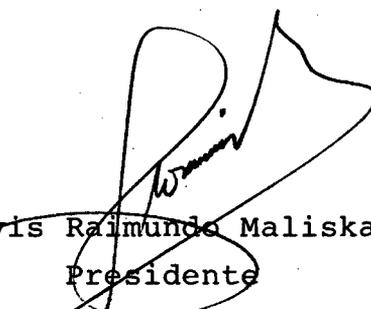
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONHECIMENTO CIÊNCIAS  
TÉRMICAS E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO

  
Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D.  
Orientador

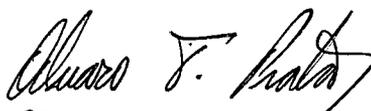
  
Prof. Antonio Fábio Carvalho da Silva, M.Sc.  
Co-Orientador

  
Prof. Arno Blass, Ph.D.  
Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA:

  
Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D.  
Presidente

  
Prof. Washington Braga Filho, Ph.D.

  
Prof. Álvaro Toubes Prata, Ph.D.

  
Prof. Antonio Fábio Carvalho da Silva, M.Sc.

**AGRADECIMENTOS**

- Ao prof. Clovis Raimundo Maliska, pelos conhecimentos transmitidos, pela orientação efetiva e pela amizade.
- Ao prof. Antonio Fábio Carvalho da Silva, pela amizade, pela valiosa co-orientação e pelos conhecimentos transmitidos.
- Aos estagiários Carlos Henrique Marchi e Jonas Gretter, pela colaboração no desenvolvimento dos aplicativos gráficos.
- A Patrícia Vilain, pela colababoração na edição do texto.
- Aos demais integrantes do Grupo de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor -SINMEC-, pela colaboração no desenvolvimento deste trabalho.
- A Vera Lúcia Sodré Teixeira (Verinha), pela amizade e auxílio na confecção do texto.
- E a todas aquelas que, das mais variadas formas, colaboraram para a realização deste trabalho.

## ÍNDICE

	página
LISTA DE FIGURAS.....	viii
LISTA DE TABELAS.....	xiv
SIMBOLOGIA.....	xv
RESUMO.....	xx
ABSTRACT.....	xxi
Capítulos	
1 - INTRODUÇÃO.....	01
1.1 - Introdução.....	01
1.2 - Revisão Bibliográfica.....	04
1.3 - Delineamento da Dissertação.....	07
2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	09
2.1 - Introdução.....	09
2.2 - Descrição do Problema.....	09
2.3 - Equações Governantes no Sistema Cartesiano.....	11
2.4 - Aproximação de Boussinesq.....	13
3 - SISTEMA DE COORDENADAS GENERALIZADO.....	17
3.1 - Introdução.....	17

3.2 -	Transformação de Coordenadas.....	18
3.3 -	Comprimentos e Áreas no Plano Físico.....	21
3.4 -	Geração do Sistema Coordenado.....	23
4 -	TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES.....	25
4.1 -	Introdução.....	25
4.2 -	Componentes do Vetor Velocidade Em Um Sistema... Generalizado.....	25
4.3 -	Equações Governantes Transformadas.....	29
5 -	EQUAÇÕES DISCRETIZADAS PARA VOLUMES FINITOS.....	33
5.1 -	Introdução.....	33
5.2 -	Disposições das Variáveis na Dependentes na Malha	33
5.3 -	Obtenção das Equações Aproximadas.....	34
6 -	ESQUEMA NUMÉRICO DE SOLUÇÃO.....	46
6.1 -	Introdução.....	46
6.2 -	Acoplamento Pressão-Velocidade.....	46
6.3 -	Obtenção da Equação Para Pressão.....	49
6.4 -	Algoritmo de solução.....	52
6.5 -	Condições de Contorno no Domínio Transformado....	53

6.5.1.- Condições de Contorno Para a Velocidade..	54
6.5.2.- Condições de Contorno Para a Pressão.....	55
6.5.3.- Condições de Contorno Para a Temperatura.	57
6.6 - Detalhes Numéricos.....	59
6.6.1.- Método de Relaxação das Variáveis no Ciclo Iterativo.....	59
6.6.2.- Critério de Convergência e Tolerância....	60
6.6.3.- Avanço das Variáveis no Ciclo Iterativo..	61
7 - ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	62
7.1 - Introdução.....	62
7.2 - Malhas Para as Cavidades Hexagonais.....	63
7.3 - Apresentação dos Perfis de Velocidade e Temperatura.....	67
7.4 - Apresentação dos Campos: Isotermas, Linhas de Corrente, Vetores Velocidade e Linhas de Calor...	77
7.5 - Condutividade Térmica Equivalente.....	88
7.5.1.- Condutividade Térmica Equivalente Local..	92
7.5.2.- Condutividade Térmica Equivalente Média..	107
7.6 - Comparação Entre a Cavidade Hexagonal e a Retangular Inscrita Correspondente.....	107
8 - CONCLUSÕES.....	115

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	117
---------------------------------	-----

## Apêndice

A - OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DA FUNÇÃO DE CALOR EM COORDENADAS GENERALIZADAS.....	121
A.1 - Introdução.....	121
A.2 - Definição da Função de Calor.....	122
A.3 - Transformação da Equação da Função de Calor Para o Sistema Generalizado $\xi$ - $\eta$ .....	123
A.4 - Localização de H na malha.....	124
A.5 - Escolha da temperatura de referência T'.....	125
A.6 - Condições de Contorno da Equação da Função de Calor.....	126

## LISTA DE FIGURAS

	página
Figura 1.1 - Cavidades hexagonais em estudo.....	02
Figura 2.1 - Geometria e as condições de contorno do problema.....	10
Figura 3.1 - Malha estruturada.....	17
Figura 3.2 - Malha não estruturada.....	18
Figura 3.3 - Transformação do sistema de coordenadas.....	19
Figura 3.4 - Comprimentos e área no plano físico.....	22
Figura 3.5 - Um quadrante da malha para $\theta = 120^\circ$ .....	23
Figura 4.1 - Componentes cartesianas, covariantes e contravariantes do vetor velocidade $\vec{V}$ .....	26
Figura 4.2 - Uma componente contravariante do vetor velocidade.....	28
Figura 5.1 - Armazenamento desencontrado das variáveis....	37
Figura 5.2 - Volume de controle elementar no plano transformado.....	38
Figura 5.3 - Função de interpolação unidimensional.....	39
Figura 5.4 - Balanço de massa em um volume de controle....	45
Figura 6.1 - Volume de controle para a equação da continuidade.....	52

Figura 6.2	- Volume fictício no plano transformado.....	55
Figura 6.3	- Volume de contorno para a pressão.....	57
Figura 7.1	- Malha da cavidade retangular ( $\theta = 180^\circ$ ), 20 x 36 volumes.....	64
Figura 7.2	- Malha da cavidade hexagonal com $\theta = 120^\circ$ , 26 x 28 volumes.....	65
Figura 7.3	- Malha da cavidade hexagonal com $\theta = 60^\circ$ , 32 x 32 volumes.....	66
Figura 7.4	- Perfis de velocidade $v^*$ ao longo da linha média horizontal. $\theta = 180^\circ$ , $Ra = 10^3$ e $10^4$ ...	68
Figura 7.5	- Perfis de velocidade $v^*$ ao longo da linha média horizontal. $\theta = 180^\circ$ , $Ra = 10^5$ e $10^6$ ...	68
Figura 7.6	- Perfis de temperatura $T^*$ ao longo da linha média horizontal. $\theta = 180^\circ$ , $Ra = 10^3$ a $10^6$ ...	69
Figura 7.7	- Perfis de velocidade $v^*$ ao longo da linha média horizontal. $\theta = 120^\circ$ , $Ra = 10^3$ e $10^4$ ...	70
Figura 7.8	- Perfis de velocidade $v^*$ ao longo da linha média horizontal. $\theta = 120^\circ$ , $Ra = 10^5$ e $10^6$ ...	70
Figura 7.9	- Perfis de temperatura $T^*$ ao longo da linha média horizontal. $\theta = 120^\circ$ , $Ra = 10^2$ a $10^6$ ...	71
Figura 7.10	- Perfis de velocidade $v^*$ ao longo da linha média horizontal. $\theta = 90^\circ$ , $Ra = 10^3$ e $10^4$ ...	72
Figura 7.11	- Perfis de velocidade $v^*$ ao longo da linha média horizontal. $\theta = 90^\circ$ , $Ra = 10^5$ e $10^6$ ...	72
Figura 7.12	- Perfis de temperatura $T^*$ ao longo da linha média horizontal. $\theta = 90^\circ$ , $Ra = 10^2$ a $10^6$ ...	73

Figura 7.13 - Perfis de velocidade $v^*$ ao longo da linha média horizontal. $\theta = 60^\circ$ , $Ra = 10^3$ e $10^4$ ...	74
Figura 7.14 - Perfis de velocidade $v^*$ ao longo da linha média horizontal. $\theta = 60^\circ$ , $Ra = 10^5$ e $10^6$ ...	74
Figura 7.15 - Perfis de temperatura $T^*$ ao longo da linha média horizontal. $\theta = 60^\circ$ , $Ra = 10^3$ a $10^6$ ...	75
Figura 7.16 - Perfis de velocidade $v^*$ ao longo da linha média horizontal. $\theta = 30^\circ$ , $Ra = 10^3$ e $10^4$ ...	76
Figura 7.17 - Perfis de velocidade $v^*$ ao longo da linha média horizontal. $\theta = 30^\circ$ , $Ra = 10^5$ e $10^6$ ...	76
Figura 7.18 - Perfis de temperatura $T^*$ ao longo da linha média horizontal. $\theta = 30^\circ$ , $Ra = 10^3$ a $10^6$ ...	77
Figura 7.19 - Linhas de corrente da cavidade retangular. $\theta = 180^\circ$ , $Ra = 10^6$ .....	79
Figura 7.20 - Vetores velocidade da cavidade retangular. $\theta = 180^\circ$ para $Ra = 10^3$ .....	80
Figura 7.21 - Vetores velocidade da cavidade retangular. $\theta = 180^\circ$ para $Ra = 10^5$ .....	81
Figura 7.22 - Isotermas para $\theta = 180^\circ$ e $Ra = 10^4$ .....	82
Figura 7.23 - Isotermas para $\theta = 180^\circ$ e $Ra = 10^5$ .....	82
Figura 7.24 - Linhas de calor para $\theta = 180^\circ$ e $Ra = 10^3$ .....	83
Figura 7.25 - Linhas de calor para $\theta = 180^\circ$ e $Ra = 10^6$ .....	83
Figura 7.26 - Linhas de corrente para $\theta = 120^\circ$ e $Ra = 10^4$ ..	84
Figura 7.27 - Isotermas para $\theta = 120^\circ$ e $Ra = 10^5$ .....	84

Figura 7.28 - Vetores velocidade para $\theta = 120^\circ$ e $Ra = 10^3$ .	85
Figura 7.29 - Vetores velocidade para $\theta = 120^\circ$ e $Ra = 10^6$ .	86
Figura 7.30 - Linhas de calor para $\theta = 120^\circ$ e $Ra = 10^3$ .....	87
Figura 7.31 - Linhas de calor para $\theta = 120^\circ$ e $Ra = 10^6$ .....	87
Figura 7.32 - Linhas de corrente para $\theta = 90^\circ$ e $Ra = 10^5$ ...	88
Figura 7.33 - Vetores velocidade para $\theta = 90^\circ$ e $Ra = 10^3$ ...	89
Figura 7.34 - Vetores velocidade para $\theta = 90^\circ$ e $Ra = 10^4$ ...	90
Figura 7.35 - Isotermas para $\theta = 90^\circ$ e $Ra = 10^5$ .....	91
Figura 7.36 - Linhas de calor para $\theta = 90^\circ$ e $Ra = 10^5$ .....	91
Figura 7.37 - Linhas de corrente para $\theta = 60^\circ$ e $Ra = 10^4$ ...	92
Figura 7.38 - Vetores velocidade para $\theta = 60^\circ$ e $Ra = 10^3$ ...	93
Figura 7.39 - Vetores velocidade para $\theta = 60^\circ$ e $Ra = 10^5$ ...	94
Figura 7.40 - Isotermas para $\theta = 60^\circ$ e $Ra = 10^3$ .....	95
Figura 7.41 - Isotermas para $\theta = 60^\circ$ e $Ra = 10^6$ .....	95
Figura 7.42 - Linhas de calor para $\theta = 60^\circ$ e $Ra = 10^3$ .....	96
Figura 7.43 - Linhas de calor para $\theta = 60^\circ$ e $Ra = 10^4$ .....	96
Figura 7.44 - Linhas de corrente para $\theta = 30^\circ$ e $Ra = 10^4$ ...	97
Figura 7.45 - Vetores velocidade para $\theta = 30^\circ$ e $Ra = 10^6$ ...	97
Figura 7.46 - Linhas de calor para $\theta = 30^\circ$ e $Ra = 10^3$ .....	98

Figura 7.47 - Linhas de calor para $\theta = 30^\circ$ e $Ra = 10^6$ .....	98
Figura 7.48 - Isotermas para $\theta = 30^\circ$ e $Ra = 10^5$ .....	99
Figura 7.49 - Condutividade térmica equivalente local para $Ra = 0$ .....	100
Figura 7.50 - Isotermas para o hexágono com $\theta = 120^\circ$ e para a cavidade retangular inscrita. $Ra = 0$ .....	101
Figura 7.51 - Condutividade térmica equivalente local para $\theta = 180^\circ$ , $Ra = 10^5$ e $10^6$ .....	102
Figura 7.52 - Condutividade térmica equivalente local para $\theta = 150^\circ$ , $Ra = 10^4$ e $10^5$ .....	102
Figura 7.53 - Condutividade térmica equivalente local para $\theta = 120^\circ$ , $Ra = 10^3$ e $10^4$ .....	103
Figura 7.54 - Condutividade térmica equivalente local para $\theta = 120^\circ$ , $Ra = 10^5$ e $10^6$ .....	103
Figura 7.55 - Condutividade térmica equivalente local para $\theta = 90^\circ$ , $Ra = 10^3$ e $10^4$ .....	104
Figura 7.56 - Condutividade térmica equivalente local para $\theta = 90^\circ$ , $Ra = 10^5$ e $10^6$ .....	104
Figura 7.57 - Condutividade térmica equivalente local para $\theta = 60^\circ$ , $Ra = 10^3$ e $10^4$ .....	105
Figura 7.58 - Condutividade térmica equivalente local para $\theta = 60^\circ$ , $Ra = 10^5$ e $10^6$ .....	105
Figura 7.59 - Condutividade térmica equivalente local para $\theta = 30^\circ$ , $Ra = 10^3$ e $10^4$ .....	106
Figura 7.60 - Condutividade térmica equivalente local para $\theta = 30^\circ$ , $Ra = 10^5$ e $10^6$ .....	106

Figura 7.61 - Condutividade térmica equivalente média.....	108
Figura 7.62 - Perfis de velocidade $v^*$ ao longo da linha média horizontal para cavidade inscrita no hex. $\theta = 120^\circ$ para $Ra = 10^3$ e $10^4$ .....	110
Figura 7.63 - Perfis de velocidade $v^*$ ao longo da linha média horizontal para cavidade inscrita no hex. $\theta = 120^\circ$ para $Ra = 10^5$ e $10^6$ .....	110
Figura 7.64 - Perfis de velocidade $v^*$ ao longo da linha média horizontal para cavidade inscrita no hex. $\theta = 60^\circ$ para $Ra = 10^3$ e $10^4$ .....	111
Figura 7.65 - Perfis de velocidade $v^*$ ao longo da linha média horizontal para cavidade inscrita no hex. $\theta = 60^\circ$ para $Ra = 10^5$ e $10^6$ .....	111
Figura 7.66 - Razão entre a troca de calor por convecção na cavidade hexagonal e na retangular inscrita..	114

## LISTA DE TABELAS

	página
Tabela 7.1 - Condutividade térmica equivalente média da cavidade hexagonal.....	109
Tabela 7.2 - Condutividade térmica equivalente média da cavidade retangular inscrita.....	113
Tabela 7.3 - Fluxo de calor médio por condução da cavidade hexagonal e da retangular inscrita.....	114

## SIMBOLOGIA

- $x, y$  - Sistema cartesiano de coordenadas.
- $L$  - Lado da cavidade hexagonal.
- $\theta$  - Ângulo formado pelos lados inclinados do hexágono.
- $D$  - Metade da distância entre os dois vértices de hexágono (função de  $\theta$ ).
- $C$  - Metade da altura da cavidade (função de  $\theta$ ).
- $J$  - Jacobiano da transformação definida pelas Equações (3.1) e (3.2).
- $\vec{dA}$  - Área elementar no plano físico.
- $\vec{dL}$  - Comprimento elementar no plano físico.
- $q, E, F, R, S$  - Grandezas definidas na Equação (2.7).
- $S^\phi$  - Termo fonte na equação de conservação para  $\phi$ .
- $\tilde{S}^\phi$  - Termo fonte transformado na equação de transformação para  $\phi$ .
- $L[ ]$  - Aproximação em diferenças finitas da quantidade entre colchetes.
- $T$  - Temperatura.
- $\bar{T}$  - Temperatura de referência.
- $H$  - Função de calor.
- $P$  - Pressão.

- $\Delta P_f$  - Gradiente de pressão nas paredes.
- $\vec{V}$  - Vetor velocidade.
- $u, v$  - Componentes de velocidade no sistema cartesiano.
- $U, V$  - Componentes contravariantes do vetor velocidade sem normalização métrica.
- $v^i$  - Componentes contravariantes do vetor velocidade.
- $V_i$  - Componentes covariantes do vetor velocidade.
- $\hat{U}, \hat{V}$  - Velocidades definidas pelas Equações (6,7) e (6,8).
- $T^*$  - Temperatura adimensional.
- $u^*, v^*$  - Velocidades cartesianas adimensionais.
- $x^*, y^*$  - Coordenadas cartesianas adimensionais.
- $C_1, C_2, C_4, C_5$  - Coeficientes de difusão transformados. Equações (4.25) a (4.27).
- $t$  - Tempo na Equação (5.3).
- $\Delta t$  - Intervalo de tempo na Equação (5.3).
- $E$  - Avanço de tempo. Equação (5.31).
- $e, w, n, s$  - Indicadores das faces leste, oeste, norte e sul para volumes de controle.
- $P$  - Indicador de volume de controle.
- $E, W, N, S, NE, NW, SE, SW$  - Indicador de volumes de controle vizinhos ao elemento  $P$ .

- $A_e^\phi, A_w^\phi$ , etc. - Coeficientes na equação em diferenças finitas para  $\phi$ .
- $M_e, D_e$  - Parcelas convectivas e difusivas presentes nos coeficientes acima.
- $V$  - Volume de um elemento de controle.
- $B$  - Termo fonte na equação para pressão.
- $k$  - Coeficiente de condutividade térmica.
- $c_p$  - Calor específico à pressão constante.
- $v$  - Volume específico.
- $g$  - Aceleração da gravidade.
- $K_{eq1}$  - Condutividade térmica equivalente média.
- $K_{eq2}$  - Condutividade térmica equivalente local.
- $R$  - Razão entre a taxa de troca de calor da cavidade hexagonal com a retangular inscrita.
- $Pr$  - Número de Prandtl.
- $Ra$  - Número de Rayleigh.
- $Bo$  - Número de Boussinesq.
- $Pe_m$  - Número de Peclet de malha.
- $\alpha, \beta, \gamma$  - Componentes do tensor métrico. Equações (3.11) a (3.13).
- $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  - Coeficientes para os perfis convectivos e difusivos. Equações (5.12) e (5.13).

- $\alpha_T$  - Coeficiente de difusividade térmica.
- $\bar{\beta}$  - Coeficiente de expansão térmica.
- $\epsilon$  - Tolerância para critérios de convergência.
- $\xi, \eta$  - Sistema generalizado de coordenadas. Domínio transformado.
- $\mu$  - Viscosidade absoluta.
- $\nu$  - Viscosidade cinemática.
- $\rho$  - Massa específica.
- $\bar{\rho}$  - Massa específica de referência.
- $\phi$  - Campo escalar genérico.
- $\Gamma^\phi$  - Coeficiente de transporte difusivo para um escalar  $\phi$ .

#### SUBSCRITOS

$x, y, \xi, \eta$  - Referem-se a derivadas parciais de primeira ordem.

$P, E, N, S, W,$

$NE, SE, NW, SW$  - Referem-se aos pontos onde as variáveis são avaliadas.

#### SUPERSCRITOS

- - Indica estado de referência.

\* - Refere-se a valores adimensionais.

- Refere-se a quantidade transformadas, exceto para velocidades.
- n - Refere-se ao nível de iteração nas equações em diferenças finitas.
- $n+\theta$  - Refere-se a quantidade avaliadas no tempo  $t+\theta\Delta t$ .

- Refere-se a quantidade transformadas, exceto para velocidades.
- n - Refere-se ao nível de iteração nas equações em diferenças finitas.
- $n+\theta$  - Refere-se a quantidade avaliadas no tempo  $t+\theta\Delta t$ .

## RESUMO

A solução numérica do problema da convecção natural laminar em cavidades hexagonais é obtida neste trabalho usando-se o método dos volumes finitos em coordenadas que se adaptam às fronteiras do domínio de cálculo. O conjunto de cavidades hexagonais estudado é obtido variando-se o ângulo entre os dois lados inclinados do hexágono, mantendo-se os outros dois lados horizontais. Os lados inclinados da esquerda são aquecidos, os lados inclinados da direita resfriados enquanto que os dois lados horizontais são adiabáticos. Este conjunto é formado por cavidades de ângulos de  $30^\circ$  a  $180^\circ$ .

De particular interesse neste trabalho é a determinação das condições de troca de calor no canto formado pelos dois lados inclinados aquecidos da cavidade. Nesta região, dependendo do ângulo da cavidade, o escoamento pode apresentar recirculações, modificando consideravelmente as condições de troca de calor quando comparadas com cavidades de paredes aquecidas verticais.

O estudo é realizado para números de Rayleigh de 0 a  $10^6$  e  $Pr=0.707$ , sendo os resultados apresentados em termos da condutibilidade térmica equivalente, definida de três maneiras distintas, de tal modo a comparar a influência dos efeitos convectivos sobre os condutivos na cavidade hexagonal e na cavidade retangular inscrita.

Para facilitar a visualização do fenômeno, os resultados são também apresentados em termos das linhas de corrente, campo de vetores velocidade, isotermas e linhas de calor.

Do ponto de vista numérico, o sistema de equações é resolvido utilizando-se um método implícito usando variáveis primitivas, empregando-se o método MSI (Modified Strongly Implicit procedure) para resolver os sistemas linearizados obtidos com a discretização da equação da energia e da conservação da massa.

## ABSTRACT

The present work encompasses a numerical analysis of laminar natural convection in arbitrary hexagonal cavities. The horizontal sides of the cavity are kept insulated while the inclined sides in the right side are heated and the ones in the left are cooled. The shape of the cavity is changed by varying the angle between the inclined sides. For  $\theta=180^\circ$  the rectangular cavity with aspect ratio 2:1 is recovered.

Due to the arbitrary shape of the cavities the problem is solved using a boundary-fitted finite volume method which uses a fixed rectangular computational domain.

Of particular interest is this work is the heat transfer performance of the corner region formed by the inclined sides. In that region recirculations may occur, which may alter significantly the heat transfer conditions when compared with cavities with heated vertical walls.

The analysis is performed for Rayleigh number ranging for 0 to  $10^6$  for  $Pr=0.707$ . The results are presented in terms of the local and average equivalent conductivity, streamlines, heatlines, velocity vector plot and isotherms.

The equations system is solved by an implicit procedure using the primitive variables. The linear system for energy and mass conservation are solved using the MSI (Modified Strongly Implicit) procedure.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 - INTRODUÇÃO

A transferência de calor por convecção natural se dá através da movimentação de um fluido provocada pela variação de sua massa específica. Na convecção natural em cavidades este fenômeno físico é o resultado de uma complexa interação entre o fluido e as paredes que o confinam. A análise do fenômeno só pode ser realizada através da relação intrínseca entre as forças de atrito, inércia e empuxo. Matematicamente este relacionamento é representado através das equações de conservação.

A questão da eficácia da troca de calor e as limitações físicas e técnicas de projeto, muitas vezes resultam em equipamentos que apresentam cavidades das mais variadas formas geométricas. É fundamental, portanto, para desenvolver-se um bom projeto o conhecimento da transferência de calor no interior destas cavidades. Algumas aplicações são o resfriamento de equipamentos eletrônicos, isolamentos de cabines de aeronaves, isolamento de reatores nucleares, isolamento de coletores solares, ventilação de ambientes, ventilação de áticos de edificações e mais inúmeros outros exemplos que podem ser listados.

A revisão bibliográfica sobre convecção natural em cavidades mostra que a grande maioria dos problemas são dedicados ao estudo do fenômeno para cavidades retangulares e quadradas. Outras geometrias não são estudadas com frequência devido a complexidade na obtenção da solução.

A motivação do presente trabalho está na contribuição para o conhecimento do fenômeno da convecção natural em

geometrias que fogem das convencionais. De particular interesse desta dissertação é o conhecimento das características da troca de calor em cavidades hexagonais.

Na engenharia a solução dos problemas podem ser obtidos por dois caminhos: o teórico e o experimental. É preferível, se possível, resolver o problema teoricamente através da solução de um modelo matemático, pois isto permite baixo custo na obtenção da solução e facilidade de mudança dos parâmetros de interesse na simulação do problema, reduzindo o número de experimentos de laboratório e minimizando o tempo de projeto de equipamentos.

Neste trabalho o problema da convecção natural em cavidades hexagonais é resolvido numericamente. Devido a complexidade da geometria em estudo o modelo matemático é resolvido usando coordenadas coincidentes com as fronteiras.

Um conjunto de cavidades é obtido fazendo-se variar o ângulo  $\theta$  conforme mostrado na Fig. 1.1, obtendo-se inclusive a cavidade retangular 2:1 quando  $\theta = 180^\circ$ .

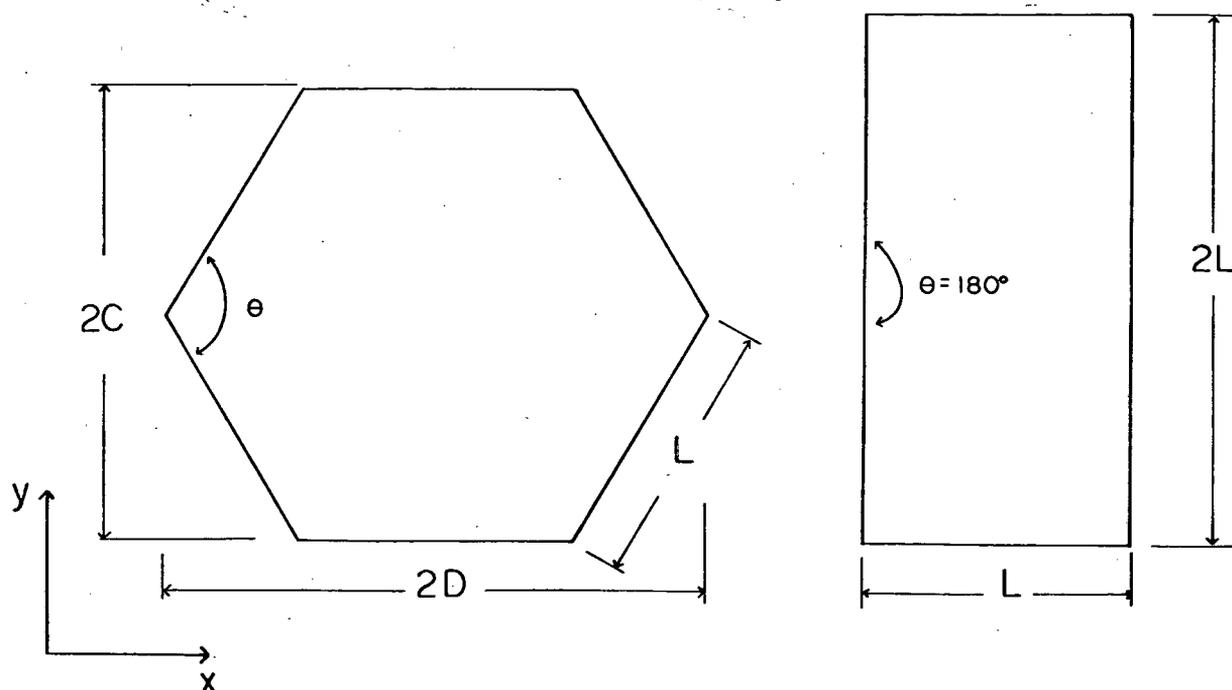


Fig. 1.1 - Cavidades hexagonais em estudo.

Quando se trata de problemas elípticos, como no caso deste trabalho, a aplicação das condições de contorno, que é o fator determinante no estabelecimento da solução, deve ser efetuada de forma que imprecisões não ocorram, principalmente quando as geometrias são de fronteiras arbitrárias. É conveniente, então, utilizar-se um sistema de coordenadas cujas linhas se adaptem às fronteiras do domínio, evitando assim a necessidade de interpolação para aplicação das condições de contorno.

Para as geometrias em consideração é possível gerar um sistema coordenado coincidente com a fronteira utilizando um método algébrico de interpolações lineares. A opção por este método deu-se devido a facilidade apresentada para a realização da concentração de linhas coordenadas nas regiões onde são necessárias, e também na mudança da geometria através da variação do ângulo.

As equações de conservação são transformadas do plano físico (cartesiano) para o plano denominado generalizado (transformado), que apresenta-se em uma forma retangular fixa independente das características geométricas do plano físico. Assim, o programa computacional é desenvolvido no plano transformado, tornando-se um programa geral, onde as informações da geometria física são transferidas ao plano transformado através das métricas da transformação. As equações governantes do problema físico transformadas são resolvidas através do método dos volumes finitos. A modelagem das equações aqui utilizada é a desenvolvida por Maliska [1], que caracteriza-se pelo fato de ser comum tanto para grades ortogonais como não-ortogonais. O esquema numérico envolve 9 pontos discretos quando for não-ortogonal e recai automaticamente ao esquema padrão de 5 pontos para o caso ortogonal. Esta metodologia já foi empregada em problemas de convecção natural por Milioli [2], em cavidades arbitrárias simplesmente conexas, e também por Silva & Maliska [3] em cavidades duplamente conexas.

Dentre os objetivos deste trabalho, no estudo da convecção natural em cavidades hexagonais arbitrárias, destacam-

se a verificação dos efeitos da variação da geometria sobre os campos de velocidade, temperatura e fluxo de calor, bem como sobre a condutividade térmica equivalente média e local. A influência das recirculações secundárias que poderão aparecer com a diminuição do ângulo também serão investigadas. Não é de conhecimento do autor a existência de respostas na literatura para estas questões.

Os resultados finais são apresentados em termos de condutividade térmica equivalente em função de  $\theta$  e de  $Ra$ . Alguns resultados são apresentados utilizando as linhas de calor, uma maneira não convencional de interpretação dos resultados de problemas convectivos. A função de calor [17] aqui utilizada é obviamente estendida para o sistema coordenado generalizado.

## 1.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Na revisão bibliográfica realizada, verificou-se que há um grande número de trabalhos numéricos ainda sendo aplicados a cavidades convencionais, como quadradas e retangulares, e há um pequeno interesse em outros tipos de geometrias. Isto pode ser atribuído aos métodos de solução utilizados. Verifica-se uma tendência maior no uso do método de volumes finitos sobre o de elementos finitos, em se tratando de problemas de convecção. Isto pode ser justificado pela interpretação física mais direta do fenômeno, que é proporcionada pelo método dos volumes finitos. Por outro lado, este método, na maioria dos casos encontrados na literatura, utiliza o sistema de coordenadas cartesiano, o qual se torna difícil na aplicação em cavidades de fronteiras irregulares.

Uma contribuição importante existente na bibliografia pode ser vista em Val Davis & Jones [4], onde são comparados diversos métodos numéricos de vários autores aplicados a convecção natural em cavidades quadradas. O trabalho de Val Davis [5] foi o tomado como padrão, o qual utiliza o método dos volumes finitos, e a formulação é feita em termos de função de

corrente-vorticidade. Os resultados são apresentados para número de Rayleigh de  $10^3$  a  $10^6$ , onde os demais trabalhos foram comparados com o padrão. Para cavidades retangulares Jones [6] apresenta resultados para  $Ra = 10^3$  a  $10^6$ , utilizando diferenças finitas e formulação em função de corrente-vorticidade, e a comparação com os resultados experimentais apresentam boa concordância.

Dentro da classe dos trabalhos que utilizam o método dos elementos finitos encontra-se o de Gartling [7], que trata da convecção natural entre uma cavidade retangular e um hexágono colocado internamente, e também do caso de uma cavidade cilíndrica com um hexágono interno. Em ambos os casos a condução no interior do hexágono também é resolvida. Também utilizando a técnica dos elementos finitos de Galerkin para o estudo de convecção natural, Chang et al [8] analisaram cavidades formadas por tubos concêntricos isotérmicos a temperaturas diferentes, sendo o tubo interior de forma quadrada. O elemento interno é rotacionado mudando a geometria da cavidade.

Dentre os trabalhos que utilizam o método dos volumes finitos com sistema de coordenadas generalizado, Silva & Maliska [3] fazem a previsão da convecção natural em cavidades duplamente conexas arbitrárias, onde apresentam resultados para tubos concêntricos e excêntricos, utilizando malhas ortogonais e não-ortogonais empregando uma formulação implícita em variáveis primitivas. Patel & Briggs [9] também utilizando um sistema generalizado resolveram o problema da convecção natural em cilindros concêntricos empregando uma extensão do método MAC. Na extensão do método a equação para correção das velocidades e pressão emprega o dobro de pontos de pressão necessários. Como esta equação é a que requer o maior esforço computacional dentro da sequência iterativa o método fica prejudicado. Outro trabalho que também utiliza a metodologia de [9] é o de Glakpe et al [10], que apresenta resultados para cilindros concêntricos e excêntricos para  $Ra = 0$  a  $10^6$ .

Para cavidades simplesmente conexas Milioli [2] utilizando o método dos volumes finitos em coordenadas

generalizadas, estende o modelo desenvolvido por Maliska & Raithby [11] para problemas de convecção natural. A cavidade quadrada foi resolvida com malhas ortogonais e não ortogonais e os resultados comparados com os de Val Davis [5]. Reproduziu também, para efeito de comparação do método, o problema analisado por Chang et al [8]. Kaviany em [12] realizou um estudo da convecção natural aplicado a uma cavidade quadrada com uma protuberância circular na base para diferentes raios, utilizando sistema de coordenadas generalizado. A formulação é baseada na função de corrente-vorticidade e apresenta resultados para baixos números de Rayleigh.

Encontra-se também na literatura alguns trabalhos dedicados a cavidades triangulares. Flack et al [13] apresentam um estudo experimental da convecção natural em cavidades formadas por triângulos isosceles, tendo como condição de contorno um lado inclinado aquecido e outro resfriado e a base isolada. Os resultados são apresentados somente para números de Rayleigh na ordem de  $10^6$ . Flack em [14] apresenta resultados para as mesmas cavidades com diferentes condições de contorno, sendo a base aquecida e os lados resfriados e vice-versa. O experimento de Flack apresentado em [13] foi reproduzido numericamente por Maliska et al [15], onde é apresentado valores para a condutividade térmica equivalente para  $Ra = 0$  a  $10^6$ . Com o objetivo de reproduzir com mais fidelidade o mesmo experimento, Polina et al [16] realizaram um estudo numérico da convecção natural fazendo um tratamento da condição de contorno singular, considerando a condução de calor através das paredes, e apresenta uma expressão para a condutividade térmica em função do número de Rayleigh e do ângulo superior da cavidade. Ambas as reproduções utilizaram o método numérico derivado de [11].

Em função dos trabalhos existentes na literatura, salienta-se que, os resultados que serão obtidos nesta dissertação para as cavidades hexagonais contribuirão para aumentar o acervo de informações disponíveis para geometrias arbitrárias.

### 1.3 - DELINEAMENTO DA DISSERTAÇÃO

Com a finalidade de dar uma visão geral do que será abordado no decorrer desta dissertação, apresenta-se sucintamente, aqui nesta seção, o conteúdo principal presente em cada capítulo.

**CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA** - Neste capítulo apresenta-se as condições de contorno, as hipóteses simplificativas e as equações governantes do fenômeno da convecção natural no sistema coordenado cartesiano. Apresenta-se, considerando a aproximação de Boussinesq, a obtenção do termo de empuxo da equação do movimento na direção  $y$ .

**CAPÍTULO 3 - SISTEMA DE COORDENADAS GENERALIZADO** - Capítulo no qual realiza-se a transformação do sistema coordenado cartesiano para o curvilíneo generalizado. Apresenta-se a metodologia para esta transformação e define-se as métricas envolvidas, as quais contêm as informações de comprimentos e não-ortogonalidade que serão transferidas ao plano transformado. Apresenta-se a geração do sistema coordenado que é obtida através de um método algébrico direto.

**CAPÍTULO 4 - TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES** - Neste capítulo realiza-se a transformação das equações governantes para o sistema de coordenadas curvilíneo generalizado. Justifica-se a escolha das velocidades contravariantes, as quais são responsáveis pelo fluxo de massa através das faces dos volumes de controle utilizados para avaliar a propriedade.

**CAPÍTULO 5 - EQUAÇÕES DISCRETIZADAS PARA VOLUMES FINITOS** - Este capítulo tem a finalidade de apresentar o arranjo de grade no plano transformado onde realiza-se os balanços a níveis de volumes de controle. É feita a integração das equações transformadas nos volumes de controle. Apresenta-se também os esquemas de aproximações dos termos convectivos e difusivos para simular adequadamente a importância da difusão e da convecção no processo.

**CAPÍTULO 6 - ESQUEMA NUMÉRICO DE SOLUÇÃO** - Neste capítulo descreve-se de forma detalhada o método numérico dos volumes finitos adotado neste trabalho e apresenta-se o problema do acoplamento pressão-velocidade nas equações do movimento. Descreve-se o método PRIME (update Pressure Implicity and Momentum Explicit), o qual é usado para solucionar o acoplamento pressão-velocidade. Apresenta-se também as condições de contorno para as variáveis dependentes em termos de balanços a nível de volume elementar, o critério de convergência adotado, e o fator de relaxação para o avanço das variáveis no ciclo iterativo.

**CAPÍTULO 7 - ANÁLISE DOS RESULTADOS** - Na análise dos resultados procura-se apresentar todas as informações possíveis para a interpretação física da transferência de calor por convecção natural e também por condução nas cavidades hexagonais. Apresenta-se os campos de velocidades através da visualização de perfis de velocidades e linhas de corrente, campos de temperatura através de isotermas e perfis de temperatura, linhas de fluxo de calor, taxa de troca de calor total e local para todas as cavidades para Rayleigh na faixa 0 a 10. Realiza-se, também uma comparação entre a taxa de troca de calor da cavidade hexagonal com a retangular inscrita.

**CAPÍTULO 8 - CONCLUSÕES** - Capítulo que destina-se a citar as conclusões obtidas no decorrer deste trabalho, também apresentando algumas sugestões para futuros trabalhos nesta linha de pesquisa.

**APÊNDICE A - OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DA FUNÇÃO DE CALOR EM COORDENADAS GENERALIZADAS** - Apêndice destinado a apresentação da função de calor no sistema cartesiano e transformação da equação para o sistema generalizado. Apresenta-se, também, as condições de contorno para esta equação e o armazenamento da variável na malha.

## CAPÍTULO 2

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

#### 2.1 - INTRODUÇÃO

Nesse capítulo apresentam-se as geometrias hexagonais estudadas neste trabalho com as condições de contorno adotadas. As hipóteses simplificativas para a modelagem, matemática são estabelecidas, enfocando a consideração da aproximação de Boussinesq e definindo os parâmetros governantes do fenômeno.

O sistema de equações governantes da convecção natural composto pela equação da continuidade, equação do movimento para  $u$ , equação do movimento para  $v$  e a equação da energia são apresentadas em coordenadas cartesianas. Obtém-se o termo de empuxo, que é integrante da equação do movimento em  $y$ , que é resultante da variação da massa específica.

#### 2.2 - DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O problema de interesse desta dissertação é o da convecção natural em geometrias hexagonais arbitrárias bidimensionais, conforme mostrado na Fig. 2.1. O ângulo  $\theta$ , que é formado pelos lados inclinados do hexágono, é variado de  $180^\circ$  até  $30^\circ$ , formando com isto um conjunto de cavidades, que, como já dito anteriormente, quando  $\theta = 180^\circ$  reproduz o retângulo. Seis são as geometrias estudadas aqui, sendo elas com os ângulos de  $180^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $30^\circ$ . O intervalo de  $30^\circ$  foi adotado por apresentar um conjunto significativo de resultados, permitindo interpretar as tendências do fenômeno físico em função da variação geométrica da cavidade.

Na Fig. 2.1 apresenta-se uma geometria hexagonal

arbitrária de ângulo  $\theta$  e de lado  $L$ . Em todas as geometrias tratadas aqui os lados são mantidos iguais, variando-se apenas o ângulo. Pode-se observar que a variação do ângulo é feita afastando-se ou aproximando-se os lados inferior e superior que são mantidos sempre no sentido horizontal. De um modo mais criativo pode-se imaginar um mecanismo com todos os lados articulados, e através de uma extensão ou compressão na articulação que liga os lados inclinados teria-se todas as geometrias de interesse.

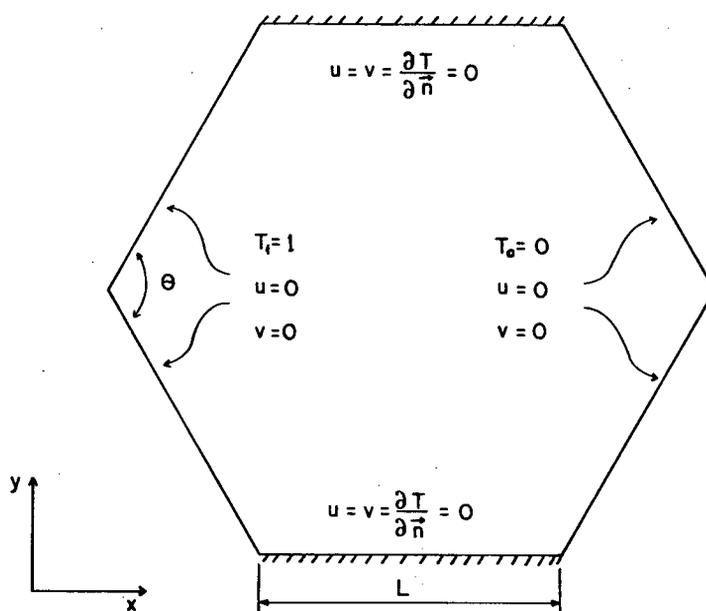


Fig. 2.1 - Geometria e condições de contorno do problema

As condições de contorno para a temperatura e velocidade são mostradas pela Fig. 2.1. As fronteiras inferior e superior são termicamente isoladas, enquanto que a da esquerda e direita são isotérmicas a temperaturas diferentes  $T_1$  e  $T_0$  respectivamente. Considera-se as paredes sólidas e impermeáveis, o que resulta em velocidades nulas em todas as fronteiras. O fluido em consideração é o ar com número de Prandtl 0.707 e o estudo é feito para números de Rayleigh na faixa de 0 a  $10^6$ .

### 2.3 - EQUAÇÕES GOVERNANTES NO SISTEMA CARTESIANO

Com as seguintes hipóteses simplificativas:

- domínio de solução bidimensional
- fluido newtoniano
- regime permanente
- escoamento laminar e incompressível
- aproximação de Boussinesq
- propriedades físicas do fluido constantes

as equações governantes do problema, escritas no sistema cartesiano, na forma conservativa, são:

Equação da Continuidade

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (2.1)$$

Equação do Movimento para u

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial u}{\partial y}) \quad (2.2)$$

Equação do Movimento para v

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial v}{\partial y}) + \quad (2.3)$$

$$\rho g \bar{\beta} (T - \bar{T})$$

Equação da Energia

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u T) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v T) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial y}) \quad (2.4)$$

Para melhor interpretação e visualização dos resultados as linhas de calor  $H$  também serão apresentadas, cuja equação no sistema de coordenadas cartesianas definida por Kimura & Bejan [17] é apresentada abaixo.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \rho C_p \left( \frac{\partial}{\partial y} (uT) - \frac{\partial}{\partial x} (vT) \right) \quad (2.5)$$

Esta equação para o plano transformado é deduzida no Apêndice A (Eq. A.6).

