

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Marianne Lorena Romero Acevedo

**MECANISMOS COM DESACOPLAMENTO  
CINETOESTÁTICO PARA SUBSTITUIÇÃO DE  
ATUADORES ROBÓTICOS**

Florianópolis

2012



Marianne Lorena Romero Acevedo

**MECANISMOS COM DESACOPLAMENTO  
CINETOESTÁTICO PARA SUBSTITUIÇÃO DE  
ATUADORES ROBÓTICOS**

Dissertação submetida ao Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia Me-  
cânica para a obtenção do Grau de  
Mestre em Engenharia Mecânica.  
Orientador: Prof. Daniel Martins, Dr.  
Eng.  
Coorientador: Prof. Henrique Simas,  
Dr. Eng.

Florianópolis

2012

Catálogo na fonte elaborada pela biblioteca da  
Universidade Federal de Santa Catarina

A ficha catalográfica é confeccionada pela Biblioteca Central.

Tamanho: 7cm x 12 cm

Fonte: Times New Roman 9,5

Maiores informações em:

<http://www.bu.ufsc.br/design/Catalogacao.html>

Marianne Lorena Romero Acevedo

**MECANISMOS COM DESACOPLAMENTO  
CINETOESTÁTICO PARA SUBSTITUIÇÃO DE  
ATUADORES ROBÓTICOS**

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de “Mestre em Engenharia Mecânica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Florianópolis, 28 de fevereiro 2012.

---

Prof. Júlio César Passos, Dr. Eng.  
Coordenador do Curso

---

Prof. Daniel Martins, Dr. Eng.  
Orientador

---

Prof. Henrique Simas, Dr. Eng.  
Coorientador

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Daniel Martins, Dr. Eng.  
Presidente

---

Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr. Eng.



---

Prof. Rodrigo de Souza Vieira, Dr. Eng.

---

Prof. Eugenio de Bona Castelan Neto, Dr.



A meu filho Matias, por se tornar a maior  
motivação da minha existência.



## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Ruth e German, pelo apoio, paciência, compressão, cuidado e amor proporcionados ao longo da minha vida, pois sem eles não seria o que sou agora.

A Rafael, meu noivo e pai do meu filho Matias, pelo amor, apoio e contribuições feitas ao longo deste tempo, pois foram muito importantes para o desenvolvimento e a conclusão deste trabalho.

Ao Prof. Daniel Martins e ao Prof. Henrique Simas pelas ideias, contribuições e valiosas conversas que foram de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho, além da paciência e ajuda proporcionada ao longo do período de mestrado.

Ao pessoal do laboratório de Robótica (LAR), pelo apoio e ajuda fornecida.

A minha família e amigos que com sua paciência e apoio contribuíram de forma significativa, direta ou indiretamente, no desenvolvimento deste trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro fornecido.



*"Não basta saber, é preciso também aplicar; Não basta querer, é preciso também fazer."*

*Johann Wolfgang Goethe.*



## RESUMO

Em máquinas e equipamentos, podem ser encontrados vários casos em seus acionamentos onde a dependência apresentada entre o torque e a velocidade angular dos motores elétricos é um fator influente nos resultados obtidos.

Na usinagem, esta dependência é uma das responsáveis, por exemplo, pela presença de vibrações nos processos de remoção de material. Na robótica, especificamente nos manipuladores seriais, este fator é um dos responsáveis pela geração de erros de trajetória de posição e força, devido à impossibilidade de se controlar a força e a velocidade de maneira independente. Assim, emerge a necessidade de um sistema que permita o controle independente do torque e da velocidade angular.

Neste trabalho, propõe-se uma metodologia baseada no Método de Davies que permite analisar o comportamento cinetoestático de um mecanismo qualquer, determinando as características necessárias para atingir a um número de graus de liberdade adequado, obtendo o controle de forma independente do torque e da velocidade angular entregues pelo mecanismo, com relação ao comportamento dos seus atuadores.

Esta metodologia foi avaliada mediante sua aplicação em estudos de caso, onde foram procurados mecanismos que, cumprindo com determinadas características, permitem obter a independência das variáveis de torque e velocidade angular. São apresentados neste trabalho, a fundamentação teórica para desenvolvimento dos modelos matemáticos e de mecanismos e uma comparação dos resultados teóricos (resultantes da aplicação da metodologia) da dependência das variáveis do sistema e do seu comportamento, com resultados obtidos mediante simulações feitas em software de prototipagem matemática.

**Palavras-chave:** Robótica. Controle. Motores Elétricos. Torque. Velocidade Angular. Método de Davies. Estática. Cinemática Diferencial. Cinetoestática.



## ABSTRACT

In machinery and equipment, can be found several cases in their drives, where the presented dependency between the torque and the angular velocity of the electric motors is an influential factor in results obtained. In machining, this dependency is one of the responsible, for instance, for the presence of vibrations within the material process removal. In robotics, specifically in serial manipulators, this factor is responsible for the generation of error regarding the force trajectory, due to the inability to control force and angular velocity independently. Thus, the need for a system allowing independent control of the torque and angular velocity comes out as a problematic issue.

In this paper, it is proposed a methodology based on Davies' Method that permit to analyze the kinetostatic behavior of any one mechanism, determining the necessary characteristics to achieve a number of degrees of freedom appropriate, gaining control independently of the torque and angular velocity delivered by the mechanism with respect to the conduct of its actuators.

This methodology was evaluated through its application in studies case, where was looking for mechanisms, carried out with specific characteristics, in order to achieve the independence of torque and angular velocity variables. This paper sets forth the theoretical bases for the development of mathematical models and mechanisms, and a comparison of theoretical results (outcome from the application of the methodology) from a dependency of the system variables and their behavior, with results obtained from simulations on prototyping mathematics softwares.

**Keywords:** Robotics. Control, Motors, Torque, Angular Velocity, Davies' Method, Static, Differential Kinematics, Kinetostatic.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Robôs Seriais KUKA na área de montagem da Mercedes-Benz Tipo A. ....	30
Figura 2	Robô Manipulador Serial ABB IRB 6620.....	30
Figura 3	Maxon Motor EC.....	31
Figura 4	Visão transversal de um motor CC.....	36
Figura 5	Diagrama do circuito de armadura de um motor CC.....	37
Figura 6	Curvas típicas de torque-velocidade de um motor CC.....	39
Figura 7	Diagrama de Blocos do Motor CC. Fonte: (Kuo 1996).....	40
Figura 8	Diagrama de Blocos do Motor CC Controlado por Velocidade Angular.....	41
Figura 9	Diagrama de Blocos do Motor CC Controlado por Torque..	41
Figura 10	Mecanismo de Quatro Barras RSSR Expandido (Configuração 8R).....	45
Figura 11	Representação das ações nos acoplamentos do 8R.....	47
Figura 12	Representação dos movimentos nos acoplamentos do 8R....	52
Figura 13	Representação em Blocos do Método de Davies .....	60
Figura 14	Etapas do Bloco de Características Topológicas .....	61
Figura 15	Etapas do Bloco de Identificação Parâmetros da Estática...	61
Figura 16	Etapas do Bloco de Obtenção Matrizes da Estática.....	62
Figura 17	Etapas do Bloco de Identificação Parâmetros da Cinemática	63
Figura 18	Etapas do Bloco de Obtenção Matrizes da Cinemática .....	64
Figura 19	Etapas do Bloco de Identificação Equacionamento dos Atuadores .....	64
Figura 20	Etapas do Bloco de Obtenção Matrizes da Cinetoestática ..	65
Figura 21	Resumo da Metodologia baseada no Método de Davies ....	66
Figura 22	Diagrama de Blocos do Motor CC com $V = 48$ V e $T_l = 1$ N · m.....	78
Figura 23	Área de trabalho para mecanismo em configuração 5R.....	80
Figura 24	Configuração do 5R para simulação .....	80

Figura 25 Configuração de Medição do 5R para simulação do controle de velocidade angular.....	81
Figura 26 Posição do 5R para $\omega_b = -0,7384$ rad/s, $\omega_e = -0,29$ rad/s e $t = 10$ s. ....	82
Figura 27 Acoplamentos .....	84
Figura 28 Matriz Geral Escalonada do 5R para $\omega_b = -0,7384$ rad/s, $\omega_e = -0,29$ rad/s e $t = 10$ s. ....	85
Figura 29 Comportamento do 5R para $\omega_b$ , $\omega_e$ e $T_a$ constantes. ....	89
Figura 30 Comportamento do 5R para $\omega_b$ e $\omega_e$ constantes e $T_a$ variável. ....	90
Figura 31 Configuração de Medição do 5R com motores para simulação do controle de velocidade angular.....	92
Figura 32 Posição do 5R com motores para $\omega_b = -0,7384$ rad/s, $\omega_e = -0,29$ rad/s e $t = 10$ s. ....	93
Figura 33 Matriz Geral Escalonada do 5R com motores para $\omega_b = -0,7384$ rad/s, $\omega_e = -0,29$ rad/s e $t = 10$ s. ....	94
Figura 34 Comportamento do 5R com motores para $\omega_b$ , $\omega_e$ e $T_a$ constantes. ....	96
Figura 35 Comportamento do 5R com motores para $\omega_b$ e $\omega_e$ constantes e $T_a$ variável. ....	97
Figura 36 Torque de Reação dos Motores <i>vs</i> Torque Requerido na Junta. 98	
Figura 37 Comparação de posição nos casos sem motores e com motores. ....	99
Figura 38 Comparação de resultados do 5R para $\omega_b$ , $\omega_e$ e $T_a$ constantes. ....	100
Figura 39 Comparação de resultados do 5R para $\omega_b$ e $\omega_e$ constantes e $T_a$ variável. ....	101
Figura 40 Aparência Mecanismo PM. ....	103
Figura 41 Configuração de Medição do PM para simulação do controle de velocidade angular. ....	104
Figura 42 Representação Esquemática do PM. ....	105
Figura 43 Acoplamentos .....	107
Figura 44 Matriz Geral Escalonada do PM. ....	107
Figura 45 Comportamento do PM para $\omega_b$ , $\omega_e$ e $T_a$ constantes. ....	113

Figura 46	Comportamento do PM para $\omega_b$ e $\omega_e$ constantes e $T_a$ variável.	114
Figura 47	Configuração de Medição do PM com motores para simulação do controle de velocidade angular.	115
Figura 48	Comportamento do PM com motores para $\omega_b$ , $\omega_e$ e $T_a$ constantes.	117
Figura 49	Comportamento do PM com motores para $\omega_a$ e $\omega_c$ constantes e $T_b$ variável.	118
Figura 50	Configuração de Medição do PM com motores para simulação do controle de torque e velocidade angular.	119
Figura 51	Comportamento do PM com motores para $\omega_b$ , $\omega_e$ e $T_a$ constantes.	121
Figura 52	Comportamento do PM com motores para $\omega_a$ e $\omega_c$ constantes e $T_b$ variável.	122
Figura 53	Comparação de resultados do PM para $\omega_a$ , $\omega_c$ e $T_b$ constantes.	125
Figura 54	Comparação de resultados do PM para $\omega_a$ e $\omega_c$ constantes e $T_b$ variável.	126
Figura 55	Faixas de Trabalho de $\omega_b$ e $\omega_c$ para $\omega_a = 0,738$ .	128
Figura 56	Corpos ligados com dobradeira.	138
Figura 57	Corpo com duas juntas esféricas.	140
Figura 58	Mecanismo de quatro barras em configuração RSSR.	163
Figura 59	Representação esquemática do RSSR.	164
Figura 60	Acoplamentos.	165
Figura 61	Representação das ações nos acoplamentos do RSSR.	166
Figura 62	Representação dos movimentos nos acoplamentos do RSSR.	175
Figura 63	Janela Principal da Ferramenta.	185
Figura 64	Painel de Características do Mecanismo 8R.	187
Figura 65	Painel de Coordenadas das Juntas do Mecanismo.	188
Figura 66	Painel de Atuações nas Juntas do Mecanismo.	188
Figura 67	Painel da Matriz de Incidência do Mecanismo.	189
Figura 68	Painel das Constantes do Motor Empregado.	189
Figura 69	Painel da Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede.	192

Figura 70 Painel da Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede .....	193
Figura 71 Painel da Matriz Geral Escalonada .....	194

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Resumo das Equações do Davies . . . . .	44
Tabela 2	Caraterísticas principais do mecanismo em configuração 8R . . . . .	46
Tabela 3	Identificação dos acoplamentos do mecanismo em configuração 8R . . . . .	46
Tabela 4	Identificação das ações estáticas no mecanismo em configuração 8R . . . . .	48
Tabela 5	Identificação das ações cinemáticas no mecanismo em configuração 8R . . . . .	53
Tabela 6	Equações do Método de Davies Clássico . . . . .	58
Tabela 7	Equações do Método de Davies Clássico <i>vs</i> Modificado . . . . .	59
Tabela 8	Configuração de Mecanismos para $F_N = 2$ . . . . .	77
Tabela 9	Combinações de juntas para mecanismo em configuração 5R . . . . .	79
Tabela 10	Características principais do mecanismo em configuração 5R . . . . .	79
Tabela 11	Posição dos corpos do 5R para $\omega_b = -0,7384$ rad/s, $\omega_e = -0,29$ rad/s e $t = 10$ s . . . . .	83
Tabela 12	Identificação dos acoplamentos do mecanismo em configuração 5R . . . . .	83
Tabela 13	Simulação comportamento do 5R para $\omega_b = -0,7384$ rad/s, $\omega_e = -0,29$ rad/s e $t = 10$ s . . . . .	88
Tabela 14	Posição dos corpos do 5R com motores para $\omega_b = -0,7384$ rad/s, $\omega_e = -0,29$ rad/s e $t = 10$ s . . . . .	93
Tabela 15	Simulação comportamento do 5R com motores para $\omega_b = -0,7384$ rad/s, $\omega_e = -0,29$ rad/s e $t = 10$ s . . . . .	95
Tabela 16	Características principais do mecanismo PM . . . . .	102
Tabela 17	Posição das juntas do PM . . . . .	105
Tabela 18	Identificação dos acoplamentos do mecanismo PM . . . . .	106
Tabela 19	Simulação comportamento do PM para $\omega_a = 0,738$ rad/s, $\omega_c = 0,738$ rad/s e $t = 10$ s . . . . .	111
Tabela 20	Simulação comportamento do PM para $\omega_b = 0,7$ rad/s, $T_b = -0,5$ N · m e $t = 10$ s . . . . .	120

Tabela 21	Respostas para $\omega_c = 0,738$ rad/s e $T_b = 0,5$ N · m . . . . .	123
Tabela 22	Respostas para $\omega_a = 0,738$ rad/s e $T_b = 0,5$ N · m . . . . .	124
Tabela 23	Faixas de Trabalho para $\omega_a = 0,738$ rad/s . . . . .	127
Tabela 24	Caraterísticas principais do mecanismo em configuração RSSR	163
Tabela 25	Identificação dos acoplamentos do mecanismo em configuração RSSR . . . . .	164
Tabela 26	Identificação das ações estáticas no mecanismo em configuração RSSR . . . . .	167
Tabela 27	Identificação das ações cinemáticas no mecanismo em configuração RSSR . . . . .	176
Tabela 28	Características de Operação do Motor MAXON RE 60 . . . . .	190
Tabela 29	Relação $S_N$ e $F_N$ . . . . .	199
Tabela 30	Parâmetros "Body" . . . . .	203
Tabela 31	Parâmetros "Body1" . . . . .	203
Tabela 32	Parâmetros "Body2" . . . . .	204
Tabela 33	Parâmetros "Body3" . . . . .	204
Tabela 34	Parâmetros "Revolute", "Revolute1" e "Revolute4" . . . . .	204
Tabela 35	Parâmetros "Revolute2" e "Revolute3" . . . . .	205
Tabela 36	Parâmetros "Constant1" e "Constant3" . . . . .	205
Tabela 37	Parâmetros "Simple Gear" . . . . .	205
Tabela 38	Parâmetros "Saturation T" . . . . .	205
Tabela 39	Parâmetros "Saturation W" . . . . .	206
Tabela 40	Parâmetros "PID" . . . . .	206

## LISTA DE SÍMBOLOS

$n$	Número de Elos ou Elementos
$j$	Número de Juntas
$\kappa$	Número de Cortes-f
$\nu$	Número de Circuitos-f
$T_m$	Torque do Motor
$F_N$	Grau de Liberdade do Sistema Cinemático ou Grau de Liberdade Líquido
$C_N$	Grau de Liberdade Bruto
$S_N$	Grau de Liberdade do Sistema Estático
$G_N$	Grau de Liberdade do Sistema Cinetoestático
$K_a$	Constante Física
$i_a$	Corrente de Armadura
$\phi$	Fluxo Magnético Radial
$V_b$	Força Contra Eletromotriz
$\omega_m$	Velocidade Angular do Rotor
$K_m$	Constante de Torque
$K_d$	Constante de Proporcionalidade
$K_b$	Constante da Força Contra Eletromotriz
$L$	Indutância de Armadura
$V$	Tensão de Armadura
$T_l$	Torque de Carga no Rotor
$R_a$	Resistência de Armadura
$J$	Momento de Inércia
$B$	Fator de Amortecimento
$m_p$	Inclinação da gráfica Torque-Velocidade Angular
$\$$	Helicoide
$h$	Passo do Helicoide
$\vec{S}$	Vetor Direção do Eixo do Helicoide
$\vec{S}_o$	Vetor Posição do Eixo do Helicoide
$\$^A$	Heliforça ou Helicoide Radial
$\$^M$	Heligiro ou Helicoide Axial
$\vec{M}_o$	Vetor de Momento

$\vec{F}$	Vetor de Força
$\vec{\omega}$	Vetor de Velocidade Angular
$\vec{v}$	Vetor de Velocidade Linear
$\lambda$	Espaço de Trabalho
$O_{xyz}$	Referência Inercial
$[I_d]_{n \times j}$	Matriz de Incidência
$C_a$	Acoplamentos Ativos
$C_p$	Acoplamentos Passivos
$\sigma$	Número de Cargas
$A_R$	Número de Atuadores ou Reações
$f$	Grau de Liberdade na Junta
$C_S$	Grau de Restrição
$C$	Grau de Restrição Bruto
$[IQ_{esc}]_{\kappa \times j}$	Matriz de Incidência-Cortes
$[Q]_{\kappa \times C_S}$	Matriz dos Cortes-f
$[A_d]_{\lambda \times C_S}$	Matriz das Ações
$[\hat{A}_d]_{\lambda \times C_S}$	Matriz das Ações Unitárias
$[\vec{\Psi}]_{C_S \times 1}$	Vetor das Magnitudes das Ações
$\hat{\$}$	Helicoide Unitário
$[\hat{A}_n]_{\lambda \cdot \kappa \times C_S}$	Matriz das Ações Unitárias em Rede
$[\hat{A}_{nesc}]_{(\lambda \cdot \kappa - S_D) \times C_S}$	Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede
$[\vec{\Omega}]_{\gamma \times 1}$	Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetoestático
$S_D$	Número de Equações Dependentes do Sistema Estático
$a$	Posto da Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede
$\omega_i$	Velocidade Angular na Junta $i$
$T_{m_i}$	Torque do Motor Aplicado numa Junta $i$
$C_{T_i}$	Constante de Relacionamento
$R_{a_i}$	Resistência de Armadura do Motor Aplicado numa Junta $i$
$K_{m_i}$	Constante de Torque do Motor Aplicado numa Junta $i$
$V_i$	Tensão do Motor Aplicado numa Junta $i$
$K_{b_i}$	Constante da Força Contra Eletromotriz do Mo-

	tor Aplicado numa Junta $i$
$\omega_{m_i}$	Velocidade Angular do Motor Aplicado numa Junta $i$
$T_i$	Torque na Junta $i$
$[B]_{\nu \times F}$	Matriz de Circuitos-f
$[U_t]_{\kappa \times j}$	Matriz Temporária
$[I]_{\kappa}$	Matriz Identidade de Eliminação
$[I]_{\nu}$	Matriz Identidade de Adesão
$F$	Grau de Liberdade Bruto
$[M_d]_{\lambda \times F}$	Matriz dos Movimentos
$[\hat{M}_d]_{\lambda \times F}$	Matriz dos Movimentos Unitários
$[\hat{M}_n]_{\lambda \cdot \nu \times F}$	Matriz dos Movimentos Unitários em Rede
$[\hat{M}_{n_{esc}}]_{(\lambda \cdot \nu - K_D) \times F}$	Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede
$[\vec{\Phi}]_{F \times 1}$	Vetor das Magnitudes dos Movimentos
$K_D$	Número de Equações Dependentes do Sistema Cinemático
$g$	Posto da Matriz Geral Escalonada
$m$	Posto da Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede
$\gamma$	Número de variáveis do Sistema Cinetoestático
$[\hat{G}_n]_{(\lambda \cdot (\nu + \kappa) + A_R) \times \gamma}$	Matriz Geral
$[\hat{G}_{n_{esc}}]_{g \times \gamma}$	Matriz Geral Escalonada
$CV_i$	Constante de Ganho
$\omega_{b_S}$	Velocidade Angular $\omega_b$ na Simulação
$\omega_{b_T}$	Velocidade Angular $\omega_b$ na Teoria



