

Bruno Brogni Uggioni

**SOBRE PRODUTOS CRUZADOS E EQUIVALÊNCIA DE  
MORITA**

Dissertação submetida ao Programa  
de Pós-Graduação em Matemática Pura  
e Aplicada para a obtenção do Grau  
de Mestre em Matemática.  
Orientador: Prof. Dr. Alcides Buss

Florianópolis

2013

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Uggioni, Bruno Brogni

Sobre produtos cruzados e equivalência de Morita  
[dissertação] / Bruno Brogni Uggioni ; orientador, Alcides  
Buss - Florianópolis, SC, 2013.  
104 p. ; 21cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.  
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Inclui referências

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. produtos cruzados. 3.  
equivalência de Morita. 4. bímódulos de imprimitividade. I.  
Buss, Alcides. II. Universidade Federal de Santa Catarina.  
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.  
III. Título.

Bruno Brogni Uggioni

**SOBRE PRODUTOS CRUZADOS E EQUIVALÊNCIA DE  
MORITA**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Matemática”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Florianópolis, 18 de fevereiro 2013.

---

Prof. Chefe, Dr. Daniel Gonçalves  
Coordenador do Curso

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Ruy Exel  
Presidente

---

Prof. Daniel Gonçalves



---

Prof. Danilo Royer

---

Prof. Vladimir Pestov



## RESUMO

Nesse trabalho estudamos a teoria de equivalência de Morita-Rieffel para álgebra de operadores por uma perspectiva geral e a aplicamos para entender produtos cruzados para ações de grupos compactos em  $C^*$ -álgebras. Nós apresentamos quatro formas diferentes para especificar um contexto de equivalência de Morita entre  $C^*$ -álgebras e consideramos alguns exemplos conhecidos para ilustrá-la. A  $C^*$ -álgebra produto cruzado  $A \rtimes_{\alpha} G$  proveniente de um sistema dinâmico  $(A, G, \alpha)$  é definida como o completamento de  $C_c(G, A)$  com respeito a uma certa norma universal naturalmente associada ao sistema dinâmico. Mostramos que as representações do produto cruzado estão em correspondência biunívoca com as representações covariantes do sistema. A teoria de representações da  $C^*$ -álgebra produto cruzado caracteriza-a, à menos de isomorfismo, mas é geralmente difícil de calculá-la explicitamente. Nosso objetivo principal, nessa direção, é apresentar alguns teoremas de equivalência de Morita que nos permitirão entender produtos cruzados a menos de equivalência de Morita em casos especiais. Em particular, mostramos que o produto cruzado  $A \rtimes_{\alpha} G$  em que  $\alpha$  é ação de um grupo compacto  $G$  sobre uma  $C^*$ -álgebra  $A$  é Morita equivalente à álgebra de ponto fixo  $A^G$  se a ação for saturada. Aplicamos, após, esse contexto de equivalência de Morita para provar o Teorema Simétrico de Imprimitividade para ações saturadas de grupos compactos que relaciona, via uma equivalência de Morita, os produtos cruzados para ações comutativas de dois grupos compactos.

**Palavras-chave:** Produtos cruzados; sistemas dinâmicos; Morita, imprimitividade.





## ABSTRACT

In this work we study operator algebra Morita-Rieffel equivalence from a general perspective and apply it to the understanding of crossed products for actions of compact groups on  $C^*$ -algebras. We present four different forms to specify a Morita equivalence context between  $C^*$ -algebras and consider some standard examples to illustrate it. The crossed product  $C^*$ -algebra  $A \rtimes_{\alpha} G$  attached to a dynamical system  $(A, G, \alpha)$  is defined as the completion of  $C_c(G, A)$  with respect to a certain universal norm naturally associated to the dynamical system. The representations of the crossed product are shown to be in bijective correspondence with covariant representations of the system. The representation theory of the crossed product  $C^*$ -algebra characterizes it up to isomorphism, but it is generally difficult to compute it explicitly. Our main goal in this direction is to present some Morita equivalence theorems that enable us to understand crossed products up to Morita equivalence in certain special cases. In particular we show that the crossed product  $A \rtimes_{\alpha} G$  for an action of a compact group  $G$  on a  $C^*$ -algebra  $A$  is Morita equivalent to the fixed point algebra  $A^G$  provided the action is saturated. We then apply this Morita equivalence context to prove the Symmetric Imprimitivity Theorem for saturated compact group actions which relates, via a Morita equivalence, the crossed products of commuting actions by two compact groups.

**Keywords:** Crossed products; dynamical system; Morita; imprimitivity.



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	15
<b>2 MÓDULOS DE HILBERT</b> .....	17
<b>3 EQUIVALÊNCIA DE MORITA</b> .....	23
<b>4 SISTEMAS DINÂMICOS E PRODUTOS CRUZADOS</b>	43
4.1 PRELIMINARES - INTEGRAÇÃO EM GRUPOS .....	43
4.2 GRUPOS DE TRANSFORMAÇÃO .....	44
4.3 $C^*$ -SISTEMAS DINÂMICOS .....	46
<b>5 EQUIVALÊNCIA DE MORITA PARA PRODUTOS CRUZADOS</b> .....	67
5.1 AÇÕES SATURADAS .....	67
5.2 TEOREMA SIMÉTRICO DE IMPRIMITIVIDADE .....	73
5.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	100
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	103



## 1 INTRODUÇÃO

A teoria de produtos cruzados está fortemente desenvolvida em literatura variada e foi impulsionada principalmente devido a trabalhos de Rieffel, em meados de 1980, quando adaptou a noção de equivalência de Morita (RAEBURN; WILLIAMS, 1998) para o contexto de  $C^*$ -álgebras, conforme se vê em artigos como (RIEFFEL, 1982). Conforme está escrito nas primeiras páginas de (WILLIAMS, 2007) a teoria de produtos cruzados é fonte de exemplos interessantes de  $C^*$ -álgebras. À grosso modo, dado  $(A, G, \alpha)$  um  $C^*$ -sistema dinâmico com  $G$  grupo localmente compacto, constrói-se a  $C^*$ -álgebra produto cruzado  $A \rtimes_{\alpha} G$ , cujas  $*$ -representações estão em correspondência biunívoca com as representações covariantes do sistema dinâmico, conforme veremos mais a frente. No caso em que  $A$  é comutativa (portanto isomorfa a  $C_0(X)$  para algum espaço Hausdorff localmente compacto  $X$ ) os sistemas dinâmicos são aqueles obtidos a partir de uma ação de  $G$  em  $X$ . Mais ainda, ações de  $G$  em  $X$  correspondem bijetivamente às ações de  $G$  em  $A$ .

Há dois objetivos norteadores desse presente trabalho. Primeiro, o de preencher os detalhes do Teorema 1 do artigo (CURTO; MUHLY; WILLIAMS, 1984) (que diz que se  ${}_A E_B$  é bimódulo de imprimitividade e  $G$  é um grupo compacto agindo em  $A, B$  e  $E$ , então  $A \rtimes G$  e  $B \rtimes G$  são Morita Equivalentes) bem como demonstrar uma variação do Teorema 2, situado no mesmo artigo, também conhecido como Teorema Simétrico de Imprimitividade, o qual afirma que  $C_0(P/K) \rtimes H$ ,  $C_0(P/H) \rtimes K$  e  $C_0(P) \rtimes H \times K$  são Morita equivalentes, em que  $H$  e  $K$  são grupos localmente compactos agindo sobre o espaço localmente compacto  $P$  de forma livre e própria (e portando canonicamente em  $C_0(P)$ ) e  $P/H, P/K$  são espaços orbitais. Em outras palavras, este teorema é peça fundamental para o contexto de ações de grupos localmente compactos sobre  $C^*$ -álgebras abelianas. Nós, porém, optamos por provar esse mesmo resultado considerando grupos compactos apenas, e  $C^*$ -álgebras arbitrárias (não necessariamente comutativas). Simplificamos por um lado, trabalhando apenas com grupos compactos, complexificamos por outro, permitindo álgebras não-comutativas. Alcançamos o primeiro objetivo no capítulo 5, com o Teorema Simétrico de Imprimitividade para o contexto de ações de grupos compactos sobre  $C^*$ -álgebras, onde mostramos que se dois grupos compactos agem de forma comutativa e saturada numa  $C^*$ -álgebra então cada grupo age na álgebra de ponto fixo relativa ao outro grupo e os produtos cruzados (provenientes dessas novas ações) são Morita equivalentes. Ainda neste

capítulo, provamos uma variação simplificada do Teorema de Stone-von Neuman (mostrando que o produto cruzado  $C(G) \rtimes G$  é isomorfo a álgebra dos operadores compactos  $K(L^2(G))$  quando  $G$  é grupo compacto e a ação considerada é a usual proveniente do grupo de transformação  $(G, X)$ , para  $G = X$ ) e mostramos que o produto cruzado  $A \rtimes_\alpha G$  em que  $\alpha$  é ação do grupo compacto  $G$  na  $C^*$ -álgebra  $A$  é Morita equivalente a álgebra de ponto fixo  $A^G$  se a ação for saturada. Na verdade, esse último resultado foi peça fundamental para demonstrarmos o Teorema Simétrico de Imprimitividade.

O outro objetivo é elencar outras três maneiras de se definir equivalência de Morita além da usual, que diz que duas  $C^*$ -álgebras são Morita equivalentes se existir  ${}_A E_B$  um  $A$ - $B$  bimódulo de imprimitividade. No capítulo 3 também descrevemos algumas das principais propriedades que goza um bimódulo de imprimitividade, associando a ele uma  $C^*$ -álgebra, chamada a álgebra de ligação do bimódulo, que contém todas as informações relevantes sobre ele. Em particular, a álgebra de ligação determina a equivalência de Morita inerente ao bimódulo. Ao longo do mesmo capítulo, enunciamos e demonstramos resultados concernentes a produto tensorial interno de módulos de Hilbert e pré-bimódulos de imprimitividade a fim de estudarmos a equivalência de Morita e as variadas formas de se caracterizá-la.

O quarto capítulo é reservado para tópicos iniciais de integração em grupos (principalmente localmente compactos), sistemas dinâmicos e produtos cruzados. Não objetivamos ser detalhistas aqui. Nosso intuito é prover ao leitor algumas propriedades e ferramentas que utilizaremos para desenvolver teoremas e exemplos emocionantes. Apesar de não exibirmos todos os detalhes, chegamos a mostrar que o conjunto da representações covariantes não-degeneradas de um sistema dinâmico está em correspondência biunívoca com as  $*$ -representações da álgebra produto cruzado a ele associada.

Já no segundo capítulo, abordamos a teoria de módulos de Hilbert, apresentando sua definição, a álgebra dos operadores compactos de módulos de Hilbert e a álgebra dos operadores adjuntáveis de módulos de Hilbert.

## 2 MÓDULOS DE HILBERT

Neste capítulo definiremos o que vem a ser módulo de Hilbert, álgebra dos operadores adjuntáveis em módulos de Hilbert e álgebra dos operadores compactos em módulos de Hilbert, bem como elencaremos propriedades e exemplos notáveis a respeito da teoria.

**Definição 2.1** *Sejam  $E$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{C}$  dos complexos e  $A$  uma  $C^*$ -álgebra.  $E$  é dito um  $A$ -módulo (à direita) (e denotado por  $E_A$ ), se existir uma aplicação  $E \times A \rightarrow E$ ,  $(x, a) \mapsto xa$ , tal que, para todos  $x, y, z \in E$ ,  $a, b \in A$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ , satisfaz:*

1.  $(xa)b = x(ab)$ ;
2.  $\lambda(xa) = (\lambda x)a = x(\lambda a)$ ;
3.  $x(a + b) = xa + xb$ ;
4.  $(x + y)a = xa + xb$ .

**Definição 2.2** *Seja  $E_A$  um  $A$ -módulo à direita.  $E$  é um  $A$ -módulo com produto interno se existir uma aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow A$  (denominada de produto interno) que, para todos  $x, y \in E$ ,  $a \in A$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  satisfaz:*

- a)  $\langle x, \lambda y + z \rangle_A = \lambda \langle x, y \rangle_A + \langle x, z \rangle_A$ ;
- b)  $\langle x, ya \rangle_A = \langle x, y \rangle_A a$ ;
- c)  $\langle x, y \rangle_A^* = \langle y, x \rangle_A$ ;
- d)  $\langle x, x \rangle_A \geq 0$ ;
- e)  $\langle x, x \rangle_A = 0 \Rightarrow x = 0$ .

**Observação 2.3** *Note que as condições a) e c) dizem que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$  é conjugado linear na primeira variável. De fato:*

$$\begin{aligned} \langle \lambda x + ay, z \rangle_A &= \langle z, \lambda x + ay \rangle_A^* = (\lambda \langle z, x \rangle_A + \langle z, ay \rangle_A)^* \\ &= \bar{\lambda} \langle x, z \rangle_A + a^* \langle y, z \rangle_A. \end{aligned}$$

Mais ainda, como  $\langle x, y \rangle_A \langle z, w \rangle_A = \langle x, y \langle z, w \rangle_A \rangle_A$ , segue que

$$\langle E, E \rangle_A := \text{span}\{\langle x, y \rangle_A : x, y \in E\}$$

é um ideal (bilateral) de  $A$ . Todo  $A$ -módulo  $E$  que satisfaz  $\overline{\langle E, E \rangle_A} = A$  é dito cheio.

**Observação 2.4** Mais geralmente, se  $A_0 \subset A$  é uma  $*$ -subálgebra da  $C^*$ -álgebra  $A$ ,  $E_0$  um  $A_0$ -módulo com uma aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E_0 \times E_0 \rightarrow A_0$  que satisfaz as condições de a) a d) da definição anterior (em que  $\langle x, x \rangle \geq 0$  como elemento de  $A$ ) então  $E_0$  é dito um  $A_0$  pré-módulo com pré-produto interno.

**Exemplo 2.5** Toda  $C^*$ -álgebra  $A$  é um  $A$ -módulo à direita com produto interno (com multiplicação de  $A$ ) e produto interno dado por  $\langle a, b \rangle_A = a^*b$ .

Que  $A$  é  $A$ -módulo à direita, isso é trivial. Verifiquemos as propriedades do produto interno:

- (a)  $\langle a, \lambda b + c \rangle_A = a^*(\lambda b + c) = \lambda a^*b + a^*c = \lambda \langle a, b \rangle_A + \langle a, c \rangle_A$ ;
- (b)  $\langle a, bc \rangle_A = a^*(bc) = (a^*b)c = \langle a, b \rangle_A c$ ;
- (c)  $\langle a, b \rangle_A^* = (a^*b)^* = b^*a = \langle b, a \rangle_A$ ;
- (d)  $\langle a, a \rangle_A = a^*a \geq 0$ ;
- (e)  $\langle a, a \rangle_A = a^*a = 0 \Rightarrow 0 = \|a^*a\| = \|a\|^2 \Rightarrow a = 0$ .

A seguir apresentaremos uma proposição e um corolário que são úteis para se verificar a continuidade de aplicações entre módulos de Hilbert e a equivalência de Morita em determinados contextos. Para mais detalhes, ver primeiro capítulo de (LANCE, 1995).

**Proposição 2.6** Seja  $E$  um  $A_0$  pré-módulo conforme a Observação 2.4. Se  $x, y \in E$ , então:

$$\langle x, y \rangle_{A_0}^* \langle x, y \rangle_{A_0} \leq \|\langle x, x \rangle_{A_0}\| \langle y, y \rangle_{A_0}.$$

**Corolário 2.7** Se  $E$  é  $A$ -módulo com produto interno, então

$$\|x\|_A := \|\langle x, x \rangle_A\|^{1/2}$$

define uma norma em  $E$  tal que  $\|xa\|_A \leq \|x\|_A \|a\|$  e  $\|\langle x, y \rangle_A\| \leq \|x\|_A \|y\|_A$ . Se  $E$  for completo em relação a essa norma,  $E$  será dito  $A$ -módulo de Hilbert. Mais ainda, o espaço

$$E\langle E, E \rangle_A := \text{span}\{x\langle y, z \rangle_A : x, y, z \in E\}$$

é  $\|\cdot\|_A$ -denso em  $E$ .



Pelo Exemplo 2.5, temos que a norma proveniente daquele produto interno coincide com a norma inicial da  $C^*$ -álgebra  $A$ .

Também segue diretamente desse corolário, para  $y \in E$ , a seguinte igualdade:

$$\|y\| = \sup_{\|z\| \leq 1} \{ \|\langle y, z \rangle_A\| \}, \quad (2.1)$$

pois  $\|\langle y, z \rangle_A\| \leq \|y\|_A \|z\|_A \leq \|y\|_A$  para todo  $z \in E$  tal que  $\|z\|_A \leq 1$ , mas (supondo  $y \neq 0$ ), podemos escolher

$$z = \frac{y}{\|\langle y, y \rangle_A\|^{\frac{1}{2}}} = \frac{y}{\|y\|}$$

e temos a igualdade.

Em algumas situações precisamos da noção de soma direta de módulos de Hilbert. Dada  $\{E_i\}$  coleção finita de  $A$ -módulos de Hilbert à direita, obtemos o espaço vetorial  $\oplus E_i := \{(x_i), x_i \in E_i\}$ , com operações de soma e multiplicação por escalar definidas pontualmente. Podemos, ainda, enriquecer  $\oplus E_i$  com multiplicação por elementos de  $A$  e produto interno com valores em  $A$ , respectivamente, por meio de:

$$(x_i)a = (x_i a),$$

$$\langle (x_i), (y_i) \rangle_A = \sum_i \langle x_i, y_i \rangle_A. \quad (2.2)$$

Além disso,  $\oplus E_i$  torna-se um  $A$ -módulo de Hilbert com essas operações. De fato, tomando  $(x_i^n)$  sequência de Cauchy em  $\oplus E_i$ , temos, na verdade, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , uma sequência de Cauchy  $x_i^n$  em  $E_i$ , pois vale:

$$\begin{aligned} \|x_i^n - x_i^m\|^2 &= \|\langle x_i^n - x_i^m, x_i^n - x_i^m \rangle\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|\langle x_i^n - x_i^m, x_i^n - x_i^m \rangle\| \\ &= \|(x_i^n) - (x_i^m)\|^2. \end{aligned}$$

Assim,  $x_i^n \rightarrow x_i \in E_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Agora, não é difícil ver que  $(x_i^n) \rightarrow (x_i)$ .

Tendo adentrado em diversas especificações dos módulos de Hilbert, passemos a entender as principais aplicações nesses espaços.

**Definição 2.8** *Sejam  $E$  e  $F$   $A$ -módulos de Hilbert à direita. Definimos o conjunto dos operadores  $t : E \rightarrow F$  adjuntáveis  $L(E, F)$  como sendo (para todos  $x \in E, y \in F$ );*

$$L(E, F) = \{t : E \rightarrow F \text{ tal que } \exists t^* F \rightarrow E, \langle tx, y \rangle_A = \langle x, t^*y \rangle_A\}$$

É possível mostrar que no caso em que  $E = F$ ,  $L(E) := L(E, E)$  é uma  $C^*$ -álgebra, como está feito no primeiro capítulo de (LANCE, 1995).

**Definição 2.9** *Sejam  $E, F$   $A$ -módulos de Hilbert à direita. Definimos o conjunto dos operadores compactos  $K(E, F) \subset L(E, F)$  como sendo:*

$$K(E, F) = \overline{\text{span}}\{\theta_{x,y} : E \rightarrow F / \theta_{x,y}(z) = x\langle y, z \rangle_A, x \in F, y, z \in E\}$$

**Proposição 2.10** *Sejam  $T \in L(E)$  um operador e  $E$  um  $B$ -módulo de Hilbert à direita. Então  $\langle Tx, Tx \rangle_B \leq \|T\|^2 \langle x, x \rangle_B$ .*

**Demonstração:** Como  $\|T\|^2 - TT^* \geq 0$ , segue da teoria de  $C^*$ -álgebras que  $\|T\|^2 - TT^* = R^*R$ , para algum  $R \in L(E)$ . Assim:

$$\begin{aligned} \|T\|^2 \langle x, x \rangle_B - \langle Tx, Tx \rangle_B &= \|T\|^2 \langle x, x \rangle_B - \langle x, (\|T\|^2 - R^*R)x \rangle_B \\ &= \langle Rx, Rx \rangle_B \geq 0. \square \end{aligned}$$

**Observação 2.11** *Essa proposição também vale para módulos de Hilbert à esquerda, com as devidas alterações.*

**Proposição 2.12** *Sejam  $K(E, F)$  e  $K(G, F)$  conforme definição anterior, com  $E, F$  e  $G$   $A$ -módulos de Hilbert à direita. Tome  $x \in E$ ,  $y, u \in F$ ,  $v \in G$ ,  $t \in L(E, F)$ ,  $s \in L(F, G)$ . Então valem as seguintes igualdades:*

$$\begin{aligned} \theta_{x,y}\theta_{u,v} &= \theta_{x\langle y,u \rangle, v} \\ t\theta_{x,y} &= \theta_{tx,y} \\ \theta_{x,y}s &= \theta_{x, s^*y} \end{aligned}$$

Em particular,  $K(E)$  é um  $*$ -ideal de  $L(E)$ .

**Demonstração:** Em relação a primeira igualdade, para  $z \in G$ , temos:

$$\theta_{x,y}\theta_{u,v}(z) = \theta_{x,y}(u\langle v, z \rangle) = x\langle y, u\langle v, z \rangle \rangle = x\langle y, u \rangle \langle v, z \rangle = \theta_{x\langle y,u \rangle, v}(z).$$

Em relação a segunda, obtemos para  $w \in F$ :

$$t\theta_{x,y}(w) = t(x\langle y, w \rangle) = t(x)\langle y, w \rangle = \theta_{t(x),y}(w)$$

A terceira igualdade segue passos análogos aos da demonstração da segunda. Agora, assumindo  $F = G = E$ , para provarmos que  $K(E)$  é \*-ideal de  $L(E)$ , basta notarmos que  $(\theta_{x,y})^* = \theta_{y,x}$ , pois a partir da Definição 2.9,  $K(E)$  é fechado em relação a soma de seus elementos e por meio das igualdades acima, é fechado em relação a multiplicação por elementos de  $L(E)$ . Mas, tomando  $z, w \in E$ , obtemos a simples constatação:

$$\langle \theta_{x,y}(z), w \rangle = \langle x\langle y, z \rangle, w \rangle = \langle z, y \rangle \langle x, w \rangle = \langle z, y\langle x, w \rangle \rangle = \langle z, \theta_{y,x}(w) \rangle$$

Assim,  $K(E)$  é de fato um \*-ideal de  $L(E)$ .



### 3 EQUIVALÊNCIA DE MORITA

Nesse capítulo apresentaremos, pelo menos, quatro formas de se definir a equivalência de Morita no contexto de  $C^*$ -álgebras. Para isso, precisaremos conceituar bimódulos de imprimitividade, álgebra de ligação e produto tensorial interno entre módulos de Hilbert. No final do capítulo explicitaremos algumas  $C^*$ -álgebras Morita equivalentes. Para mais detalhes, ver (LANCE, 1995) e (RAEBURN; WILLIAMS, 1998).

**Definição 3.1** *Sejam  $E$  espaço vetorial complexo e  $A, B$   $C^*$ -álgebras.  $E$  é dito um  $A$ - $B$ -bimódulo de imprimitividade (e denotado por  ${}_A E_B$ ) se  ${}_A E$  e  $E_B$  forem módulos de Hilbert tais que*

1.  ${}_A E$  e  $E_B$  são cheios;
2. (Compatibilidade)  ${}_A \langle x, y \rangle z = x \langle y, z \rangle_B, \forall x, y, z \in E$

**Exemplo 3.2** *Toda  $C^*$ -álgebra  $A$  é um  $A - A$  bimódulo de imprimitividade com multiplicação (à direita e à esquerda) herdada da estrutura algébrica de  $A$  e produtos internos definidos por:*

$${}_A \langle a, b \rangle := ab^*$$

$$\langle a, b \rangle_A := a^*b$$

**Teorema 3.3** *Todo  ${}_A E_B$  bimódulo de imprimitividade satisfaz ( $\forall x, y \in E, a \in A$ ):*

- a)  $\langle ax, y \rangle_B = \langle x, a^*y \rangle_B$  e  $\langle xb, y \rangle_B = \langle x, yb^* \rangle_B$ ;
- b)  $(ax)b = a(xb)$ ;
- c) Existe um isomorfismo  $\varphi : A \rightarrow K_B(E)$  tal que  $\varphi(a)x = ax$ ;
- d)  $\langle ax, ax \rangle_B \leq \|a\|^2 \langle x, x \rangle_B$  e  ${}_A \langle xb, xb \rangle \leq \|b\|_A^2 \langle x, x \rangle$ ;
- e)  $\|x\|_A = \|x\|_B$ .

**Demonstração:**

- a) Note primeiramente que  $z \langle ax, y \rangle_B = z \langle x, a^*y \rangle_B$ , pois

$$z \langle ax, y \rangle_B = {}_A \langle z, ax \rangle y = {}_A \langle z, x \rangle a^*y = z \langle x, a^*y \rangle_B,$$

devido 2. da Definição 3.1. Assim, para todos  $x, y, z, w \in E$  e  $a \in A$ , temos:

$$\langle w, z \rangle_B \langle ax, y \rangle_B = \langle w, z \rangle_B \langle x, a^*y \rangle_B.$$

Agora, pela condição 1 da Definição 3.1, segue que:

$$b \langle ax, y \rangle_B = b \langle x, a^*y \rangle_B$$

para todo  $b \in B$ . Como todas as  $C^*$ -álgebras têm unidade aproximada, segue que  $\langle ax, y \rangle_B = \langle x, a^*y \rangle_B$ . As contas para  $A$  são análogas.

- b) Fixe  $y \in A$ . Tome  $a \in A$  e  $b \in B$ . Pelo que acabamos de fazer, temos:

$${}_A \langle (ax)b, y \rangle = {}_A \langle ax, b^*y \rangle = a {}_A \langle xb, y \rangle = {}_A \langle a(xb), y \rangle.$$

Como  $y$  é genérico, segue que  $(ax)b = a(xb)$ .

- c) Para fins dessa demonstração, estamos interpretando  $E$  como um  $B$ -módulo de Hilbert à direita. Para cada  $a \in A$ , defina  $\varphi(a) : E \rightarrow E$  por  $x \mapsto ax$ . Pelo item a) e Definição 2.8, temos que  $\varphi(a)$  é operador linear adjuntável, cujo adjunto é  $\varphi(a^*)$ . Mais ainda, a seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} \varphi : A &\rightarrow L(E) \\ a &\mapsto \varphi(a) \end{aligned}$$

define um \*-homomorfismo injetivo entre  $C^*$ -álgebras tal que  $\varphi(A) = K(E)$ . A verificação de que  $\varphi$  define um \*-homomorfismo é imediata. Mostremos a injetividade de  $\varphi$  e que  $\varphi(A) = K(E)$ .

Injetividade:

$$\varphi(a) = 0 \Rightarrow a({}_A \langle x, y \rangle) = 0, \forall x, y \in E \Rightarrow aA = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Agora, tome  $x, y \in E$ . Assim,

$$\varphi({}_A \langle x, y \rangle)(z) = {}_A \langle x, y \rangle z = x \langle y, z \rangle_B = \theta_{x,y}(z).$$

Portanto, pela Definição 2.9 e pelo fato de todo \*-homomorfismo entre  $C^*$ -álgebras ter como imagem um subespaço vetorial fechado, temos  $K(E) \subset \varphi(A)$ .

Por outro lado, fixe  $a \in A$ . Como  $E$  é  $A$ -módulo cheio, podemos escrever  $a$  como um limite de sequência em  ${}_A\langle E, E \rangle$ , digamos  $a = \lim_j \sum_{i=1}^{n_j} ({}_A\langle x_{ij}, y_{ij} \rangle)$ . Assim:

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \varphi \left( \lim_j \sum_{i=1}^{n_j} ({}_A\langle x_{ij}, y_{ij} \rangle) \right) = \lim_j \sum_{i=1}^{n_j} \varphi({}_A\langle x_{ij}, y_{ij} \rangle) \\ &= \lim_j \sum_{i=1}^{n_j} \theta_{x_{ij}, y_{ij}} \in K(E). \end{aligned}$$

Portanto,  $\varphi(A) = K(E)$ .

- d) Por meio do isomorfismo acima, podemos ver  $a \in K_A(E)$ . Assim, pela Proposição 2.10, é imediato que  $\langle ax, ax \rangle_B \leq \|a\|^2 \langle x, x \rangle_B$ .
- e) Fixado  $x \in E$ , temos

$$\begin{aligned} \|x\|_A^4 &= \|{}_A\langle x, x \rangle_A \langle x, x \rangle\| = \|{}_A\langle {}_A\langle x, x \rangle x, x \rangle\| \\ &= \|{}_A\langle x (\langle x, x \rangle_B)^{\frac{1}{2}}, x (\langle x, x \rangle_B)^{\frac{1}{2}} \rangle\| \\ &\leq \|x\|_B^2 \|x\|_A^2. \end{aligned}$$

Portanto  $\|x\|_A \leq \|x\|_B$ . Analogamente,  $\|x\|_B \leq \|x\|_A$ . E assim,  $\|x\|_A = \|x\|_B$ .

**Observação 3.4** *Mais geralmente, basta que  $E$  seja  $A - B$  bimódulo com produto interno satisfazendo o item d) para que satisfaça também o item e). A verificação para isso é inteiramente idêntica àquela feita para o caso de  ${}_A E_B$  ser bimódulo de imprimitividade.*

**Observação 3.5** *Todo  $B$ -módulo de Hilbert cheio à direita  $E_B$  é um  $K(E)$ - $B$  bimódulo de imprimitividade, com produto  $t.x = t(x)$  e produto interno  ${}_{K(B)}\langle x, y \rangle = \theta_{x,y}$ , para todos  $x, y \in E$  e  $t \in K(E)$ .*

De fato, temos:

- a)  $\theta_{\lambda x + y, z}(w) = (\lambda x + y)\langle z, w \rangle = \lambda \theta_{x,z}(w) + \theta_{y,z}(w)$
- b)  $\theta_{\theta_{w,z}(x), y}(u) = \theta_{w,z}(x)\langle y, u \rangle = w\langle z, x \rangle\langle y, u \rangle = \theta_{w,z}\theta_{x,y}(u)$
- c)  $(\theta_{x,y})^* = \theta_{y,x}$  (Proposição 2.12);
- d) Para verificar essa propriedade, vamos usar a seguinte caracterização, que é o Lema 2.28 de (RAEBURN; WILLIAMS, 1998):

$$T \in L(E), T \geq 0 \Leftrightarrow \langle Tx, x \rangle_B \geq 0, \forall x \in E.$$

Esse lema é válido também para módulos à esquerda.

Voltando para a demonstração, fixe  $x \in E$ . Então:

$$\langle \theta_{x,x}(y), y \rangle = \langle x \langle x, y \rangle, y \rangle = \langle x, y \rangle^* \langle x, y \rangle \geq 0,$$

para todo  $y \in E$ .

e)  $\theta_{x,x} = 0 \Rightarrow x \langle x, y \rangle = 0, \forall y$ . Segue então que:

$$\|\langle x, x \rangle\|^2 = \|\langle x \langle x, x \rangle, x \rangle\| = 0.$$

Portanto,  $x = 0$ .