Apesar de neste trabalho apenas o regime permanente ser de interesse, os termos temporais são mantidos para fins de avanço iterativo pela consideração de transientes distorcidos no processo de cálculo. Isto é adotado pois possibilita aumentos consideráveis na velocidade de convergência nos cálculos numéricos. Além disto o controle do processo iterativo é mais eficiente quando realizado através do avanço no tempo do que quando feito através de parâmetros de relaxação aplicados às equações de regime permanente.

Na Eq. (2.3), no termo correspondente as forças de empuxo,  $\bar{\beta}$  representa o coeficiente de expansão térmica do fluido e  $\bar{T}$  a temperatura de referência.

Pode-se representar as equações governantes de maneira também conservativa mas de uma forma genérica em coordenadas cartesianas [18], como

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + p\phi = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + s\phi \quad (2.6)$$

onde

$$q = \rho\phi$$

$$E = \rho u\phi$$

$$R = \Gamma\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$F = \rho v\phi$$

$$S = \Gamma\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

(2.7)

Para obter-se a conservação da massa a partir da Eq. (2.6), basta fazer  $\phi$  igual a 1 e anular os termos  $P^\phi$  e  $S^\phi$ . As equações do movimento na direção x e y são obtidas fazendo-se igual a u e v respectivamente, com os termos de pressão adequados e o termo fonte  $S^\phi$  para a equação do movimento para u é igual a zero, enquanto que para o movimento para v é feito igual ao termo de empuxo. E finalmente a equação da energia é simplesmente obtida fazendo-se  $\phi$  igual a T, com  $P^\phi$  e  $S^\phi$  nulos.

A grandeza  $\Gamma^\phi$  da Eq. (2.7) representa o produto da massa específica pela difusividade da propriedade em consideração.

#### 2.4 - APROXIMAÇÃO DE BOUSSINESQ

Adotar a aproximação de Boussinesq é uma prática comum aplicada na modelagem matemática de problemas de convecção natural. Segundo Gray & Giorgini [19] esta aproximação é fisicamente consistente. Estes autores preocuparam-se em estabelecer as condições de validade desta aproximação.

Na aproximação de Boussinesq a massa específica é assumida constante, exceto no termo referente as forças de empuxo. Todas as demais propriedades do fluido são também assumidas constantes. Devido a presença de um gradiente térmico ocorre uma variação da massa específica, com isto, surgem efeitos de empuxo resultantes da variação da massa específica no fluido. Tal efeito origina a convecção natural.

Para a determinação de uma expressão matemática para as forças de empuxo considera-se  $\bar{\rho}$  a massa específica do fluido a uma temperatura  $\bar{T}$ . Com a existência de um gradiente térmico uma porção do fluido passa a ter uma massa específica  $\rho$  diferente de  $\bar{\rho}$ , resultando em um peso  $\rho g$ , desta porção, por unidade de volume e uma força devido ao gradiente de pressão  $\bar{\rho} g$ . Realizando um balanço das forças obtemos a força de empuxo, por unidade de

volume, dadas por [2]

$$F_y = \bar{\rho}g - \rho g \quad (2.8)$$

ou melhor

$$F_y = -g(\rho - \bar{\rho}) \quad (2.9)$$

A massa específica pode ser expressa em função da pressão e temperatura, ou seja  $\rho = \rho(T, P)$ . O diferencial de  $\rho$  é dado por

$$d\rho = \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P dT + \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_T dP \quad (2.10)$$

Assumindo a hipótese de que a densidade não varia com a pressão, o segundo termo do lado direito da equação acima é desprezado. Considerando que as variações de  $\rho$  e  $T$  são suficientemente pequenas, a Eq. (2.10) pode ser expressa em termos finitos

$$\Delta\rho = \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P \Delta T \quad (2.11)$$

Expressando a equação acima em relação a temperatura de referência  $\bar{T}$ , e utilizando a definição do coeficiente de expansão volumétrica

$$\bar{\beta} = - \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P \quad (2.12)$$

obtém-se

$$(\rho - \bar{\rho}) = - \bar{\rho} \bar{\beta} (T - \bar{T}) \quad (2.13)$$

Multiplicando a equação acima pela aceleração da gravidade e substituindo na Eq. (2.9) temos

$$F_y = \bar{\rho} g \bar{\beta} (T - \bar{T}) \quad (2.14)$$

que é o termo relativo à força de empuxo utilizado na equação do movimento para v.

Existem outros procedimentos que permitem a obtenção da Eq. (2.14), sendo um deles a expansão de  $\rho$  em série de Taylor que pode ser visto em [2].

Para finalizar convém definir a temperatura de referência  $\bar{T}$ , empregada na equação acima. Para o caso da convecção natural sobre uma placa plana, utiliza-se  $\bar{T}$  como sendo a temperatura fora da camada limite térmica. No caso entre duas placas paralelas verticais isotérmicas, a temperatura diferentes,  $\bar{T}$  é a média aritmética entre as duas temperaturas.

Para o caso de cavidades retangulares com duas fronteiras opostas isoladas termicamente e as duas restantes isotérmicas a temperaturas diferentes,  $\bar{T}$  é avaliada também como a média aritmética entre as duas temperaturas. Milioli [2] preocupou-se em estabelecer a temperatura de referência para cavidades irregulares, e propõe considerar  $\bar{T}$  através da média ponderada. Mas a escolha da temperatura de referência pode ser qualquer, pois esta é inerente a solução do problema. Neste trabalho adota-se  $\bar{T}$  igual a 0.5.

O parâmetro adimensional utilizado para identificar uma determinada condição de convecção natural é o número de Rayleigh, assim definido

$$Ra = \frac{g \bar{\beta} (T_1 - T_0) L^3}{\alpha v} \quad (2.15)$$

onde L é a dimensão do lado do hexágono. Análises de ordem de

grandeza dos termos das equações governantes [31] mostram que o número de Rayleigh é o parâmetro adequado para correlacionar os resultados de transferência de calor em situações onde o escoamento apresenta características de camada limite e  $Pr > 1$ , enquanto que o número de Boussinesq o é quando  $Pr < 1$ , onde o número de Boussinesq é dado por  $Bo = Ra Pr$ . Quando se está tratando com vários números de Prandtl, então o número de Boussinesq é apropriado para correlacionar os resultados. Mas neste trabalho o número de Prandtl é fixo com valor 0.707.

## CAPÍTULO 3

## SISTEMA DE COORDENADAS GENERALIZADO

## 3.1 - INTRODUÇÃO

Existem dois tipos de discretizações do domínio de cálculo que podem ser empregados e que são coincidentes com a fronteira irregular do domínio: a discretização estruturada e a não estruturada. Os volumes de controle da malha estruturada são formados por linhas coordenadas, enquanto que aqueles da malha não estruturada são distribuídos sem uma lei de formação. A primeira, mostrada na Fig. 3.1, é usualmente utilizada em modelos que usam volumes finitos, enquanto que a mostrada na Fig. 3.2 está, geralmente, associado ao método dos elementos finitos. O método dos volumes finitos pode, obviamente, empregar a malha não estruturada.

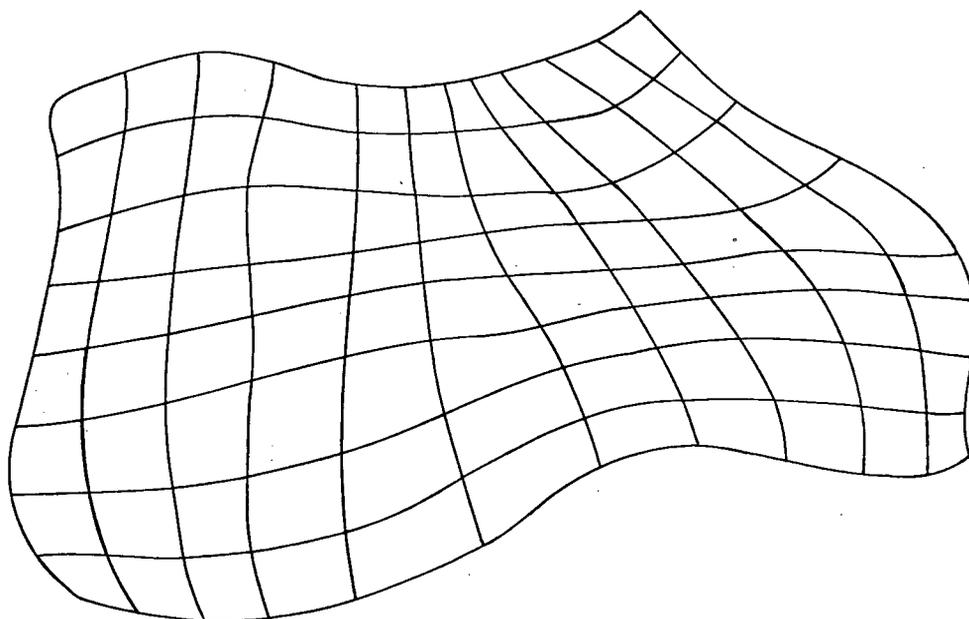


Fig. 3.1 - Exemplo de uma malha estruturada.

Neste trabalho optou-se por utilizar uma malha estruturada por apresentar diversas vantagens em relação a outra, sendo as mais importantes, realização dos balanços de massa, quantidade de movimento, energia, etc., com a respectiva estruturação do programa computacional.

Optando-se por uma discretização estruturada é necessário, portanto, gerar as linhas coordenadas que a originam, que, obviamente devem ser coincidentes com as fronteiras. Em outras palavras, busca-se uma transformação de coordenadas que será mostrada neste capítulo, juntamente com apresentação das métricas da transformação e a respectiva interpretação geométrica.

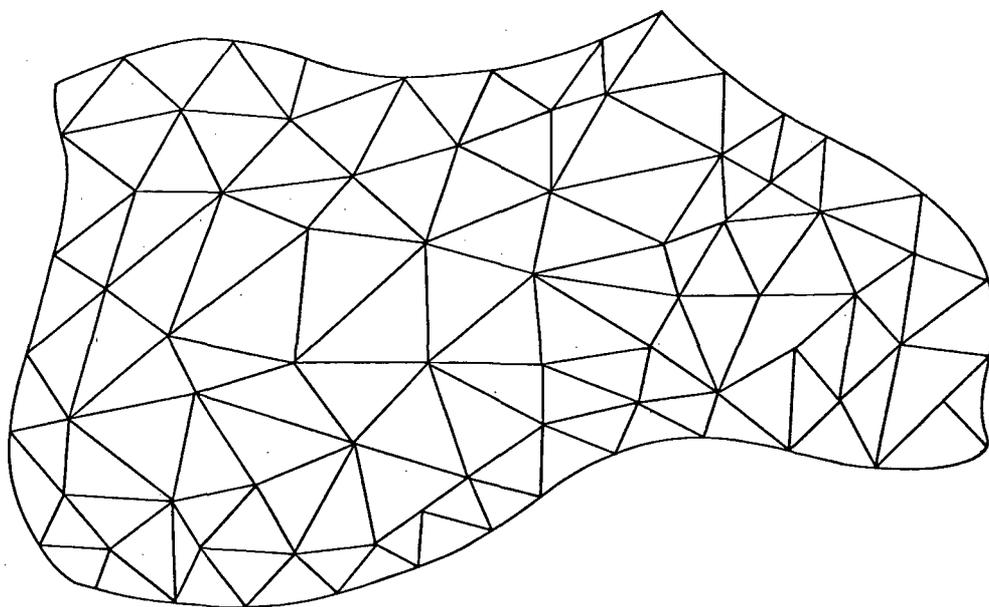


Fig. 3.2 - Exemplo de uma malha não estruturada.

Para as geometrias estudadas neste trabalho é possível obter a malha coincidente com a fronteira através de um método algébrico direto.

### 3.2 - TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS.

A transformação de coordenadas é feita do plano físico  $(x,y)$ , escolhido o cartesiano, para o plano transformado  $(\xi,\eta)$  através de

$$\xi = \xi(x,y) \quad (3.1)$$

$$\eta = \eta(x,y) \quad (3.2)$$

Com a aplicação das Eqs. (3.1) e (3.2) acima, qualquer domínio irregular, ou não, no sistema cartesiano, poderá ser mapeado para o plano transformado na forma retangular fixa, como mostrado na Fig. 3.3, abaixo.

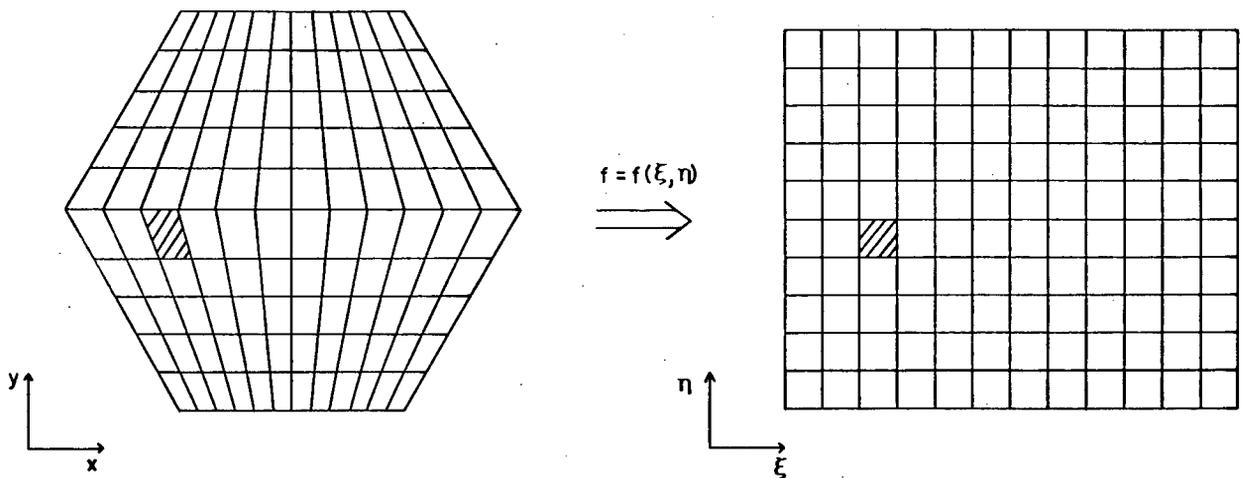


Fig. 3.3 - Transformação do sistema de coordenadas.

A matriz Jacobiano da transformação é

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

e o jacobiano da transformação é dado por

$$J = \det|J| = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \quad (3.4)$$

As derivadas no plano físico são transformadas para o plano  $(\xi, \eta)$  através da regra da cadeia. Ou seja,

$$f_x = f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x \quad (3.5)$$

$$f_y = f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y \quad (3.6)$$

Para obter-se as derivadas de primeira ordem de  $\xi$  e  $\eta$  em relação a  $x$  e  $y$ , obtém-se um sistema de duas equações, fazendo  $f$  igual a  $x$  e  $y$  respectivamente na Eq. (3.5). As incógnitas procuradas são  $\xi_x$  e  $\eta_x$ . Com a solução deste sistema obtém-se

$$\xi_x = y_{\eta J} \quad (3.7)$$

$$\eta_x = -y_{\xi J} \quad (3.8)$$

De modo similar, fazendo-se  $f$  igual a  $x$  e  $y$  na Eq. (3.6), obtém-se

$$\xi_y = -x_{\eta J} \quad (3.9)$$

$$\eta_y = x_{\xi J} \quad (3.10)$$

As derivadas de maior ordem são obtidas por aplicações sucessivas das Eqs. (3.5) e (3.6). Uma apresentação mais detalhada desta transformação de coordenadas pode ser encontrada em Thompson et al [20] e também estão constantes em [1] e [2].

Para simplicidade no tratamento das equações transformadas  $\Delta\xi$  e  $\Delta\eta$  são feitos iguais a unidade. Quaisquer valores podem ser atribuídos a estes parâmetros sem perda da generalidade.

As informações referentes à geometria do plano físico são transferidas ao plano transformado através das métricas da transformação, dadas por

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \quad (3.11)$$

$$\beta = x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta} \quad (3.12)$$

$$\gamma = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \quad (3.13)$$

As informações quanto a não-ortogonalidade da malha estão contidas em  $\beta$ . Quando as linhas coordenadas são ortogonais  $\beta$  é nulo.  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são as componentes do tensor métrico.

### 3.3 - COMPRIMENTOS E ÁREA NO PLANO FÍSICO

Para um melhor entendimento dos termos das equações transformadas é conveniente buscar a interpretação geométrica dos parâmetros que são originados da transformação de coordenadas.

As expressões para calcular os comprimentos e áreas do domínio físico são obtidos em função das métricas da transformação. Aplicando o teorema de Pitágoras para os comprimentos  $|\vec{dL}_{\xi}|$  e  $|\vec{dL}_{\eta}|$ , definidos na Fig. 3.4, obtém-se

$$|\vec{dL}_{\xi}| = \Delta\xi \sqrt{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2} = \Delta\xi \sqrt{\gamma} \quad (3.14)$$

$$|\vec{dL}_{\eta}| = \Delta\eta \sqrt{x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2} = \Delta\eta \sqrt{\alpha} \quad (3.15)$$

A área no plano físico é dado por

$$\vec{dA} = \vec{dL}_{\xi} \times \vec{dL}_{\eta} \quad (3.16)$$

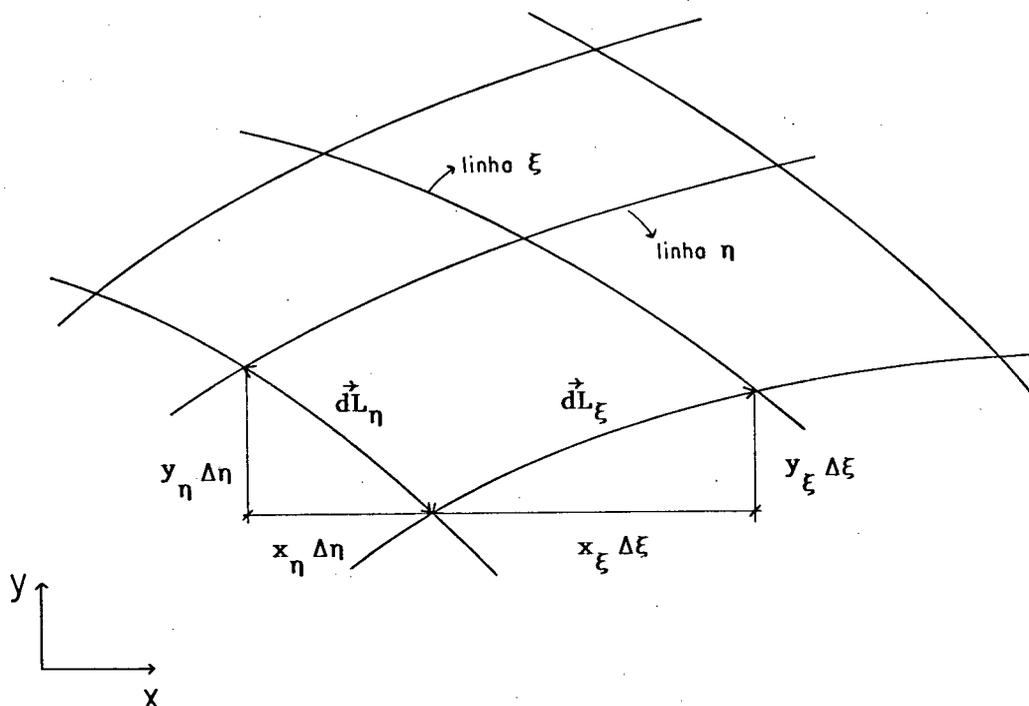


Fig. 3.4 - Comprimentos e área no plano físico.

No sistema cartesiano os vetores dados pelas Eqs. (3.14) e (3.15) são representadas por

$$d\vec{L}_\xi = x_\xi \Delta\xi \vec{u}_1 + y_\xi \Delta\xi \vec{u}_2 \quad (3.17)$$

$$d\vec{L}_\eta = x_\eta \Delta\eta \vec{u}_1 + y_\eta \Delta\eta \vec{u}_2 \quad (3.18)$$

O produto vetorial resulta em

$$d\vec{A} = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \Delta\xi \Delta\eta \vec{u}_3 \quad (3.19)$$

Sendo o vetor  $\vec{u}_3$  unitário, a área elementar no plano físico é definido por

$$|d\vec{A}| = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \Delta\xi \Delta\eta = \frac{\Delta\xi \Delta\eta}{J} \quad (3.20)$$

Observa-se que a área elementar no plano físico relaciona-se com a área no plano transformado pelo inverso do Jacobiano da transformação de coordenadas. É importante salientar que a magnitude da área no plano transformado pode ser escolhida arbitrariamente, via  $\Delta\xi$  e  $\Delta\eta$ .

### 3.4 - GERAÇÃO DO SISTEMA COORDENADO

Dadas as características das geometrias em estudo é possível gerar um sistema coordenado estruturado de forma algébrica com grande facilidade. A Fig. 3.4, abaixo, mostra a malha gerada em um quadrante do hexágono que, devido a simetria, é gerado apenas em um quarto da cavidade. A malha no restante do domínio é obtida por rebatimento.

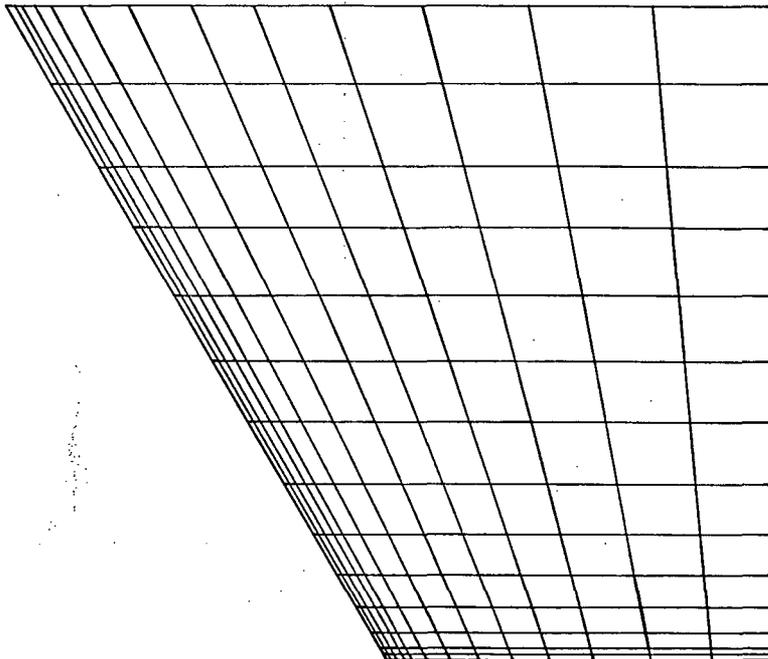


Fig. 3.5 - Um quadrante da malha para  $\theta = 120^\circ$ .

Com o fornecimento das coordenadas  $x$  e  $y$  do contorno

que definem um quadrante, a malha é gerada calculando-se os pontos coordenados internos através da relação de triângulos. A aplicação deste método algébrico deu-se possível devido as características geométricas das cavidades estudadas. Cabe salientar que, em muitos casos este método algébrico não pode ser aplicado. Nestes casos outros métodos de obtenção do sistema coordenado devem ser empregados, como os descritos em [21] e [22].

## CAPÍTULO 4

### TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

#### 4.1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo é destinado a transformação das equações governantes para o plano transformado, pois, como já comentado, as mesmas serão resolvidas no plano transformado. Esta transformação dá origem as componentes contravariantes do vetor velocidade. O significado físico destas componentes bem como o sistema de vetores de base nas quais as mesmas são descritas são apresentadas neste capítulo.

Também apresenta-se a relação entre a velocidade física normal à face do volume de controle e a componente contravariante.

#### 4.2 - COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE EM UM SISTEMA GENERALIZADO

As variáveis dependentes das equações de conservação da quantidade de movimento (Eqs. (2.2) e (2.3)) são as componentes do vetor velocidade no sistema cartesiano. Quando o sistema coordenado empregado é não ortogonal a representação de um vetor neste sistema pode ser realizada empregando-se dois distintos sistemas de vetores de base. Estes sistemas se relacionam entre si e são denominados vetores de base contravariante e vetores de base covariantes, que são coincidentes quando o sistema for ortogonal.

Na Fig. 4.1 mostram-se as componentes cartesianas do vetor velocidade  $(u, v)$ , assim como as componentes covariantes  $(V_1, V_2)$  e componentes contravariantes  $(V^1, V^2)$  relacionadas ao sistema generalizado  $(\xi, \eta)$ .

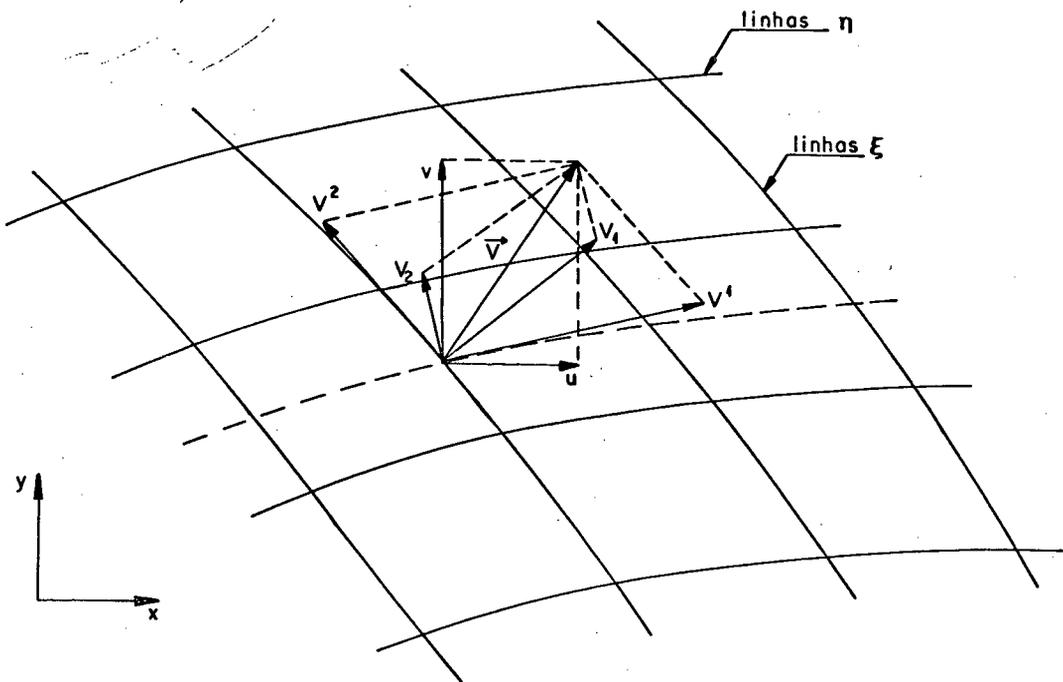


Fig. 4.1 - Componentes cartesianas, covariantes e contravariantes do vetor velocidade  $\vec{V}$ .

Para demonstrar a relação entre a velocidade física, que é responsável pelo fluxo convectivo, e as componentes contravariantes considera-se a Fig. 4.2. Realizando um balanço de massa através do volume de controle utilizando as componentes cartesianas, e sendo  $\dot{m}$  massa que atravessa a face oeste do volume na unidade de tempo, temos

$$\dot{m} = (y_{\eta} u \Delta \eta - x_{\eta} v \Delta \eta) \rho = \rho U \Delta \eta \quad (4.1)$$

De maneira similar para a face sul, temos

$$\dot{m} = (x_{\xi} v \Delta \xi - y_{\xi} u \Delta \xi) \rho = \rho V \Delta \xi \quad (4.2)$$

As componentes contravariantes do vetor velocidade  $\vec{V}$  são dadas por

$$v^1 = \xi_x u + \xi_y v \quad (4.3)$$

$$v^2 = \eta_x u + \eta_y v \quad (4.4)$$

Substituindo as Eqs. (3.7) a (3.10) nas equações acima, temos

$$V^1 = y_\eta u_J - x_\eta v_J \quad (4.5)$$

$$V^2 = x_\xi v_J - y_\xi u_J \quad (4.6)$$

Comparando as Eqs. (4.1) com (4.5) e (4.2) com (4.6) encontramos

$$V^1 = U_J \quad (4.7)$$

$$V^2 = V_J \quad (4.8)$$

Substituindo a Eq. (4.7) na Eq. (4.1) resulta em

$$\dot{m} = \rho \frac{V^1}{J} \Delta\eta \quad (4.9)$$

Isto demonstra que a decomposição contravariante é que permite que fluxos convectivos, que atravessam linhas coordenadas, sejam calculados por apenas uma das componentes. Nos outros dois sistemas, o covariante e o cartesiano, é necessário a utilização de duas componentes para avaliação dos fluxos convectivos em uma única face.

A relação entre as velocidades  $U$  e  $V^1$  e  $V$  e  $V^2$  acaba de ser mostrada. As velocidades  $U$  e  $V$  serão denominadas, doravante, de componentes contravariantes sem normalização métrica.

Através da Fig. 4.2 pode-se verificar a relação entre a velocidade física normal à face e a componente contravariante. Sabendo-se que o comprimento da face do volume é dado pela Eq. (3.14) (definida no Cap.3), temos

$$L = \sqrt{\alpha} \Delta\eta \quad (4.10)$$

sendo  $\bar{U}$  a velocidade normal à face do volume. A massa que atravessa esta face é dada por

$$\dot{m} = \rho \bar{U} \sqrt{\alpha} \Delta\eta \quad (4.11)$$

Igualando a equação acima com a Eq. (4.9) teremos a relação entre a velocidade física normal e a componente contravariante, dada por

$$U = \bar{U} \sqrt{\alpha} \quad (4.12)$$

Para se obter a relação acima para a outra componente contravariante, deve-se seguir o mesmo procedimento para a outra linha coordenada.

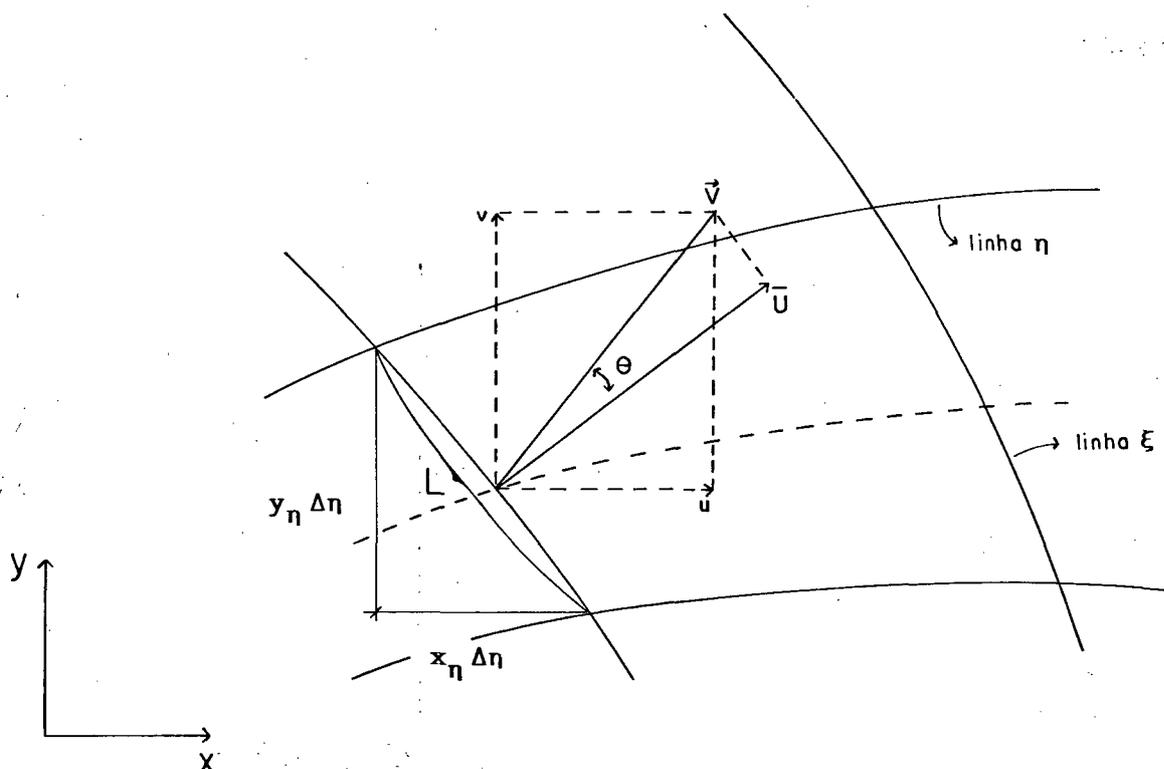


Fig. 4.2 - Uma componente contravariante do vetor velocidade.

A questão quanto a escolha das componentes do vetor mais adequadas para utilização nas equações de movimento transformadas está discutida em [1]. Optando também neste trabalho em manusear as equações transformadas em uma forma simples, onde as componentes cartesianas do vetor velocidade são mantidas como variáveis dependentes nas equações transformadas. As componentes contravariantes são, logicamente, empregadas para o cálculo dos fluxos convectivos.

### 4.3 - EQUAÇÕES GOVERNANTES TRANSFORMADAS

A equação de conservação apresentada na forma genérica, para o sistema cartesiano, deve ser escrita para o domínio transformado, através da aplicação da transformação definida pelas Eqs. (3.1) e (3.2). Utilizando a regra da cadeia, e seguido de alguns algebrismos para manter a equação na sua forma conservativa [18], obtém-se

$$\frac{1}{J} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \hat{P}\phi = \frac{\partial \hat{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} + \hat{S}\phi \quad (4.13)$$

onde

$$\hat{E} = \frac{1}{J} [\xi_x E + \xi_y F] \quad (4.14)$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J} [\eta_x E + \eta_y F] \quad (4.15)$$

$$\hat{R} = \frac{1}{J} [\xi_x R + \xi_y S] \quad (4.16)$$

$$\hat{S} = \frac{1}{J} [\eta_x R + \eta_y S] \quad (4.17)$$

Observa-se que a estrutura da Eq. (4.13) é semelhante a da Eq. (2.6), mantendo-se assim a interpretação física de cada termo. Este fato implica também que os procedimentos numéricos são semelhantes aqueles efetuados para coordenadas cartesianas. A simplicidade da equação contribui enormemente para o desenvolvimento de programas e algoritmos também simples.

Inserindo as Eqs. (4.14) a (4.17) na Eq. (4.13) e através de alguns algebrismos obtém-se a equação para a variável genérica  $\phi$ .

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V \phi) + \hat{P}^\phi =$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + \hat{S}^\phi \quad (4.18)$$

As componentes contravariantes U e V que aparecem na equação acima são as já introduzidas.

Nas equações transformadas  $\hat{P}^\phi$  representa os termos de pressão e é denotado por

$$\hat{P}^u = \frac{\partial P}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial P}{\partial \eta} y_\xi \quad (4.19)$$

$$\hat{P}^v = \frac{\partial P}{\partial \eta} x_\xi - \frac{\partial P}{\partial \xi} x_\eta \quad (4.20)$$

$$\hat{P}^T = 0 \quad (4.21)$$

$\hat{S}^\phi$  é o termo fonte transformado e apresenta-se como

$$\hat{S}^u = 0 \quad (4.22)$$

$$\hat{S}^v = \frac{1}{J} [\bar{\rho} g \bar{\beta} (T - \bar{T})] \quad (4.23)$$

$$\hat{S}^T = 0 \quad (4.24)$$

Os coeficientes da Eq. (4.18) são dados por

$$C_1 = \Gamma^\phi J \alpha \quad (4.25)$$

$$C_2 = C_5 = - \Gamma^\phi J \beta \quad (4.26)$$

$$C_4 = \Gamma^\phi J \gamma \quad (4.27)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são as métricas da transformação já definidas no Cap. 3.

Finalmente, o sistema de equações que descreve o fenômeno da convecção natural bidimensional escrita no sistema generalizado de coordenadas é dado por

Equação da continuidade

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad (4.28)$$

Equação do movimento para u

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V u) = - \frac{\partial P}{\partial \xi} y_\eta + \frac{\partial P}{\partial \eta} y_\xi + \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial u}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 \frac{\partial u}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial u}{\partial \xi}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Equação do movimento para v

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U v) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V v) = - \frac{\partial P}{\partial \eta} x_\xi + \frac{\partial P}{\partial \xi} x_\eta + \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial v}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 \frac{\partial v}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial v}{\partial \xi}) + \frac{1}{J} [\rho g \bar{\beta} (T - \bar{T})] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Equação da energia

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho T) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U T) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V T) = \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta}) + \\ \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Portanto, o conjunto de equações acima representa o fenômeno de transferência de calor por convecção natural escrito em um sistema generalizado permitindo que problemas em geometrias arbitrárias sejam resolvidos com facilidade computacional. Todas as informações sobre a geometria física são transferidas ao modelo através das métricas da transformação.

Apesar do estudo realizado aqui ter interesse somente pela solução em regime permanente, as equações são apresentadas na forma completa sendo válidas para o regime transiente. Entretanto para obter-se a solução do transiente real o intervalo de tempo deve respeitar certos critérios, que serão discutidos no capítulo seguinte.

## CAPÍTULO 5

### EQUAÇÕES DISCRETIZADAS PARA VOLUMES FINITOS

#### 5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo as equações aproximadas para os volumes de controle no plano transformado são obtidas através da integração das equações no espaço e no tempo.

As variáveis dependentes não são todas armazenadas nos mesmos pontos da malha computacional, por razões que serão apresentadas. A obtenção das equações aproximadas através da integração das equações sobre o volume elementar representa o balanço da propriedade no volume de controle. Dentro da generalidade apresentada pelo método dos resíduos ponderados a presente formulação é aquela onde a função peso aplicada no resíduo da equação diferencial é igual a unidade [32].

Apresentam-se as equações discretizadas para um campo genérico  $\phi$  nas formas explícitas e implícitas, e finalmente as equações discretizadas em volumes finitos para cada variável.

#### 5.2 - DISPOSIÇÃO DAS VARIÁVEIS DEPENDENTES NA MALHA

Para a discretização das equações governantes transformadas deve-se ter definido, inicialmente, a localização das variáveis dependentes na malha.

Diversas são as maneiras de dispor as variáveis dependentes na malha quando estas são as cartesianas e o sistema coordenado for generalizado. Os cuidados principais a serem tomados dizem respeito a localização das pressões, para que se tenha velocidades geradas pelo correto gradiente de pressão e

para que se tenha velocidades disponíveis onde as mesmas são necessárias para o cálculo dos fluxos convectivos.

Pode-se encontrar em [1] uma discussão sobre vários tipos de arranjos, onde o autor mostra as vantagens e desvantagens dos mesmos, e também faz uma justificativa pelas razões do tipo de arranjo das variáveis adotado em seu trabalho.

O arranjo adotado neste trabalho é o mesmo de [1], que é caracterizado pela localização das componentes  $u$  e  $v$  cartesianas no mesmo ponto e no meio das faces de um volume de controle para a conservação da massa.

Este arranjo confere estabilidade ao modelo numérico e não apresenta o inconveniente da solução de dois sistemas lineares (um para  $u$  e outro para  $v$ ) no mesmo ponto, pois as variáveis  $u$  e  $v$  são avançadas explicitamente não requerendo esforço computacional, de acordo com o método usado para o tratamento do acoplamento pressão-velocidade. As velocidades contravariantes  $U$  e  $V$  são armazenadas nas faces este/oeste e norte/sul, respectivamente.

Na Fig. 5.1 pode-se observar o arranjo desencontrado e a localização das variáveis dependentes adotadas neste trabalho. A pressão e a temperatura são armazenadas no centro do volume de controle, enquanto que as velocidades cartesianas e contravariante estão nas faces destes volumes. O volume de controle para a equação do movimento em  $v$  é deslocado de meio volume na direção desta velocidade e de modo similar é definido o volume para o movimento em  $u$ .

### 5.3 - OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES APROXIMADAS

Conforme comentado as equações aproximadas serão obtidas através da integração das equações de conservação dos volumes elementares [23]. Cabe destacar uma importante

característica deste método, que é a interpretação física associada a essa aproximação. Do mesmo modo que a equação em termos infinitesimais representa a conservação das propriedades sobre volumes de controle infinitesimais, a equação integrada representa a conservação das propriedades sobre os volumes de controle finitos. Este fato é fundamental para a obtenção de algoritmos estáveis.

Após ter sido definida a disposição das variáveis na malha, passa-se agora, a obter as equações para os volumes finitos. A partir da Eq. (4.18), apresentada na forma genérica para uma variável  $\phi$ , efetua-se a integração no volume de controle e aproxima-se em diferenças finitas as derivadas de primeira ordem ainda restantes, considerando a influência da difusão e convecção de  $\phi$ , obtendo-se assim, as equações discretizadas.

Reescrevendo a Eq. (4.18), onde os termos de derivadas cruzadas, por conveniência, são agrupadas ao termo fonte, obtém-se

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U\phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V\phi) + \hat{P}\phi = \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \hat{S}\hat{T}\phi \quad (5.1)$$

onde o termo fonte é expresso por

$$\hat{S}\hat{T}\phi = S\phi + \frac{\partial}{\partial \xi} (C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) \quad (5.2)$$

Para o esquema numérico adotado neste trabalho, onde as velocidades  $u$  e  $v$  são resolvidas explicitamente, conforme será visto no capítulo seguinte, não existe a necessidade de transferir os termos de derivadas cruzadas para o termo fonte. Quando é adotado numa metodologia onde  $u$  e  $v$  são calculadas através de solução de uma matriz poderá ser conveniente manter um esquema de 5 pontos, quando o analista numérico dispor apenas de métodos clássicos de solução de matrizes. Atualmente existem

eficientes algoritmos para solução de matrizes para problemas com 5, 7, 9, 19 e 27 pontos [24], permitindo que métodos numéricos mais gerais, como o aqui apresentado, sejam desenvolvidos.