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	29
1.1 MOTIVAÇÕES PARA O ESTUDO .....	31
1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO .....	32
1.3 ESCOPO DO TRABALHO .....	33
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO .....	34
<b>2 MOTORES CC</b> .....	35
2.1 EQUACIONAMENTO DE COMPORTAMENTO DOS MOTORES CC .....	35
2.2 COMPORTAMENTO DO MOTOR CC EM TORQUE ESTÁTICO .....	38
2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA DO MOTOR CC .....	39
2.4 CONSIDERAÇÕES .....	41
<b>3 RELACIONAMENTO ENTRE OS SISTEMAS ESTÁTICO E CINEMÁTICO</b> .....	43
3.1 EQUACIONAMENTO DOS SISTEMAS ESTÁTICO E CINEMÁTICO .....	43
3.1.1 Análise Estática .....	47
3.1.2 Análise Cinemática .....	51
3.2 RELAÇÃO $S_N-F_N$ .....	54
3.3 CONSIDERAÇÕES .....	55
<b>4 PROPOSTA DE ACOPLAMENTO CINETOESTÁTICO</b> .....	57
4.1 CONTRIBUIÇÕES AO MÉTODO DE DAVIES .....	57
4.1.1 Características Topológicas .....	60
4.1.2 Identificação Parâmetros da Estática .....	61
4.1.3 Obtenção Matrizes da Estática .....	62
4.1.4 Identificação Parâmetros da Cinemática .....	63
4.1.5 Obtenção Matrizes da Cinemática .....	63
4.1.6 Identificação Equacionamento dos Atuadores .....	64
4.1.7 Obtenção Matrizes da Cinetoestática .....	65
4.2 SISTEMA CINETOESTÁTICO .....	67
4.2.1 Identificação Equacionamento dos Atuadores .....	68
4.2.2 Obtenção Matrizes da Cinetoestática .....	69
4.3 PARÂMETROS DO MECANISMO A PARTIR DO GRAU DE LIBERDADE $F_N$ .....	75
<b>5 ESTUDO DE CASOS</b> .....	77
5.1 CINCO BARRAS .....	79

<b>5.1.1 Caso sem Motores</b> .....	81
<b>5.1.2 Caso com Motores</b> .....	91
<b>5.1.3 Análise de Resultados</b> .....	99
<b>5.2 PLANETÁRIO MODIFICADO</b> .....	102
<b>5.2.1 Caso sem Motores</b> .....	103
<b>5.2.2 Caso com Motores</b> .....	112
<b>5.2.3 Análise de Resultados</b> .....	123
<b>6 CONCLUSÕES</b> .....	129
<b>6.1 CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO</b> .....	130
<b>6.2 PERSPECTIVAS FUTURAS</b> .....	131
<b>Referências</b> .....	133
<b>ANEXO A – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	137
<b>ANEXO B – MÉTODO DE DAVIES: ESTÁTICA E CINEMÁTICA</b> .....	147
<b>ANEXO C – IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE DAVIES</b> .....	163
<b>ANEXO D – FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA SISTEMAS CINETOESTÁTICOS</b> .....	185
<b>APÊNDICE A – EXEMPLOS DE MECANISMOS</b> .....	200
<b>APÊNDICE B – PARÂMETROS DE SIMULAÇÃO</b> ...	203

## 1 INTRODUÇÃO

A maioria dos robôs manipuladores são basicamente dispositivos inspirados na funcionalidade do braço humano, com a finalidade de proporcionar solução a diferentes requerimentos como os apresentados na automação industrial, onde se procura aumentar a produtividade, a flexibilidade, e a qualidade dos produtos, reduzir custos de produção e eliminar trabalhos pesados e insalubres. Esses robôs são empregados em tarefas de cooperação (robôs de serviço), manipulação de peças, manipulação de ferramentas e execução de tarefas em áreas como a usinagem, a embalagem, a soldagem, a montagem entre outros (Sciavicco e Siciliano 1996).

Os robôs manipuladores podem ser classificados de acordo com vários critérios; por exemplo, segundo a cadeia cinemática, tem-se os seriais, os paralelos e os híbridos. Os manipuladores seriais são caracterizados por possuírem uma cadeia cinemática aberta, todas as juntas do manipulador são atuadas e a velocidade angular e torque de cada junta são determinados por um atuador externo, sejam eles motores ou cilindros. Os manipuladores paralelos são compostos de cadeias cinemáticas fechadas, contendo tanto juntas atuadas quanto juntas passivas, nos quais a velocidade angular e o torque de cada junta passiva dependerão das velocidades angulares e dos torques presentes nas juntas atuadas. Os manipuladores híbridos são compostos por cadeias cinemáticas abertas e fechadas ou pela combinação sequencial de manipuladores paralelos (Sciavicco e Siciliano 1996).

Os manipuladores seriais são dispositivos muito utilizados na indústria onde se requer uma quantidade considerável de repetições dentro de tolerâncias estritas. Estes dispositivos devem ser reprogramáveis para atender as diferentes demandas das novas exigências dos mercados, sendo parte essencial da manufatura flexível, como apresentado nas linhas de montagem da indústria automobilística (Figura 1), onde estes manipuladores são atribuídos a tarefas específicas como soldagem, carregamento de peças, entre outras.

Comumente são atuados por motores elétricos (Figura 2) e apresentam nas juntas sensores para medir as forças e as posições, porém não são suficientes para conhecer estes dados, pois é possível observar uma variação significativa no tempo entre a posição do atuador e a posição do elo e entre a força do atuador e a força do elo. Esta deflexão produzida pela flexibilidade, apesar de pequena, é uma fonte de problemas, especialmente quando faz-se necessário seguir uma trajetória ou



Figura 1: Robôs Seriais KUKA na área de montagem da Mercedes-Benz Tipo A.

requer-se alta sensibilidade na determinação das forças aplicadas pelo efetador final, além disso pode apresentar um aumento no tempo da estabilização do manipulador e até a sua instabilidade (Barasul 2008).

Na tentativa de minimizar estes problemas, tem-se proposto várias soluções partindo de diferentes tipos de configurações de controladores como PD com compensação constante ou on-line da gravidade, realimentação de estados, controle adaptativo baseado na passividade, controle híbrido, perturbação singular entre outros (Barasul 2008).

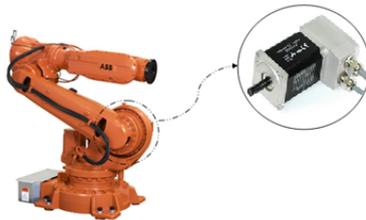


Figura 2: Robô Manipulador Serial ABB IRB 6620.

Porém ainda utilizando as soluções expostas anteriormente para manipuladores seriais que apresentam juntas ativas por atuadores rotacionais, não é possível eliminar por completo os problemas de erro no seguimento de trajetórias de posição e força, devido às dependências existentes entre o torque e a velocidade angular proporcionada por este tipo de atuadores.

Neste trabalho se propõe efetuar a análise cinetoestática de alguns mecanismos que apresentando certas condições expostas nos capítulos posteriores, possam entregar o torque e a velocidade angular de forma independente.

Para efetuar esta análise é necessário desenvolver uma metodologia que permita vincular os sistemas estático e cinemático do mecanismo mediante o equacionamento de comportamento dos atuadores rotacionais, especificamente motores CC. Esta metodologia será baseada no Método de Davies, método que tem sido desenvolvido no Laboratório de Robótica (LAR) da Universidade Federal de Santa Catarina, a partir do estudo efetuado por (Martins 2002, Martins e Guenther 2003) até o presente trabalho que apresenta algumas inclusões de novos conceitos e variáveis.

## 1.1 MOTIVAÇÕES PARA O ESTUDO

Em máquinas e equipamentos, podem ser encontrados vários casos em seus acionamentos onde a dependência apresentada entre o torque e a velocidade angular dos motores elétricos (Figura 3) é um fator influente nos resultados obtidos.

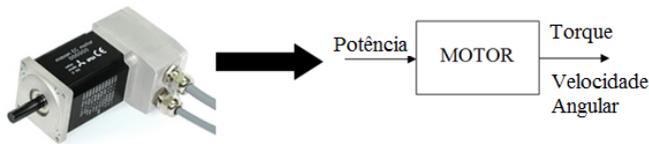


Figura 3: Maxon Motor EC.

Um caso particular é o apresentado na usinagem, onde esta dependência é uma das responsáveis, por exemplo, pela presença de vibrações nos processos de remoção de material, influenciando na qualidade do produto, na eficiência da produção e na vida útil das ferramentas. Estas vibrações são apresentadas, por exemplo, quando a "taxa de remoção" não é constante, devido à falta de homogeneidade do material que se está usinando, produzindo um tipo de desgaste na ferramenta denominado "lascamento" o qual traz por consequência erros de dimensão, erros de posicionamento, rugosidades, problemas de ondulações, ranhuras na peça usinada ou até a fratura da ferramenta (Stemmer 2005, Polli 2005).

Outro caso é apresentado na robótica, especificamente nos manipuladores seriais, onde o fator da dependência é um dos responsáveis pela geração de erros de trajetória de força, devido à impossibilidade de se controlar a força e a velocidade de maneira independente. Como solução foram propostas, por exemplo, a implementação de robôs co-

operativos, os quais apresentam bom desempenho conseguindo a execução das tarefas como esperado, entanto, representam altos custos de manutenção e funcionamento, em comparação ao uso de somente um robô manipulador. Também foi proposta a implementação de diferentes tipos de controladores, os quais apresentam bons resultados, mas ainda existe o problema de falta de precisão de deslocamento e posicionamento enquanto se controla a força do efetuator (Cruz 2010).

O interesse surge do fato que sendo o controle independente de torque e velocidade angular um fator importante para o desenvolvimento de tarefas de máquinas e equipamentos, não se tem registro de trabalhos que procurem por meio do desenvolvimento de metodologias ou mecanismos esta independência.

## 1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

Frente ao problema exposto, apresentam-se dois objetivos gerais a ser atingidos no desenvolvimento deste trabalho.

O primeiro objetivo é propor uma metodologia que permita determinar as características de projeto de um mecanismo qualquer, atingindo a um número de graus de liberdade adequado para obter o controle de forma independente de torque e velocidade angular entregues pelo mecanismo.

O segundo objetivo é modelar os mecanismos com as características propostas por meio da metodologia e determinar uma outra metodologia que permita conhecer o seu comportamento cinetoestático, avaliando a independência do controle de torque e velocidade angular através do comportamento na saída do mecanismo, com relação ao comportamento dos seus atuadores.

Como objetivos específicos, para conseguir atingir estes objetivos gerais, tem-se:

- Estabelecer o relacionamento existente entre o grau de liberdade no modelo de estática e o grau de liberdade na cinemática (ou mobilidade do sistema) e as ações externas à cadeia cinemática.
- Desenvolver uma metodologia baseada no Método de Davies que permita estudar o comportamento cinetoestático para sistemas de cadeia fechada.
- Determinar tipos de mecanismos que apresentem dois graus de liberdade na cinemática.

- Obter equações de comportamento cinetoestático de alguns mecanismos visando à independência de torque e velocidade angular entregues.
- Avaliar o comportamento do mecanismo para torque de carga e velocidades angulares nos motores constantes.
- Avaliar o comportamento do mecanismo para velocidades angulares nos motores constantes e variações de torque na carga.
- Comparar resultados teóricos com os obtidos mediante simulação do comportamento cinetoestático dos mecanismos em ferramenta de prototipagem matemática.

### 1.3 ESCOPO DO TRABALHO

Os casos de estudo são mecanismos cinetoestáticos, para os quais não é considerada a eficiência do sistema nem a ação da gravidade.

Os atuadores utilizados (Motores CC) estão restritos a trabalhar na faixa de operação e não são consideradas suas características para caso de aplicação com motores à junta de um robô manipulador serial.

Com relação à metodologia, tem-se as seguintes hipóteses:

- Considera-se a análise estática e cinemática diferencial do mecanismo, porém não são consideradas as condições dinâmicas das cadeias cinemáticas.
- Não é considerada a dinâmica dos atuadores (Motores CC), desprezando as variáveis de indutância e inércia. Além, o atrito viscoso é considerado nulo, portanto, considera-se que o torque de carga e o torque de reação são iguais.
- Os resultados obtidos com relação ao comportamento dos atuadores estão limitados ao estado em regime permanente dos sistema.

Com relação à simulação, tem-se as seguintes hipóteses:

- Serão considerados dois casos: O caso sem motores, onde é observado o comportamento do mecanismo sem a ação da dinâmica dos atuadores; e o caso com motores, onde é observado o comportamento do mecanismo com a ação da dinâmica dos atuadores para efetuar a comparação dos resultados e determinar a sua influência sobre o comportamento do mecanismo.

- Os valores para os controladores PID não serão calculados teoricamente, portanto serão obtido por meio de ajustes heurísticos.
- Os dados de posição angular obtidos são utilizados somente para conhecer as posições das juntas em instantes de tempo determinado. Estes ângulos não apresentam influência na simulação do comportamento dos motores, já que o controle é feito com referência à velocidade angular.

## 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O Capítulo 2 apresenta as bases teóricas de funcionamento dos motores CC, as equações de modelamento e os diagramas de blocos para sua simulação.

O Capítulo 3 apresenta o equacionamento dos sistemas estático e cinemático em relação as cargas e atuadores que agem sobre o mecanismo. Também, apresenta-se o relacionamento existente entre os graus de liberdade dos sistemas estático e cinemático em função das ações ativas presentes no mecanismo. O Capítulo 4 apresenta a discussão das contribuições feitas ao Método de Davies, e as propostas metodológicas para determinação das características de projeto de mecanismos e o estudo do seu comportamento cinetoestático, em relação aos atuadores que agem sobre o mecanismo.

O Capítulo 5 apresenta dois casos de estudo, onde são obtidos os resultados teóricos da metodologia e comparados com os resultados obtidos das simulações feitas para o caso sem motores sem considerar a dinâmica dos motores e o caso com motores considerando a dinâmica dos motores.

O Capítulo 6 são apresentadas as conclusões do trabalho desenvolvido, as contribuições realizadas e as perspectivas futuras.

O Anexo A, apresenta conceitos de fundamentação teórica importantes para a compreensão e implementação da metodologia, o Anexo B apresenta um breve resumo do Método de Davies da estática e da cinemática, as contribuições do Cazangi (2008) e as próprias contribuições e o Anexo C, apresenta um exemplo de aplicação do Método de Davies, incluindo as contribuições de Cazangi (2008) e a implementação dos novos conceitos propostos neste trabalho.

O Anexo D apresenta a descrição de um software de próprio desenvolvimento para a obtenção do sistema de equações para a estática, para a cinemática e para a cinetoestática, a partir de dados básicos da configuração da cadeia cinemática.

## 2 MOTORES CC

Para implementar a metodologia proposta neste trabalho é importante conhecer o comportamento dos atuadores a serem utilizados nos exemplos e nos estudos de caso expostos, que como apresentado no capítulo anterior são atuadores rotacionais, especificamente motores CC.

Neste capítulo se apresentam as características de funcionalidade de um motor CC, as equações de comportamento dinâmico, as equações de comportamento em torque estático (cinetoestático) e a modelagem matemática descrita por meio de funções de transferência.

As equações de comportamento em torque estático (cinetoestático), são apresentadas na Seção 2.2, utilizadas posteriormente na Seção 4.2, como parte da metodologia proposta e no Capítulo 5 na implementação da metodologia nos estudos de caso.

A modelagem matemática descrita por meio de funções de transferência se apresenta com o objetivo de simular parte do comportamento do motor no Capítulo 5 e segundo os resultados obtidos, analisar a sua influência no mecanismo.

### 2.1 EQUACIONAMENTO DE COMPORTAMENTO DOS MOTORES CC

De acordo com (Spong 2004), um motor CC funciona pelo princípio de que, um condutor de corrente elétrica em um campo magnético experimenta uma força  $f = i \times \phi$ , onde  $\phi$  é o fluxo magnético e  $i$  é a corrente no condutor. O motor consiste de um estator fixo e um rotor móvel que gira dentro de um estator, como se apresenta na Figura 4.

Se o estator produz um fluxo magnético radial  $\phi$  e a corrente no rotor (também chamada de armadura) é  $i_a$ , haverá então um torque no rotor fazendo que ele gire. A magnitude deste torque é apresentada na Equação (2.1), sendo  $T_m$  o torque do motor (Newton · metro [N · m]),  $\phi$  o fluxo magnético (Webers [Wb]),  $i_a$  a corrente da armadura (Amperes [A]) e  $K_a$  uma constante física.

$$T_m = K_a \cdot \phi \cdot i_a \quad (2.1)$$

Sempre que um condutor se move num campo magnético, uma tensão  $V_b$  é gerada através de seus terminais que é proporcional à velocidade do condutor no campo. Esta tensão, chamada de força contra-

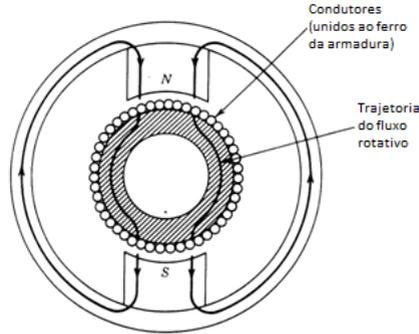


Figura 4: Visão transversal de um motor CC.  
Fonte: (Spong 2004)

eletromotriz, vai-se opor ao fluxo de corrente no condutor.

Assim, além do torque  $T_m$  apresentado na Equação (2.1), tem-se a relação da força contraeletromotriz expressa na Equação (2.2), sendo  $V_b$  a força contraeletromotriz (Volts [V]),  $\omega_m$  a velocidade angular do rotor (Radianos/Segundo [rad/s]), e  $K_d$  uma constante de proporcionalidade.

$$V_b = K_d \cdot \phi \cdot \omega_m \quad (2.2)$$

Os motores CC podem ser classificados de acordo com a forma em que o campo magnético é produzido e a armadura é projetada.

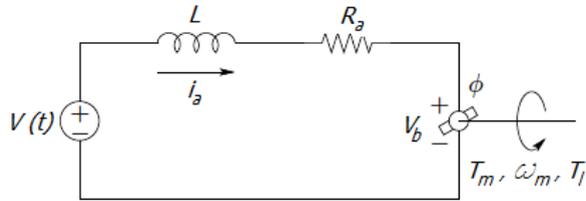
No caso dos chamados motores de ímã permanente, o estator consiste em um ímã permanente, para o qual o fluxo  $\phi$  é considerado constante, e pode ser representado pelo circuito de controle por armadura da Figura 5.

O torque  $T_m$  (Equação (2.1)) é gerado de forma proporcional à corrente de armadura  $i_a$ , como apresentado na Equação (2.3), sendo  $K_m$  a constante de torque (N · m/A).

$$T_m = K_a \cdot \phi \cdot i_a = K_m \cdot i_a \quad (2.3)$$

A força contraeletromotriz  $V_b$  (Equação (2.2)) se torna diretamente proporcional à velocidade angular  $\omega_m$ , como apresentado na Equação (2.4), sendo  $K_b$  a constante da força contraeletromotriz.

$$V_b = K_d \cdot \phi \cdot \omega_m = K_b \cdot \omega_m \quad (2.4)$$



$V$ = Tensão de armadura	$\omega_m$ = Velocidade angular do rotor
$L$ = Indutância de armadura	$T_m$ = Torque gerado
$R_a$ = Resistência da armadura	$T_l$ = Torque de carga
$V_b$ = Força contraeletromotriz	$\phi$ = Fluxo magnético radial
$i_a$ = Corrente de armadura	

Figura 5: Diagrama do circuito de armadura de um motor CC

Com relação aos parâmetros elétricos do motor, tem-se a Equação (2.5), que representa a equação diferencial para o circuito apresentado na Figura 5.

$$L \cdot \frac{di_a}{dt} + R_a \cdot i_a = V - V_b \quad (2.5)$$

Com relação aos parâmetros mecânicos do motor, tem-se a Equação (2.6), que representa o comportamento apresentado pela ação do torque aplicado à inércia e à fricção no rotor (Ogata 1998), lembrando que  $\omega_m = d\theta_m/dt$ , sendo  $\theta_m$  a posição angular do rotor.

$$J \cdot \frac{d\omega_m}{dt} + B \cdot \omega_m = T_m - T_l \quad (2.6)$$

Porém, a metodologia a ser exposta neste trabalho só considera as características cinetoestáticas do sistema, portanto não será considerada a dinâmica dos motores, ou seja o Momento de Inércia  $J$  será desprezado.