É imediato que  ${}_{K_B(E)}E$  é cheio. A condição b) da Definição 3.1 segue assim:

$${}_{K_B(E)}\langle x, y \rangle(z) = \theta_{x,y}(z) = x \langle y, z \rangle_B.$$

**Observação 3.6** Se  ${}_A E_B$  é  $A$ - $B$  bimódulo de imprimitividade e se  $A \cong A'$  e  $B \cong B'$  (isomorfismos entre  $C^*$ -álgebras) então  ${}_{A'} E_{B'}$  também é  $A'$ - $B'$  bimódulo de imprimitividade com respeito à estrutura induzida pelos isomorfismos, ou seja, se  $\varphi_A : A \rightarrow A'$  e  $\varphi_B : B \rightarrow B'$  forem os isomorfismos, as operações ficam definidas por:

$$\begin{aligned} a'x &= \varphi_A^{-1}(a')x, \\ xb' &= x\varphi_B^{-1}(b'), \\ A'\langle x, y \rangle &= \varphi_A(A\langle x, y \rangle), \\ \langle x, y \rangle_{B'} &= \varphi_B(\langle x, y \rangle_B). \end{aligned}$$

**Proposição 3.7** Se  ${}_A E_B$  é  $A$ - $B$  bimódulo de imprimitividade, podemos definir o seguinte  $B$ - $A$  bimódulo de imprimitividade:

$${}_B \widetilde{E}_A := \{\widetilde{x}, x \in E\},$$

cujas operações e produto interno são definidos a seguir, para todos  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $x, y \in E$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ :

$$\widetilde{x} + \widetilde{y} = \widetilde{x + y}; \quad \lambda \widetilde{x} = \widetilde{\lambda x}; \quad \widetilde{xa} = \widetilde{a^* x}; \quad b \widetilde{x} = \widetilde{xb^*};$$

$$\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \rangle_A = {}_A \langle x, y \rangle; \quad {}_B \langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \rangle = \langle x, y \rangle_B$$

**Demonstração:**

Vamos mostrar que  $\widetilde{E}$  é  $B$ -módulo à esquerda. De fato:

1.

$${}_B \langle \lambda \widetilde{x} + \widetilde{y}, \widetilde{z} \rangle = {}_B \langle \widetilde{\lambda x + y}, \widetilde{z} \rangle = \langle z, \lambda x + y \rangle_B$$



$$= \lambda \langle z, x \rangle_B + \langle z, y \rangle_B = \lambda ({}_B \langle \tilde{x}, \tilde{z} \rangle) + ({}_B \langle \tilde{y}, \tilde{z} \rangle),$$

$$2. \quad {}_B \langle b\tilde{x}, \tilde{y} \rangle = {}_B \langle \widetilde{xb^*}, \tilde{y} \rangle = \langle xb^*, y \rangle_B = b \langle x, y \rangle_B = b ({}_B \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle),$$

$$3. \quad ({}_B \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle)^* = \langle x, y \rangle_B^* = \langle y, x \rangle_B = {}_B \langle \tilde{y}, \tilde{x} \rangle,$$

$$4. \quad {}_B \langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle_B \geq 0,$$

$$5. \quad {}_B \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle_B = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{0}.$$

A verificação para  $\widetilde{E}_A$  segue o mesmo padrão. Não é difícil, também, provar que  ${}_B \widetilde{E}$  e  $\widetilde{E}_A$  são cheios. Falta mostrar a condição 2 da Definição 3.1. Esta se verifica como segue:

$${}_B \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle \tilde{z} = z ({}_B \langle \tilde{y}, \tilde{x} \rangle) = z \langle y, x \rangle_B = ({}_A \langle z, y \rangle) x = (\langle \tilde{z}, \tilde{y} \rangle_A) x = \tilde{x} \langle \tilde{y}, \tilde{z} \rangle_A.$$

□

Apresentaremos agora uma nova  $C^*$ -álgebra, denominada álgebra de ligação, que dentre outras utilidades, auxilia na verificação de possíveis equivalências de Morita, como veremos adiante. Mais detalhes poderão ser encontrados em (ECHTERHOFF, 2006) e (RAEBURN; WILLIAMS, 1998).

**Definição 3.8** *Seja  ${}_A E_B$  um  $A$ - $B$  bimódulo de imprimitividade. A álgebra de ligação de  $E$  e sua estrutura algébrica são dadas por:*

$$\mathcal{L}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} / a \in A, b \in B, x, y \in E \right\} = \begin{pmatrix} A & E \\ \widetilde{E} & B \end{pmatrix};$$

1.

$$\begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & x' \\ \tilde{y}' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & x+x' \\ \widetilde{y+y'} & b+b' \end{pmatrix},$$

2.

$$\begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & x' \\ \tilde{y}' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + {}_A \langle x, y' \rangle & ax' + xb' \\ \widetilde{y'a' + b'y'} & \langle y, x' \rangle_B + bb' \end{pmatrix}.$$

**Teorema 3.9**  $\mathcal{L}(E)$  é uma  $C^*$  álgebra com involução e norma dadas, respectivamente, por:

$$\begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a^* & y \\ \tilde{x} & b^* \end{pmatrix} \quad e$$

$$\left\| \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \right\| = \sup_{\|(z,x)\| \leq 1} \left\| \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sup_{\|(z,x)\| \leq 1} \left\| \begin{pmatrix} az + xc \\ \langle y, z \rangle_B + bc \end{pmatrix} \right\|$$

**Observação 3.10** *Note que nas igualdades acima,*

$$(az + xc, \langle y, z \rangle_B + bc)$$

*é um elemento de  $E \oplus B$ . Assim, sua norma será sempre calculada tendo em vista a equação 2.2.*

**Demonstração:** Não é difícil ver que a soma está bem definida. Haveria certa dificuldade, talvez, em se mostrar que a multiplicação é associativa e distribui na soma. Mostraremos apenas a propriedade distributiva, pois a associatividade decorre de cálculos similares:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a'' & x'' \\ \tilde{y}'' & b'' \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & x' \\ \tilde{y}' & b' \end{pmatrix} \right) = \\ & = \begin{pmatrix} a''(a + a') + {}_A\langle x'', y + y' \rangle & a''(x + x') + x''(b + b') \\ \tilde{y}''(a + a') + b''\tilde{y} + \tilde{y}' & \langle y'', x + x' \rangle_B + b''(b + b') \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} a''a + {}_A\langle x'', y \rangle & a''x + x''b \\ \tilde{y}''a + b''\tilde{y} & \langle y'', x \rangle_B + b''(b) \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} a''a' + {}_A\langle x'', y' \rangle & a''x' + x''b' \\ \tilde{y}''a' + b''\tilde{y}' & \langle y'', x' \rangle_B + b''b' \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} a'' & x'' \\ \tilde{y}'' & b'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' & x'' \\ \tilde{y}'' & b'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & x' \\ \tilde{y}' & b' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para provarmos que a norma está bem definida, que a involução é invariante pela norma e que vale o  $C^*$ -axioma, mostraremos que existe um  $*$ -homomorfismo natural  $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow L(E \oplus B)$  isométrico, por meio do teorema a seguir.

**Teorema 3.11**  $\mathcal{L}(E)$  é  $C^*$ -subálgebra de  $L(E \oplus B)$  tal que  $E$  é  $A$ - $B$  bimódulo de imprimitividade e para todos  $a \in A, b \in B$  e  $x, y \in E$ , satisfaz:

$$\max\{\|a\|, \|x\|_B, \|y\|_B, \|b\|\} \leq \left\| \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \right\| \leq \|a\| + \|x\|_B + \|y\|_B + \|b\|.$$

**Demonstração:** Definimos o  $*$ -homomorfismo  $\varphi$  como aquele que leva cada matriz de  $\mathcal{L}(E)$  ao respectivo operador de  $L(E \oplus B)$ , ou seja:

$$\varphi \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + xc \\ \langle y, z \rangle_B + bc \end{pmatrix}.$$

Os seguintes cálculos mostram que  $\varphi$  está bem definido e que é um \*-homomorfismo entre C\*-álgebras (omitiremos apenas os cálculos que comprovam que  $\varphi$  é linear por terem praticamente o mesmo grau de dificuldade dos que mostram que  $\varphi$  é multiplicativo):

a) ( $\varphi$  bem definido)

$$\begin{aligned}
 & \varphi \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \left[ \lambda \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z' \\ c' \end{pmatrix} b' \right] = \\
 & = \varphi \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda z + z'b' \\ \lambda c + c'b' \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} a(\lambda z + z'b') + x(\lambda c + c'b') \\ \langle y, \lambda z + z'b' \rangle_B + b(\lambda c + c'b') \end{pmatrix} \\
 & = \lambda \begin{pmatrix} az + xc \\ \langle y, z \rangle_B + bc \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} az' + xc' \\ \langle y, z' \rangle_B + bc' \end{pmatrix} b' \\
 & = \lambda \varphi \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' \\ c' \end{pmatrix} b'.
 \end{aligned}$$

b) ( $\varphi$  preserva adjuntos)

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \varphi \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z' \\ c' \end{pmatrix} \right\rangle_B = \\
 & = \left\langle \begin{pmatrix} az + xc \\ \langle y, z \rangle_B + bc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z' \\ c' \end{pmatrix} \right\rangle_B \\
 & = \langle az + xc, z' \rangle_B + (\langle y, z \rangle_B + bc)^* c' \\
 & = \langle a, z' \rangle_B + \langle xc, z' \rangle_B + (\langle z, y \rangle_B + c^* b^*) c' \\
 & = \langle z, a^* z' \rangle_B + \langle z, y \rangle_B c' + c^* \langle x, z' \rangle_B + c^* b^* c' \\
 & = \langle z, a^* z' + y c' \rangle_B + c^* (\langle x, z' \rangle_B + b^* c') \\
 & = \left\langle \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} a & y \\ \tilde{x} & b^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' \\ c' \end{pmatrix} \right\rangle_B.
 \end{aligned}$$

c) ( $\varphi$  é multiplicativo)

$$\begin{aligned}
 & \left[ \varphi \left[ \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & x' \\ \tilde{y}' & b' \end{pmatrix} \right] \right] \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix} = \\
 & = \varphi \begin{pmatrix} aa' + {}_A \langle x, y' \rangle & ax' + xb' \\ \tilde{y}a' + b\tilde{y}' & \langle y, x' \rangle_B + bb' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} aa'z + {}_A \langle x, y' \rangle z + ax'c + xb'c \\ \langle a'^* y + y'b^*, z \rangle_B + \langle y, x' \rangle_B c + bb'c \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} aa'z + ax'c + x\langle y', z \rangle_B + xb'c \\ \langle y, a'z + x'c \rangle_B + b\langle y', z \rangle_B + bb'c \end{pmatrix} \\
&= \left[ \varphi \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} a' & x' \\ \tilde{y}' & b' \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Provemos agora que  $\varphi$  é injetivo:

$$\varphi \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} az + xc \\ \langle y, z \rangle_B + bc \end{pmatrix} = 0, \forall z \in E, c \in B.$$

Assim, para todos  $z \in E, c \in B$  temos:

$$az = 0 \quad (3.1)$$

$$xc = 0 \quad (3.2)$$

$$\langle y, z \rangle_B = 0 \quad (3.3)$$

$$bc = 0. \quad (3.4)$$

Escolhendo  $z = y$ , pela igualdade 3.3 acima, segue que  $y = 0$ . Também de forma direta, tomando  $c = b^*$ , tem-se  $b = 0$  pela igualdade 3.4.

Agora, segue da equação 3.1 que  $a({}_A\langle z, w \rangle) = 0$  para todos  $z, w \in E$ . Como  ${}_A E$  é  $A$ -módulo cheio, temos  $aa' = 0$  para qualquer  $a' \in A$ . Tomando  $a' = a^*$ , conclui-se que  $a = 0$ .

Para vermos que  $x = 0$ , tome  $\{e_i\}$  unidade aproximada para  $B$ . Pela igualdade 3.2,  $xe_i = 0$  para todo  $i$ . Mas, note que  $xe_i \rightarrow x$ . Portanto  $x = 0$  e, de fato,  $\varphi$  é injetivo. Mais ainda,  $\varphi$  é isométrico, por se tratar de \*-homomorfismo injetivo entre  $C^*$ -álgebras.

Finalmente, demonstramos as desigualdades envolvendo normas. Para a desigualdade da esquerda, note que:

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \right\| &= \sup_{\|(z,c)\| \leq 1} \left\| \begin{pmatrix} az + xc \\ \langle y, z \rangle_B + bc \end{pmatrix} \right\| \\
&\geq \sup_{\|(z,0)\| \leq 1} \left\| \begin{pmatrix} az \\ \langle y, z \rangle_B \end{pmatrix} \right\| \\
&\geq \sup_{\|z\| \leq 1} \|az\| \\
&= \|a\|.
\end{aligned}$$

A igualdade  $\|a\| = \sup_{\|z\| \leq 1} \|az\|$  segue do item c) do Teorema 3.3.

Analogamente, teremos:

$$\left\| \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \right\| \geq \sup_{\|c\| \leq 1} \|xc\| = \|x\| \quad (3.5)$$

$$\left\| \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \right\| \geq \sup_{\|z\| \leq 1} \|\langle y, z \rangle_B\| = \|\tilde{y}\| \quad (3.6)$$

$$\left\| \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \right\| \geq \sup_{\|c\| \leq 1} \|bc\| = \|b\|. \quad (3.7)$$

Na equação 3.5, vale que  $\|x\| = \sup_{\|c\| \leq 1} \|xc\|$  pois  $\|xc\| \leq \|x\|$  para todo  $\|c\| \leq 1$  e como  $B$  tem unidade aproximada, não é difícil ver que  $\|xe_i\| \rightarrow \|x\|$ . Portanto a igualdade é válida.

Na equação 3.6, a igualdade  $\|\langle y, z \rangle_B\| = \|\tilde{y}\|$  foi provada na explicação que está logo abaixo do Corolário 2.7. Precisava-se ainda verificar que  $\|\tilde{y}\| = \|y\|$ , mas isso é consequência imediata da definição de  $\tilde{E}$  na Proposição 3.7.

Já a veracidade da igualdade  $\sup_{\|c\| \leq 1} \|bc\| = \|b\|$  decorre do fato de que toda  $C^*$ -álgebra possui unidade aproximada.

Provemos agora a desigualdade da direita. Primeiramente note que:

$$\left\| \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \|a\| \quad (3.8)$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \|x\|_B \quad (3.9)$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix} \right\| = \|y\|_B \quad (3.10)$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\| = \|b\|. \quad (3.11)$$

Mostraremos apenas a igualdade 3.10. Para demonstrar as outras, basta seguir praticamente os mesmos passos. Assim:

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix} \right\| = \sup_{\|(z,c)\| \leq 1} \left\| \begin{pmatrix} \langle y, z \rangle_B \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \geq \sup_{\|z\| \leq 1} \|\langle y, z \rangle_B\| = \|y\|_B. \quad (3.12)$$

Porém, seja  $z \in E$  tal que existe  $c \in B$  que satisfaz:  $\|(z,c)\| \leq 1$ . Claro que  $\|z\| \leq 1$  nesse caso. Mais ainda:

$$\left\| \begin{pmatrix} \langle y, z \rangle_B \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \|\langle y, z \rangle_B\| \leq \|y\|_B. \quad (3.13)$$

Portanto, as sentenças 3.12 e 3.13 implicam a igualdade 3.10.

**Definição 3.12** *Sejam  $A$  e  $B$   $C^*$ -álgebras.  $A$  é Morita equivalente a  $B$  se existe um  $A$ - $B$  bimódulo de imprimitividade  ${}_A E_B$ . Neste caso escreve-se:  $A \sim_M B$*

Nosso objetivo agora é demonstrar que a equivalência de Morita é de fato uma relação de equivalência. Para tal, precisaremos ainda da noção de produto tensorial interno entre módulos de Hilbert, teoria sobre a qual desenvolveremos um pouco a partir de agora, iniciando com a noção de pré-bimódulo de imprimitividade.

**Definição 3.13** *Sejam  $A$  e  $B$   $C^*$ -álgebras,  $A_0 \subset A$ ,  $B_0 \subset B$  \*-subálgebras densas. Um  $A_0$ - $B_0$  pré-bimódulo de imprimitividade é um espaço vetorial  $E_0$  que é um  $A_0$ - $B_0$  bimódulo satisfazendo:*

1.  $E_0$  é um  $A_0$  pré-módulo com pré-produto interno e um  $B_0$  pré-módulo com pré-produto interno (conforme Observação 2.4);
2.  ${}_A \langle E_0, E_0 \rangle$  e  $\langle E_0, E_0 \rangle_{B_0}$  são ideais densos em  $A$  e  $B$  respectivamente;
3. Para todos  $a \in A_0$ ,  $b \in B_0$  e  $x \in E_0$ , valem

$$\langle ax, ax \rangle_{B_0} \leq \|a\|^2 \langle x, x \rangle_{B_0} \text{ e } {}_A \langle xb, xb \rangle \leq \|b\|^2 {}_A \langle x, x \rangle;$$

4. Para todos  $x, y, z \in E_0$ , vale  ${}_A \langle x, y \rangle z = x \langle y, z \rangle_{B_0}$ .

**Proposição 3.14** *Seja  $E_0$  conforme definição anterior. Então*

$$\|x\|_{A_0}^2 = \|{}_A \langle x, x \rangle\| = \|\langle x, x \rangle_{B_0}\| = \|x\|_{B_0}^2.$$

**Demonstração:** Basta repetir os mesmos cálculos do item e) do Teorema 3.3.  $\square$

As duas proposições que seguem são relativas ao completamento de módulos de Hilbert. Na primeira proposição, descreveremos como ocorre o completamento de um pré-módulo de com pré-produto interno à direita apenas, enquanto que na segunda detalharemos como se completa um pré-bimódulo de imprimitividade, levando em consideração suas estruturas de módulo à esquerda e à direita.

**Proposição 3.15** *Suponha que  $A_0$  seja uma \*-subálgebra densa da  $C^*$ -álgebra  $A$  e  $E_0$  um  $A_0$  pré-módulo à direita com pré-produto interno. Então existem um  $A$ -módulo de Hilbert  $E$  e um homomorfismo  $q$  :*

$E_0 \rightarrow E$  entre  $A_0$  módulos (isto é,  $q$  é linear e  $q(xa) = q(x)a$ , para todos  $x \in E_0$  e  $a \in A_0$ ) tal que  $q(E_0)$  é denso em  $E$  e  $\langle q(x), q(y) \rangle_A = \langle x, y \rangle_{A_0}$ . Denotamos por  $E$  o completamento de  $E_0$ .

### Demonstração:

Sejam  $N = \{x \in E_0 : \langle x, x \rangle_{A_0} = 0\}$  e  $q : E_0 \rightarrow E_0/N$  o mapeamento quociente. Pelo Corolário 2.7, temos que  $\langle x, y \rangle_{A_0} = 0 = \langle y, x \rangle_{A_0}$ , sempre que  $y \in E_0$  e  $x \in N$ . Portanto  $N$  é na verdade um  $A_0$  submódulo de  $E_0$  e faz sentido construirmos  $E_0/N$ . Mais ainda, as seguintes fórmulas (estão bem definidas e) fazem de  $E_0/N$  um  $A_0$ -módulo com produto interno:

$$\langle q(x), q(y) \rangle_A := \langle x, y \rangle_{A_0} \text{ e } q(x)a := q(xa), \forall x, y \in E_0, a \in A_0.$$

Pelo Corolário 2.7, temos que  $\|q(x)\| = \|\langle x, x \rangle_{A_0}\|^{1/2}$  define uma norma em  $E_0/N$  e podemos tomar o completamento correspondente, denotando  $\overline{E_0/N}^{\|\cdot\|_A} =: E$ . O produto interno pode ser estendido a  $E$  simplesmente por  $\langle x, y \rangle_A := \lim_n \langle q(x_n), q(y_n) \rangle_A$  em que  $q(x_n) \rightarrow x$  e  $q(y_n) \rightarrow y$ . Não é difícil ver que o produto interno assim definido independe, da fato, das sequências convergentes escolhidas. Todas as propriedades de produto interno são trivialmente verificadas, exceto a relacionada com positividade.

O Teorema 3.4.3 de (MURPHY, 1990) diz que um elemento auto-adjunto  $a \in C$ , em que  $C$  é uma  $C^*$ -álgebra, é positivo se e somente se  $\varphi(a) \geq 0$  para todo funcional linear positivo de  $C$ . Ainda por (MURPHY, 1990), mais especificamente pelo Teorema 3.3.1, todo funcional linear positivo de uma  $C^*$ -álgebra é contínuo. Levando em conta esses teoremas, sejam  $\varphi$  funcional positivo de  $A$  e  $x \in E$  qualquer. Se  $q(x_n) \rightarrow x$ ,  $x_n \in E_0$ , então:

$$\varphi(\langle x, x \rangle) = \varphi(\lim \langle q(x_n), q(x_n) \rangle) = \lim \varphi(\langle q(x_n), q(x_n) \rangle) \geq 0$$

Finalmente, se tivermos  $\langle x, x \rangle_A = 0$ , isso quer dizer que existe sequência  $q(x_n) \rightarrow x$  com  $\|q(x_n)\| \rightarrow 0$ . Portanto  $q(x_n) \rightarrow 0$  e devemos ter  $x = 0$ , completando a demonstração.  $\square$

**Proposição 3.16** *Sejam  $A$  e  $B$   $C^*$ -álgebras e  $A_0 \subset A$ ,  $B_0 \subset B$  \*-subálgebras densas. Se  $E_0$  for um  $A_0$ - $B_0$  pré-bimódulo de imprimitividade, então existe um  $A$ - $B$  bimódulo de imprimitividade  $E$  e um homomorfismo entre bimódulos  $q : E_0 \rightarrow E$  ( $q$  é uma transformação linear tal que  $q(axb) = aq(x)b$ , para todos  $x \in E_0$ ,  $a \in A_0$  e  $b \in B_0$ ) tal que  $q(E_0)$  é denso em  $E$  e ainda*

$$\langle q(x), q(y) \rangle_B = \langle x, y \rangle_{B_0} \text{ e } {}_A \langle q(x), q(y) \rangle = {}_{A_0} \langle x, y \rangle$$

para todos  $x, y \in E_0$ .

**Demonstração:**

Pela Proposição 3.14, as normas  $\|\cdot\|_A$  e  $\|\cdot\|_B$  coincidem em  $E_0$ . Assim, o completamento  $E$  de  $(E_0, \|\cdot\|_B)$  é simultaneamente  $A$  módulo de Hilbert cheio e  $B$  módulo de Hilbert cheio pela Proposição 3.15. Note que aqui não há problema algum em se definir, usando a mesma notação da Proposição 3.15,

$$aq(x) := q(ax) \text{ e } q(x)b = q(xb)$$

para todos  $a \in A_0$ ,  $b \in B_0$  e  $x \in E_0$ . Note ainda que pelo fato das normas relativas  $A$  e  $B$  coincidirem, o  $N$  (também definido na proposição mencionada) é o mesmo, levando em consideração o  $A$  ou o  $B$ . Por isso  $E$  está bem definido.

Agora, como o segundo item da Definição 3.1 e o item e) do Teorema 3.3 valem para  $E_0$ , eles continuam valendo para o completamento, o que garante que  $E$  é um bimódulo de imprimitividade.  $\square$

Tendo em mãos a teoria de completamento de módulos de Hilbert, abordaremos o produto tensorial algébrico entre os módulos de Hilbert  $E$  e  $F$  (na verdade precisaremos apenas da estrutura vetorial de ambos nesse nível) para definirmos o que vem a ser produto tensorial interno entre eles (aqui sim entra em cheio o fato de serem módulos de Hilbert, não apenas espaços vetoriais) e então passaremos para o fechamento dessa nova estrutura.

**Definição 3.17** *Sejam  $B$  e  $C$   $C^*$ -álgebras,  $E_B$  e  $F_C$  módulos de Hilbert e  $\varphi : B \rightarrow L(F)$  um  $*$ -homomorfismo. Denote por  $E \otimes_{alg} F$  o produto tensorial algébrico entre  $E$  e  $F$ . Definimos o produto tensorial interno (relativo a  $\varphi$ )  $E \odot_{\varphi} F$  como sendo o espaço quociente*

$$E \odot_{\varphi} F := (E \otimes_{alg} F)/N,$$

em que  $N = \text{span}\{xb \otimes y - x \otimes \varphi(b)(y) : x \in E, y \in F, b \in B\}$ .

**Observação 3.18** *No caso em que  $\varphi = I_B$  na definição acima, ou seja, em que  $F$  é um  $B$ -módulo à esquerda, denotaremos*

$$E \odot_{\varphi} F = E \odot_B F.$$

**Proposição 3.19** *O produto tensorial interno acima definido é um  $C$ -módulo com produto interno dado por*

$$\langle x \otimes_{\varphi} y, x' \otimes_{\varphi} y' \rangle_C = \langle y, \varphi(\langle x, x' \rangle_B) y' \rangle_C.$$



### Demonstração:

Que  $E \otimes_{\varphi} F$  é  $C$ -módulo à direita, isso segue do fato de  $F$  o ser. Para muni-lo de um produto interno, procederemos da seguinte maneira: faremos os cálculos das propriedades de semi-produto interno para o produto tensorial algébrico entre  $E$  e  $F$  e depois constaremos que  $N' := \text{span}\{z \in E \otimes_{\text{alg}} F : \langle z, z \rangle_C = 0\} = N$  para mostrarmos que nossa fórmula define um produto interno avaliado em  $C$  no nível do produto tensorial interno.

Fixe  $x \in E$  e  $y \in F$ . Note primeiramente que a aplicação  $E \times F \rightarrow C$ ,  $(x', y') \mapsto \langle y, \varphi(\langle x, x' \rangle_B) y' \rangle_C$  é bilinear. Portanto, existe única aplicação linear  $L_{x,y} : E \otimes_{\text{alg}} F \rightarrow C$ , tal que  $L_{x,y}(x' \otimes y') = \langle y, \varphi(\langle x, x' \rangle_B) y' \rangle_C$ . Defina a aplicação  $L_{x,y}^*$  por  $L_{x,y}^*(\alpha) = (L_{x,y}(\alpha))^*$ . Tal função pertence ao espaço vetorial  $CL$  das transformações conjugado-lineares de  $E \otimes_{\text{alg}} F$  em  $C$ . Mais ainda, a aplicação  $E \times F \rightarrow CL$ ,  $(x, y) \mapsto L_{x,y}^*$  é bilinear. Portanto, novamente, existe única transformação linear  $L^* : E \otimes_{\text{alg}} F \rightarrow CL$  tal que  $L^*(x \otimes y) = L_{x,y}^*$ . Podemos então definir  $\langle \alpha, \beta \rangle = (L^*(\alpha)(\beta))^*$ , para todos  $\alpha, \beta \in E \otimes_{\text{alg}} F$ , e essa é justamente a fórmula que consta na hipótese.

A verificação de que temos um semi-produto interno em  $E \otimes_{\text{alg}} F$  é trivial, exceto pela condição de positividade. Tome  $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ . Portanto  $\langle \alpha, \alpha \rangle_C = \langle Y, \varphi^{(n)}(X)Y \rangle_C$ , em que  $Y = (y_1, \dots, y_n) \in F^n$ ,  $X$  é a matriz  $(\langle x_i, x_j \rangle) \in M_n(B)$ . Estamos interpretando aqui  $\varphi^{(n)}(X)$  como o operador em  $L_C(F^n)$  representado pela matriz  $n \times n$   $(\varphi(\langle x_i, x_j \rangle))$  e trabalhando com o produto interno usual no cartesiano de módulos de Hilbert. Como todo \*-homomorfismo entre  $C^*$ -álgebras é completamente positivo e  $X$  é matriz positiva (ver Lema 2.65 de (RAEBURN; WILLIAMS, 1998)), segue que  $\varphi^{(n)}(X)$  é um operador positivo e, pelo item d) da Observação 3.5, conseguimos  $\langle \alpha, \alpha \rangle_C \geq 0$ .

Vamos agora provar que  $N = N'$ . Tome  $xb \otimes y - x \otimes \varphi(b)(y) \in N$ . Assim:

$$\begin{aligned} & \langle xb \otimes y - x \otimes \varphi(b)(y), xb \otimes y - x \otimes \varphi(b)(y) \rangle = \\ & = \langle xb \otimes y, xb \otimes y \rangle - \langle xb \otimes y, x \otimes \varphi(b)(y) \rangle + \\ & \quad - \langle x \otimes \varphi(b)(y), xb \otimes y \rangle + \langle x \otimes \varphi(b)(y), x \otimes \varphi(b)(y) \rangle = \\ & = \langle \varphi(\langle xb, xb \rangle)y, y \rangle - \langle \varphi(\langle x, xb \rangle)y, \varphi(b)y \rangle + \\ & \quad - \langle \varphi(\langle xb, x \rangle)\varphi(b)y, y \rangle + \langle \varphi(\langle x, x \rangle)\varphi(b)y, \varphi(b)y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Isso garante que  $N \subset N'$ . Agora, devemos mostrar a outra inclusão. Para tal verificação usaremos (sem demonstrar) o Lema 4.4

do livro (LANCE, 1995) que diz que se  $E_B$  é um módulo de Hilbert,  $x \in E$  e  $t$  é um número real do intervalo  $(0, 1)$ , então existe  $w \in E$  tal que  $x = w|x|^t$ .

Seja  $\alpha \in N'$ ,  $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ . Sabemos que

$$\langle \alpha, \alpha \rangle_C = \langle Y, \varphi^{(n)}(X)Y \rangle = 0.$$

Considere o operador  $T = \varphi^{(n)}(X)$ . É claro que  $T^{\frac{1}{2}}Y = T^{\frac{1}{4}}Y = 0$ . Podemos agora olhar  $E^n$  como um  $M_n(B)$ -módulo de Hilbert e nesse caso  $|x| = X^{\frac{1}{2}}$ , em que  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Pelo Lema 4.4 do livro (LANCE, 1995), existe  $w \in E^n$  tal que  $wX^{\frac{1}{4}} = x$ . Escrevendo  $c_{ij}$  para os elementos da matriz  $X^{\frac{1}{4}}$ , ficamos com  $T^{\frac{1}{4}} = \varphi^{(n)}(X^{\frac{1}{4}})$  e portanto  $T^{\frac{1}{4}}$  é a matriz de elementos  $(\varphi(c_{ij}))$ . Portanto  $x_j = \sum_i w_i c_{ij}$  e  $\sum_j \varphi(c_{ij}y_j) = 0$ . Assim, obtemos:

$$\alpha = \sum_j x_j \otimes y_j = \sum_{ij} w_i c_{ij} \otimes y_j = \sum_{ij} (w_i c_{ij} \otimes y_j - w_i \otimes \varphi(c_{ij})y_j).$$

Conclui-se então que  $N' \subset N$  e assim  $N' = N$ . Pela Definição 3.17, munimos, de fato,  $E \otimes_{\varphi} F$  com um produto interno. O seu completamento (denotado por  $E \otimes_{\varphi} F$ ) é um  $C$ -módulo de Hilbert.  $\square$

**Proposição 3.20** *Suponha que  $A$  e  $B$  sejam  $C^*$ -álgebras e que  $E$  seja um  $A$ - $B$  bimódulo com produtos internos satisfazendo a segunda e a quarta condições da Definição 3.13.  $E$  será um  $A$ - $B$  pré-bimódulo de imprimitividade se satisfizer, para todos  $a \in A$ ,  $b \in B$  e  $x, y \in E$*

$$\langle ax, y \rangle_B = \langle x, a^*y \rangle_B \text{ e } {}_A \langle xb, y \rangle = {}_A \langle x, yb^* \rangle.$$

**Demonstração:** Considere a unitização de  $A$ ,

$$\tilde{A} := \{a + \lambda \mathbf{1} : \lambda \in \mathbb{C}, a \in A\}.$$

$E$  se torna um  $\tilde{A}$ -módulo à esquerda com produto interno com a ação de  $\tilde{A}$  sendo dada por  $(a + \lambda \mathbf{1})x = ax + \lambda x$  e produto interno permanecendo o mesmo. Note agora que continua valendo:

$$\langle (a + \lambda \mathbf{1})x, y \rangle_B = \langle x, a^*y \rangle_B + \langle x, \bar{\lambda}y \rangle_B = \langle x, (a + \lambda \mathbf{1})^*y \rangle_B.$$

Mais ainda, seja  $c \in \tilde{A}$  um elemento positivo. Então  $c = d^*d$  para algum  $d \in \tilde{A}$  e assim:  $\langle cx, cx \rangle_B = \langle dx, dx \rangle_B \geq 0$

Mas  $\|a\|^2 \mathbf{1} - a^*a$  é um elemento positivo de  $\tilde{A}$ . Assim:

$$\|a\|^2 \langle x, x \rangle_B - \langle ax, ax \rangle_B = \langle x, (\|a\|^2 \mathbf{1} - a^*a)x \rangle_B \geq 0.$$

Um argumento similar é suficiente para o produto interno em  $A$ . Portanto,  $E$  é um pré-bimódulo de imprimitividade.  $\square$

**Proposição 3.21** *Sejam  $A, B$  e  $C$   $C^*$ -álgebras,  ${}_A E_B$  e  ${}_B F_C$  bimódulos de imprimitividade,  $x, x' \in E$  e  $y, y' \in F$ . Então  $Z = E \circlearrowright_B F$  é um  $A$ - $C$  bimódulo e há únicos produtos internos avaliados em  $A$  e  $C$ , respectivamente dados por:*

$$\begin{aligned} \langle x \otimes_B y, x' \otimes_B y' \rangle_C &= \langle y, \langle x, x' \rangle_B y' \rangle_C, \\ {}_A \langle x \otimes_B y, x' \otimes_B y' \rangle &= {}_A \langle x, x'_B \langle y', y \rangle \rangle. \end{aligned}$$

*O completamento de  $Z$  (denotado por  $E \otimes_B F$ ) segundo a norma proveniente do produto interno à valores em  $C$  será um  $A$ - $C$  bimódulo de imprimitividade.*

### Demonstração:

A Proposição 3.19 acima economizou-nos certo trabalho, pois por ela, temos que  $Z$  é  $C$ -módulo com produto interno e os mesmos argumentos servem para o contexto de  $A$  à esquerda. Pelo Corolário 2.7 e sabendo que  $\overline{\langle E, E \rangle_B} = B$  e  $\overline{\langle F, F \rangle} = B$ , as definições de produtos internos em  $A$  e  $C$  claramente nos dizem que  ${}_A \langle Z, Z \rangle$  e  $\langle Z, Z \rangle_C$  são densos em  $A$  e  $C$  respectivamente.