Para o volume de controle apresentado na Fig. 5.2, integra-se cada termo da Eq. (5.1) no espaço e no tempo, obtendo-se

$$\begin{aligned}
 & \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \left\{ \left[ \frac{\rho\phi}{J} \right]^{t+\Delta t} - \left[ \frac{\rho\phi}{J} \right]^t \right\} d\eta d\xi + \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \left\{ [\rho U\phi]_e - [\rho U\phi]_w \right\} d\eta dt + \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \left\{ [\rho V\phi]_n - [\rho V\phi]_s \right\} d\xi dt + \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \hat{p}\phi \, d\eta d\xi dt = \tag{5.3} \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \left\{ [c_1 \frac{\partial\phi}{\partial\xi}]_e - [c_1 \frac{\partial\phi}{\partial\xi}]_w \right\} d\eta dt + \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \left\{ [c_4 \frac{\partial\phi}{\partial\eta}]_n - [c_4 \frac{\partial\phi}{\partial\eta}]_s \right\} d\xi dt + \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \hat{s}T\phi \, d\eta d\xi dt
 \end{aligned}$$

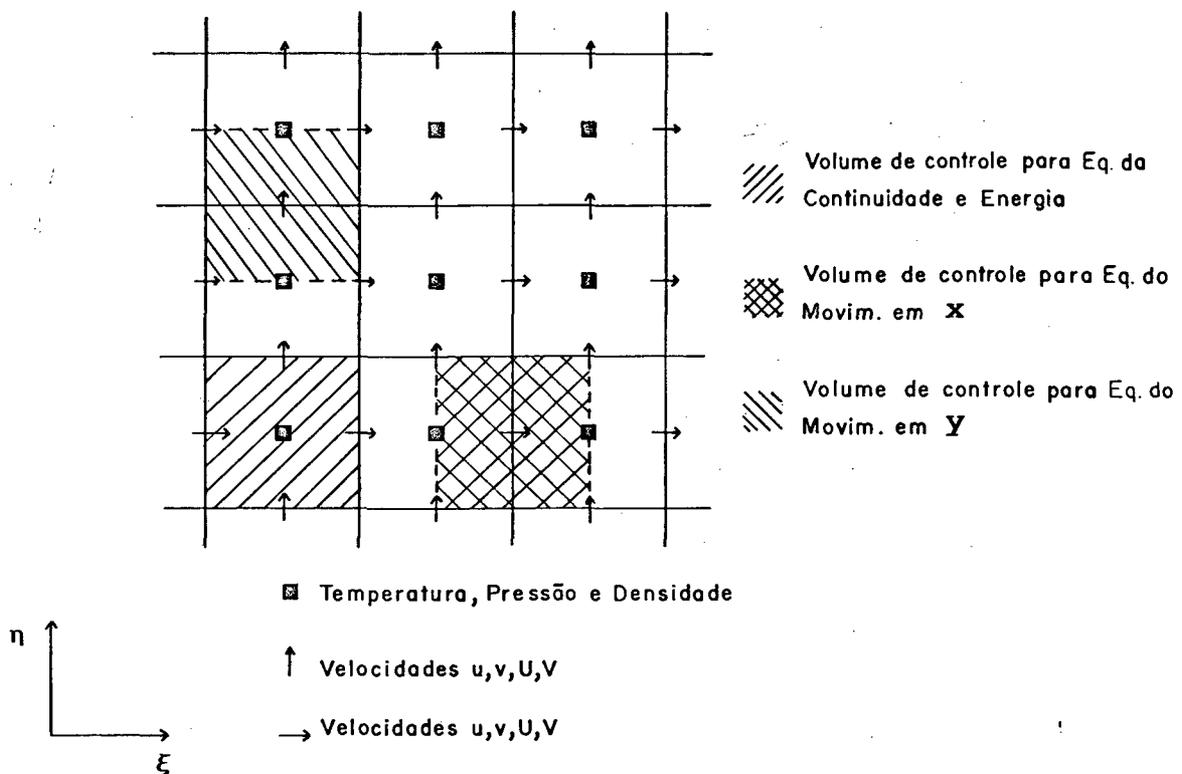


Fig. 5.1 - Armazenamento desencontrado das variáveis.

Os termos difusivos e convectivos são aproximados utilizando os coeficientes  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$ , de acordo com o método WUDS (Weighted Upstream Differencing Scheme) [25], que leva em consideração a importância relativa entre a difusão e a convecção da propriedade considerada. Neste esquema  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  são determinados a partir da solução unidimensional do problema difusivo-convectivo. Esta prática permite que a aproximação seja em diferenças centrais quando o número de Peclet for pequeno e tender como limite a aproximação a montante pura quando  $Pe$  tender ao infinito.

Com isto os valores da propriedade  $\phi$  sobre as faces do volume elementar são avaliadas por

$$\phi_e = \left[ \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_e \right] \phi_P + \left[ \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e \right] \phi_E \quad (5.4)$$

$$\phi_w = \left[ \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w \right] \phi_W + \left[ \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_w \right] \phi_P \quad (5.5)$$

$$\phi_n = \left[ \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_n \right] \phi_P + \left[ \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right] \phi_N \quad (5.6)$$

$$\phi_s = \left[ \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s \right] \phi_S + \left[ \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_s \right] \phi_P \quad (5.7)$$

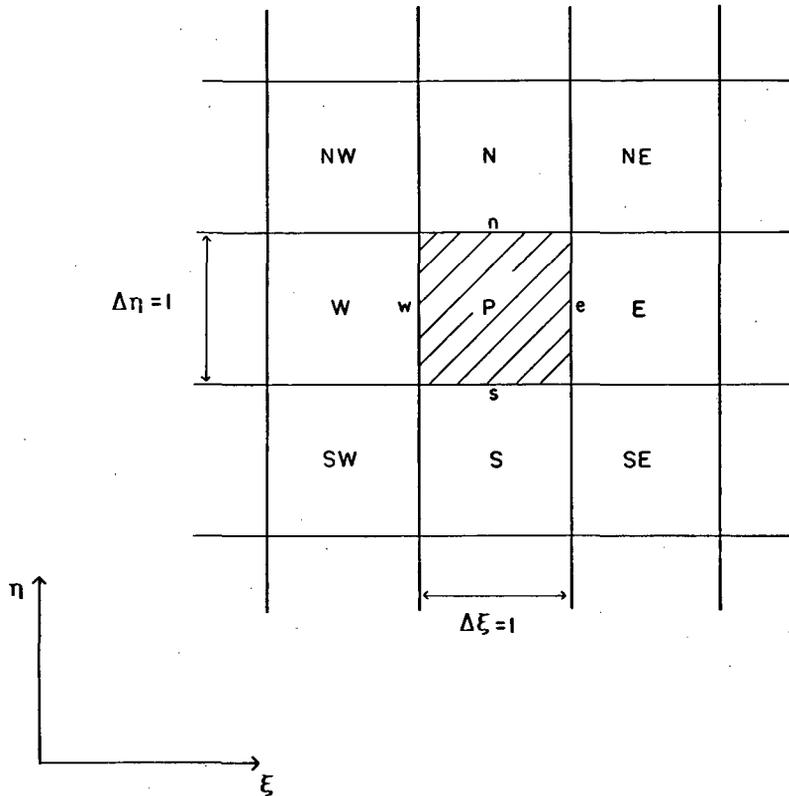


Fig. 5.2 - Volume de controle elementar no plano transformado.

Para os termos difusivos temos

$$C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_e = C_{1e} \bar{\beta}_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta \xi} \quad (5.8)$$

$$C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_w = C_{1w} \bar{\beta}_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta \xi} \quad (5.9)$$

$$C_4 \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_n = C_{4n} \bar{\beta}_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta \eta} \quad (5.10)$$

$$C_4 \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_s = C_{4s} \bar{\beta}_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta \eta} \quad (5.11)$$

A avaliação do perfil  $\phi$ , como por exemplo, entre os pontos P e E para a face  $\underline{e}$  depende do problema físico e apresenta variação dentro do domínio de solução. Pode-se verificar na Eq. (5.4) se  $\bar{\alpha}_e = 0$ , então a aproximação recai no caso particular da interpolação linear entre  $\phi_P$  e  $\phi_E$ . Na Fig. 5.3 observa-se as interpolações em função de  $\phi$  para a Eq. (5.4).

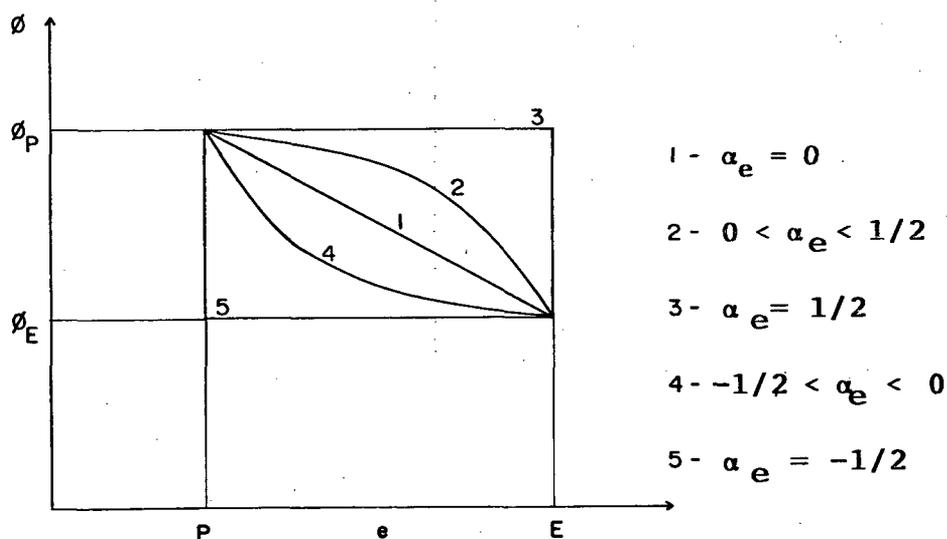


Fig. 5.3 - Função de interpolação unidimensional.

Para evitar a difusão numérica, presentes nos esquemas onde a função de interpolação é unidimensional, deve-se utilizar funções de interpolação bidimensionais que incluam no algoritmo também a influência dos pontos diagonais. Modernamente a difusão numérica pode ser minimizada empregando-se malhas adaptativas,

onde as coordenadas são as próprias linhas de corrente e a função potencial. A metodologia usada neste trabalho pode ser estendida para o uso de malhas adaptativas.

É importante salientar também que o método aqui utilizado permite, a partir do conhecimento do fenômeno físico em questão, a geração da malha onde as linhas coordenadas sejam, aproximadamente, alinhadas com o escoamento.

As expressões para  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  podem ser utilizadas independentemente se a malha for ortogonal ou não-ortogonal, devido as mesmas serem baseadas na solução unidimensional entre pontos adjacentes para problemas de convecção-difusão. Estas expressões são dados por [33].

$$|\bar{\alpha}| = \frac{r^2}{10 + 2r^2} \quad (5.12)$$

$$|\bar{\beta}| = \frac{1 + 0.005r^2}{1 + 0.05r^2} \quad (5.13)$$

onde

$$r = \left(\frac{\rho U}{C_1}\right) = Pe_m \quad (5.14)$$

que é o número de Peclet de malha baseado nas componentes contravariantes do vetor velocidade.

A integração da Eq. (5.3) no espaço e tempo, com as substituições dos termos previamente definidos, e usando a equação da continuidade na forma discretizada dada abaixo

$$[(\rho U)_e - (\rho U)_w] \Delta \eta + [(\rho V)_n - (\rho V)_s] \Delta \xi = 0 \quad (5.15)$$

tem a seguinte forma, para a variável genérica  $\phi$

$$\rho_P \phi_P^{n+1} \frac{1}{J} \frac{\Delta V}{\Delta t} + A_P^* \phi_P^{n+\theta} = A_e \phi_E^{n+\theta} + A_w \phi_W^{n+\theta} + A_n \phi_N^{n+\theta} + \quad (5.16)$$

$$A_s \phi_S^{n+\theta} + \rho_P \phi_P^n - L [\hat{P}^\phi] \Delta V + L [\hat{S}T^\phi] \Delta V$$

onde  $n+1$  indica o instante de tempo atual e  $n$  indica o instante de tempo anterior. Para  $\theta$  igual a 1, a formulação é implícita e  $\theta$  igual a zero a formulação é explícita.  $\Delta V$  é o volume do volume de controle no plano transformado.

Os coeficientes  $A_s$  são dados por

$$A_e = -M_e \left( \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e \right) + \bar{\beta}_e D_e \quad (5.17)$$

$$A_w = M_w \left( \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w \right) + \bar{\beta}_w D_w \quad (5.18)$$

$$A_n = -M_n \left( \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right) + \bar{\beta}_n D_n \quad (5.19)$$

$$A_s = M_s \left( \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s \right) + \bar{\beta}_s D_s \quad (5.20)$$

onde a parte convectiva de cada coeficiente, Eq. (5.17) a (5.20), é dada por

$$M_e = (\rho U)_e^{n+\theta} \Delta \eta \quad (5.21)$$

$$M_w = (\rho U)_w^{n+\theta} \Delta \eta \quad (5.22)$$

$$M_n = (\rho V)_n^{n+\theta} \Delta \xi \quad (5.23)$$

$$M_s = (\rho V)_s^{n+\theta} \Delta \xi \quad (5.24)$$

e a difusiva por

$$D_e = C_{1e} \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} \quad (5.25)$$

$$D_w = C_{1w} \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} \quad (5.26)$$

$$D_n = C_{4n} \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \quad (5.27)$$

$$D_s = C_{4s} \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \quad (5.28)$$

Retornando a Eq. (5.16), obtém-se a formulação explícita fazendo-se  $\theta = 0$

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} = & [A_e \phi_E^n + A_w \phi_W^n + A_n \phi_N^n + A_s \phi_S^n] \frac{\Delta t}{\rho_P \Delta V} + \\ & [1 - \frac{\Delta t J}{\rho_P \Delta V} A_P^*] \phi_P^n - L [\hat{p}^\phi] \frac{\Delta t}{\rho_P} + L [\hat{S}T^\phi] \frac{\Delta t}{\rho_P} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Na formulação explícita o critério de estabilidade requer que o coeficiente de  $\phi_P$  seja positivo. Portanto, o avanço no tempo deve satisfazer a desigualdade abaixo

$$\Delta t \leq \frac{\rho \Delta V}{A_P^*} = \Delta t_{\max} \quad (5.30)$$

onde  $\Delta t_{\max}$  é o máximo avanço no tempo para a formulação explícita.

Usando o fator E [26], definido como

$$\Delta t = E \Delta t_{\max} \quad (5.31)$$

onde E é denominado de multiplicador de tempo. Da Eq. (5.15) com  $\theta = 1$  obtém-se a formulação implícita em termos do fator E

$$A_P \phi_P^{n+1} = A_e \phi_E^{n+1} + A_w \phi_W^{n+1} + A_n \phi_N^{n+1} + A_s \phi_S^{n+1} + \frac{A_P}{(1+E)} \phi_P^n - L [\hat{P}^\phi] \Delta V + L [\hat{S}T^\phi] \Delta V \quad (5.32)$$

onde

$$A_P = A_P^* + \frac{\rho}{J} \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (5.33)$$

Através das equações (5.30) e (5.31) obtém-se

$$A_P^* = E \frac{\rho}{J} \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (5.34)$$

então  $A_P$  resulta em

$$A_P = A_P^* \frac{(1+E)}{E} \quad (5.35)$$

Para obter-se transientes reais,  $\Delta t$  deve ser o mesmo para cada equação de conservação e para cada volume da malha, para que o avanço seja igual em todo o domínio de solução, evitando-se assim as soluções distorcidas. Para isto,  $E$  deve ser variável de volume para volume no domínio. Quando se estiver apenas interessado na solução em regime permanente, como é o caso deste trabalho, então o valor de  $E$  pode ser constante para todo o domínio, onde o processo iterativo atinge o regime permanente através de um transiente distorcido.

Como pode ser observado na Eq. (5.32) quando a formulação é implícita, a positividade dos coeficientes é independente de  $E$ , podendo este assumir valores acima de 1 tanto no cálculo do transiente real como do distorcido. Detalhes do

procedimento de avanço de soluções transientes, distorcidos ou não e seus respectivos níveis iterativos podem ser vistos em [27].

Finalmente, as equações aproximadas que descrevem o problema são escritas abaixo:

Equação da continuidade

$$[(\rho U)_e - (\rho U)_w] \Delta \eta + [(\rho V)_n - (\rho V)_s] \Delta \xi = 0 \quad (5.36)$$

Equação do movimento para u

$$A_P u_P^{n+1} = A_e u_E^{n+1} + A_w u_W^{n+1} + A_n u_N^{n+1} + A_s u_S^{n+1} + \frac{A_P}{(1+E)} u_P^n - L [\hat{P}^u] \Delta V + L [\hat{S}T^u] \Delta V \quad (5.37)$$

Equação do movimento para v

$$A_P v_P^{n+1} = A_e v_E^{n+1} + A_w v_W^{n+1} + A_n v_N^{n+1} + A_s v_S^{n+1} + \frac{A_P}{(1+E)} v_P^n - L [\hat{P}^v] \Delta V + L [\hat{S}T^v] \Delta V \quad (5.38)$$

Equação da energia

$$A_P T_P^{n+1} = A_e T_E^{n+1} + A_w T_W^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + \frac{A_P}{(1+E)} T_P^n + L [\hat{S}T^T] \Delta V \quad (5.39)$$

Resta ainda a equação para o avanço da pressão, mas esta será apresentada no capítulo seguinte, juntamente com o algoritmo de solução e também apresentação do método de

tratamento do acoplamento pressão-velocidade.

A obtenção das equações discretizadas poderiam ter sido obtidas a partir do balanço direto da propriedade nos volumes elementares. Isto evitaria a transformação e a integração das equações como realizada neste trabalho. Apenas como exemplo obtém-se aqui a equação da conservação da massa pelo balanço. Lembrando das componentes do vetor velocidade responsáveis pelo fluxo de massa através das linhas coordenadas e realizando um balanço de massa para o volume da Fig. 5.4, temos

$$(\rho U)_w \Delta \eta + (\rho V)_s \Delta \xi = (\rho U)_e \Delta \eta + (\rho V)_n \Delta \xi \quad (5.40)$$

que é a própria Eq. (5.36).

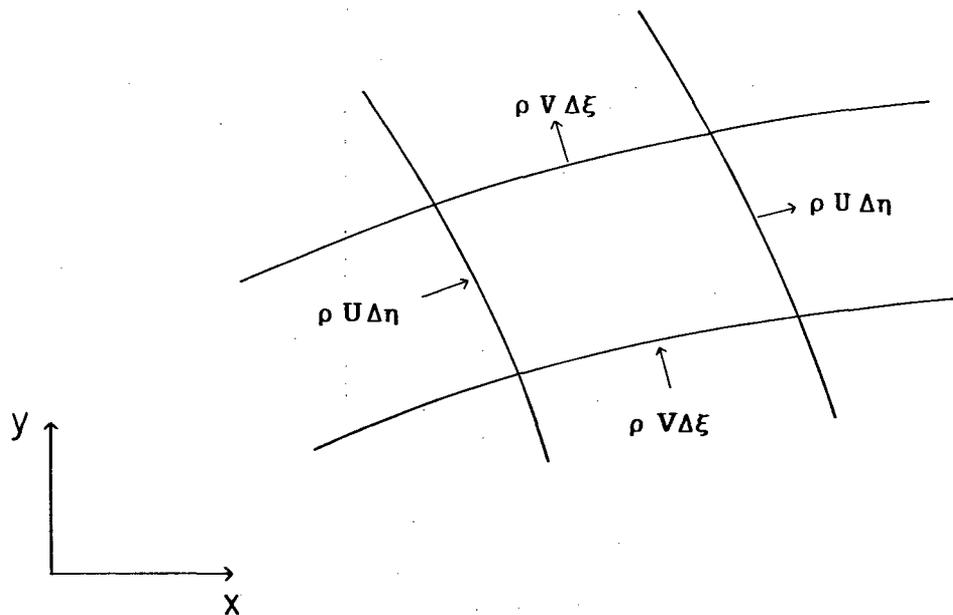


Fig. 5.4 - Balanço de massa em um volume de controle.

As equações da quantidade de movimento para u, quantidade de movimento para v e a equação da energia, podem ser obtidas de maneira semelhante.

## CAPÍTULO 6

### ESQUEMA NUMÉRICO DE SOLUÇÃO

#### 6.1 - INTRODUÇÃO

Obtidas as equações discretizadas, conforme Cap. 5, os sistemas de equações algébricos devem agora ser resolvidos. O método utilizado neste trabalho é segregado, isto é, resolve-se os sistemas lineares em sequência. Este fato introduz a necessidade de levar-se em conta o forte acoplamento entre a pressão e a velocidade nas equações do movimento.

Neste capítulo é apresentado o método utilizado para tratamento deste acoplamento e são discutidas as condições de contorno para as diversas variáveis. Comentários também são tecidos com relação aos métodos S.O.R (Sucessive Over-Relaxation) e MSI (Modified Strongly Implicit procedure) [24], utilizados para solução dos sistemas linearizados de equações.

#### 6.2 - ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE

Conforme já discutido, optou-se neste trabalho, em busca da simplicidade, manter as componentes cartesianas do vetor velocidade como variáveis dependentes no plano transformado. Foi também visto que para avaliação dos fluxos convectivos da propriedade  $\phi$  através das faces do volume de controle, as velocidades contravariantes devem ser utilizadas.

Observando a Eq. (4.29) nota-se que ao contrário do que acontece com o termo convectivo  $\frac{\partial}{\partial x}(\rho u u)$  na Eq. (2.2), onde o fluxo de massa é calculado com a própria variável dependente, no termo  $\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U u)$  o fluxo convectivo é calculado com a componente da

velocidade que não é a variável dependente do problema. Rigorosamente não existem problemas tratar as equações desta forma desde que certos cuidados sejam observados [1].

Neste trabalho, devido as características inerentes ao método PRIME (update Pressure Implicit and Momentum Explicit) [1] e [28], utilizado para tratamento do acoplamento pressão-velocidade, é possível utilizar as equações do movimento escritas para as variáveis contravariantes. Estas equações são obtidas a partir das equações aproximadas para as componentes  $u$  e  $v$ , como a seguir.

Reescrevendo as equações do movimento (5.37) e (5.38) de outra forma, mas ainda em termos de velocidades cartesianas, temos para a equação do movimento para  $u$

$$A_P^u u_P = A_e^u u_E + A_W^u u_W + A_n^u u_N + A_S^u u_S + B_P^u - \left[ \frac{\Delta P}{\Delta \xi} y_\eta \right]_P + \left[ \frac{\Delta P}{\Delta \eta} y_\xi \right]_P \quad (6.1)$$

onde

$$B_P^u = A_P^u \frac{u_P}{1+E} + L[\hat{S}T^u]_P \Delta V \quad (6.2)$$

e para equação do movimento para  $v$

$$A_P^v v_P = A_e^v v_E + A_W^v v_W + A_n^v v_N + A_S^v v_S + B_P^v - \left[ \frac{\Delta P}{\Delta \eta} x_\xi \right]_P + \left[ \frac{\Delta P}{\Delta \xi} x_\eta \right]_P \quad (6.3)$$

onde

$$B_P^v = A_P^v \frac{v_P}{1+E} + L[\hat{S}T^v]_P \Delta V \quad (6.4)$$

Substituindo as Eqs. (6.1) e (6.2) nas expressões de  $U$  e  $V$ , obtidas com a comparação da Eq. (4.5) com (4.7) e Eq. (4.6) com (4.8) obtêm-

se as equações do movimento para U e V como,

$$U_P = \hat{U} - \left[ \frac{\Delta P}{\Delta \xi} \frac{\alpha}{A_P^U} \right]_P + \left[ \frac{\Delta P}{\Delta \eta} \frac{\beta}{A_P^U} \right]_P \quad (6.5)$$

$$V_P = \hat{V} - \left[ \frac{\Delta P}{\Delta \eta} \frac{\gamma}{A_P^V} \right]_P + \left[ \frac{\Delta P}{\Delta \xi} \frac{\beta}{A_P^V} \right]_P \quad (6.6)$$

onde as velocidades  $\hat{U}$  e  $\hat{V}$  são

$$\hat{U}_P = \frac{A_e^U}{A_P^U} [u_{EY_{\eta P}} - v_{EX_{\eta P}}] + \frac{A_w^U}{A_P^U} [u_{WY_{\eta P}} - v_{WX_{\eta P}}] + \quad (6.7)$$

$$\frac{A_n^U}{A_P^U} [u_{NY_{\eta P}} - v_{NX_{\eta P}}] + \frac{A_s^U}{A_P^U} [u_{SY_{\eta P}} - v_{SX_{\eta P}}] + \frac{B_P^U}{A_P^U}$$

$$\hat{V}_P = \frac{A_e^V}{A_P^V} [v_{EX_{\xi P}} - u_{EY_{\xi P}}] + \frac{A_w^V}{A_P^V} [v_{WX_{\xi P}} - u_{WY_{\xi P}}] + \quad (6.8)$$

$$\frac{A_n^V}{A_P^V} [v_{NX_{\xi P}} - u_{NY_{\xi P}}] + \frac{A_s^V}{A_P^V} [v_{SX_{\xi P}} - u_{SY_{\xi P}}] + \frac{B_P^V}{A_P^V}$$

sendo os novos termos fontes dados por

$$B_P^U = B_P^u y_{\eta P} - B_P^v x_{\eta P} \quad (6.9)$$

$$B_P^V = B_P^v x_{\xi P} - B_P^u y_{\xi P} \quad (6.10)$$

Cabe aqui observar que os coeficientes são os mesmos independente da variável tomada como dependente. Uma vez que as velocidades  $u, v, U, V$  possuem o mesmo volume elementar. Assim

sendo, tanto para o volume de controle para U e para V tem-se que  $A_P^u = A_P^v = A_P^U$  e  $A_P^u = A_P^v = A_P^V$  respectivamente.

Agora, o conjunto de equações governantes fica definido pela equação da continuidade, Eq. (5.36), equação do movimento para U, Eq. (6.5), equação do movimento para V, Eq. (6.6), equação da energia, Eq. (5.39) e pela equação da pressão que será obtida a seguir.

Como as velocidades são obtidas em termos das componentes contravariantes, as velocidades cartesianas podem ser calculadas, quando necessárias, por

$$u = J(Ux_\xi + Vx_\eta) \quad (6.11)$$

$$v = J(Uy_\xi + Vy_\eta) \quad (6.12)$$

Após ter-se definido as variáveis dependentes para as equações do movimento passa-se a tratar então do acoplamento pressão-velocidade. Uma análise detalhada a respeito da questão do acoplamento pressão-velocidade pode ser vista em [26].

O acoplamento pressão-velocidade consiste em obter um algoritmo responsável para o avanço da pressão no processo iterativo, uma vez que não existe equação evolutiva para a pressão no sistema de equações.

Neste trabalho para o acoplamento pressão-velocidade é utilizado o método PRIME. Neste método o processo da correção da velocidade e obtenção da pressão é realizado simultaneamente, ao contrário do que é feito ao método SIMPLER [29] onde duas equações de Poisson são necessárias, uma para a correção da velocidade e outra para o avanço da pressão.

### 6.3 - OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO PARA PRESSÃO

A equação para o avanço da pressão no método PRIME é

obtida inserindo-se as equações de movimento, Eqs. (6.5) e (6.6), na equação da conservação da massa. De acordo com a Fig. 6.1 as seguintes velocidades são envolvidas para o balanço no volume mostrado.

$$U_e = \hat{U}_e - \left[ \frac{\Delta V}{A_P} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right]_e (P_E - P_P) + \left[ \frac{\Delta V}{4A_P} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right]_e (P_{NE} + P_N - P_{SE} - P_S) \quad (6.13)$$

$$U_w = \hat{U}_w - \left[ \frac{\Delta V}{A_P} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right]_w (P_P - P_W) + \left[ \frac{\Delta V}{4A_P} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right]_w (P_{NW} + P_N - P_{SW} - P_S) \quad (6.14)$$

$$V_n = \hat{V}_n - \left[ \frac{\Delta V}{A_P} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right]_n (P_N - P_P) + \left[ \frac{\Delta V}{4A_P} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right]_n (P_{NE} + P_E - P_{NW} - P_W) \quad (6.15)$$

$$V_s = \hat{V}_s - \left[ \frac{\Delta V}{A_P} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right]_s (P_P - P_S) + \left[ \frac{\Delta V}{4A_P} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right]_s (P_{SE} + P_E - P_{SW} - P_W) \quad (6.16)$$

Substituindo estas equações na Eq. (5.6) obtemos

$$A_P P_P = A_e P_E + A_w P_W + A_n P_N + A_s P_S + A_{ne} P_{NE} + A_{nw} P_{NW} + A_{se} P_{SE} + A_{sw} P_{SW} + B \quad (6.17)$$

onde os coeficientes são dados por

$$A_P = \left( \frac{\Delta V}{A_P} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right)_w + \left( \frac{\Delta V}{A_P} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right)_e + \left( \frac{\Delta V}{A_P} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right)_n + \left( \frac{\Delta V}{A_P} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right)_s \quad (6.18)$$

$$A_e = \left( \frac{\Delta V}{A_P U} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right)_e + \left( \frac{\Delta V}{4A_P V} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_s - \left( \frac{\Delta V}{4A_P V} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_n \quad (6.19)$$

$$A_w = \left( \frac{\Delta V}{A_P U} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right)_w + \left( \frac{\Delta V}{4A_P V} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_n - \left( \frac{\Delta V}{4A_P V} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_s \quad (6.20)$$

$$A_n = \left( \frac{\Delta V}{A_P V} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right)_n + \left( \frac{\Delta V}{4A_P U} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_w - \left( \frac{\Delta V}{4A_P U} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_e \quad (6.21)$$

$$A_s = \left( \frac{\Delta V}{A_P V} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right)_s + \left( \frac{\Delta V}{4A_P U} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_e - \left( \frac{\Delta V}{4A_P U} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_w \quad (6.22)$$

$$A_{ne} = - \left( \frac{\Delta V}{4A_P U} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_e - \left( \frac{\Delta V}{4A_P V} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_n \quad (6.23)$$

$$A_{se} = \left( \frac{\Delta V}{4A_P U} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_e + \left( \frac{\Delta V}{4A_P V} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_s \quad (6.24)$$

$$A_{nw} = \left( \frac{\Delta V}{4A_P U} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_w + \left( \frac{\Delta V}{4A_P V} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_n \quad (6.25)$$

$$A_{sw} = - \left( \frac{\Delta V}{4A_P U} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_w - \left( \frac{\Delta V}{4A_P V} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_s \quad (6.26)$$

$$B = \nabla \hat{V} = \hat{U}_w - \hat{U}_e + \hat{V}_s - \hat{V}_n \quad (6.27)$$

Os coeficientes acima são válidos para os volumes internos. Para os volumes de fronteira o procedimento é semelhante, bastando apenas substituir na equação da conservação

da massa a condição de contorno para a velocidade existente na fronteira em questão.

Após determinado o campo de pressões as velocidades são corrigidas de modo a satisfazer a conservação da massa, através das Eqs. (6.13) a (6.16).

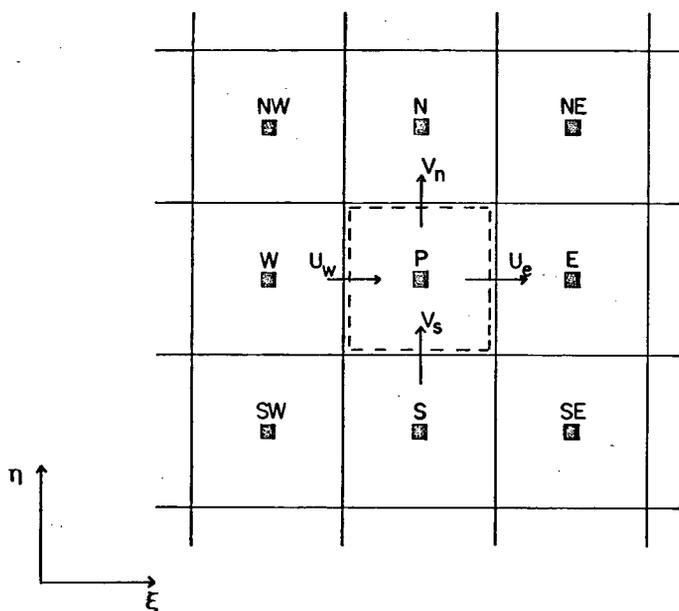


Fig. 6.1 - Volume de controle para a equação da continuidade

#### 6.4 - ALGORÍTMO DE SOLUÇÃO

A sequência de cálculo para a solução do problema é dada a seguir.

- (1) - Arbitrar os campos iniciais de velocidades, pressão e temperatura do domínio interno.
- (2) - Fornecer as condições de contorno para as variáveis dependentes.
- (3) - Calcular os coeficientes das Eqs. (6.1) e (6.3).

- (4) - Calcular  $\hat{U}$  e  $\hat{V}$  através das Eqs. (6.7) e (6.8).
- (5) - Resolver a equação de Poisson para a pressão, Eq. (6.17).
- (6) - Corrigir  $U$  e  $V$  usando as Eqs. (6.5) e (6.6).
- (7) - Calcular o campo de temperatura resolvendo a equação da energia, Eq. (5.39).
- (8) - Calcular as velocidades cartesianas  $u$  e  $v$  através das Eqs. (6.11) e (6.12).
- (9) - Retornar ao item (3) até que a convergência seja obtida.

No item (4), a obtenção de  $\hat{U}$  e  $\hat{V}$  não é feita através da solução de sistemas lineares, mas algebricamente através das Eqs. (6.7) e (6.8).

Existem dois motivos pelos quais os ciclos iterativos são necessários quando problemas como aqui tratados são resolvidos iterativamente. O primeiro pelo fato das equações serem acopladas entre si, e o segundo para levar em conta as não linearidades. Neste processo iterativo, como aqui descrito, os dois efeitos estão sendo considerados simultaneamente.

## 6.5 - CONDIÇÕES DE CONTORNO NO DOMÍNIO TRANSFORMADO

Na solução das equações governantes um fator importante é a aplicação das condições de contorno. Com o uso de sistemas de coordenadas que coincidem com a geometria a aplicação das condições de contorno fica facilitada.

As condições de contorno já foram definidas no Cap. 2,

e aqui são aplicadas no plano transformado. Utilizam-se pontos fictícios na aplicação das condições de contorno para as velocidades, enquanto que para a pressão e temperatura realiza-se balanços nas fronteiras. Passa-se agora a descrever a aplicação das condições de contorno para velocidade, pressão e temperatura.

#### 6.5.1 - CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA A VELOCIDADE

Como já citado anteriormente, na solução das equações de movimento, utiliza-se pontos fictícios. Este é um procedimento largamente utilizado com objetivo de se ter uma única equação para todos os volumes do domínio. Isto requer que se obtenha equações para os pontos fictícios que sejam função das condições de contorno de cada fronteira. Estas novas equações passam a integrar o sistema de equações composto pelas equações dos pontos internos.

No presente trabalho as condições de contorno para as velocidades são prescritas e iguais a zero, pois as paredes da geometria são sólidas e impermeáveis. Considere, por exemplo, a Fig. 6.2 onde é mostrada uma fronteira com o valor da variável  $\phi$ , onde  $\phi$  representa  $u$  ou  $v$ , prescrita. A equação para o ponto  $n$  sobre a fronteira, mostrado na Fig. 6.2, é

$$\phi_n = \frac{\phi_N + \phi_P}{2} \quad (6.28)$$

onde o valor da variável  $\phi$  no volume fictício  $N$  é dado por

$$\phi_N = 2\phi_n - \phi_P \quad (6.29)$$

Mas como neste caso  $\phi_n = 0$ , temos

$$\phi_N = -\phi_P \quad (6.30)$$

e assim similarmente para as demais fronteiras.

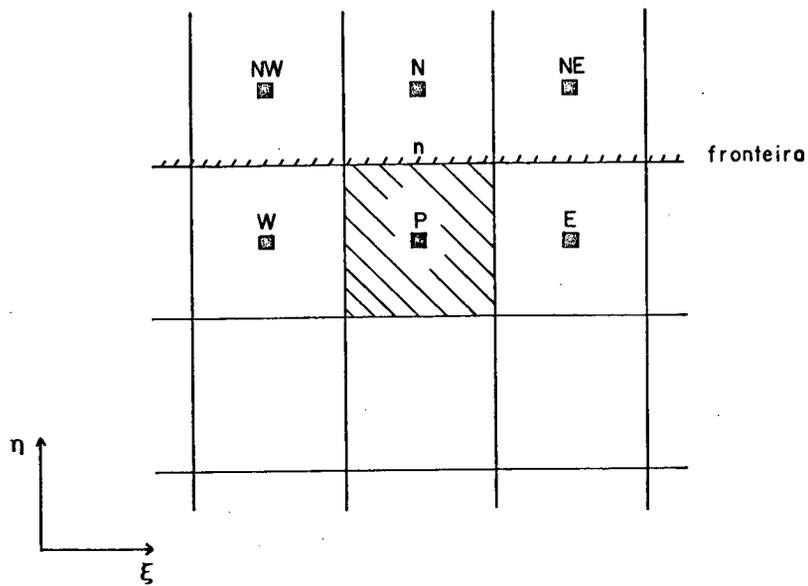


Fig. 6.2 - Volume fictício no domínio transformado.

#### 6.5.2 - CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA A PRESSÃO

Conforme visto no método PRIME, a cada iteração resolve-se uma equação de Poisson para a pressão com objetivo de atualizar o campo de pressões e corrigir o campo de velocidades.

O procedimento de obtenção da equação da pressão automaticamente incorpora as condições de contorno nas equações algébricas.

Considere, por exemplo, a Fig. 6.3 onde é mostrado o volume de contorno da pressão para a fronteira leste, Como as velocidades são prescritas nesta fronteira, as equações de movimento resultam

$$U_e = U_{\text{prescrito}} \quad (6.31)$$

$$U_w = \hat{U}_w - \left(\frac{\alpha}{A_P}\right) (P_P - P_W) + \left(\frac{\beta}{4A_P}\right) (P_{NW} + P_N + P_{SW} - P_S) \quad (6.32)$$

$$V_s = \hat{V}_s - \left(\frac{\gamma}{A_P V}\right)_s (P_P - P_S) + \left(\frac{\beta}{4A_P V}\right)_s (P_S + P_P - P_{SW} - P_W + 2\Delta P_f|_s) \quad (6.33)$$

$$V_n = \hat{V}_n - \left(\frac{\gamma}{A_P V}\right)_n (P_N - P_P) + \left(\frac{\beta}{4A_P V}\right)_n (P_N + P_P - P_{NW} - P_W + 2\Delta P_f|_n) \quad (6.34)$$

onde  $\Delta P_f$  é o gradiente de pressão na fronteira, este gradiente pode ser avaliado com uma aproximação de primeira ou segunda ordem [1]. Estudos e testes a este respeito foram realizados, e ambas as maneiras de avaliar o gradiente mostraram igual comportamento. Com isto, por questão de conveniência e simplicidade adota-se neste trabalho a avaliação do gradiente na fronteira de forma linear. Maiores detalhes em [1].

Quando a velocidade é prescrita, a velocidade na fronteira, por exemplo  $\hat{U}_e$ , é igual a  $U_e$ , uma vez que a mesma já satisfaz a conservação da massa e, portanto, não necessita ser corrigida via Eq. (6.13).

Substituindo-se as equações (6.31) a (6.34) na equação da continuidade obtém-se os coeficientes da seguinte forma

$$A_e = A_{ne} = A_{se} = 0$$

$$A_w, A_{nw}, A_{sw} \rightarrow \text{iguais aos já definidos p/ os volumes internos} \quad (6.35)$$

$$A_n = \left(\frac{\gamma}{A_P V}\right)_n + \left(\frac{\beta}{4A_P V}\right)_w - \left(\frac{\beta}{4A_P V}\right)_n \quad (6.36)$$

$$A_s = \left(\frac{\gamma}{A_P V}\right)_s - \left(\frac{\beta}{4A_P U}\right)_w + \left(\frac{\beta}{4A_P V}\right)_s \quad (6.37)$$

$$B = \Delta \vec{V} + (K_V)_s - (K_V)_n \quad (6.38)$$

onde

$$K_V = \frac{\Delta P_f \beta}{2A_P V} \quad (6.39)$$

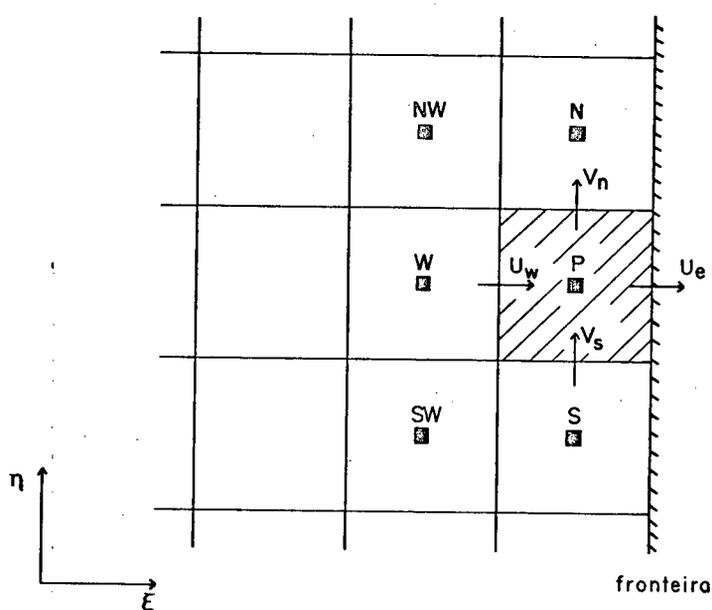


Fig. 6.3 - Volume de contorno para a Pressão.

Igual procedimento é realizado para os volumes das demais fronteiras. Obviamente os cantos são também volumes de fronteira e requerem o mesmo tratamento.

### 6.5.3 - CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA A TEMPERATURA

Para apresentar a aplicação das condições de contorno para a temperatura considera-se, inicialmente, equação da energia, Eq. (5.39)

$$A_P T_P^{n+1} = A_W T_W^{n+1} + A_S T_S^{n+1} + A_e T_E^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + \frac{A_P T_P^n}{1+E} + STT \quad (6.40)$$

onde STT é o termo fonte e dada por

$$STT = (C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta})_e + (C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi})_n - (C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta})_w - (C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi})_s \quad (6.41)$$

Seja o volume de fronteira mostrado na Fig. 6.3 já utilizado para demonstrar a aplicação da condição de contorno para a pressão.

Realizando-se um balanço de energia para esta fronteira tem-se

$$A_P T_P^{n+1} = A_W T_W^{n+1} + A_S T_S^{n+1} + A_n T_S^{n+1} + \frac{A_P T_P^n}{1+E} + STT \quad (6.42)$$

onde o  $A_P^*$  passa a ter a seguinte forma

$$A_P^* = A_W + A_S + A_n \quad (6.43)$$

O termo fonte fica sendo dado por

$$STT = (C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi})_n - (C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi})_s - (C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta})_w + \frac{q}{C_p} |_e \quad (6.44)$$

onde  $q|_e$  representa o fluxo de calor através da fronteira leste, sendo este termo diferente do tipo de condição de contorno. As condições de contorno deste trabalho são de temperatura prescrita e de fluxo de calor prescrito. Para isto temos

a) Condição de contorno com fluxo de calor prescrito

$$q|_e = q_{\text{prescrito}} \quad (6.45)$$

b) Condição de contorno com temperatura prescrita

$$q|_e = - C_P \left( C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) e \quad (6.46)$$

onde as derivadas  $\frac{\partial T}{\partial \eta}$  e  $\frac{\partial T}{\partial \xi}$  são calculadas com a distribuição de temperatura prescrita sobre a fronteira. No caso deste trabalho, onde a temperatura é constante ao longo da fronteira leste, temos  $\frac{\partial T}{\partial \eta}|_e = 0$ .

Assim como exemplificado, aplica-se as condições de contorno em todas as fronteiras. Neste caso não existem pontos fictícios e as condições de contorno são incorporadas às equações dos volumes de fronteira.

## 6.6 - DETALHES NUMÉRICOS

### 6.6.1 - MÉTODO DE RELAXAÇÃO DAS VARIÁVEIS NO CICLO ITERATIVO

No processo iterativo são resolvidas as equações fazendo um avanço das variáveis no tempo até atingir-se a convergência. O transiente seguido é distorcido usando-se valores de E constantes no domínio. O valor de E permite controlar o avanço para obtenção da solução, pois é equivalente a estipular o intervalo de tempo no qual a solução é avançada.

Na solução do sistema linear de cada variável foi utilizado, inicialmente, o método S.O.R com valores de relaxação em função, principalmente, do tamanho da malha e da magnitude do processo convectivo.

É importante lembrar que neste trabalho o método S.O.R

é aplicado na solução da equação da pressão e da energia apenas. As variáveis  $u$  e  $v$  ( $U$  e  $V$ ) são avançadas, como já comentado, através do cálculo de  $\hat{U}$  e  $\hat{V}$ , que significa um avanço semelhante ao processo iterativo ponto por ponto de Jacobi.

Testes foram realizados para a determinação de valores de coeficientes de relaxação que aceleram a convergência mas, devido a dependência de vários fatores, não é possível a determinação de uma regra geral para os valores destes coeficientes. Os valores utilizados que apresentaram aceleração no processo iterativo da solução do sistema linear, na maioria dos casos tratados neste trabalho, é uma sub-relaxação de 0.8 para a equação da energia e a sobre-relaxação de 1.5 para a pressão.