O Fator de Amortecimento  $B$ , também será desprezado por se

considerar muito pequeno para ter influência significativa no torque de reação do motor, de forma que da Equação (2.6), pode-se dizer que  $T_m = T_l$ , sendo que o torque produzido pelo motor será igual ao torque da carga aplicada no rotor e o motor apresentará um comportamento de torque estático como apresentado na Seção 2.2.

Para as simulações no caso com motores, onde é considerada a dinâmica dos motores, será empregado o modelamento matemático descrito por funções de transferência apresentado na Seção 2.3.

## 2.2 COMPORTAMENTO DO MOTOR CC EM TORQUE ESTÁTICO

De acordo com (Kuo 1996), as curvas de torque-velocidade de um motor CC (Figura 6), descrevem a capacidade do torque estático do motor com respeito à tensão aplicada e a velocidade angular do motor.

Quando se trata de torque estático se pode supor que o fluxo de corrente é nulo, pois se trata de um regime permanente do sistema, portanto  $L \cdot di_a/dt = 0$ .

Substituindo na Equação (2.5) as Equações (2.3) e (2.4), pode-se estabelecer a equação do torque  $T_m$  apresentada na Equação (2.7), sendo  $K_r = K_m/R_a$ .

$$T_m = K_r \cdot (V - K_b \cdot \omega_m) \quad (2.7)$$

Para uma tensão aplicada  $V$ , a Equação (2.7) descreve a relação linear das características torque - velocidade angular do motor CC.

Porém o motor está sujeito a duas limitações: a primeira se deve a corrente da armadura  $i_a$  que se incrementa ao mesmo tempo em que a tensão aplicada  $V$  se incrementa, o circuito magnético se satura, pelo qual o torque  $T_m$  não pode exceder o valor máximo (linha pontuada), como apresentado na Figura 6; e a segunda limitação é devida à corrente máxima que pode suportar o motor devido à dissipação de calor.

Na Figura 6, mostra-se um conjunto típico de curvas torque-velocidade para diferentes tensões aplicadas das quais se pode obter a inclinação  $m_p$ :

$$m_p = -K_r \cdot K_b \quad (2.8)$$

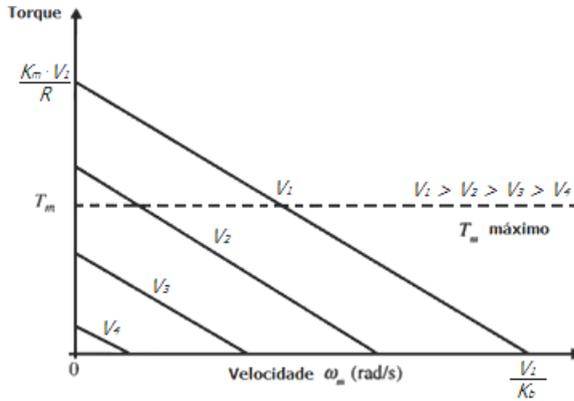


Figura 6: Curvas típicas de torque-velocidade de um motor CC.  
Fonte: (Kuo 1996)

### 2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA DO MOTOR CC

Os motores CC são sistemas eletromecânicos que podem ser estudados através de modelos matemáticos descritos por meio de funções de transferência. Partindo das Equações (2.3), (2.4), (2.5) e (2.6), e aplicando a transformada de Laplace para condições iniciais nulas, obtêm-se:

$$T_m(s) = K_m \cdot i_a(s) \quad (2.9)$$

$$V_b(s) = K_b \cdot \omega_m(s) \quad (2.10)$$

$$L \cdot s \cdot i_a(s) + R_a \cdot i_a(s) = V(s) - V_b(s) \quad (2.11)$$

$$J \cdot s \cdot \omega_m(s) + B \cdot \omega_m(s) = T_m(s) - T_l(s) \quad (2.12)$$

Partindo das Equações (2.9) - (2.12), obtêm-se as funções de transferência necessária para a representação em diagramas de bloco do comportamento do motor CC.

$$\frac{T_m(s)}{i_a(s)} = K_m \quad (2.13)$$

$$\frac{V_b(s)}{\omega_m(s)} = K_b \quad (2.14)$$

$$\frac{i_a(s)}{V(s) - V_b(s)} = \frac{1}{L \cdot s + R_a} \quad (2.15)$$

$$\frac{\omega_m(s)}{T_m(s) - T_l(s)} = \frac{1}{J \cdot s + B} \quad (2.16)$$

A Equação (2.13) considera que o torque  $T_m$  é o efeito imediato de aplicar uma corrente  $i_a$ ; a Equação (2.15) considera que a corrente  $i_a$  é consequência de aplicar um diferencial de tensão  $V - V_b$ , sendo  $V$  a tensão de entrada; a Equação (2.14) define a força contraeletromotriz  $V_b$  como consequência de uma velocidade angular  $\omega_m$ ; e a Equação (2.16) define a velocidade angular  $\omega_m$  como consequência de um diferencial de torque  $T_m - T_l$ , sendo  $T_l$  o torque da carga.

A Figura 7, mostra a representação em diagramas de blocos do sistema de um motor CC. Contudo, sendo o motor CC um sistema de laço aberto, é possível ver no diagrama de blocos que apresenta uma realimentação devido à força contraeletromotriz.

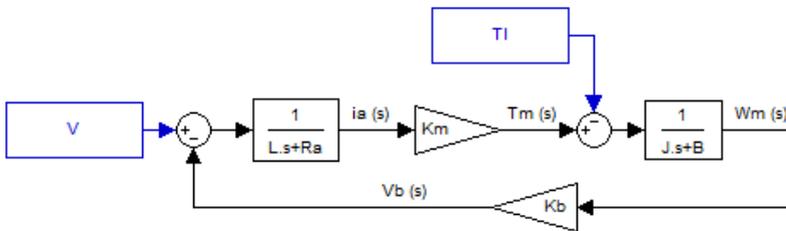


Figura 7: Diagrama de Blocos do Motor CC.

Fonte: (Kuo 1996)

Fisicamente, a força contraeletromotriz representa a realimentação do sinal, proporcional ao negativo da velocidade angular do motor, sendo o equivalente a uma "fricção elétrica" que tende a melhorar a estabilidade do motor, e em geral, a estabilidade do sistema (Kuo 1996, Ogata 1998).

O controle no motor pode ser implementado de duas formas:

- A primeira é controlando a velocidade angular do motor, ao estabelecer uma velocidade angular de referência e obter uma realimentação da velocidade angular de saída no motor, como apresentado na Figura 8.

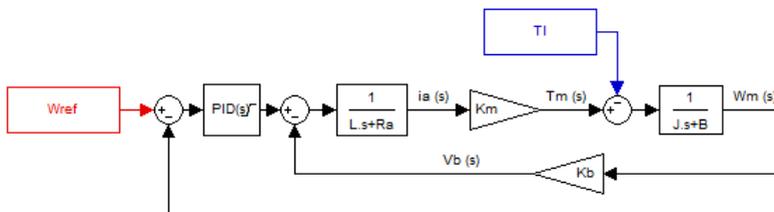


Figura 8: Diagrama de Blocos do Motor CC Controlado por Velocidade Angular.

Fonte: (Ogata 1998)

- A segunda é controlando o torque do motor, ao estabelecer um torque de referência e obter uma realimentação do torque de saída no motor, como apresentado na Figura 9.

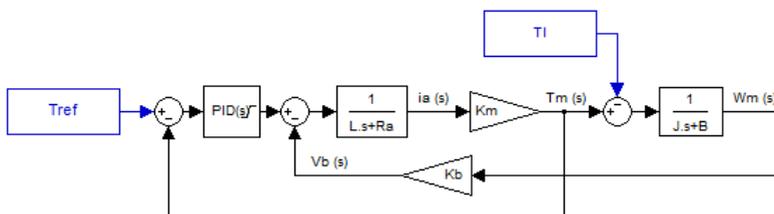


Figura 9: Diagrama de Blocos do Motor CC Controlado por Torque.

Fonte: (Ogata 1998)

## 2.4 CONSIDERAÇÕES

Neste capítulo foram apresentadas as características de funcionalidade de um motor CC, as equações de comportamento dinâmico, as equações de comportamento em torque estático (cinetoestático) e a modelagem matemática descrita por meio de funções de transferência.

As equações de comportamento em torque estático (cinetoes-tático), serão utilizadas posteriormente na Seção 4.2, como parte do desenvolvimento da metodologia proposta e no Capítulo 5 na implementação da metodologia nos estudos de caso.

A modelagem matemática descrita por meio de funções de transferência se apresenta com o objetivo de simular parte do comportamento do motor em ferramentas de prototipagem matemática para o Capítulo 5 e segundo os resultados obtidos, analisar a sua influência no mecanismo.

### 3 RELACIONAMENTO ENTRE OS SISTEMAS ESTÁTICO E CINEMÁTICO

O Método de Davies (Anexo B) permite obter informações sobre o comportamento estático referente às forças, aos torques e aos momentos que agem sobre um mecanismo, ou sobre o comportamento cinemático referente às velocidades angulares e às velocidades lineares resultantes em instantes específicos de movimento do mecanismo.

Porém, o método não apresenta nenhuma forma de relacionar a estática e a cinemática do mecanismo com o comportamento dos atuadores que atuam sobre o mesmo.

Neste capítulo, estabelece-se o equacionamento dos sistemas estático e cinemático em função das ações ativas presentes no mecanismo. Também, apresenta-se o relacionamento existente entre os graus de liberdade dos sistemas estático  $S_N$  e cinemático  $F_N$ , em função do número de cargas  $\sigma$  e do número de atuadores  $A_R$  que agem sobre o mecanismo.

#### 3.1 EQUACIONAMENTO DOS SISTEMAS ESTÁTICO E CINEMÁTICO

Os graus de liberdade tanto para a estática  $S_N$ , como para a cinemática  $F_N$ , vão depender do número de variáveis independentes presentes para cada sistema. Ou seja,  $S_N$  será igual ao número de variáveis independentes resultantes da Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede  $\left[\hat{A}_{nesc}\right]_{(\lambda \cdot \kappa - S_D) \times C_S}$ , e  $F_N$ , que é o mesmo Grau de liberdade líquido do sistema, será igual ao número de variáveis independentes resultantes da Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[\hat{M}_{nesc}\right]_{(\lambda \cdot \nu - K_D) \times F}$ .

No caso do mecanismo de quatro barras em configuração RSSR da Figura 58 (Anexo C), tem-se que:

- O grau de liberdade para a estática segundo a Equação (C.13) é  $S_N = R - a = 18 - 17 = 1$ , pois se tem da Equação (C.3) que o grau de restrição do mecanismo é  $R = 18$  e que a Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede  $\left[\hat{A}_{nesc}\right]_{(\lambda \cdot \kappa - S_D) \times C_S}$  (Equação (C.11)) apresenta segundo a Equação (C.12) um posto de  $a = \lambda \cdot \kappa - S_D = 6 \cdot 3 - 1 = 17$ , sendo o número de equações

dependentes do sistema estático  $S_D = 1$ ;

- O grau de liberdade para a cinemática ou também conhecido segundo as Equações do Davies (Davies 2005), como grau de liberdade líquido, o qual segundo a Equação (C.24) é  $F_N = F - m = 8 - 6 = 2$ , pois se tem da Equação (C.14) que o grau de liberdade bruto do mecanismo é  $F = 8$  e que a Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[ \hat{M}_{n_{esc}} \right]_{(\lambda \cdot \nu - K_D) \times F}$  da Equação (C.22) apresenta segundo a Equação (C.23) um posto de  $m = \lambda \cdot \nu - K_D = 6 \cdot 1 - 0 = 5$ , sendo o número de equações dependentes do sistema cinemático  $K_D = 0$ .

Partindo dos conceitos expostos no Capítulo B e de algumas das Equações de Davies relacionadas na Tabela 1, é possível determinar uma relação direta entre o grau de liberdade da estática  $S_N$  e o grau de liberdade na cinemática  $F_N$  aplicável a qualquer mecanismo, mas cumprindo algumas condições enunciadas mais adiante.

O grau de liberdade da estática  $S_N$  (Equação (B.14)), é determinado pelo grau de restrição  $C_S$  (Equação (B.4)) e o posto  $a$  da Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede  $\left[ \hat{A}_{n_{esc}} \right]_{(\lambda \cdot \kappa - S_D) \times C_S}$ .

Tabela 1: Resumo das Equações do Davies

Parâmetro	Equações para Estática	Equações para Cinemática
Grau de restrição bruto / Grau de liberdade bruto	$C = \sum_{i=1}^j C_{p_i}$	$F = \sum_{i=1}^j f_i$
Número de Cortes-f / Número de Circuitos-f	$\kappa = n - 1$	$\nu = j - n + 1$

O grau de restrição  $C_S$ , pode ser descrito a sua vez, pelo grau de restrição bruto  $C$ , que é a somatória de ações passivas (Equações (3.1)) e pela somatória das ações ativas ou internalizadas (Equação (3.2)) do sistema.

$$C = \sum_{i=1}^j (\lambda - f_i) = \lambda \cdot j - \sum_{i=1}^j f_i \quad (3.1)$$

A Equação (3.1) compreende a somatória das ações passivas para cada junta do mecanismo definidas pela Equação (B.2).



Tabela 2: Características principais do mecanismo em configuração 8R

	Simbolo	Valor
Elos	$n$	8
Juntas	$j$	8
Espaço de Trabalho	$\lambda$	6
Cortes-f	$\kappa$	7
Grau de Liberdade Estática	$S_N$	1
Circuitos-f	$v$	1
Grau de Liberdade Cinemática	$F_N$	2
Atuadores	$A_R$	1
Cargas	$\sigma$	1

Esféricas: 2  $\rightarrow$  Rotativas: 6), porém não muda somente o número de juntas, também muda o número de corpos, pois cada junta deve estar acompanhada de um corpo que permite a união com a seguinte junta, passando de ter  $n = 4$  a ter  $n = 8$ .

Segundo a expansão feita para o mecanismo de quatro barras em configuração RSSR, obtém-se um mecanismo como apresentado na Figura 10 e com as características apresentadas na Tabela 2, que se vai denominar em configuração 8R.

Tabela 3: Identificação dos acoplamentos do mecanismo em configuração 8R

Junta	Elementos	Tipo	Eixo	Função
a	0,1	Rotativa	z	Reação (Atuador)
b	1,2	Rotativa	z	Transmissão
c	2,3	Rotativa	x	Transmissão
d	3,4	Rotativa	y	Transmissão
f	4,5	Rotativa	y	Transmissão
g	5,6	Rotativa	x	Transmissão
h	6,7	Rotativa	z	Transmissão
k	0,7	Rotativa	z	Carga

Como apresentado na Tabela 3, os acoplamentos do mecanismo exposto na Figura 10, apresentam as seguintes características (segundo o sistema inercial  $O_{xyz}$  como apresentado no Anexo C na Figura 59):

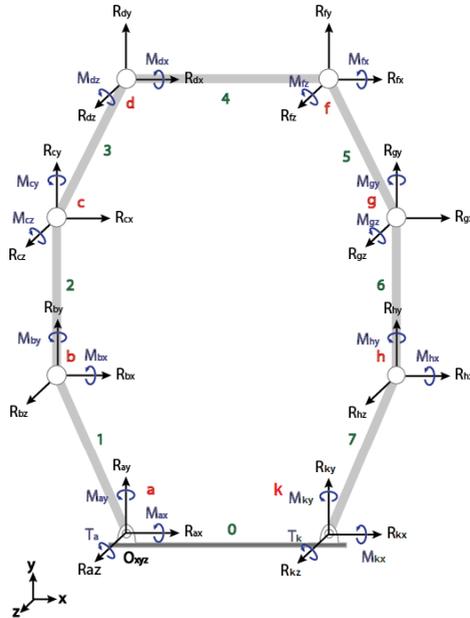


Figura 11: Representação das ações nos acoplamentos do 8R

- as juntas  $B$  e  $H$  representam as juntas correspondentes ao grau de liberdade no eixo de rotação em  $z$ ,
- as juntas  $C$  e  $G$  representam as juntas correspondentes ao grau de liberdade no eixo de rotação em  $x$ ,
- as juntas  $D$  e  $F$  representam as juntas correspondentes ao grau de liberdade no eixo de rotação em  $y$ ,

### 3.1.1 Análise Estática

Este novo mecanismo apresenta liberdades de rotação nos três eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , portanto trabalha em um espaço de trabalho de  $\lambda = 6$ , e segundo a representação das ações nos acoplamentos do 8R apresentado na Figura 11, obtém-se que:

- $Cp_1 = Cp_2 = Cp_7 = Cp_8 = 5$  que é igual ao número de restrições ( $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$ ,  $M_x$  e  $M_y$ ) das juntas  $a$ ,  $b$ ,  $h$  e  $k$  respetivamente, e que pode ser comprovado mediante a aplicação da Equação (B.2)

sendo  $Cp_1 = Cp_2 = Cp_7 = Cp_8 = \lambda - f = 6 - 1 = 5$ , com  $f = 1$  por ser juntas rotativas (um grau de liberdade);

- $Cp_3 = Cp_6 = 5$  que é igual ao número de restrições ( $R_x, R_y, R_z, M_y$  e  $M_z$ ) das juntas  $c$  e  $g$  respectivamente, e que pode ser comprovado mediante a aplicação da Equação (B.2) sendo  $Cp_3 = Cp_6 = \lambda - f = 6 - 1 = 5$ , com  $f = 1$  por ser juntas rotativas (um grau de liberdade);
- $Cp_4 = Cp_5 = 5$  que é igual ao número de restrições ( $R_x, R_y, R_z, M_x$  e  $M_z$ ) das juntas  $d$  e  $f$  respectivamente, e que pode ser comprovado mediante a aplicação da Equação (B.2) sendo  $Cp_4 = Cp_5 = \lambda - f = 6 - 1 = 5$ , com  $f = 1$  por ser juntas rotativas (um grau de liberdade).

Estes dados são apresentados na Tabela 4 e comparando o grau de restrição bruto obtido da Equação (3.1) sendo  $C = 8 \cdot (6 - 1) = 40$ , com o grau de restrição bruto obtido pela Equação (B.3) sendo  $C = \sum_{i=1}^j Cp_i = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 40$ , nota-se que são iguais, validando a expressão obtida (Equação (3.3)).

Tabela 4: Identificação das ações estáticas no mecanismo em configuração 8R

Junta	Torques e Momentos	Restrições
a	$T_a, M_{a_x}$ e $M_{a_y}$	$R_{a_x}, R_{a_y}$ e $R_{a_z}$
b	$M_{b_x}$ e $M_{b_y}$	$R_{b_x}, R_{b_y}$ e $R_{b_z}$
c	$M_{c_y}$ e $M_{c_z}$	$R_{c_x}, R_{c_y}$ e $R_{c_z}$
d	$M_{d_x}$ e $M_{d_z}$	$R_{d_x}, R_{d_y}$ e $R_{d_z}$
f	$M_{f_x}$ e $M_{f_z}$	$R_{f_x}, R_{f_y}$ e $R_{f_z}$
g	$M_{g_y}$ e $M_{g_z}$	$R_{g_x}, R_{g_y}$ e $R_{g_z}$
h	$M_{h_x}$ e $M_{h_y}$	$R_{h_x}, R_{h_y}$ e $R_{h_z}$
k	$T_k, M_{k_x}$ e $M_{k_y}$	$R_{k_x}, R_{k_y}$ e $R_{k_z}$

O grau de restrição  $C_S$ , fica definido pela somatória das ações passivas  $C$  expresso em função do número de juntas  $j$  e o espaço de trabalho  $\lambda$  do mecanismo, como apresentado na Equação (3.1), e pela somatória das ações ativas ou internalizadas em função do número de reações ou atuadores  $A_R$  e o número de cargas  $\sigma$  aplicadas ou mecanismo, como apresentado na Equação (3.2), obtendo o grau de restrição do sistema em função do número de juntas  $j$  do mecanismo, o espaço

de trabalho  $\lambda$ , o número de reações ou atuadores  $A_R$  e o número de cargas  $\sigma$  aplicadas ou mecanismo, como apresentado na Equação (3.4).

$$R = j \cdot (\lambda - 1) + A_R + \sigma \quad (3.4)$$

Para o mecanismo em configuração 8R, tem-se que o grau de restrição do mecanismo é  $R = j \cdot (\lambda - 1) + A_R + \sigma = R = 8 \cdot (6 - 1) + 1 + 1 = 42$ , com  $A_R = 1$  que é o atuador aplicando na junta  $a$  e que gera a ação de torque de reação  $Ta$ , e com  $\sigma = 1$  que é a carga aplicada na junta  $i$  e que gera um torque de carga  $T_i$ .