Nosso objetivo é caracterizar  $Z$  de acordo com a Definição 3.13. Para tal, considere a seguinte constatação:

$$\begin{aligned} (x \otimes_B y) \langle z \otimes_B w, z' \otimes_B w' \rangle_C &= (x \otimes_B y) \langle \langle z', z \rangle w, w' \rangle_C \\ &= x \otimes_B y \langle \langle z', z \rangle w, w' \rangle_C \\ &= x \otimes_B (\langle y, \langle z', z \rangle w \rangle w') \\ &= x \langle z \langle w, y \rangle, z' \rangle_B \otimes_B w' \\ &= {}_A \langle x, z \langle_B \langle w, y \rangle \rangle \rangle (z' \otimes w') \\ &= {}_A \langle x \otimes_B y, z \otimes_B w \rangle (z' \otimes_B w'). \end{aligned}$$

Até aqui verificamos as propriedades 1, 2 e 4 da Definição 3.13 para  $Z$ . Para a propriedade 3, note que:

$$\begin{aligned} \langle ax \otimes_B y, z \otimes_B w \rangle_C &= \langle \langle z, ax \rangle y, w \rangle_C = \langle \langle a^* z, x \rangle y, w \rangle_C \\ &= \langle x \otimes_B y, a^* z \otimes_B w \rangle_C. \end{aligned}$$

Segue da Proposição 3.20 que  $Z$  é um  $A$ - $C$  pré-bimódulo de imprimitividade e que as normas (provenientes de  $A$  e  $C$ ) coincidem. Sem mais delongas, basta tomar o completamento de  $Z$  em relação a  $C^*$ -álgebra  $C$  (denotado por  $E \otimes_B F$ ) que obtemos um  $A$ - $C$  bimódulo de imprimitividade, segundo a Proposição 3.16.  $\square$

**Proposição 3.22** *Equivalência de Morita é uma relação de equivalência.*

**Demonstração:**

Com o trabalho desenvolvido até aqui, basta-nos reunir os resultados pertinentes. A equivalência de Morita é reflexiva pois dada uma  $C^*$ -álgebra  $A$ , é claro que  $A$  é  $A$ - $A$  bimódulo de imprimitividade.

Em relação a propriedade simétrica, se  ${}_A E_B$  é bimódulo de imprimitividade, então o adjunto de  $E$ ,  $\tilde{E}$ , segundo a Proposição 3.7, é um  $B$ - $A$  bimódulo de imprimitividade. Já a propriedade transitiva é obtida diretamente da proposição acima.  $\square$

Nosso próximo passo é mostrar um dos resultados mais importantes desse trabalho. Importante por representar a realização de um dos objetivos propostos: o de elencar outras possíveis definições para equivalência de Morita. Para tal intento, precisaremos conceituar álgebra dos multiplicadores. Faremos isso de forma simples e direta. Assim como (LANCE, 1995), dada uma  $C^*$ -álgebra  $A$  definiremos a álgebra dos multiplicadores de  $A$  como sendo a  $C^*$ -álgebra dos operadores adjuntáveis  $L(A)$ , em que  $A$  é vista como um  $A$ -módulo de Hilbert à direita. Usaremos a notação  $M(A) := L(A)$  para nos referirmos a álgebra dos multiplicadores de  $A$ , já que tal notação é bastante difundida na literatura, conforme vemos em (RAEBURN; WILLIAMS, 1998) e (LANCE, 1995), por exemplo. Ainda por (LANCE, 1995), temos que  $A$  é isomorfa a álgebra dos operadores compactos  $K(A) \subset M(A)$  e portanto é um ideal de  $M(A)$ .

**Proposição 3.23** *Sejam  $A$  e  $B$   $C^*$ -álgebras. São equivalentes:*

1.  $A \sim_M B$ ;
2. Existe  $E_B$   $B$ -módulo de Hilbert cheio tal que  $A \cong K_B(E)$ ;
3. Existe  $C^*$ -álgebra  $C$  que contém um subespaço fechado  $E$  tal que  $B' = \overline{\text{span}} E^* E \cong B$ ,  $A' = \overline{\text{span}} E E^* \cong A$ ,  $A' E \subset E$  e  $E B' \subset E$ ;
4. Existem uma  $C^*$ -álgebra  $L$  e  $p, q \in M(L)$  projeções complementares tais que  $\overline{\text{span}}(LpL) = \overline{\text{span}}(LqL) = L$ ,  $pLp \cong A$  e  $qLq \cong B$ .

**Demonstração:**

Seguiremos a seguinte sequência:  $2) \Rightarrow 1) \Rightarrow 4) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1) \Rightarrow 2)$ .  
 $2) \Rightarrow 1)$

Suponha que exista  $E_B$   $B$ -módulo de Hilbert cheio tal que  $A \cong K_B(E)$ . Pela Observação 3.5,  ${}_{K_B(E)} E_B$  é bimódulo de imprimitividade. Agora, pela Observação 3.6,  ${}_A E_B$  é bimódulo de imprimitividade, como desejado.

1)  $\Rightarrow$  4)

Suponha que exista  ${}_A E_B$  bimódulo de imprimitividade. Considere a álgebra de ligação de  $E$ ,  $\mathcal{L}(E) \hookrightarrow L(E \oplus B)$  e sejam  $p, q \in M(\mathcal{L}(E))$  definidos como segue:

$$p \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix};$$

$$q \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Vamos mostrar que, de fato, podemos escolher  $L = \mathcal{L}(E)$ . Mostremos primeiramente que  $\overline{\text{span}}(LpL) = L$ . Tome  $a \in A$  e  $x, y \in E$ . Considere ainda  $\{e_i\}$  unidade aproximada para  $A$  e os seguintes cálculos envolvendo esses elementos:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} p \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow_i \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} p \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e_i x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow_i \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix} p \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{y}e_i & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow_i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix} p \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \langle y, x \rangle_B \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Sendo  $E$   $B$ -módulo cheio e ainda  $\tilde{y}e_i = \widetilde{e_i y}$ , pelas sentenças acima segue que:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \overline{\text{span}}(LpL),$$

para todos  $x, y \in E, a \in A$  e  $b \in B$ . Portanto  $L = \overline{\text{span}}(LpL)$ . Analogamente,  $L = \overline{\text{span}}(LqL)$ . Falta-nos apenas mostrar que  $A \cong pLp$  e  $B \cong qLq$ . Mas isso é trivial e segue diretamente dessas duas constatações:

$$p \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad q \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

4)  $\Rightarrow$  3)

Suponha que valha o item 4. Escolha  $C = L$  e  $E = pLq$ . Não é difícil ver que  $E$  define um subespaço vetorial fechado de  $C$ . Mais ainda, temos:

$$\begin{aligned} B' &= \overline{\text{span}}E^*E = \overline{\text{span}}(qLppLq) = \overline{\text{span}}(qLpLq) = qLq \cong B, \\ A' &= \overline{\text{span}}EE^* = \overline{\text{span}}(pLqqLp) = \overline{\text{span}}(pLqLp) = pLp \cong A. \end{aligned}$$

Para finalizar essa parte, como  $pLppLq \subset pLq$  e  $pLqqLp \subset pLq$ , garantimos, respectivamente, que  $A'E \subset E$  e  $EB' \subset E$ .

3)  $\Rightarrow$  1)

Suponha que valha o item 3. Vamos provar que o subespaço fechado  $E \subset C$  é um  $A$ - $B$  bimódulo de imprimitividade. Sejam  $A'$  e  $B'$  as "cópias" respectivas de  $A$  e  $B$  contidas em  $C$ . As condições  $A'E \subset E$  e  $EB' \subset E$  dizem-nos que  $E$  é  $A'$  módulo à esquerda e um  $B'$  módulo à direita com a multiplicação herdada de  $C$ .

Já vimos (Exemplo 2.5) que dados  $x, y \in E$ ,  $\langle x, y \rangle_{B'} := x^*y$  define um produto interno avaliado em  $B'$ . Analogamente,  ${}_A\langle x, y \rangle := xy^*$  define um produto interno avaliado em  $A'$ . Obviamente, as condições  $\overline{\text{span}}(E^*E) = B'$  e  $\overline{\text{span}}(EE^*) = A'$  garantem-nos que  $E$  é cheio (visto tanto como  $A'$ -módulo quanto como  $B'$ -módulo). Finalmente, o item b) da Definição 3.1 segue por melhor do simples cálculo:

$${}_A\langle x, y \rangle z = xy^*z = x\langle y, z \rangle_{B'}.$$

1)  $\Rightarrow$  2)

Seja  ${}_AE_B$   $A$ - $B$  bimódulo de imprimitividade. Pelo Teorema 3.3, existe  $\varphi : A \rightarrow K_B(E)$  isomorfismo entre  $C^*$ -álgebras, o que finaliza a demonstração.  $\square$

Encerraremos o presente capítulo com dois exemplos que ilustram uma classe importante de  $C^*$ -álgebras Morita equivalentes.

**Exemplo 3.24** *Sejam  $A$   $C^*$ -álgebra e  $m, n$  números naturais. Então  $M_n(A) \sim_M M_m(A)$ .*

Considere o espaço vetorial  $E = M_{m \times n}(A)$ . Vamos muni-lo com uma estrutura de  $M_n$ -módulo de Hilbert cheio à direita. Para  $a, b \in E$  e  $c \in M_n(A)$ , sendo

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} e$$

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

$E$  se torna  $M_n$  módulo à direita com produto interno por meio da multiplicação usual de matrizes (note que o produto  $ac$  é uma matriz de ordem  $m \times n$  e portanto um elemento de  $E$ ) e da aplicação  $\langle, \rangle_{M_n} : E \times E \rightarrow M_n(A)$  dada por:

$$\langle a, b \rangle_{M_n(A)} = a^*b = \begin{pmatrix} a_{11}^* & \cdots & a_{m1}^* \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Como a multiplicação usual de matrizes é bem comportada, não é difícil ver que  $E$  é  $M_n(A)$  módulo à direita, a aplicação  $\langle, \rangle_{M_n(A)}$  é linear na segunda variável, conjugada-linear na primeira e ainda  $\langle a, bc \rangle_{M_n(A)} = (\langle a, b \rangle_{M_n(A)})c$ . Agora:

$$\begin{aligned} (\langle b, a \rangle_{M_n(A)})^* &= \left( \begin{pmatrix} b_{11}^* & \cdots & b_{m1}^* \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n}^* & \cdots & b_{mn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \right)^* \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m b_{i1}^* a_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^m b_{i1}^* a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^m b_{in}^* a_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^m b_{in}^* a_{in} \end{pmatrix}^* \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m a_{i1}^* b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{i1}^* b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{in}^* b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{in}^* b_{in} \end{pmatrix}^* \\ &= \langle a, b \rangle_{M_n(A)}. \end{aligned}$$

Para vermos que  $\langle a, a \rangle_{M_n(A)} \geq 0$ , considere o caso  $m < n$  e a matriz obtida de  $a$  preenchendo-a com  $n - m$  linhas nulas:

$$a' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Como  $a'$  pertence a  $C^*$ -álgebra  $M_n(A)$ , temos  $a'^*a' \geq 0$ . Mais ainda, olhando  $M_n(A) \cong B(A^n)$ , é claro que  $\langle a, a \rangle_{M_n(A)} = a'^*a'$  em  $B(A^n)$ . Portanto  $\langle a, a \rangle_{M_n(A)} \geq 0$  para todo  $a \in E$ . O caso  $n < m$  é análogo.

Suponha agora  $\langle a, a \rangle_{M_n(A)} = 0$ . Então  $\sum_{i=1}^m a_{ij}^* a_{ij} = 0$  para todo  $j$ . Portanto  $a_{ij}^* a_{ij} = 0$  para todos  $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$  e  $a_{ij} = 0$  para todos  $i, j$ , o que garante que  $a = 0$ .

Tendo provado que a aplicação é de fato um produto interno, mostremos que  $E$  é  $M_n(A)$ -módulo cheio. Seja  ${}_{n \times n} \delta^{kl}$  a matriz  $n \times n$  cuja única entrada não nula é a entrada  $kl$ , ocupada pelo número 1. Mas  ${}_{n \times m} \delta^{k1} \cdot {}_{m \times n} \delta^{1l} = {}_{n \times n} \delta^{kl}$ . Isso nos diz que  $E$  é cheio como módulo à direita.

Para vermos que  $E$  é completo com a norma  $\|a\| = \|\langle a, a \rangle_{M_n(A)}\|^{\frac{1}{2}}$  basta notar que  $\|\langle a, a \rangle_{M_n(A)}\| = \|a'^*a'\| = \|a'\|^2$ .

Analogamente,  $E$  é  $M_m(A)$ -módulo de Hilbert cheio à esquerda por meio da multiplicação usual de matrizes e produto interno dado por

$${}_{M_m(A)} \langle a, b \rangle = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}^* & \cdots & b_{m1}^* \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n}^* & \cdots & b_{mn}^* \end{pmatrix}.$$

Finalmente, o seguinte cálculo garante-nos que  ${}_{M_m(A)} E_{M_n(A)}$  é bimódulo de imprimitividade ( $a, b, b' \in E$ ):

$${}_{M_m(A)} \langle a, b \rangle b' = a b^* b' = a \langle b, b' \rangle_{M_n(A)}.$$

**Exemplo 3.25** Se  $H$  é espaço de Hilbert, então a álgebra dos operadores compactos de  $H$ ,  $K(H)$ , é Morita equivalente a álgebra  $\mathbb{C}$  dos números complexos.

Isso segue diretamente do item 2) da Proposição 3.23. Mais ainda, esse exemplo engloba o anterior, visto que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$M_n(\mathbb{C}) \cong B(\mathbb{C}^n) = K(\mathbb{C}^n).$$



## 4 SISTEMAS DINÂMICOS E PRODUTOS CRUZADOS

### 4.1 PRELIMINARES - INTEGRAÇÃO EM GRUPOS

Descreveremos nessa etapa alguns resultados que usaremos no desenvolvimento da teoria de representações covariantes de sistemas dinâmicos. Nosso intuito aqui não é o de sermos detalhistas, queremos apenas apresentar algumas propriedades e fatos relacionados a integração de grupos. O leitor interessado nos detalhes poderá consultar (WILLIAMS, 2007).

O primeiro ponto será a topologia do limite indutivo. Seja  $C_c(G, D)$  conjunto das funções com suporte compacto de  $G$  (grupo localmente compacto) em  $D$  (espaço de Hilbert). Diremos nesse trabalho que uma net  $f_i$  (em  $C_c(G, D)$ ) converge para  $f$  na topologia do limite indutivo se  $f_i \rightarrow f$  uniformemente e existir  $K \subset G$  compacto tal que  $\text{supp}(f_i) \subset K$  para todo  $i$  suficientemente “grande”. Aqui o símbolo  $\text{supp}(f)$  denota o suporte da função  $f$ . Nesse caso, não é difícil ver que  $f_i \rightarrow f$  na norma- $L_1$ . Mais ainda, nosso interesse nessa topologia reside no fato de encontrarmos um conjunto de funções elementares, de (relativamente) fácil manuseio, que povoa densamente o espaço  $C_c(G, D)$ . É exatamente isso que diz o lema a seguir:

**Lema 4.1** *Suponha que  $D_0$  seja um subespaço denso de  $D$ , espaço de Hilbert. Então*

$$C_c(G) \odot D_0 := \{z \otimes a : z \in C_c(G), a \in D_0\}$$

*com  $z \otimes a \in C_c(G, D)$ ,  $z \otimes a(s) = z(s)a$ , é subespaço denso na topologia do limite indutivo em  $C_c(G, D)$  e portanto na norma- $L_1$ .*

Mais a frente, trabalharemos com o espaço  $C_c(G, A)$ , em que  $A$  é uma  $C^*$ -álgebra e é denso (numa certa norma) na álgebra denominada produto cruzado. Portanto, quando quisermos mostrar que certo conjunto é denso nessa nova álgebra, bastará mostrar que contém todas as funções elementares acima.

O próximo resultado apresenta as principais propriedades que goza a integração em grupos que utilizaremos nos próximos capítulos.

**Proposição 4.2** *Suponha  $D$  espaço de Banach e  $G$  grupo localmente compacto com medida de Haar  $\mu$ . Então existe uma aplicação linear*

$$\int_G : C_c(G, D) \rightarrow D$$

$$f \mapsto \int_G f(s) d\mu(s)$$

que é caracterizada por:

$$\varphi \left( \int_G f(s) d\mu(s) \right) = \int_G \varphi(f(s)) d\mu(s)$$

para todo  $\varphi \in D^*$ . Também valem:

$$\left\| \int_G f(s) d\mu(s) \right\| \leq \|f\|_1,$$

$$\int_G z \otimes a(s) d\mu(s) = a \int_G z(s) d\mu(s)$$

$$L \left( \int_G f(s) d\mu(s) \right) = \int_G L(f(s)) d\mu(s)$$

$$\left( \int_G f(s) d\mu(s) \right)^* = \int_G f(s)^* d\mu(s)$$

para todos  $f \in C_c(G, D)$ ,  $z \in C_c(G)$ ,  $a \in D$  e  $L : D \rightarrow Y$  operador linear limitado.

Mais ainda, se  $\pi : A \rightarrow B(H_\pi)$  é uma representação,  $h, k \in H_\pi$  e  $a, b \in M(A)$ , então:

$$\begin{aligned} \langle \pi \left( \int_G f(s) d\mu(s) \right) h, k \rangle &= \int_G \langle \pi(f(s)) h, k \rangle d\mu(s); \\ a \int_G f(s) d\mu(s) b &= \int_G a f(s) b d\mu(s). \end{aligned}$$

## 4.2 GRUPOS DE TRANSFORMAÇÃO

Nesta seção iniciamos nossa abordagem aos sistemas dinâmicos, representações covariantes e produtos cruzados. Um caso que merece destaque aqui é quando consideramos  $A = C_0(X)$ , a  $C^*$ -álgebra abeliana das funções que se anulam no infinito, em que  $X$  é espaço Hausdorff localmente compacto. Para uma definição mais formal, dizemos que  $f \in C_0(X)$  se e somente se  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua e dado  $\varepsilon > 0$ , o conjunto  $K = \{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$  é compacto.

**Definição 4.3** *Sejam  $G$  grupo e  $X$  um conjunto. Dizemos que  $G$  age em  $X$  se existir uma aplicação  $G \times X \rightarrow X$   $(s, x) \mapsto sx$  tal que  $ex = x$  e  $s(rx) = (sr)x$ , para todos  $s, r \in G$ ,  $x \in X$  e  $e \in G$  a identidade do grupo. Tal aplicação é denominada de ação.*

Ainda, se  $G$  for grupo topológico e  $X$  um espaço topológico, a ação será dita contínua se a aplicação  $G \times X \rightarrow X$  anteriormente explicitada o for. Nessa contexto,  $X$  será dito um  $G$ -espaço à esquerda e  $(G, X)$  será chamado grupo de transformação. No caso em que  $G$  e  $X$  forem ambos localmente compactos,  $(G, X)$  será denominado grupo de transformação localmente compacto e  $X$  será  $G$ -espaço localmente compacto. Todas as noções à direita definem-se de forma inteiramente análogas.

**Exemplo 4.4** *Sejam  $X$  espaço topológico localmente compacto e  $h \in \text{Homeo}(X)$ . Então  $\mathbb{Z}$  age em  $X$  por meio de  $nx := h^n(x)$  e  $(\mathbb{Z}, X)$  é um grupo de transformação.*

Estamos interessados em estudar como ações de grupos sobre um espaço topológico localmente compacto  $X$  podem nos produzir aplicações em  $C_0(X)$  com propriedades especiais.

Seja  $(G, X)$  um grupo de transformação localmente compacto e fixe  $s \in G$ . Assim,  $\phi_s : X \rightarrow X$ ,  $\phi_s(x) = sx$  é um homeomorfismo (com inverso  $\phi_{s^{-1}}$ ). Também a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \alpha : G &\rightarrow \text{Aut}(C_0(X)) \\ s &\mapsto \alpha_s \\ \alpha_s(f)(x) &= f(s^{-1}x) \end{aligned}$$

produz, para cada  $s \in G$ , um automorfismo de  $C_0(X)$  (com inverso  $\alpha_{s^{-1}}$ ) e  $\alpha$  é um homomorfismo de grupos. De fato:

1.  $\alpha_{sr}(f)(x) = f(r^{-1}s^{-1}x) = \alpha_r(f)(s^{-1}x) = \alpha_s(\alpha_r(f))(x)$ ;
2.  $\alpha_e(f)(x) = f(ex) = f(x)$ .

**Lema 4.5** *Seja  $(G, X)$  um grupo de transformação localmente compacto e  $\text{Aut}(C_0(X))$  munido da topologia pontual. Então  $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(C_0(X))$  (definida nos comentários acima) é contínua.*

### Demonstração:

É suficiente mostrarmos que  $s_i \rightarrow e \Rightarrow \|\alpha_{s_i}(f) - f\|_\infty \rightarrow 0$ , para toda  $f \in C_0(X)$  e  $\{s_i\}$  net em  $G$  convergindo para  $e$ . Pois supondo esse trabalho feito, fixado  $g \in G$  e tomando  $\{s_i\}$  net convergente para  $g$ , temos:

$$s_i \rightarrow g \Rightarrow g^{-1}s_i \rightarrow e \Rightarrow \|\alpha_g(\alpha_{g^{-1}s_i}(f) - f)\|_\infty \rightarrow 0.$$

Suponha do contrário, que existam net  $s_i \rightarrow e$  e  $f \in C_0(X)$  tais que  $\|\alpha_{s_i}(f) - f\|$  não converge para 0. Assim, existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que,

sem perda de generalidade,

$$\|f(s_i^{-1}x_i) - f(x_i)\| \geq \varepsilon_0$$

para todo  $i$ .

Como  $f \in C_0(X)$ ,  $K_{\frac{\varepsilon_0}{2}} := \{x \in X : |f(x)| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}\}$  é compacto. Agora note que devemos ter, sem perda de generalidade,  $s_i^{-1}x_i \in K_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$  para todo  $i$  ou  $x_i \in K_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$  para todo  $i$ . Isso quer dizer que existe uma vizinhança compacta de  $e$ ,  $V$  tal que  $x_i \in VK_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$  para todo  $i$ . Portanto  $x_i \rightarrow x$  para algum  $x \in VK_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$ . Pela continuidade de  $f$  deveríamos ter  $\|f(s_i^{-1}x_i) - f(x_i)\| \rightarrow 0$ , o que não ocorre. Portanto,  $\alpha$  é contínua como queríamos demonstrar.  $\square$

**Observação 4.6** *A menos que se diga o contrário, quando falarmos de um grupo de transformação (geralmente localmente compacto Hausdorff)  $(G, X)$  e não mencionarmos a ação  $\alpha$  de  $G$  em  $C_0(X)$ , fica subentendido que a ação é aquela definida no lema acima.*

### 4.3 $C^*$ -SISTEMAS DINÂMICOS

Nesta seção definimos  $C^*$ -sistemas dinâmicos e produtos cruzados, bem como desenvolvemos alguns tópicos da teoria de representações covariantes e a relacionamos com a teoria de representações norma-1 decrescentes de produtos cruzados. Iniciemos os preparativos com o grupo dos  $*$ -automorfismos de uma  $C^*$ -álgebra.

Seja  $A$  uma  $C^*$ -álgebra. Denotaremos por  $Aut(A)$  o grupo dos  $*$ -automorfismos de  $A$ , com operação de composição. Mais ainda, pelo Lema 1.3 de (RAEBURN; WILLIAMS, 1998) ao munirmos  $Aut(A)$  com a topologia da convergência pontual, (aquela em que dada uma net  $(\phi_i)$  de  $Aut(A)$ , esta converge para  $\phi \in Aut(A)$  se e somente se

$$\|\phi_i(a) - \phi(a)\| \rightarrow 0$$

para todo  $a \in A$ ) obtemos um grupo topológico.

**Definição 4.7** *Um  $C^*$ -sistema dinâmico (ou apenas sistema dinâmico) é uma tripla  $(A, G, \alpha)$  consistindo de uma  $C^*$ -álgebra  $A$ , um grupo localmente compacto  $G$  e um homomorfismo de grupos contínuo  $\alpha : G \rightarrow Aut(A)$ . Nesse caso, também dizemos que  $\alpha$  é uma ação de  $G$  em  $A$ .*

**Exemplo 4.8** *Pelo Lema 4.5, dados  $(G, X)$  grupo de transformação localmente compacto e  $\alpha : G \rightarrow Aut(C_0(X))$  o homomorfismo de grupos*

dado por  $\alpha_s(f)(x) = f(s^{-1}x)$ , a tripla  $(C_0(X), G, \alpha)$  é um sistema dinâmico. É possível mostrar que toda ação (contínua) de  $G$  sobre  $C_0(X)$  é desta forma, como consta na Proposição 2.7 de (WILLIAMS, 2007).

Iniciaremos a abordagem de representações covariantes de um sistema dinâmico com a definição a seguir. Logo após, daremos dois dos principais exemplos situados nessa teoria. Mais ainda, definiremos uma nova  $C^*$ -álgebra partindo da  $*$ -álgebra  $C_c(G, A)$  (em que  $(A, G, \alpha)$  é sistema dinâmico) e de uma norma especial proveniente das representações covariantes.

**Definição 4.9** *Seja  $(A, G, \alpha)$  sistema dinâmico. Uma representação covariante de  $(A, G, \alpha)$  é um par  $(\pi, U)$  (em que  $\pi : A \rightarrow B(H)$  é uma representação de  $A$  e  $U : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$  uma representação unitária de  $G$ , sendo  $H$  um espaço de Hilbert,  $B(H)$  a  $C^*$ -álgebra dos operadores de  $H$  limitados e  $\mathcal{U}(H)$  o grupo dos operadores unitários) tal que:*

$$\pi(\alpha_s(a)) = U_s \pi(a) U_{s^{-1}} \quad (4.1)$$

para todos  $a \in A$  e  $s \in G$ . A equação 4.1 acima é chamada condição de covariância.

Dizemos que  $(\pi, U)$  é não-degenerada quando  $\pi$  o for.

**Exemplo 4.10** *Seja  $(C_0(G), G, \alpha)$  sistema dinâmico conforme o exemplo 4.8 para  $X = G$ . Considere  $M : C_0(G) \rightarrow B(L^2(G))$ ,*

$$M_f h(s) = f(s)h(s)$$

e  $\lambda : G \rightarrow \mathcal{U}(L^2(G))$  representação regular à esquerda,

$$\lambda(r)f(s) = f(r^{-1}s).$$

Então  $(M, \lambda)$  é representação covariante de  $(C_0(G), G, \alpha)$

Não é difícil ver que as fórmulas estão bem postas,  $M$  e  $\lambda$  bem definidos, e que ambos os homomorfismos são contínuos (cada um em seu contexto). Vamos provar que  $M$  preserva adjuntos,  $(\lambda_r)^* = \lambda_{r^{-1}}$  e  $(M, \lambda)$  satisfaz a condição de covariância. Tome  $f \in C_0(G)$ ,  $h, j \in L^2(G)$  e  $r, s \in G$ . Então:

1. ( $M$  preserva adjuntos)

$$\langle M_f(h), j \rangle = \int_G (M_f(h)j^*)(s) d\mu(s) = \int_G f(s)h(s)\overline{j(s)} d\mu(s)$$

$$= \int_G h(s) \overline{f(s)j(s)} d\mu(s) = \langle h, M_{f^*(j)} \rangle.$$

2.  $(\lambda_{r^{-1}} = (\lambda_r)^*)$

$$\begin{aligned} \langle \lambda_r(f), h \rangle &= \int_G f(r^{-1}s) \overline{h(s)} d\mu(s) \\ &= \int_G f(s) \overline{h(rs)} d\mu(s) = \langle f, \lambda_{r^{-1}}(h) \rangle. \end{aligned}$$

3. (Condição de covariância)

$$M_{\alpha_s(f)} h(r) = f(s^{-1}r)h(r) = (M_f \lambda_{s^{-1}} h)(s^{-1}r) = \lambda_s M_f \lambda_{s^{-1}} h(r).$$

Portanto,  $(M, \lambda)$  é uma representação covariante.  $\square$

**Exemplo 4.11** *Sejam  $(A, G, \alpha)$  sistema dinâmico com  $G$  grupo localmente compacto e  $\pi : A \rightarrow B(H_\pi)$  uma representação de  $A$ . A representação covariante regular (ou simplesmente representação regular) de  $(A, G, \alpha)$  com respeito a  $\pi$  é o par  $(\tilde{\pi}, \lambda)$  em que  $\tilde{\pi} : A \rightarrow B(L^2(G, H_\pi))$  e  $\lambda : G \rightarrow \mathcal{U}(L^2(G, H_\pi))$  são dados por:*

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(a)(\xi(r)) &= \pi(\alpha_{r^{-1}}(a))(\xi(r)); \\ \lambda_r \xi(s) &= \xi(r^{-1}s) \end{aligned}$$

Com certo trabalho verifica-se que as fórmulas estão bem definidas. A condição de covariância é dada pelo seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} (\lambda_s \tilde{\pi}(a) \lambda_{s^{-1}})(h)(r) &= (\tilde{\pi}(a) \lambda_{s^{-1}})(h)(s^{-1}r) \\ &= \pi(\alpha_{r^{-1}s}(a))(\lambda_{s^{-1}} h)(s^{-1}r) \\ &= \pi(\alpha_{r^{-1}s}(a))h(r) \\ &= \tilde{\pi}(\alpha_s(a))h(r). \end{aligned}$$

Nosso objetivo ao introduzir a noção de sistemas dinâmicos é mostrar sua estreita relação com uma nova  $C^*$ -álgebra (a qual definiremos mais a frente) chamada produto cruzado. Nessa  $C^*$ -álgebra, as operações de multiplicação e involução dependem do grupo e da ação que estão sendo considerados. A norma será determinada pelas representações covariantes do sistema dinâmico em questão. Provemos, primeiramente, a seguinte proposição. Resultados referentes a integração de grupos serão assumidos aqui para a construção da teoria. A menos que se diga o contrário, denotaremos por  $\Delta$  o homomorfismo contínuo

de grupos  $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  definido no Lema 1.61 de (WILLIAMS, 2007) que satisfaz a seguinte igualdade para qualquer  $f \in C_c(G)$  e  $r \in G$ :

$$\Delta(r) \int_G f(sr) d\mu(s) = \int_G f(s) d\mu(s),$$

em que  $\mu$  é uma medida de Haar de  $G$ . O leitor interessado poderá encontrar mais detalhes em (WILLIAMS, 2007).