No final da realização deste trabalho implementou-se um outro método para a solução das equações da temperatura e pressão, denominado MSI [24]. O MSI mostrou-se muito eficiente, conduzindo rapidamente para convergência e alguns casos foram repetidos utilizando-se este método e verificou-se que o tempo de computação para a solução do problema diminuiu em mais de 60%. Este método tem também a vantagem de não necessitar de coeficientes de relaxação, e é praticamente direto.

#### 6.6.2 - CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA E TOLERÂNCIA

O critério de convergência adotado neste trabalho é dado por

$$\epsilon \leq \frac{|\phi^{n+1} - \phi^n|}{|\phi_{\max} - \phi_{\min}|} \quad (6.47)$$

onde  $\epsilon$  é a tolerância determinada.

Para interrupção do avanço da solução a convergência é realizada nas velocidades cartesianas e a tolerância é fixada na

maioria dos casos, em  $5.0E-05$ . Para a solução da pressão e da temperatura no ciclo iterativo interno a tolerância é fixada em  $1.0E-04$ . Com a utilização do MSI o critério de convergência adotado é devido a Van Doormaal & Raithby [30], que é denominado de Norma Euclidiana dos Resíduos. A tolerância foi fixada em 0.05 tanto para a obtenção do campo de pressão como para temperatura, no ciclo iterativo interno, permanecendo o mesmo critério da Eq. (6.47) para a interrupção do avanço da solução completa.

### 6.6.3 - AVANÇO DAS VARIÁVEIS NO CICLO ITERATIVO

Como visto no Cap. 2, a coordenada  $t$  é mantida mesmo que o interesse seja o regime permanente, pois esta coordenada serve de avanço iterativo (transiente distorcido) e o valor de  $E$  é o responsável por este avanço iterativo (no tempo).

O valor de  $E$  foi fixado em 2.5, quando do uso do S.O.R. Este valor apresentou um bom comportamento para a solução do conjunto das geometrias tratadas neste trabalho. Com a utilização do MSI, onde se tem uma melhor solução do campo de temperatura e de pressão permitindo um maior avanço no tempo, então possibilitou o aumento no valor de  $E$  para 5.0. É importante ressaltar que com o MSI não foram repetidos todos os casos deste trabalho, apenas alguns deles para verificar o comportamento e vantagens deste novo método para a solução de sistemas lineares.

## CAPÍTULO 7

### ANÁLISE DOS RESULTADOS

#### 7.1 - INTRODUÇÃO

Tendo-se, até aqui, apresentado toda a metodologia utilizada, passa-se agora para a apresentação dos resultados do estudo do comportamento da convecção natural em cavidades hexagonais.

Fundamentalmente, procura-se determinar os parâmetros da transferência de calor por convecção natural em cavidades hexagonais arbitrárias em função do número de Rayleigh. Adicionalmente existem questões importantes que procura-se responder, como por exemplo, a) a determinação do ângulo para o qual surgem recirculações junto aos vértices, onde espera-se uma sensível diminuição da troca de calor, b) a importância relativa do processo convectivo e difusivo em função do ângulo da cavidade e c) a razão entre o calor trocado por convecção natural pela cavidade hexagonal e o calor trocado pela cavidade retangular inscrita. O conhecimento desta razão é fundamental na escolha de uma cavidade hexagonal ou retangular para uma determinada finalidade de transferência de calor.

São apresentadas neste capítulo, as malhas utilizadas para as diversas geometrias hexagonais na obtenção dos resultados. Os resultados foram obtidos para as cavidades com ângulo variando de  $30^\circ$  a  $180^\circ$  com o número de Rayleigh de 0 a  $10^6$ . Para a visualização do processo convectivo e para melhor interpretar o fenômeno físico são apresentados perfis de velocidades, perfis de temperaturas, linhas de corrente, vetores velocidade, isotermas, linhas de fluxo de calor e também o fluxo de calor local ao longo das paredes com temperatura prescrita, para todos os números de Rayleigh e para diversos ângulos, em termos de condutividade térmica equivalente. Finalmente é

realizada uma comparação da troca de calor das cavidades hexagonais com as retangulares inscritas correspondentes.

## 7.2 - MALHAS PARA AS CAVIDADES HEXAGONAIS

Como já citado no Cap. 3, as malhas utilizadas para as diversas geometrias foram geradas através de um método algébrico direto. Algumas das malhas utilizadas são aqui apresentadas.

Para todas as geometrias foram realizados estudos de resolução de malha, isto é, para uma determinada geometria refina-se a malha efetuando-se uma maior concentração das linhas coordenadas nas fronteiras, verificando-se as variações das variáveis com a mudança da malha. É comum determinar a malha adequada (suficientemente refinada) em função da não variação dos parâmetros médios, como número de Nusselt, por exemplo. Neste trabalho observou-se que este critério não é adequado quando se tem interesse também na magnitude dos parâmetros locais. Portanto, a condutividade térmica equivalente local foi utilizada, como informação para a determinação da malha adequada. Este estudo foi realizado para  $Ra = 10^6$ , condição em que existem os maiores gradientes. Quando a convecção se torna menos intensa é natural utilizar uma malha menos refinada mas, por questão de segurança na obtenção dos resultados, para uma determinada cavidade os mesmos foram computados com a malha refinada obtida com os números de Rayleigh mais elevados.

Apresenta-se agora algumas malhas utilizadas. Na Fig. 7.1 temos a malha para  $\theta = 180^\circ$  que corresponde ao retângulo 2:1, a qual tem 36 volumes na direção vertical e 20 na horizontal. Nesta malha verifica-se a concentração das linhas coordenadas nas fronteiras como citado anteriormente. A Fig. 7.2 mostra a malha da cavidade hexagonal com  $\theta = 120^\circ$  com 28 volumes na direção vertical e 26 na horizontal, e a Fig. 7.3 apresenta a cavidade com  $\theta = 60^\circ$  e 32 x 32 volumes.

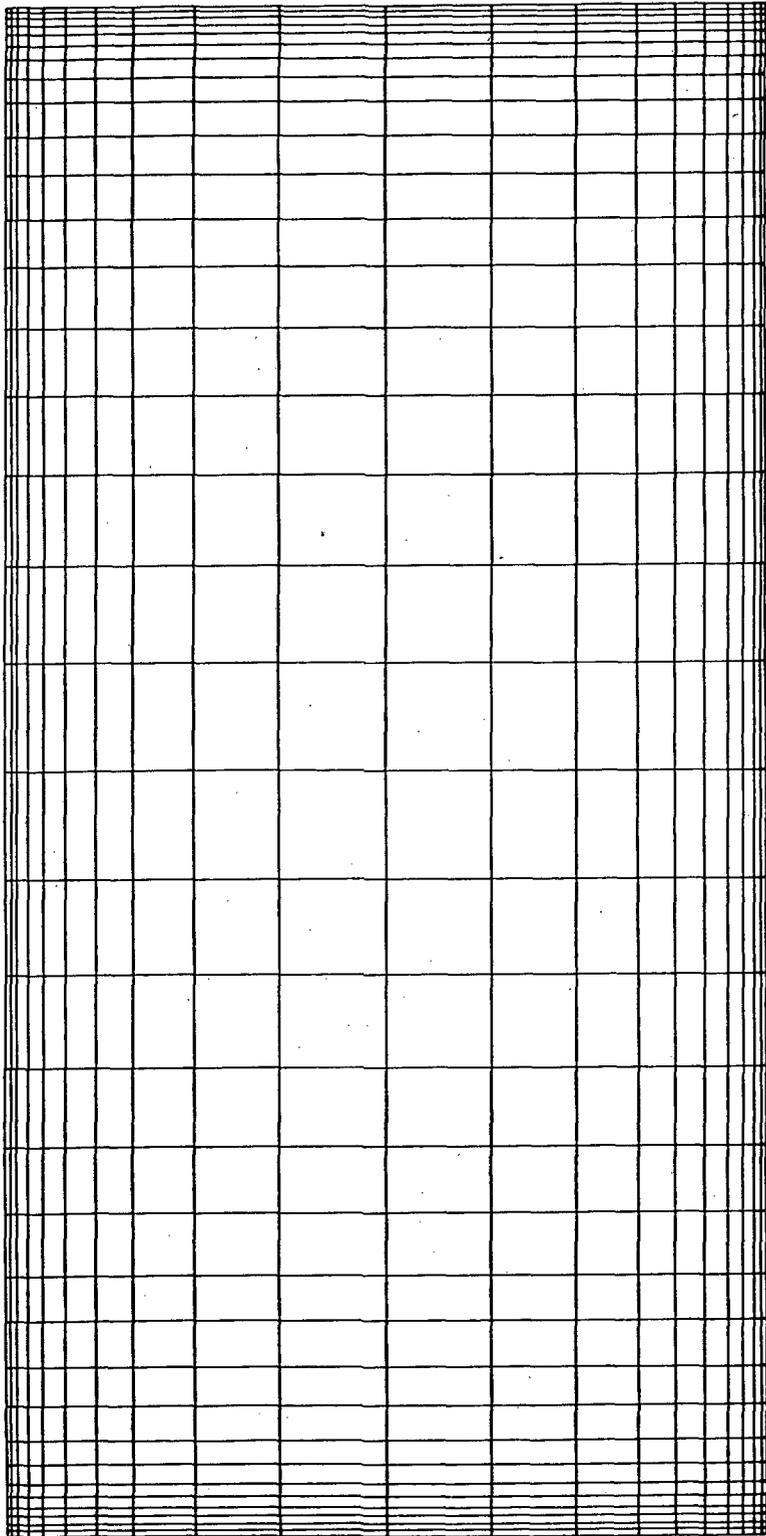


Fig. 7.1 - Malha da cavidade retangular ( $\theta=180^\circ$ ),  
20 x 36 volumes.

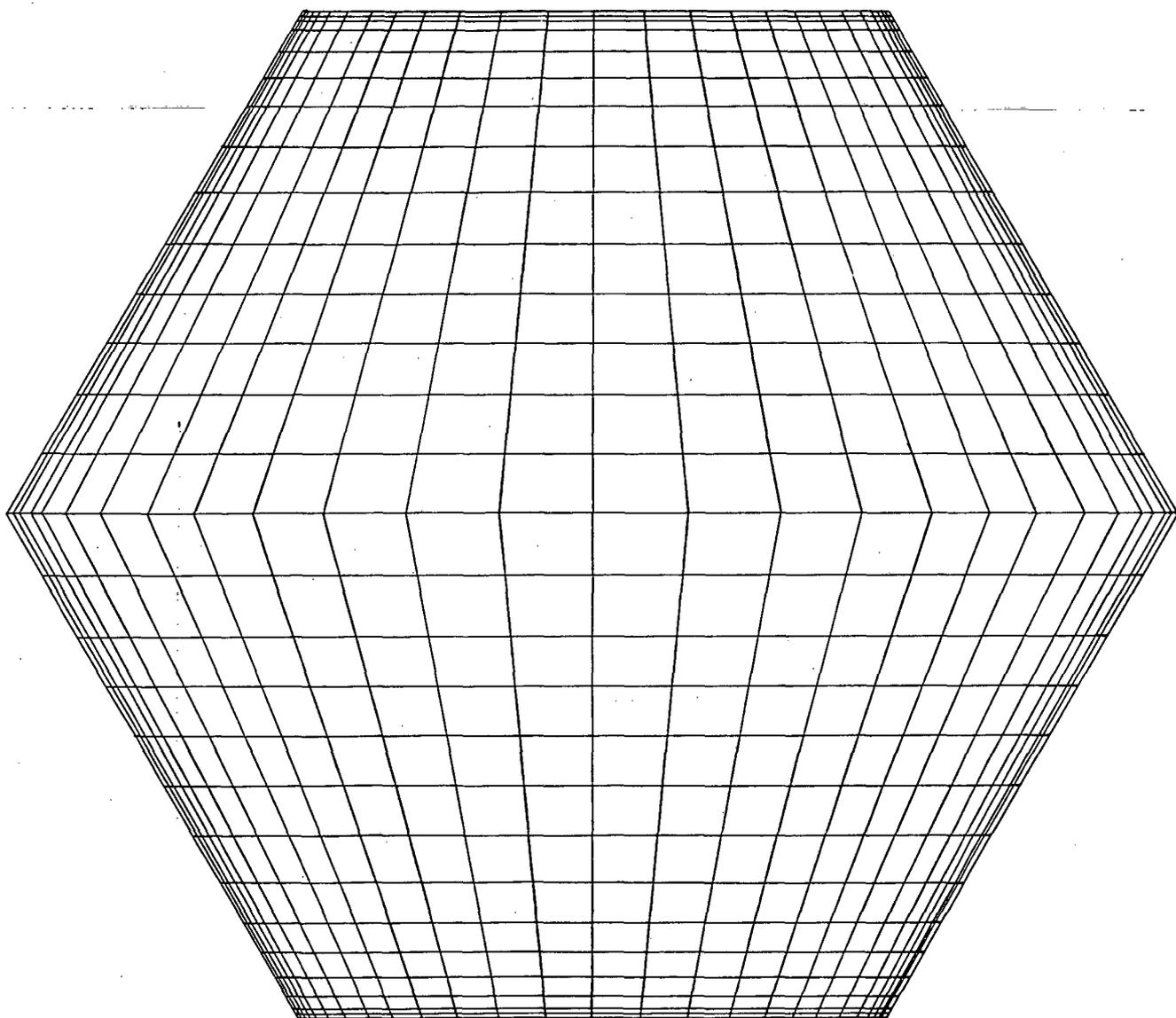


Fig. 7.2 - Malha da cavidade hexagonal com  $\theta=120^\circ$ ,  
26 X 28 volumes.

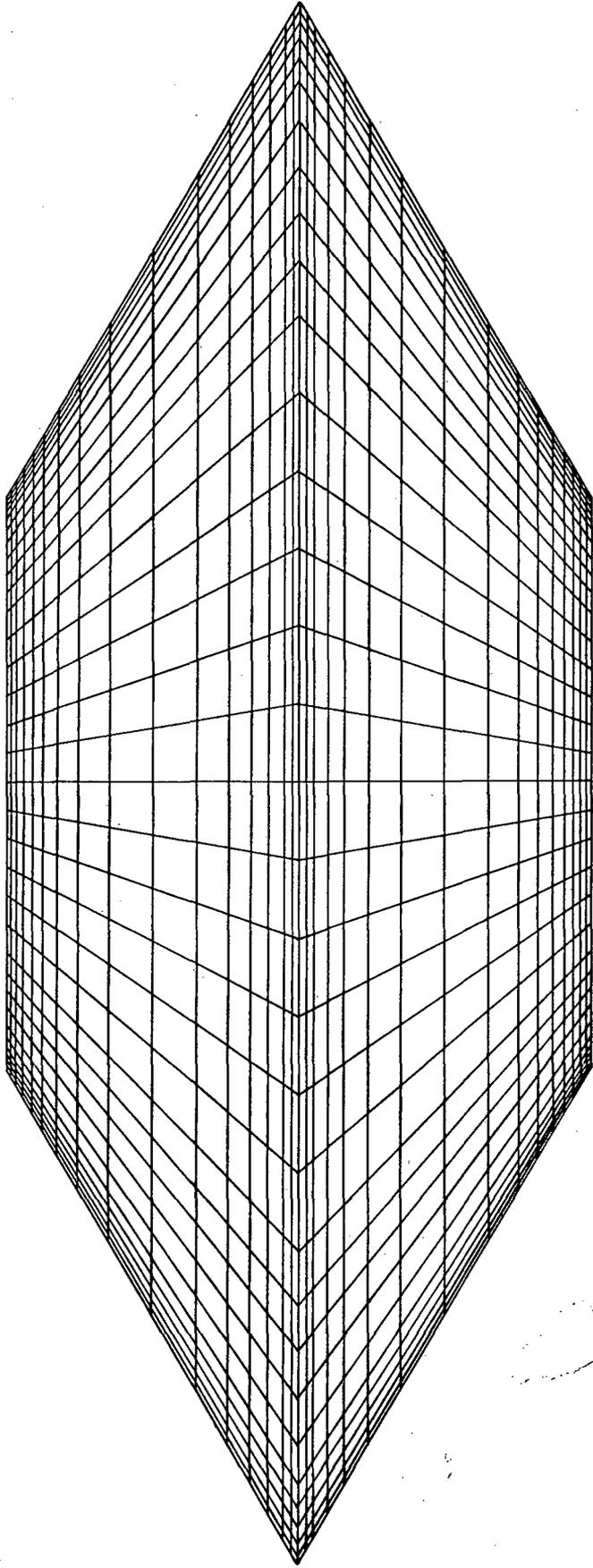


Fig. 7.3 - Malha da cavidade hexagonal com  $\theta=60^\circ$ , 32 x 32 volumes.

### 7.3 - APRESENTAÇÃO DOS PERFIS DE VELOCIDADE E TEMPERATURA

É procedimento comum expressar a magnitude da convecção natural em termos do número de Rayleigh. A seguir, são apresentados, para as diversas cavidades, os perfis de velocidades e temperatura para vários números de Rayleigh.

Mostra-se na Fig. 7.4 os perfis de velocidade adimensionalizada  $\bar{v}$ , ao longo da linha média horizontal para a cavidade retangular, para  $Ra = 10^3$  e  $10^4$ , enquanto que na Fig. 7.5 temos os resultados para  $Ra = 10^5$  e  $10^6$ . Este comportamento da cavidade retangular é bem conhecido. Para frizar, observa-se que com o aumento do número de Rayleigh tem-se a formação de escoamento de camada limite, com uma elevada velocidade ascendente junto a parede aquecida e descendente junto a parede resfriada. Para  $Ra = 10^6$  surge, moderadamente, a inversão térmica, como pode-se verificar na Fig. 7.5, onde existe uma parcela de fluido quente mais perto da parede fria do que da parede quente e vice-versa. Este fenômeno ocorre devido ao aquecimento da massa de fluido central, que está quase estagnada, pela massa aquecida que vem da parede quente e perde calor para a parede fria e para esta massa central. O mesmo ocorre com a massa fria, que vem com alta velocidade da parede fria, e resfria, desta feita, a parte esquerda da massa central estagnada.

Analisando-se o perfil de temperatura para a mesma cavidade, ao longo da linha média horizontal, verifica-se na Fig. 7.6 que para  $Ra = 10^3$  que o perfil de temperatura é praticamente linear, isto significa que o fluxo de calor da parede aquecida para a parede resfriada é mantido praticamente por condução. Voltando para a Fig. 7.4 verifica-se que a velocidade para  $Ra = 10^3$  é muito baixa, mostrando assim, que para este número de Rayleigh os efeitos convectivos são pequenos. Também na Fig. 7.6 pode-se observar o fenômeno da inversão térmica, a qual é nitidamente mostrado para números de Rayleigh altos,  $Ra = 10^5$  e  $10^6$ .

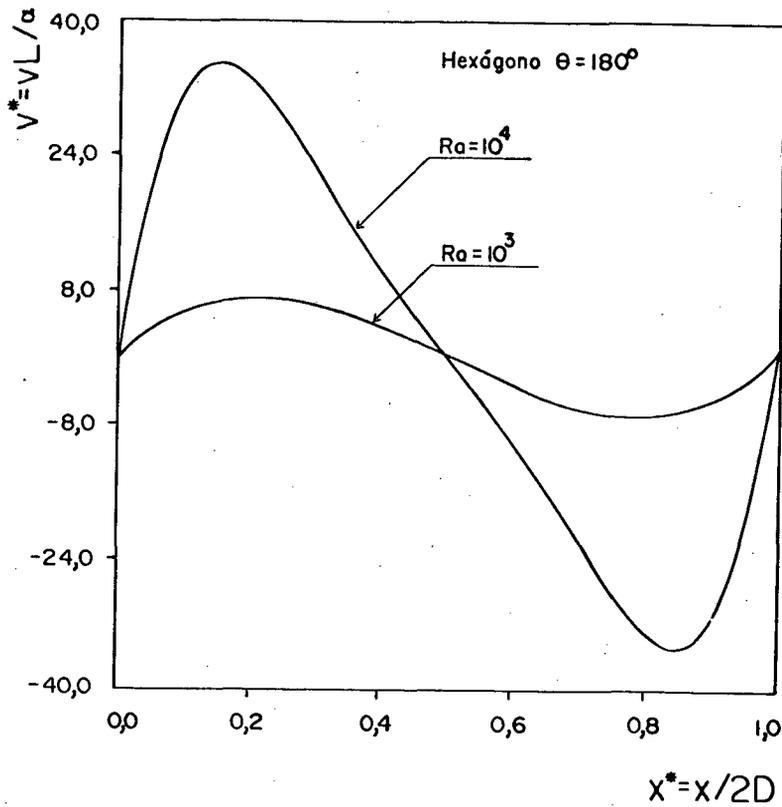


Fig. 7.4 - Perfis de velocidade  $v^*$  ao longo da linha média horizontal.  $\theta = 180^\circ$ ,  $Ra = 10^3$  e  $10^4$ .

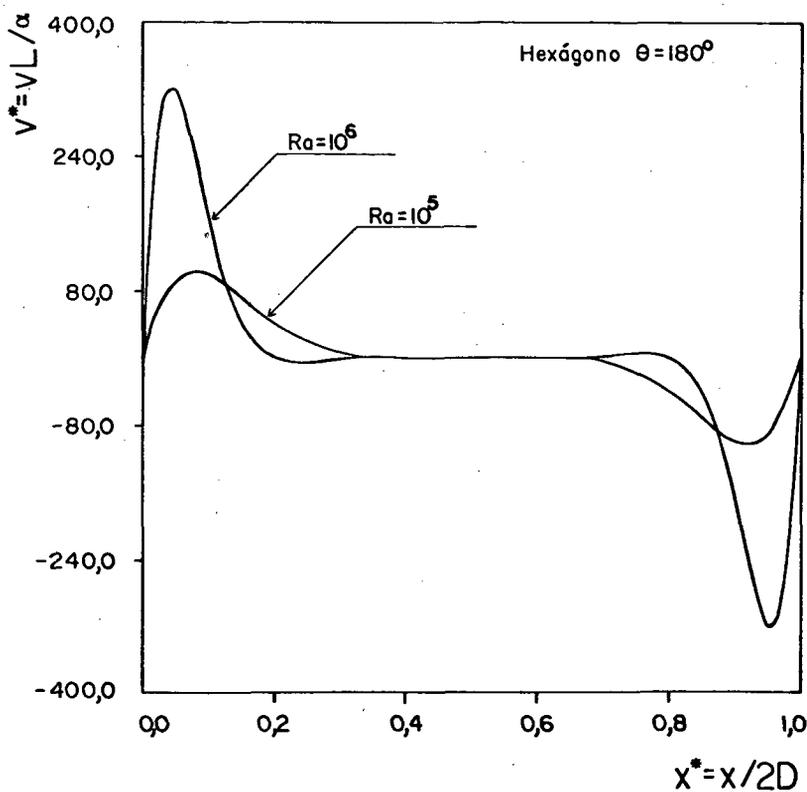


Fig. 7.5 - Perfis de velocidades  $v^*$  ao longo da linha média horizontal.  $\theta = 180^\circ$ ,  $Ra = 10^5$  e  $10^6$ .

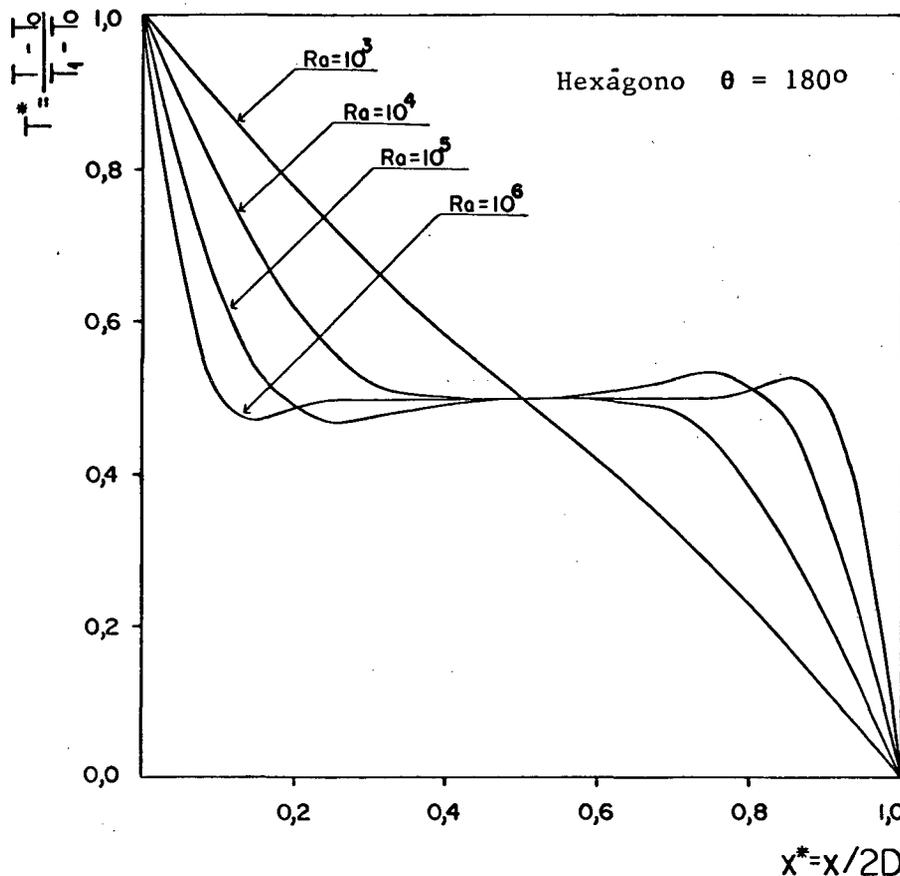


Fig. 7.6 - Perfis de temperatura  $T^*$  ao longo da linha média horizontal.  $\theta=180^\circ$ ,  $Ra=10^3$  a  $10^6$ .

Para a cavidade formada com  $\theta=150^\circ$  existem mínimas modificações nos padrões de escoamento e temperatura em relação a cavidade retangular. Por esta razão não são aqui apresentados resultados para este caso.

Também para a cavidade com  $\theta=120^\circ$  o comportamento dos perfis de velocidade e temperatura são semelhantes aos da cavidade retangular. Cabe destacar o aparecimento da inversão térmica para número de Rayleigh igual a  $10^4$ , o que não se observa para a cavidade retangular.

Para a cavidade com  $\theta=90^\circ$  começam a aparecer as recirculações nos vértices laterais formados pelos lados inclinados do hexágono. A presença desta recirculações pode ser vista pelos perfis de velocidade  $\hat{v}^*$  ao longo da linha média horizontal nas Figs. 7.10 e 7.11. Seus efeitos podem ser notados pela distribuição de temperatura ao longo da linha média

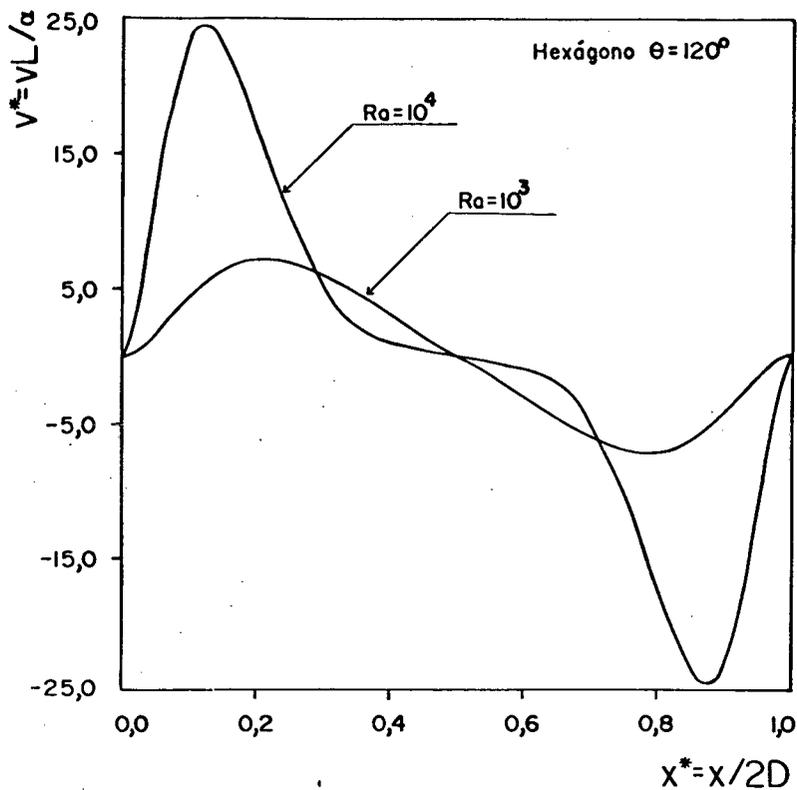


Fig. 7.7 - Perfis de velocidade  $v^*$  ao longo da linha média horizontal.  $\theta = 120^\circ$ ,  $Ra = 10^3$  e  $10^4$ .

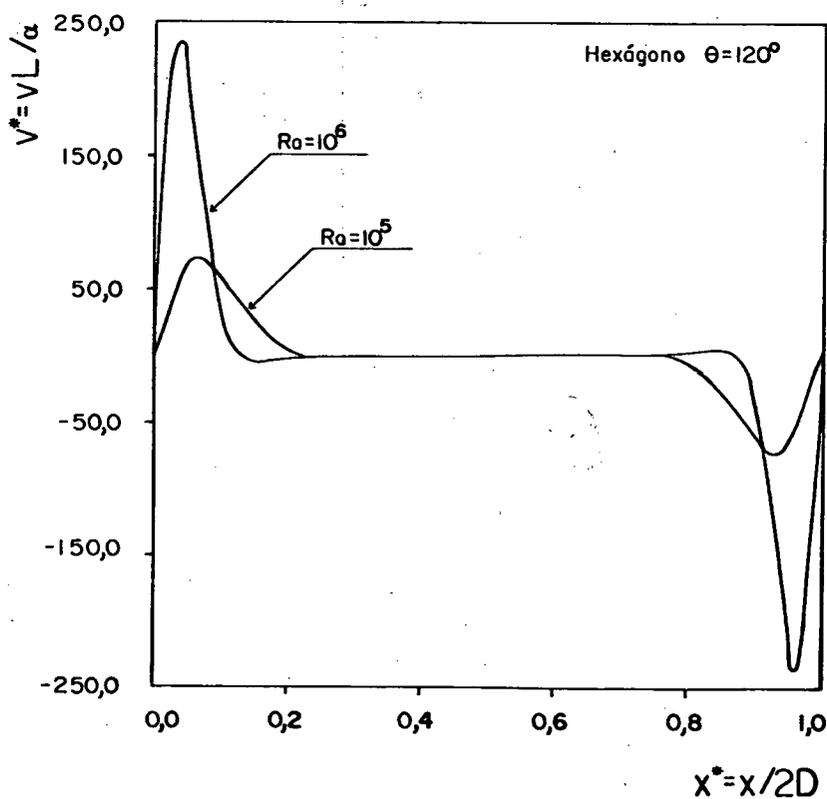


Fig. 7.8 - Perfis de velocidade  $v^*$  ao longo da linha média horizontal.  $\theta = 120^\circ$ ,  $Ra = 10^5$  e  $10^6$ .

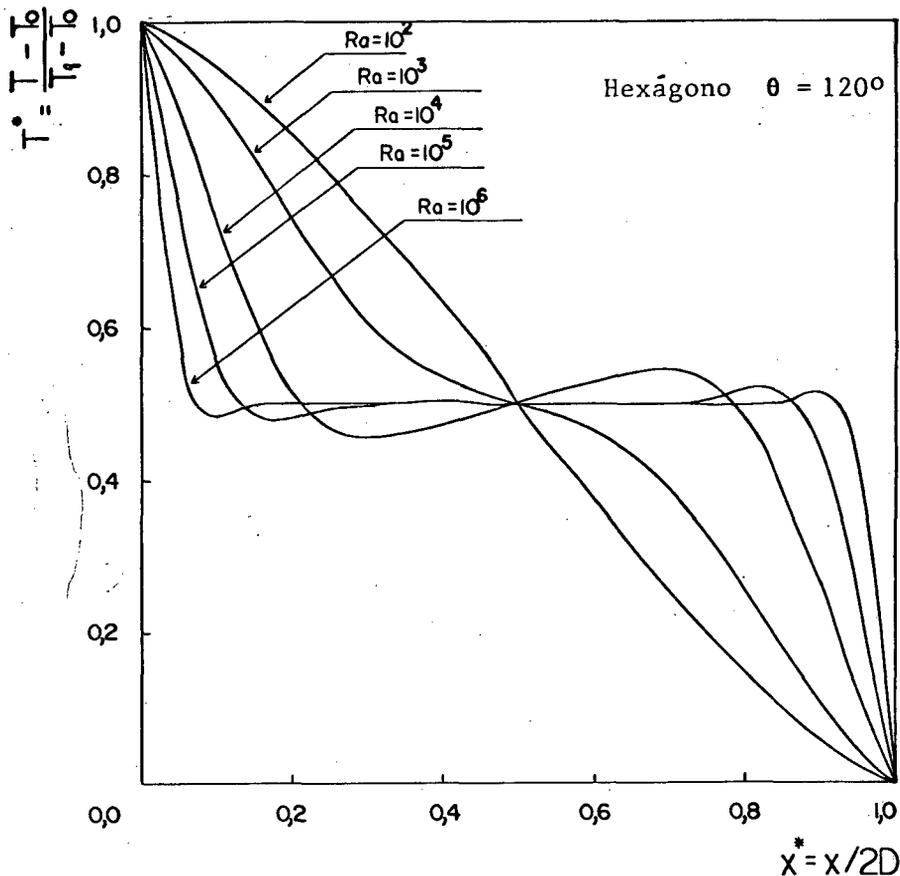


Fig. 7.9 - Perfis de temperatura  $T^*$  ao longo da linha média horizontal.  $\theta=120^\circ$ ,  $Ra=10^2$  a  $10^6$ .

horizontal na Fig. 7.12. Observa-se que para  $x^*$  até 0.05, a temperatura é constante e igual a da parede quente para  $Ra=10^2$  e  $10^3$ . Isto ocorre devido a presença de uma massa de fluido confinada pela recirculação que se mantém na temperatura da parede, pela quase impossibilidade de troca de calor com o restante do fluido. A magnitude da velocidade  $v^*$  perto das paredes diminui com a diminuição do ângulo, devido a presença da parede com inclinação contrária (após o vértice) àquela em que o fluido acelerado tenderia a seguir.

Para a cavidade com  $\theta = 60^\circ$  as influências da variação do número de Rayleigh são mais acentuadas, como pode observado na Fig. 7.13 e 7.14, onde são apresentados os perfis de velocidades. Verifica-se através destas figuras o surgimento de recirculações mais abrangentes, isto é, ocupam um espaço maior, especialmente para números de Rayleigh mais baixos. Estas recirculações fazem com que as velocidades máximas sejam bem inferiores quando

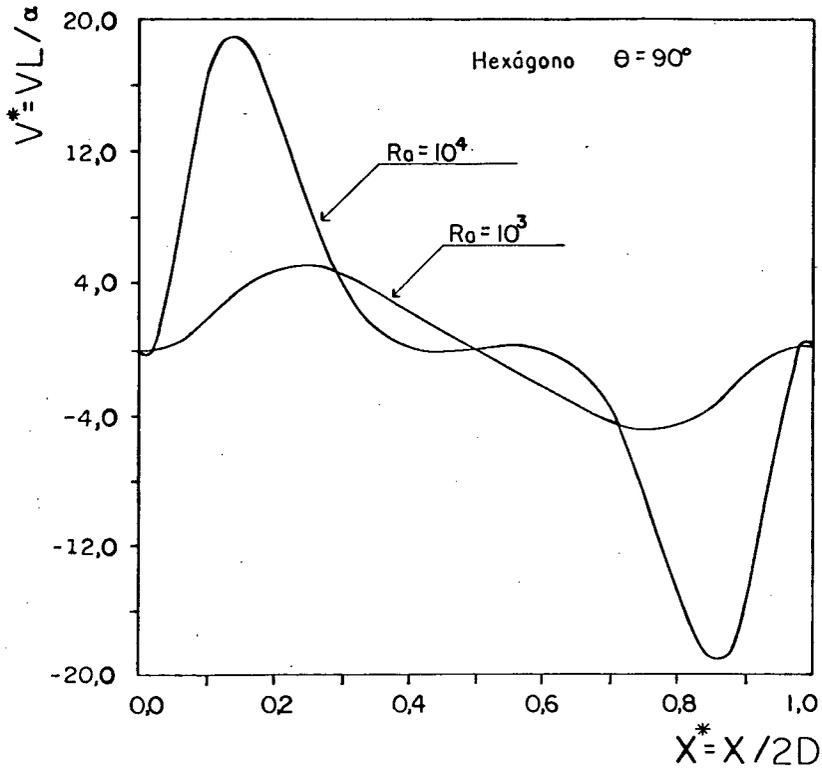


Fig. 7.10 - Perfis de velocidades  $v^*$  ao longo da linha média horizontal.  $\theta = 90^\circ$ ,  $Ra = 10^3$  e  $10^4$ .

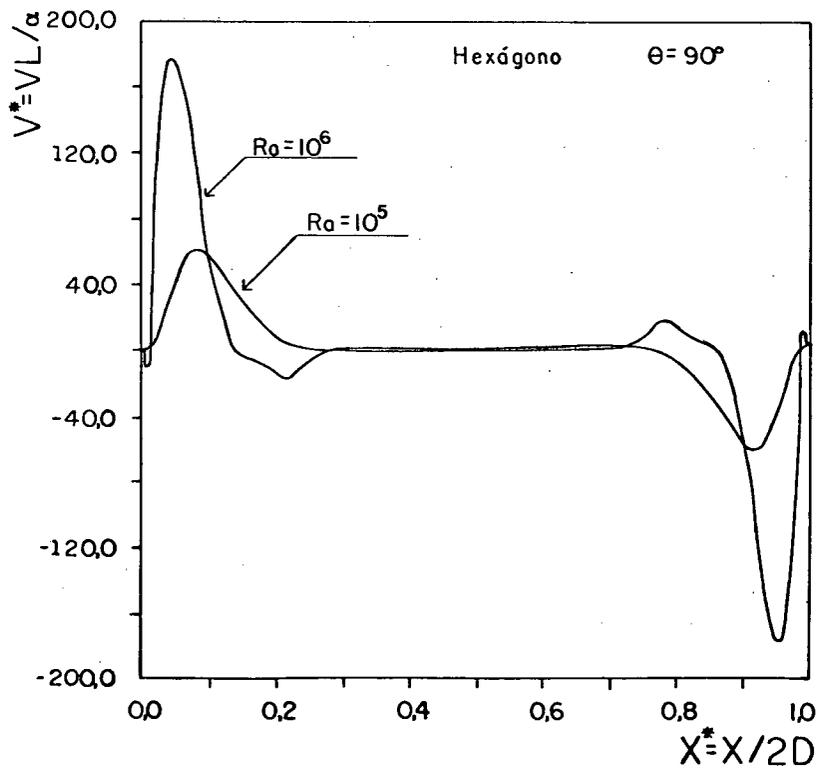


Fig. 7.11 - Perfis de velocidades  $v^*$  ao longo da linha média horizontal.  $\theta = 90^\circ$ ,  $Ra = 10^5$  e  $10^6$ .

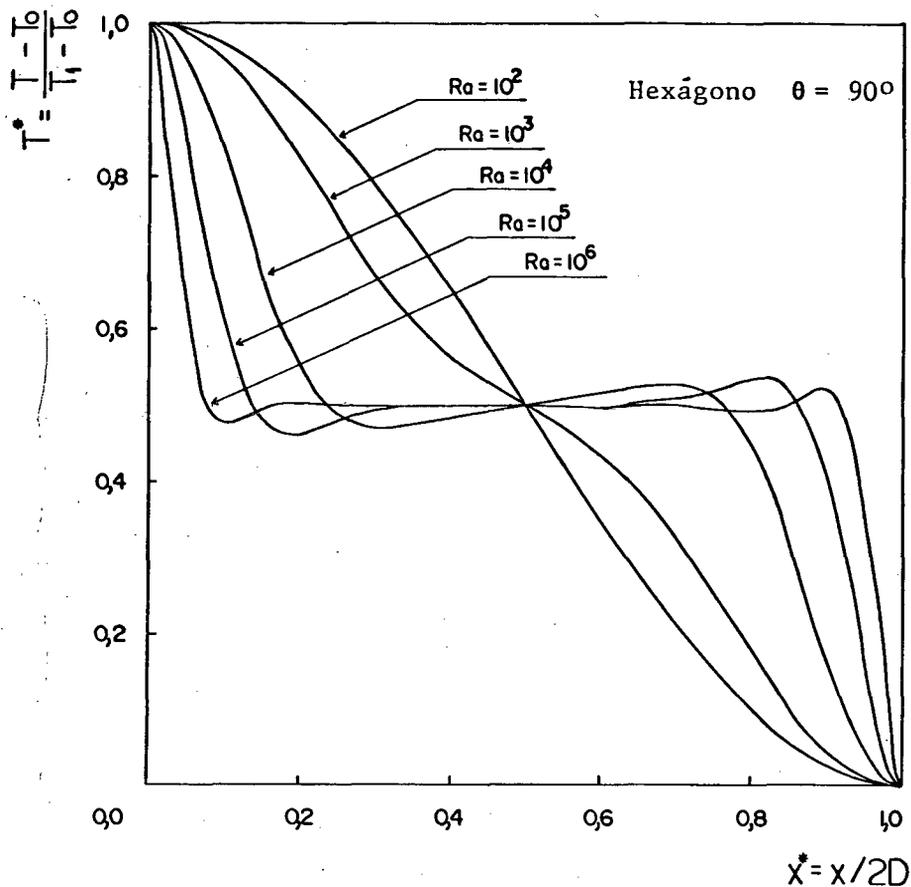


Fig. 7.12 - Perfis de temperatura  $T^*$  ao longo da linha média horizontal.  $\theta=90^\circ$ ,  $Ra=10^2$  a  $10^6$ .

comparadas com as cavidades citadas anteriormente, tanto para números de Rayleigh baixos como elevados. Estas recirculações nos vértices da cavidade atuam como isolantes térmicos, dificultando a troca de calor entre as paredes aquecidas e resfriadas. Isto pode ser observado na Fig. 7.15 verificando-se os perfis de temperatura para  $Ra = 10^3$  até  $10^6$ , onde observa-se baixos gradientes de temperatura, até mesmo para Rayleigh elevado.

Finalmente analisando-se os resultados para cavidade com ângulo  $\theta = 30^\circ$  verifica-se, através das Figs. 7.16 e 7.17, grandes modificações no escoamento em relação a cavidade retangular. As recirculações são bem mais acentuadas e para  $Ra=10^3$  praticamente não existe velocidade vertical na linha média horizontal. Para  $Ra=10^3$  e  $10^4$  aparece uma acentuada recirculação com dois vórtices bem salientes de cada lado da cavidade. Também

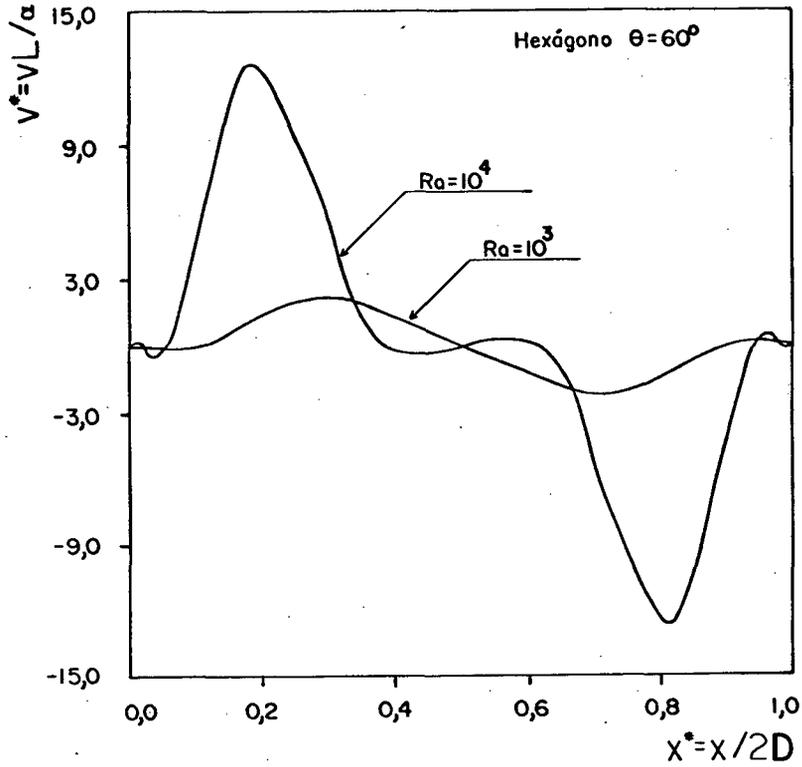


Fig. 7.13 - Perfis de velocidade  $v^*$  ao longo da linha média horizontal.  $\theta=60^\circ$ ,  $Ra = 10^3$  e  $10^4$ .