O posto  $a$  da Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede  $\left[ \hat{A}_{nesc} \right]_{(\lambda \cdot \kappa - S_D) \times C_S}$ , por ser o número de equações linearmente independentes do sistema estático, pode ser obtido da Equação (B.13), sendo  $\lambda \cdot \kappa$  o número de linhas total da matriz  $\left[ \hat{A}_{nesc} \right]_{(\lambda \cdot \kappa - S_D) \times C_S}$  e  $S_D$  o número de equações dependentes do sistema estático.

$$\kappa = n - 1 = j - \nu \quad (3.5)$$

Também estabelecendo uma relação direta entre o número de cortes  $\kappa$  (Equação (B.5)) do grafo do mecanismo e o número de circuitos  $\nu$  (Equação (B.16)) do grafo do mecanismo na Equação (3.5), obtém-se a expressão da Equação (3.6).

$$a = \lambda \cdot \kappa - S_D = \lambda \cdot (j - \nu) - S_D \quad (3.6)$$

Deixando a expressão do posto  $a$  da Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede  $\left[ \hat{A}_{nesc} \right]_{(\lambda \cdot \kappa - S_D) \times C_S}$  em função do número de juntas  $j$  e o número de circuitos  $\nu$  do mecanismo para assim poder depois relacioná-lo com as equações da cinemática.

Para o mecanismo em configuração 8R, tem-se uma Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede  $\left[ \hat{A}_{nesc} \right]_{(6 \cdot 7 - 1) \times 42}$  como apresentada na Equação (3.7), sendo  $D$  uma variável em substituição da expressão  $(b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x - b_x \cdot d_y + b_y \cdot dx + cx \cdot dy - cy \cdot dx)$ , o número de cortes  $k = n - 1 = 8 - 1 = 7$  obtido da Equação (3.5) e o número de equações dependentes do sistema estático  $S_D = 1$  do mesmo jeito que apresenta-se para o mecanismo em configuração RSSR na Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede  $\left[ \hat{A}_{nesc} \right]_{(6 \cdot 3 - 1) \times 18}$  da Equação (C.11), por considerar-se que o RSSR e o 8R são o mesmo mecanismo na essência.

$$\left[ \hat{A}_{nesc} \right]_{41 \times 42} = I_{41} \left[ \begin{array}{c}
 \frac{-(b_x - c_x)}{D} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \frac{-(b_y - c_y)}{D} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \frac{-(b_x - c_x)}{D} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \frac{-(b_y - c_y)}{D} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \frac{-(b_x - c_x)}{D} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \frac{-(b_y - c_y)}{D} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \frac{b_x - c_x}{D} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \frac{b_y - c_y}{D} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \frac{b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x}{D}
 \end{array} \right]_{41 \times 42} \tag{3.7}$$

Isto pode ser comprovado na Equação (3.7) a qual foi obtida mediante a ferramenta desenvolvida do Capítulo D, obtendo que o posto da matriz  $a = \lambda \cdot \kappa - S_D = 6 \cdot 7 - 1 = 41$ .

Expressa-se o grau de liberdade da estática  $S_N$  mediante uma nova equação como apresentado na Equação (3.8), ficando em função do número de atuadores ou reações  $A_R$  e cargas  $\sigma$  aplicados ao mecanismo, o espaço de trabalho  $\lambda$ , o número de juntas  $j$ , o número de equações dependentes do sistema estático  $S_D$  e o número de circuitos  $\nu$  que é a variável que relaciona o sistema estático com o sistema cinemático.

$$S_N = \lambda \cdot j - j + A_R + \sigma - \lambda \cdot (j - \nu) + S_D \quad (3.8)$$

Em forma mais simples o grau de liberdade da estática  $S_N$  é expresso na Equação (3.9), na qual se substituem os parâmetros do mecanismo em configuração 8R, obtendo do mesmo jeito que na Equação (C.13) ( $S_N$  para o RSSR) um grau de liberdade da estática de  $S_N = A_R + \sigma + \lambda \cdot \nu - j + S_D = 1 + 1 + 6 \cdot 1 - 8 + 1 = 1$  ( $S_N$  para o 8R), nota-se que são iguais, validando a expressão obtida na Equação (3.9).

$$S_N = A_R + \sigma + \lambda \cdot \nu - j + S_D \quad (3.9)$$

### 3.1.2 Análise Cinemática

Para determinar o grau de liberdade da cinemática  $F_N$ , tem-se a Equação (B.24), a qual é composta pelo grau de liberdade bruto  $F$  (Equação (B.15)), e o posto  $m$  da Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[ \hat{M}_{nesc} \right]_{(\lambda \cdot \nu - K_D) \times F}$ .

O grau de liberdade bruto  $F$ , pode ser descrito a sua vez, pela somatória dos graus de liberdade de todas as juntas do mecanismo, como apresentado na Equação (B.15).

Considerando a expansão de todas as juntas, gera-se a representação dos movimentos nos acoplamentos do 8R da Figura 12, segundo a qual se obtém que:

- $f_1 = f_2 = f_7 = f_8 = 1$  que é igual ao número de graus de liberdade ( $\omega_z$ ) das juntas  $a$ ,  $b$ ,  $h$  e  $i$  respectivamente, com  $f = 1$  por ser juntas rotativas (um grau de liberdade);
- $f_3 = f_6 = 1$  que é igual ao número de graus de liberdade ( $\omega_x$ ) das juntas  $c$  e  $g$  respectivamente, com  $f = 1$  por ser juntas rotativas

(um grau de liberdade);

- $f_4 = f_5 = 1$  que é igual ao número de graus de liberdade ( $\omega_y$ ) das juntas  $d$  e  $f$  respectivamente, com  $f = 1$  por ser juntas rotativas (um grau de liberdade).

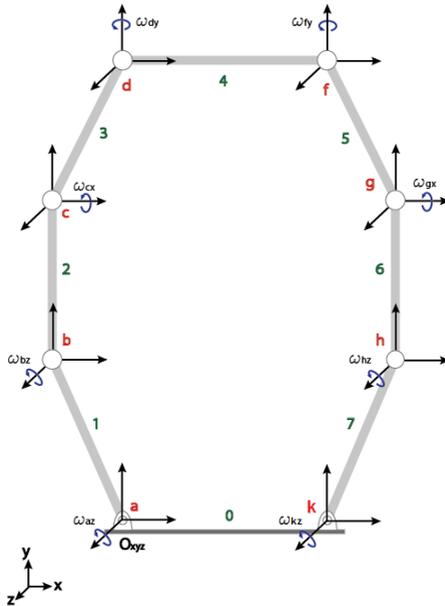


Figura 12: Representação dos movimentos nos acoplamentos do 8R

Estes dados são apresentado em resumo na Tabela 5, tendo que o grau de liberdade bruto  $F$  do mecanismo é  $F = j = 8$  (Equação (3.10)), pois sendo todas as juntas rotativas, apresentam um grau de liberdade para cada.

Comparando o grau de liberdade obtido para este novo mecanismo com o grau de liberdade bruto obtido da Equação (C.14) sendo  $F = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$ , nota-se que são iguais, validando a expressão obtida (Equação (3.10)).

$$F = j \quad (3.10)$$

O posto  $m$  da Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[\hat{M}_{nesc}\right]_{(\lambda \cdot \nu - K_D) \times F}$ , é definido pela Equação (B.23), sendo  $\lambda \cdot \nu$  o número de linhas total da matriz  $\left[\hat{M}_{nesc}\right]_{(\lambda \cdot \nu - K_D) \times F}$  e  $K_D$  o número de equações dependentes do sistema cinemático.

Tabela 5: Identificação das ações cinemáticas no mecanismo em configuração 8R

Junta	Velocidades Angulares
a	$\omega_{a_z}$
b	$\omega_{b_z}$
c	$\omega_{c_x}$
d	$\omega_{d_y}$
f	$\omega_{f_y}$
g	$\omega_{g_x}$
h	$\omega_{h_z}$
k	$\omega_{k_z}$

Para o mecanismo em configuração 8R, tem-se uma Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[\hat{M}_{nesc}\right]_{(6 \cdot 1 - 0) \times 8}$  como apresentada na Equação (3.11), sendo a mesma matriz obtida para o mecanismo em configuração RSSR na Equação (C.22) e apresentando: uma variável  $D$  em substituição da expressão  $(b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x - b_x \cdot d_y + b_y \cdot d_x + c_x \cdot d_y - c_y \cdot d_x)$ , um número de circuitos  $v = 1$  e o número de equações dependentes do sistema cinemático  $K_D = 0$ .

$$\left[\hat{M}_{nesc}\right]_{(6 \cdot 1 - 0) \times 8} = I_6 \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & \frac{-D}{(b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x)} & \\ \hline -1 & 0 & \\ \frac{(b_x - c_x)}{(b_y - c_y)} & 0 & \\ 0 & \frac{(c_x \cdot d_y - c_y \cdot d_x)}{(b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x)} & \\ \frac{(b_x - c_x)}{(b_y - c_y)} & 0 & \\ 0 & \frac{-(b_x \cdot d_y - b_y \cdot d_x)}{(b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x)} & \end{array} \right]_{6 \times 8} \quad (3.11)$$

O resultado da Equação (3.11) pode ser comprovado mediante a ferramenta desenvolvida do Capítulo D, obtendo que o posto da matriz  $m = \lambda \cdot \nu - K_D = 6 \cdot 1 - 0 = 6$ .

Se expressa o grau de liberdade da cinemática  $F_N$  mediante uma nova equação (Equação (3.12)), ficando em função do espaço de trabalho  $\lambda$ , o número de juntas  $j$ , o número de equações dependentes do sistema cinemático  $K_D$  e o número de circuitos  $\nu$ .

$$F_N = j - \lambda \cdot \nu + K_D \quad (3.12)$$

Substituem-se os parâmetros do mecanismo em configuração 8R, obtendo do mesmo jeito que na Equação (C.24) ( $F_N$  para o RSSR) um grau de liberdade da cinemática de  $F_N = j - \lambda \cdot \nu + K_D = 8 - 6 \cdot 1 + 0 = 2$  ( $F_N$  para o 8R), nota-se que são iguais, validando a expressão obtida na Equação (3.12).

### 3.2 RELAÇÃO $S_N$ - $F_N$

Finalmente, substituindo a Equação (3.12) na Equação (3.8), pode-se obter a expressão na Equação (3.13), obtendo a relação direta entre o grau de liberdade da estática  $S_N$  e o grau de liberdade na cinemática  $F_N$ , incluindo as reações ou atuadores  $A_R$ , cargas  $\sigma$ , equações dependentes do sistema cinemático  $K_D$  e equações dependentes do sistema estático  $S_D$  do mecanismo.

$$S_N = A_R + \sigma - F_N + S_D + K_D \quad (3.13)$$

No entanto, esta relação pode ser ainda simplificada considerando-se que em qualquer tipo de sistema, seja planar ou espacial, a variável  $S_D$  vai ser nula no caso em que o mecanismo esteja controlado em sua totalidade e não apresente dependência linear, ou seja, que não apresente super restrições.

Ou seja que além de cumprir com a condição exposta na Equação (3.14), os atuadores devem estar dispostos de forma a atingir a mobilidade do mecanismo, incluindo aqueles graus de liberdade passivos presentes no sistema.

$$A_R = F_N \quad (3.14)$$

Também, deve-se considerar que a variável  $K_D$  vai ser nula no caso em que pela configuração do mecanismo, seja possível atingir todos os movimentos permitidos no espaço de trabalho escolhido.

Deste jeito, obtém-se a Equação (3.15), concluindo que o número de reações ou atuadores sempre deve ser igual ao Grau de liberdade da cinemática  $F_N$ , e o Grau de liberdade da estática  $S_N$  sempre será igual

ao número de cargas  $\sigma$  aplicadas ao mecanismo.

$$S_N = \sigma \quad (3.15)$$

Na Tabela 29 (Apêndice A), é apresentada uma série de exemplos que sob as características de configuração expostas, entregam certo  $S_N$  e  $F_N$  com  $S_D$  e  $K_D$  nulas.

### 3.3 CONSIDERAÇÕES

Neste capítulo, foi apresentado o equacionamento dos sistemas estático e cinemático em função das ações ativas presentes no mecanismo. Também, foi apresentado o relacionamento existente entre os graus de liberdade dos sistemas estático  $S_N$  e cinemático  $F_N$ , em função do número de cargas  $\sigma$  e do número de atuadores  $A_R$  que agem sobre o mecanismo.

Demonstrou-se que toda junta com mas de um grau de liberdade ( $f > 1$ ), pode ser substituída por um conjunto de juntas com um grau de liberdade ( $f = 1$ ), mas atingindo a todas as liberdades que apresenta a junta original.

Considerando que não se apresentam equações dependentes nem no sistema estático  $S_D$ , nem no sistema cinemático  $K_D$ , pode ser estabelecida uma relação direta entre o grau de liberdade da estática  $S_N$  e o número de cargas  $\sigma$ , e o grau de liberdade da cinemática  $F_N$  e o número de atuadores  $A_R$ .



## 4 PROPOSTA DE ACOPLAMENTO CINETOESTÁTICO

Como enunciado no Capítulo 3, o Método de Davies (Anexo B) permite obter informações sobre o comportamento estático referente às forças, aos torques e aos momentos que agem sobre um mecanismo, ou sobre o comportamento cinemático referente às velocidades angulares e às velocidades lineares resultantes em instantes específicos de movimento do mecanismo. Também foi visto que é possível estabelecer um relacionamento entre os sistemas estático e cinemático de uma cadeia cinemática qualquer.

Neste capítulo são discutidas as contribuições feita ao Método de Davies e propõe-se uma metodologia que permite obter um relacionamento direto entre o comportamento estático e o comportamento cinemático de um mesmo mecanismo, conhecendo o comportamento dos atuadores e partindo da definição dos valores para as variáveis independentes do sistema.

### 4.1 CONTRIBUIÇÕES AO MÉTODO DE DAVIES

O Método de Davies está baseado em conceitos expostos por Davies (1995, 2005) , onde estuda o comportamento do mecanismo por meio de grafos e equações.

As equações propostas por Davies (2005) , permitem determinar o comportamento interno do mecanismo por meio dos conceitos de Grau de Restrição Líquido  $C_N$  e Grau de Liberdade Líquido  $F_N$ .

Na estática, o Grau de Restrição Líquido  $C_N$  é o número de variáveis primarias do sistema, enquanto o Grau de Liberdade Líquido  $F_N$  é o número de equações redundantes.

Na cinemática, o Grau de Liberdade Líquido  $F_N$  é o número de variáveis primarias do sistema, enquanto o Grau de Restrição Líquido  $C_N$  é o número de equações redundantes.

Para validar os resultados destas equações, Davies (2005) determina uma relação entre a estática e a cinemática do mecanismo, estabelecendo uma condição de igualdade entre os conceitos de Grau de restrição líquido  $C_N$  e Grau de liberdade líquido  $F_N$  tanto para a estática quanto para a cinemática, como apresentado na Tabela 6.

Tabela 6: Equações do Método de Davies Clássico.

	Método de Davies Clássico	
	Estática	Cinemática
Grau de restrição bruto / Grau de liberdade bruto	$C = \sum_{i=1}^j C_{p_i}$	$F = \sum_{i=1}^j f_i$
Grau de restrição líquido	$C_N = C - a$	$C_N = \lambda \cdot \nu - m$
Grau de liberdade líquido	$F_N = \lambda \cdot k - a$	$F_N = F - a$

Cazangi (2008) adota as equações expostas por Davies (2005) e as adapta para a análise de mecanismos na estática considerando as ações externas ou ações ativas no mecanismo. Porém, os conceitos utilizados continuaram sendo os mesmos, sem levar em conta as condições de igualdade expostas por Davies (2005) .

Laus (2011) e Laus et al. (No prelo) também utilizou esta adaptação de Cazangi (2008) para o desenvolvimento do seu trabalho, onde resolve o problema da determinação da eficiência mecânica de máquinas através de algumas inclusões feitas ao método, mas continuou trabalhando com os mesmos conceitos.

Então, ao considerar as ações externas ou ações ativas no mecanismo, a condição de igualdade expostas por Davies (2005) entre os conceitos de Grau de restrição líquido  $C_N$  e Grau de liberdade líquido  $F_N$  não é válida. Portanto, propõe-se a inclusão de quatro novos conceitos, sendo:

- Grau de restrição,  $C_S$ .

O grau de restrição faz referencia as restrições apresentadas no mecanismo em geral, incluindo as restrições passivas conhecidas por Davies (2005) como Grau de restrição bruto  $C$ , e as restrições ativas que são as ações externas ao mecanismo.

- Equações dependentes do Sistema Estático,  $S_D$ .

As equações dependentes do sistema estático fazem referencia as linhas nulas resultantes do escalonamento da Matriz das Ações Unitárias em Rede  $\left[ \hat{A}_n \right]_{\lambda \cdot \kappa \times C_S}$ .

- Grau de liberdade da Estática,  $S_N$ . O grau de liberdade da estática faz referencia ao número de variáveis de torque que podem ser controladas de forma independente com relação à configuração do mecanismo.

- Equações dependentes do Sistema Cinemático,  $K_D$ . As equações dependentes do sistema cinemático fazem referencia as linhas nulas resultantes do escalonamento da Matriz dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[ \hat{M}_n \right]_{\lambda \cdot \nu \times F}$ .

Tabela 7: Equações do Método de Davies Clássico *vs* Modificado.

Método de Davies: Estática	
Clássico	Proposto
Grau de restrição bruto	Grau de restrição
$C = \sum_{i=1}^j C_{p_i} + \sum_{t=1}^{j_a} C_{a_t}$	$R = \sum_{i=1}^j C_{p_i} + \sum_{t=1}^{j_a} C_{a_t}$
Grau de liberdade líquido	Equações dependentes do Sistema Estático
$F_N = \lambda \cdot k - a$	$S_D = \lambda \cdot k - a$
Grau de restrição líquido	Grau de liberdade da Estática
$C_N = C - a$	$S_N = R - a$

Método de Davies: Cinemática	
Clássico	Proposto
Grau de liberdade bruto	Grau de liberdade bruto
$F = \sum_{i=1}^j F_i$	$F = \sum_{i=1}^j F_i$
Grau de restrição líquido	Equações dependentes do Sistema Cinemático
$C_N = \lambda \cdot \nu - m$	$K_D = \lambda \cdot \nu - m$
Grau de liberdade líquido	Grau de liberdade da Cinemática
$F_N = F - a$	$F_N = F - a$

Estes conceitos permitem considerar a inclusão das ações ativas no mecanismo a ser analisado, sem entrar em conflito com as condições e conceitos expostos por Davies (2005) . Na Tabela 7, apresenta-se a comparação das equações entre o Método de Davies Clássico (Adaptado

por Cazangi (2008)) e a proposta dos novos conceitos para o Método de Davies (Anexo B).

A inclusão destes novos conceitos e a implementação das contribuições feitas por Cazangi (2008) , tem como resultado a representação do Método de Davies por meio de blocos como apresentado na seguinte figura:

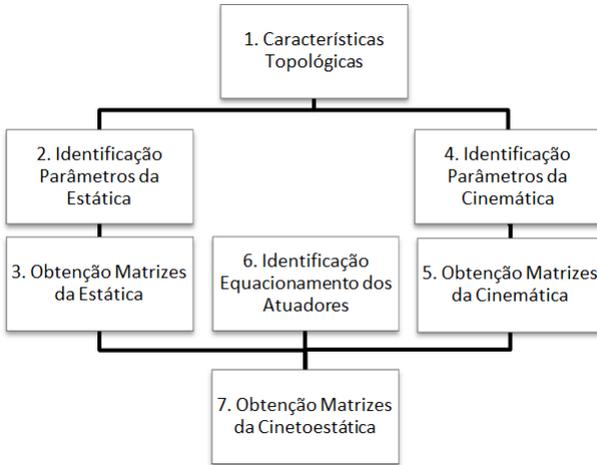


Figura 13: Representação em Blocos do Método de Davies

#### 4.1.1 Características Topológicas

Este bloco faz referência às Etapas 1.a - 1.e (Figura 14), onde são identificadas variáveis topológicas do mecanismo.