**Proposição 4.12** *Sejam  $C_c(G, A)$  o conjunto das funções contínuas de suporte compacto de  $G$  em  $A$  e  $(A, G, \alpha)$  um sistema dinâmico, com  $G$  grupo localmente compacto e  $A$  uma  $C^*$ -álgebra. Para  $r \in G$ , as seguintes operações, respectivamente, de multiplicação e involução:*

$$\begin{aligned} f * g(r) &= \int_G f(s) \alpha_s(g(s^{-1}r)) d\mu(s); \\ f^*(r) &= \Delta(r^{-1}) \alpha_r(f(r^{-1})^*) \end{aligned}$$

e soma pontual de funções munem  $C_c(G, A)$  com uma estrutura de  $*$ -álgebra. A multiplicação assim definida recebe também o nome de produto de convolução.

### Demonstração:

Assumindo que o produto de convolução está bem definido (Corolário 1.104 de (WILLIAMS, 2007)), passemos para os cálculos propriamente ditos. Sejam  $f, g$  e  $h \in C_c(G, A)$ . Então:

1. (Associatividade da convolução)

$$\begin{aligned} f * (g * h)(r) &= \int_G f(s) \alpha_s \left( \int_G g(t) \alpha_t(h(t^{-1}s^{-1}r)) d(t) \right) d(s) \\ &= \int_G f(s) \int_G \alpha_s(g(t)) \alpha_{st}(h(t^{-1}s^{-1}r)) d(t) d(s) \\ &= \int_G \int_G f(s) \alpha_s(g(s^{-1}t)) \alpha_t(h(t^{-1}r)) d(t) d(s) \\ &= \int_G \int_G f(s) \alpha_s(g(s^{-1}t)) \alpha_t(h(t^{-1}r)) d(s) d(t) \\ &= (f * g) * h(r). \end{aligned}$$

2.  $((f^*)^* = f)$

$$\begin{aligned} (f^*)^*(r) &= \Delta(r^{-1}) \alpha_r(f^*(r^{-1})^*) \\ &= \Delta(r^{-1}) \alpha_r((\Delta(r) \alpha_{r^{-1}}(f(s)^*))^*) \\ &= \Delta(r^{-1}) \Delta(r) \alpha_r \circ \alpha_{r^{-1}}(f(r)) = f(r). \end{aligned}$$

3.  $((g * f)^* = f^* * g^*)$

$$\begin{aligned}
 (f^* * g^*)(r) &= \int_G f^*(s) \alpha_s(g^*(s^{-1}r)) d\mu(s) \\
 &= \int_G \Delta(s^{-1}) \alpha_s(f(s^{-1})^*) \alpha_s(\Delta(r^{-1}s) \alpha_{s^{-1}r}(g(r^{-1}s)^*)) d\mu(s) \\
 &= \Delta(r^{-1}) \int_G \alpha_s(f(s^{-1})^*) \alpha_r(g(r^{-1}s)^*) d\mu(s) \\
 &= \Delta(r^{-1}) \int_G \alpha_{rs}(f(s^{-1}r^{-1})^*) \alpha_r(g(s)^*) d\mu(s) \\
 &= \Delta(r^{-1}) \alpha_r \left( \int_G \alpha_s(f(s^{-1}r^{-1})^*) g(s)^* \right) d\mu(s) \\
 &= \Delta(r^{-1}) \alpha_r \left( \left( \int_G g(s) \alpha_s(f(s^{-1}r^{-1})) d\mu(s) \right)^* \right) \\
 &= \Delta(r^{-1}) \alpha_r((g * f(r^{-1})) = (g * f)^*(r).
 \end{aligned}$$

**Observação 4.13** Para cada  $f \in C_c(G, A)$ , a aplicação

$$\|f\|_1 = \int_G \|f(s)\| d\mu(s)$$

define uma norma em  $C_c(G, A)$ , algumas vezes chamada de "norma-1" ou norma- $L_1$ . Vejamos como tal norma se relaciona com a estrutura algébrica que acabamos de impor a  $C_c(G, A)$ :

1. (Involução)

$$\begin{aligned}
 \|f^*\|_1 &= \int_G \|f^*(s)\| d\mu(s) = \int_G \|\Delta(s^{-1}) \alpha_s(f(s^{-1})^*)\| d\mu(s) \\
 &= \Delta(s^{-1}) \int_G \|f(s^{-1})\| d\mu(s) = \int_G \|f(s)\| d\mu(s) = \|f\|_1.
 \end{aligned}$$

Usamos acima que a função modular  $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfaz, segundo o Lema 1.67 de (WILLIAMS, 2007),

$$\Delta(s^{-1}) \int_G f(s^{-1}) d\mu(s) = \int_G f(s) d\mu(s)$$

para toda  $f \in C_c(G)$ .



2. (Convolução)

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_1 &= \int_G \left\| \int_G f(r) \alpha_r(g(r^{-1}s)) d\mu(r) \right\| d\mu(s) \\
&\leq \int_G \int_G \|f(r) \alpha_r(g(r^{-1}s))\| d\mu(r) d\mu(s) \\
&\leq \int_G \int_G \|f(r)\| \|g(r^{-1}s)\| d\mu(r) d\mu(s) \\
&= \int_G \|f(r)\| \left( \int_G \|g(r^{-1}s)\| d\mu(s) \right) d\mu(r) \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1.
\end{aligned}$$

**Definição 4.14** Um  $*$ -homomorfismo  $\pi : C_c(G, A) \rightarrow B(H)$  é chamada uma  $*$ -representação de  $C_c(G, A)$  em  $H$ . Esta é dita não-degenerada se  $\overline{\text{span}}\{\pi(C_c(G, A))H\} = H$ . Caso  $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_1$ , então  $\pi$  é dita  $L_1$ -norma decrescente.

Enunciaremos a seguinte proposição sem demonstrá-la. O leitor interessado poderá encontrá-la em (WILLIAMS, 2007). Ela é necessária pois introduziremos outra norma em  $C_c(G, A)$ , sobre a qual se embasará toda a teoria de produtos cruzados.

**Proposição 4.15** Suponha  $(\pi, U)$  representação covariante de  $(A, G, \alpha)$  em  $H$  espaço de Hilbert. Então a aplicação:

$$\begin{aligned}
\pi \rtimes U : C_c(G, A) &\rightarrow B(H) \\
f &\mapsto \int_G \pi(f(s)) U_s d\mu(s)
\end{aligned}$$

define uma  $*$ -representação  $L_1$ -norma decrescente de  $C_c(G, A)$  em  $H$ , chamada forma integrada de  $(\pi, U)$ . Mais ainda, toda  $*$ -representação  $L_1$ -norma decrescente de  $C_c(G, A)$  é da forma acima. A representação  $\pi \rtimes U$  é não-degenerada se  $\pi$  for não-degenerada.

**Exemplo 4.16** Seja  $(A, G, \alpha)$  um sistema dinâmico e considere a representação covariante regular  $(\tilde{\pi}, \lambda)$  sobre  $L^2(G, H)$  do Exemplo 4.11 associada à uma representação fiel  $\pi : A \rightarrow B(H)$  (observe que toda  $C^*$ -álgebra admite uma tal representação pelo Teorema de Gelfand-Naimark). Então, utilizando a proposição acima, obtemos um homomorfismo  $\tilde{\pi} \rtimes \lambda : C_c(G, A) \rightarrow B(L^2(G, H))$  entre  $*$ -álgebras que é dado pela fórmula:

$$(\tilde{\pi} \rtimes \lambda)(f)\xi|_r = \left( \int_G \tilde{\pi}(f(s)) \lambda_s(\xi) d\mu(s) \right)_r$$

$$= \int_G \pi(\alpha_{r^{-1}}(f(s))) \xi(s^{-1}r) d\mu(s).$$

O fecho da imagem de  $\tilde{\pi} \rtimes \lambda$ , denotada por  $A \rtimes_{\alpha, \pi} G$ , é portanto uma  $C^*$ -subálgebra de  $B(L^2(G, H))$ . Mais ainda, é possível provar (PEDERSEN, 1979) que  $A \rtimes_{\alpha, \pi} G \cong A \rtimes_{\alpha, \rho} G$  para quaisquer duas representações  $\pi$  e  $\rho$  fiéis, isto é, à menos de isomorfismo,  $A \rtimes_{\alpha, \pi} G$  independe da escolha de  $\pi$ . Por esta razão,  $A \rtimes_{\alpha, \pi} G$  é simplesmente denotada por  $A \rtimes_{\alpha, \Gamma} G$ . Esta  $C^*$ -álgebra é chamada o produto cruzado reduzido do sistema dinâmico  $(A, G, \alpha)$ .

Como um caso particular importante, temos a  $C^*$ -álgebra reduzida do grupo  $G$ , denotada por  $C_\Gamma^*(G)$ , e definida como o produto cruzado reduzido  $\mathbb{C} \rtimes_{\alpha, \Gamma} G$ , onde  $\alpha$  é (necessariamente) a ação trivial de  $G$  sobre  $\mathbb{C}$ . Note que neste caso podemos tomar a representação identidade  $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cong B(\mathbb{C})$  na construção acima. Assim  $C_\Gamma^*(G)$  é simplesmente o fecho de  $\lambda(C_c(G))$  em  $B(L^2(G))$ , onde  $\lambda: C_c(G) \rightarrow B(L^2(G))$  é a (forma integrada da) representação regular dada por  $\lambda(f)\xi(r) = \int_G f(s)\xi(s^{-1}r)d\mu(r) = f * \xi(r)$ .

Agora estamos prontos para introduzir uma nova  $C^*$ -álgebra a partir de um sistema dinâmico  $(A, G, \alpha)$  dado. Faremos isso por meio de uma proposição (que também não demonstraremos). Mais ainda, posteriormente explicitaremos a relação existente entre representações covariantes e \*-representações dessa nova  $C^*$ -álgebra.

**Proposição 4.17** *Seja  $(A, G, \alpha)$  sistema dinâmico e para cada  $f \in C_c(G, A)$  defina:*

$$\begin{aligned} \|f\| &:= \sup\{\|(\pi \rtimes U)(f)\| : (\pi, U) \in \text{Rep}(A, G, \alpha)\} \\ &= \sup\{\|\rho(f)\| : \rho \in \text{Rep}(C_c(G, A))\}, \end{aligned}$$

onde  $\text{Rep}(C_c(G, A))$  denota a classe das \*-representações  $L_1$ -norma decrescentes de  $C_c(G, A)$ . A norma  $\|\cdot\|$  é chamada norma universal e  $\text{Rep}(A, G, \alpha)$  é o conjunto de todas as representações covariantes do sistema dinâmico  $(A, G, \alpha)$ . O completamento de  $C_c(G, A)$  com respeito a essa norma é uma  $C^*$ -álgebra, denominada produto cruzado de  $A$  por  $G$  e denotada por  $A \rtimes_\alpha G$ .

**Observação 4.18** *Dada uma representação covariante  $(\pi, U)$  do sistema dinâmico  $(A, G, \alpha)$ , a sua forma integrada  $\pi \rtimes U$  é, por construção, uma representação de  $C_c(G, A)$ . Mas por definição da norma universal podemos estendê-la ao produto cruzado  $A \rtimes_\alpha G$ . A extensão é ainda denotada por  $\pi \rtimes U$ . Pode-se mostrar que a aplicação  $(\pi, U) \mapsto \pi \rtimes U$*

é uma bijeção entre a classe das representações covariantes do sistema  $(A, G, \alpha)$  e a classe das representações da  $C^*$ -álgebra  $A \rtimes_{\alpha} G$  – veja (WILLIAMS, 2007).

Conforme o Exemplo 4.16, o produto cruzado reduzido  $A \rtimes_{\alpha, r} G$  é definido como o fecho da imagem de uma representação especial de  $C_c(G, A)$ , a representação regular  $\tilde{\pi} \rtimes \lambda$  associada à uma representação fiel  $\pi$  de  $A$ . Estendendo  $\tilde{\pi} \rtimes \lambda$  à uma representação de  $A \rtimes_{\alpha} G$  como acima, vemos que a representação regular pode ser vista como um  $*$ -homomorfismo

$$\tilde{\pi} \rtimes \lambda: A \rtimes_{\alpha} G \rightarrow A \rtimes_{\alpha, r} G$$

que é necessariamente sobrejetivo (já que a imagem de uma  $C^*$ -álgebra por um  $*$ -homomorfismo é sempre fechada). Em várias situações,  $\tilde{\pi} \rtimes \lambda$  é injetiva e assim um isomorfismo. Este é o caso se o grupo  $G$  for amenable; veja (WILLIAMS, 2007) para mais detalhes.

Casos especiais de grupos amenable incluem grupos compactos e abelianos. Como todos os nossos principais resultados no Capítulo 5 envolvem apenas grupos compactos, eles também podem ser reenunciados trocando-se os produtos cruzados cheios pelos reduzidos correspondentes.

**Exemplo 4.19** Seja  $G$  um grupo localmente compacto qualquer. Tomando  $A = \mathbb{C}$  com ação  $\alpha$  de  $G$  (necessariamente) trivial, o produto cruzado  $\mathbb{C} \rtimes G$  é chamado a  $C^*$ -álgebra do grupo  $G$  e denotada por  $C^*(G)$ . Observe que  $C^*(G)$  é a  $C^*$ -álgebra que é o completamento da  $*$ -álgebra  $C_c(G)$  munida de convolução e involução

$$f * g(t) = \int_G f(s)g(s^{-1}t)d\mu(s) \quad e \quad f^*(s) = \Delta(s^{-1})\overline{f(s^{-1})}$$

e com respeito à norma universal:

$$\|f\| = \sup\{\|\tilde{U}(f)\| : U \in \text{Rep}(G)\} = \sup\{\|\rho(f)\| : \rho \in \text{Rep}(C_c(G))\},$$

onde  $\text{Rep}(C_c(G))$  denota a classe das representações  $L_1$ -norma decrescentes de  $C_c(G)$ , e  $\text{Rep}(G)$  denota a classe das representações unitárias de  $G$ .

Para  $U \in \text{Rep}(G)$ ,  $\tilde{U}$  denota a forma integrada de  $U$ , isto é, a representação  $\tilde{U} \in \text{Rep}(C_c(G))$  dada por  $\tilde{U}(f) = \int f(s)U_s\mu(s)$  para toda  $f \in C_c(G)$ . Como observado acima, cada representação  $L^1$ -norma decrescente de  $C_c(G)$  se estende à uma representação de  $C^*(G)$  e a aplicação  $\text{Rep}(G) \ni U \mapsto \tilde{U} \in \text{Rep}(C_c(G)) \cong \text{Rep}(C^*(G))$  é uma bijeção. Considerando a representação regular  $\lambda$  de  $G$  sobre  $L^2(G)$ , obtemos a  $C^*$ -álgebra reduzida  $C_r^*(G)$  de  $G$  como imagem de sua forma

integrada  $\tilde{\lambda}: C^*(G) \rightarrow B(L^2(G))$ . Também como já observado, se o grupo é amenable, então  $\lambda$  é um isomorfismo e  $C^*(G) \cong C_r^*(G)$ . Em particular, este é o caso de grupos compactos e abelianos. Pode-se mostrar que a recíproca também vale, isto é,  $G$  é amenable se e somente se  $\tilde{\lambda}$  é um isomorfismo. No caso de grupos abelianos, pode-se ainda mostrar que  $C^*(G)$  é isomorfa à  $C^*$ -álgebra comutativa  $C_0(\hat{G})$  através da transformada de Fourier  $f \mapsto \hat{f}|_x := \int_G \overline{x(t)}f(t)d\mu(t)$  para  $f \in C_c(G)$  e  $x \in \hat{G}$ , onde  $\hat{G}$  denota o dual de Pontriagin de  $G$  (o grupo dos homomorfismos contínuos  $x: G \rightarrow S^1$  de  $G$  no círculo  $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ ); veja (WILLIAMS, 2007) para mais detalhes.

Enunciaremos agora outra propriedade fundamental do produto cruzado. Dado um produto cruzado  $A \rtimes_\alpha G$ , nem sempre é possível mergulhar a  $C^*$ -álgebra  $A$  ou o grupo  $G$  nele. Contudo, isso será sempre possível quando considerarmos a  $C^*$ -álgebra dos multiplicadores  $M(A \rtimes_\alpha G)$ . Isso é o que mostra a proposição a seguir enunciada. Omitiremos sua demonstração por se tratar de extenso trabalho técnico. O leitor interessado poderá encontrar subsídios em (WILLIAMS, 2007) e (ECHTERHOFF, 2006).

**Proposição 4.20** *Seja  $(A, G, \alpha)$  um sistema dinâmico. Então existe um homomorfismo fiel não degenerado*

$$i_A : A \rightarrow M(A \rtimes_\alpha G)$$

e uma representação unitária de  $G$

$$i_G : G \rightarrow UM(A \rtimes_\alpha G)$$

tais que para  $f \in C_c(G, A)$ ,  $r, s \in G$  e  $a \in A$ , temos:

$$\begin{aligned} i_A(a)f(r) &= af(r), \\ (fi_A(a))(r) &= f(r)\alpha_r(a), \\ i_G(r)f(s) &= \alpha_r(f(r^{-1}s)), \\ (fi_G(r))(s) &= \Delta(r^{-1})f(sr^{-1}). \end{aligned}$$

Também  $(i_A, i_G)$  é covariante, no seguinte sentido:

$$i_A(\alpha_r(a)) = i_G(r)i_A(a)i_G(r)^*.$$

Mais ainda, se  $(\pi, U)$  é não degenerada, então

$$(\pi \rtimes U)^-(i_A(a)) = \pi(a); \quad (\pi \rtimes U)^-(i_G(s)) = U_s.$$

Em muitas situações é mais natural representar  $C^*$ -álgebras sobre módulos de Hilbert ao invés de espaços de Hilbert. De fato, implicitamente isto já ocorreu na proposição acima, quando representamos o sistema dinâmico  $(A, G, \alpha)$  em  $M(A \rtimes_{\alpha} G)$  através de uma “representação covariante universal”, onde aqui consideramos a  $C^*$ -álgebra  $A \rtimes_{\alpha} G$  como módulo de Hilbert sobre si própria. Para tornar esta linguagem mais precisa, apresentamos a seguir uma extensão da teoria de representações covariantes sobre espaços de Hilbert para representações sobre módulos de Hilbert.

**Definição 4.21** *Sejam  $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$  um sistema dinâmico e  $E$  um  $B$ -módulo de Hilbert à direita (ver Definição 2.1). Um homomorfismo covariante de  $(A, G, \alpha)$  na  $C^*$ -álgebra dos operadores adjuntáveis  $L(E)$  (ver Definição 2.8) é um par  $(\pi, U)$  tal que  $\pi : A \rightarrow L(E)$  é homomorfismo entre  $C^*$ -álgebras,  $U : G \rightarrow \mathcal{U}(E)$  é uma representação unitária de  $G$ , isto é, um homomorfismo de grupos fortemente contínuo (entre o grupo  $G$  e o grupo dos operadores unitários  $\mathcal{U}(E)$  de  $L(E)$ ) tal que  $\pi(\alpha_s(a)) = U_s \pi(a) U_{s^{-1}}$ .  $(\pi, U)$  será dita não-degenerada se  $\pi$  for não-degenerada.*

**Definição 4.22** *Sejam  $L(E)$  o conjunto dos operadores adjuntáveis do  $B$ -módulo de Hilbert à direita  $E$ ,  $\{T_i\}$  uma net em  $L(E)$  e  $T \in L(E)$ . Dizemos que  $T_i$  converge fortemente para  $T$  se e somente se*

$$\|T_i(x) - T(x)\| \rightarrow 0$$

para todo  $x \in E$ . Dizemos que  $T_i$  converge estritamente para  $T$  se e somente se

$$T_i R \rightarrow TR \text{ e } RT_i \rightarrow RT$$

para qualquer  $R \in K(E)$ .

**Proposição 4.23** *Seja  $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$  um sistema dinâmico e  $E$  um  $B$ -módulo de Hilbert para alguma  $C^*$ -álgebra  $B$ . Se  $(\pi, U)$  é homomorfismo covariante de  $(A, G, \alpha)$  em  $L(E)$ , então*

$$\pi \rtimes U(f) = \int_G \pi(f(s)) U_s d\mu(s)$$

é operador bem definido em  $L(E)$  e  $\pi \rtimes U$  se estende a um homomorfismo de  $A \rtimes_{\alpha} G$  em  $L(E)$  que é não degenerado se  $\pi$  o for. Nesse caso,  $(\pi \rtimes U)^{-}(i_A(a)) = \pi(a)$  e  $(\pi \rtimes U)^{-}(i_G(s)) = U_s$ , em que  $(\pi \rtimes U)^{-}$  denota a extensão de  $\pi \rtimes U$  para a álgebra dos multiplicadores  $M(A \rtimes_{\alpha} G)$ .

Por outro lado, se  $L : A \rtimes_{\alpha} G \rightarrow L(E)$  é um homomorfismo não degenerado, então existe um homomorfismo covariante não degenerado  $(\pi, U)$  de  $(A, G, \alpha)$  em  $L(E)$  tal que  $L = \pi \rtimes U$ . De fato, se  $\bar{L}$  é a extensão canônica de  $L$  em  $M(A \rtimes_{\alpha} G)$  então  $U_s = \bar{L}(i_G(s))$  e  $\pi(a) = \bar{L}(i_A(a))$ .

### Demonstração:

Usaremos aqui o Lema 1.97 de (WILLIAMS, 2007): dado  $U : G \rightarrow U(E)$  homomorfismo unitário de grupos,  $U$  será estritamente contínuo se for fortemente contínuo. Assim,  $s \mapsto \pi(f(s))U_s$  será estritamente contínuo para cada  $f \in C_c(G, A)$  e  $\pi \rtimes U(f)$  será operador em  $L(E)$ , pelo Lema 1.101 de (WILLIAMS, 2007).

Considere agora  $\rho : K(E) \rightarrow B(H_{\rho})$  representação fiel não-degenerada. Tome  $\tilde{\rho} : L(E) \rightarrow B(H_{\rho})$  a extensão de  $\rho$ . Vamos definir a seguinte representação covariante  $(\tilde{\pi}, \tilde{U})$ ,

$$\tilde{\pi}(a) = \tilde{\rho}(\pi(a)), \quad \tilde{U}_s = \tilde{\rho}(U_s).$$

Mostremos que  $s \mapsto U_s$  é estritamente contínuo. Tome  $\rho(T)h \in H_{\rho}$ ,  $h \in H_{\rho}$  e  $T \in K(E)$ . Sendo  $\rho$  não-degenerada, basta mostrar que  $s \mapsto \tilde{U}_s \rho(T)h$  é contínuo. Note que  $\tilde{U}_s \rho(T)h = \rho(U_s T)h$ , portanto, a continuidade que queremos segue da continuidade de  $\rho$  e do fato de  $U_s T$  ser contínua em  $s$ . Agora:

$$\tilde{\pi}(\alpha_s(a)) = \tilde{\rho}(\pi(\alpha_s(a))) = \tilde{\rho}(U_s \pi(a) U_{s^{-1}}) = \tilde{U}_s \tilde{\pi}(a) \tilde{U}_{s^{-1}}.$$

Portanto  $(\tilde{\pi}, \tilde{U})$  é representação covariante de  $(A, G, \alpha)$ . Observe o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\rho}(\pi \rtimes U(f))\| &= \left\| \tilde{\rho} \left( \int_G \pi(f(s)) U_s d\mu(s) \right) \right\| \\ &= \left\| \int_G \tilde{\pi}(f(s)) \tilde{U}_s d\mu(s) \right\| = \|\tilde{\pi} \rtimes \tilde{U}(f)\| \leq \|f\|. \end{aligned}$$

Então  $\pi \rtimes U = \tilde{\rho}^{-1}(\tilde{\pi} \rtimes \tilde{U})$  é homomorfismo de  $C_c(G, A)$  em  $L(E)$  e se estende para um homomorfismo de  $A \rtimes_{\alpha} G$  em  $L(E)$ . Assuma que  $\pi$  seja não-degenerada. Provaremos que  $\pi \rtimes U$  é não-degenerada. Fixe  $\varepsilon > 0$  e  $x \in X$ . Seja  $\{e_i\}$  unidade aproximada para  $A$ . Assim existe  $e_{i_0} = u$  tal que  $\|\pi(u)x - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Também existe  $V$  vizinhança compacta da identidade  $e$  do grupo tal que  $\|U_s x - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ , para todo  $s \in V$ . Podemos ainda construir  $\phi \in C_c(G)$ ,  $\phi \geq 0$  tal que  $\int_G \phi(s) d\mu(s) = 1$  e  $\text{supp}(\phi) \subset V$ . Tome  $f \in C_c(G, A)$  dada por  $f(s) = \phi \otimes u(s) = \phi(s)u$ .

Tome  $y \in X$  com  $\|y\| \leq 1$ . Então:

$$\begin{aligned}
\|\langle \pi \rtimes U(f)x, y \rangle - \langle x, y \rangle\| &= \left\| \left\langle \int_G \phi(s) \pi(u) U_s d\mu(s)(x) - x, y \right\rangle \right\| \\
&= \left\| \int_G \phi(s) \langle \pi(u) U_s(x) - x, y \rangle d\mu(s) \right\| \\
&\leq \int_G \phi(s) \|\langle \pi(u) U_s(x) - x, y \rangle\| d\mu(s) \\
&\leq \int_G \phi(s) \|\pi(u)\| \|U_s(x) - x\| \|y\| d\mu(s) \\
&\quad + \int_G \phi(s) d\mu(s) \|\pi(u)x - x\| \|y\| \\
&\leq \left( \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \int_G \phi(s) d\mu(s) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sendo  $y$  genérico, como  $\|\pi \rtimes U(f)(x) - x\| < \varepsilon$ , temos  $\pi \rtimes U$  não-degenerada. Agora, passando para estensão a álgebra dos multiplicadores, conseguimos:

$$\begin{aligned}
(\pi \rtimes U)^-(i_A(a)) \circ (\pi \rtimes U)^-(f) &= (\pi \rtimes U)^-(i_A(a)f) \\
&= \pi \rtimes U(i_A(a)(f)) \\
&= \int_G \pi(af(s)) U_s d\mu(s) \\
&= \pi(a)(\pi \rtimes U)^-(f)
\end{aligned}$$

Isso garante que  $(\pi \rtimes U)^-(i_A(a)) = \pi(a)$ . Analogamente:

$$\begin{aligned}
(\pi \rtimes U)^-(i_G(s)) \circ (\pi \rtimes U)^-(f) &= (\pi \rtimes U)^-(i_G(s)f) \\
&= (\pi \rtimes U)(i_G(s)f) \\
&= \int_G \pi(\alpha_s(f(s^{-1}r)) U_r d\mu(r) \\
&= \int_G U_s \pi(f(s^{-1}r)) U_{s^{-1}r} d\mu(r) \\
&= U_s \int_G \pi(f(r)) U_r = U_s (\pi \rtimes U)^-(f).
\end{aligned}$$

Assim, também temos que  $(\pi \rtimes U)^-(i_G(s)) = U_s$ .

Agora, seja  $L : A \rtimes_{\alpha} G \rightarrow L(E)$  homomorfismo não degenerado.

Defina:

$$\begin{aligned} U_s &= \overline{L}(i_G(s)); \\ \pi(a) &= \overline{L}(i_A(a)). \end{aligned}$$

Vamos provar que  $(\pi, U)$  é um homomorfismo covariante de  $(A, G, \alpha)$  em  $L(E)$ . De fato:

$$\pi(\alpha_s(a)) = \overline{L}(i_A(\alpha_s(a))) = \overline{L}(i_G(s)i_A(a)i_G(s^{-1})) = U_s\pi(a)U_{s^{-1}}.$$

Mostremos que  $\pi$  é não-degenerada e  $U$  fortemente contínuo. Seja  $\{e_i\}$  unidade aproximada para  $A$ . Queremos mostrar que  $\pi(e_i)x \rightarrow x$  para todo  $x \in X$ . Mas,  $L$  é não-degenerada (por hipótese) e não é difícil ver que  $i_A(e_i) \rightarrow 1$  em  $M(A \rtimes_\alpha G)$ . Portanto  $\pi(e_i) = \overline{L}(i_A(e_i))$  converge estritamente para  $1_E \in L(E)$ .

Agora, como  $i_G$  é estritamente contínua e unitária,  $\overline{L}$  homomorfismo contínuo, teremos:

$$s_i \rightarrow e \Rightarrow i_G(s_i) \rightarrow 1_{M(A \rtimes_\alpha G)} \Rightarrow \overline{L}(i_G(s_i))x \rightarrow x,$$

para todo  $x \in E$  e isso garante que  $U$  é fortemente contínuo.

Para vermos que  $L = \pi \rtimes U$  trazemos a tona o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} L(i_A(a)i_G(z)) &= \overline{L}(i_A(a)\overline{L}(i_G(z))) = \pi(a)\overline{L}\left(\int_G z(s)i_G(s)d\mu(s)\right) \\ &= \pi(a)\int_G z(s)U_s d\mu(s) = \pi \rtimes U(i_A(a)i_G(z)). \end{aligned}$$

Como  $i_A(a)i_G(z) = z \otimes a$  e  $\text{span}\{z \otimes a : z \in C_c(G), a \in A\}$  é denso em  $A \rtimes_\alpha G$ , devemos ter  $L = \pi \rtimes U$   $\square$

**Observação 4.24** *A partir da proposição acima, podemos provar que a aplicação  $(\pi, U) \mapsto \pi \rtimes U$  é uma bijeção entre o conjunto das representações covariantes não-degeneradas de  $(A, G, \alpha)$  e as representações não-degeneradas de  $A \rtimes_\alpha G$ . De fato, mostramos acima que tal aplicação é sobrejetiva. Suponha agora que  $\pi_1 \rtimes U_1 = \pi_2 \rtimes U_2$ . Assim:*

$$\begin{aligned} \pi_1(a) &= (\pi_1 \rtimes U_1)^-(i_A(a)) = (\pi_2 \rtimes U_2)^-(i_A(a)) = \pi_2(a); \\ U_1(s) &= (\pi_1 \rtimes U_1)^-(i_G(s)) = (\pi_2 \rtimes U_2)^-(i_G(s)) = U_2(s) \end{aligned}$$

e a correspondência é, de fato, um-a-um.

**Exemplo 4.25** *Sejam  $G = \mathbb{Z}_2 = \{\dot{0}, \dot{1}\}$  (inteiros módulo-2),  $A$  uma  $C^*$ -álgebra e  $\alpha$  ação de  $G$  em  $A$ . Então  $\alpha_{\dot{1}}^2 = I_A$ , já que  $\dot{1} + \dot{1} = \dot{0}$ . Considere ainda o sistema dinâmico  $(A, G, \alpha)$ . Nesse contexto, o conjunto  $C(\mathbb{Z}_2, A)$  é simplesmente o conjunto de todas as funções de*



$\mathbb{Z}_2$  em  $A$ . Provaremos que  $A \rtimes_{\alpha} G$  é isomorfo a uma  $C^*$ -subálgebra de  $M_2(A)$ .