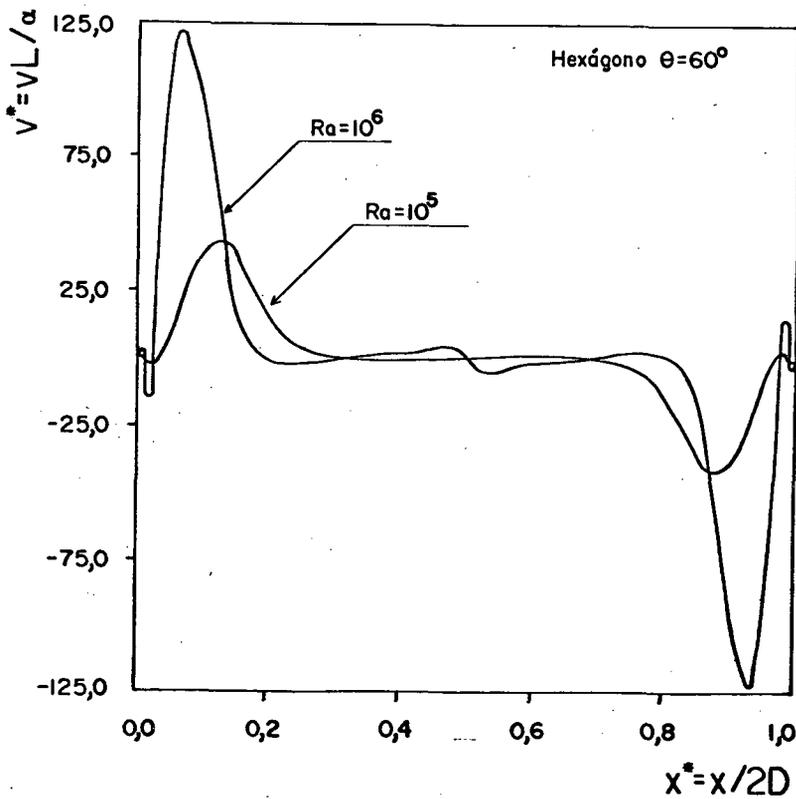


Fig. 7.14 - Perfis de velocidade  $v^*$  ao longo da linha média horizontal.  $\theta=60^\circ$ ,  $Ra = 10^5$  e  $10^6$ .

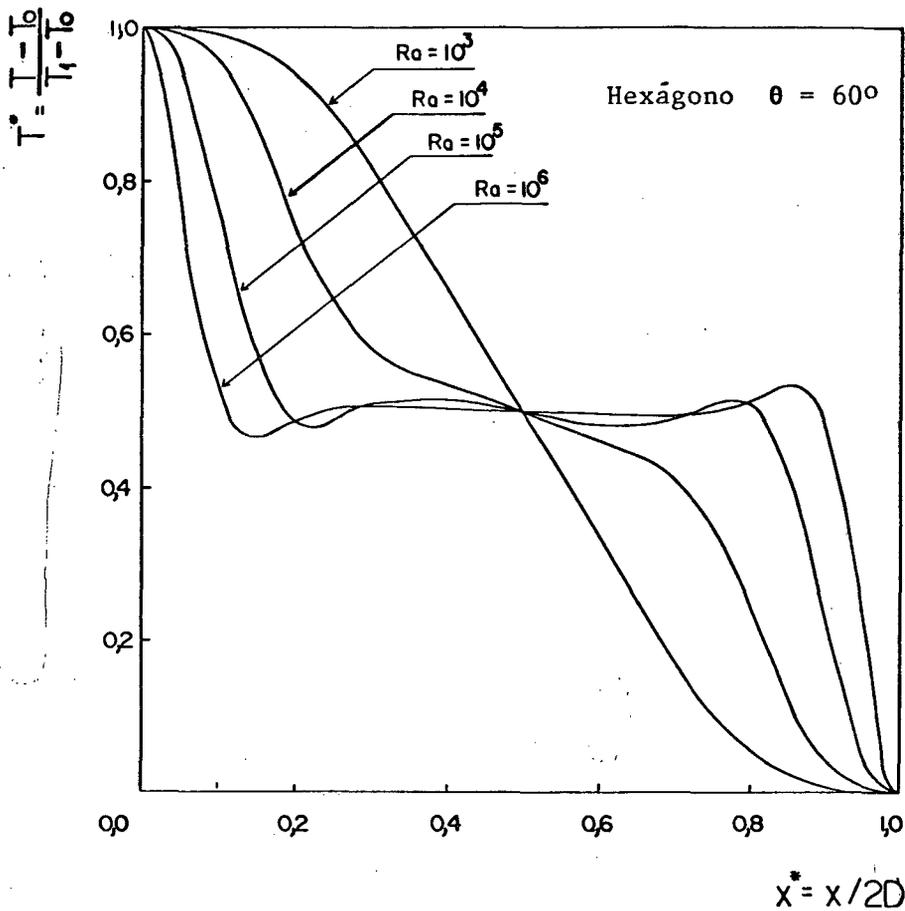


Fig. 7.15 - Perfis de temperatura  $T^*$  ao longo da linha média horizontal.  $\theta = 60^\circ$ ,  $Ra = 10^3$  a  $10^6$ .

para  $Ra = 10^5$  e  $10^6$  existem dois vórtices, entretanto, menos significativos. As recirculações são menos acentuadas para números de  $Ra$  altos pois nestes casos devido as altas velocidades a inércia da massa de fluido em movimento confina a recirculação em uma região menor do vértice do hexágono. O aparecimento das recirculações acontece quando a inércia do fluido que começa ascender à parede quente não é suficiente para mantê-lo aderente a esta parede, descolando-se e formando uma pluma, obviamente vertical, dando possibilidade ao aparecimento da recirculação. Voltando-se a analisar os perfis de temperatura, na Fig. 7.18 verifica-se a influência da recirculação sobre o campo de temperatura, onde, praticamente 20% do comprimento de cada lado do hexágono para Rayleigh  $10^3$  e  $10^4$  ficam quase isolados.

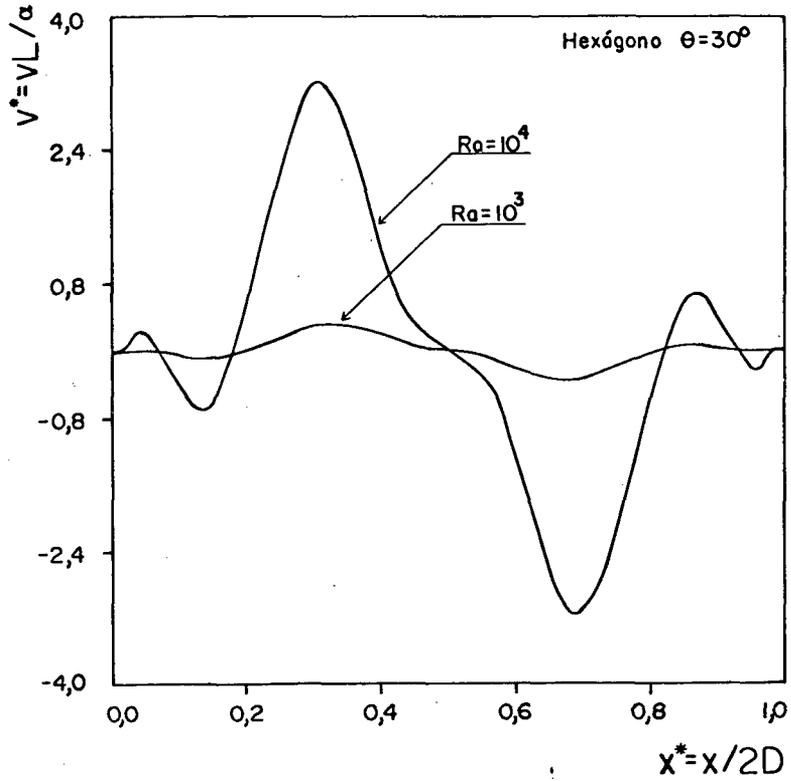


Fig. 7.16 - Perfis de velocidade  $v^*$  ao longo da linha média horizontal.  $\theta=30^\circ$ ,  $Ra = 10^3$  e  $10^4$ .

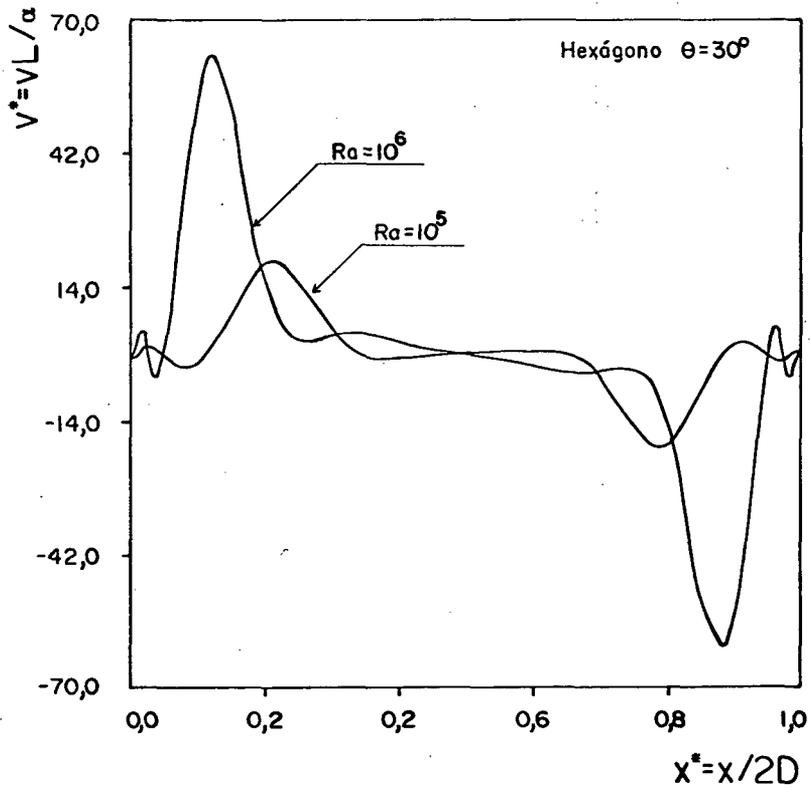


Fig. 7.17 - Perfis de velocidade  $v^*$  ao longo da linha média horizontal.  $\theta=30^\circ$ ,  $Ra = 10^5$  e  $10^6$ .

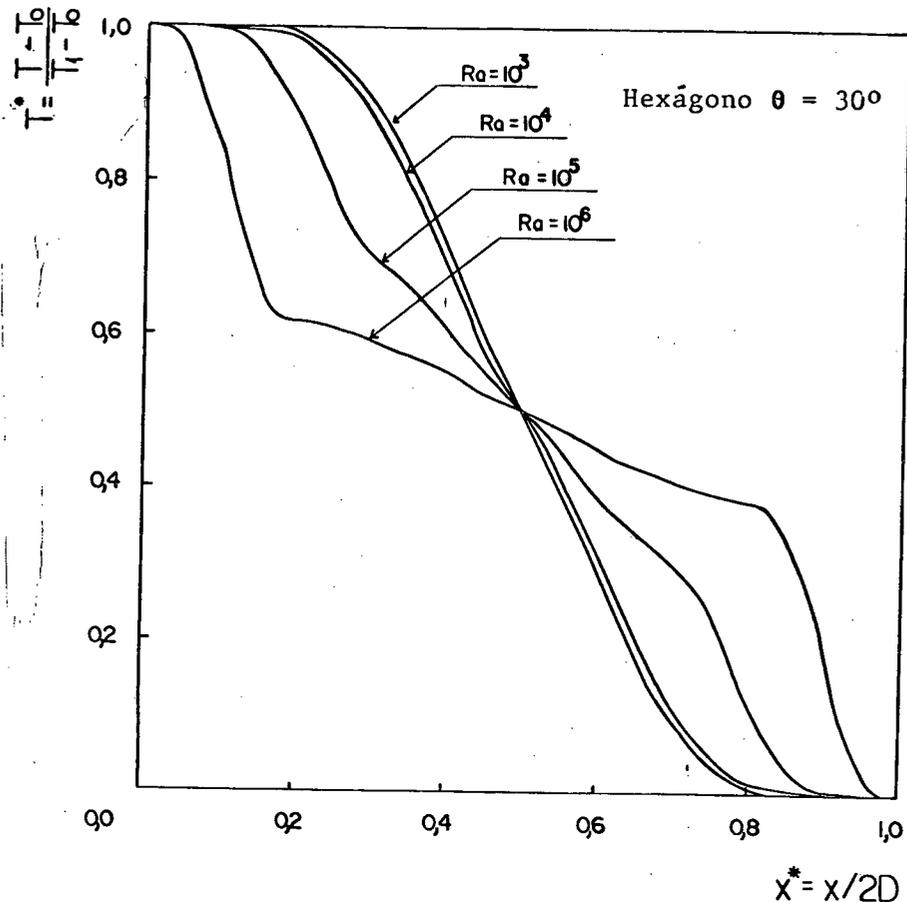


Fig. 7.18 - Perfis de temperatura  $T^*$  ao longo da linha média horizontal.  $\theta=30^\circ$ ,  $Ra=10^3$  a  $10^6$ .

#### 7.4 - APRESENTAÇÃO DOS CAMPOS: ISOTERMAS, LINHAS DE CORRENTE, VETORES VELOCIDADE E LINHAS DE CALOR

Os perfis de velocidade e temperatura mostrados no item anterior não conseguem fornecer uma visão global do problema físico, mostrando apenas valores localizados. Nesta seção são apresentadas as linhas de corrente, vetores velocidade, linhas de calor e isotermas para alguns dos casos estudados.

É comum procurar descrever o comportamento térmico de um problema de transferência de calor através das isotermas. Este procedimento é adequado quando o problema é apenas difusivo, caso em que as isotermas são perpendiculares as linhas de calor. Esta característica desaparece, entretanto, quando estão presentes efeitos convectivos. Utilizando-se apenas as isotermas é,

obviamente, impossível quantificar o fluxo de calor (difusivo + convectivo) em uma determinada região do escoamento. Apenas nas paredes é que o gradiente apresentado pelas isothermas nos indicam as regiões de maior troca térmica. Não é possível, entretanto, quantificar o calor trocado por uma determinada extensão da parede.

A maneira de visualizar adequadamente o fenômeno é através das linhas de calor [17], que são obtidas através da informação local do fluxo de calor total. Como o fluxo convectivo envolve a velocidade, as linhas de calor representam o caminho percorrido pelo calor dentro do fluido. O campo de linhas de calor quantifica o calor trocado por cada porção das paredes, permitindo a visualização direta do desempenho da troca de calor das paredes. Também as características de camada limite térmica podem ser melhor observadas com o auxílio das linhas de calor. A dedução da equação para a determinação das linhas de calor no sistema generalizado  $\xi-\eta$  é mostrada no Apêndice A.

As Figs. 7.19 a 7.48 mostram as linhas de corrente, vetores velocidade, isothermas e linhas de calor para diversas cavidades e diversos números de Rayleigh. Nesta seção destaque será dado ao comentário das características físicas importantes do escoamento que podem ser bem observadas pelas linhas de corrente, vetores velocidade e linhas de calor.

As recirculações secundárias junto aos vértices começam a aparecer, de forma significativa, para a cavidade com  $\theta=90^\circ$  e  $Ra=10^5$  e são levemente mais acentuadas em tamanho (não em magnitude de velocidade) para  $Ra=10^4$  e  $10^3$ . Para  $\theta=60^\circ$  existem recirculações para todas os números de Rayleigh com apenas um vórtice. Para  $\theta=30^\circ$  as recirculações são acentuadas com o aparecimento de dois vórtices que ocupam grande espaço da cavidade, no caso de  $Ra=10^3$  e  $10^4$ . Nestes casos a troca de calor da cavidade hexagonal tende a apresentar as mesmas características da cavidade retangular inscrita.

Apresentam-se, a seguir, os vetores velocidade para alguns casos. Os vetores velocidade são bastante úteis na

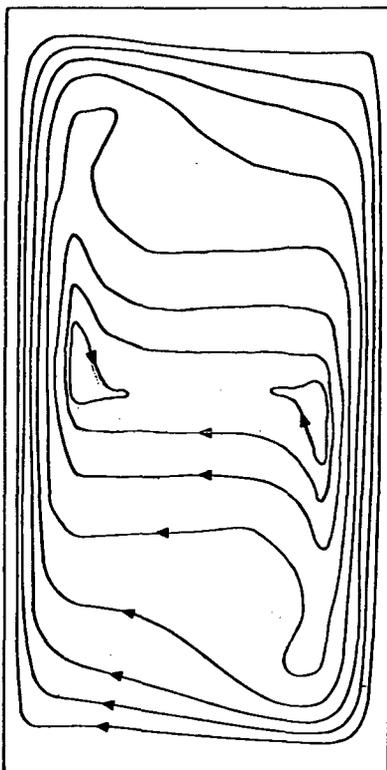
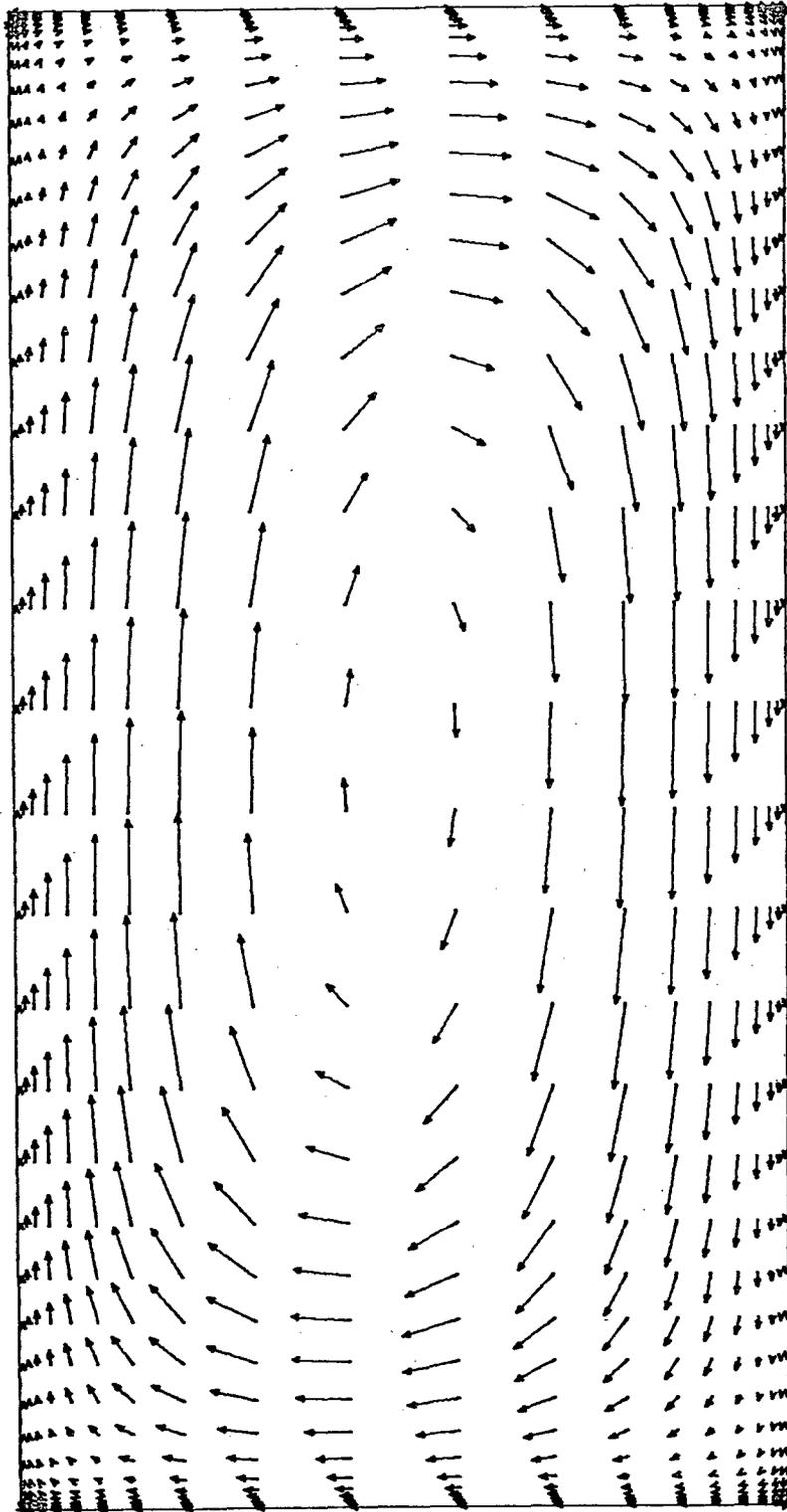


Fig. 7.19 - Linhas de Corrente da cavidade retangular.  
 $\theta=180^\circ$ ;  $Ra=10^6$ .

visualização pois permitem observar todas as características do escoamento, como, regiões de recirculações, comportamento de camada limite e magnitude das velocidades.

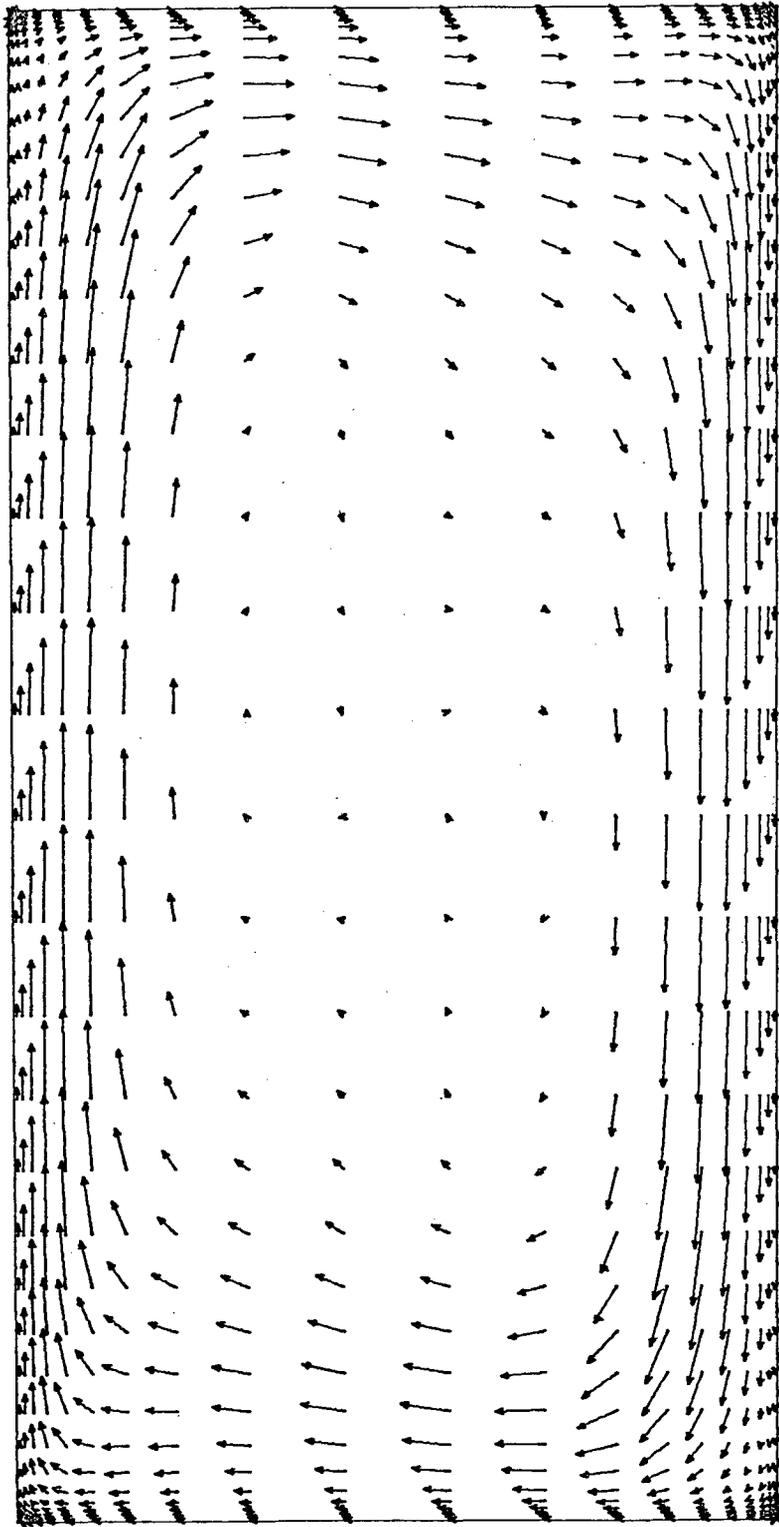
Duas características importantes podem ser visualizadas com o uso das isothermas. Uma delas é o comportamento de camada limite do escoamento sobre as paredes aquecidas e resfriadas. Para  $Ra=10^5$  e  $10^6$  existe este comportamento para todos os ângulos até  $60^\circ$ , inclusive. A outra delas é a indicação das regiões de maior troca de calor, o que pode ser constatado pela concentração das isothermas (maiores gradientes) nas respectivas regiões. Não é possível, entretanto, quantificar o calor trocado pelas diversas regiões da área de troca térmica. Com as linhas de calor é possível alcançar este objetivo.

Nas figuras que aparecem as linhas de calor, em todos os casos, os intervalos são os mesmos representando, portanto, a mesma quantidade de calor trocado entre duas linhas. É possível



$$\text{escala} - 10\text{mm} : 5.20 = \frac{|\vec{V}|L}{\alpha}$$

Fig. 7.20 - Vetores velocidade da cavidade retangular ( $\theta=180^\circ$ ),  
 $Ra = 10^3$ .



escala - 10mm :  $74.41 \frac{|\vec{v}|L}{\alpha}$

Fig. 7.21 - Vetores velocidade da cavidade retangular ( $\theta=180^\circ$ ),  
Ra =  $10^5$ .

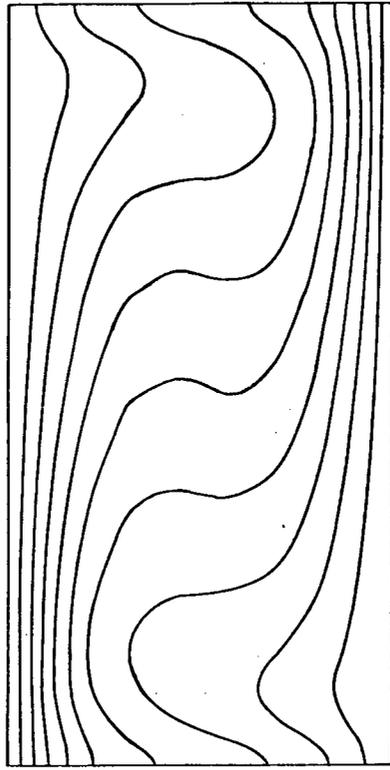


Fig. 7.22 - Isotermas da cavidade retangular ( $\theta=180^\circ$ ),  $Ra=10^4$ .

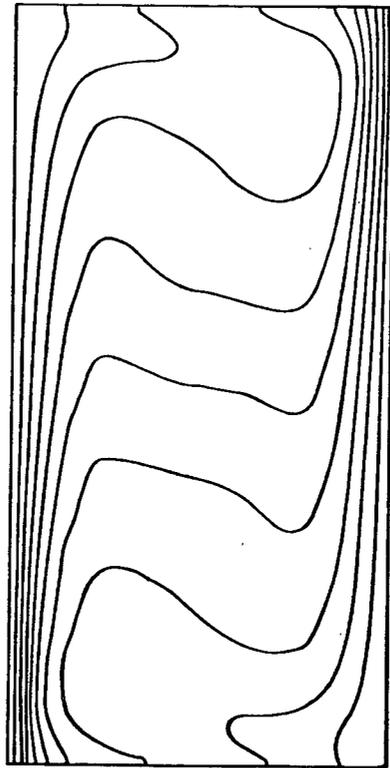


Fig. 7.23 - Isotermas da cavidade retangular ( $\theta=180^\circ$ ),  $Ra=10^5$ .

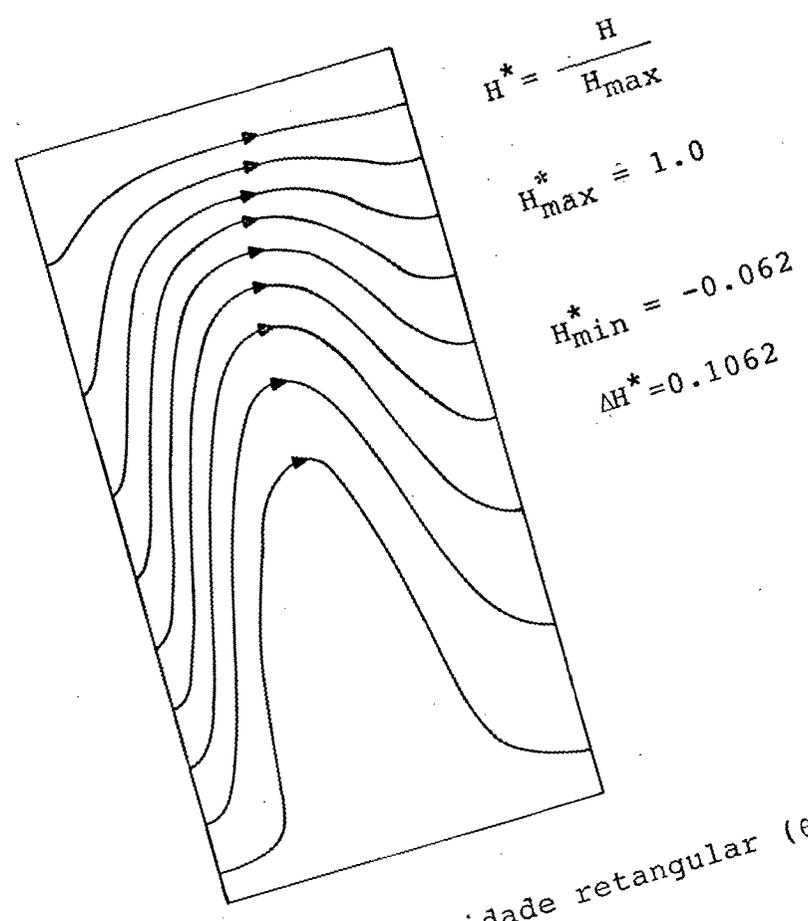


Fig. 7.24 - Linhas de calor da cavidade retangular ( $\theta=180^\circ$ ),  
 $Ra = 10^3$ .

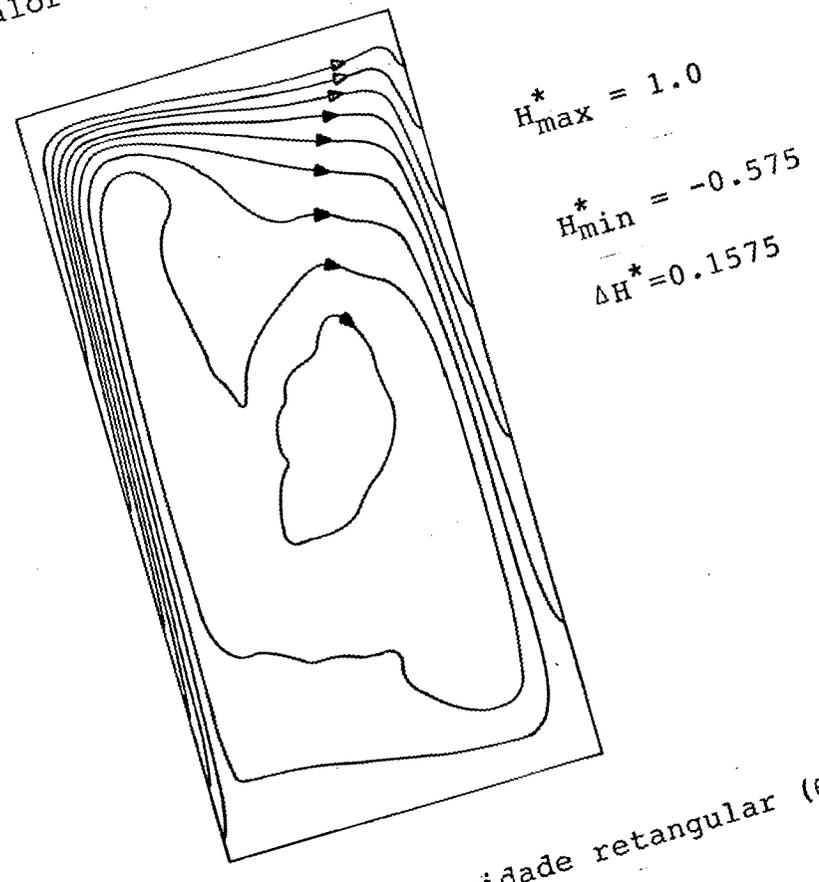


Fig. 7.25 - Linhas de calor da cavidade retangular ( $\theta=180^\circ$ ),  
 $Ra = 10^6$ .

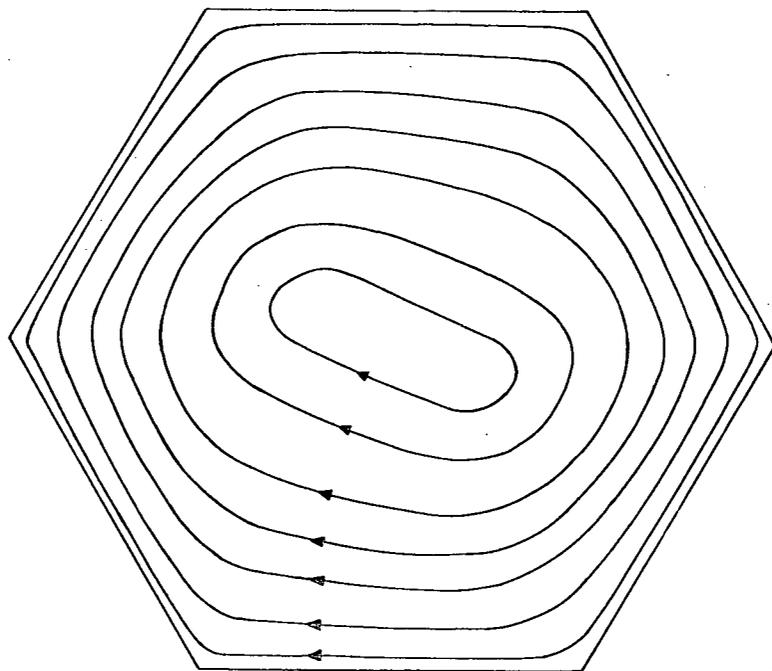


Fig. 7.26 - Linhas de corrente para  $\theta = 120^\circ$  e  $Ra = 10^4$ .

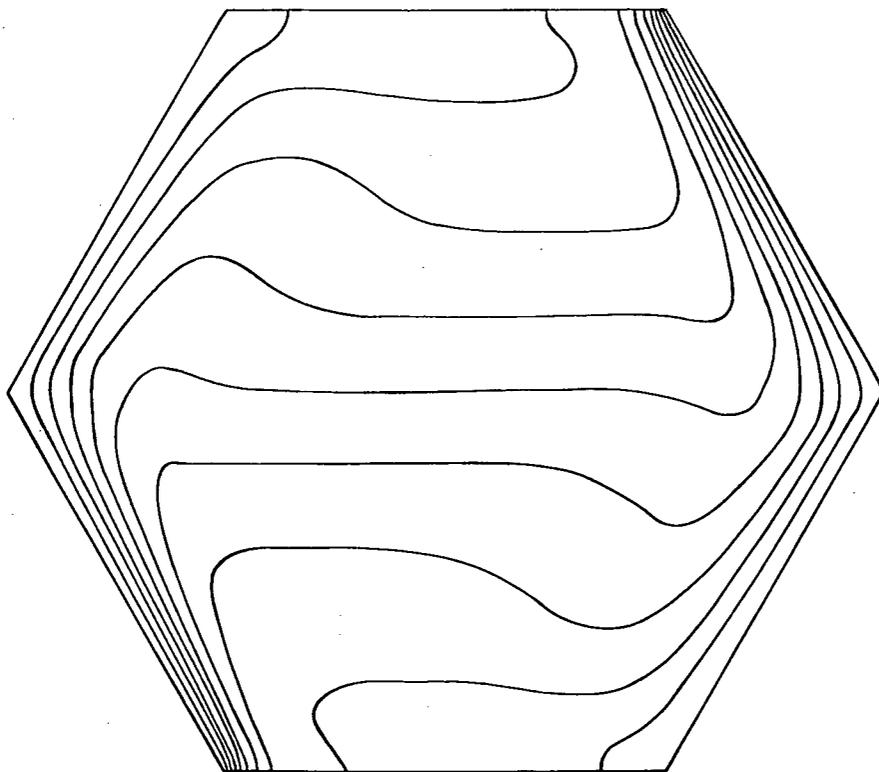
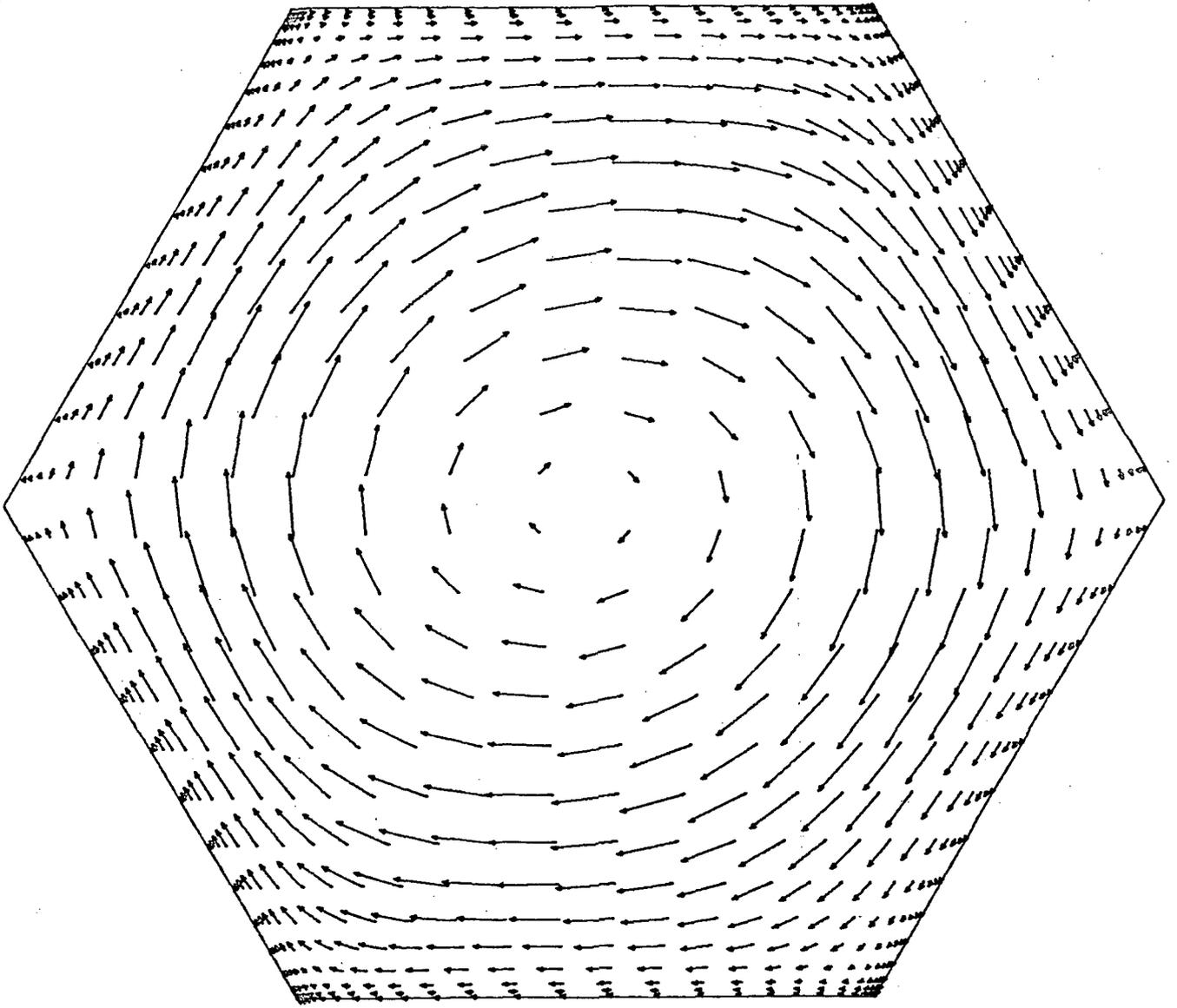
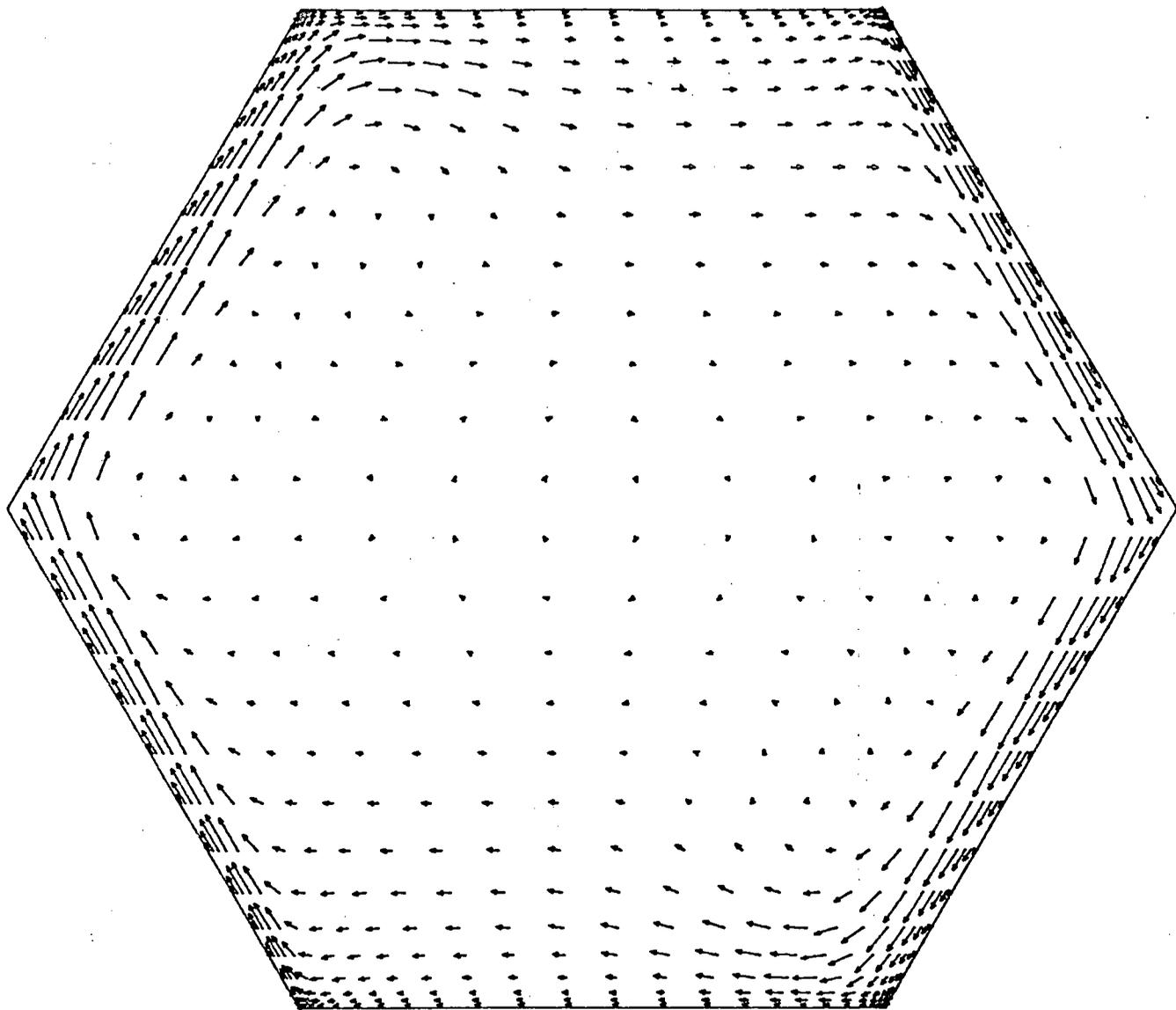


Fig. 7.27 - Isotermas para  $\theta = 120^\circ$  e  $Ra = 10^5$ .



escala - 10mm :  $4.29 \frac{|\vec{v}|L}{\alpha}$

Fig. 7.28 - Vetores velocidade para  $\theta = 120^\circ$  e  $Ra = 10^3$



escala - 10mm :  $318.06 \frac{|\vec{V}|L}{\alpha}$

Fig. 7.29 - Vetores velocidade para  $\theta = 120^\circ$  e  $Ra = 10^6$ .