As Etapas 1.a - 1.c foram adotadas do Método de Davies Clássico, nas quais é possível identificar as características e a configuração do mecanismo partindo do modelo físico como, por exemplo, o número de elementos  $n$ , o número de juntas  $j$ , o espaço de trabalho  $\lambda$  e a conexão entre elementos e juntas, além de determinar os tipos de juntas e as juntas as quais serão aplicados os atuadores.

A Etapa 1.d é a implementação da contribuição feita por Cazangi (2008), na qual se representa a conexão existente entre elos e juntas por meio da Matriz de Incidência e a Etapa 1.e é uma contribuição própria

que partindo da Matriz de Incidência permite obter uma matriz base denominada Matriz de Incidência-Cortes Escalonada, para a obtenção da Matriz de Cortes-f (Etapa 3.a) ou da Matriz de Circuitos-f (Etapa 5.a).

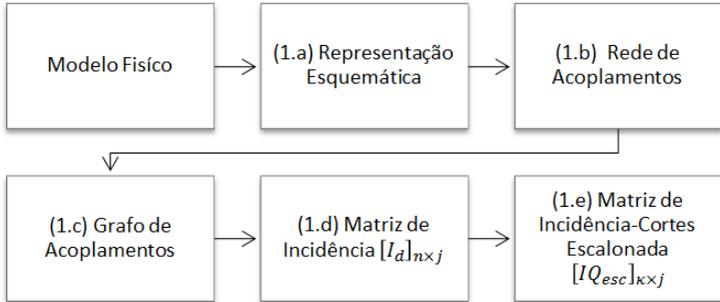


Figura 14: Etapas do Bloco de Características Topológicas

#### 4.1.2 Identificação Parâmetros da Estática

Este bloco faz referência às Etapas 2.a e 2.b (Figura 15), onde são identificadas variáveis geométricas com relação à estática do mecanismo.

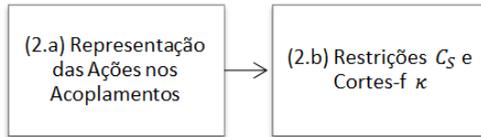


Figura 15: Etapas do Bloco de Identificação Parâmetros da Estática

A Etapa 2.a foi adotada do Método de Davies Clássico, na qual é possível identificar todas as ações que agem sobre o mecanismo tanto as ações ativas  $C_a$  (Número de atuadores  $A_R$  e Número de cargas  $\sigma$ ) quanto as ações passivas  $C_p$ . Também se identificam as heliforças relacionadas aos torques e às reações presentes no mecanismo.

Na Etapa 2.b, encontram-se tanto conceitos adotados do Método de Davies Clássico como é o número de Cortes-f  $\kappa$  presentes no mecanismo quanto a proposta de novos conceitos como o Grau de Restrição  $C_S$  que parte do conceito de Grau de Restrição Bruto  $C$  do Método de

Davies Clássico e acrescenta o conceito de Ações Ativas  $C_a$  presentes no mecanismo determinadas na etapa anterior.

### 4.1.3 Obtenção Matrizes da Estática

Este bloco faz referência às Etapas 3.a e 3.f (Figura 16), onde partindo de dados obtidos dos blocos 1 e 2, são construídas as matrizes necessárias para gerar o Sistema de Equações da Estática do mecanismo.

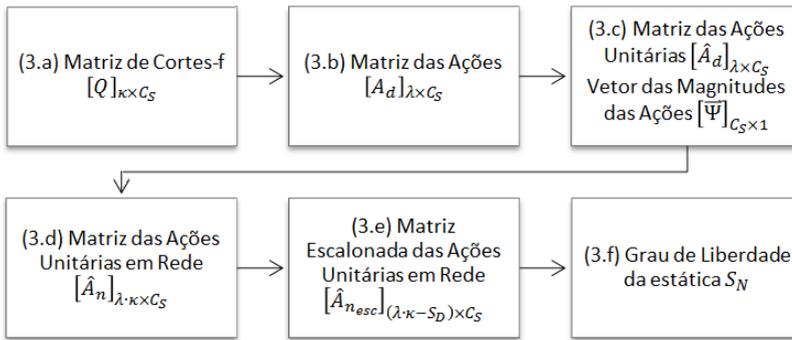


Figura 16: Etapas do Bloco de Obtenção Matrizes da Estática

A Etapa 3.a foi adotada do Método de Davies Clássico, porém não é obtida da mesma forma. A Matriz de Cortes-f é obtida partindo da Matriz de Incidência-Cortes Escalonada proposta na Etapa 1.e, mas permite obter o mesmo resultado.

As Etapas 3.b - 3.e foram adotadas do Método de Davies Clássico e são obtidas da mesma forma como apresentado no Anexo B. Porém na Etapa 3.e é proposto o conceito de Equações Dependentes do Sistema Estático  $S_D$  em substituição do conceito Grau de Liberdade Líquido  $F_N$  que representa no Método de Davies Clássico o número de equações redundantes do sistema estático.

A Etapa 3.f, foi adotada do Método de Davies Clássico, porém não são utilizados os mesmos conceitos. Com relação à equação do Grau de Restrição Líquido  $C_N$  da Tabela 6, foram substituídos os conceitos de Grau de Restrição Bruto  $C$  por Grau de Restrição  $C_S$ , o posto da matriz  $a$  fica em função das Equações Dependentes do Sistema Estático  $S_D$ , e o Grau de Restrição Líquido  $C_N$  se torna o Grau de Liberdade da Estática  $S_N$ .

#### 4.1.4 Identificação Parâmetros da Cinemática

Este bloco faz referência às Etapas 4.a e 4.b (Figura 17), onde são identificadas variáveis geométricas com relação à cinemática do mecanismo.



Figura 17: Etapas do Bloco de Identificação Parâmetros da Cinemática

Estas etapas foram adotadas do Método de Davies Clássico, sendo possível identificar o grau de liberdade de cada uma das juntas do mecanismo, os heligiros relacionados às velocidades angulares e o número de Circuitos- $f$  presentes no mecanismo.

#### 4.1.5 Obtenção Matrizes da Cinemática

Este bloco faz referência às Etapas 5.a e 5.f (Figura 18), onde partindo de dados obtidos dos blocos 1 e 4, são construídas as matrizes necessárias para gerar o Sistema de Equações da Cinemática do mecanismo.

A Etapa 5.a foi adotada do Método de Davies Clássico, porém não é obtida da mesma forma. A Matriz de Circuitos- $f$  é obtida partindo da Matriz de Incidência-Cortes Escalonada proposta na Etapa 1.e, mas permite obter o mesmo resultado.

As Etapas 5.b - 5.e foram adotadas do Método de Davies Clássico e são obtidas da mesma forma como apresentado no Anexo B. Porém na Etapa 5.e é proposto o conceito de Equações Dependentes do Sistema Cinemático  $K_D$  em substituição do conceito Grau de Restrição Líquido  $C_N$  que representa no Método de Davies Clássico o número de equações redundantes do sistema cinemático.

A Etapa 5.f, foi adotada do Método de Davies Clássico, porém não são utilizados os mesmos conceitos. Com relação à equação do Grau de Liberdade Líquido  $F_N$  da Tabela 6, o posto da matriz  $m$  fica em função das Equações Dependentes do Sistema Cinemático  $K_D$  e o conceito de Grau de Liberdade Líquido se torna Grau de Liberdade da

Cinemática, mas continua sendo o mesmo símbolo  $F_N$ .

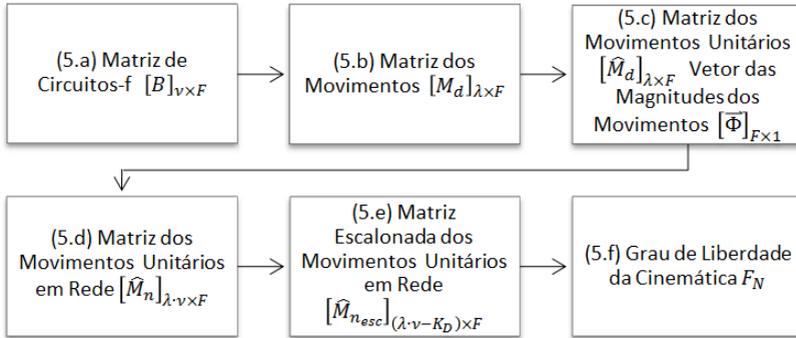


Figura 18: Etapas do Bloco de Obtenção Matrizes da Cinemática

#### 4.1.6 Identificação Equacionamento dos Atuadores

Neste bloco começa a proposta da metodologia para análise cinetoestático. Partindo do relacionamento estabelecido no Capítulo 3, propõe-se esta metodologia (Seção 4.2) que é baseada no Método de Davies, não considera os efeitos dinâmicos dados pela força gravitacional, acelerações, inércias, entre outros, tratando-se apenas da cinemática instantânea e da estática de mecanismos formados por corpos rígidos.

Este é o primeiro bloco relativo à metodologia proposta e faz referência à Etapa 6.a (Figura 19), onde partindo do equacionamento dos atuadores, são isoladas as variáveis da dinâmica e obtidas as equações da cinetoestática do atuador.

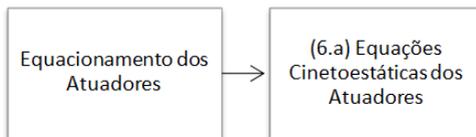


Figura 19: Etapas do Bloco de Identificação Equacionamento dos Atuadores

#### 4.1.7 Obtenção Matrizes da Cinetoestática

Este é o segundo e ultimo bloco relativo à metodologia proposta e faz referência às Etapas 7.a e 7.d (Figura 20), onde partindo de dados obtidos dos blocos 3, 5 e 6, são construídas as matrizes necessárias para gerar o Sistema de Equações da Cinetoestática do mecanismo.

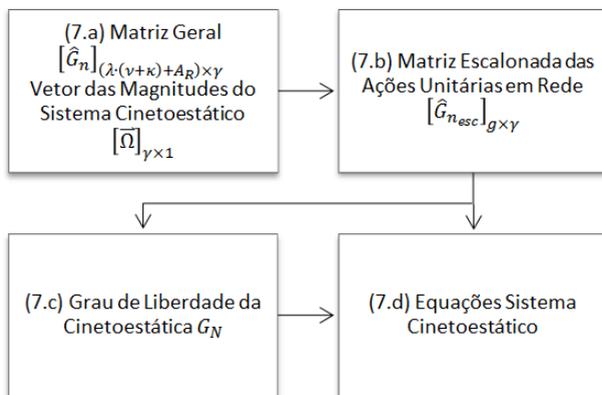


Figura 20: Etapas do Bloco de Obtenção Matrizes da Cinetoestática

Na Etapa 7.a, estabelece-se um relacionamento de forma matricial entre as matrizes das etapas 3.d e 5.e, e o equacionamento cinetoestático dos motores, como apresentado a seguir:

Matriz Geral =

$$\left[ \begin{array}{cccc}
 \textit{Cinematica do} & \vdots & [0] & \vdots & [0] \\
 \textit{Mecanismo} & & & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 [0] & \vdots & \textit{Estática do} & \vdots & [0] \\
 & & \textit{Mecanismo} & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \textit{Cinematica do} & \vdots & \textit{Estática do} & \vdots & \textit{Outras} \\
 \textit{Atuador} & & \textit{Atuador} & & \textit{Variáveis} \\
 & & & & \textit{do Atuador}
 \end{array} \right]$$

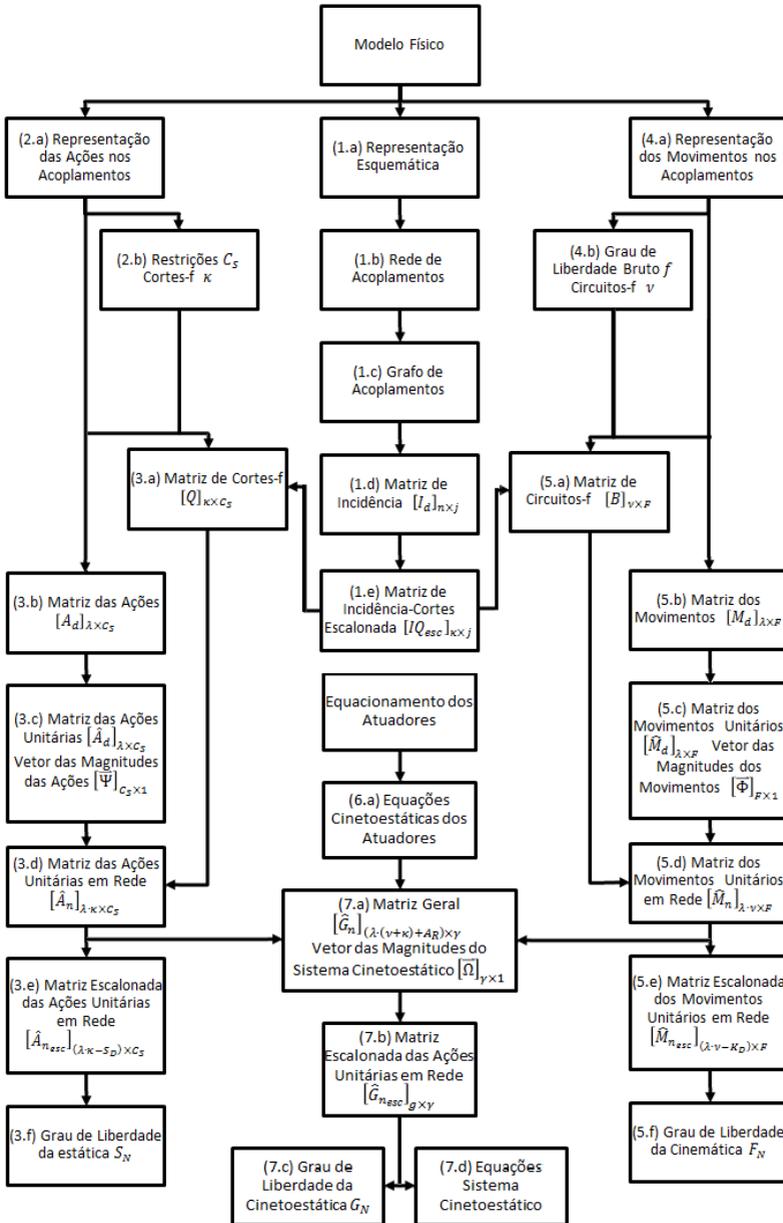


Figura 21: Resumo da Metodologia baseada no Método de Davies

Também, obtém-se o Vetor das Magnitudes do Sistema Cineto-estático que contém as variáveis tanto da estática quanto da cinemática do mecanismo, como apresentado a seguir:

$$\begin{bmatrix} \textit{Variáveis} \\ \textit{Cinetoestática} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{Variáveis} & : & \textit{Variáveis} & : & \textit{Variáveis} \\ \textit{Cinemática} & : & \textit{Estática} & : & \textit{do Atuador} \end{bmatrix}^T$$

E propõe-se o símbolo  $\gamma$  para representar o número de variáveis do sistema cinetoestático.

Na Etapa 7.b é obtido o Sistema de Equações do Sistema Cineto-estático e propõe-se o símbolo  $g$  para enunciar o posto da Matriz Geral Escalonada.

A Etapa 7.c permite conhecer o Grau de Liberdade da Cinetoestática, partindo dos Graus de Liberdade da Estática e da Cinemática.

Na Etapa 7.d são obtidas as Equações do Sistema Cinetoestático que permitem conhecer o comportamento das variáveis tanto de torques quanto de velocidades angular em função das variáveis independentes do sistema as quais são definidas pelo usuário.

Na Figura 21, apresenta-se o fluxograma correspondente a sucessão das etapas expostas anteriormente para implementar a metodologia proposta neste trabalho.

## 4.2 SISTEMA CINETOESTÁTICO

O relacionamento entre os sistemas estático e cinemático de um mecanismo pode ser estabelecido considerando o **equacionamento matemático de comportamento** que rege aos atuadores utilizados para a movimentação do mecanismo, sendo de tipo: Pneumático, Hidráulico, Elétrico, etc, todos apresentam equacionamentos matemáticos que permitem descrever o seu comportamento dinâmico. Porém, considerando que se está trabalhando com a estática e cinemática do mecanismo, é necessário excluir toda variável que pertença à dinâmica do atuador.

### 4.2.1 Identificação Equacionamento dos Atuadores

No caso dos motores elétricos, os quais são os atuadores padrão para o desenvolvimento deste trabalho, apresentam equações características tanto para o comportamento elétrico (Equação (2.5)), quanto para o comportamento mecânico (Equação (2.6)), que podem ser relacionadas mediante a equação de  $T_m$ , sendo o torque do motor (N-m) (Equação (2.3)), e a equação de  $\omega_m$ , sendo a velocidade angular do rotor (rad/s) (Equação (2.4)).

#### ETAPA 6.a:

O comportamento do atuador é considerado de torque estático com relação à tensão aplicada e a velocidade do atuador (Seção 2.2) , pois o **comportamento dinâmico** do atuador não é considerado por se tratar da estática e da cinemática do mecanismo, obtendo a Equação (2.7).

Da Equações (2.7), obtém-se uma expressão final como apresentada na Equação (4.1), sendo para o motor em torque estático (Seção 2.2):

- $T_{m_i}$  o torque do motor aplicado em uma junta  $i$ ,
- $C_{T_i}$  uma constante obtida pela relação  $R_{a_i}/K_{m_i}$ ,
- $C_{V_i}$  uma constante de ganho ( $C_{V_i} = 1$ ),
- $R_{a_i}$  a resistência de armadura do motor aplicado numa junta  $i$ ,
- $K_{m_i}$  a constante de torque do motor aplicado em uma junta  $i$ ,
- $V_i$  a tensão do motor aplicado em uma junta  $i$ ,
- $K_{b_i}$  a constante da força contra eletromotriz do motor aplicado em uma junta  $i$ , e
- $\omega_{m_i}$  a velocidade angular do motor aplicado em uma junta  $i$ ;

$$T_{m_i} \cdot C_{T_i} - V_i \cdot C_{V_i} + K_{b_i} \cdot \omega_{m_i} = 0 \quad (4.1)$$

No caso do exemplo do mecanismo de quatro barras em configuração RSSR (Figura 58), apresentado nas seções anteriores, tem-se a Equação (4.2), pois os parâmetros em questão fazem referência ao

Torque  $T_a$ , a velocidade angular  $\omega_{a_z}$  e à tensão  $V_a$  por ter sido aplicado na junta  $a$ .

$$T_a \cdot C_{T_a} - V_a \cdot C_{V_a} + K_{b_a} \cdot \omega_{a_z} = 0 \quad (4.2)$$

#### 4.2.2 Obtenção Matrizes da Cinetoestática

##### ETAPA 7.a:

Para estabelecer a relação entre os sistemas estático e cinemático do mecanismo, gera-se um sistema de equações representado pela **Matriz Geral**  $[\hat{G}_n]_{(\lambda \cdot (\nu + \kappa) + A_R) \times \gamma}$  (Equação (4.3)), onde  $\gamma$  é o número de variáveis do sistema Cinetoestático, sendo  $\gamma = (F + R + A_R)$ .

Lembrando que  $F$  é o Grau de Liberdade Bruto obtido na análise cinemática,  $R$  é o Grau de Restrição obtido na análise estática, e  $A_R$  é o número de atuadores aplicados ao mecanismo.

$$[\hat{G}_n]_{(\lambda \cdot (\nu + \kappa) + A_R) \times \gamma} = \begin{bmatrix} [\hat{M}_n]_{\lambda \cdot \nu \times F} & \vdots & [0]_{\lambda \cdot \nu \times R} & \vdots & [0]_{\lambda \cdot \nu \times \mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0]_{\lambda \cdot \kappa \times F} & \vdots & [\hat{A}_n]_{\lambda \cdot \kappa \times R} & \vdots & [0]_{\lambda \cdot \kappa \times \mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{b_1} & \vdots & C_{T_1} & \vdots & C_{V_1} \\ K_{b_2} & \vdots & C_{T_2} & \vdots & C_{V_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{b_i} & \vdots & C_{T_i} & \vdots & C_{V_i} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Esta Matriz Geral inclui:

- a Matriz das Ações Unitárias em Rede  $[\hat{A}_n]_{\lambda \cdot \kappa \times C_S}$  (Equação (B.11)), que representa o sistema de equações do sistema estático;
- a Matriz dos Movimentos Unitários em Rede  $[\hat{M}_n]_{\lambda \cdot \nu \times F}$  (Equa-

ção (B.21)), que representa o sistema de equações do sistema cinemático;

- as linhas correspondentes às equações de cada um dos atuadores  $A_{R_i}$  aplicados ao mecanismo, sendo neste caso a Equação (4.2).