Considere a seguinte  $C^*$ -subálgebra de  $M_2(A)$ :

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha_1(b) & \alpha_1(a) \end{pmatrix} \in M_2(A) : a, b \in A \right\}.$$

A verificação de que  $D$  é espaço vetorial que preserva adjuntos é trivial. Note agora que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha_1(b) & \alpha_1(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ \alpha_1(b') & \alpha_1(a') \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} aa' + b\alpha_1(b') & ab' + b\alpha_1(a') \\ \alpha_1(b)a' + \alpha_1(a)b' & \alpha_1(b)b' + \alpha_1(aa') \end{pmatrix} \in D, \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} \alpha_1(b)b' + \alpha_1(aa') &= \alpha_1(aa' + b\alpha_1(b')); \\ \alpha_1(b)a' + \alpha_1(a)b' &= \alpha_1(ab' + b\alpha_1(a')). \end{aligned}$$

Também não é difícil ver que  $D$  é fechado em  $M_2(A)$ . Tome agora a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \Phi : C(\mathbb{Z}_2, A) &\rightarrow D \\ \Phi(f) &= \begin{pmatrix} f(\bar{0}) & f(\bar{1}) \\ \alpha_1(f(\bar{1})) & \alpha_1(f(\bar{0})) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Não é difícil ver que tal aplicação é um  $*$ -homomorfismo bijetivo entre  $*$ -álgebras, considerando  $C(\mathbb{Z}_2, A)$  com estrutura  $*$ -algébrica proveniente de  $(A, G, \alpha)$ . Como  $D$  é fielmente representado num espaço de Hilbert, por definição de norma universal, segue que  $\|f\| \geq \|\Phi(f)\|$ . Por outro lado, fixe  $L$  representação de  $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_2$ . Segue, então, que  $L \circ \Phi^{-1}$  é  $*$ -homomorfismo de  $D$  em  $B(H_L)$  e como todo  $*$ -homomorfismo entre  $C^*$ -álgebras é norma decrescente, segue que

$$\|L(f)\| = \|L(\Phi^{-1}(\Phi(f)))\| \leq \|\Phi(f)\|.$$

Portanto  $\|f\| = \|\Phi(f)\|$  e  $\Phi$  é um isomorfismo de  $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_2$  em  $D$  (no sentido de sendo  $\Phi : C(\mathbb{Z}_2, A) \rightarrow D$   $*$ -homomorfismo isométrico e sobrejetor, este se estende isomorficamente para o produto cruzado  $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_2$ ).  $\square$

Nosso objetivo agora é demonstrar, inspirados em (PHILLIPS,

2008), que quando  $G$  é finito, vale a igualdade

$$C(G, A) = A \rtimes_{\alpha} G,$$

em que  $(A, G, \alpha)$  é sistema dinâmico e  $C(G, A)$  é \*-álgebra com estrutura proveniente desse sistema dinâmico. Para tal intento, alguns preparativos.

**Lema 4.26** *Seja  $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$  uma ação de um grupo discreto  $G$  numa  $C^*$ -álgebra  $A$ . Sejam  $\pi_0 : A \rightarrow B(H_0)$  uma representação e  $(\tilde{\pi}_0, \lambda)$  a representação regular de  $(A, G, \alpha)$  associada. Tome  $f \in C_c(G, A)$ , ou seja,  $f = \sum_{s \in G} f(s)\delta_s$ , em que  $f(s) \neq 0$  apenas para uma quantidade finita de elementos de  $G$  e  $\delta_s \in C_c(G)$  é a função que vale 1 em  $s$  e 0 caso contrário. Para  $\xi \in H = L^2(G, H_0)$  temos:*

$$\tilde{\pi}_0 \rtimes \lambda(f)(\xi)|_r = \sum_{s \in G} \pi_0(\alpha_{r^{-1}}(f(s)))(\xi(s^{-1}r)).$$

**Demonstração:** O resultado segue da rápida constatação:

$$\tilde{\pi}_0 \rtimes \lambda(f)(\xi)|_r = \sum_{s \in G} \tilde{\pi}_0(f(s))(\lambda_s \xi)|_r = \sum_{s \in G} \pi_0(\alpha_{r^{-1}}(f(s)))(\xi(s^{-1}r)). \square$$

**Corolário 4.27** *Considere as hipóteses do lema anterior e tome  $f = \sum_{s \in G} f(s)\delta_s$  também como lá. Para  $r \in G$ , seja  $u_r \in B(H_0, H)$  isometria que manda  $h \in H_0$  para a função  $\xi_{r,h} \in L^2(G, H_0)$  definida por  $\xi_{r,h}(s) = h$  se  $s = r$  e  $\xi_{r,h}(s) = 0$  caso contrário. Então*

$$u_r^* \tilde{\pi}_0 \rtimes \lambda(f)u_t = \pi_0(\alpha_{r^{-1}}(f(rt^{-1})), \forall r, t \in G.$$

**Demonstração:** Note que  $u_r^* : L^2(G, H_0) \rightarrow H_0$  é o operador avaliação no ponto  $r \in G$ . Dado  $h \in H_0$ , teremos:

$$\begin{aligned} u_r^* \tilde{\pi}_0 \rtimes \lambda(f)u_t(h) &= \tilde{\pi}_0 \rtimes \lambda(f)u_t(h)|_r \\ &= \sum_{s \in G} \pi_0(\alpha_{r^{-1}}(f(s))u_t(h)(s^{-1}r) \\ &= \pi_0(\alpha_{r^{-1}}(f(rt^{-1}))(h). \end{aligned}$$

pois apenas quando tivermos  $s = rt^{-1}$  a função  $u_t(h)$  não se anulará.

$\square$

**Lema 4.28** *Seja  $(A, G, \alpha)$  um sistema dinâmico com grupo finito  $G$  e considere  $C(G, A)$  com estrutura \*-algébrica herdada do sistema dinâmico.*

Então para toda  $f \in C(G, A)$  vale:

$$\|f\|_\infty \leq \|f\| \leq \|f\|_1,$$

em que

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \max_{s \in G} \{\|f(s)\|\}, \\ \|f\| &\text{ é a norma universal;} \\ \|f\|_1 &= \sum_{s \in G} \|f(s)\|. \end{aligned}$$

**Demonstração:** Pelas proposições 4.15 e 4.17, temos  $\|f\| \leq \|f\|_1$ . Para a outra desigualdade, seja  $\pi_0 : A \rightarrow B(H_0)$  uma representação não-degenerada e injetiva. Utilizando a mesma notação do Corolário 4.27, teremos:

$$\|f(r)\| = \|\pi_0(f(r))\| = \|u_e^* \pi_0 \rtimes \lambda(f) u_{r^{-1}}\| \leq \|\pi_0 \rtimes \lambda(f)\| \leq \|f\|. \square$$

**Proposição 4.29** *Se  $G$  é grupo finito e  $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$  é ação na  $C^*$ -álgebra  $A$ , então  $C(G, A)$  (com estrutura  $*$ -algébrica proveniente do sistema dinâmico) é completo em relação a norma universal. Portanto, nesse caso,  $C(G, A) = A \rtimes_\alpha G$ .*

**Demonstração:** Pelo Lema 4.28 acima, se  $G$  é finito então  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_\infty$  são equivalentes e não é difícil ver que  $C(G, A)$  é completo considerando qualquer uma das normas. Como  $\|f\|_\infty \leq \|f\| \leq \|f\|_1$  para toda  $f \in C(G, A)$ , então  $C(G, A)$  será completo em relação a norma universal e assim,  $C(G, A) = A \rtimes_\alpha G. \square$

Agora, atentemos novamente para o caso  $A = C_0(X)$ . Há situações em que é melhor se trabalhar com uma  $*$ -subálgebra densa de  $C_c(G, C_0(X))$  para se provar resultados referentes a produtos cruzados. Considere  $C_c(G \times X)$   $*$ -álgebra com operações de convolução e involução dadas, respectivamente, por:

1.  $(f * g)(r, x) = \int_G f(s, x) g(s^{-1}r, s^{-1}x) d\mu(s),$
2.  $f^*(r, x) = \Delta(r^{-1}) \overline{f(r^{-1}, r^{-1}x)}.$

Vamos agora provar que a imagem da inclusão canônica

$$\phi : C_c(G \times X) \hookrightarrow C_c(G, C_c(X)) \subset C_c(G, C_0(X))$$

que associa  $f \in C_c(G \times X)$  ao elemento  $\phi(f) \in C_c(G, C_c(X))$  definido por  $\phi(f)(r)(x) = f(r, x)$  nos dá uma  $*$ -álgebra densa. Mostremos,

primeiramente, que, de fato,  $\phi$  define um \*-homomorfismo injetivo entre as duas \*-álgebras consideradas.

Não é difícil ver a injetividade e linearidade da aplicação  $\phi$ . Provemos que  $\phi$  é multiplicativo e preserva adjuntos:

1. ( $\phi$  preserva adjuntos)

$$\begin{aligned} \phi(f)^*(r)(x) &= \Delta(r^{-1})\alpha_r(\phi(f)(r^{-1})^*)(x) \\ &= \Delta(r^{-1})(\phi(f)(r^{-1})^*)(r^{-1}x) \\ &= \Delta(r^{-1})\overline{\phi(f)(r^{-1})(r^{-1}x)} \\ &= \Delta(r^{-1})\overline{f(r^{-1}, r^{-1}x)} = f^*(r, x) = \phi(f^*)(r)(x). \end{aligned}$$

2. ( $\phi$  é multiplicativo)

$$\begin{aligned} \phi(f * g)(r)(x) &= (f * g)(r, x) = \int_G f(s, x)g(s^{-1}r, s^{-1}x)d\mu(s) \\ &= \int_G \phi(f)(s)(x)\alpha_s(\phi(g)(s^{-1}r))(x)d\mu(s) \\ &= \int_G \phi(f)(s)(x)\alpha_s(\phi(g)(s^{-1}r))d\mu(s)(x) \\ &= \phi(f) * \phi(g)(r)(x). \end{aligned}$$

Para vermos que  $C_c(G \times X)$  é densa em  $C_c(G, C_0(X))$  basta notar que

$$C_c(G) \odot C_c(X) := \text{span}\{z \otimes f : z \in C_c(G), f \in C_c(X)\}$$

em que  $(z \otimes f)(r)(x) = z(r)f(x)$  está em  $\phi(C_c(G, X))$ . De fato, dados  $z \in C_c(G)$  e  $f \in C_c(X)$ , defina a função  $z \times f : G \times X \rightarrow \mathbb{C}$ , por  $z \times f(r, x) = z(r)f(x)$ . Não é difícil ver que ela pertence a  $C_c(G \times X)$ . Mais ainda,  $\phi(z \times f) = z \otimes f$ . Como o espaço vetorial gerado pelas funções do tipo  $z \otimes f$  é denso em  $C_c(G, C_0(X))$ , (Lema 4.1, em (WILLIAMS, 2007)) é denso também em  $C_0(X) \rtimes_\alpha G$ . Portanto, pelos cálculos que acabamos de fazer,  $C_c(G \times X)$  é \*-álgebra densa em  $C_0(X) \rtimes_\alpha G$ .

Finalizaremos esta seção com um exemplo de produto cruzado proveniente do grupo finito  $G = \mathbb{Z}_2$ . Antes disso, uma definição.

**Definição 4.30** *Suponha que  $X$  seja um  $G$ -espaço à esquerda e  $x \in X$ . A órbita em torno de  $x$  é o conjunto  $Gx := \{sx \in X, s \in G\}$ . O grupo de estabilidade de  $x$  é  $G_x := \{s \in G / sx = x\}$ . A ação de  $G$  em*

$X$  é dita livre se  $G_x = \{e\}$  para todo  $x \in X$ . O conjunto das órbitas será denotado por  $G/X$  e ao munirmo-lo com a topologia quociente, o mapeamento orbital natural  $p : X \rightarrow G/X$  torna-se contínuo.

**Exemplo 4.31** Suponha  $X$  um  $\mathbb{Z}_2$  espaço livre, Hausdorff e compacto determinado pelo homeomorfismo  $\sigma : X \rightarrow X$ , com  $\sigma^2 = Id_X$ . Então  $C(\mathbb{Z}_2 \times X)$  é completo em relação a norma universal e

$$\Phi(f)(x) = \begin{pmatrix} f(\dot{0}, x) & f(\dot{1}, x) \\ f(\dot{1}, \sigma(x)) & f(\dot{0}, \sigma(x)) \end{pmatrix}$$

define um isomorfismo entre  $C(X) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_2 = C(\mathbb{Z}_2 \times X)$  e a  $C^*$ -álgebra  $A = \{f \in C(X, M_2) : f(\sigma(x)) = Wf(x)W^*\}$ , em que  $\alpha$  é definida por  $\alpha_{\dot{1}}(f)(x) = f(\sigma(x))$  e  $W$  é a matriz

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Em nossos cálculos, identificaremos  $L^2(\mathbb{Z}_2)$  com  $\mathbb{C}^2$  usando a base ortonormal  $\{\delta_{\dot{0}}, \delta_{\dot{1}}\}$  em que  $\delta_i(j) = 1$  se  $i = j$  e  $\delta_i(j) = 0$  se  $i \neq j$  e assim veremos operadores sobre  $L^2(\mathbb{Z}_2)$  como matrizes complexas  $2 \times 2$ .

Fixe  $x \in X$ . Considere a representação regular  $(\widetilde{ev}_x, \lambda)$  de  $(C(X), \mathbb{Z}_2, \alpha)$  com respeito a representação avaliação no ponto  $x$ ,

$$\begin{aligned} ev_x : C(X) &\rightarrow \mathbb{C} \cong B(\mathbb{C}) \\ ev_x(f) &= f(x), \end{aligned}$$

conforme definimos no exemplo 4.11. Assim, para cada  $\phi \in C(X)$  temos que  $\widetilde{ev}_x(\phi) : L^2(\mathbb{Z}_2) \rightarrow L^2(\mathbb{Z}_2)$  é o operador que para  $i = \dot{0}, \dot{1}$  satisfaz

$$\widetilde{ev}_x(\phi)\delta_i(s) = ev_x(\alpha_{s-1}(\phi))\delta_i(s)$$

Um cálculo simples mostra que

$$\begin{aligned} \widetilde{ev}_x(\phi)\delta_{\dot{0}} &= \phi(x)\delta_{\dot{0}} + 0\delta_{\dot{1}}; \\ \widetilde{ev}_x(\phi)\delta_{\dot{1}} &= 0\delta_{\dot{0}} + \phi(\sigma(x))\delta_{\dot{1}}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\widetilde{ev}_x(\phi)$  é dado pela matriz:

$$\widetilde{ev}_x(\phi) = \begin{pmatrix} \phi(x) & 0 \\ 0 & \phi(\sigma(x)) \end{pmatrix}.$$

Observe que  $C(\mathbb{Z}_2 \times X) \cong C(\mathbb{Z}_2, C(X))$ . Para facilitar os cálculos, veremos  $\widetilde{ev}_x \rtimes \lambda$  como um homomorfismo entre  $C(\mathbb{Z}_2 \times X)$  e  $M_2$  da

seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{ev}_x \rtimes \lambda(f) &= \sum_{s=\dot{0}, \dot{1}} \widetilde{ev}_x(f(s, -))\lambda_s = \widetilde{ev}_x(f(\dot{0}, -))\lambda_{\dot{0}} + \widetilde{ev}_x f(\dot{1}, -)\lambda_{\dot{1}} \\
 &= \begin{pmatrix} f(\dot{0}, x) & 0 \\ 0 & f(\dot{0}, \sigma(x)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(\dot{1}, x) & 0 \\ 0 & f(\dot{1}, \sigma(x)) \end{pmatrix} \lambda_{\dot{1}} \\
 &= \begin{pmatrix} f(\dot{0}, x) & f(\dot{1}, x) \\ f(\dot{1}, \sigma(x)) & f(\dot{0}, \sigma(x)) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

pois  $\lambda_{\dot{1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Mais ainda, o \*-homomorfismo

$$\widetilde{ev}_x \rtimes \lambda : C(\mathbb{Z}_2 \times X) \rightarrow M_2$$

é sobrejetivo. De fato, dada  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2$ , como  $x \neq \sigma(x)$  existem funções contínuas  $f_0, f_1 \in C(X)$  tais que

$$f_0(x) = a; f_0(\sigma(x)) = d; f_1(x) = b; f_1(\sigma(x)) = c.$$

Escolha  $f \in C(\mathbb{Z}_2 \times X)$  dada por  $f(\dot{s}, y) = f_s(y)$ . Claro que

$$\widetilde{ev}_x \rtimes \lambda(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e temos a sobrejetividade.

Tome  $A = \{f \in C(X, M_2) : f(\sigma(x)) = Wf(x)W^*\}$  conforme hipóteses desse exemplo. Não é difícil ver que  $A$  é subálgebra fechada de  $C(X, M_2)$ . Para provarmos que é \*-subálgebra, tome  $f \in A$ . Então temos:

$$f^*(\sigma(x)) = (Wf(x)W^*)^* = Wf(x)^*W^* = Wf^*(x)W^*$$

portanto  $A$  é  $C^*$ -subálgebra de  $C(X, M_2)$ . Defina o seguinte \*-homomorfismo injetivo  $\psi : C(\mathbb{Z}_2 \times X) \rightarrow C(X, M_2)$  por

$$\psi(f)(x) = \begin{pmatrix} f(\dot{0}, x) & f(\dot{1}, x) \\ f(\dot{1}, \sigma(x)) & f(\dot{0}, \sigma(x)) \end{pmatrix}.$$

Pelos nossos cálculos,  $\psi(f)(x) = \widetilde{ev}_x \rtimes \lambda(f)$ . Note que  $Im(\psi) \subset A$ ,

pois:

$$\begin{aligned}
 \psi(f)(\sigma(x)) &= \widetilde{ev_{\sigma(x)}} \rtimes \lambda(f) = \begin{pmatrix} f(\dot{0}, \sigma(x)) & f(\dot{1}, \sigma(x)) \\ f(\dot{1}, \sigma(x)) & f(\dot{0}, \sigma(x)) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\dot{0}, x) & f(\dot{1}, x) \\ f(\dot{1}, \sigma(x)) & f(\dot{0}, \sigma(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= W\psi(f)(x)W^*.
 \end{aligned}$$

Vamos provar que  $\psi$  é sobrejetora. Seja  $a \in A$ ,

$$a(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\sigma(x)) & a_{12}(\sigma(x)) \\ a_{21}(\sigma(x)) & a_{22}(\sigma(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22}(x) & a_{21}(x) \\ a_{12}(x) & a_{11}(x) \end{pmatrix}.$$

Defina  $f \in C(\mathbb{Z}_2 \times X)$  por  $f(\dot{k}, x) = a_{1,k+1}(x)$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 f(\dot{0}, x) &= a_{11}(x); & f(\dot{1}, x) &= a_{12}(x); \\
 f(\dot{1}, \sigma(x)) &= a_{12}(\sigma(x)) = a_{21}(x); \\
 f(\dot{0}, \sigma(x)) &= a_{11}(\sigma(x)) = a_{22}(x).
 \end{aligned}$$

e  $\psi$  é sobrejetora, portanto um isomorfismo entre  $C^*$ -álgebras, como queríamos demonstrar.





## 5 EQUIVALÊNCIA DE MORITA PARA PRODUTOS CRUZADOS

### 5.1 AÇÕES SATURADAS

Neste capítulo apresentamos um dos principais resultados do trabalho, exibindo certos contextos de Morita associados à sistemas dinâmicos por grupos. O primeiro resultado nos mostrará que, dada uma ação  $\alpha$  de um grupo compacto  $G$  sobre uma  $C^*$ -álgebra  $A$ , a álgebra de pontos fixos  $A^G = \{a \in A : \alpha_r(a) = a, \forall r \in G\}$  é, em determinadas condições, Morita equivalente ao produto cruzado  $A \rtimes_\alpha G$ . Antes disso, precisamos de um lema de caráter técnico.

**Lema 5.1** *Sejam  $G$  grupo compacto e  $(A, G, \alpha)$  um sistema dinâmico. Para  $f, g \in C_c(G, A)$ , vale:  $(fgg^*f^*)(e) \leq \|g\|^2(ff^*)(e)$ .*

**Demonstração:** Omitiremos a demonstração por ser demasiado técnica e extensa. O leitor interessado poderá encontrá-la em (PHILLIPS, 1987).

**Proposição 5.2** *Sejam  $G$  grupo compacto e  $(A, G, \alpha)$  sistema dinâmico. Para  $a \in A^G := \{a \in A : \alpha_r(a) = a, \forall r \in G\}$ ,  $x, y \in A$  e  $f \in C_c(G, A)$ , defina:*

$$\begin{aligned} a.x &= ax, \\ xf &= \int_G \alpha_s^{-1}(xf(s))d\mu(s), \\ {}_{A^G}\langle x, y \rangle &= \int_G \alpha_s(xy^*)d\mu(s), \\ \langle x, y \rangle_{A \rtimes_\alpha G}(r) &= x^*\alpha_r(y). \end{aligned}$$

*Por meio dessas operações,  $E = \overline{A}^{\|\cdot\|_{A^G}}$  se torna um  $A^G$ -módulo de Hilbert cheio à esquerda e um  $A \rtimes_\alpha G$ -módulo de Hilbert à direita. Mais ainda,  $E$  só não será  $A^G - A \rtimes_\alpha G$  bimódulo de imprimitividade se não for cheio à direita.*

**Demonstração:** Verifiquemos que os produtos internos estão bem definidos. Para o avaliado na  $C^*$ -álgebra  $A^G$ , basta a simples constatação:

$$\alpha_r \left( \int_G \alpha_s(xy^*)d\mu(s) \right) = \int_G \alpha_{rs}(xy^*)d\mu(s) = \int_G \alpha_s(xy^*)d\mu(s).$$

A verificação para o produto interno avaliado em  $A \rtimes_{\alpha} G$  será feita logo mais. Precisamos antes definir um tipo especial de função. Para cada  $x \in A$ , defina a função  $\bar{x} \in C_c(G, A) \subset A \rtimes_{\alpha} G$  por

$$\bar{x}(r) := \alpha_r(x).$$

A continuidade de  $\bar{x}$  segue da continuidade pontual de  $\alpha$ . Além disso, a aplicação  $x \rightarrow \bar{x}$  é trivialmente linear, ou seja,  $\overline{x + \lambda y} = \bar{x} + \lambda \bar{y}$ , para todos  $x, y \in A$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ . As seguintes constações relacionam tais funções e os produtos internos definidos na hipótese:

1.

$$\begin{aligned} (\bar{x} * \bar{y}^*)(e) &= \int_G \alpha_s(x) \alpha_s(\bar{y}^*(s^{-1})) d\mu(s) = \int_G \alpha_s(xy^*) d\mu(s) \\ &= {}_{A^G} \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \bar{x}^* * \bar{y}(r) &= \int_G x^* \alpha_s(\bar{y}(s^{-1}r)) d\mu(s) = \int_G x^* \alpha_r(y) d\mu(s) \\ &= x^* \alpha_r(y) \mu(G) = \langle x, y \rangle_{A \rtimes_{\alpha} G}(r). \end{aligned}$$

Tais igualdades são válidas pois  $\bar{x}^* = x^*$ , para todo  $x \in A$ . De fato, dado  $r \in G$ , temos:

$$\bar{x}^*(r) = \Delta(r^{-1}) \alpha_r(\bar{x}(r^{-1})^*) = \alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(x^*)) = x^*.$$

As igualdades do ítem 2. garantem que o produto interno à direita está bem definido. Mostremos agora que  $A$  é tanto  $A^G$ -módulo à esquerda com produto interno quanto  $A \rtimes_{\alpha} G$ -módulo à direita com produto interno:

1.

$$\begin{aligned} {}_{A^G} \langle x + \lambda y, z \rangle &= [(\overline{x + \lambda y}) * \bar{z}^*](e) = [(\bar{x} + \lambda \bar{y}) * \bar{z}^*](e) \\ &= (\bar{x} * \bar{z}^*)(e) + \lambda (\bar{y} * \bar{z}^*)(e) \\ &= {}_{A^G} \langle x, z \rangle + \lambda ({}_{A^G} \langle y, z \rangle). \end{aligned}$$

2.

$${}_{A^G} \langle ax, y \rangle = \int_G \alpha_s(ax y^*) d\mu(s) = \int_G \alpha_s(a) \alpha_s(x y^*) d\mu(s)$$

$$= a \int_G \alpha_s(xy^*)d\mu(s) = a_{(A^G \langle x, y \rangle)}.$$

3.

$$\begin{aligned} (A^G \langle x, y \rangle)^* &= \left( \int_G \alpha_s(xy^*)d\mu(s) \right)^* = \int_G \alpha_s(yx^*)d\mu(s) \\ &= A^G \langle y, x \rangle. \end{aligned}$$

4.

$$A^G \langle x, x \rangle = \int_G \alpha_s(xx^*)d\mu(s) = \int_G \alpha_s(x)\alpha_s(x)^*d\mu(s) \geq 0;$$

pois  $\int_G \alpha_s(x)\alpha_s(x)^*d\mu(s)$  é autoadjunto,  $\alpha_s(x)\alpha_s(x)^* \geq 0 \forall s \in G$  e fixado  $\varphi \in A_+^*$  funcional positivo de  $A$ , temos, pela teoria de medida para funções complexas positivas definidas num espaço de medida:

$$\begin{aligned} \varphi \left( \int_G \alpha_s(x)\alpha_s(x)^*d\mu(s) \right) &= \int_G \varphi(\alpha_s(x)\alpha_s(x)^*)d\mu(s) \\ &= \int_G \varphi(\alpha_s(x))\varphi(\alpha_s(x)^*)d\mu(s) \geq 0. \end{aligned}$$

Sendo  $\varphi$  genérico, temos de fato que  $A^G \langle x, x \rangle \geq 0$ .

5.  $A^G \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow \int_G \varphi(\alpha_s(xx^*))d\mu(s) = 0, \forall \varphi \in A_+^*$ .

Agora constatemos as propriedades para o produto interno à direita:

1.

$$\begin{aligned} \langle x, \lambda y + z \rangle_{A \rtimes_\alpha G} &= \bar{x} * \overline{\lambda y + z} = \lambda \bar{x}^* * \bar{y} + \bar{x}^* * \bar{z} \\ &= \lambda \langle x, y \rangle_{A \rtimes_\alpha G} + \langle x, z \rangle_{A \rtimes_\alpha G}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \langle x, yf \rangle_{A \rtimes_\alpha G}(r) &= \langle x, \int_G \alpha_s^{-1}(yf(s))d\mu(s) \rangle(r) \\ &= x^* \alpha_r \left( \int_G \alpha_s^{-1}(yf(s))d\mu(s) \right) \\ &= \int_G x^* \alpha_{rs^{-1}}(yf(s))d\mu(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_G x^* \alpha_{rs}(yf(s^{-1}))d\mu(s) \\
&= \int_G x^* \alpha_s(yf(s^{-1}r))d\mu(s) \\
&= \int_G x^* \alpha_s(y)\alpha_s(f(s^{-1}r))d\mu(s) \\
&= \langle x, y \rangle_{A \rtimes_\alpha G} f(r).
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
(\langle x, y \rangle_{A \rtimes_\alpha G})^*(r) &= \Delta(r^{-1})\alpha_r(\langle x, y \rangle (r^{-1})^*) = \alpha_r((x^* \alpha_{r^{-1}}(y))^*) \\
&= \alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(y^*)x) = y^* \alpha_r(x) = \langle y, x \rangle_{A \rtimes_\alpha G}(r).
\end{aligned}$$

$$4. \langle x, x \rangle_{A \rtimes_\alpha G} = \bar{x}^* * \bar{x} \geq 0.$$

$$5. \langle x, x \rangle_{A \rtimes_\alpha G} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 \Rightarrow \alpha_s(x) = 0 \quad \forall s \in G.$$

Escolhendo  $s = e$  acima, temos o resultado.

Bem definidos os produtos internos, a simples constação abaixo mostra que eles são compatíveis:

$$\begin{aligned}
x\langle y, z \rangle_{A \rtimes_\alpha G} &= \int_G \alpha_{s^{-1}}(x\langle y, z \rangle_{A \rtimes_\alpha G}(s))d\mu(s) \\
&= \int_G \alpha_{s^{-1}}(xy^* \alpha_s(z))d\mu(s) = \int_G \alpha_{s^{-1}}(xy^*)z d\mu(s) \\
&= \int_G \alpha_s(xy^*)d(s)z =_{A^G} \langle x, y \rangle z.
\end{aligned}$$

Precisaremos demonstrar duas desigualdades antes de falarmos do complemento de  $A$  em relação a uma nova norma proveniente dos produtos internos. São elas:

$$\langle ax, ax \rangle_{A \rtimes_\alpha G} \leq \|a\|^2 \langle x, x \rangle_{A \rtimes_\alpha G}, \quad (5.1)$$

$$_{A^G} \langle xf, xf \rangle \leq \|f\|^2 (_{A^G} \langle x, x \rangle). \quad (5.2)$$

Para a primeira desigualdade, considere  $i_A : A \rightarrow M(A \rtimes_\alpha G)$  conforme a Proposição 4.20,  $a \in A^G$  e  $x \in A$ . Nesse caso, teremos:

$$\begin{aligned}
\bar{x}^*(i_A(a))^*(i_A(a))\bar{x}(r) &= \int_G \bar{x}^*(i_A(a))^* \alpha_s(i_A(a)\bar{x}(s^{-1}r))d\mu(s) \\
&= \int_G \bar{x}^*(s)\alpha_s(a^*)\alpha_s(a\alpha_{s^{-1}r}(x))d\mu(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_G x^* a^* a \alpha_r(x) d\mu(s) \\
&= x^* a^* a \alpha_r(x) = \langle ax, ax \rangle_{A \rtimes_\alpha G}.
\end{aligned}$$

Portanto, a desejada desigualdade é conseguida do seguinte modo:

$$\langle ax, ax \rangle_{A \rtimes_\alpha G} = \bar{x}^* (i_A(a))^* (i_A(a)) \bar{x} \leq \|i_A(a)\|^2 \bar{x}^* \bar{x} = \|a\|^2 \langle x, x \rangle_{A \rtimes_\alpha G}.$$

Para a segunda parte, note primeiramente que para  $f \in C_c(G, A)$  e  $x \in A$ , temos  $x\bar{f} = \bar{x}f$ . De fato:

$$\overline{x\bar{f}}(r) = \alpha_r \left( \int_G \alpha_{s^{-1}}(xf) d\mu(s) \right) = \int_G \alpha_s(x) \alpha_s(f(s^{-1}r)) d\mu(s) = \bar{x}f(r).$$

Portanto, conseguimos:

$${}_{A^G} \langle x\bar{f}, x\bar{f} \rangle = \overline{x\bar{f}} * \overline{x\bar{f}}^*(e) = \bar{x}f f^* \bar{x}(e)$$

Mas, usando o Lema 5.1, obtemos:

$$(\bar{x}f f^* \bar{x})(e) \leq \|f\|^2 \bar{x}\bar{x}^*(e) = \|f\|^2 ({}_{A^G} \langle x, x \rangle).$$

Tendo em mãos as desigualdades 5.1 e 5.2, estamos prontos para definir um  $A^G - A \rtimes_\alpha G$  bimódulo (possivelmente de imprimitividade) por meio de um completamento especial da  $C^*$ -álgebra  $A$ . Para tal, considere a norma  $\|x\| = \|{}_{A^G} \langle x, x \rangle\|^{\frac{1}{2}}$  para  $A$  e tome o completamento,  $\bar{A}$ , relativo a essa norma. A Observação 3.4 nos diz que  $\|x\|_{A^G} = \|x\|_{A \rtimes_\alpha G}$ , para  $x \in A$ .

Mais ainda,  $E$  torna-se um  $A^G$ -módulo de Hilbert à esquerda cheio. De fato, tomando  $x \in A^G$  e  $\{e_i\}$  unidade aproximada de  $A^G$ , conseguimos:

$${}_{A^G} \langle x, e_i \rangle = \int_G \alpha_s(xe_i) d\mu(s) = xe_i \longrightarrow x,$$

e isso garante que  ${}_{A^G} \langle E, E \rangle$  é denso em  $A^G$  e portanto  $E$  é cheio à esquerda.