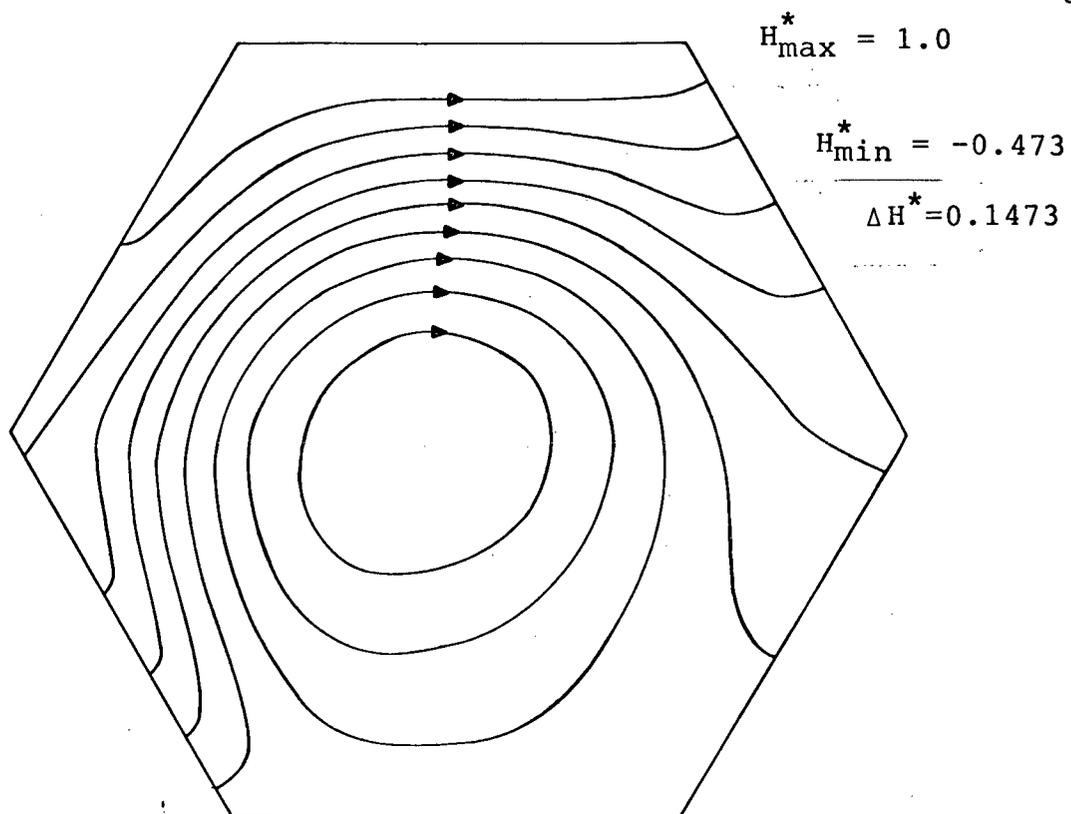


Fig. 7.30 - Linhas de calor para  $\theta = 120^\circ$  e  $Ra = 10^3$ .

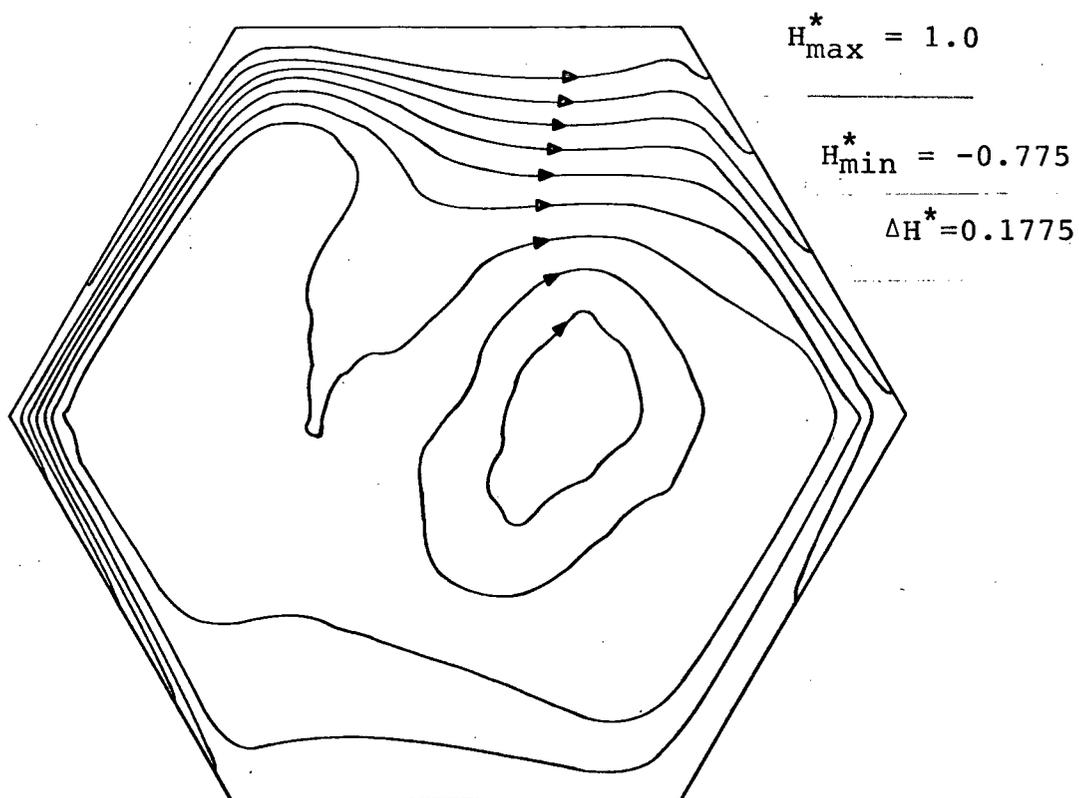


Fig. 7.31 - Linhas de calor para  $\theta = 120^\circ$  e  $Ra = 10^6$ .

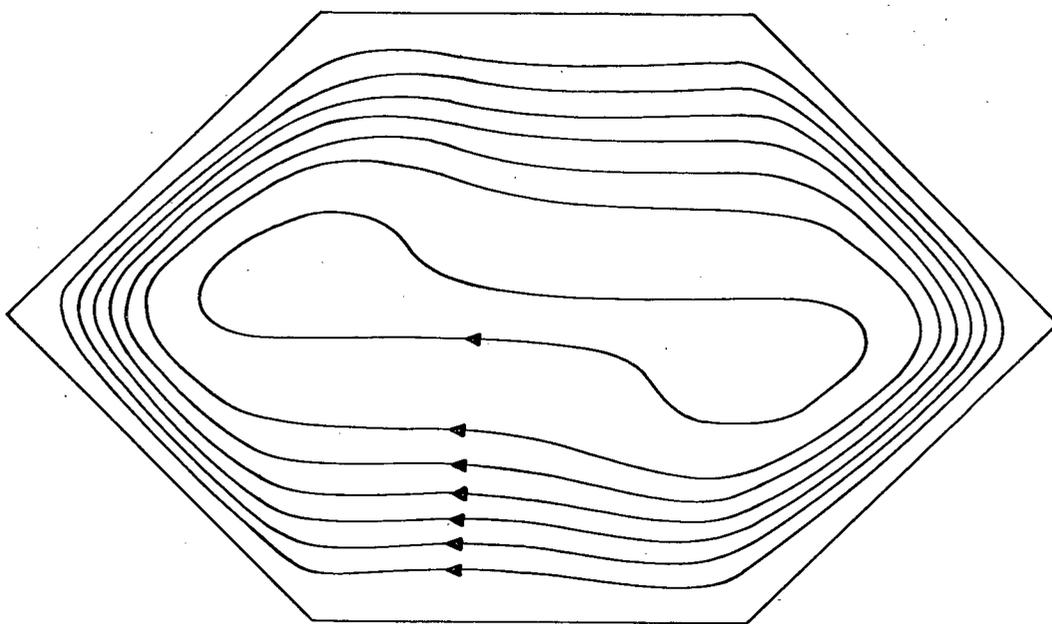


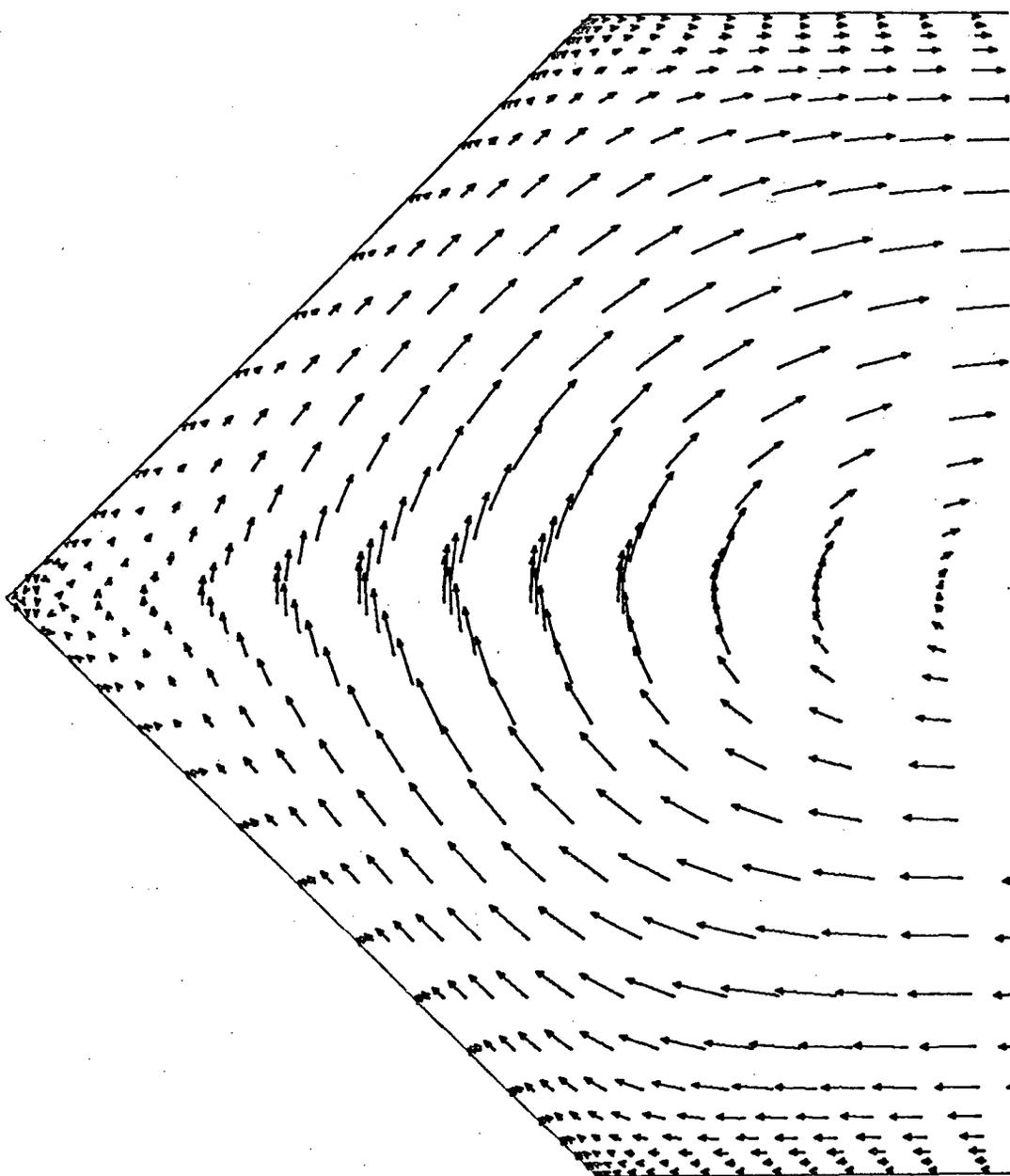
Fig. 7.32 - Linhas de Corrente para  $\theta = 90^\circ$  e  $Ra = 10^5$ .

verificar que, enquanto que na cavidade retangular para  $Ra = 10^6$ , a relação entre a área menos eficiente e a mais eficiente na parede quente é a ordem de 11.3, na cavidade com  $\theta = 30^\circ$  e  $Ra = 10^6$  esta relação atinge o valor 14.0 e na cavidade com  $\theta = 120^\circ$  a relação é de 7.80. Isto mostra diretamente a uniformidade na troca de calor da superfície, com a conseqüente indicação da extensão da superfície necessária para trocar uma determinada quantidade de calor.

#### 7.5 - CONDUTIVIDADE TÉRMICA EQUIVALENTE

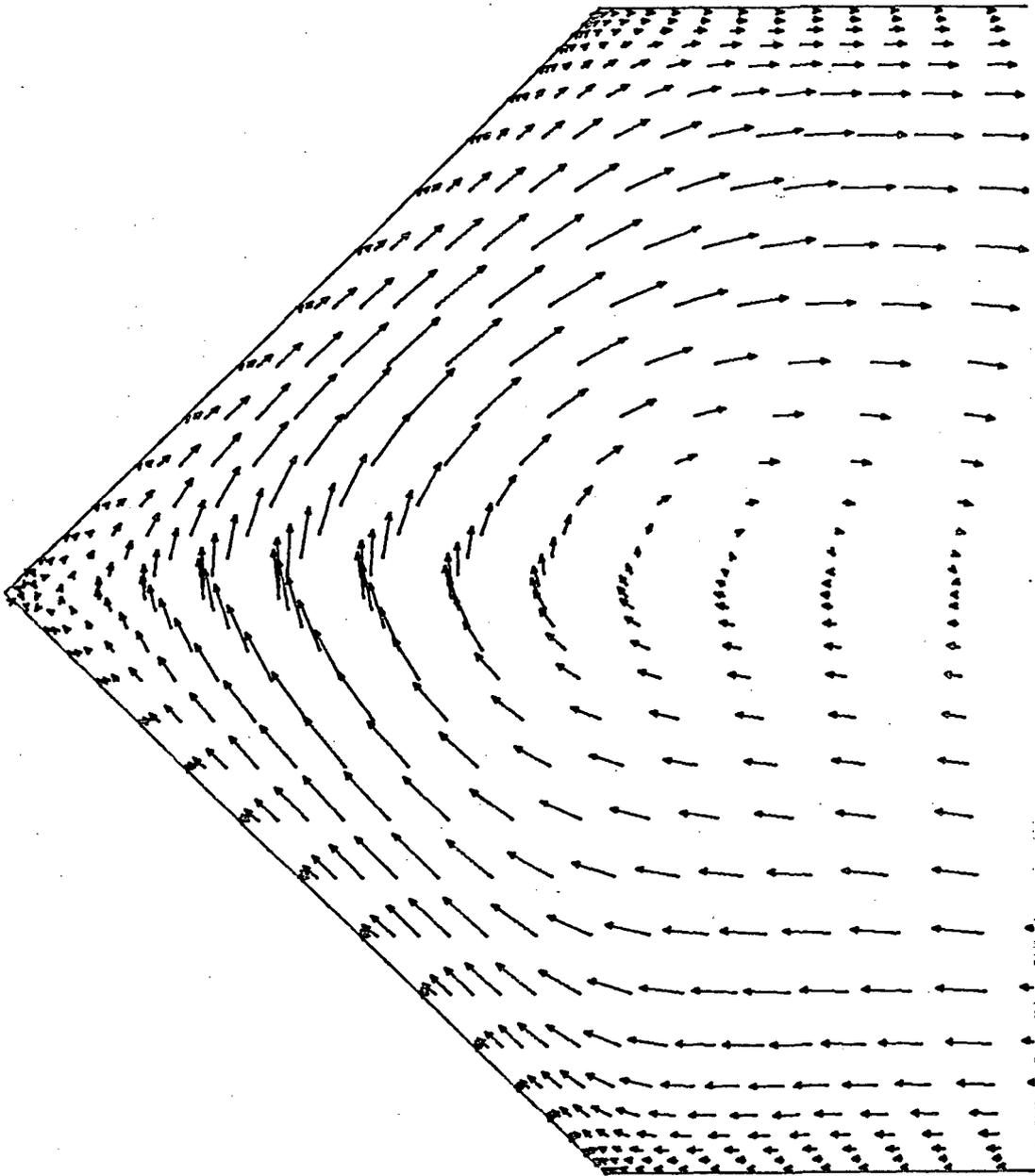
No estudo de problemas de convecção natural em cavidades, é um procedimento largamente empregado a manipulação dos resultados referentes a troca de calor em termos de uma condutividade térmica equivalente, denotada por  $K_{eq}$ .

Diversas são as formas de definição desta



escala - 10mm :  $7 \cdot 10^{-4} \frac{|\vec{v}|L}{\alpha}$

Fig. 7.33 - Vetores velocidade para  $\theta = 90^\circ$  e  $Ra = 10^3$ .



escala - 10mm :  $23.96 \frac{|\vec{V}|L}{\alpha}$

Fig. 7.34 - Vetores velocidade para  $\theta = 90^\circ$  e  $Ra = 10^4$ .

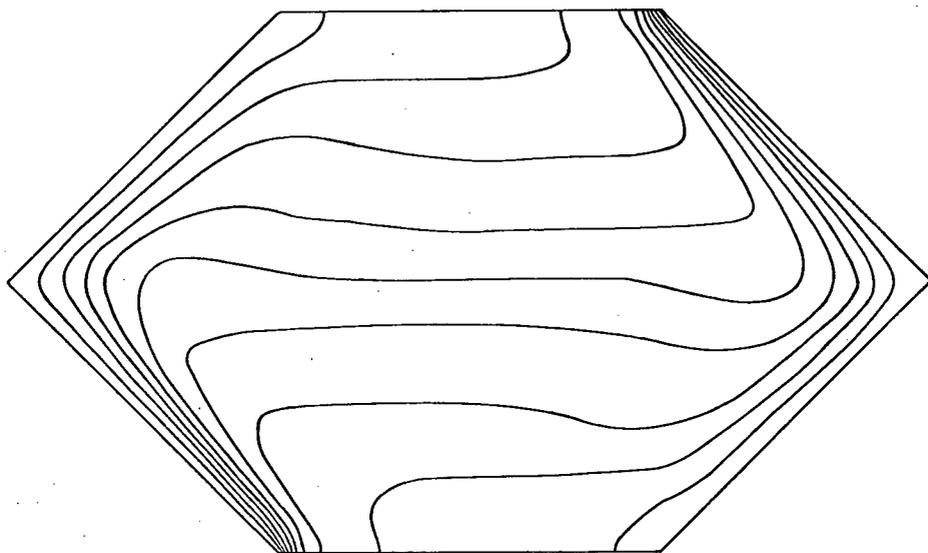


Fig. 7.35 - Isotermas para  $\theta = 90^\circ$  e  $Ra = 10^5$ .

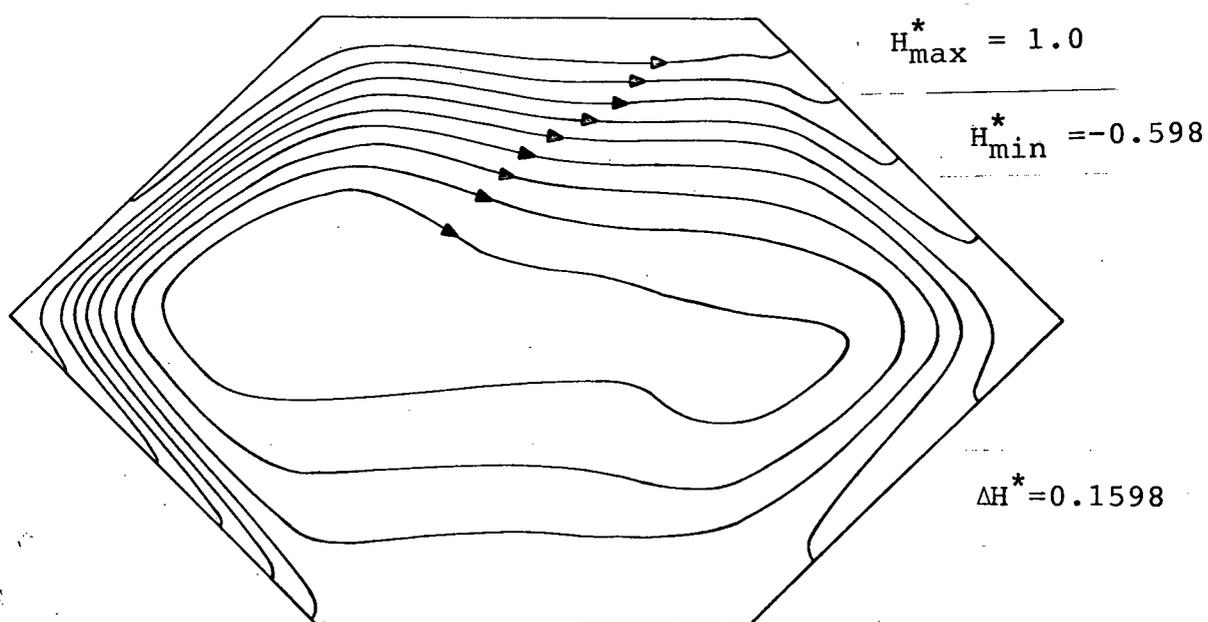


Fig. 7.36 - Linhas de calor para  $\theta = 90^\circ$  e  $Ra = 10^5$ .

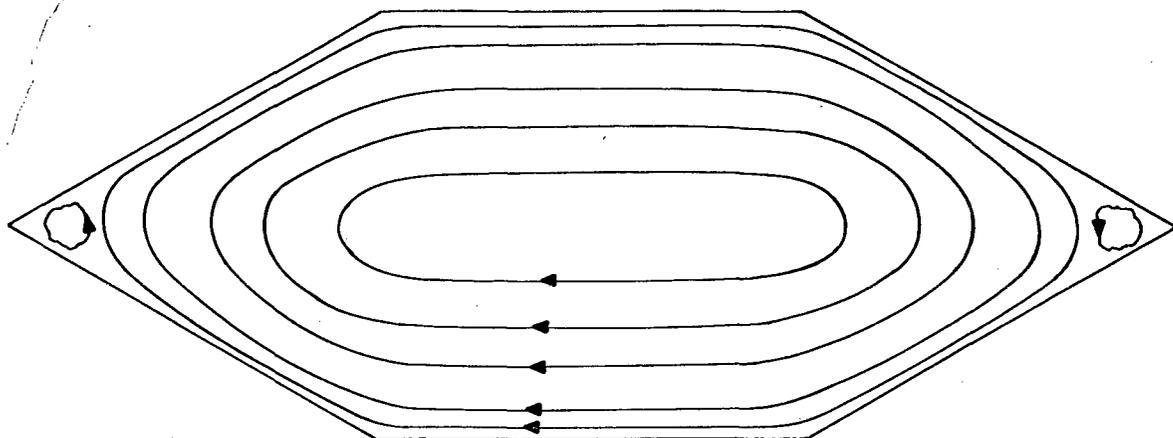


Fig. 7.37 - Linhas de Corrente para  $\theta = 60^\circ$  e  $Ra = 10^4$ .

condutividade. A mais natural é defini-lá como a razão entre a taxa total de troca de calor por convecção na cavidade e a taxa total de troca de calor por condução na mesma cavidade. Além de ser esta a definição que de fato concorda com a denominação de condutividade térmica equivalente, a mesma permite a avaliação imediata da influência do processo convectivo na taxa de troca de calor.

#### 7.5.1 - CONDUTIVIDADE TÉRMICA EQUIVALENTE LOCAL

A condutividade térmica equivalente local,  $k_{eq2}$  é definida como a razão entre a taxa local de troca de calor por convecção na cavidade e a taxa local de troca de calor por condução na cavidade retangular inscrita correspondente.

$$q_{conv \text{ hex}} = -k \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \quad (7.1)$$

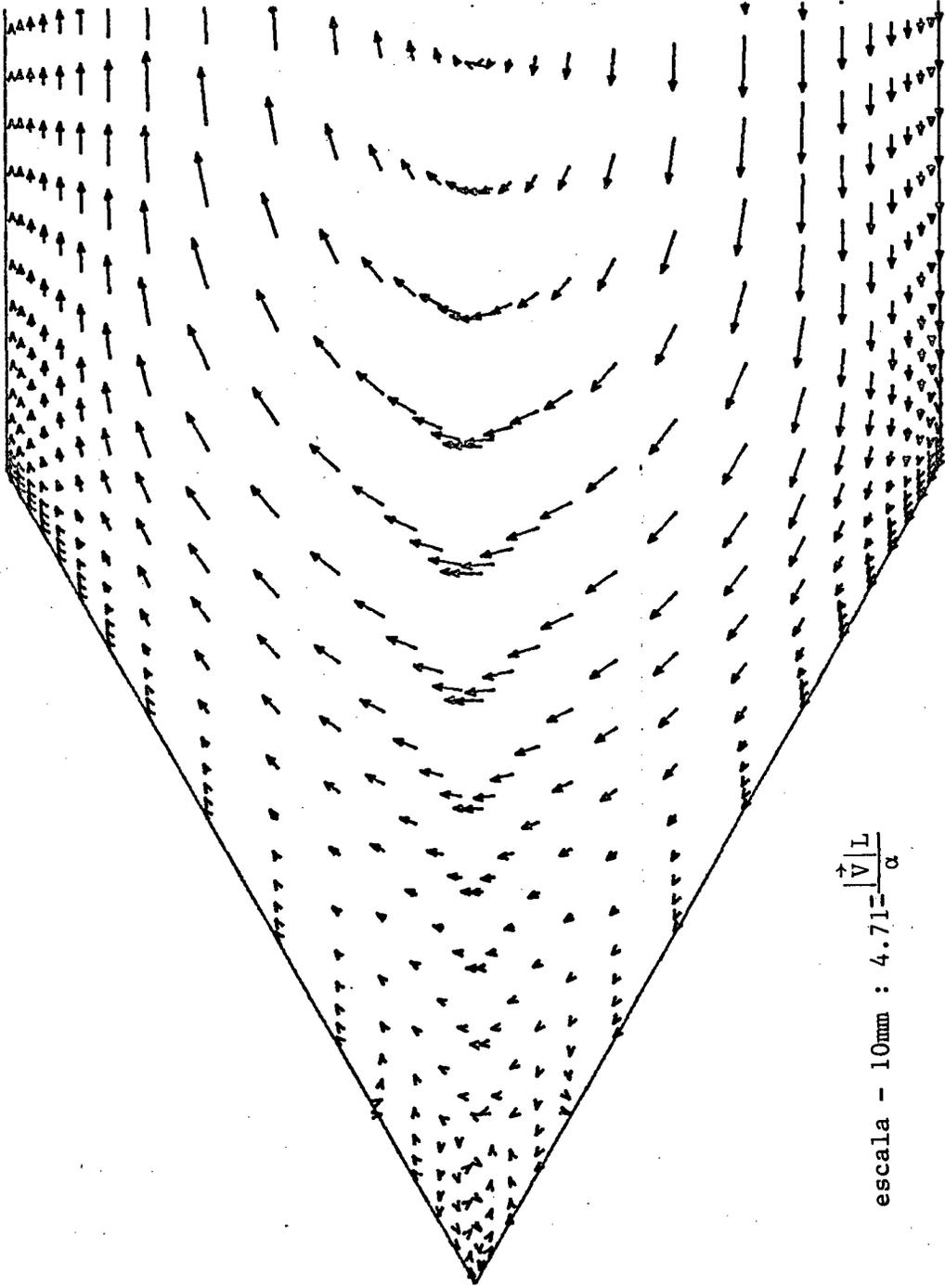


Fig. 7.38 - Vetores velocidade para  $\theta = 60^\circ$  e  $Ra = 10^3$ .

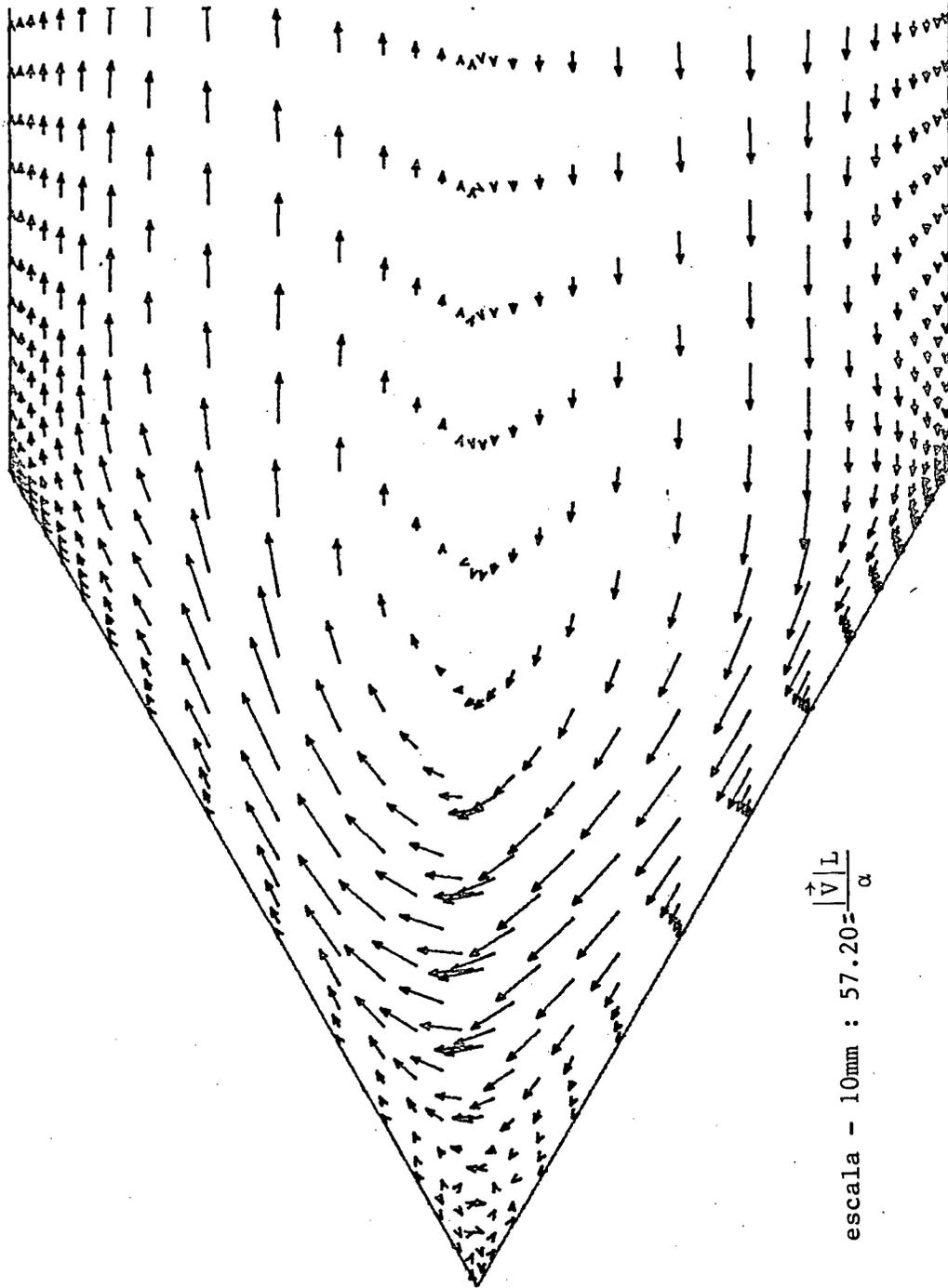


Fig. 7.39 - Vetores velocidade para  $\theta = 60^\circ$  e  $Ra = 10^5$ .

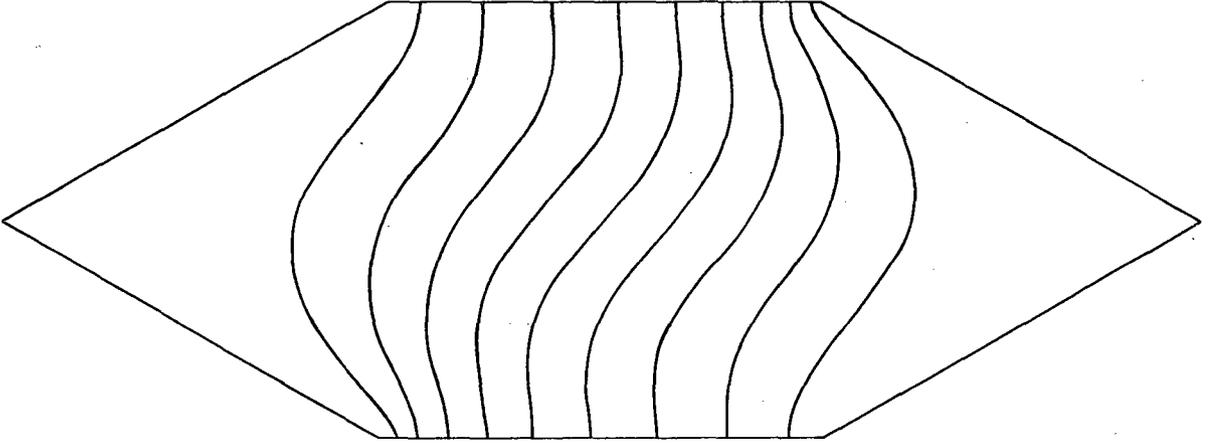


Fig. 7.40 - Isotermas para  $\theta = 60^\circ$  e  $Ra = 10^3$ .

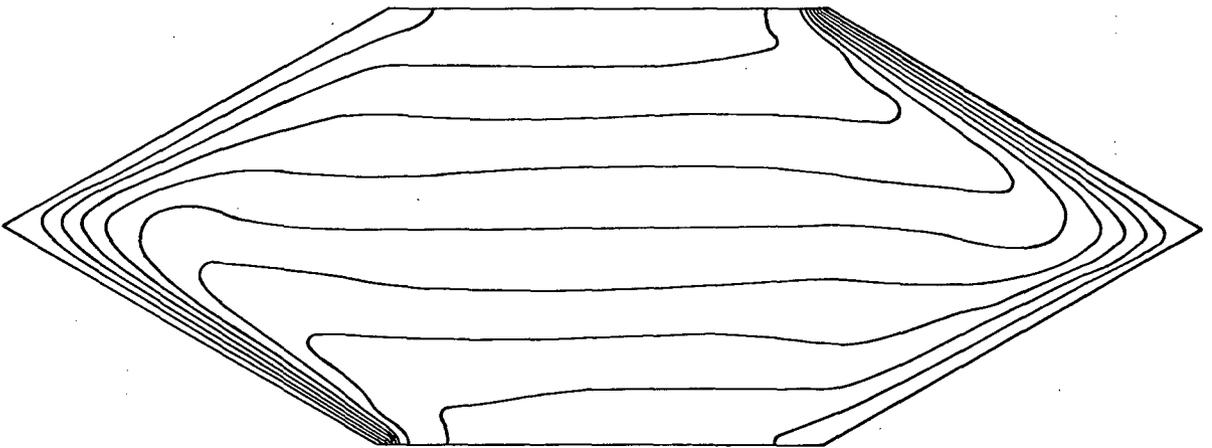


Fig. 7.41 - Isotermas para  $\theta = 60^\circ$  e  $Ra = 10^6$ .

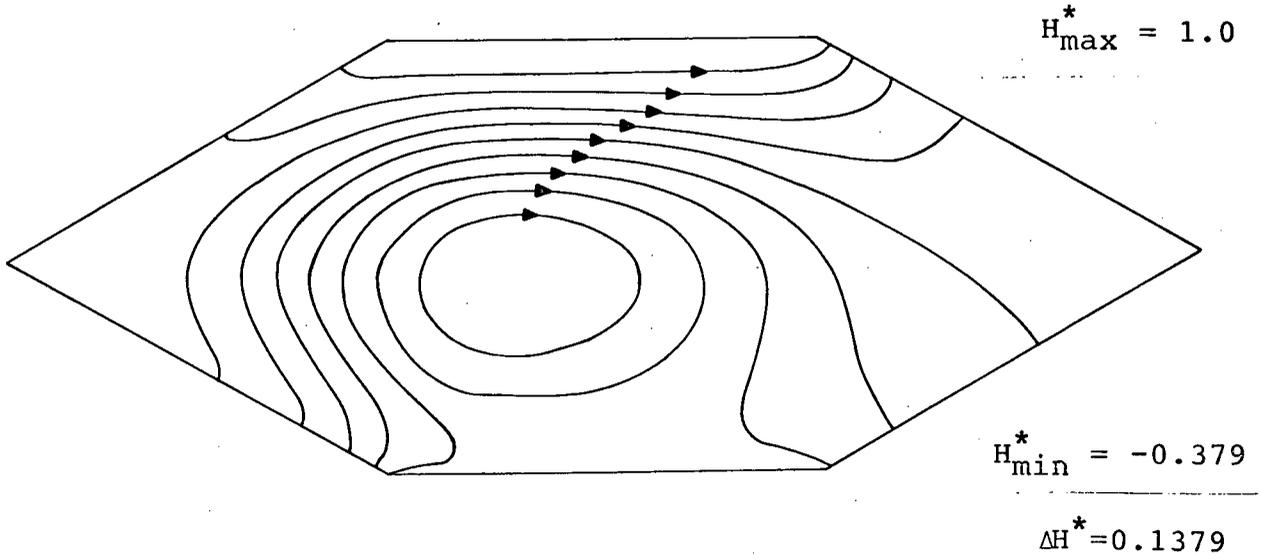


Fig. 7.42 - Linhas de calor para  $\theta = 60^\circ$  e  $Ra = 10^3$ .

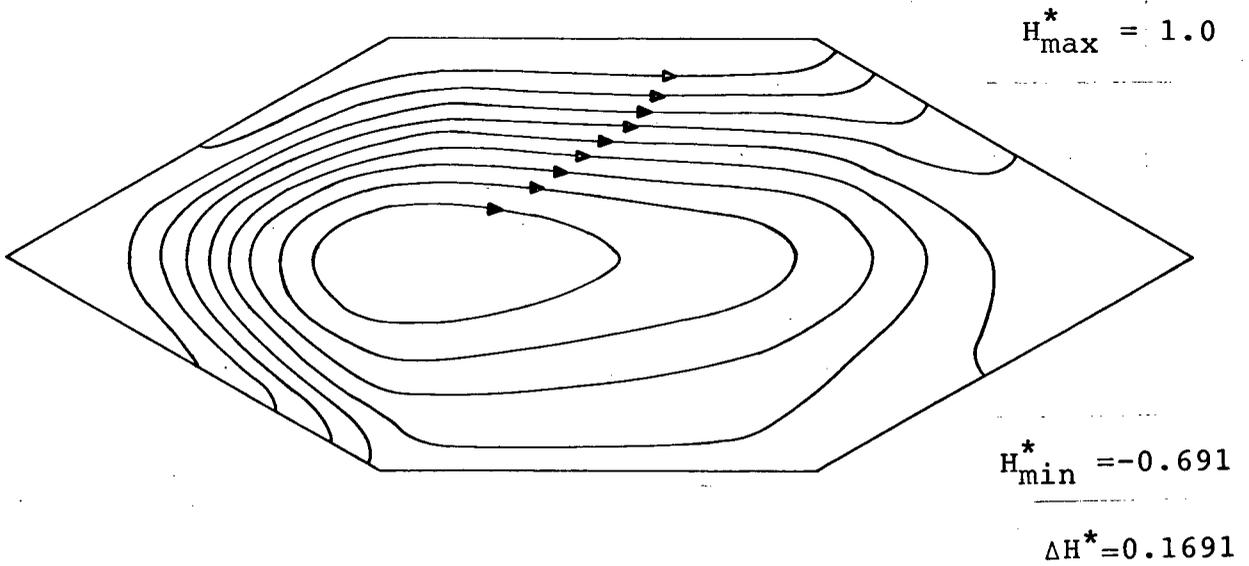


Fig. 7.43 - Linhas de calor para  $\theta = 60^\circ$  e  $Ra = 10^4$ .

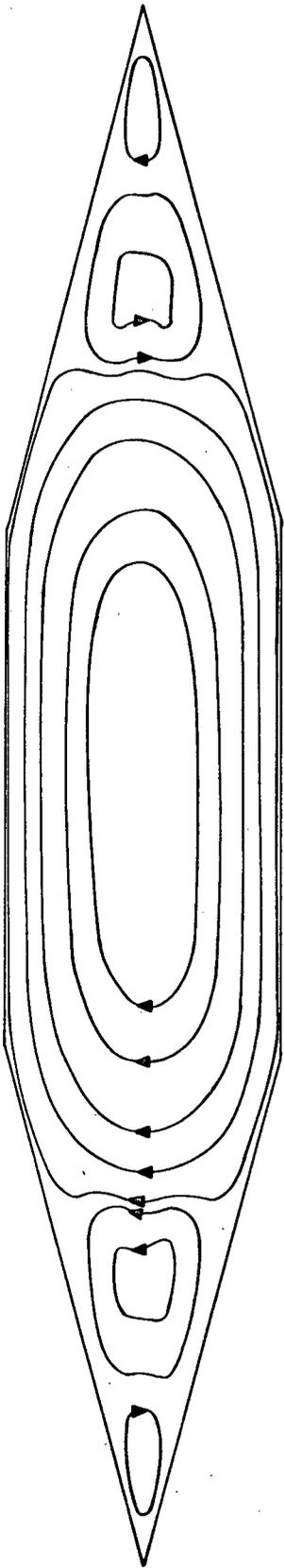


Fig. 7.44 - Linhas de corrente para  $\theta = 30^\circ$  e  $Re = 10^4$ .