Lembrando que  $\lambda$  é o espaço de trabalho,  $\kappa$  é o número de cortes, e  $v$  é o número de circuitos, (Tabela 24).

Para a conformação da Matriz Geral  $\left[\hat{G}_n\right]_{(\lambda \cdot (v + \kappa) + A_R) \times \gamma}$  as constantes relacionadas aos atuadores, têm que ser posicionada segundo a ordem em que foram dispostas as colunas em cada uma das Matrizes das Ações Unitárias em Rede  $\left[\hat{A}_n\right]_{\lambda \cdot \kappa \times C_S}$  (Equação (B.11)) e dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[\hat{M}_n\right]_{\lambda \cdot v \times F}$  (Equação (B.21)) para manter todo como um sistema de equações.

$$\begin{aligned} \left[\vec{\Omega}\right]_{27 \times 1} &= \begin{bmatrix} \omega_{a_z} & \omega_{b_x} & \omega_{b_y} & \omega_{b_z} & \omega_{c_x} & \omega_{c_y} & \omega_{c_z} & \omega_{d_z} & R_{a_x} & \dots \\ \dots & R_{a_y} & R_{a_z} & M_{a_x} & M_{a_y} & R_{b_x} & R_{b_y} & R_{b_z} & R_{c_x} & R_{c_y} & \dots \\ \dots & R_{c_z} & R_{d_x} & R_{d_y} & R_{d_z} & M_{d_x} & M_{d_y} & T_a & T_d & V_a \end{bmatrix}_{27 \times 1}^T \quad (4.4) \end{aligned}$$

No caso do 8R, tem-se uma Matriz Geral  $\left[\hat{G}_n\right]_{25 \times 27}$ , como apresentado na Equação (4.5), que inclui:

- a Matriz das Ações Unitárias em Rede  $\left[\hat{A}_n\right]_{6 \cdot 3 \times 18}$  (Equação (C.10)),
- a Matriz dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[\hat{M}_n\right]_{6 \cdot 1 \times 8}$  (Equação (C.21)),
- a constante  $K_{b_1}$  que é a constante de velocidade do motor aplicado na junta  $a$ , que segundo a disposição das magnitudes do Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetoestático  $\left[\vec{\Omega}\right]_{27 \times 1}$  (Equação (4.4)), tem que ser disposta na posição (25,1), pois os valores para  $\omega_{a_z}$  encontram-se na primeira coluna da Matriz Geral  $\left[\hat{G}_n\right]_{25 \times 27}$ ,

- a constante  $C_{T_1}$  que é a constante de torque do motor aplicado na junta  $a$ , que segundo a disposição das magnitudes do Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetoestático  $\left[\vec{\Omega}\right]_{27 \times 1}$  (Equação (4.4)), tem que ser disposta na posição (25,24), pois os valores para  $T_a$  encontram-se na vigésima quarta coluna da Matriz Geral  $\left[\hat{G}_n\right]_{25 \times 27}$ ,
- e a constante  $C_{V_1}$  que é a constante de ganho do motor aplicado na junta  $a$ , que segundo a disposição das magnitudes do Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetoestático  $\left[\vec{\Omega}\right]_{27 \times 1}$  (Equação (4.4)), tem que ser disposta na posição (25,27), pois os valores para  $V_a$  encontram-se na vigésima sétima coluna da Matriz Geral  $\left[\hat{G}_n\right]_{25 \times 27}$ .

A constante de ganho  $C_{V_1}$  é substituída por 1, pois neste caso não se considera a implementação de um amplificador para o motor.

$$\left[\hat{G}_n\right]_{25 \times 27} = \begin{bmatrix} \left[\hat{M}_n\right]_{6 \times 8} & \vdots & [0]_{6 \times 18} & \vdots & [0]_{6 \times 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0]_{18 \times 8} & \vdots & \left[\hat{A}_n\right]_{18 \times 18} & \vdots & [0]_{18 \times 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{b_1} & \vdots & C_{T_1} & \vdots & 1 \end{bmatrix}_{25 \times 27} \quad (4.5)$$

### ETAPA 7.b:

Determinação de alguns fatores importantes como: as linhas nulas da **Matriz Geral Escalonada**  $\left[\hat{G}_{n_{esc}}\right]_{(m+a+A_R) \times \gamma}$ , que representam as equações dependentes  $S_D$  e  $K_D$  dos sistemas estático e cinemático respetivamente, as linhas não nulas da Matriz Geral Escalonada  $\left[\hat{G}_{n_{esc}}\right]_{(m+a+A_R) \times \gamma}$  ou **posto da matriz  $g$** , que representam as equações independentes do sistema cinetoestático, e aquelas colunas que não pertencem a matriz identidade resultante do escalonamento que representam as variáveis independentes do sistema cinetoestático.

No caso do mecanismo 8R, tem-se que a Matriz Geral Escalonada

$[\hat{G}_{nesc}]_{24 \times 27}$  expressa na Equação (4.6), apresenta: uma variável  $D$  em substituição da expressão  $(b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x - b_x \cdot d_y + b_y \cdot d_x + c_x \cdot d_y - c_y \cdot d_x)$ ; uma linha nula equivalente à equação dependente do sistema estático  $S_D = 1$ .

$$\begin{aligned}
 & [\hat{G}_{nesc}]_{24 \times 27} = \\
 & \left[ \begin{array}{ccc}
 0 & \frac{-C_{T_1} \cdot (b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x)}{K_{b_1} \cdot D} & \frac{1}{K_{b_1}} \\
 -1 & 0 & 0 \\
 \frac{b_x - c_x}{b_y - c_y} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{C_{T_1} \cdot (b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x) \cdot (c_x \cdot d_y - c_y \cdot d_x)}{K_{b_1} \cdot D^2} & \frac{-(c_x \cdot d_y - c_y \cdot d_x)}{K_{b_1} \cdot D} \\
 \frac{b_x - c_x}{b_y - c_y} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{-C_{T_1} \cdot (b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x) \cdot (b_x \cdot d_y - b_y \cdot d_x)}{K_{b_1} \cdot D^2} & \frac{b_x \cdot d_y - b_y \cdot d_x}{K_{b_1} \cdot D} \\
 0 & \frac{-C_{T_1} \cdot (b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x)^2}{K_{b_1} \cdot D^2} & \frac{b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x}{K_{b_1} \cdot D} \\
 0 & \frac{-(b_x - c_x)}{D} & 0 \\
 0 & \frac{-(b_y - c_y)}{D} & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{-(b_x - c_x)}{D} & 0 \\
 0 & \frac{-(b_y - c_y)}{D} & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{-(b_x - c_x)}{D} & 0 \\
 0 & \frac{-(b_y - c_y)}{D} & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{b_x - c_x}{D} & 0 \\
 0 & \frac{b_y - c_y}{D} & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x}{D} & 0
 \end{array} \right]_{24 \times 27}
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

O posto  $g$  da Matriz Geral Escalonada  $[\hat{G}_{nesc}]_{(m+a+A_R) \times \gamma}$ , por ser o número de equações linearmente independentes do sistema cinetoestático, pode ser obtido da Equação (4.7), sendo  $\lambda \cdot \kappa$  o número de linhas total da matriz  $[\hat{A}_n]_{\lambda \cdot \kappa \times C_S}$ ,  $S_D$  o número de equações dependentes do sistema estático,  $\lambda \cdot v$  o número de linhas total da matriz

$[\hat{M}_n]_{\lambda \cdot \kappa \times C_S}$ ,  $K_D$  o número de equações dependentes do sistema cinemático e  $A_R$  o número de atuadores aplicados ao mecanismo.

$$g = m + a + A_R = (\lambda \cdot \nu - K_D) + (\lambda \cdot \kappa - S_D) + A_R \quad (4.7)$$

Obtém-se um posto da matriz de  $g = m + a + A_R = 6 + 17 + 1 = 24$  que é igual ao número de linhas não nulas da Matriz Geral Escalonada  $[\hat{G}_{nesc}]_{24 \times 27}$  (Equação (4.6)), validando a expressão obtida na Equação (4.7).

### ETAPA 7.c:

Do escalonamento da Matriz Geral  $[\hat{G}_n]_{(\lambda \cdot (\nu + \kappa) + A_R) \times \gamma}$  do qual resulta a Matriz Geral Escalonada  $[\hat{G}_{nesc}]_{(m + a + A_R) \times \gamma}$ , é possível determinar o número de variáveis independentes ou grau de liberdade  $G_N$  do sistema cinetoestático o qual deve cumprir com a condição da Equação (4.8), que no caso do RSSR ficaria  $G_N = S_N + F_N = 1 + 2 = 3$ , segundo as Equações (C.13) e (C.24).

No 8R, têm-se três colunas não pertencente à Matriz Identidade  $[I]_{24}$  resultante do escalonamento (Equação (4.6)), que representa as variáveis independentes do sistema sendo para o 8R a velocidade angular  $\omega_{c_x}$  da junta  $c$  no eixo  $x$ , o torque de carga  $T_d$  aplicado na junta  $d$  e a tensão  $V_a$  de alimentação do motor  $A_{R_1}$  aplicado na junta  $a$ , o que indica que se têm três variáveis independentes no sistema cinetoestático sendo  $G_N = (F + R + A_R) - g = \gamma - g = 27 - 24 = 3$ , validando a expressão obtida na Equação (4.8).

$$G_N = (F + R + A_R) - g = \gamma - g = S_N + F_N \quad (4.8)$$

### ETAPA 7.d:

A partir da Matriz Geral Escalonada  $[\hat{G}_{nesc}]_{g \times \gamma}$  é possível obter em função das variáveis independentes do sistema, as equações para qualquer parâmetro do sistema cinetoestático, sejam torques, momentos, restrições de força, velocidades angulares ou lineares, sendo torques e velocidades angulares nas juntas dos atuadores e das cargas, os parâmetros de maior importância para a solução do sistema cinetoestático.

Para o 8R, precisam-se obter as expressões correspondentes aos

torques e às velocidades angulares do motor e da carga aplicados ao mecanismo, sendo  $T_a$ ,  $T_d$ ,  $\omega_{a_z}$  e  $\omega_{d_z}$  respetivamente. Para isto, trazem-se os dados da primeira linha da Matriz Geral Escalonada  $\left[\hat{G}_{nesc}\right]_{24 \times 27}$ , com a finalidade de gerar a equação correspondente à velocidade angular  $\omega_{a_z}$  do motor, obtendo a expressão exposta na Equação (4.9), a qual fica em função do valor do torque  $T_d$  da carga e da tensão  $V_a$  aplicada ao motor e uma variável  $D$  em substituição da expressão  $(b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x - b_x \cdot d_y + b_y \cdot d_x + c_x \cdot d_y - c_y \cdot d_x)$ .

$$\omega_{a_z} = \frac{C_{T_1} \cdot (b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x)}{K_{b_1} \cdot D} \cdot T_d - \frac{1}{K_{b_1}} \cdot V_a \quad (4.9)$$

Trazem-se os dados da oitava linha da Matriz Geral Escalonada  $\left[\hat{G}_{nesc}\right]_{24 \times 27}$ , com fim de gerar a equação correspondente à velocidade angular  $\omega_{d_z}$  da carga, obtendo a expressão exposta na Equação (4.10), a qual fica em função do valor do torque  $T_d$  da carga e da tensão  $V_a$  aplicada ao motor e uma variável  $D$  em substituição da expressão  $(b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x - b_x \cdot d_y + b_y \cdot d_x + c_x \cdot d_y - c_y \cdot d_x)$ .

$$\omega_{d_z} = \frac{C_{T_1} \cdot (b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x)^2}{K_{b_1} \cdot D^2} \cdot T_d - \frac{b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x}{K_{b_1} \cdot D} \cdot V_a \quad (4.10)$$

Trazem-se os dados da vigésima quarta linha da Matriz Geral Escalonada  $\left[\hat{G}_{nesc}\right]_{24 \times 27}$ , com fim de gerar a equação correspondente ao torque do motor, obtendo a expressão exposta na Equação (4.11), a qual fica em função do valor do torque  $T_d$  da carga e uma variável  $D$  em substituição da expressão  $(b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x - b_x \cdot d_y + b_y \cdot d_x + c_x \cdot d_y - c_y \cdot d_x)$ .

$$T_a = \frac{b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x}{D} \cdot T_d \quad (4.11)$$

Da Matriz Geral Escalonada  $\left[\hat{G}_{nesc}\right]_{g \times \gamma}$  são obtidas equações resultantes em função do torque  $T_d$  e da velocidade angular  $\omega_{d_z}$  apre-

sentados pela carga, pois serão as informações fornecidas pelo usuário. No caso do 8R, tem-se que isolar da Equação (4.10) a variável de tensão de entrada ao motor  $V_a$ , obtendo a Equação (4.12).

$$V_a = \frac{C_{T1} \cdot (b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x)}{D} \cdot T_d - \frac{K_{b1} \cdot D}{b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x} \cdot \omega_{dz} \quad (4.12)$$

A Equação (4.12) deve ser substituída na Equação (4.9), com o objetivo de deixá-la em função da velocidade angular  $\omega_{dz}$  apresentada pela carga, como apresentado na Equação (4.13).

$$\omega_{az} = \frac{D}{b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x} \cdot \omega_{dz} \quad (4.13)$$

Do anterior, é possível observar que os resultados obtidos nas Equações (4.11) e (4.13) as quais foram deduzidas da Matriz Geral Escalonada  $[\hat{G}_{nesc}]_{24 \times 27}$  da Equação (4.6), correspondem aos resultados entregues pelos sistemas de equações da estática e da cinemática correspondentes à Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede  $[\hat{A}_{nesc}]_{17 \times 18}$  (Equação (C.11)) e à Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede  $[\hat{M}_{nesc}]_{6 \times 8}$  (Equação (C.22)) respetivamente, o qual permite validar a metodologia apresentada nesta seção para a vinculação dos sistemas estático e cinemático em um só.

### 4.3 PARÂMETROS DO MECANISMO A PARTIR DO GRAU DE LIBERDADE $F_N$

Da Seção 3, considerando-se a expansão de todas as juntas com grau de liberdade maior que um e a substituição das mesmas por juntas com grau de liberdade unitário, bem como as condições expostas na obtenção da Equação (3.15), que é substituída com a Equação (B.16) na Equação (3.9). Isolando o número de juntas  $j$ , obtém-se a relação apresentada na Equação (4.14), onde é possível obter o número de juntas  $j$  necessárias para atingir a condições como: Grau de liberdade

na cinemática  $F_N$  ou Mobilidade do mecanismo, um espaço de trabalho  $\lambda$  determinado e um número arbitrário de elos  $n$ , sendo o número de juntas  $j$  pertencente aos números naturais,  $j \in \mathbb{N}$ .

$$j = \frac{\lambda \cdot (n - 1) - A_R}{(\lambda - 1)} = \frac{\lambda \cdot (n - 1) - F_N}{(\lambda - 1)} \quad (4.14)$$

Para exemplificar este relacionamento, apresentam-se alguns casos na Tabela 29. No caso do mecanismo de RSSR, não é possível aplicar a Equação (4.14), pois não apresenta expansão das juntas com graus de liberdade maiores a um, entanto para o mecanismo de 8R que apresenta um grau de liberdade na cinemática de  $F_N = 2$ , em um espaço de trabalho de  $\lambda = 6$  e com um número de elos  $n = 8$  é possível aplicar a Equação (4.14), obtendo da substituição dos parâmetros  $F_N$ ,  $\lambda$  e  $n$  na Equação (4.14) um número de juntas como apresentado na Equação (4.15), obtendo o número exato de juntas que apresenta o mecanismo de 8R da Figura 10.

$$j = \frac{\lambda \cdot (n - 1) - F_N}{(\lambda - 1)} = \frac{6 \cdot (8 - 1) - 2}{(6 - 1)} = 8 \quad (4.15)$$

## 5 ESTUDO DE CASOS

Para atingir ao objetivo principal de efetuar a análise cineto-estática de alguns mecanismos visando à independência de torque e velocidade angular, precisa-se determinar o grau de liberdade na cinemática  $F_N$  ou mobilidade do sistema mínimo necessário para atingir ao requerimento e o espaço de trabalho em que vai agir o mecanismo.

Sendo a carga aplicada ao mecanismo, uma carga única  $\sigma = 1$  (junta do manipulador serial) e considerando que as variáveis  $S_D$  e  $K_D$  são nulas (Capítulo 3), tem-se um Grau de Liberdade da Estática segundo a Equação (3.15) de  $S_N = \sigma = 1$ .

Sabendo que o sistema precisa no mínimo de duas várias independentes, referentes à velocidade angular, tem-se um Grau de Liberdade da Cinemática de  $F_N \geq 2$ , que segundo a Equação (3.14) implica um número de atuadores de  $A_R \geq 2$ .

Tabela 8: Configuração de Mecanismos para  $F_N = 2$ .

Espaço de Trabalho ( $\lambda$ )	Grau Liberdade Cinemático ( $F_N$ )	Elos ( $n$ )	Juntas ( $j$ )
2	2	5	6
2	2	6	8
2	2	7	10
3	2	5	5
3	2	7	8
6	2	8	8
6	2	13	14

Tendo um Grau de Liberdade da Estática  $S_N = 1$ , tem-se que só um dos torques será a variável independente, e os outros torques serão as variáveis dependentes. No entanto, na cinemática, tendo um Grau de Liberdade  $F_N \geq 2$ , tem-se que duas ou mais das velocidades angulares dos acoplamentos ativos serão independentes e as outras velocidades

angulares serão dependentes.

Para determinar um mecanismo que permita cumprir com a condição de  $F_N \geq 2$ , tem-se a Equação (4.14), na qual supondo parâmetros como o espaço de trabalho  $\lambda$ , número de elementos  $n$  e Grau de Liberdade da Cinemática  $F_N = 2$ , obtêm-se possíveis configurações como apresentado na Tabela 8.

Da Tabela 8, obtêm-se as características de mecanismos conhecidos como: Cinco Barras 5R, apresentando  $n = 5$  e  $j = 5$ , num espaço de trabalho  $\lambda = 3$ ; Planetário com casca, apresentando  $n = 5$  e  $j = 6$ , num espaço de trabalho  $\lambda = 2$ ; PGT Ravigneaux, apresentando  $n = 7$  e  $j = 10$ , num espaço de trabalho  $\lambda = 2$ .

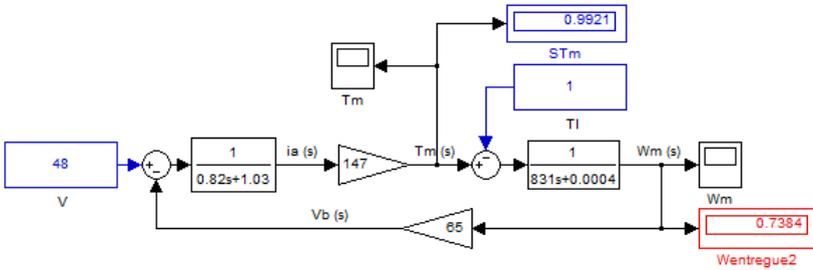


Figura 22: Diagrama de Blocos do Motor CC com  $V = 48$  V e  $T_l = 1$  N · m.

Para os casos de estudo, será apresentado o comportamento do mecanismo de Cinco Barras com as características topológicas da Tabela 10, e o comportamento do mecanismo Planetário Modificado, que é uma variação do mecanismo Planetário convencional (Tsai 2001), com as características topológicas da Tabela 16.

Porém, antes de estudar o comportamento dos mecanismos, precisa-se de conhecer o comportamento do Motor Maxon EC 60 (Tabela 28). Isto é feito por meio da simulação do diagrama de fluxo da Figura 7 em uma ferramenta de prototipagem matemática.

Substituindo os dados de tensão  $V = 48$  V e  $T_l = 1$  N · m, como apresentado na Figura 22, obtêm-se que a velocidade máxima em estado estável é  $\omega_m = 0,7384$  rad/s, para um torque de reação  $T_m = 0,9921$  N · m. O erro presente no torque de reação, faz com que a implementação de um controlador PID seja essencial para eliminar o erro presente no sistema, tendo o torque de reação  $T_m$  igual ao torque de carga  $T_l$ .