Gostaríamos de definir, para todos  $x, y \in E$ ,

$$\langle x, y \rangle_{A \rtimes_\alpha G} := \lim \langle x_n, y_n \rangle_{A \rtimes_\alpha G}$$

em que  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  são seqüências em  $A$  tais que  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$  na norma  $\|\cdot\|_{A^G}$ . Precisamos verificar que o limite existe e que independe

das seqüências escolhidas. Para tal intento, perceba que:

$$\begin{aligned} \|\langle x, y \rangle_{A \rtimes_{\alpha} G}\| &\leq \|\langle x, x \rangle_{A \rtimes_{\alpha} G}\|^{\frac{1}{2}} \|\langle y, y \rangle_{A \rtimes_{\alpha} G}\|^{\frac{1}{2}} \\ &= \|(A^G \langle x, x \rangle)\|^{\frac{1}{2}} \|(A^G \langle y, y \rangle)\|^{\frac{1}{2}} \\ &= \|x\|_{A^G} \|y\|_{A^G}. \end{aligned}$$

Agora, dados  $x, y \in E$  e seqüências  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$  na norma  $\|\cdot\|_{A^G}$  em  $A$ , temos:

$$\begin{aligned} \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_m, y_m \rangle &= \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_m, y_n \rangle + \langle x_m, y_n \rangle - \langle x_m, y_m \rangle \\ &= \langle x_n - x_m, y_n \rangle + \langle x_n, y_n - y_m \rangle \end{aligned}$$

em que usamos  $\langle x_n, y_n \rangle_{A \rtimes_{\alpha} G} = \langle x_n, y_n \rangle$  para não "poluirmos" os cálculos. Agora, não é difícil ver que  $\{\langle x_n, y_n \rangle\}$  é seqüência de Cauchy em  $A \rtimes_{\alpha} G$  (portanto convergente) e que raciocínio similar mostra que nossa definição de produto interno independe das seqüências escolhidas. Isso nos garante que  $E_{A \rtimes_{\alpha} G}$  é módulo de Hilbert. Mais ainda, a noção de compatibilidade permanece, ou seja:

$$A^G \langle x, y \rangle z = x \langle y, z \rangle_{A \rtimes_{\alpha} G}$$

vale para todos  $x, y, z \in E$ . Portanto, se  $E$  for cheio como  $A \rtimes_{\alpha} G$ -módulo à direita, temos que  ${}_{A^G} E_{A \rtimes_{\alpha} G}$  é bimódulo de imprimitividade e  $A^G \sim_M A \rtimes_{\alpha} G$  nesse caso.

**Definição 5.3** *Sejam  $G$  grupo compacto e  $(A, G, \alpha)$  sistema dinâmico. Dizemos que  $\alpha$  é saturada se o bimódulo  $E$  definido na proposição anterior for de fato um bimódulo de imprimitividade.*

**Corolário 5.4** *Seja  $(A, G, \alpha)$  sistema dinâmico com  $G$  compacto. Então  $\alpha$  é saturada se e somente se  $\text{span}\{\bar{x}^* \bar{y} : x, y \in A\}$  é denso em  $A \rtimes_{\alpha} G$ .*

### Demonstração:

( $\Rightarrow$ ) Suponha  $\alpha$  saturada. Então  $E_{A \rtimes_{\alpha} G}$  é módulo de Hilbert cheio. Naturalmente, se olharmos apenas para  $A_{A \rtimes_{\alpha} G}$  (sem o fecho), não teremos mais (possivelmente) um módulo de Hilbert, mas ainda temos um módulo com produto interno tal que

$$\overline{\langle A, A \rangle}_{A \rtimes_{\alpha} G} = A \rtimes_{\alpha} G,$$

simplesmente pelo fato de  $A$  ser densa em  $E$ . Porém, conforme foi visto,  $\langle x, y \rangle_{A \rtimes_{\alpha} G} = \bar{x}^* \bar{y}$ , e temos a primeira parte demonstrada.

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $\overline{\text{span}}\{\bar{x}^*\bar{y} : x, y \in A\} = A \rtimes_{\alpha} G$ . Trivialmente  $\alpha$  é saturada, visto que  $\langle x, y \rangle_{A \rtimes_{\alpha} G} = \bar{x}^*\bar{y}$ , para todos  $x, y \in A$ .  $\square$

Uma outra forma de interpretar a saturação é dada pelo lema:

**Lema 5.5** *Seja  $(A, G, \alpha)$  sistema dinâmico com  $G$  grupo compacto. Então  $\alpha$  é saturada se e somente se as funções  $\phi_{xy} \in C(G, A)$  tais que  $\phi_{xy}(r) = x\alpha_r(y)$  com  $x, y$  em  $A$  geram um subespaço denso de  $A \rtimes_{\alpha} G$ .*

**Demonstração:** Esse lema é apenas uma abordagem diferente dada ao corolário anterior. Omitiremos a demonstração.  $\square$

## 5.2 TEOREMA SIMÉTRICO DE IMPRIMITIVIDADE

A partir de agora iniciaremos as preparações diretas para provarmos o Teorema 1 e uma versão diferenciada do Teorema 2 de (CURTO; MUHLY; WILLIAMS, 1984), conhecido como Teorema Simétrico de Imprimitividade para  $C^*$ -álgebras comutativas. Nesse sentido, daremos o conceito de ação compatível com um bimódulo de imprimitividade e após, empenhar-nos-emos nas demonstrações dos teoremas.

**Definição 5.6** *Sejam  $G$  grupo localmente compacto,  ${}_A E_B$  um bimódulo de imprimitividade,  $\alpha$  e  $\beta$  ações de  $G$  em  $A$  e  $B$  respectivamente. Uma ação compatível com o bimódulo de imprimitividade  $E$  é uma aplicação  $(r, x) \mapsto \gamma_r(x)$ , em que para todos  $r, s \in G$  e  $x \in E$  tem-se:  $\gamma_r : E \rightarrow E$  é linear,  $\gamma_{rs}(x) = \gamma_r(\gamma_s(x))$ ,  $\gamma_e(x) = x$ , a função  $f_x : G \rightarrow E$ ,  $f_x(t) = \gamma_t(x)$  é contínua para qualquer  $x \in E$  e ainda valem (para todos  $x, y \in E$ ,  $r \in G$ ,  $a \in A$  e  $b \in B$ ):*

$$i) \quad {}_A \langle \gamma_r(x), \gamma_r(x) \rangle = \alpha_r({}_A \langle x, y \rangle);$$

$$ii) \quad \langle \gamma_r(x), \gamma_r(y) \rangle_B = \beta_r(\langle x, y \rangle_B)$$

**Observação 5.7** *Para cada  $r \in G$ ,  $\gamma_r$  é isométrica, pois:*

$$\|\gamma_r(x)\|^2 = \|\langle \gamma_r(x), \gamma_r(x) \rangle_B\| = \|\beta_r(\langle x, x \rangle_B)\| = \|\langle x, x \rangle\| = \|x\|^2.$$

*Outro cálculo simples mostra que se  $\langle \gamma_r(x), \gamma_r(y) \rangle_B = \beta_r(\langle x, y \rangle_B)$  vale para todos  $r \in G$  e  $x \in E$  então também vale que  $\gamma_r(xb) = \gamma_r(x)\beta_r(x)$  para todos  $r \in G$  e  $x \in E$ . Trocando-se  $B$  por  $A$ ,  $\beta$  por  $\alpha$  e fazendo as devidas alterações, temos o resultado análogo.*

**Teorema 5.8** *Sejam  $A$  e  $B$   $C^*$ -álgebras,  $G$  grupo compacto,  $\alpha$  e  $\beta$  ações de  $G$  em  $A$  e  $B$  respectivamente. Se existir um bimódulo de imprimitividade  ${}_A E_B$  e uma ação  $\tau$  compatível com ele, então*

$$A \rtimes_{\alpha} G \sim_M B \rtimes_{\beta} G.$$

**Demonstração:**

Considere a álgebra de ligação  $\mathcal{L}(E) \hookrightarrow L(E \oplus B)$  de  $A$  e  $B$  segundo  ${}_A E_B$  conforme Definição 3.8 e Teorema 3.9. Para cada  $r \in G$ , defina a aplicação  $\gamma_r : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  por:

$$\gamma_r \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha_r(a)} & \tau_r(x) \\ \widetilde{\tau_r(y)} & \beta_r(b) \end{pmatrix}$$

A partir da definição, não é difícil ver que  $\gamma_{rs} = \gamma_r \gamma_s$  e  $\gamma_e = I_{\mathcal{L}(E)}$ . Portanto, cada aplicação  $\gamma_r$  é inversível, com inversa  $\gamma_{r^{-1}}$ . Provemos que  $\gamma$  define uma ação de  $G$  em  $\mathcal{L}(E)$ :

1. ( $\gamma_r$  é linear)

$$\begin{aligned} \gamma_r \begin{pmatrix} a + \lambda a' & x + \lambda x' \\ \tilde{y} + \lambda \tilde{y}' & b + \lambda b' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha_r(a) + \lambda \alpha_r(a')} & \tau_r(x) + \lambda \tau_r(x') \\ \widetilde{\tau_r(y) + \lambda \tau_r(y')} & \beta_r(b) + \lambda \beta_r(b') \end{pmatrix} \\ &= \gamma_r \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} + \lambda \gamma_r \begin{pmatrix} a' & x' \\ \tilde{y}' & b' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. ( $\gamma_r$  é multiplicativo)

$$\begin{aligned} \gamma_r \left( \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & x' \\ \tilde{y}' & b' \end{pmatrix} \right) &= \gamma_r \begin{pmatrix} aa' + {}_A \langle x, y' \rangle & ax' + xb' \\ \tilde{y}a' + b\tilde{y}' & \langle y, x' \rangle_B + bb' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha_r(aa')} + \alpha_r({}_A \langle x, y' \rangle) & \tau_r(ax') + \tau_r(xb') \\ \widetilde{\tau_r(a^*y) + \tau_r(y'b^*)} & \beta_r(\langle y, x' \rangle_B) + \beta_r(bb') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha_r(aa')} + \alpha_r({}_A \langle x, y' \rangle) & \alpha_r(a)\tau_r(x') + \tau_r(x)\beta_r(b') \\ \widetilde{\tau_r(y)\alpha_r(a') + \beta_r(b)\tau_r(y')} & \langle \tau_r(y), \tau_r(x') \rangle_B + \beta_r(bb') \end{pmatrix} \\ &= \gamma_r \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \gamma_r \begin{pmatrix} a' & x' \\ \tilde{y}' & b' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. ( $\gamma_r$  preserva adjuntos)

$$\gamma_r \left[ \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \right]^* = \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha_r(a^*)} & \tau_r(y) \\ \widetilde{\tau_r(x)} & \beta_r(b^*) \end{pmatrix} = \gamma_r \begin{pmatrix} a^* & y \\ \tilde{x} & b^* \end{pmatrix}.$$



4. ( $\gamma$  é pontualmente contínua)

Fixado  $k \in \mathcal{L}(E)$ , devemos provar que  $r \mapsto \gamma_r(k)$  é contínua. Seja  $\{r_i\}$  net em  $G$  tal que  $r_i \rightarrow e$ . Assim, teremos:

$$k = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} \alpha_{r_i}(a) - a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \|\alpha_{r_i}(a) - a\| \rightarrow 0, \quad (5.3)$$

$$k = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} 0 & \tau_{r_i}(x) - x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \|\tau_{r_i}(x) - x\| \rightarrow 0, \quad (5.4)$$

$$k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau_{r_i}(y) - y & 0 \end{pmatrix} \right\| = \|\tau_{r_i}(y) - y\| \rightarrow 0, \quad (5.5)$$

$$k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta_{r_i}(b) - b \end{pmatrix} \right\| = \|\beta_{r_i}(b) - b\| \rightarrow 0. \quad (5.6)$$

As igualdades envolvendo normas seguem do Teorema 3.11. Pelas quatro constatações acima, segue que para  $k \in \mathcal{L}(E)$  genérico a aplicação  $r \mapsto \gamma_r(k)$  é contínua como desejado.

Nosso objetivo agora é encontrar, por meio de  $\mathcal{L}(E)$ , uma  $C^*$ -álgebra que satisfaz o item 4. da Proposição 3.23 para concluirmos que  $A \rtimes_{\alpha} G \sim_M B \rtimes_{\beta} G$ .

Considere  $p$  e  $q$  projeções canônicas de  $\mathcal{L}(E)$  definidas na Proposição 3.23,  $i_A : A \hookrightarrow \mathcal{L}(E)$  e  $i_B : B \hookrightarrow \mathcal{L}(E)$  imersões dadas por:

$$i_A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad i_B(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Não é difícil ver que  $p + q = I_{M(\mathcal{L}(E))}$  e novamente pelos cálculos da Proposição 3.23, obtemos  $Im(i_A) = p\mathcal{L}(E)p$  e  $Im(i_B) = q\mathcal{L}(E)q$ . Provemos agora que, dado  $r \in G$ ,  $p$  e  $q$  são invariantes por  $\gamma_r$ , ou seja,  $\widetilde{\gamma_r(p)} = p$  e  $\widetilde{\gamma_r(q)} = q$ .

Primeiramente, podemos interpretar  $\gamma_r : \mathcal{L}(E) \rightarrow M(\mathcal{L}(E))$ . Pela teoria de  $C^*$ -álgebras,  $\gamma_r$  se estende de maneira única ao  $*$ -isomorfismo  $\widetilde{\gamma_r} : M(\mathcal{L}(E)) \rightarrow M(\mathcal{L}(E))$  dado por:

$$\widetilde{\gamma_r}(\mu)(\gamma_r(k)k') = \gamma_r(\mu k)k'.$$

A aplicação  $\tilde{\gamma}_r$  está bem definida pois  $\gamma_t$  é não degenerada, ou seja,

$$\overline{\text{span}}\{\gamma_r(k)k' : k, k' \in \mathcal{L}(E)\} = \mathcal{L}(E).$$

Agora, denotando  $k = \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix}$ , temos

$$\tilde{\gamma}_r(p)(\gamma_r(k)k') = p \begin{pmatrix} \alpha_r(a) & \tau_r(x) \\ \tau_r(y) & \beta_r(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & x' \\ \tilde{y}' & b' \end{pmatrix} = p(\gamma_r(k)k').$$

Isso é suficiente para termos  $p = \tilde{\gamma}_r(p)$  pela condição de não degenerescência. Analogamente se mostra que  $q = \tilde{\gamma}_r(q)$ . Também não é difícil ver que  $i_A$  e  $i_B$  são equivariantes, ou seja,  $i_A \circ \alpha_r = \gamma_r \circ i_A$  e  $i_B \circ \beta_r = \gamma_r \circ i_B$ . Assim, existe um \*-homomorfismo injetivo  $i_A \rtimes G : A \rtimes_\alpha G \rightarrow \mathcal{L}(E) \rtimes_\gamma G$  tal que  $i_A \rtimes G(f)(r) = i_A(f(s))$  para toda  $f \in C(G, A)$ . Mostraremos que tal homomorfismo está bem definido e que de fato é injetivo na Proposição 5.9 a seguir. Do mesmo modo, existe homomorfismo injetivo  $i_B \rtimes_\beta G : B \rtimes_\beta G \rightarrow \mathcal{L}(E)$ .

Considere agora a aplicação  $j_{\mathcal{L}(E)} : \mathcal{L}(E) \rightarrow M(\mathcal{L}(E) \rtimes_\gamma G)$  dada por  $j_{\mathcal{L}(E)}(k)f(r) = kf(r)$ . Pode-se ver em (WILLIAMS, 2007) que ela é não degenerada. Portanto, existe única extensão unital  $\widetilde{j_{\mathcal{L}(E)}} : M(\mathcal{L}(E)) \rightarrow M(\mathcal{L}(E) \rtimes_\gamma G)$  tal que  $\widetilde{j_{\mathcal{L}(E)}}(\mu)(j_{\mathcal{L}(E)}(k)f) = j_{\mathcal{L}(E)}(\mu k)f$  para toda  $f \in C(G, A)$ . A partir de agora, nessa demonstração, usaremos apenas  $j_{\mathcal{L}(E)} = j$  para simplificar os cálculos.

É claro que  $\tilde{j}(p)$  e  $\tilde{j}(q)$  são projeções complementares. Falta mostrar que

$$D := \overline{\text{span}}\{(\mathcal{L}(E) \rtimes_\gamma G)(\tilde{j}(p))(\mathcal{L}(E) \rtimes_\gamma G)\} = \mathcal{L}(E) \rtimes_\gamma G$$

e

$$\overline{\text{span}}\{\tilde{j}(p)(\mathcal{L}(E) \rtimes_\gamma G)\tilde{j}(p)\} = i_A \rtimes G(A \rtimes G)$$

pois o caso para  $q$  será análogo. Mostraremos apenas a primeira das igualdades, a outra segue por argumentos similares.

Observe que  $D \subset \mathcal{L}(E) \rtimes_\gamma G$ . Para a outra inclusão, note que  $fj(k)\tilde{j}(p)j(k')g \in \mathcal{L}(E) \rtimes_\gamma G$ , para todas  $f, g \in C(G, \mathcal{L}(E))$  e para todos  $k, k' \in \mathcal{L}(E)$ . Mas:

$$fj(k)\tilde{j}(p)j(k')g(r) = \int_G f(s)\alpha_s(kpk'g(s^{-1}r))d\mu(s) = f * kpk'g(r),$$

assim, segue que toda função da forma  $f * kg$  está em  $D$ , em que  $f, g \in C(G, \mathcal{L}(E))$ ,  $k \in \mathcal{L}(E)$  e visto que  $\overline{\text{span}}\{kpk' : k, k' \in \mathcal{L}(E)\} = \mathcal{L}(E)$ , pela Proposição 3.23. Como não é difícil ver que o espaço vetorial

gerado por funções daquela forma é denso em  $\mathcal{L}(E) \rtimes_{\gamma} G$ , segue o resultado.  $\square$

**Proposição 5.9** *Os homomorfismos  $i_A \rtimes G$  e  $i_B \rtimes G$  definidos no teorema anterior são injetivos.*

**Demonstração:** Primeiramente, vamos mostrar que eles estão bem definidos. Seja  $(\pi, U)$  representação covariante de  $(\mathcal{L}(E), G, \gamma)$ . Então  $(\hat{\pi}, U)$  em que  $\hat{\pi}(a) = \pi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  é representação covariante de  $(A, G, \alpha)$ , pois:

$$\hat{\pi}(\alpha_r(a)) = \pi \left( \gamma_r \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = U_r \pi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_r^* = U_r \hat{\pi}(a) U_r^*.$$

Além disso, teremos:

$$\begin{aligned} \|\pi \rtimes U(i_A \rtimes G)(f)\| &= \left\| \int_G \pi(i_A(f(s))) U_s d\mu(s) \right\| = \|\hat{\pi} \rtimes U(f)\| \\ \Rightarrow \|i_A \rtimes G(f)\| &\leq \|f\|. \end{aligned}$$

Por isso podemos estender  $i_A \rtimes G : A \rtimes_{\alpha} G \rightarrow \mathcal{L}(E)$ . Analogamente estendemos  $i_B \rtimes G : B \rtimes_{\beta} G \rightarrow \mathcal{L}(E)$ .

Vamos mostrar agora que  $i_B \rtimes G : B \rtimes_{\beta} G \rightarrow \mathcal{L}(E) \rtimes G$  é injetivo. Tome  $\pi \rtimes U : B \rtimes G \rightarrow B(H)$  representação de  $B \rtimes G$  proveniente de alguma representação covariante  $(\pi, U)$  de  $(B, G, \beta)$ .

Considere a representação covariante  $(\rho, V)$  de  $(A, G, \alpha)$  em que  $H_1 = E \otimes_{\pi} H$  tal que  $\rho : A \rightarrow B(H_1)$  é dada por

$$\rho(a)(x \otimes \xi) = ax \otimes \xi$$

e  $V : G \rightarrow U(H_1)$  por

$$V_r(x \otimes \xi) = \tau_r(x) \otimes U_r(\xi).$$

Não é difícil ver que  $\rho$  é fortemente contínua e  $V$  homomorfismo tomando valores unitários. A condição de covariância é obtida assim:

$$\begin{aligned} (V_r \rho(a) V_{r-1})(x \otimes \xi) &= V_r \rho(a)(\tau_{r-1}(x) \otimes U_{r-1}(\xi)) \\ &= V_r(a \tau_{r-1}(x) \otimes U_{r-1}(\xi)) \\ &= \tau_r(a \tau_{r-1}(x) \otimes U_r(U_{r-1}(\xi))) \\ &= \alpha_r(a)x \otimes \xi = \rho(\alpha_r(a))(x \otimes \xi). \end{aligned}$$

Agora tome  $(\sigma, W)$  representação covariante canônica de  $\mathcal{L}(E)$  em  $H_1 \oplus H$  tal que:

$$\sigma \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(a)\xi + T_x\eta \\ T_y^*(\xi) + \pi(b)\eta \end{pmatrix}; \quad W_r \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_r(\xi) \\ U_r(\eta) \end{pmatrix},$$

em que  $T_x : H \rightarrow H_1$ ,  $T_x(\eta) = x \otimes \eta$  e  $T_x^* : H_1 \rightarrow H$ ,  $T_x^*(y \otimes \eta) = \pi(\langle x, y \rangle)\eta$ . A condição de covariância é obtida por meio desses cálculos:

$$\begin{aligned} W_r \sigma \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} W_{r-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &= W_r \sigma \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{r-1}(\xi) \\ U_{r-1}(\eta) \end{pmatrix} \\ &= W_r \begin{pmatrix} \rho(a)V_{r-1}(\xi) + T_x U_{r-1}(\eta) \\ T_x^* V_{r-1}(\xi) + \pi(b)U_{r-1}(\eta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V_r \rho(a)V_{r-1}(\xi) + V_r T_x U_{r-1}(\eta) \\ U_r T_x^* V_{r-1}(\xi) + U_r \pi(b)U_{r-1}(\eta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho(\alpha_r(a))\xi + T_{\tau_r(x)}(\eta) \\ T_{\tau_r(x)}^*(\xi) + \pi(\beta_r(b))(\eta) \end{pmatrix} \\ &= \sigma \left( \gamma \begin{pmatrix} a & x \\ \tilde{y} & b \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

em que usamos  $U_r T_y^* V_{r-1} = T_{\tau_r(y)}^*$ . De fato:

$$\begin{aligned} U_r T_y^* V_{r-1}(x \otimes \eta) &= U_r T_y^*(\tau_{r-1}(x) \otimes U_{r-1}(\eta)) \\ &= U_r \pi(\langle y, \tau_{r-1}(x) \rangle) U_{r-1} \eta = \pi(\beta_r(\langle y, \tau_{r-1} \rangle)) \eta \\ &= \pi(\langle \tau_r(y), x \rangle) \eta = T_{\tau_r(y)}^*(x \otimes \eta). \end{aligned}$$

Logo  $T_{\tau_r(y)}^* = U_r T_y^* V_{r-1}$

Para finalizar nossa demonstração, mostraremos que

$$P \circ (\sigma \rtimes W) \circ (i_B \rtimes G) = \pi \rtimes U,$$

em que  $P : B(H_1 \oplus H) \rightarrow B(H)$ , pelo viés matricial, é a transformação linear canônica:

$$P(T) = P \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = T_{22}.$$

De fato, temos:

$$P \circ (\sigma \rtimes W) \circ (i_B \rtimes G)(f) = P \circ (\sigma \rtimes W)(i_B(f))$$

$$\begin{aligned}
&= P \int_G \sigma(i_B(f(s))) W_s d\mu(s) \\
&= \int_G P(\sigma(i_B(f(s))) W_s) d\mu(s) \\
&= \int_G \pi(f(s)) U_s d\mu(s) = \pi \rtimes U(f).
\end{aligned}$$

Como toda  $C^*$ -álgebra tem uma representação fiel, poderíamos ter suposto inicialmente que  $\pi \rtimes U$  era injetora. Assim,  $i_B \rtimes G$  será injetivo. O caso para  $i_A$  é inteiramente análogo.  $\square$

O seguinte resultado é também conhecido com Teorema Simétrico de Imprimitividade.

**Teorema 5.10** *Sejam  $G$  e  $H$  grupos compactos e  $A$   $C^*$ -álgebra. Denote por  $\alpha$  a ação de  $G$  em  $A$  e por  $\beta$  a ação de  $H$  em  $A$ . Se as ações comutarem (isto é, se  $\alpha_r \beta_s(a) = \beta_s \alpha_r(a)$  para todos  $a \in A$ ,  $r \in G$  e  $s \in H$ ) e forem saturadas, então  $(A^G \rtimes_{\beta_G} H) \sim_M (A^H \rtimes_{\alpha_H} G)$ .*

**Observação 5.11** *Explicitaremos as ações  $\alpha^H$  e  $\beta^G$  no meio da demonstração que segue.*

**Demonstração:** Pela Proposição 5.2, existem  ${}_{AG} \overline{A}_{A \rtimes_{\alpha} G}^{(\cdot)G}$  e  ${}_{AH} \overline{A}_{A \rtimes_{\beta} H}^{(\cdot)H}$  bimódulos de imprimitividade. Escolhamos  ${}_{AG} \overline{A}_{A \rtimes_{\alpha} G}^{(\cdot)G} = E_G$ . Queremos encontrar ações  $\beta^G$ ,  $\tilde{\beta}$  e  $\tilde{\tau}$  de  $H$  em  $A^G$ ,  $A \rtimes_{\alpha} G$  e  $E_G$  respectivamente tais que  ${}_{AG} \langle \tilde{\tau}_s(x), \tilde{\tau}_s(y) \rangle = \beta_s^G({}_{AG} \langle x, y \rangle)$  e  $(\tilde{\tau}_s(x), \tilde{\tau}_s(y))_{A \rtimes_{\alpha} G} = \tilde{\beta}_s(\langle x, y \rangle_{A \rtimes_{\alpha} G})$  para podermos aplicar o Teorema 5.8.

Para a construção de  $\tilde{\tau}$ , note que, para  $x \in A$ :

$$\|x\|_{E_G}^2 = \left\| \int_G \alpha_r(xx^*) d\mu(r) \right\|_A \leq \int_G \|\alpha_r(xx^*)\|_A d\mu(r) = \|xx^*\| = \|x\|_A^2.$$

Assim, para todo  $x \in A$  a função  $s \mapsto \beta_s(x)$ , por ser contínua segundo a norma  $\|\cdot\|_A$ , é contínua segundo  $\|\cdot\|_{E_G}$ . Podemos definir então  $\tilde{\tau} : H \rightarrow E_G$  por

$$\tilde{\tau}_s(x) = \lim \beta_s(x_n),$$

em que o limite é tomado segundo norma de  $E_G$ ,  $x \in E_G$  e  $(x_n)_n \in A$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Não é difícil provar que  $\tilde{\tau}$  está bem definida, que de fato independe da sequência que se escolhe. Observe também que  $\tilde{\tau}_s(x) = \beta_s(x)$ , para todo  $x \in A$ .

Para vermos que  $\tilde{\tau}$  é fortemente contínua, fixe  $\varepsilon > 0$  e  $x \in E_G$ . Tome ainda sequência  $(x_n)$  em  $A$  que converge para  $x$ . Seja  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N \Rightarrow \|x_n - x\|_{E_G} < \varepsilon$ . Seja  $V_\varepsilon$  vizinhança de  $\varepsilon$  tal que

$s \in V_e \Rightarrow \|\beta_s(x_N) - x_N\| < \varepsilon$ . Portanto, para  $s \in V_e$  temos:  
 $\|\tilde{\tau}_s(x) - x\|_{EG} \leq \|x - x_N\|_{EG} + \|\beta_s(x_N) - x_N\|_{EG} + \|x_N - x\|_{EG} < 3\varepsilon$ .  
 Isso garante que  $\tilde{\tau}$  é fortemente contínua.

Defina agora  $\beta^G : H \rightarrow \text{Aut}(A^G)$ , por  $\beta_s^G(a) := \beta_s(a)$ , para todo  $a \in A^G$ . A fórmula faz sentido, pois dado  $s \in G$ , temos:

$$\beta_s(a) = \beta_s(\alpha_r(a)) = \alpha_r(\beta_s(a)) \Rightarrow \beta_s(a) \in A^G.$$

Também não é difícil ver que  $\beta^G$  é fortemente contínua e que define uma ação de  $H$  em  $A^G$ .

Quanto à ação  $\tilde{\beta}$  de  $H$  em  $A \rtimes_\alpha G$ , definamos:

$$\tilde{\beta}_s(f)(r) = \beta_s(f(r)).$$

Cada  $\tilde{\beta}_s$  é trivialmente \*-homomorfismo. Mais ainda, valem:

$$\tilde{\beta}_s \circ \tilde{\beta}_{s'}(f)(r) = \tilde{\beta}_s(\tilde{\beta}_{s'}(f(r))) = \beta_{ss'}(f(r)) = \tilde{\beta}_{ss'}(f)(r);$$

e

$$\tilde{\beta}_e(f)(r) = f(r).$$

À priori, para cada  $s \in H$ , nossa definição nos gera um \*-isomorfismo apenas contemplando  $\tilde{\beta}_s : C(G, A) \rightarrow C(G, A)$ . Contudo, dada  $(\pi, U)$  representação covariante de  $(A, G, \alpha)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \pi \rtimes U(\tilde{\beta}_s(f)) &= \int_G \pi \circ \beta_s(f(s')) U_{s'} d\mu(s') = (\pi \circ \beta_s \rtimes U)(f), \\ \Rightarrow \|\pi \rtimes U(\tilde{\beta}_s(f))\| &= \|(\pi \circ \beta_s \rtimes U)(f)\|. \end{aligned}$$

Mas, é claro que  $(\pi \circ \beta_s, U)$  é também representação covariante.

Assim:

$$\sup_{\pi \rtimes U} \|(\pi \rtimes U)(\tilde{\beta}_s(f))\| = \sup_{\pi \circ \beta_s \rtimes U} \|(\pi \circ \beta_s \rtimes U)(f)\| \leq \|f\|,$$

portanto  $\|\tilde{\beta}_s(f)\| \leq \|f\|$ .

Procedimentos semelhantes mostram que para toda  $(\pi, U)$  representação covariante de  $(A, G, \alpha)$  vale:

$$\|\pi \rtimes U(f)\| = \|(\pi \circ \beta_{s^{-1}} \rtimes U)(\beta_s(f))\|.$$

Assim, cada  $\tilde{\beta}_s$  é \*-isomorfismo isométrico e podemos estendê-lo (com certo abuso de notação) a  $\tilde{\beta}_s : A \rtimes_\alpha G \rightarrow A \rtimes_\alpha G$ , que continuará \*-isomorfismo isométrico, visto que  $C(G, A)$  é \*-álgebra densa em  $A \rtimes_\alpha G$ .

Continuando com a verificação das hipóteses do Teorema 5.8, para  $x, y \in A$  temos:

1.

$${}_{A^G} \langle \tilde{\tau}_s(x), \tilde{\tau}_s(y) \rangle = \int_G \alpha_r(\beta_s(xy^*)) d\mu(r)$$

$$= \beta_s \left( \int_G \alpha_r(xy^*) d\mu(r) \right) = \beta_s^G(A^G \langle x, y \rangle).$$

2.

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\tau}_s(x), \tilde{\tau}_s(y) \rangle_{A \rtimes_{\alpha} G}(r) &= \tilde{\tau}_s(x^*) \alpha_r(\tilde{\tau}_s(y)) = \beta_s(x^*) \alpha_r(\beta_s(y)) \\ &= \beta_r(x^* \alpha_s(y)) = \tilde{\beta}_s(\langle x, y \rangle_{A \rtimes_{\alpha} G})(r). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 5.8, obtemos:  $(A^G \rtimes_{\beta} G) \sim_M (A \rtimes_{\alpha} G) \rtimes_{\tilde{\beta}} H$ . Analogamente  $(A^H \rtimes_{\alpha} H) \sim_M (A \rtimes_{\beta} H) \rtimes_{\tilde{\alpha}} G$ .