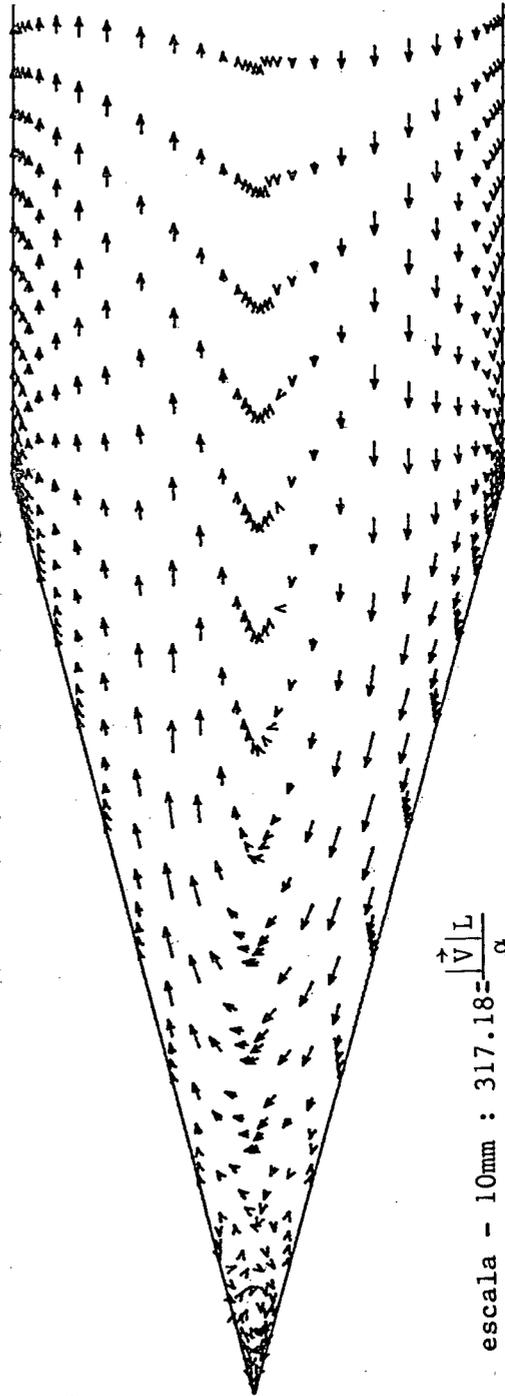
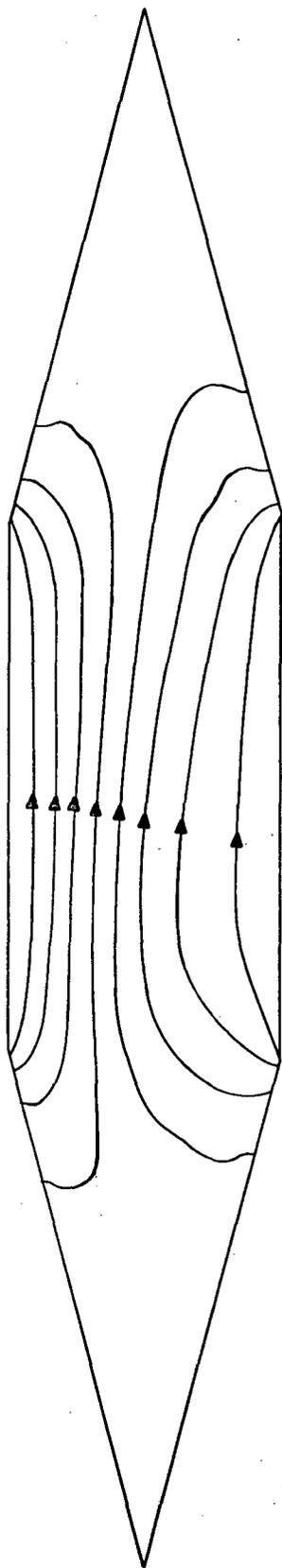
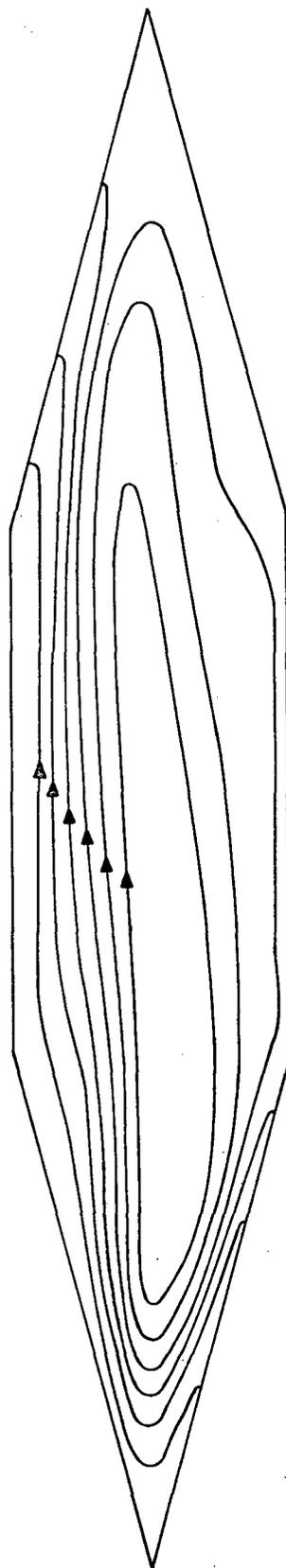


Fig. 7.45 - Vetores velocidade para  $\theta = 30^\circ$  e  $Re = 10^6$ .



$H_{\max}^* = 1.0$        $H_{\min}^* = 0.0$        $\Delta H^* = 0.1111$

Fig. 7.46 - Linhas de calor para  $\theta = 30^\circ$  e  $Ra = 10^3$ .



$H_{\max}^* = 1.0$        $H_{\min}^* = -0.774$        $\Delta H^* = 0.253$

Fig. 7.47 - Linhas de calor para  $\theta = 30^\circ$  e  $Ra = 10^6$ .

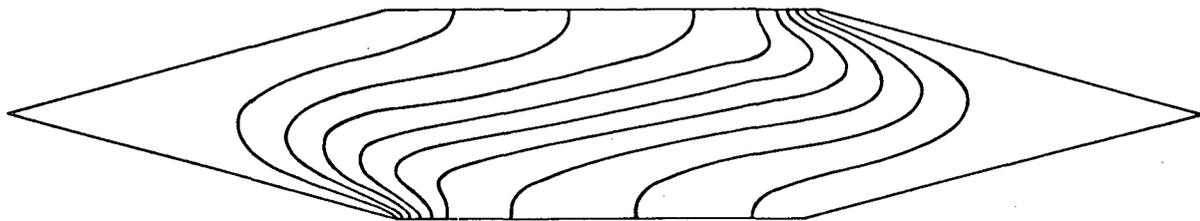


Fig. 7.48 - Isothermas para  $\theta = 30^\circ$  e  $Ra = 10^5$ .

$$q_{\text{cond ins}} = -k \frac{(T_0 - T_1)}{L} \quad (7.2)$$

sendo  $(T_1 - T_0) = 1$  temos

$$k_{\text{eq2}} = \frac{\partial T}{\partial n} L \quad (7.3)$$

Para obter-se a relação  $q_{\text{conv hex}} / q_{\text{cond hex}}$  basta manipular as diversas condutividades equivalentes.

Em primeiro lugar é analisado o comportamento local da condutividade térmica equivalente,  $k_{\text{eq2}}$ . A Fig. 7.49 mostra os resultados para o problema de condução pura, onde observa-se que aumenta consideravelmente a troca de calor por condução para as regiões perto das paredes horizontais isoladas, quando comparada com a troca de calor por condução da cavidade retangular inscrita. Isto se deve ao fato de que as paredes aquecidas vão inclinando-se com a diminuição de  $\theta$ , distanciando-se da parede horizontal, concentrando as isothermas na região perto dos cantos situados nas paredes horizontais, aumentando o fluxo de calor local. No meio da parede aquecida acontece o fenômeno inverso, isto é, ao diminuir o ângulo as duas partes da parede aquecida vão se aproximando prejudicando as condições de troca térmica, também prejudicada pelo aumento da distância entre as paredes com a diminuição do ângulo. A Fig. 7.50 detalha o comportamento das isothermas para o caso de condução pura, acima comentado.

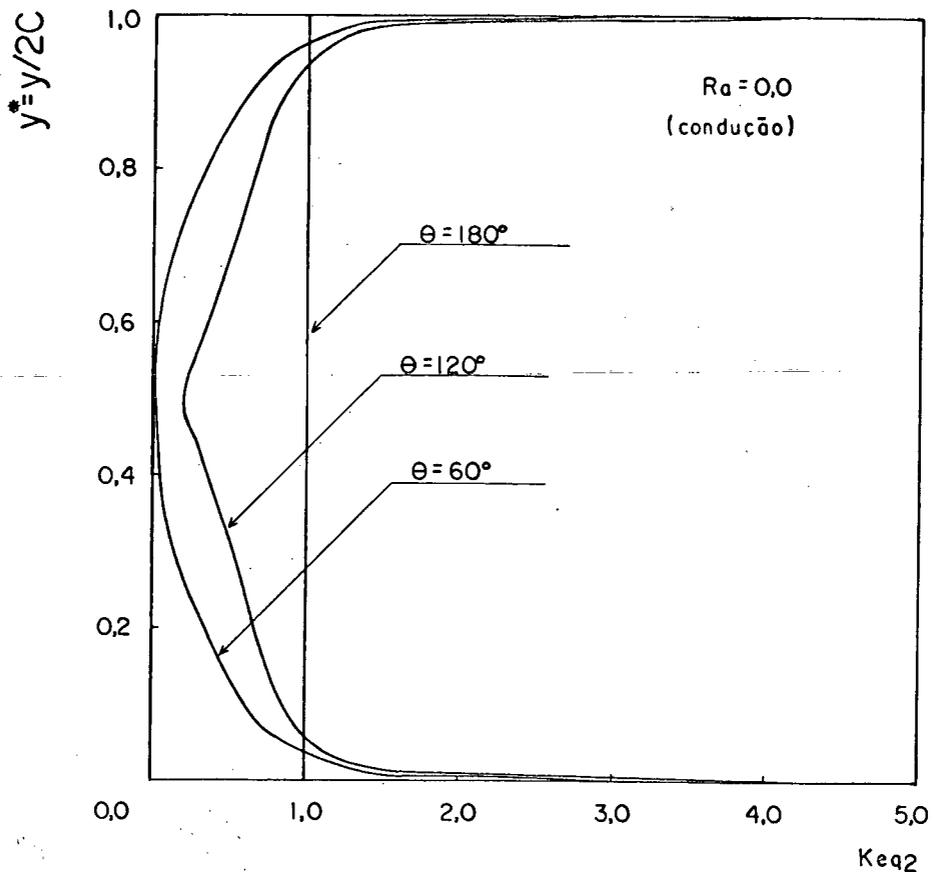


Fig. 7.49 - Condutividade térmica equivalente local para  $Ra=0$ .

As Figs. 7.51 a 7.60 mostram a condutibilidade para diversos ângulos e números de Rayleigh. Para o ângulo de  $180^\circ$ , que recai no caso de cavidade retangular de razão 2:1, as características de troca térmica são bem conhecidas. No canto inferior da parede aquecida a condutividade térmica equivalente não apresenta seu valor máximo, justamente porque neste ponto existe uma pequena estagnação devido ao ângulo reto entre a parede horizontal e a vertical aquecida. Após o ponto de máximo o comportamento é característico de camada limite, decrescendo no sentido do escoamento. Diminuindo-se o ângulo favorece-se o escoamento da massa de ar fria que vem de encontro à parede aquecida. Neste ponto de encontro, também semelhante a um problema de camada limite temos a máxima condutividade térmica decrescendo ao longo da metade da parede aquecida até atingir a região do vértice. Nesta região as condições de troca térmica são bastante pobres, devido as recirculações, que mantem a massa

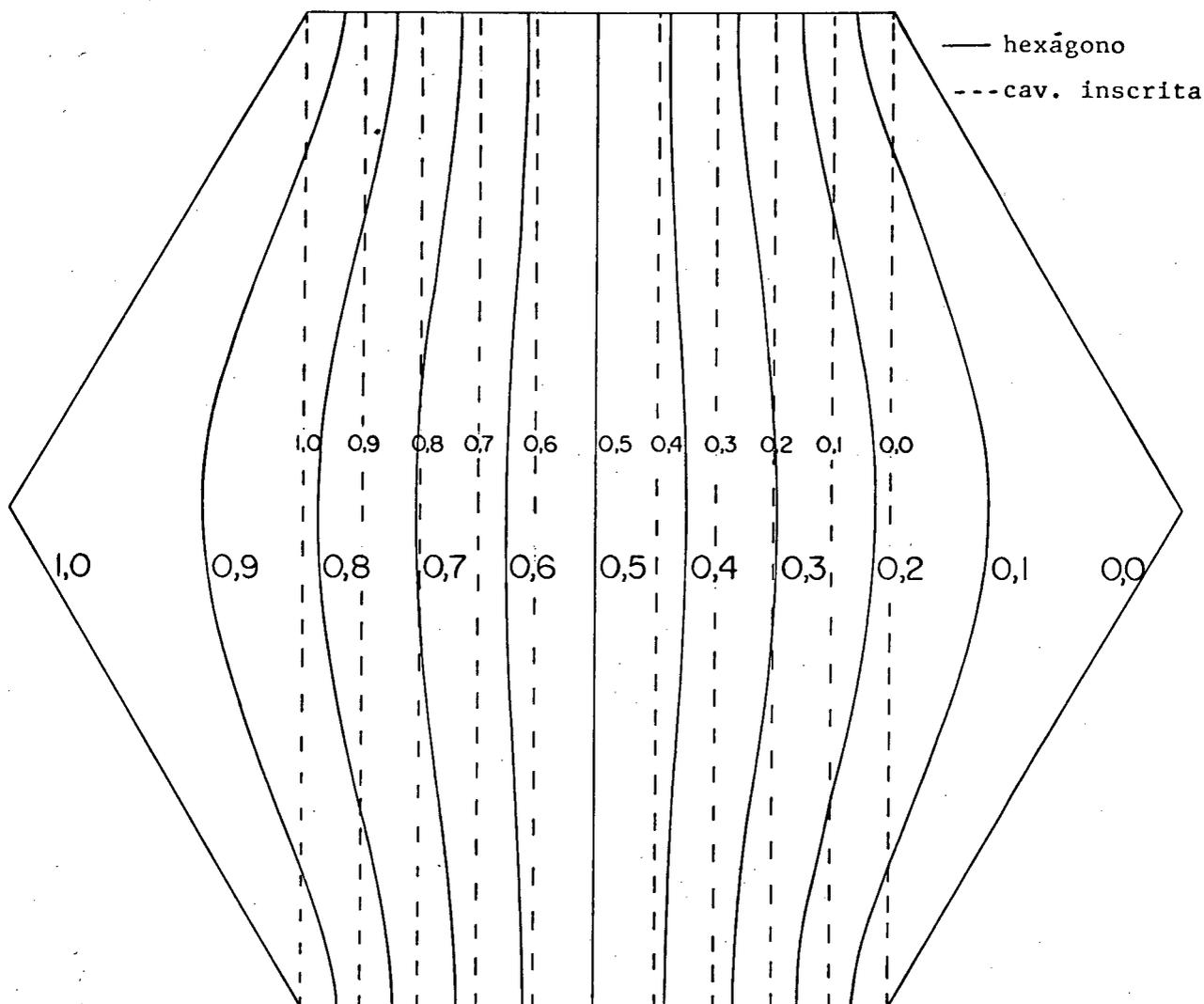


Fig. 7.50 - Isotermas para o hexágono com  $\theta = 120^\circ$  e para a cavidade retangular inscrita.  $Ra=0$ .

do fluido estagnada entre as paredes aquecidas. O fenômeno da diminuição do  $K_{eq2}$  nesta região acentua-se com a diminuição do ângulo, como pode ser visto nas Figs. 7.55 a 7.60 onde a condutividade tende a zero. Passando-se pelo vértice existe uma recuperação nas condições de troca de calor, apresentando em seguida, a diminuição de  $K_{eq2}$  ao longo da segunda metade da parede aquecida, novamente mostrando um comportamento de camada limite, especialmente para números de Rayleigh elevados. Para o canto formado pelo fim da parede aquecida e a parede superior isolada, acontece o mesmo fenômeno da aproximação das isotermas verificado para o canto inferior.

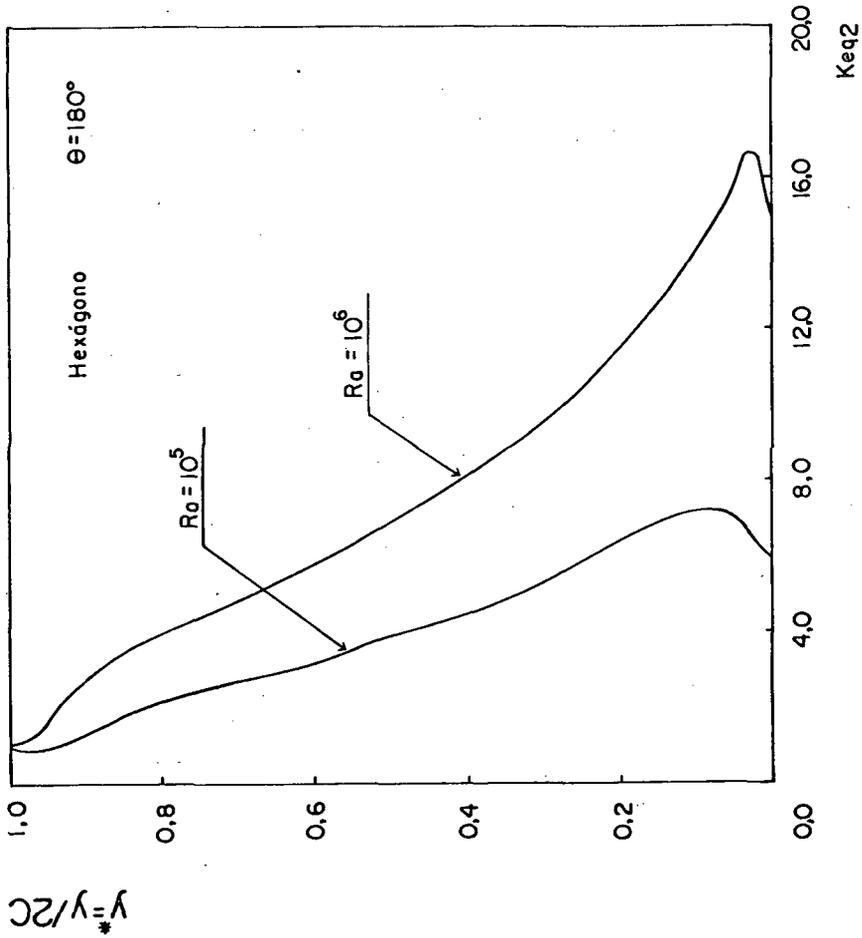
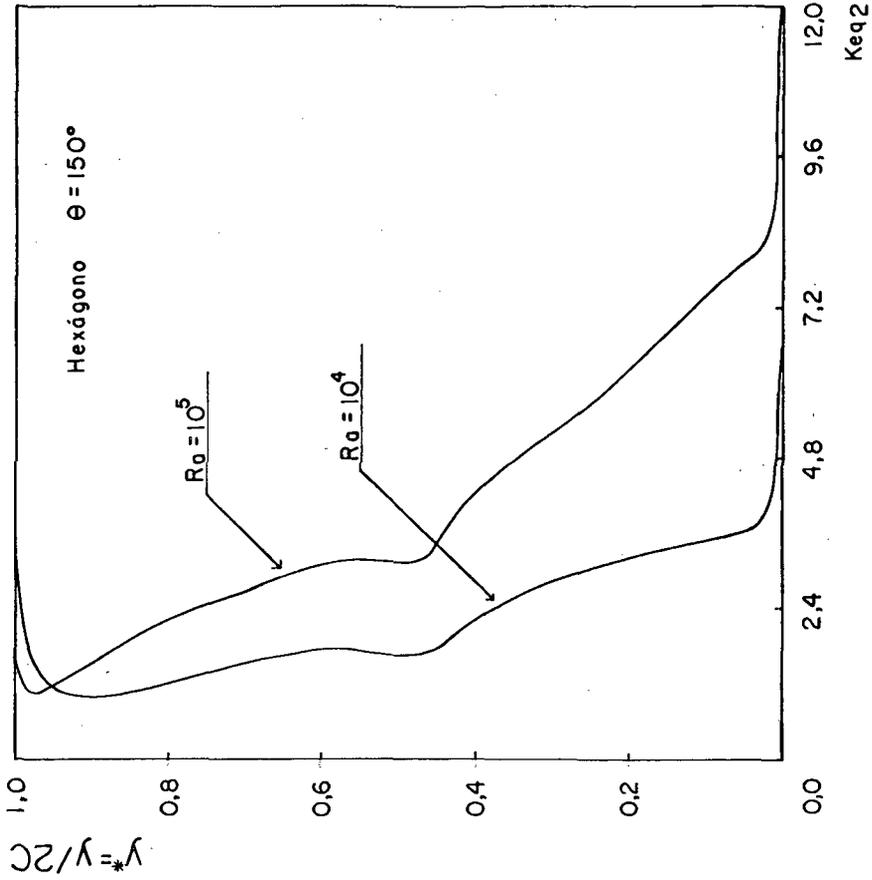


Fig. 7.52 - Condutividade térmica equivalente local para  $\theta = 150^\circ$ .

Fig. 7.51 - Condutividade térmica equivalente local para  $\theta = 180^\circ$ .

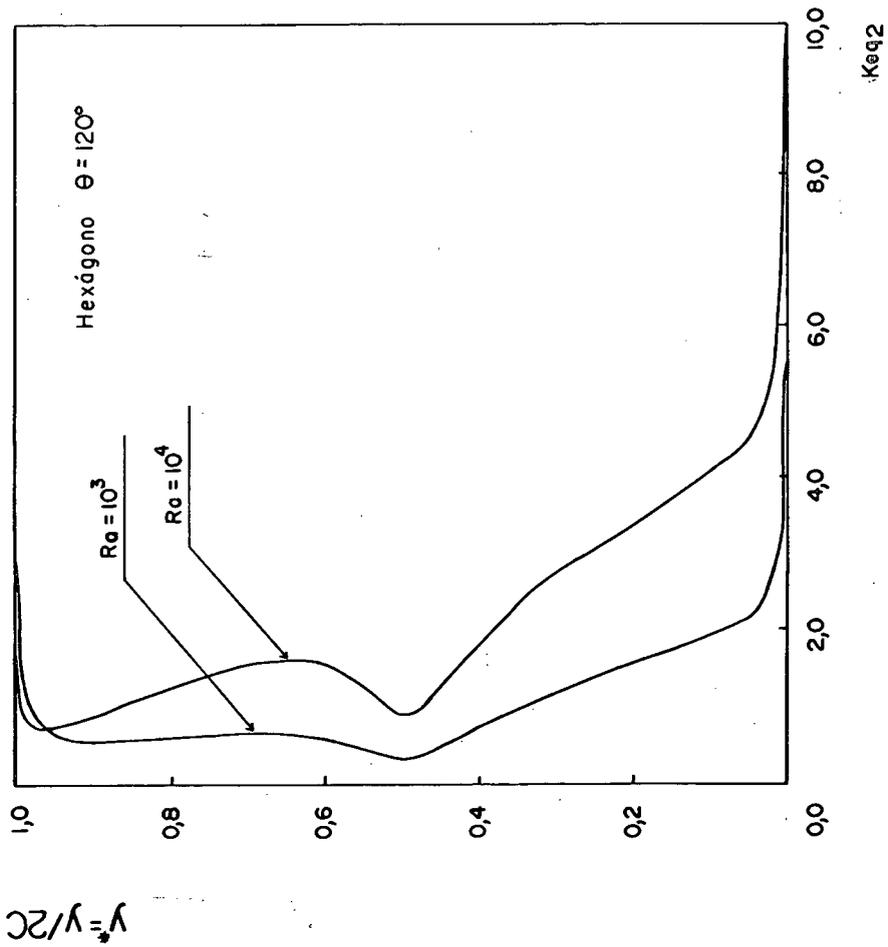


Fig. 7.53 - Condutividade térmica equivalente local para  $\theta = 120^\circ$ .

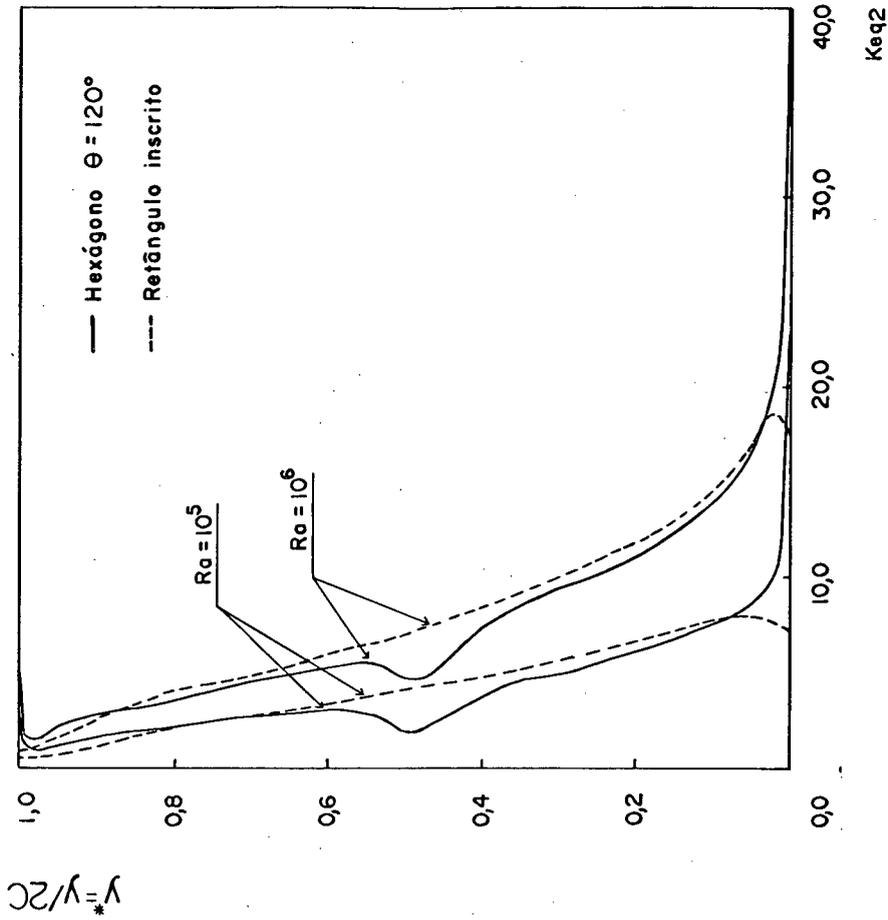


Fig. 7.54 - Condutividade térmica equivalente local para  $\theta = 120^\circ$ .

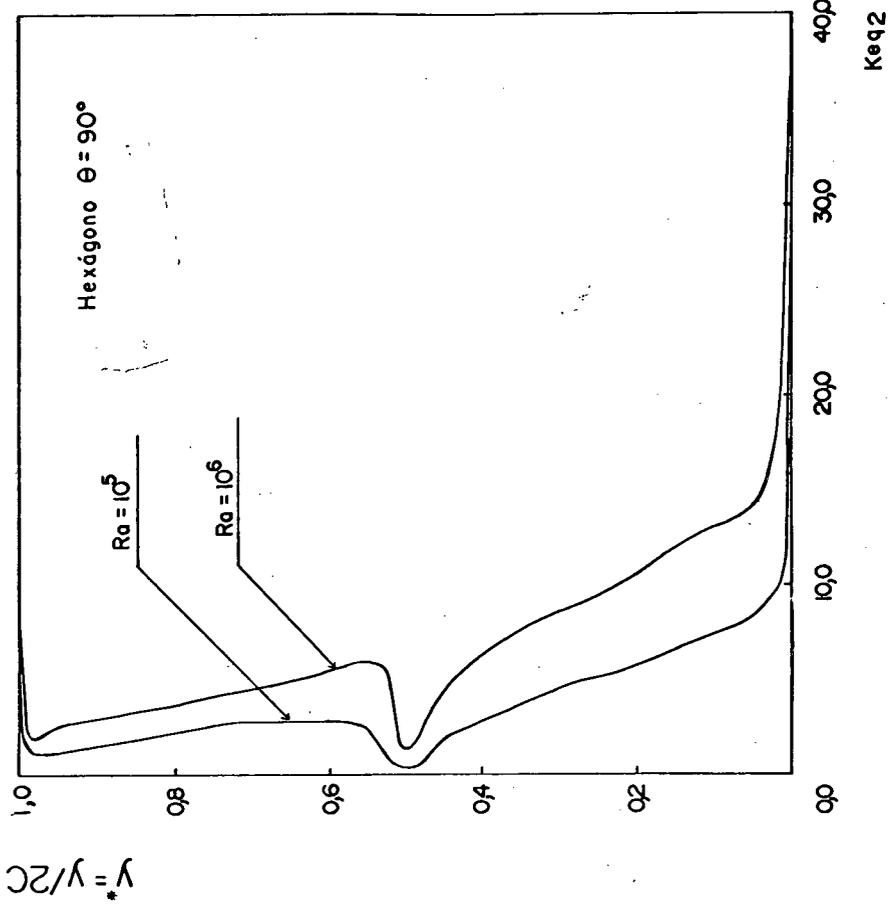


Fig. 7.56 - Condutividade térmica equivalente local para  $\theta = 90^\circ$ .

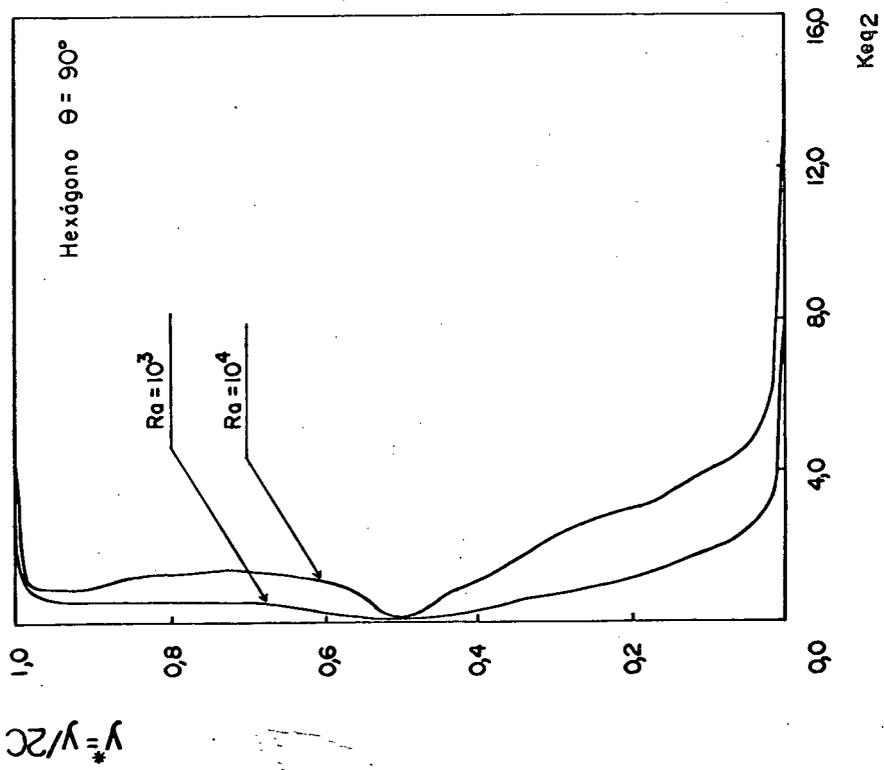


Fig. 7.55 - Condutividade térmica equivalente local para  $\theta = 90^\circ$ .

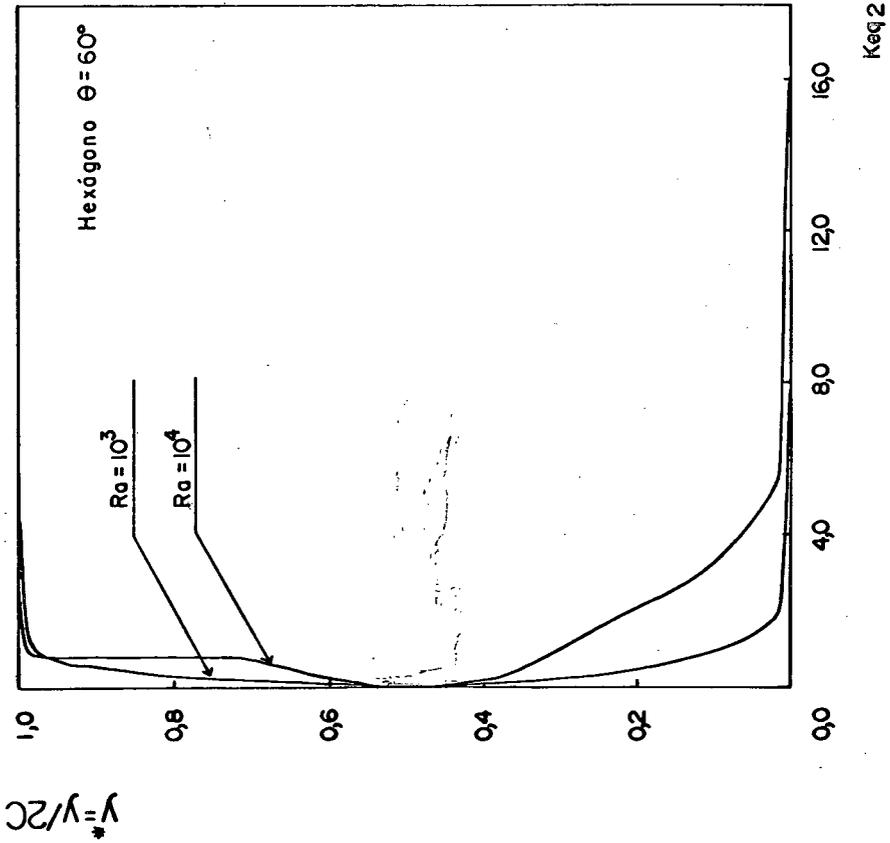


Fig. 7.57 - Condutividade térmica equivalente local para  $\theta = 60^\circ$ .

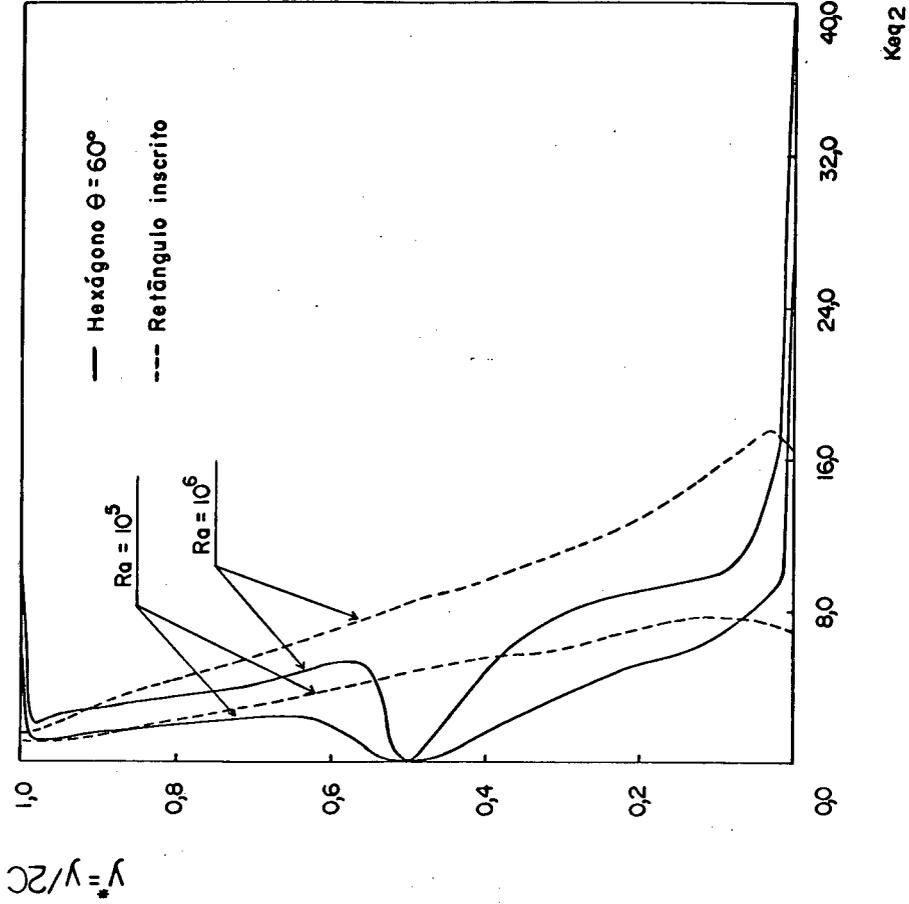


Fig. 7.58 - Condutividade térmica equivalente local para  $\theta = 60^\circ$ .

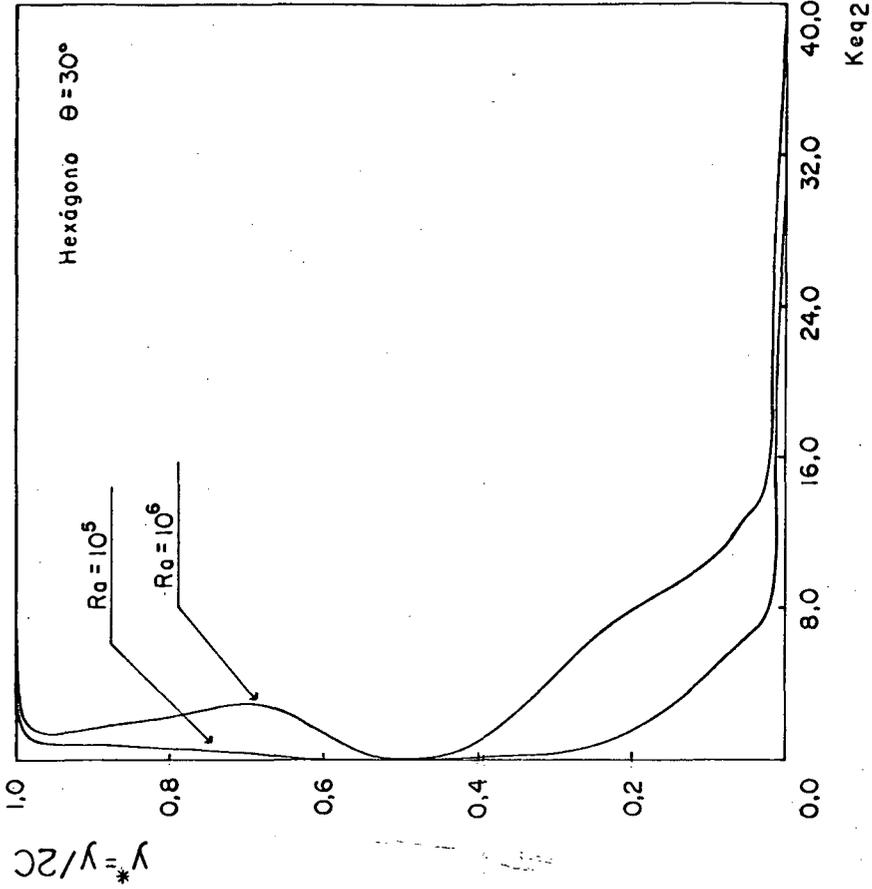


Fig. 7.60 - Condutividade térmica equivalente local para  $\theta = 30^\circ$ .

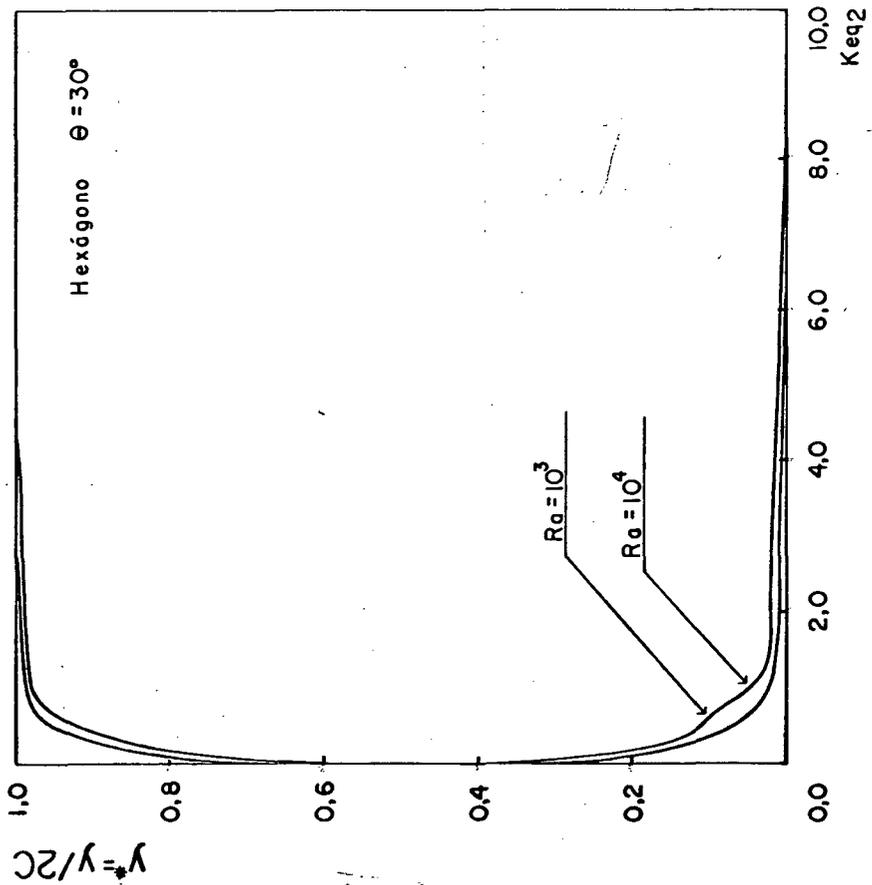


Fig. 7.59 - Condutividade térmica equivalente local para  $\theta = 30^\circ$ .

### 7.5.2 - CONDUTIVIDADE TÉRMICA EQUIVALENTE MÉDIA

A Fig. 7.61 apresenta os valores de  $K_{eq1}$ , definido como sendo a razão entre a troca de calor por convecção na cavidade hexagonal e a troca de calor por condução na mesma cavidade. Digno de nota nesta figura é o comportamento para  $\theta=30^\circ$  que, devido a razão altura/largura da cavidade ser pequena com cantos acentuados, os efeitos convectivos só começam a se manifestar para número de Rayleigh maior que  $10^4$ , enquanto que para  $60^\circ$ , começam a se manifestar para  $Ra$  maior do que  $10^3$ . Em geral, exceto para  $\theta=30^\circ$ , para o mesmo número de Rayleigh, diminuindo-se o ângulo aumenta-se o  $K_{eq1}$ . A explicação para isto é que para ângulos menores os efeitos de convecção são mais acentuados quando comparados com os efeitos de condução, uma vez que estes últimos são menos acentuados para ângulos menores. Se os efeitos convectivos forem comparados com um referencial fixo (constante com o ângulo  $\theta$ ) os mesmos crescem com o aumento de  $\theta$ .

Ainda nesta figura verifica-se que os presentes resultados apresentam uma boa concordância com os dados obtidos por Jones[6] para a cavidade com  $\theta = 180^\circ$ . Na Tabela 1 estão apresentados os valores numéricos da condutividade térmica equivalente média obtidos para a condução e convecção para número de Rayleigh de  $10^3$  a  $10^4$ , bem como os valores numéricos de Jones [6].

### 7.6 - COMPARAÇÃO ENTRE A CAVIDADE HEXAGONAL E A RETANGULAR INSCRITA CORRESPONDENTE

Um detalhe importante a ser analisado é concernente a escolha de uma cavidade hexagonal ou de uma cavidade retangular para uma determinada aplicação térmica. A definição da geometria pode ser feita comparando-se a troca de calor propiciada pela cavidade hexagonal com aquela pela cavidade retangular inscrita.