## 5.1 CINCO BARRAS

O mecanismo de Cinco Barras, possui juntas com um grau de liberdade  $f = 1$ , sejam rotativas ou prismáticas e quatro possíveis combinações, como apresentado na Tabela 9, limitadas ao uso de não mais de duas juntas prismáticas, pois aqueles mecanismos que apresentam muitas juntas prismáticas podem experimentar fricção excessiva (Tsai 2001). Este mecanismo possui as características apresentadas na Tabela 10, as quais são proporcionadas à ferramenta do Capítulo D na seção D.2.

Tabela 9: Combinações de juntas para mecanismo em configuração 5R

Juntas				
1	2	3	4	5
R	R	R	R	R
R	R	R	R	P
R	R	R	P	P
R	R	P	R	P

Este tipo de mecanismo, devido a sua configuração, é utilizado em aplicações onde a geração de trajetória planar é a prioridade, pois apresenta elementos flutuantes que permitem obter uma dada posição numa área de trabalho determinada como apresentado na Figura 23, sendo o elemento 1, o elemento fixo, os elementos de entrada, os elementos 2 e 5, e os elementos de saída, os elementos 3 e 4.

Tabela 10: Características principais do mecanismo em configuração 5R.

	Símbolo	Valor
Elos	$n$	5
Juntas	$j$	5
Espaço de Trabalho	$\lambda$	3
Cortes-f	$\kappa$	4
Grau de Liberdade no modelo de estática	$S_N$	1
Circuitos-f	$v$	1
Grau de Liberdade na Cinemática	$F_N$	2

No caso de aplicação à junta de um robô manipulador serial, o mecanismo apresentado na Figura 23, tem que ser disposto de modo que: o elemento 1, seja o elemento fixo (um elemento do robô manipulador serial), os elementos 3 e 5, sejam os elementos de entrada, e o elemento 2, seja o elemento de saída (outro elemento do robô manipulador serial).

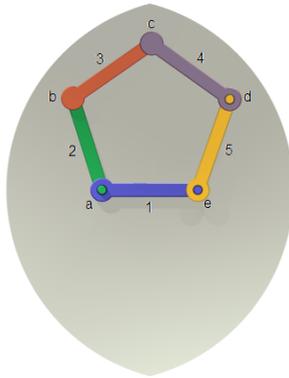


Figura 23: Área de trabalho para mecanismo em configuração 5R.

Desta forma, configura-se um modelo de simulação em uma ferramenta de prototipagem matemática, como apresentado na Figura 24 e com as características do Apêndice B.1. Este modelo possui:

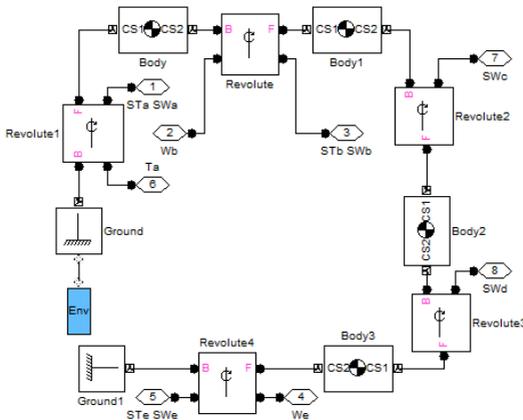


Figura 24: Configuração do 5R para simulação

- 4 elementos livres (Bodies) e 1 elemento fixo (Grounds).
- 5 juntas de revolução, nas quais são aplicadas as ações dos atuadores e obtidas as medições dos sensores da Figura 25.

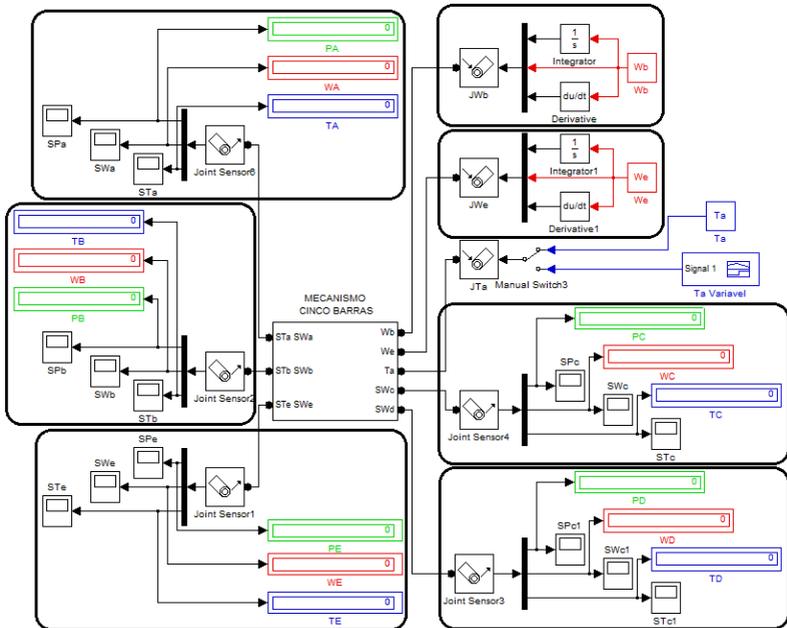


Figura 25: Configuração de Medição do 5R para simulação do controle de velocidade angular..

### 5.1.1 Caso sem Motores

No caso sem motores, ou seja, sem considerar a dinâmica dos motores, configura-se inicialmente um modelo de medições para variáveis independentes de velocidade angular em  $\omega_b$  e  $\omega_e$ , e o torque em  $T_a$ , ou seja que as juntas atuadas serão controladas por velocidade angular e os torques de reação serão dependentes do torque da carga, como apresentado na Figura 25. Este modelo possui:

- 3 constantes correspondentes aos valores de velocidade angular ("Wb" e "We") e de torque ("Ta").

- 1 gerador de sinal ("Ta variável") correspondente ao sinal de torque da carga variável.
- 1 atuador gerador de torque ("JTa") correspondente à carga.
- 2 atuadores geradores de velocidade angular ("JWb" e "JWe").
- 5 sensores (Joint Sensors) para a obtenção de Posição Angular, Velocidade Angular e Torque.

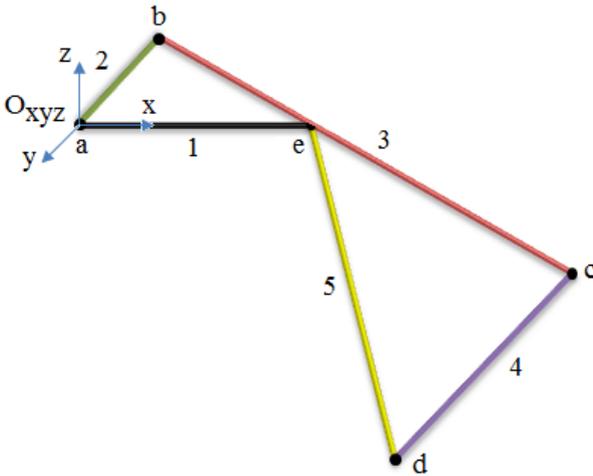


Figura 26: Posição do 5R para  $\omega_b = -0,7384$  rad/s,  $\omega_e = -0,29$  rad/s e  $t = 10$  s.

Para conhecer o comportamento do mecanismo de 5R por meio da simulação, substituem-se as variáveis "Wb", "We" e "Ta" (Figura 25), pelos valores para as quais se deseja conhecer o comportamento do mecanismo. Baseado nos resultados da Figura 22, vão-se substituir pelos valores:

- $\omega_b = -0,7384$  rad/s
- $\omega_e = -0,29$  rad/s
- $T_a = 0,835$  N · m

Simulando com os valores acima e para um tempo real de  $t = 10$  s, o mecanismo segue uma trajetória determinada até chegar a uma

posição final, como apresentado na Figura 26. Neste instante de tempo o mecanismo apresenta os ângulos de posições dos corpos e as coordenadas de posição das juntas, como apresentado na Tabela 11.

Tabela 11: Posição dos corpos do 5R para  $\omega_b = -0,7384$  rad/s,  $\omega_e = -0,29$  rad/s e  $t = 10$  s.

Corpo	Âng S ( <i>graus</i> )	Âng R ( <i>graus</i> )	CP ( <i>cm</i> )	$x_1$ ( <i>cm</i> )	$y_1$ ( <i>cm</i> )	$x_2$ ( <i>cm</i> )	$y_2$ ( <i>cm</i> )
1	0,000	0,000	4,00	4,000	0,000	0,000	0,000
2	-42,440	47,560	2,00	0,000	0,000	1,350	1,476
3	-63,072	-29,545	8,25	1,350	1,476	8,524	-2,590
4	35,281	-133,754	4,47	8,524	-2,590	5,431	-5,821
5	-95,926	-256,158	6,00	5,431	-5,821	4,000	0,000

Âng S: Ângulo obtido da simulação.

Âng R: Ângulo do corpo em relação ao eixo  $x$ .

CP: Comprimento do corpo.

Tendo as informações das posições das juntas (Tabela 11), entregam-se à ferramenta desenvolvida do Capítulo D na seção D.3. Os dados a ser proporcionados na seção D.4, são:

- "ATUAÇÃO"  $\rightarrow [ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 ]^T$
- "EIXO"  $\rightarrow [ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 ]^T$

Para obter a matriz de incidência que deve ser entregue na seção D.5, precisa-se efetuar as quatro primeiras etapas da Metodologia.

Tabela 12: Identificação dos acoplamentos do mecanismo em configuração 5R

Junta	Elementos	Tipo	Função
a	1,2	Rotativa	Carga
b	2,3	Rotativa	Reação (Atuador)
c	3,4	Rotativa	Transmissão
d	4,5	Rotativa	Transmissão
e	5,1	Rotativa	Reação (Atuador)

**ETAPA 1.a:**

Tendo o modelo físico do mecanismo (Figura 23), simplifica-se a uma representação esquemática como apresentado na Figura 26. Sendo todas as juntas rotativas como apresentado na Tabela 12, e os corpos 2, 3, 4 e 5 móveis, o corpo 1 fixo e o sistema inercial  $O_{xyz}$  definido na junta  $a$ .

**ETAPA 1.b:**

Determinados estes parâmetros, forma-se a rede de acoplamentos como apresentado na Figura (27a).

**ETAPA 1.c:**

Constroi-se o grafo de acoplamentos  $G_c$  aplicando a Teoria de Grafos (Seção A.7) como apresentado na Figura (27b). Também é preciso determinar a corda deste grafo, sendo a aresta referente à junta  $e$ .

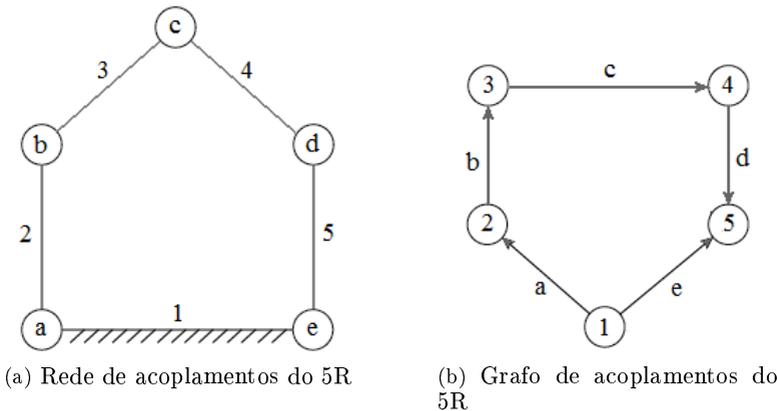


Figura 27: Acoplamentos

**ETAPA 1.d:**

Para formação da Matriz de Incidência  $[I_d]_{n \times j}$ , é preciso atender aos parâmetros estabelecidos na Equação (B.1). Na Equação (5.1) apresenta-se a Matriz de Incidência  $[I_d]_{5 \times 5}$  correspondente ao grafo de acoplamentos do mecanismo 5R.

Obtida a Matriz de Incidência, só fica faltando proporcionar à ferramenta os dados dos motores, que serão os mesmos apresentados na seção D.6.

$$[Id]_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}_{5 \times 5} \quad (5.1)$$

Uma vez ingressadas as informações na ferramenta, pode ser obtida a Matriz Geral Escalonada  $[\hat{G}_{nesc}]_{17 \times 20}$ , como apresentada na Figura 28. A obtenção desta matriz faz referencia à ETAPA 7.b da Metodologia (Figura 21).

MATRIZ FINAL ACOPLADA																				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.3992e-04	0.0155	-0.0098
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.7033e-04	-0.0154	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.4666e-04	0.0069	-0.0101
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.0844e-04	-0.0070	0.0045
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.0780e-04	0	-0.0154
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1367	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1428	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1367	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1428	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.1367	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0.1428	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0.1367	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.1428	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-0.1367	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.1428	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1.5712	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1.5801	0	0

Figura 28: Matriz Geral Escalonada do 5R para  $\omega_b = -0,7384$  rad/s,  $\omega_e = -0,29$  rad/s e  $t = 10$  s.

A partir da Matriz Geral Escalonada  $[\hat{G}_{nesc}]_{17 \times 20}$  é possível obter em função das variáveis  $T_e$ ,  $V_b$  e  $V_e$ , as equações para  $T_a$ ,  $T_b$ ,  $\omega_a$ ,  $\omega_b$ ,  $\omega_c$ ,  $\omega_d$  e  $\omega_e$ .

$$\begin{bmatrix} \vec{\Omega} \end{bmatrix}_{20 \times 1} = \begin{bmatrix} \omega_a & \omega_b & \omega_c & \omega_d & \omega_e & R_{a_x} & R_{a_y} & R_{b_x} & R_{b_y} & R_{c_x} & \dots \\ \dots & R_{c_y} & R_{d_x} & R_{d_y} & R_{e_x} & R_{e_y} & T_a & T_b & T_e & V_b & V_e \end{bmatrix}_{20 \times 1}^T \quad (5.2)$$

Para isto, isolam-se os dados da primeira linha da Matriz Geral Escalonada (Figura 28) e multiplicam-se pelo Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetoestático  $\begin{bmatrix} \vec{\Omega} \end{bmatrix}_{20 \times 1}$  (Equação (5.2)):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2,3992 \cdot 10^{-04} & \dots \\ \dots & 0,0155 & -0,0098 & \dots \end{bmatrix}_{1 \times 20} \cdot \begin{bmatrix} \omega_a & \omega_b & \omega_c & \omega_d & \omega_e & R_{a_x} & \dots \\ \dots & R_{a_y} & R_{b_x} & R_{b_y} & R_{c_x} & R_{c_y} & R_{d_x} & R_{d_y} & R_{e_x} & R_{e_y} & T_a & \dots \\ \dots & T_b & T_e & V_b & V_e \end{bmatrix}_{20 \times 1}^T = 0 \quad (5.3)$$

Da Equação (5.26), gerar-se a equação correspondente à velocidade angular  $\omega_a$  da carga, obtendo a expressão exposta na Equação (5.4), a qual fica em função do valor do torque  $T_e$  do motor  $A_{R_2}$  e das tensões  $V_b$  e  $V_e$  aplicadas aos motores  $A_{R_1}$  e  $A_{R_2}$  respetivamente.

$$\omega_a = 2,3992 \cdot 10^{-04} \cdot T_e - 0,0155 \cdot V_b + 0,0098 \cdot V_e \quad (5.4)$$

Dos dados da segunda linha da Matriz Geral Escalonada (Figura 28) e multiplicando pelo Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetoestático  $\begin{bmatrix} \vec{\Omega} \end{bmatrix}_{20 \times 1}$  (Equação (5.2)) como feito para a primeira linha, gera-se a equação correspondente à velocidade angular  $\omega_b$  do motor  $A_{R_1}$ , obtendo a expressão exposta na Equação (5.5).

$$\omega_b = -1,7033 \cdot 10^{-04} \cdot T_e + 0,0154 \cdot V_b \quad (5.5)$$

Dos dados da terceira linha da Matriz Geral Escalonada (Figura 28) e multiplicando pelo Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetoestático  $\begin{bmatrix} \vec{\Omega} \end{bmatrix}_{20 \times 1}$  (Equação (5.2)) como feito para a primeira linha, gera-se a equação correspondente à velocidade angular  $\omega_c$ , como consequência da ação dos motores  $A_{R_1}$  e  $A_{R_2}$ , obtendo a expressão exposta na Equação (5.6).

$$\omega_c = 1,4666 \cdot 10^{-04} \cdot T_e - 0,0069 \cdot V_b + 0,0101 \cdot V_e \quad (5.6)$$

Dos dados da quarta linha da Matriz Geral Escalonada (Figura 28) e multiplicando pelo Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetoeestático  $\left[\vec{\Omega}\right]_{20 \times 1}$  (Equação (5.2)) como feito para a primeira linha, gera-se a equação correspondente à velocidade angular  $\omega_d$ , como consequência da ação dos motores  $A_{R_1}$  e  $A_{R_2}$ , obtendo a expressão exposta na Equação (5.7).

$$\omega_d = -1,0844 \cdot 10^{-04} \cdot T_e + 0,0070 \cdot V_b - 0,0045 \cdot V_e \quad (5.7)$$

Dos dados da quinta linha da Matriz Geral Escalonada (Figura 28) e multiplicando pelo Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetoeestático  $\left[\vec{\Omega}\right]_{20 \times 1}$  (Equação (5.2)) como feito para a primeira linha, gera-se a equação correspondente à velocidade angular  $\omega_e$  do motor  $A_{R_2}$ , obtendo a expressão exposta na Equação (5.8).

$$\omega_e = 1,0780 \cdot 10^{-04} \cdot T_e + 0,0154 \cdot V_e \quad (5.8)$$

Dos dados da décima sexta linha da Matriz Geral Escalonada (Figura 28) e multiplicando pelo Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetoeestático  $\left[\vec{\Omega}\right]_{20 \times 1}$  (Equação (5.2)) como feito para a primeira linha, gera-se a equação correspondente ao torque  $T_a$  da carga, obtendo a expressão exposta na Equação (5.9).

$$T_a = -1,5712 \cdot T_e \quad (5.9)$$

Dos dados da décima sétima linha da Matriz Geral Escalonada (Figura 28) e multiplicando pelo Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetoeestático  $\left[\vec{\Omega}\right]_{20 \times 1}$  (Equação (5.2)) como feito para a primeira linha, gera-se a equação correspondente ao torque  $T_b$  do motor  $mu_1$ , obtendo a expressão exposta na Equação (5.10).

$$T_b = -1,5801 \cdot T_e \quad (5.10)$$

Para substituir os valores  $\omega_b = -0,7384$ ,  $\omega_e = -0,29$  rad/s e  $T_a = 0,835$  N · m, que são os valores de entrada, precisa-se isolar as variáveis independentes  $T_e$ ,  $V_b$  e  $V_e$  das Equações (5.5), (5.8) e (5.9), ficando em função das variáveis  $\omega_b$ ,  $\omega_e$  e  $T_a$ , e obtendo as Equações (5.11), (5.12) e (5.13).

$$T_e = \frac{T_a}{-1,5712} \quad (5.11)$$

$$V_b = \frac{1,5712 \cdot \omega_b - 1,7033 \cdot 10^{-04} \cdot T_a}{0,0242} \quad (5.12)$$

$$V_e = \frac{1,5712 \cdot \omega_e + 1,0780 \cdot 10^{-04} \cdot T_a}{0,0242} \quad (5.13)$$

Substituindo os valores  $\omega_b = -0,7384$  rad/s,  $\omega_e = -0,29$  rad/se  $T_a = 0,835$ , nas Equações (5.11), (5.12) e (5.13), obtêm-se os valores teóricos para  $T_e$ ,  $V_b$  e  $V_e$ , e substituindo estes nas Equações (5.4), (5.6), (5.7) e (5.10), obtêm-se os valores teóricos para  $\omega_a$ ,  $\omega_c$ ,  $\omega_d$  e  $T_b$ , como apresentado na Tabela 13.

Tabela 13: Simulação comportamento do 5R para  $\omega_b = -0,7384$  rad/s,  $\omega_e = -0,29$  rad/s e  $t = 10$  s.

Junta	Âng S ( <i>graus</i> )	Simulação			Teoria	
		$\omega_i$ ( <i>rad/s</i> )	$T_i$ ( <i>N · m</i> )	$\omega_i$ ( <i>rad/s</i> )	$T_i$ ( <i>N · m</i> )	$V_i$ (V)
a	-42,44	0,558	0,835	0,559	0,835	-
b	-63,07	-0,738	0,840	-0,738	0,840	-47,95
c	35,28	0,140	0	0,141	-	-
d	-95,93	-0,249	0	-0,250	-	-
e	-166,2	-0,290	-0,531	-0,290	-0,531	-18,82

Âng S: Ângulo obtido da simulação.