Considere o grupo  $G \times H$  e a ação  $\alpha \times \beta$  em  $A$  dada por

$$\alpha \times \beta_{(r,s)}(a) = \alpha_r(\beta_s(a)).$$

Vamos mostrar que as  $C^*$ -álgebras  $A \rtimes_{\alpha \times \beta} (G \times H)$  e  $(A \rtimes_{\alpha} G) \rtimes_{\tilde{\beta}} H$  são isomorfas por meio da extensão de  $\varphi : C(G \times H, A) \rightarrow C(H, C(G, A))$  em que  $\varphi(f)(s)(r) = f(r, s)$ , para todos  $r \in G$  e  $s \in H$ . Antes de provarmos que de fato podemos estender  $\varphi$  a  $\tilde{\varphi} : A \rtimes_{\alpha \times \beta} (G \times H) \rightarrow (A \rtimes_{\alpha} G) \rtimes_{\tilde{\beta}} H$ , mostremos que  $\varphi$  é \*-isomorfismo entre \*-álgebras.

1. ( $\varphi$  é linear)

$$\varphi(f + \lambda g)(s)(r) = f(r, s) + \lambda g(r, s) = \varphi(f)(s)(r) + \lambda g(s)(r).$$

2. ( $\varphi$  é multiplicativo)

$$\begin{aligned} (\varphi(f) * \varphi(g))(s)(r) &= \int_H \varphi(f)(s') \tilde{\beta}_{s'}(\varphi(g)(s'^{-1}s))(r) d\mu(s') \\ &= \int_H \int_G f(r', s') \alpha_{r'} \beta_{s'}(g(r'^{-1}r, s'^{-1}s)) d\mu(r') d\mu(s') \\ &= \int_{G \times H} f(r', s') \alpha \times \beta_{(r', s')}(g(r'^{-1}r, s'^{-1}s)) d\mu(r', s') \\ &= \varphi(f * g)(s)(r). \end{aligned}$$

3. ( $\varphi$  preserva adjuntos)

$$\begin{aligned} \varphi(f)^*(s)(r) &= \Delta(s^{-1}) \tilde{\beta}_s(\varphi(f)(s^{-1})^*)(r) \\ &= \Delta(s^{-1}) \beta_s(\Delta(r^{-1}) \alpha_r(f(r^{-1}, s^{-1})^*)) \\ &= \Delta(s^{-1}) \Delta(r^{-1}) \beta_s \circ \alpha_r(f(r^{-1}, s^{-1})) \\ &= \Delta(r^{-1}, s^{-1}) \alpha \times \beta_{(r,s)}(f(r^{-1}, s^{-1})^*) \\ &= \varphi(f^*)(s)(r). \end{aligned}$$

4. ( $\varphi$  é injetiva)  $\varphi(f) = 0 \Rightarrow f(r, s) = 0, \forall r \in G, s \in H \Rightarrow f = 0$ .
5. ( $\varphi$  é sobrejetiva)

Dada  $F \in C(H, C(G, A))$ , defina  $f \in C(G \times H, A)$  por  $f(r, s) = F(r)(s)$ . Claro que  $\varphi(f) = F$ .

Vamos agora provar que tal \*-isomorfismo é isométrico encontrando uma bijeção especial entre o conjunto das representações de  $A \rtimes_{\alpha \times \beta} (G \times H)$  e  $(A \rtimes_{\alpha} G) \rtimes_{\tilde{\beta}} H$ . Seja  $(\pi, U)$  representação covariante de  $(A, G \times H, \alpha \times \beta)$  em  $B(\mathcal{H})$  em que  $\mathcal{H}$  é algum espaço de Hilbert. Podemos definir as aplicações  $U_G : G \rightarrow U(\mathcal{H}), U_H : H \rightarrow U(\mathcal{H})$  tais que  $U_G(r) = U_{(r, e_H)}$ ,  $U_H(s) = U_{(e_G, s)}$ . Vamos demonstrar agora que  $(\pi, U_G)$  e  $(\pi \rtimes U_G, U_H)$  são representações covariantes respectivamente de  $(A, G, \alpha)$  e  $(A \rtimes_{\alpha} G, H, \tilde{\beta})$ . As únicas constatações não triviais são as relativas à condição de covariância:

1. (Condição de covariância para  $(\pi, U_G)$ )

$$\begin{aligned} \pi(\alpha_r(a)) &= \pi(\alpha \times \beta_{(r, e_H)}(a)) = U_{(r, e)}\pi(a)U_{(r^{-1}, e)} \\ &= U_G(r)\pi(a)U_G(r^{-1}). \end{aligned}$$

2. (Condição de covariância para  $(\pi \rtimes U_G, U_H)$ )

$$\begin{aligned} \pi \rtimes U_G(\tilde{\beta}_s(f)) &= \int_G \pi(\beta_s(f(r)))U_{(r, e_H)}d\mu(r) \\ &= \int_G U_{(e_G, s)}\pi(f(r))U_{(e_G, s^{-1})}U_{(r, e_H)}d\mu(r) \\ &= \int_G U_{(e_G, s)}\pi(f(r))U_{(r, e_H)}U_{(e_G, s^{-1})}d\mu(r) \\ &= U_H(s)\pi \rtimes U_G(f)U_H(s^{-1}). \end{aligned}$$

Obtemos portanto uma aplicação:

$$\begin{aligned} \rho : \text{Rep}(A \rtimes_{\alpha \times \beta} G \times H) &\rightarrow \text{Rep}((A \rtimes_{\alpha} G) \rtimes_{\tilde{\beta}} H) \\ \pi \rtimes U &\mapsto (\pi \rtimes U_G) \rtimes U_H \end{aligned}$$

Provemos que  $\rho$  é bijetora.

1. ( $\rho$  é injetiva)
- $(\pi \rtimes U_G) \rtimes U_H = 0 \Rightarrow (\pi \rtimes U_G) \rtimes U_H(\varphi(f)) = 0, \forall f \in C(G \times H, A)$ .  
Contudo:



$$\begin{aligned}
(\pi \rtimes U_G) \rtimes U_H(\tilde{\varphi}(f)) &= \int_H \pi \rtimes U_G(\tilde{\varphi}(f)(s))U_H(s)d\mu(s) \\
&= \int_H \int_G \pi(\tilde{\varphi}(s)(r))U_G(r)d\mu(r)U_Hd\mu(s) \\
&= \int_{G \times H} \pi(f(r, s))U_{(r, s)}d\mu(r, s) = \pi \rtimes U(f). \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Portanto,  $\pi \rtimes U = 0$  e  $\rho$  é injetora.

2. ( $\rho$  é sobrejetiva)

Podemos ver  $\tilde{\beta}_s : A \rtimes_\alpha G \rightarrow M(A \rtimes_\alpha G)$  da seguinte forma:  $\tilde{\beta}_s(f)(g) = \tilde{\beta}_s(f) * g$ , para todo  $g \in C(G, A)$ . Como  $\tilde{\beta}_s$  é não degenerada, podemos passar para extensão (abusando da notação)

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_s : M(A \rtimes_\alpha G) &\rightarrow M(A \rtimes_\alpha G) \\
\tilde{\beta}_s(\mu)(\tilde{\beta}_s(f) * g) &= \tilde{\beta}_s(\mu f) * g.
\end{aligned}$$

Para mostrarmos a sobrejetividade de  $\rho$ , vamos encontrar relações entre  $\tilde{\beta}_s$  e  $i_A$  e  $i_G$  conforme definimos na Proposição 4.20.

(a)

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_s(i_A(a))(\tilde{\beta}_s(f) * g)(r) &= \tilde{\beta}_s(i_A(a)f) * g(r) \\
&= \int_G \beta_s(af(r'))\alpha_{r'}(g(r'^{-1}r))d\mu(r') \\
&= \beta_s(a) \int_G \beta_s(f(r'))\alpha_{r'}(g(r'^{-1}r))d\mu(r') \\
&= i_A(\beta_s(a))(\tilde{\beta}_s(f) * g).
\end{aligned}$$

Logo  $\tilde{\beta}_s(i_A(a)) = i_A(\beta_s(a))$ .

(b)

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_s(i_G(r))(\tilde{\beta}_s(f) * g)(r') &= \tilde{\beta}_s(i_G(r)f) * g(r') \\
&= \int_G \beta_s(i_G(r)f(r''))\alpha_{r''}(g(r''^{-1}r'))d\mu(r'') \\
&= \int_G \beta_s(\alpha_r(f(r^{-1}r'')))\alpha_{r''}(g(r''^{-1}r'))d\mu(r'') \\
&= \int_G \alpha_r\beta_s(f(r''))\alpha_{r''}(g(r''^{-1}r^{-1}r'))d\mu(r'')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_r \int_G \beta_s(f(r'')) \alpha_{r''}(g(r''^{-1}r^{-1}r')) d\mu(r'') \\
&= i_G(r)(\tilde{\beta}_s(f) * g)(r').
\end{aligned}$$

Logo  $\tilde{\beta}_s(i_G(r)) = i_G(r)$ .

Tome agora  $(\pi \rtimes U) \rtimes V$  representação de  $(A \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\tilde{\beta}} H$  em relação a um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . A relação de covariância nos dá,

$$(\pi \rtimes U)(\tilde{\beta}_s(x)) = V_s \pi \rtimes U(x) V_{s-1}$$

para todos  $s \in H$  e  $x \in A \rtimes_\alpha G$ . Tal relação vale ainda para todo  $x \in M(A \rtimes_\alpha G)$ . Assim,

1.

$$\begin{aligned}
\pi(\beta_s(a)) &= \pi \rtimes U(i_A(\beta_s(a))) = \pi \rtimes U(\tilde{\beta}_s(i_A(a))) \\
&= V_s(\pi \rtimes U)(i_A(a)) V_{s-1} = V_s \pi(a) V_{s-1}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
U_r &= \pi \rtimes U(i_G(r)) = \pi \rtimes U(\tilde{\beta}_s(i_G(r))) \\
&= V_s \pi \rtimes U(i_G(r)) V_{s-1} = V_s U_r V_{s-1}.
\end{aligned}$$

Defina agora  $U' : G \times H \rightarrow B(\mathcal{H})$ ,  $U'_{(r,s)} = U_r V_s$ . Segue que  $(\pi, U')$  é representação covariante de  $(A, G \times H, \alpha \times \beta)$ , pois

$$\begin{aligned}
\pi(\alpha \times \beta_{(r,s)}(a)) &= U_r \pi(\beta_s(a)) U_{r-1} = U_r V_s \pi(a) V_{s-1} U_{r-1} \\
&= U'_{(r,s)} \pi(a) U'_{(r-1,s-1)}.
\end{aligned}$$

Agora, pelo cálculo 5.7 acima, segue que:

$$\begin{aligned}
\|\varphi(f)\| &= \sup_{(\pi \rtimes U, V)} \|(\pi \rtimes U) \rtimes V(\varphi(f))\| \\
&= \sup_{(\pi, U')} \|\pi \rtimes U'(f)\| \leq \|f\|.
\end{aligned}$$

Por outro lado, também por 5.7, temos:

$$\|f\| = \sup_{(\pi, U)} \|\pi \rtimes U(f)\| \tag{5.8}$$

$$= \sup_{(\pi \rtimes U_G) \rtimes U_H} \|(\pi \rtimes U_G) \rtimes U_H(\varphi(f))\| \leq \|\varphi(f)\|. \tag{5.9}$$

Obtemos assim que  $\varphi$  é isométrico e sua extensão é um isomorfismo, ou seja,  $A \rtimes_{\alpha \times \beta} (G \times H)$  e  $(A \rtimes_{\alpha} G) \rtimes_{\tilde{\beta}} H$  são isomorfas segundo  $\varphi$ . Portanto:

$$\begin{aligned} (A^G \rtimes_{\beta^G} H) &\sim_M (A \rtimes_{\alpha} G) \rtimes_{\tilde{\beta}} H \cong A \rtimes_{\alpha \times \beta} (G \times H) \\ &\cong A \rtimes_{\beta \times \alpha} (H \times G) \sim_M (A^H \rtimes_{\alpha^H} G). \end{aligned}$$

Portanto,  $(A^G \rtimes_{\beta^G} H) \sim_M (A^H \rtimes_{\alpha^H} G)$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

Nosso intuito agora é adaptar esse teorema para um caso mais concreto:  $A = C_0(X)$ , em que  $X$  é um  $G$ -espaço topológico Hausdorff localmente compacto. Para tal intento, precisaremos de um resultado preliminar, uma definição, dois lemas, um teorema e caracterizar de forma apropriada a  $C^*$ -álgebra  $C_0(X)^G$ .

**Proposição 5.12** *Se  $\varphi : A \rightarrow B$  é \*-isomorfismo entre  $C^*$ -álgebras e  $(A, G, \alpha)$  é sistema dinâmico com  $G$  grupo compacto então a aplicação*

$$\alpha' : G \rightarrow \text{Aut}(B)$$

*dada por  $\alpha'_r(b) = \varphi(\alpha_r(\varphi^{-1}(b)))$  é ação de  $G$  em  $B$ ,  $(B, G, \alpha')$  é sistema dinâmico e  $A \rtimes_{\alpha} G \cong B \rtimes_{\alpha'} G$ .*

**Demonstração:** Começemos com as verificações mais imediatas, por exemplo, demonstremos que  $\alpha'$  é homomorfismo contínuo (com topologia da convergência pontual em  $\text{Aut}(B)$ ) de grupos:

$$\alpha'_e(b) = \varphi(\alpha_e(\varphi^{-1}(b))) = b \Rightarrow \alpha'_e = I_B;$$

$$\alpha'_r(\alpha'_s(b)) = \alpha'_r(\varphi(\alpha_s(\varphi^{-1}(b)))) = \varphi(\alpha_{rs}(\varphi^{-1}(b))) = \alpha'_{rs}(b).$$

Agora, se uma net  $(r_i)$  em  $G$  é tal que  $r_i \rightarrow e$  então é claro que  $\varphi(\alpha_{r_i}(\varphi^{-1}(b))) \rightarrow b$  para todo  $b \in B$ , o que garante que  $\alpha'$  é homomorfismo contínuo e temos, de fato, que  $(B, G, \alpha')$  é sistema dinâmico.

Considere agora a seguinte aplicação:

$$\varphi_* : C_c(G, A) \rightarrow C_c(G, B)$$

$$\varphi_*(f)(r) = \varphi(f(r)).$$

Ela é um \*-homomorfismo isométrico e sobrejetor entre \*-álgebras. De fato:

1. ( $\varphi_*$  é linear)  $\varphi_*(\lambda f + g)(r) = \lambda \varphi(f(r)) + \varphi(g(r)) = [\lambda \varphi_*(f) + \varphi_*(g)](r)$

2. ( $\varphi_*$  é multiplicativo)

$$\begin{aligned}
 \varphi_*(f) * \varphi_*(g)(r) &= \int_G \varphi_*(f)(s) \alpha'_s(\varphi_*(g)(s^{-1}r)) d\mu(s) \\
 &= \int_G \varphi(f(s)) \alpha'_s(\varphi(g(s^{-1}r))) d\mu(s) \\
 &= \int_G \varphi(f(s)) \varphi(\alpha_s(g(s^{-1}r))) d\mu(s) \\
 &= \varphi(f * g(r)) = \varphi_*(f * g)(r).
 \end{aligned}$$

3. ( $\varphi_*$  preserva adjuntos)

$$(\varphi_*(f))^*(r) = \alpha'_r(\varphi(f(r^{-1})*)) = \varphi(\alpha_r(f(r^{-1})*)) = \varphi_*(f^*)(r).$$

4. ( $\varphi_*$  é sobrejetora)

Dada  $g \in C_c(G, B)$  defina  $f(r) := \varphi^{-1}(g(r))$ . Não é difícil ver que  $f \in C_c(G, A)$  e  $\varphi_*(f) = g$ .

5. ( $\varphi$  é isometria, em particular, injetora)

Para provar esse item, precisaremos trabalhar com as representações covariantes de ambos os sistemas dinâmicos, provenientes de  $A$  e de  $B$ . Seja  $(\pi, U)$  representação covariante de  $(A, G, \alpha)$ . Tome o par  $(\pi', U)$  par tal que  $\pi'(b) := \pi(\varphi^{-1}(b))$ , para todo  $b \in B$ . Então  $\pi'$  é  $*$ -representação de  $B$  e vale:

$$\begin{aligned}
 \pi'(\alpha'_r(b)) &= \pi(\varphi^{-1}(\alpha'_r(b))) = \pi(\varphi^{-1}(\varphi(\alpha_r(\varphi^{-1}(b)))) \\
 &= \pi(\alpha_r(\varphi^{-1}(b))) = U_r \pi(\varphi^{-1}(b)) U_{r^{-1}} = U_r \pi'(b) U_{r^{-1}}.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $(\pi', U)$  é representação covariante de  $(B, G, \alpha')$ . Mais ainda, note que:

$$\pi' \rtimes U(\varphi(f)) = \int_G \pi'(\varphi(f)(s)) U_s d\mu(s) \quad (5.10)$$

$$= \int_G \pi(f(s)) U_s d\mu(s) = \pi \rtimes U(f). \quad (5.11)$$

Por conseguinte, temos uma aplicação

$$Rep(A, G, \alpha) \rightarrow Rep(B, G, \alpha')$$

dada por  $(\pi, U) \mapsto (\pi', U)$  e ainda  $\|\varphi(f)\| \geq \|f\|$  (norma universal, ou seja, aquela que considera todas as representações covariantes). Vamos provar que a aplicação entre representações covariantes é uma bijeção.

Se  $(\pi', U) = (\rho', V)$  então  $\pi(\varphi^{-1}(b)) = \pi'(b) = \rho'(b) = \rho(\varphi^{-1}(b))$  para todo  $b \in B$ . Portanto,  $\pi = \rho$ ,  $U = V$  e aplicação é injetora.

Para vermos a sobrejetividade, seja  $(M, U)$  representação covariante de  $(B, G, \alpha')$ . Considere a representação covariante de  $(A, G, \alpha)$   $(\pi, U)$  dada por  $\pi(a) = M(\varphi(a))$ . A condição de covariância é facilmente verificada para  $(\pi, U)$  e ainda  $(\pi', U) = (M, U)$ , donde segue que a aplicação é bijetora. Pela constatação 5.10 acima, temos que  $\varphi$  é \*-isomorfismo isométrico entre \*-álgebras, e portanto estende-se para um isomorfismo no âmbito de produtos cruzados, ou seja,  $A \rtimes_{\alpha} G \cong B \rtimes_{\alpha'} G$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

**Definição 5.13** *Sejam  $X$  espaço Hausdorff localmente compacto e  $A$  uma  $C^*$ -álgebra. Dizemos que  $A$  é uma  $C_0(X)$ -álgebra se existe um \*-homomorfismo não-degenerado  $C_0(X) \rightarrow M(A)$  que associa cada  $f$  ao multiplicador  $a \mapsto fa$ .*

*Se  $X$  é um  $G$ -espaço com  $\beta$  sendo a ação correspondente em  $C_0(X)$  e  $(G, A, \alpha)$  é um sistema dinâmico, dizemos que ele é uma  $(G, C_0(X), \beta)$ -álgebra se  $A$  for uma  $C_0(X)$ -álgebra tal que o homomorfismo  $C_0(X) \rightarrow M(A)$  é  $G$ -equinvariante, ou seja, satisfaz:*

$$\alpha_r(fa) = \beta_r(f)\alpha_r(a)$$

para  $f \in C_0(X)$ ,  $a \in A$  e  $r \in G$ .

**Observação 5.14** *Todo sistema dinâmico  $(C_0(X), G, \alpha)$  (em que  $G$ , grupo Hausdorff compacto, age em  $X$  e  $\alpha$  é a ação correspondente canônica em  $C_0(X)$ ) é uma  $(C_0(X), G, \alpha)$ -álgebra de maneira canônica.*

**Lema 5.15** *Sejam  $\{e_i\}_{i \in I}$  unidade aproximada para a  $C^*$ -álgebra  $A$  e  $(A, G, \alpha)$  um sistema dinâmico com  $G$  grupo compacto. Então*

$$P(e_i) = \int_G \alpha_s(e_i) d\mu(s)$$

*é uma unidade aproximada  $G$ -invariante para  $A$ .*

**Demonstração:**

Não é difícil ver que para todo  $a' \in A$ ,  $P(a')$  é  $G$ -invariante. Tome, agora,  $a \in A$ ,  $r \in G$  e  $\varepsilon > 0$ . Logo, existem  $i_r$  tal que  $i \geq i_r \Rightarrow \|e_i \alpha_r(a) - \alpha_r(a)\| < \varepsilon$  e uma vizinhança de  $r$ ,  $V_r$ , tal que  $s \in V_r \Rightarrow \|\alpha_s(a) - \alpha_r(a)\| < \varepsilon$ . Portanto, para  $s \in V_r$ ,  $i \geq i_r$  temos:

$$\|e_i \alpha_s(a) - \alpha_s(a)\| \leq \|e_i \alpha_s(a) - e_i \alpha_r(a)\| + \|e_i \alpha_r(a) - \alpha_r(a)\| +$$

$$\begin{aligned} & + \|\alpha_r(a) - \alpha_s(a)\| \\ & < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Sendo  $G$  compacto, podemos extrair uma subcobertura finita de  $\bigcup_{r \in G} V_r$ , digamos  $\bigcup_{i=1}^n V_{r_i} = G$ . Assim, tomando  $s \in G$  (portanto  $s \in V_{r_j}$  para algum  $j$ ) e  $i \geq \max\{i_{r_1}, \dots, i_{r_n}\}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} & \|e_i \alpha_s(a) - \alpha_s(a)\| \leq \\ & \|e_i \alpha_s(a) - e_i \alpha_{t_j}(a)\| + \|e_i \alpha_{t_j}(a) - \alpha_{t_j}(a)\| + \|\alpha_{t_j}(a) - \alpha_s(a)\| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Isso quer dizer que  $e_i \alpha_s(a) \rightarrow \alpha_s(a)$  para todo  $s \in G$  uniformemente. Portanto:

$$\begin{aligned} \|P(e_i)a - a\| &= \left\| \int_G \alpha_r(e_i) a d\mu(r) - a \right\| = \left\| \int_G \alpha_r(e_i - \alpha_{r^{-1}}(a)) d\mu(r) \right\| \\ &\leq \int_G \|e_i \alpha_{r^{-1}}(a) - \alpha_{r^{-1}}(a)\| d\mu(r) < 3\varepsilon. \square \end{aligned}$$

Portanto  $P(e_i)$  é unidade aproximada  $G$ -invariante para  $A$ .

**Lema 5.16** *Sejam  $G$  grupo compacto e  $X$  um  $G$ -espaço livre (ver Definição 4.30) localmente compacto Hausdorff. Então as funções  $\varphi_{f_1 f_2} \in C_0(G \times X)$ ,  $\varphi_{f_1 f_2}(r, x) = f_1(x) f_2(r^{-1}x)$ , para todas  $f_1, f_2 \in C_0(X)$  geram um subespaço denso de  $C_0(G \times X)$ .*

### Demonstração:

Primeiramente vamos mostrar que  $\text{span}\{\varphi_{f_1 f_2} / f_1, f_2 \in C_0(X)\} = D$  é uma  $*$ -subálgebra de  $C_0(G \times X)$ . Tome  $f_1, f_2, g_1$  e  $g_2 \in C_0(X)$ . Então:

$$\begin{aligned} \varphi_{f_1 f_2} \varphi_{g_1 g_2}(r, x) &= \varphi_{f_1 f_2}(r, x) \varphi_{g_1 g_2}(r, x) \\ &= f_1(x) f_2(r^{-1}x) g_1(x) g_2(r^{-1}x) \\ &= \varphi_{f_1 g_1} \varphi_{f_2 g_2}(r, x) \end{aligned}$$

e

$$(\varphi_{f_1 f_2})^*(r, x) = \overline{f_1(x)} \overline{f_2(r^{-1}x)} = \varphi_{f_1^* f_2^*}(r, x)$$

mostram que, de fato,  $D$  é uma  $*$ -subálgebra de  $C_0(G \times X)$ . Vejamos agora que ela separa pontos. Suponha  $(s, x) \neq (r, y)$ .

Se  $x = y$  (o que implica  $s \neq r$ ), tome  $f \in C_0(X)$  tal que  $f(x) = 1$ . Note que  $r^{-1}x \neq s^{-1}x$ , pois se tivéssemos  $r^{-1}x = s^{-1}x$ , então  $x =$

$rs^{-1}x$  e assim  $rs^{-1} = e$ , já que a ação é livre. Mas isso contradiz o fato de termos  $r \neq s$ . Assim, existe  $g \in C_0(X)$  tal que  $g(r^{-1}x) \neq g(s^{-1}x)$ . Portanto,  $\varphi_{fg}(s, x) \neq \varphi_{f,g}(r, x)$

Se  $x \neq y$ , escolha  $f \in C_0(X) / f(x) \neq f(y)$  e  $g \in C_0(X)$  tal que  $g(K) = 1$  para algum compacto  $K$  que contém  $Gx \cup Gy$ . Também há separação de pontos nesse caso, portanto.  $\square$

**Teorema 5.17** *Sejam  $G$  grupo compacto,  $X$  um  $G$ -espaço livre localmente compacto Hausdorff e  $(C_0(X), G, \beta)$  o sistema dinâmico correspondente. Se  $(G, A, \alpha)$  é uma  $(C_0(X), G, \beta)$ -álgebra, então  $\alpha$  é saturada.*

### Demonstração:

Sejam  $a, b \in A, z \in C(G), s, r \in G$ . Mostraremos que as funções do tipo  $z \otimes a(s) := z(s)a$  podem ser aproximadas em  $\|\cdot\|_\infty$  em  $C(G, A)$  por combinação linear de funções do tipo  $s \mapsto a\alpha_s(b)$ . Isso mostrará, devido aos lemas 5.5 e 4.1, que as funções do tipo  $s \mapsto a\alpha_s(b)$  geram um subespaço denso segundo  $\|\cdot\|_\infty$  (e portanto segundo a norma universal) em  $C(G, A)$ . Tome  $g \in C(G), a \in A$  e  $\varepsilon > 0$ . Considere  $\{e_i\}$  unidade aproximada  $G$ -invariante para  $A$  e  $f \in C_0(X), 0 \leq \|f\| \leq 1$  tais que existe  $i_0$  tal que  $i \geq i_0 \Rightarrow \|a - ae_i\| < \varepsilon$  e ainda  $\|a - fa\| \leq 0$ . Como a aplicação  $(r, x) \mapsto g(r)f(x)$  está em  $C_0(G \times X)$ , pelo Lema 5.16, temos que existem  $f_{1k}, f_{2k}, k \in \{1, \dots, n\}$  tais que:

$$\left| g(r)f(x) - \sum_{k=1}^n f_{1k}(x)f_{2k}(r^{-1}x) \right| < \min \left( 1, \frac{\varepsilon}{\|a\|} \right).$$

Escolha  $a_k = f_{1k}a; b_{1k} = f_{2k}e_{i_0}$ . Assim, dado  $r \in G$ , teremos:

$$\begin{aligned} \left\| g(r)a - \sum_{k=1}^n a_k\alpha_r(b_k) \right\| &\leq \|g(r)a - g(r)fa\| \\ &\quad + \left\| g(r)fa - \sum_{k=1}^n f_{1k}a\alpha_r(f_{2k}e_{i_0}) \right\| \\ &\leq \|g\|_\infty \|a - fa\| \\ &\quad + \left\| g(r)fa - \sum_{k=1}^n f_{1k}a\beta_r(f_{2k})\alpha_r(e_{i_0}) \right\| \\ &\leq \|g\|_\infty \varepsilon \\ &\quad + \left\| g(r)fa - \left( \sum_{k=1}^n f_{1k}\beta_r(f_{2k}) \right) a(e_{i_0}) \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|g\|_\infty \varepsilon + \left\| g(r)f - \sum_{k=1}^n f_{1k} \beta_r(f_{2k}) \right\| \|a\| \\
&\quad + \left\| \sum_{k=1}^n f_{1k} \beta_r(f_{2k}) \right\| \|a - ae_{i_0}\| \\
&< \|g\|_\infty \varepsilon + \varepsilon + (1 + \|g\|_\infty) \varepsilon.
\end{aligned}$$

em que  $f_{1k} \beta_r(f_{2k})(x) = f_{1k}(x) f_{2k}(r^{-1}x)$ , para todo  $k \in \{1, \dots, n\}$ . A última desigualdade acima contou com a seguinte constatação:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^n f_{1k} \beta_r(f_{2k}) \right\| &\leq \left\| g(r)f - \sum_{k=1}^n f_{1k} \beta_r(f_{2k}) \right\| + \|g(r)f\| \\
&< 1 + \|g\|_\infty. \square
\end{aligned}$$

Caracterizemos, logo após definir aplicações próprias,  $C^*$ -álgebra  $C_0(X)^G$ .

**Definição 5.18** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos localmente compactos Hausdorff e  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua.  $f$  é dita própria se  $f^{-1}(K)$  é compacto em  $X$  sempre que  $K$  for compacto em  $Y$ . Mais especificamente, um  $G$ -espaço localmente compacto (em que  $G$  é um grupo localmente compacto)  $X$  será dito próprio se a aplicação  $(s, x) \mapsto (sx, x)$  for própria de  $G \times X$  em  $X \times X$ . Nesse caso, dizemos ainda que a ação é própria ou que o grupo  $G$  age propriamente em  $X$ .*

**Observação 5.19** *Não é difícil ver que toda ação proveniente de um grupo topológico compacto é própria.*

**Proposição 5.20** *Sejam  $X$   $G$ -espaço localmente compacto Hausdorff,  $G$  grupo compacto e  $(C_0(X), G, \alpha)$  sistema dinâmico usual, com  $\alpha_r(f) = f(r^{-1}x)$ . Considere  $\pi : X \rightarrow G/X$ ,  $\pi(x) = Gx$ , o mapeamento quociente. Então  $\pi_* : C_0(G/X) \rightarrow C_0(X)^G$ ,  $\pi_*(f) = f \circ \pi$ , é um isomorfismo.*

### Demonstração:

O Corolário 3.43 de (WILLIAMS, 2007) diz que  $G/X$  é Hausdorff, já que  $X$  é próprio. O Lema 3.37 de (WILLIAMS, 2007) nos diz ainda que se  $G/X$  é Hausdorff então  $T \subset G/X$  é compacto se e somente se existe  $D \subset X$  compacto tal que  $D = \pi^{-1}(T)$ . Isso garante que  $\pi$  é uma aplicação própria.

Vamos agora mostrar que a aplicação  $\pi_*$ ,  $\pi_*(f) = f \circ \pi$  está de fato bem definida e se trata de um isomorfismo. Seja  $r \in G$  e  $x \in X$ .



Então:

$$\alpha_r(f \circ \pi)(x) = f \circ \pi(r^{-1}x) = f(Gr^{-1}x) = f(Gx) = f \circ \pi(x).$$

O Lema 3.25 de (WILLIAMS, 2007) diz que  $\pi$  é contínua e aberta. Fixando  $\varepsilon > 0$ , vale a igualdade:

$$\{x \in X, f \circ \pi(x) = f(Gx) \geq 0\} = \pi^{-1}(\{Gx \in (G/X) : f(Gx) \geq \varepsilon\})$$

e isso nos garante que  $f \circ \pi$  é contínua e se anula no infinito.

Não é difícil ver que  $\pi_*$  é \*-homomorfismo injetivo. Para vermos que é sobrejetivo, seja  $g \in C_0(X)^G$ . Defina a aplicação  $f$  que para cada  $Gx \in G/X$  vale  $f(Gx) := g(x)$ . Tal aplicação está bem definida, pois, por exemplo, tomando  $rx \in Gx$ , temos

$$f(Grx) = g(rx) = \alpha_{r^{-1}}(g)(x) = g(x).$$

Mais ainda,  $f$  é contínua, pois dado  $A$  conjunto aberto em  $\mathbb{C}$ , temos:

$$f^{-1}(A) = \{Gx \in G/X : f(Gx) = g(x) \in A\} = \pi(g^{-1}(A)).$$

Sendo  $g$  contínua e  $\pi$  aberta, a igualdade acima mostra que  $f^{-1}(A)$  é aberto, portanto  $f$  é contínua.  $\square$

Tendo em mãos os Teoremas 5.10 e 5.17, a Proposição 5.12 e o \*-isomorfismo acima, obtemos o seguinte exemplo, que nada mais é do que uma adaptação do Teorema 2 de (CURTO; MUHLY; WILLIAMS, 1984) e conhecido como Teorema Simétrico de Imprimitividade (versão para álgebras comutativas).