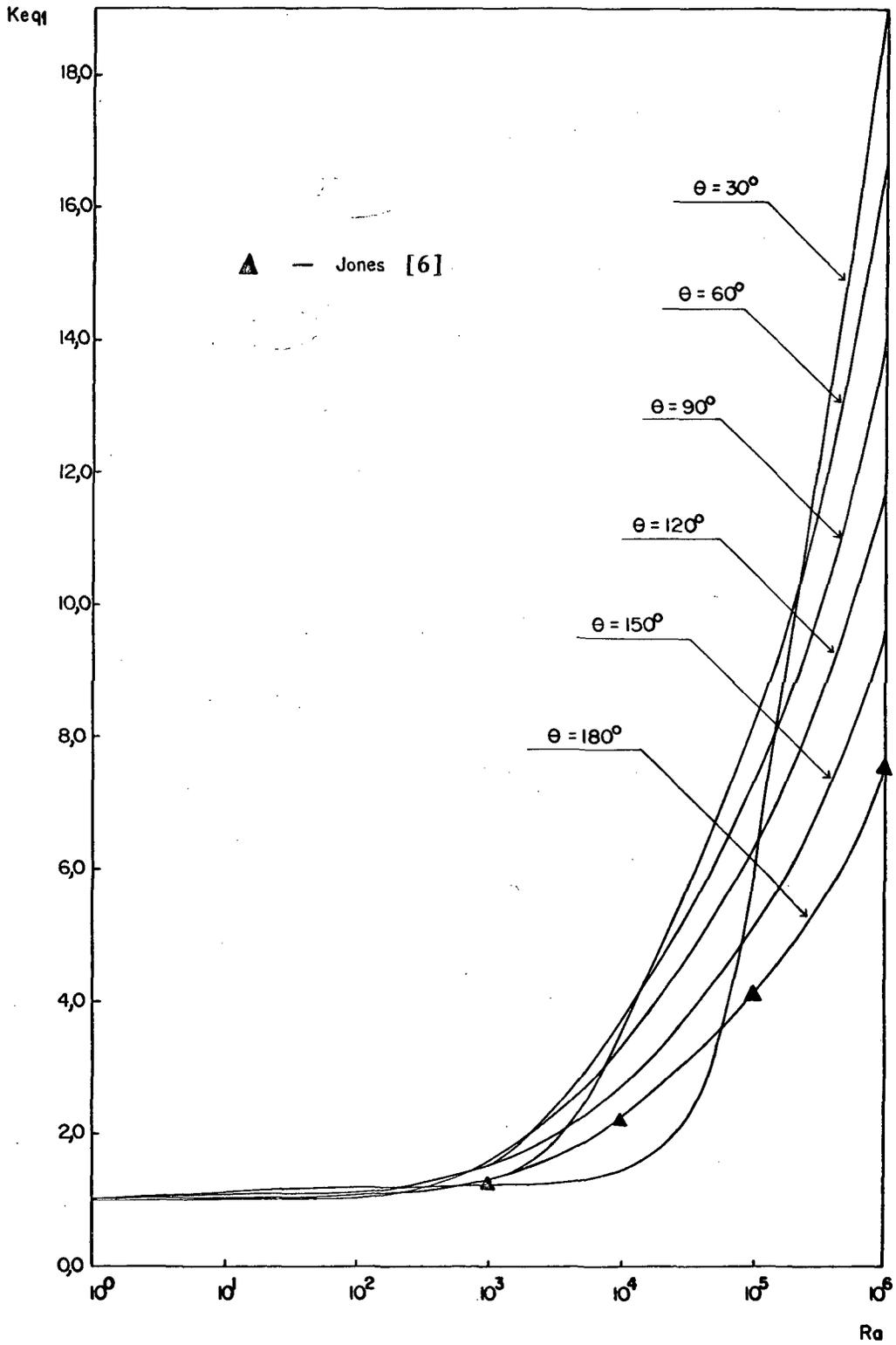


Fig. 7.61 - Condutividade térmica equivalente média.

TAB. 1 - Condutividade térmica equivalente média da cavidade hexagonal.

$\theta$ \ Ra	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
180°	1.298	2.260	4.090	7.645
(*)	1.233	2.234	4.094	7.589
150°	1.511	2.734	5.110	9.460
120°	1.583	3.350	6.320	11.660
90°	1.651	3.730	7.348	13.880
60°	1.197	3.490	8.250	16.600
30°	1.240	1.450	6.010	18.980

(\*) - Jones [6]

Através da apresentação dos perfis de velocidades mostrados na Fig. 7.62 e 7.63, para a cavidade retangular inscrita no hexágono com  $\theta = 120^\circ$ , verifica-se que o comportamento da velocidade, tanto para baixo como para alto Rayleigh, é semelhante ao da cavidade retangular 2:1 apresentado anteriormente pelas Figs. 7.4 e 7.5, apenas com as velocidades máximas, tanto ascendentes como descendentes, maiores para a cavidade retangular 2:1. Isto é justificado pela existência de uma maior altura permitindo um maior contato do fluido com a parede. Realizando-se a comparação da cavidade hexagonal de  $120^\circ$  (Figs. 7.7 e 7.8) com a retangular inscrita, observa-se que a retangular inscrita tem velocidades máximas maiores que a hexagonal, embora o hexágono tenha uma área lateral maior tanto para o aquecimento como resfriamento do fluido. Isto é, entretanto, prejudicado pela inclinação dos lados que tende dificultar o escoamento. Diminuindo o ângulo para  $60^\circ$  temos nas Figs. 7.64 e 7.65 os perfis de velocidades para a cavidade retangular inscrita, que deve ser comparada com as Figs. 7.13 e

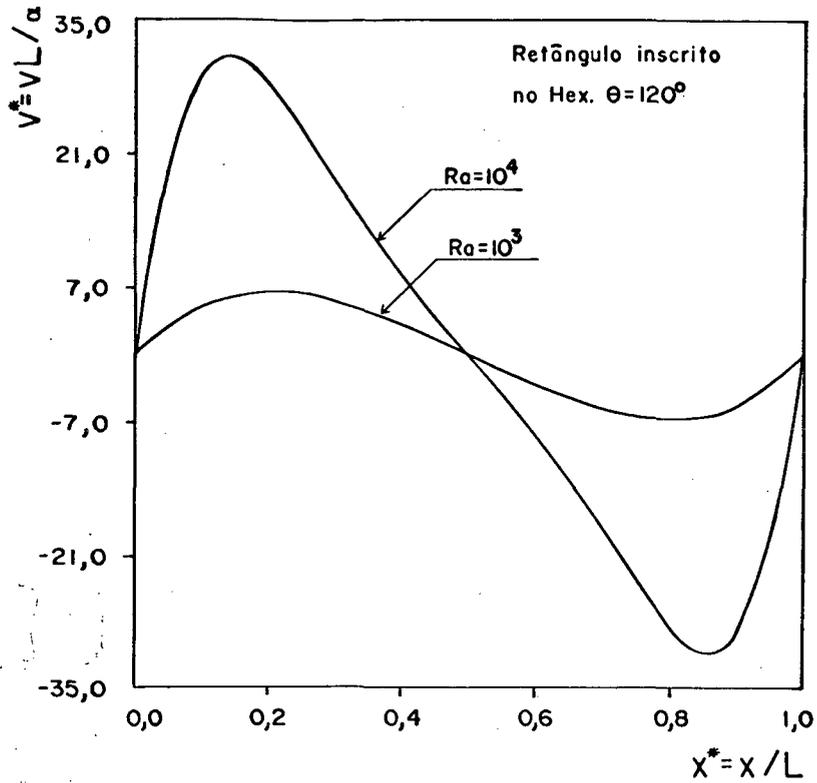


Fig. 7.62 - Perfis de velocidade  $v^*$  ao longo da linha média horizontal para cavidade inscrita no hex.  $\theta = 120^\circ$ ,  $Ra = 10^3$  e  $10^4$ .

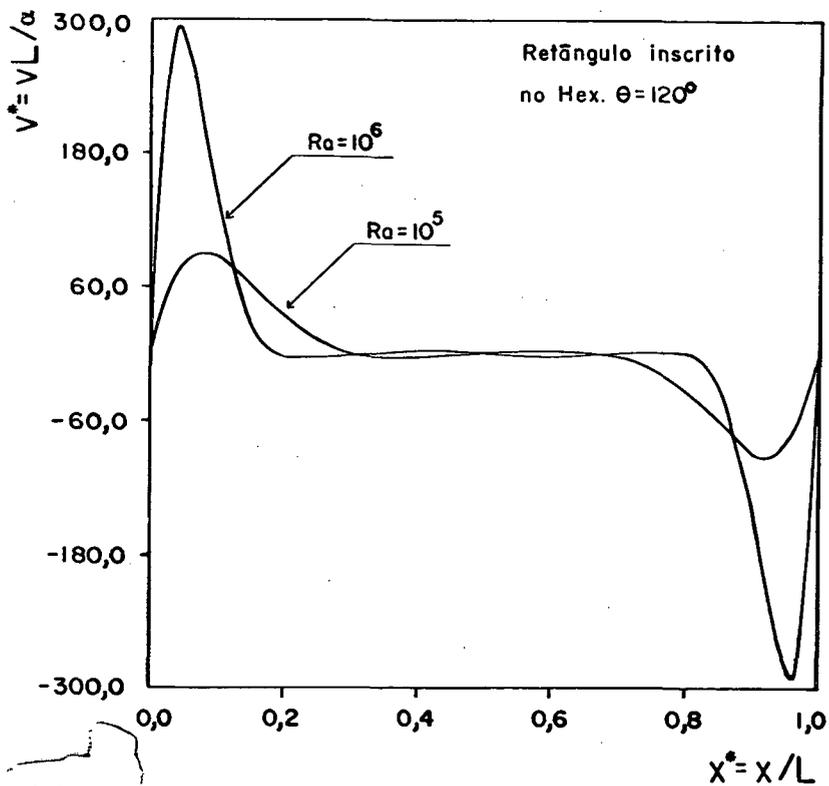


Fig. 7.63 - Perfis de velocidade  $v^*$  ao longo da linha média horizontal para a cavidade inscrita no hex.  $\theta = 120^\circ$ ,  $Ra = 10^5$  e  $10^6$ .

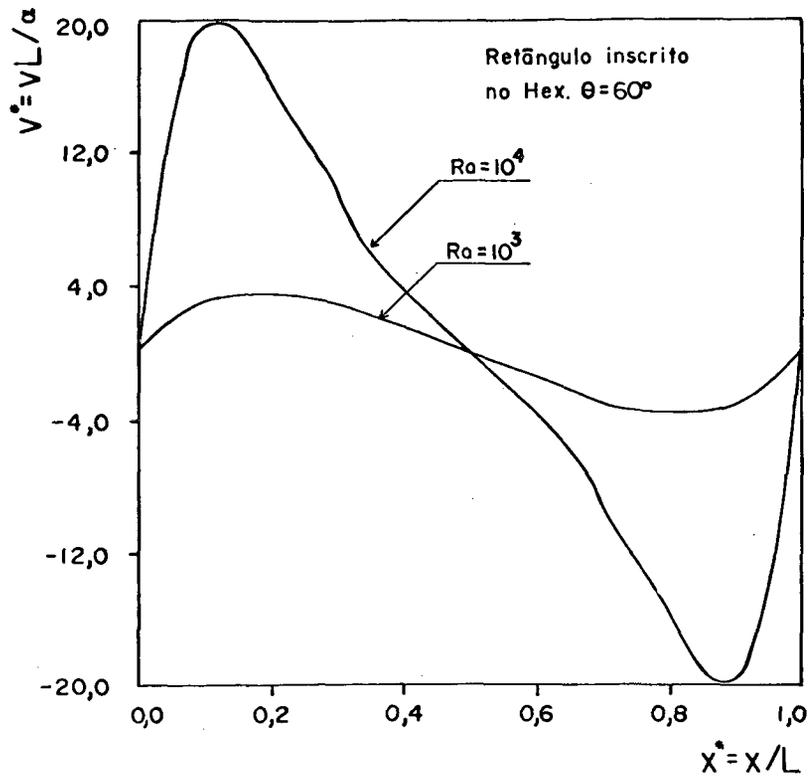


Fig. 7.64 - Perfis de velocidade  $v^*$  ao longo da linha média horizontal para cavidade inscrita no hex.  $\theta=60^\circ$ ,  $Ra = 10^3$  e  $10^4$ .

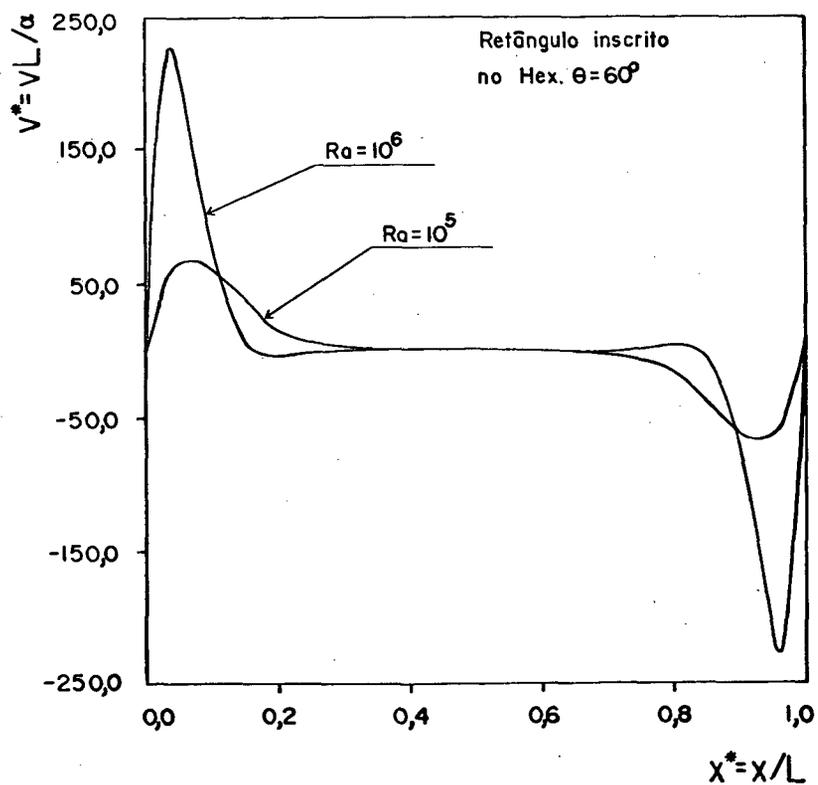


Fig. 7.65 - Perfis de velocidade  $v^*$  ao longo da linha média horizontal para a cavidade inscrita no hex.  $\theta=60^\circ$ ,  $Ra = 10^5$  e  $10^6$ .

7.14 respectivamente. Nesta comparação verifica-se que as velocidades máximas para  $Ra = 10^5$  e  $10^6$  é quase o dobro para a cavidade retangular inscrita comparado com a correspondente hexagonal. Como já apresentado anteriormente o vértice da cavidade hexagonal implica na formação de recirculações secundárias que alteram o escoamento.

Para a comparação da troca de calor local entre a cavidade hexagonal e a inscrita correspondente temos as Figs. 7.54 e 7.58 já introduzidas. Na primeira figura para  $\theta = 120^\circ$ , verifica-se uma sensível diferença da taxa de troca de calor no vértice é nos cantos inferior e superior. A diferença na parte inferior é devido a existência de um ângulo reto entre a parede isolada e a aquecida para a cavidade inscrita, onde uma pequena quantia do fluido tende a ficar estagnada, causando uma diminuição na troca de calor. As condições locais do vértices já foram enfatizadas.

Na Tab. 2, estão apresentados os valores numéricos da condutividade térmica equivalente média das cavidades inscritas para diversos números de Rayleigh.

Com base na Fig. 7.66, obtida dos dados da Tab. 1 e da Tab. 2, uma importante comparação pode ser feita em termos de taxa total de troca de calor entre a cavidade hexagonal e a retangular inscrita. Observa-se nesta figura que para números de Rayleigh superior a aproximadamente  $5 \times 10^3$ , para qualquer ângulo  $\theta$ , a razão é maior do que um, enquanto para Rayleigh inferior a  $7 \times 10^2$  a situação se inverte. Esta situação já podia ser esperada em função dos resultados mostrados pela Fig. 7.61 onde os efeitos convectivos só afetam significativamente a troca de calor no hexágono a partir de  $Ra = 5 \times 10^2$ . Portanto, para  $Ra < 10^3$  a cavidade retangular inscrita apresenta melhores condições de troca de calor.

Na Tab. 3 estão apresentados os resultados da taxa média da troca de calor por condução para diversos ângulos para a cavidade hexagonal e cavidade retangular inscrita. Nesta tabela também apresenta-se a razão entre estas taxas de troca de calor.

TAB. 2 - Condutividade térmica equivalente média da cavidade retangular inscrita.

$\frac{2C}{L}$ ( $\theta$ ) \ $Ra_L$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
2.000 (180°)	1.298	2.260	4.090	7.645
1.932 (150°)	1.252	2.258	4.083	7.610
1.732 (120°)	1.150	2.293	4.286	7.920
1.414 (90°)	1.141	2.371	4.396	8.223
1.000 (60°)	1.115	2.238	4.458	8.740
0.517 (30°)	1.151	1.321	3.929	8.542

Evidentemente, esta razão é sempre inferior a unidade devido a resistência à condução adicional existente no hexágono em relação ao retângulo inscrito, exceto para  $\theta = 180^\circ$  quando as geometrias coincidem. Entretanto nota-se que para valores de  $\theta$  pequenos a razão novamente tender a 1. Tal comportamento pode ser explicado pelo fato de os dois segmentos de mesma temperatura tornarem-se mais próximos com a diminuição do ângulo, provocando na região triangular do vértice uma temperatura praticamente constante, tornando-se um problema similar ao de condução no retângulo inscrito.

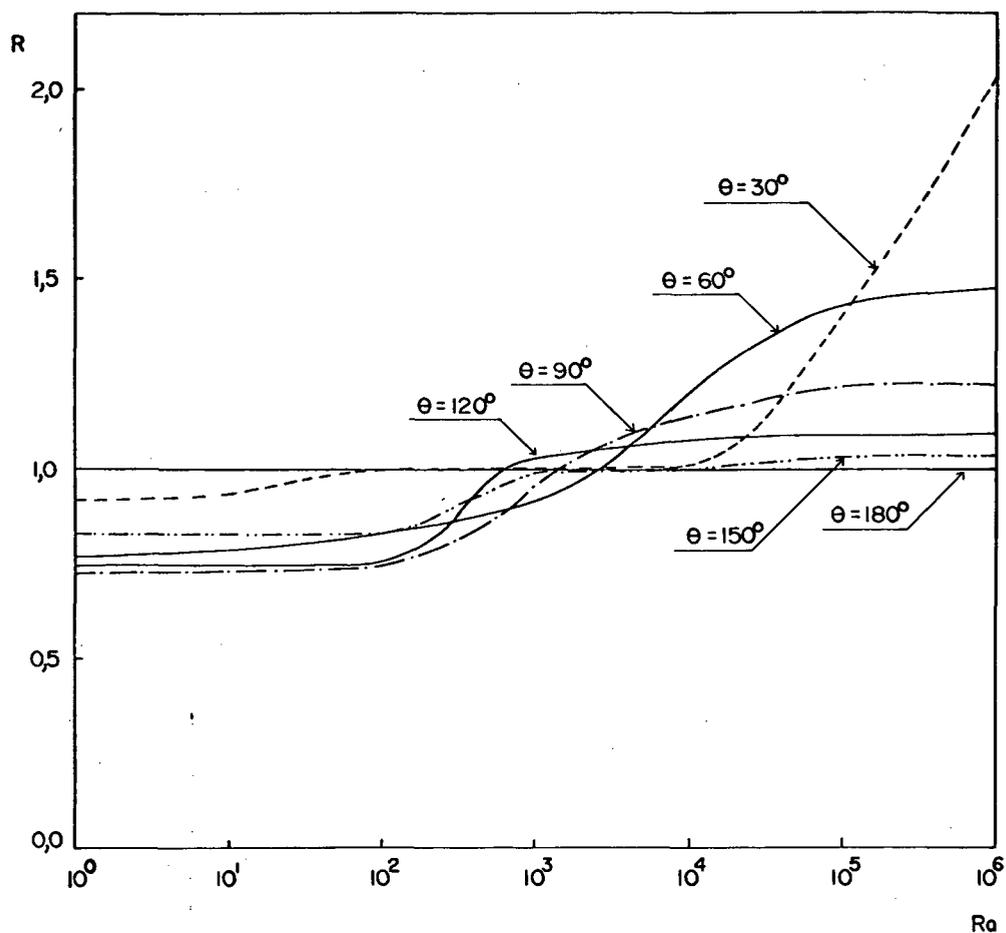


Fig. 7.66 - Razão entre a troca de calor por convecção na cavidade hexagonal e na retangular inscrita.

TAB. 3 - Fluxo de calor médio por condução da cavidade hexagonal e da retangular inscrita, R-razão entre estes fluxos.

$\theta$ $q/k\Delta T$	180°	150°	120°	90°	60°	30°
$q_{\text{cond hex}}$	2.00	1.597	1.286	1.028	0.770	0.475
$q_{\text{cond ins}}$	2.00	1.932	1.732	1.414	1.00	0.517
R	1.00	0.827	0.743	0.727	0.770	0.910

## CAPÍTULO 8

### CONCLUSÕES

O objetivo principal desta dissertação foi a experimentação numérica da convecção natural em cavidades hexagonais arbitrárias. Esta análise permite a determinação de parâmetros de transferência de calor que, no conhecimento do autor, não são disponíveis na literatura para um conjunto de cavidades hexagonais como aqui estudado.

As conclusões do estudo já foram inicialmente abordados ao longo da apresentação dos resultados. Apenas aquelas mais relevantes serão novamente comentadas.

- a) Aumentando o número de Rayleigh, a troca é mais eficiente para ângulos pequenos, onde existe uma pobre troca de calor por condução. Ou seja, em relação a troca por condução, a convecção é mais benéfica para ângulos pequenos.
- b) Para as cavidades com ângulo  $\theta$  igual e inferior a  $90^\circ$ , surgem as recirculações junto aos vértices, provocando uma sensível queda no fluxo de calor local nestas regiões. As regiões ocupadas pelas recirculações são maiores quanto menor for o número de Rayleigh, aumentando também com a diminuição do ângulo da cavidade.
- c) Na comparação da capacidade de troca de calor da cavidade hexagonal com a retangular inscrita, conclui-se que, para baixos números de Rayleigh a troca é maior na inscrita, enquanto que, para altos números de Rayleigh, quando os efeitos convectivos são predominantes sobre os difusivos, este comportamento é invertido.

Com os resultados obtidos pelo presente trabalho tem-se agora, disponíveis na literatura, dados da convecção natural em cavidades hexagonais, colaborando assim, para o aumento do

pequeno acervo de dados existentes para as cavidades de geometrias arbitrarias.

Este trabalho também contribui no sentido de mostrar a versatilidade do uso de coordenadas generalizadas para esta classe de problemas. Malhas que variam de ortogonais, quando  $\theta=180^\circ$ , a altamente não ortogonais para ângulos pequenos foram empregadas.

Uma característica importante do uso de sistemas coordenados que, quando transformados formam um único bloco computacional, é a possibilidade de utilizar o MSI (Modified Strongly Implicit procedure), uma poderosa técnica para solução de sistemas lineares, pois a mesma requer uma organização definida dos elementos da matriz. A utilização do MSI significou uma economia de, aproximadamente, 60% no tempo de CPU, na maioria dos casos, comparados com o método S.O.R., para a solução do sistema.

Como sugestões para realização de futuros trabalhos nesta linha de pesquisa, podemos destacar

- a) A extensão do modelo numérico aqui apresentado para a utilização de malhas adaptativas;
- b) A inclusão, na formulação, dos termos para a modelagem de um problema de turbulência, que tem grande aplicabilidade em casos práticos da engenharia;
- c) A expansão do modelo, para a simulação de casos de cavidades tridimensionais.

## REFERÊNCIAS

- [ 1 ] MALISKA, C.R., 'A Solution Method for Three-Dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinates', Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canada, 1981.
- [ 2 ] MILIOLI, F.E., 'Solução Numérica para Problemas Bidimensionais de Convecção Natural em Cavidades Arbitrárias', Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis SC, Abril, 1985.
- [ 3 ] SILVA, A.F.C. e MALISKA, C.R., 'Previsão da Transferência de Calor Por Convecção Natural em Cavidades Duplamente Conexas Arbitrárias', II Congresso Latinoamericano de Transferência de Calor e Matéria, São Paulo, SP, Maio, 1986.
- [ 4 ] De VAHL DAVIS, G. and JONES, I.P., 'Natural Convection in a Square Cavity: a Comparison Exercise'. Int. J. Numerical Methods in Fluids, Vol. 3, pp. 227-248, 1983.
- [ 5 ] De VAHL DAVIS, G., 'Natural Convection of Air in Square Cavity : A Bench Mark Numerical Solution', Int J. Numerical Methods in Fluids, vol. 3, pp. 249-264, 1983.
- [ 6 ] JONES, I.P., 'Numerical Study of Natural Convection in an Air-filled Cavity: Comparison With Experiment', Numerical Heat Transfer, vol. 2, pp. 193-213, 1979.
- [ 7 ] GARTLING, D.K., 'Convective Heat Transfer Analysis By The Finite Element Method', Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 12, pp. 365-382, 1977.
- [ 8 ] CHANG, K.S., WHON, Y.H. and CHO, C.H., 'Patterns of Natural Convection Around a Square Cylinder Placed Concentrically in a Horizontal Circular Cylinder', ASME Journal Heat Transfer, Vol. 105, pp. 273-280, 1983.
- [ 9 ] PATEL, N.R. and BRIGGS, D.G., 'A MAC Scheme in Boundary-

- fitted Curvilinear Coordinates', Numerical Heat Transfer, Vol. 6, pp. 383-394, 1983.
- [10] GLAKPE, E.K., WATKINS, Jr.C.B. and CANNON, J.N., 'Constant Heat Flux Solutions for Natural Convection Between Concentric and Eccentric Horizontal Cylinders', Numerical Heat Transfer, Vol. 10, pp. 279-295, 1986.
- [11] MALISKA, C.R. and RAITBY, G.D., 'A Method for Computing Three-Dimensional Flows Using Nonorthogonal Boundary-fitted Coordinates', International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 4, pp. 519-537, 1984.
- [12] KAVIANY, M., 'Effect of a Protuberance on Thermal Convection in a Square Cavity', ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 106, pp. 830-834, Novembro, 1984.
- [13] FLACK, R.D., KONOPNICKI, T.T. and ROOKE, J.H., 'The Measurement of Natural Convective Heat Transfer in Triangular Enclosures', ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 101, pp. 648-658, 1979.
- [14] FLACK, R.D., 'The Experimental Measurement of Natural Convection Heat Transfer in Triangular Enclosures Heated or Cooled From Below', ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 102, pp. 770-772, 1980.
- [15] MALISKA, C.R., POLINA, S. and SILVA, A.F.C., 'Natural Convection in Triangular Enclosures', I Simpósio Brasileiro de Transferência de Calor e Massa, Campinas, SP, Julho, 1987.
- [16] POLINA, S., JUCÁ, P.C.S., SILVA, A.F.C. e MALISKA, C.R., 'Convecção Natural em Cavidades Triangulares: Tratamento da Condição de Contorno Singular', Anais do IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, pp. 73-76, Florianópolis, SC, Dezembro 1987.
- [17]] KIMURA, S. and BEJAN, A., 'The "Heatline" Visualization of

Convective Heat Transfer', ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 105, pp. 916-919, November 1983.

- [18] VINOKUR, M., 'Conservation Equations of Gas-Dynamics in Curvilinear Systems', Journal Comp. Phys., Vol. 14, pp. 105-125, 1974.
- [19] GRAY, D.D. and GIORGINI, A., 'The Validity of the Boussinesq Approximation for Liquids and Gases', Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 19, pp. 545-551, 1976.
- [20] THOMPSON, J.F. THAMES, F.C. and MASTIN, C.W., 'Boundary Fitted Curvilinear Coordinate System for Solution of Partial Differential Equations on Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies', NASA Langley Research Center CR-2729, 1976.
- [21] THOMPSON, J.F., WARSI, Z.U.A. and MASTIN, C.W., 'Numerical Grid Generation - Foundations and Applications', Elsevier Science Publishing Co., Inc., U.S.A., 1985.
- [22] GHIA, N.K. and GHIA, U. eds, 'Advances in Grid Generation', The American Society of Mechanical Engineers, U.S.A., 1983.
- [23] ROACHE, P.J., 'Computational Fluid Dynamics', Hermosa Publishers, U.S.A., 1976.
- [24] SCHNEIDER, G.E. and ZEDAN, M., 'A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems', Numerical Heat Transfer, Vol. 4, pp. 1-19, 1981.
- [25] RAITHBY, G.D. and TORRANCE, K.E., 'Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow', Computer and Fluids, Vol. 2, pp. 191-206, 1974.
- [26] RAITHBY, G.D. and SCHNEIDER, G.E., 'Numerical Solution of Problems in Incompressible Fluid Flow: Treatment of the Velocity-Pressure Coupling'. Numerical Heat Transfer, Vol.

2, pp. 417-440, 1979.

- [27] SILVA, A.F.C. e MALISKA, C.R., 'Solução Numérica de Problemas de Campo: Considerações sobre a Formulação Transiente', VIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Gramado, RS, Setembro 1987.
- [28] HACKMAN, L. 'Personal Communication To C.R. Maliska.', Waterloo, Canada, 1981.
- [29] PATANKAR, S.V., 'Numerical Heat Transfer and Fluid Flow', McGraw-Hill Book Company, U.S.A., 1980.
- [30] Van DOORMAAL, J.P. and RAITHBY, G.D., 'Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluids Flows', Numerical Heat Transfer, Vol. 7, pp. 147-163, 1984.
- [31] BEJAN, A., 'Convective Heat Transfer', John Wiley & Sons, Inc., U.S.A., 1984.
- [32] RAITHBY, G.D., 'Some Recent Advances in Computational Fluid Dynamics', Anais do IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, pp. P-33-40, Florianópolis, SC, Dezembro 1987.
- [33] RAITHBY, G.D., 'Prediction of Dispersion by Surface Discharge', Basin Investigation and Modelling Section, Canada Centre for Inland Waters, Burlington, Ontario, Canada, August 1976.

## APÊNDICE A

OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DA FUNÇÃO DE CALOR  
EM COORDENADAS GENERALIZADAS

## A.1 - INTRODUÇÃO

Em problemas de condução pura é comum apresentar-se os resultados referentes a transferência de calor através do traçado das isotermas. Tal procedimento é bastante conveniente pois além de permitir uma rápida visualização do campo de temperaturas, permite inferir as regiões de maior fluxo de calor e a trajetória ou caminho percorrido pela energia já que, para meios isotrópicos, o vetor fluxo de calor é perpendicular às isotermas.

No caso de um fluido em movimento, a transferência de calor se dá através dos processos de condução e convecção. A esse mecanismo combinado dá-se simplesmente o nome de transferência de calor por convecção. Diversas são as técnicas empregadas, neste caso, na visualização das características do escoamento com transferência de calor. A apresentação das linhas de corrente, vetores velocidade e isotermas são as mais comuns e bastante úteis. No entanto, em problemas de convecção, a apresentação de isotermas permite apenas visualizar regiões de maior ou menor fluxo de calor por condução. Nenhuma informação pode ser obtida a respeito do fluxo convectivo de energia. Evidentemente, através da observação simultânea do campo de velocidades (desenho de vetores velocidade) e do campo de temperaturas, pode-se concluir algo a respeito do fluxo de energia. Por exemplo, se o gradiente de temperatura, a temperatura e a velocidade forem baixas em uma determinada direção, é lógico que o transporte de energia nesse ponto e nessa direção será baixo em relação a outras regiões do escoamento. Com a motivação de reunir estas informações em um mesma fonte Kimura & Bejam [17] definiram a função de calor que, quando integrada em uma determinada direção quantifica o fluxo total de calor normal a esta direção.

Neste apêndice, a equação da função de calor é deduzida de uma forma apenas ligeiramente diferente da apresentada em [17],

mas com consequências conceituais e de interpretações importantes. Ainda neste apêndice a equação será escrita para um sistema de coordenadas generalizado, e apresenta-se as condições de contorno e o armazenamento da função de  $H(\xi, \eta)$  na malha.

## A.2 - DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO DE CALOR

O procedimento para a obtenção da função de calor é bastante semelhante ao da função de corrente e já foi previamente apresentado em [17] e [31]. No entanto, nos referidos trabalhos, os autores omitem a necessidade do estabelecimento de uma temperatura de referência. Além disso, suas equações assumem que a temperatura da parede mais fria da cavidade é igual a zero, particularizando, portanto, a equação da função de calor. A seguir a equação da função de calor será novamente deduzida de forma mais correta do ponto de vista conceitual.

A equação da energia em forma dimensional de um escoamento bidimensional de um fluido com propriedades físicas constantes em regime permanente, pode ser escrita da forma

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho c_p u T - k \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho c_p v T - k \frac{\partial T}{\partial y}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Define-se a função de calor  $H$  de forma que  $\partial H / \partial y$  seja o fluxo total de energia na direção  $x$  e  $-\partial H / \partial x$  seja o fluxo total de energia na direção  $y$ . No entanto, como a parte convectiva do fluxo depende do valor da temperatura é conveniente arbitrar um nível energético de referência. Será adotado como esse nível o correspondente a uma temperatura de referência  $T'$ . Assim

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \rho c_p u (T - T') - k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{A.2})$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \rho c_p v (T - T') - k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{A.3})$$

É fácil verificar que  $H(x, y)$  satisfaz identicamente a equação da energia, Eq. (A.1).

Derivando a Eq. (A.2) com relação a  $x$  e a Eq. (A.3) com relação a  $y$  e subtraindo a segunda da primeira obtém-se que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} [\rho c_p u (T - T')] - \frac{\partial}{\partial x} [\rho c_p v (T - T')] \quad (\text{A.4})$$

Através da solução numérica da equação acima determina-se  $H(x, y)$  em todo o domínio da geometria, com o qual determina-se as linhas de calor.

### A.3 - TRANSFORMAÇÃO DA EQUAÇÃO DA FUNÇÃO DE CALOR PARA O SISTEMA GENERALIZADO $\xi - \eta$

Para a avaliação do lado direito da Eq. (A.4) é necessário que os campos de  $u$ ,  $v$ ,  $T$  tenham sido previamente determinados. Para cavidades com geometria complexa é conveniente que a solução numérica das equações para as variáveis acima seja obtida através de uma discretização não ortogonal com linhas coordenadas que se ajustam as fronteiras da cavidade. Portanto os valores de  $u$ ,  $v$ , e  $T$  são conhecidos em pontos discretos da malha.

O procedimento para a obtenção da Eq. (A.4) para o sistema generalizado é idêntico ao já definido no Cap. 5. Aplicando as Eqs. (3.1) e (3.2) e utilizando a regra da cadeia a Eq. (A.4) resulta em

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial H}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial H}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 \frac{\partial H}{\partial \eta} + C_2 \frac{\partial H}{\partial \xi}) = \frac{\hat{S}H}{J} \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\frac{\widehat{SH}}{J} = \rho c_p \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 UT - C_2 VT) - \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 VT - C_2 UT) \right] \quad (\text{A.6})$$

os coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_4$  são os definidos no Cap. 4 pelas Eqs. (4.25) a (4.27), com  $\Gamma^\phi = 1$ .

Na discretização da Eq. (A.7) as derivadas de segunda ordem são aproximados por diferenças centrais e a solução do sistema linearizado é obtida pelo método MSI [24].

#### A.4 - LOCALIZAÇÃO DE H NA MALHA

No esquema numérico utilizado as variáveis  $u$ ,  $v$  e  $T$  são armazenadas conforme mostra a Fig. A.1. Uma decisão precisa deve ser tomada com relação a localização da variável  $H$  na malha. A primeira vista parece conveniente armazenar  $H$  na mesma posição que  $T$ , isto é, no centro do volumes de controle aos quais é aplicado o princípio da conservação da massa. No entanto, como será demonstrado a seguir, essa escolha não é a mais adequada. Admita por hipótese que a malha seja cartesiana igualmente espaçada. A avaliação do termo fonte para  $H$  (lado direito da Eq. (A.4)) envolve a derivadas  $\partial(vT)/\partial x$  e  $\partial(uT)/\partial y$ . A avaliação da primeira derivada seria efetivada através da expressão

$$(v_e T_e - v_w T_w) / \Delta x \quad (\text{A.7})$$

onde as temperaturas nas faces leste e oeste do volume de controle seriam obtidas através da média aritmética das temperaturas dos pontos vizinhos. Ocorre que as velocidades  $v$  nas faces leste e oeste não participam diretamente da conservação da massa e tem seu valor definido em função da média das velocidades  $v$  vizinhas. A mesma conclusão é válida para as velocidades  $u$  nas faces norte e sul. Esse excessivo processo de médias deteriora os resultados (na realidade esse esquema de

armazenamento chegou a ser empregado no decorrer deste trabalho). Embora esse defeito não seja evidente para malhas não ortogonais, não é interessante a adoção de um esquema de armazenamento que não produza bons resultados para o caso particular da discretização cartesiana.

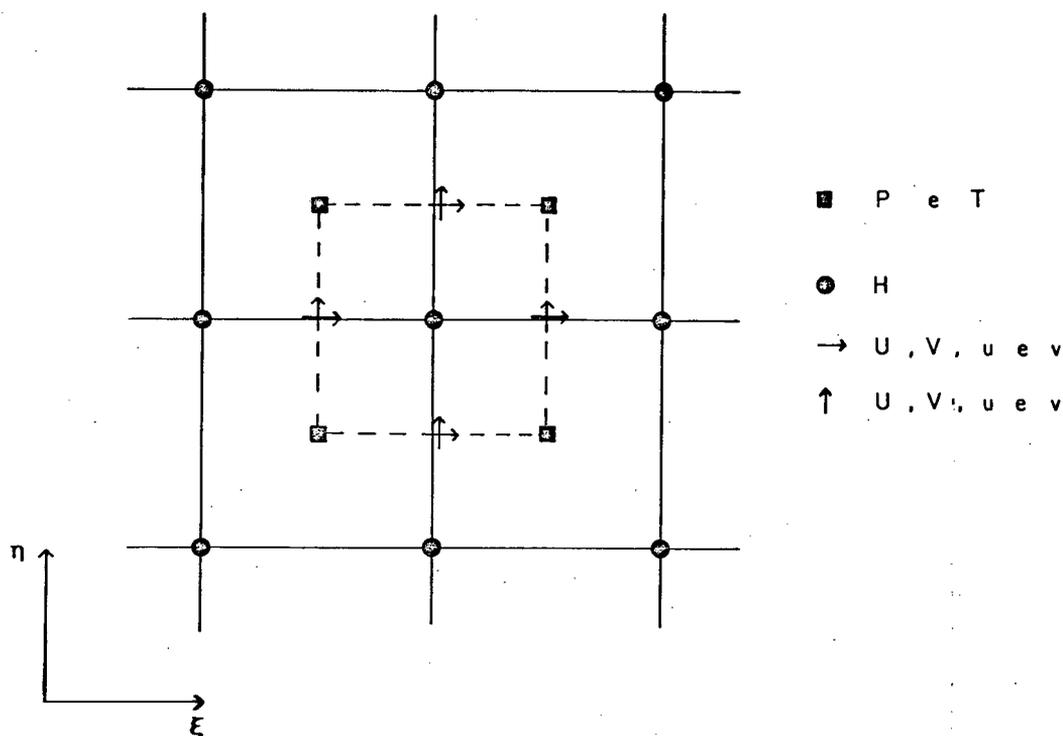


Fig. A.1 - Armazenamento da variável H na malha.

Já para H armazenado nos vértices dos volumes de controle da continuidade esse processo de média de velocidades desaparece completamente. A avaliação das temperaturas nas interfaces envolve um processo de média semelhante ao exigido pelo outro esquema de armazenamento. Além disso, este último esquema de armazenamento torna muito mais fácil a aplicação das condições de contorno de H.

#### A.5 - ESCOLHA DA TEMPERATURA DE REFERÊNCIA $T'$

No cálculo das linhas de calor acima apresentadas foi

assumida como temperatura de referência a temperatura da parede fria. Os padrões apresentados seriam distintos caso outra referência fosse adotada e possivelmente a interpretação dos resultados seria diferente. No entanto, no entedimento dos autores, a temperatura de referência que permite a correta interpretação do mecanismo de transporte de energia no escoamento é a temperatura da parede fria. A adoção de uma temperatura de referência superior a da parede fria implicará no transporte convectivo de energia negativa nas regiões de temperatura mais baixa da cavidade. Já a adoção de uma temperatura de referência inferior a da parede fria implica em transporte de energia no interior da cavidade mesmo que a temperatura da parede quente seja reduzida até o valor da temperatura da parede fria quando o problema de transferência de calor deixaria de existir e nada mais haveria a visualizar. Apesar da definição da função de calor apresentada por Kimura & Bejan [17] sequer citar a existência de qualquer nível de referência, a mesma referência está implicitamente aplicada pois seus resultados são compatíveis com os apresentados do presente trabalho considerando  $T' = T_0$ .

#### A.6 - CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A EQUAÇÃO DA FUNÇÃO DE CALOR

A Fig. A.2 mostra o plano transformado com as condições de contorno, utilizadas para a determinação da função de calor. É fácil verificar, pela definição de  $H$ , que  $H$  nas faces esquerda e direita representam o calor trocado por estas faces com o fluido. Portanto, o valor de  $H$  é prescrito em todas as fronteiras, sendo feito igual a zero na face horizontal inferior para que o valor das linhas representam o valor numérico do calor realmente trocado.

O valor de  $H$  a ser prescrito no ponto  $i$ , nas fronteiras esquerda e direita, é dado por

$$H_i = \int_0^{L_i} \left\{ -k \frac{\partial T}{\partial \eta} + \rho C_p U T \right\} dL \quad (A.8)$$

onde  $U$  é a componente contravariante do vetor velocidade. No problema analisado neste trabalho as fronteiras esquerda e direita são sólidas e, portanto,  $U = 0$ . Na fronteira superior o valor de  $H$  prescrito será igual ao calor total trocado.

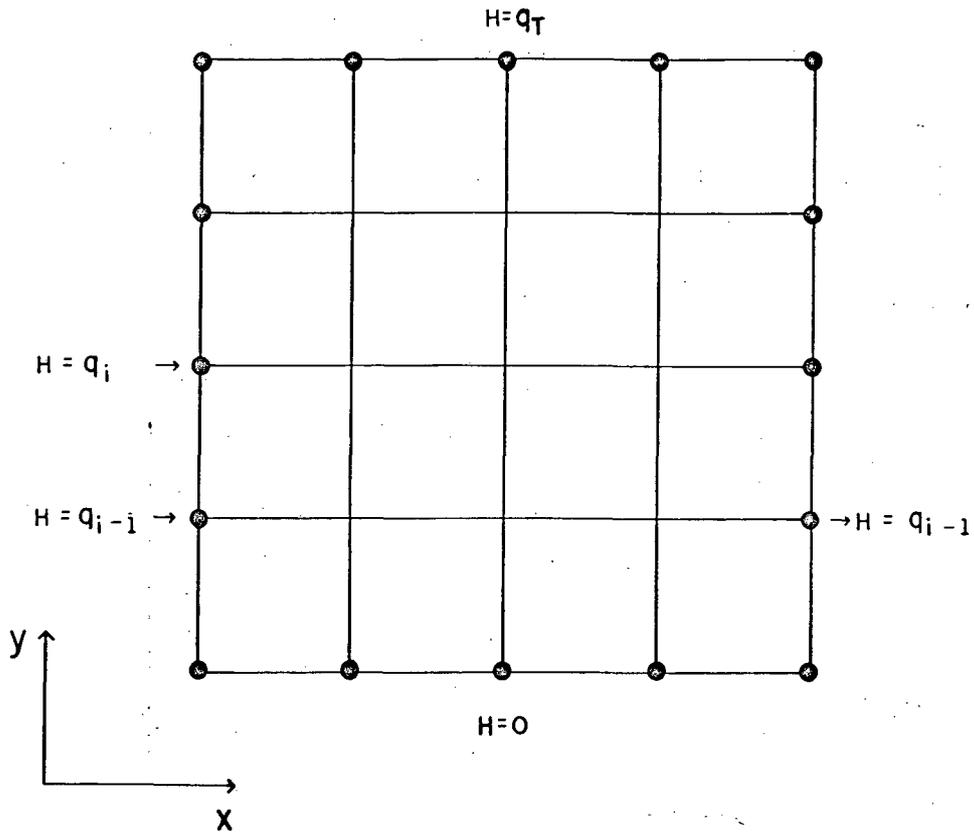


Fig. A.2 - Condições de contorno no plano transformado.