**Exemplo 5.21** *Sejam  $X$  espaço Hausdorff localmente compacto e  $G$  e  $H$  grupos compactos Hausdorff agindo livremente em  $X$  e comutando. Considere  $C_0(X)$  e as respectivas ações (provenientes da ação em  $X$ ) de  $G$  e  $H$  em  $C_0(X)$  denotadas por  $\alpha$  e  $\beta$ . Considere  $\beta^G$  e  $\alpha^H$  ações conforme o Teorema 5.10 (para  $A = C_0(X)$ ). Então:*

$$C_0(X/G) \rtimes_{(\beta^G)'} H \sim_M C_0(X/H) \rtimes_{(\alpha^H)'} G$$

em que  $(\beta^G)'$  e  $(\alpha^H)'$  são obtidas por meio dos \*-isomorfismos entre  $C_0(X/G)$  e  $C_0(X)^G$  e entre  $C_0(X/H)$  e  $C_0(X)^H$ , que são obtidos a partir da Proposição 5.20 e da Proposição 5.12.

Vamos ver agora um exemplo ainda mais concreto, que na verdade é uma versão simplificada do Teorema de Stone-von Neumann, pois consideramos  $G$  grupo compacto, ao invés de localmente compacto, como está em (WILLIAMS, 2007) por exemplo. Dentre outras utilidades, ele diz que mesmo que a  $C^*$ -álgebra  $A$  de um sistema dinâmico  $(A, G, \alpha)$  seja abeliana, o produto cruzado proveniente pode não ser.

**Exemplo 5.22** *Seja  $G$  grupo compacto e escolha  $X = G$ , portanto  $X$  é um  $G$ -espaço em relação a translação à esquerda. Se  $(C(G), G, \tau)$  é sistema dinâmico, com  $\tau_r(f)(s) = f(r^{-1}s)$  e  $G$  grupo compacto, então  $C(G) \rtimes_{\tau} G \cong K(L^2(G))$ .*

A ação da hipótese é livre, pois  $rx = x \Rightarrow r = e, \forall x \in X = G$ . Portanto,  $G_x = \{e\}$ . Mais ainda,  $C_0(X/G) \cong \mathbb{C}$  como  $C^*$ -álgebras, pois dados  $Gx$  e  $Gy$ , por  $y = yx^{-1}x$ , tem-se  $Gx = Gy$ .

Vimos também que se  $G$  age livremente em  $X$  então  $\tau$  é saturada (Teorema 5.17). Assim pela Proposição 5.2, obtemos:  $C_0(G/X) \cong C_0(X)^G \sim_M C_0(X) \rtimes_{\tau} G$ . Portanto:  $\mathbb{C} \sim_M C_0(G) \rtimes_{\tau} G$ .

Pela Proposição 3.23, existe  $\mathcal{H}$  espaço de Hilbert tal que  $C(G) \rtimes_{\tau} G \cong K_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$ . Assim,  $C(G) \rtimes_{\tau} G$  é  $C^*$ -álgebra simples (pois  $K_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$  o é) e encontrando uma  $*$ -representação sua não-nula, esta tem de ser fiel.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} M : C(G) &\rightarrow B(L^2(G)) \\ f &\mapsto M_f \end{aligned}$$

em que  $M_f(\xi) = f \cdot \xi$ .

Vamos provar que  $M$  define de fato uma  $*$ -representação fiel. Primeiramente note que  $f \cdot \xi$  é um elemento de  $L^2(G)$  pois  $G$  é compacto e  $f$  contínua. Assim:

1. ( $M_f \in B(L^2(G))$ )  $\|M_f\| = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|f \cdot \xi\| \leq \|f\| \Rightarrow \|M_f\| \leq 1$ ,
2. ( $M$  é homomorfismo) Verificação trivial,
3. ( $M$  preserva adjuntos)

$$\begin{aligned} \langle M_f \xi, \eta \rangle &= \int_G (M_f \xi(r))^* \eta(r) d\mu(r) = \int_G \overline{\xi(r)} \overline{f(r)} \eta(r) d\mu(r) \\ &= \int_G \overline{\xi(r)} M_{f^*} \eta(r) d\mu(r) = \langle \xi, M_{f^*} \eta \rangle, \end{aligned}$$

4. ( $M$  é injetiva)  $M_f = 0 \Rightarrow f(r)\xi(r) = 0, \forall \xi \in L^2(G), r \in G$ . Sendo  $G$  compacto, a função constante  $\xi \equiv 1$  está em  $L^2(G)$ . Portanto  $f = 0$  e  $M$  é de fato representação fiel.

Considere agora  $\lambda : G \rightarrow U(L^2(G))$ ;  $\lambda(r)f(s) = f(r^{-1}s)$ . É claro que  $\lambda$  é homomorfismo unitário de grupos, com  $\|\lambda(r)\| = 1, \forall r \in G$ . Verifiquemos agora que  $(M, \lambda)$  é representação covariante:

$$\begin{aligned} \lambda_r M_f \lambda_{r^{-1}}(h)(s) &= M_f \lambda_{r^{-1}}(h)(r^{-1}s) = f(r^{-1}s) \lambda_{r^{-1}}(h)(r^{-1}s) \\ &= f(r^{-1}s) h(s) = M_{\tau_r(f)}(h)(s). \end{aligned}$$

Pela teoria de produtos cruzados, temos que  $M \rtimes \lambda : C(G) \rtimes G \rightarrow B(L^2(G))$  é uma \*-representação, portanto fiel, visto que

$$C(G) \rtimes_{\tau} G \cong K(\mathcal{H})$$

e que a álgebra dos operadores compactos de um espaço de Hilbert é simples. Mostraremos agora que  $M \rtimes \lambda(C(G) \rtimes_{\tau} G) = K(L^2(G))$ .

Fixe  $\theta_{\xi, \eta} \in K(L^2(G))$  com  $\xi, \eta \in C(G)$ . Defina  $f \in C(G \times G) \hookrightarrow C(G, C(G))$  por  $f(s, r) = \xi(r) \overline{\eta(s^{-1}r)}$ . Assim:

$$\begin{aligned} M \rtimes \lambda(f)(g)(r) &= \int_G M_{f(s)} \lambda(s)(g)(r) d\mu(s) \\ &= \int_G f(s, r) g(s^{-1}r) d\mu(s) \\ &= \int_G \xi(r) \overline{\eta(s^{-1}r)} g(s^{-1}r) d\mu(s) \\ &= \xi(r) \int_G \overline{\eta(s)} g(s) d\mu(s) = \theta_{\xi, \eta}(g)(r). \end{aligned}$$

Portanto,  $K(L^2(G)) \subset M \rtimes \lambda(C(G) \rtimes G)$ , visto que o conjunto  $M \rtimes \lambda(C(G) \rtimes G)$  é fechado e elementos da forma  $\theta_{\xi, \eta}$  geram  $K(L^2(G))$ . Pelo Lema 5.16, a mesma igualdade mostra que  $M \rtimes \lambda(C(G) \rtimes_{\tau} G) \subset K(L^2(G))$ . Assim,

$$M \rtimes \lambda(C(G) \rtimes G) = K(L^2(G)),$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

Para o próximo exemplo, precisaremos de mais alguns preparos. Primeiro, dada uma  $C^*$ -álgebra  $A$  e  $u \in A$ , definimos a aplicação  $Ad(u) : A \rightarrow A$ ,  $Ad(u)(a) = uau^*$ . Para mostrar a saturação de ações, usaremos o seguinte resultado, que é o Teorema 7.1.15 de (PHILLIPS, 1987):

**Teorema 5.23** *Seja  $(A, G, \alpha)$  sistema dinâmico, com  $G$  grupo abeliano*

compacto. Para  $\tau \in \widehat{G}$  defina:

$$A_\tau := \{a \in A : \alpha_r(a) = \tau(r)a, \forall r \in G\}.$$

A ação  $\alpha$  é saturada se e somente se

$$A_\tau^* A_\tau = \overline{\text{span}}\{a^* b : a, b \in A_\tau\} = A^G, \forall \tau \in \widehat{G}.$$

**Observação 5.24** Mantendo as mesmas hipóteses do teorema anterior, note que todo  $\tau \in \widehat{G}$  satisfaz:  $A_\tau^* A_\tau \subset A^G$ . Dados  $a, b \in A_\tau$  e  $r \in G$ , a inclusão segue imediatamente dessas igualdades:

$$\alpha_r(a^* b) = \alpha_r(a)^* \alpha_r(b) = \overline{\tau(r)} a^* \tau(r) b = a^* b.$$

Preparados, vamos ao exemplo.

**Exemplo 5.25** Sejam  $M_2$  a  $C^*$ -álgebra das matrizes  $2 \times 2$  com entradas complexas e  $G = \{e, g_1, g_2, g_1 g_2\}$  grupo de quatro elementos tal que  $g_1 g_2 = g_2 g_1$  (observe que  $G$  é isomorfo ao grupo  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ). Defina a ação  $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(M_2)$  por:

$$\begin{aligned} \alpha_e &= I; \quad \alpha_{g_1} = \text{Ad} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \\ \alpha_{g_2} &= \text{Ad} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_{g_1 g_2} = \text{Ad} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Então  $M_2 \rtimes_\alpha G \cong M_4$ .

**Demonstração:**

Mostremos primeiramente que  $M_2^G \cong \mathbb{C}$ . Tome

$$a = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2^G.$$

Então, cálculos simples mostram que

$$\alpha_{g_1}(a) = \begin{pmatrix} w & y \\ y & x \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha_{g_2}(a) = \begin{pmatrix} x & -y \\ -z & w \end{pmatrix}.$$

Daí segue que

$$\alpha_{g_1}(a) = a \Rightarrow \begin{pmatrix} w & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} w = x \\ z = y \end{matrix}$$

e

$$\alpha_{g_2}(a) = a \Rightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0.$$

Portanto:

$$M_2^G = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\} \cong \mathbb{C}.$$

Agora, usando Teorema 5.23, mostraremos que  $\alpha$  é saturada provando que  $A_\tau^* A_\tau = A_1$  para todo  $\tau \in \widehat{G}$ . Primeiramente observe que  $\widehat{G} = \{1, \tau_1, \tau_2, \tau_1 \tau_2\}$ ,  $\tau_i$  é o único caracter satisfazendo  $\tau_i(g_i) = 1$  e  $\tau_i(g_j) = -1$  para  $i \neq j$ . Note que  $\widehat{G} \cong G$  como grupos (isto é um fato geral pois  $\widehat{\mathbb{Z}_n} \cong \mathbb{Z}_n$  e  $\widehat{G_1 \times G_2} \cong \widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$ ; veja (HEWITT; ROSS, 1994)).

Vamos agora calcular  $A_\tau$  para cada  $\tau \in \widehat{G}$ . Para  $\tau = 1$  (o caracter trivial:  $\tau(r) = 1$  para todo  $r$  em  $G$ ), é imediato que  $A_1 = A^G$ . Vamos agora calcular

$$A_{\tau_1} = \{a \in A : \alpha_g(a) = \tau_1(g)a \text{ para todo } g \in G\}.$$

Para  $g = g_1$ , obtem-se: para  $a = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ , como acima,  $\alpha_{g_1}(a) = \tau_1(g_1)a = a$  implica  $y = z = 0$ . Em similarmente,  $\alpha_1(a) = \tau_1(g_2)a = -a$  implica  $w = -x$ . Logo

$$A_{\tau_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}.$$

Analogamente, mostra-se que

$$A_{\tau_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}$$

e

$$A_{\tau_1 \tau_2} = A_{\tau_1} A_{\tau_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}.$$

Disto segue facilmente que  $A_\tau^* A_\tau = A^G$  para todo  $\tau \in \widehat{G}$ , com desejado. Logo a ação em questão é saturada. Pela Proposição 5.2, temos  $\mathbb{C} \cong M_2^G \sim_M M_2 \rtimes_\alpha G$  e pelo segundo item da Proposição 3.23, existe  $H$  espaço de Hilbert tal que  $M_2 \rtimes_\alpha G \cong K(H)$ . Mas  $M_2 \rtimes_\alpha G$  é isomorfo a  $C(G, M_2)$  como espaço vetorial e portanto  $H$  tem de ter dimensão 4. Isso garante que  $K(H) \cong M_4$ , donde segue o resultado.

**Exemplo 5.26** *Seja  $G$  grupo compacto e considere a  $C^*$ -álgebra  $A =$*

$K(L^2(G))$ , com ação  $\alpha = Ad_\rho$  de  $G$ , dada por

$$\alpha_r(x) = \rho_r \circ x \circ \rho_{r^{-1}},$$

em que  $\rho : G \rightarrow B(L^2(G))$  é a representação regular à direita:  $\rho_r(\xi)|_s = \xi(sr)$ , para todos  $\xi \in L^2(G)$  e  $s, r \in G$ . Então o produto cruzado  $A \rtimes_{Ad_\rho} G$  é Morita equivalente a  $C^*$ -álgebra reduzida do grupo  $G$ , denotada por  $C_r^*(G)$ .

Primeiramente verifiquemos que  $\alpha$  define uma ação de  $G$  em  $A$ :

1.  $\alpha_e(x) = \rho_e \circ x \circ \rho_e = x$ ,
2.  $\alpha_{st}(x) = \rho_{st} \circ x \circ \rho_{t^{-1}s^{-1}} = \alpha_s(\rho_t \circ x \circ \rho_{t^{-1}}) = \alpha_s(\alpha_t(x))$ .

Seja  $M : C(G) \rightarrow B(L^2(G)) \cong M(K(L^2(G)))$  a representação multiplicação  $M_f(\xi) := f \cdot \xi$ . Então, por meio dela,  $A = K(L^2(G))$  se torna uma  $(C(G), G, \tau)$ -álgebra, em que  $\tau$  é a ação de translação à direita:  $\tau_t(f)|_s := f(st)$  e definimos  $fk := M_fk$ , para todos  $k \in K(L^2(G))$  e  $f \in C(G)$ . Como não é difícil ver que  $M$  é \*-homomorfismo, provemos apenas que  $M_f$  é  $G$ -equivariante:

$$\begin{aligned} \alpha_r(fk)(\xi)|_s &= \alpha_r(M_fk)(\xi)|_s = \rho_r \circ M_fk \circ \rho_{r^{-1}}(\xi)|_s \\ &= (M_fk \circ \rho_{r^{-1}})(\xi)|_{sr} = f(sr)k \circ \rho_{r^{-1}}(\xi)|_{sr} \\ &= f(sr)(\rho_r \circ k \circ \rho_{r^{-1}})(\xi)|_s \\ &= M_{\tau_r(f)}((\rho_r \circ k \circ \rho_{r^{-1}})(\xi))|_s \\ &= \tau_r(f)\alpha_r(k)(\xi)|_s. \end{aligned}$$

Agora, como  $\tau$  é livre, temos que  $\alpha$  é saturada pelo Teorema 5.17, portanto  $A^G \cong A \rtimes_\alpha G$ . Calculemos agora a álgebra de ponto fixo  $A^G$  mais explicitamente. Por definição,  $A^G := \{a \in A : \alpha_t(a) = a\}$ . Note ainda que vale a igualdade  $A^G = \{E(a) := \int_G \alpha_t(a) dt, a \in A\}$ . Mais ainda, sendo  $E$  contínuo pela constatação abaixo:

$$\begin{aligned} \|E(a) - E(b)\| &= \left\| \int_G \alpha_t(a) - \alpha_t(b) dt \right\| \\ &\leq \int_G \|\alpha_t(a) - \alpha_t(b)\| dt \leq \|a - b\|, \end{aligned}$$

vale que  $A^G = \{E(a) : a \in A_0\}$  para qualquer \*-subálgebra densa  $A_0$  de  $A$ . No nosso caso, queremos aplicar esse fato para

$$A_0 = \text{span}\{\theta_{\xi, \eta} : \theta_{\xi, \eta}(\zeta) = \xi\langle \eta, \zeta \rangle\}.$$

Pode-se ver em (LANCE, 1995) que  $A_0$  é de fato \*-subálgebra densa de  $A = K(L^2(G))$  ( $A_0$  é a \*-subálgebra dos operadores de posto finito). Veremos que  $A^G = C_r^*(G)$ , a  $C^*$ -álgebra reduzida do grupo  $G$  (veja Exemplo 4.16), isto é, o fecho de  $\lambda(C(G))$  em  $B(L^2(G))$ , em que  $\lambda : C(G) \rightarrow B(L^2(G))$  é a aplicação  $\lambda(f)g = f * g$ , em que

$$f * g(t) = \int_G f(s)g(s^{-1}t)d\mu(s)$$

é o produto de convolução em  $C(G) \subset \mathbb{C} \rtimes G$ . Lembrando da fórmula de involução em  $C(G)$ :

$$f^*(t) = \overline{f(t^{-1})},$$

note que:

$$\begin{aligned} E(\theta_{\xi,\eta})(\zeta)(t) &= \int_G \alpha_r(\theta_{\xi,\eta})(\zeta)(t)d\mu(r) \\ &= \int_G \rho_r \circ \theta_{\xi,\eta} \circ \rho_{r^{-1}}(\zeta)(t)d\mu(r) \\ &= \int_G \theta_{\xi,\eta} \circ \rho_{r^{-1}}(\zeta)(tr)d\mu(r) \\ &= \int_G \xi(tr)\langle \eta, \rho_{r^{-1}}(\zeta) \rangle d\mu(r) \\ &= \int_r \xi(tr) \int_s \overline{\eta(s)}\zeta(sr^{-1})d\mu(s)d\mu(r) \\ &= \int_r \int_s \xi(tr)\overline{\eta(s)}\zeta(sr^{-1})d\mu(s)d\mu(r) \\ &= \int_s \int_r \xi(r)\overline{\eta(s)}\zeta(sr^{-1}t)d\mu(r)d\mu(s) \\ &= \int_r \int_s \xi(r)\overline{\eta(s^{-1}r)}\zeta(s^{-1}t)d\mu(s)d\mu(r) \\ &= \int_s \int_r \xi(r)\overline{\eta(s^{-1}r)}\zeta(s^{-1}t)d\mu(r)d\mu(s) \\ &= \int_s \int_r \xi(r)\overline{\eta(s^{-1}r)}d\mu(r)\zeta(s^{-1}t)d\mu(s) \\ &= \int_s (\xi * \eta^*)(s)\zeta(s^{-1}t)d\mu(s) \\ &= \lambda(\xi * \eta^*)(\zeta)(t). \end{aligned}$$

Agora, não é difícil ver que o espaço vetorial gerado pelas funções do tipo  $\xi * \eta^*$  é denso em  $C(G)$  e  $C(G)$ , por sua vez, é denso em  $\mathbb{C} \rtimes G$ . Portanto:

$$\begin{aligned} A^G &= \overline{\text{span}}\{E(\theta_{\xi,\eta}) : \xi, \eta \in C(G)\} = \overline{\text{span}}\{\lambda(\xi * \eta^*) : \xi, \eta \in C(G)\} \\ &= \lambda(\mathbb{C} \rtimes G) \cong C_r^*(G). \end{aligned}$$

**Exemplo 5.27** *Seja  $G$  grupo abeliano compacto e considere o dual de Pontriagin  $\hat{G} = \{x : G \rightarrow \mathbb{T} : x \text{ é homomorfismo de grupos}\}$  que é um grupo discreto (por (HEWITT; ROSS, 1994)). Seja  $\beta$  uma ação de  $\hat{G}$  na  $C^*$ -álgebra  $B$ . Defina  $A := B \rtimes_{\beta} \hat{G}$ . Então a ação  $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$  dada por  $\alpha_r(f)(x) = x(r)f(x)$  é tal que  $A \rtimes_{\alpha} G \sim_M B$ .*

Note que  $\alpha_e = I_{C_c(\hat{G}, B)}$  e  $\alpha_{rs} = \alpha_r \circ \alpha_s$  para todos  $r, s \in G$ . Também, fixado  $r \in G$ ,  $\alpha_r : C_c(\hat{G}, B) \rightarrow C_c(\hat{G}, B)$  é um  $*$ -automorfismo, onde  $C_c(\hat{G}, B)$  é visto aqui como  $*$ -subálgebra de  $B \rtimes_{\beta} \hat{G}$ . Mais ainda,  $\alpha_r$  é obviamente isométrica com respeito à norma  $L_1$ . Segue que  $\alpha_r$  se estende à um  $*$ -automorfismo de  $B \rtimes_{\beta} \hat{G}$  (em particular, isométrico com respeito à norma universal) e sua extensão será ainda denotada por  $\alpha_r$ . Observe ainda que, fixada  $f \in C_c(\hat{G}, B)$ , a função  $r \mapsto \alpha_r(f)$  é contínua com respeito à norma  $L^1$  e assim também com respeito à norma  $C^*$ -norma sobre  $B \rtimes_{\beta} \hat{G}$ . Logo  $\alpha$  define, de fato, uma ação de  $G$  sobre  $A = B \rtimes \hat{G}$ .

Mais ainda,  $(A, G, \alpha)$  é uma  $(C(G), G, \tau)$ -álgebra por meio da aplicação

$$\begin{aligned} \psi &:= \tilde{i}_{\hat{G}} \circ \phi : C(G) \rightarrow M(B \rtimes_{\beta} \hat{G}) \\ z &\mapsto \tilde{i}_{\hat{G}}(\hat{z}) \end{aligned}$$

em que  $\phi : C(G) \rightarrow C^*(\hat{G})$  é o  $*$ -isomorfismo tal que para cada  $z \in C(G)$  associa a transformada de Fourier  $\hat{z}$ , definido por

$$\hat{z}(x) := \int_G \overline{x(s)} z(s) d\mu(s)$$

e  $\tilde{i}_{\hat{G}} : C^*(\hat{G}) = \mathbb{C} \rtimes G \rightarrow M(B \rtimes_{\beta} G)$  é o homomorfismo dado por

$$\tilde{i}_{\hat{G}}(\hat{z}) = \sum_{x \in \hat{G}} \hat{z}(x) i_{\hat{G}}(x).$$

Todas essas constatações se encontram nas páginas 26 e 56 de (WILLIAMS, 2007). Observe que  $\psi$  define, de fato, um  $*$ -homomorfismo não-degenerado por ser uma composição de tais aplicações (já que a



transformada de Fourier é um isomorfismo e  $\tilde{i}_{\hat{G}}$  é um  $*$ -homomorfismo não-degenerado por (WILLIAMS, 2007)). Para mostrar que  $\psi$  é  $G$ -equivariante, observe que

$$\begin{aligned}\alpha_r(\psi(z)f)|_x &= x(r)(\psi(z)f)(x) = x(r)\tilde{i}_{\hat{G}}(\hat{z})(f)|_x \\ &= x(r) \sum_{y \in \hat{G}} \hat{z}(y)\beta_y(f(y^{-1}x)).\end{aligned}$$

E por outro lado,

$$\begin{aligned}\psi(\tau_r(z))\alpha_r(f)|_x &= \tilde{i}_{\hat{G}}(\widehat{\tau_r(z)})\alpha_r(f)|_x \\ &= \sum_{y \in \hat{G}} \widehat{\tau_r(z)}(y)\beta_y(f(y^{-1}x))(y^{-1}x)(r) \\ &= x(r) \sum_{y \in \hat{G}} \overline{y(r)}\widehat{\tau_r(z)}(y)\beta_y(f(y^{-1}x)).\end{aligned}$$

Para concluir que as duas expressões acima são iguais, basta ver que  $\widehat{\tau_r(z)}(y) = y(r)\hat{z}(y)$  e isso segue do seguinte cálculo (onde usamos que  $G$  é abeliano e assim unimodular):

$$\begin{aligned}\widehat{\tau_r(z)}(y) &= \int_G \overline{y(s)}\tau_r(z)(s)d\mu(s) = \int_G \overline{y(s)}z(sr)d\mu(s) \\ &= \int_G \overline{y(sr^{-1})}z(s)d\mu(s) = y(r)\hat{z}(y).\end{aligned}$$

Assim  $(A, G, \alpha)$  é uma  $(C(G), G, \tau)$ -álgebra e portanto  $A \rtimes_{\alpha} G \sim_M A^G$  já que  $\tau$  é livre. Finalmente, vamos mostrar que  $A^G \cong B$  por meio da imersão canônica  $i_B : B \rightarrow B \rtimes_{\beta} \hat{G}$  dada por  $i_B(b) = b\delta_1$  (ou seja,  $b\delta_1$  é a função de  $C_c(\hat{G}, B)$  que vale  $b$  em  $1 \in \hat{G}$  e 0 caso contrário).

Provaremos que  $A^G = i_B(B)$  usando que  $A^G = \overline{\text{span}}\{E(a) : a \in A_0\}$  em que  $A_0 = C_c(\hat{G}, B) \subset B \rtimes_{\beta} \hat{G} = A$ . Primeiramente note que dado  $x \in \hat{G}$ , temos

$$\int_G x(t)d\mu(t) = \delta_{x,1} := \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De fato, da invariância da medida de Haar, temos

$$\int_G x(t)d\mu(t) = \int_G x(st)d\mu(t) = x(s) \int_G x(t)d\mu(t),$$

para todo  $s \in G$ . Daí segue que  $\int_G x(t)d\mu(t) = 0$  ou  $x(s) = 1$  para todo  $s$ , isto é,  $x = 1$  e neste caso  $\int_G x(t)d\mu(t) = 1$  (já que estamos sempre supondo  $\mu(G) = 1$ ). Daí segue que

$$E(a)|_x = \int_G \alpha_t(a)|_x d\mu(t) = \int_G x(t)a(x)d\mu(t) = \delta_{x,1}a(x) = \delta_{x,1}a(1),$$

ou seja  $E(a) = i_B(a(1))$  para todo  $a \in C_c(\hat{G}, B)$ . Como obviamente todo elemento de  $B$  é da forma  $a(1)$  para algum  $a \in C_c(\hat{G}, B)$ , segue o resultado. Logo

$$B \rtimes \hat{G} \rtimes G = A \rtimes_\alpha G \sim_M B.$$

**Observação 5.28** *A equivalência de Morita  $B \rtimes \hat{G} \rtimes G \sim_M B$  do exemplo anterior está relacionada com o Teorema de Dualidade de Takai-Takesaki, que diz que  $B \rtimes \hat{G} \rtimes G \cong B \otimes K(l^2(\hat{G}))$ , veja (WILLIAMS, 2007) para mais detalhes.*

### 5.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tomando por base os resultados obtidos nessa dissertação, há muito o que se estudar ainda sobre equivalência de Morita para  $C^*$ -álgebras e produtos cruzados. Aliás, o presente trabalho não passa de uma introdução a esses dois temas amplamente desenvolvidos por Rieffel nas décadas de 70 e 80 e posteriormente por muitos outros matemáticos. Elencamos aqui algumas perspectivas de continuidade dos estudos, tendo como ponto de partida a presente dissertação e as referências usadas.

Apesar de termos elencado quatro formas diferentes de se enunciar equivalência de Morita para  $C^*$ -álgebras (na Proposição 3.23), não discutimos quais as implicações dessa equivalência. A seção 3.3 de (RAEBURN; WILLIAMS, 1998) apresenta resultados nesse sentido, mostrando, dentre outras coisas, que duas  $C^*$ -álgebras Morita equivalentes possuem a mesma estrutura de ideais e teoria de representações, elementos evidenciados na Proposição 3.24 desse mesmo livro, em que alude a chamada Correspondência de Rieffel. Ainda no campo das implicações da equivalência de Morita, é possível mostrar que  $C^*$ -álgebras Morita equivalentes possuem grupos de  $K$ -teoria isomorfos e uma boa referência para essa abordagem, para se aventurar por esse caminho, é (PHILLIPS, 1987).

Mudando o foco, o leitor deve ter percebido que a saturação de ações é hipótese fundamental para a tese de teoremas importantes,

como o Teorema Simétrico de Imprimitividade, ou seja, Teorema 5.10, e o Teorema de Stone-von Neumann, que para nós é o Exemplo 5.22. Assim, qualquer esforço no sentido de detectar se determinada ação é ou não saturada é muito bem vindo. Sobre esse assunto, escrevemos pouquíssima coisa nesse trabalho. O sétimo capítulo de (PHILLIPS, 1987) é um prato cheio para os que se interessam por essa perspectiva.

Finalmente, há uma variedade imensa de exemplos interessantes a respeito de produtos cruzados e equivalência de Morita nesse contexto a ser estudada. No presente trabalho elencamos uma quantidade irrisória de exemplos se comparada a encontrada em (PHILLIPS, 2008). Esse documento é uma versão expandida das notas das aulas que o professor Phillips ministrou na escola de verão de Ottawa em álgebra de operadores no ano de 2007, contendo materiais adicionais de outros cursos que o professor ministrou pelo mundo. Sem sombra de dúvida, a resolução e análise detalhada dos exemplos e exercícios propostos por Phillips seria uma ideia no mínimo interessante para uma nova dissertação.



## REFERÊNCIAS

- CURTO, P.; MUHLY, P.; WILLIAMS, D. Cross products of strongly morita equivalent  $C^*$ -algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 90, n. 04, p. 528–530, 1984.
- ECHTERHOFF, S. *A Categorical Approach to Imprimitivity Theorems for  $C^*$ -Dynamical Systems*. American Mathematical Society, 2006. (Memoirs of the American Mathematical Society, N° 850). ISBN 9780821838570. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=kk4Pbi0V794C>>.
- HEWITT, E.; ROSS, K. *Abstract Harmonic Analysis: Volume 1: Structure of Topological Groups. Integration Theory. Group Representations*. Springer, 1994. (Abstract Harmonic Analysis). ISBN 9780387941905. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=uf11K1wXEYUC>>.
- LANCE, E. *Hilbert  $C^*$ -Modules: A Toolkit for Operator Algebraists*. Cambridge University Press, 1995. (London Mathematical Society Lecture Note Series). ISBN 9780521479103. Disponível em: <[http://books.google.com.br/books?id=PFXYddM1\\_bIC](http://books.google.com.br/books?id=PFXYddM1_bIC)>.
- MURPHY, G.  *$C^*$ -Algebras and Operator Theory*. Academic Press, 1990. ISBN 9780125113601. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=emNvQgAACAAJ>>.
- PEDERSEN, G.  *$C^*$ -algebras and their automorphism groups*. Academic Press, 1979. (L.M.S. monographs). ISBN 9780125494502. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=yBCoAAAAIAAJ>>.
- PHILLIPS, N. *Equivariant  $K$ -theory and freeness of group actions on  $C^*$ -algebras*. Springer, 1987. (Lecture notes in mathematics). ISBN 9783540182771. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=9coZAQAIAAJ>>.
- PHILLIPS, N. *Crossed Product  $C^*$ -algebras and minimal dynamics (DRAFT)*. University of Oregon, 2008. Disponível em: <<http://goo.gl/Mg1F1>>.
- RAEBURN, I.; WILLIAMS, D. *Morita Equivalence and Continuous-Trace  $C^*$ -Algebras*. American Mathematical Society, 1998. (Mathema-

tical Surveys and Monographs). ISBN 9780821808603. Disponível em: <[http://books.google.com.br/books?id=KV\\_cC5uYA7EC](http://books.google.com.br/books?id=KV_cC5uYA7EC)>.

RIEFFEL, M. A. Applications of strong morita equivalence to transformation group  $c^*$ -algebras. *American Mathematical Society*, v. 38, 1982. Disponível em: <<http://math.berkeley.edu/rieffel/papers/applications.pdf>>.

WILLIAMS, D. *Crossed Products of  $C^*$ -Algebras*. American Mathematical Society, 2007. (Mathematical Surveys and Monographs). ISBN 9780821842423. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=0aBS-gYTWboC>>.