Os valores de simulação apresentados na Tabela 13, são os valores correspondentes ao instante de tempo real de simulação de  $t = 10$  s da ferramenta de prototipagem matemática. Observa-se que se apresenta uma diferença constante de  $\pm 0,001$  entre os valores calculados na teoria e os obtidos na simulação para  $\omega_a$ ,  $\omega_c$  e  $\omega_d$ . Entretanto, com as equações obtidas da Matriz Escalonada Geral, não é possível conhecer o comportamento do mecanismo 5R para outro instante de tempo, devido a variação constante da posição das juntas do mecanismo, portanto, também não é possível estabelecer uma relação entre os resultados teóricos e os resultados práticos (simulação) a ser obtidos.

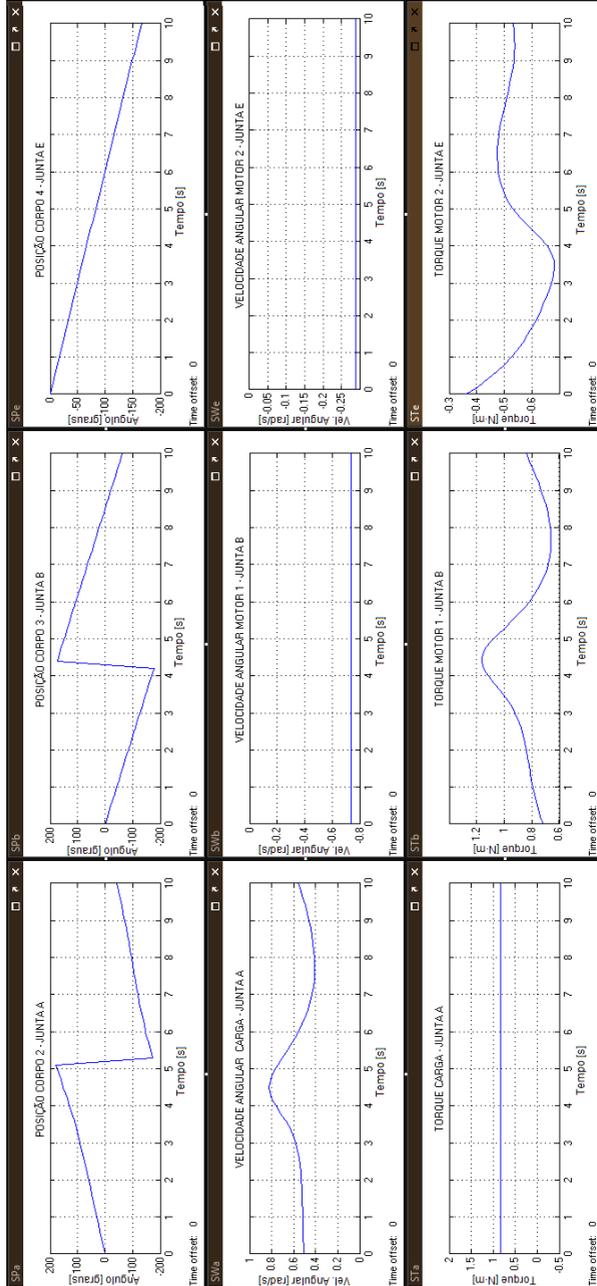


Figura 29: Comportamento do 5R para  $\omega_b$ ,  $\omega_e$  e  $T_a$  constantes.

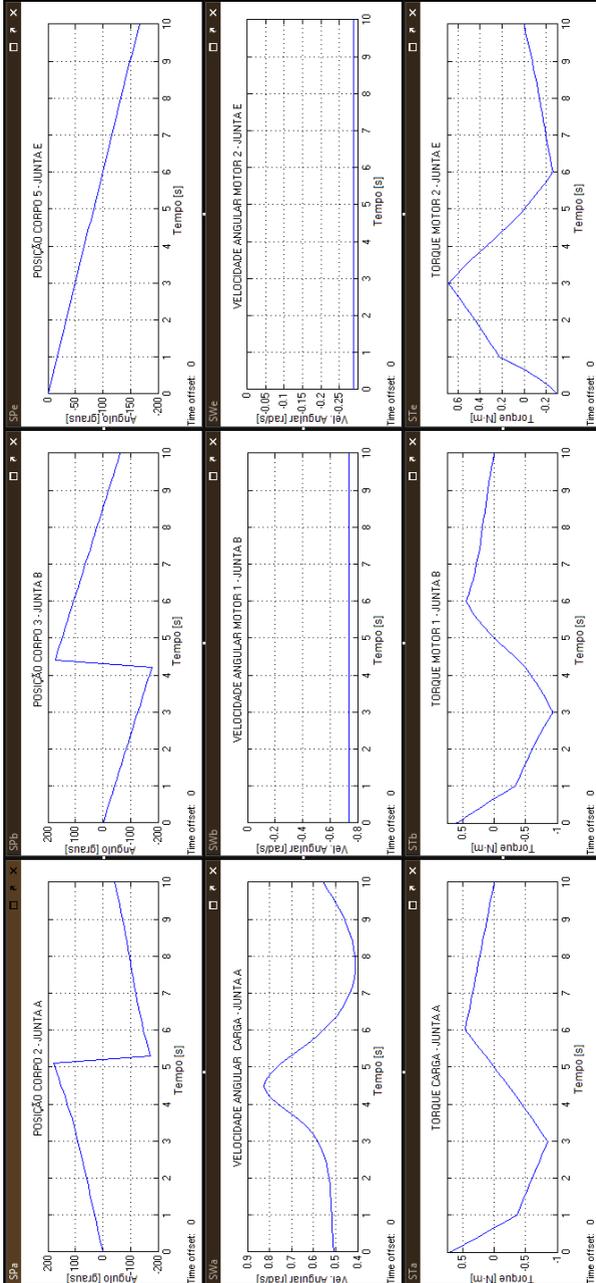


Figura 30: Comportamento do 5R para  $\omega_b$  e  $\omega_e$  constantes e  $T_a$  variável.

Pela mesma razão de variação das posições, o mecanismo não apresenta valores constantes durante a simulação para a velocidade angular da carga  $\omega_a$  e os torques de reação  $T_b$  e  $T_e$ , como apresentado na Figura 29, nos quadrantes (2, 1), (3, 2) e (3, 3) respectivamente. Os quadrantes (1, 1), (1, 2) e (1, 3) são os ângulos de posição para os corpos 2, 3 e 5, e os quadrantes (2, 2), (2, 3) e (3, 1) são os valores de  $\omega_b$ ,  $\omega_c$  e  $T_a$  respectivamente.

Porém, ainda tendo aquela variação na velocidade angular da carga  $\omega_a$ , e aplicando um torque de carga variável, o comportamento da velocidade fica invariável, como apresentado na Figura 30.

### 5.1.2 Caso com Motores

No caso com motores é considerada a dinâmica dos motores, configura-se um modelo de medições para variáveis independentes de velocidade angular em  $\omega_b$  e  $\omega_e$ , e o torque em  $T_a$ , ou seja que as juntas atuadas serão controladas por velocidade angular e os torques de reação serão dependentes do torque da carga, como apresentado na Figura 31 e com as características do Apêndice B.3. Este modelo possui:

- 3 constantes correspondentes aos valores de velocidade angular ("Wb" e "We") e de torque ("Ta").
- 1 gerador de sinal ("Ta variável") correspondente ao sinal de torque da carga variável.
- 1 atuador gerador de torque ("JTa") correspondente à carga.
- 2 atuadores geradores de velocidade angular ("JWb" e "JWe").
- 5 sensores (Joint Sensors) para a obtenção de Posição Angular, Velocidade Angular e Torque.
- 2 modelos de motores (Figura 8).

Para conhecer o comportamento do mecanismo de 5R com motores por meio da simulação, substituem-se as variáveis "Wb", "We" e "Ta" (Figura 31), pelos valores para as quais se deseja conhecer o comportamento do mecanismo, neste caso serão os mesmos dados do caso sem motores (Seção 5.1.1).

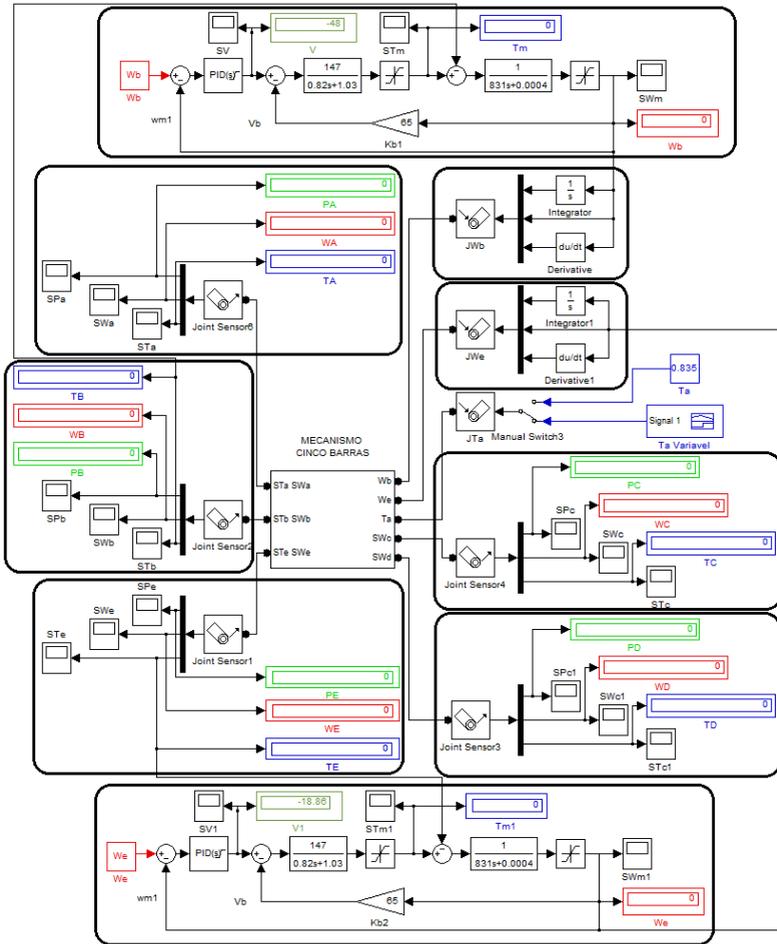


Figura 31: Configuração de Medição do 5R com motores para simulação do controle de velocidade angular..

Simulando com os valores da seção 5.1.1 e para um tempo real de  $t = 10s$ , o mecanismo segue uma trajetória determinada até chegar a uma posição final, como apresentado na Figura 32. Neste instante de tempo o mecanismo apresenta os ângulos de posições dos corpos e as coordenadas de posição das juntas, como apresentado na Tabela 14.

Tendo as posições das juntas (Tabela 14), entregam-se à ferramenta desenvolvida do Capítulo D na seção D.3. Os dados a ser pro-

porcionados na seção D.4 e na seção D.5, serão os mesmos da seção 5.1.1.

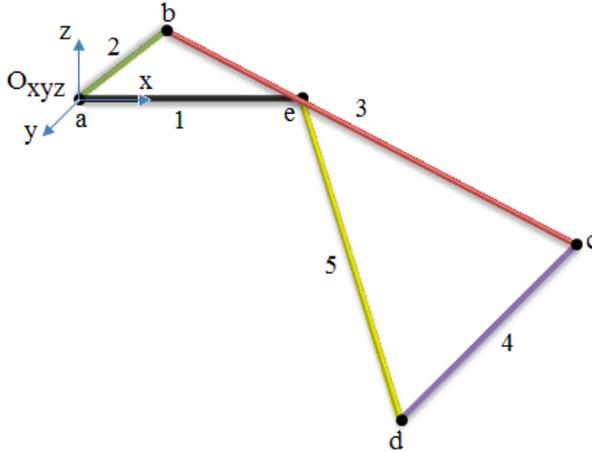


Figura 32: Posição do 5R com motores para  $\omega_b = -0,7384$  rad/s,  $\omega_e = -0,29$  rad/s e  $t = 10$  s.

Uma vez ingressadas as informações na ferramenta, pode ser obtida a Matriz Geral Escalonada  $[\hat{G}_{nesc}]_{17 \times 20}$ , como apresentada na Figura 33. A obtenção desta matriz faz referencia à ETAPA 7.b da Metodologia (Figura 21).

Tabela 14: Posição dos corpos do 5R com motores para  $\omega_b = -0,7384$  rad/s,  $\omega_e = -0,29$  rad/s e  $t = 10$  s.

Corpo	Âng S ( <i>graus</i> )	Âng R ( <i>graus</i> )	CP ( <i>cm</i> )	$x_1$ ( <i>cm</i> )	$y_1$ ( <i>cm</i> )	$x_2$ ( <i>cm</i> )	$y_2$ ( <i>cm</i> )
1	0,00	0,00	4,00	4,000	0,000	0,000	0,000
2	-52,79	37,21	2,00	0,000	0,000	1,593	1,210
3	-50,64	-27,46	8,25	1,593	1,210	8,910	-2,592
4	31,64	-135,3	4,47	8,910	-2,592	5,731	-5,738
5	-91,40	-253,2	6,00	5,731	-5,738	4,000	0,000

Âng S: Ângulo obtido da simulação.

Âng R: Ângulo do corpo em relação ao eixo  $x$ .

CP: Comprimento do corpo.

MATRIZ FINAL ACOPLADA																				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.2503e-04	0.0149	-0.0100
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.5976e-04	-0.0154	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.3902e-04	0.0068	-0.0097
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9.6489e-05	-0.0063	0.0044
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.0780e-04	0	-0.0154
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1342	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1328	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1342	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1328	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.1342	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0.1328	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0.1342	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.1328	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-0.1342	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.1328	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1.5313	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1.4821	0	0

Figura 33: Matriz Geral Escalonada do 5R com motores para  $\omega_b = -0,7384$  rad/s,  $\omega_e = -0,29$  rad/s e  $t = 10$  s.

A partir da Matriz Geral Escalonada  $[\hat{G}_{n_{esc}}]_{17 \times 20}$  é possível obter em função das variáveis  $T_e$ ,  $V_b$  e  $V_e$ , as equações para  $T_a$ ,  $T_b$ ,  $\omega_a$ ,  $\omega_b$ ,  $\omega_c$ ,  $\omega_d$  e  $\omega_e$ , do mesmo jeito que na seção 5.1.1, obtendo as Equações (5.4), (5.5), (5.6), (5.7), (5.8), (5.9) e (5.10) .

$$\omega_a = 2,2503 \cdot 10^{-04} \cdot T_e - 0,0149 \cdot V_b + 0,01 \cdot V_e \quad (5.14)$$

$$\omega_b = -1,5976 \cdot 10^{-04} \cdot T_e + 0,0154 \cdot V_b \quad (5.15)$$

$$\omega_c = 1,3902 \cdot 10^{-04} \cdot T_e - 0,0068 \cdot V_b + 0,0097 \cdot V_e \quad (5.16)$$

$$\omega_d = -0,96489 - 04 \cdot T_e + 0,0063 \cdot V_b - 0,0044 \cdot V_e \quad (5.17)$$

$$\omega_e = 1,0780 \cdot 10^{-04} \cdot T_e + 0,0154 \cdot V_e \quad (5.18)$$

$$T_a = -1,5313 \cdot T_e \quad (5.19)$$

$$T_b = -1,4821 \cdot T_e \quad (5.20)$$

Para substituir os valores  $\omega_b = -0,7384$  rad/s,  $\omega_e = -0,29$  rad/s e  $T_a = 0,835$  N · m, que são os valores de entrada, precisa-se isolar as variáveis independentes  $T_e$ ,  $V_b$  e  $V_e$  das Equações (5.15), (5.18) e (5.19), ficando em função das variáveis  $\omega_b$ ,  $\omega_e$  e  $T_a$ , e obtendo as Equações (5.21), (5.22) e (5.23).

$$T_e = \frac{T_a}{-1,5313} \quad (5.21)$$

$$V_b = \frac{1,5313 \cdot \omega_b - 1,5976 \cdot 10^{-04} \cdot T_a}{0,0236} \quad (5.22)$$

$$V_e = \frac{1,5313 \cdot \omega_e + 1,0780 \cdot 10^{-04} \cdot T_a}{0,0236} \quad (5.23)$$

Substituindo os valores  $\omega_b = -0,7384$ ,  $\omega_e = -0,29$  e  $T_a = 0,835$ , nas Equações (5.21), (5.22) e (5.23), obtêm-se os valores teóricos para  $T_e$ ,  $V_b$  e  $V_e$ , e substituindo estes nas Equações (5.14), (5.16), (5.17) e (5.20), obtêm-se os valores teóricos para  $\omega_a$ ,  $\omega_c$ ,  $\omega_d$  e  $T_b$ , como apresentado na Tabela 15.

Tabela 15: Simulação comportamento do 5R com motores para  $\omega_b = -0,7384$  rad/s,  $\omega_e = -0,29$  rad/s e  $t = 10$  s.

Junta	Âng S ( <i>graus</i> )	Simulação			Teoria	
		$\omega_i$ ( <i>rad/s</i> )	$T_i$ ( <i>N · m</i> )	$\omega_i$ ( <i>rad/s</i> )	$T_i$ ( <i>N · m</i> )	$V_i$ (V)
a	-52,79	0,5251	0,835	0,5344	0,835	-
b	-50,64	-0,7384	0,808	-0,7384	0,7832	-48,51
c	31,64	0,1437	0	0,1472	-	-
d	-91,40	-0,2204	0	-0,2227	-	-
e	-163,2	-0,290	-0,545	-0,290	-0,5417	-18,83

Âng S: Ângulo obtido da simulação.

Os valores de simulação apresentados na Tabela 13, são os valores correspondentes ao instante de tempo real de simulação de  $t = 10$  s da ferramenta de prototipagem matemática. Observa-se que neste caso, não se apresenta uma diferença constante entre os valores calculados na teoria e os obtidos na simulação para  $\omega_a$ ,  $\omega_c$  e  $\omega_d$ .

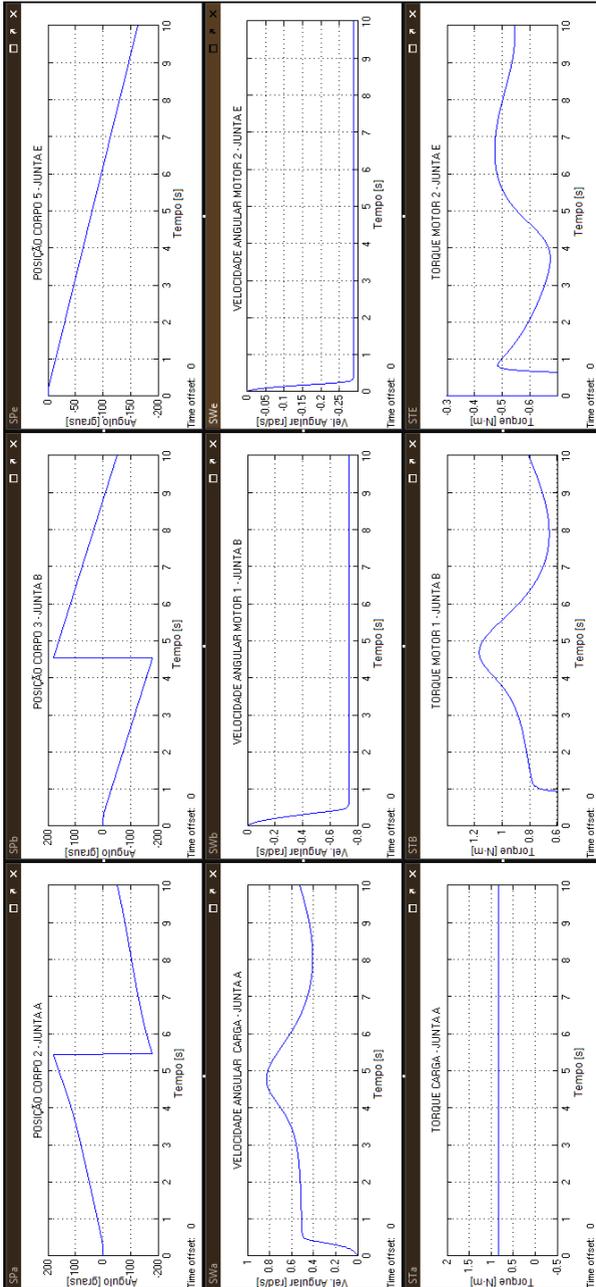


Figura 34: Comportamento do 5R com motores para  $\omega_b$ ,  $\omega_e$  e  $T_a$  constantes.

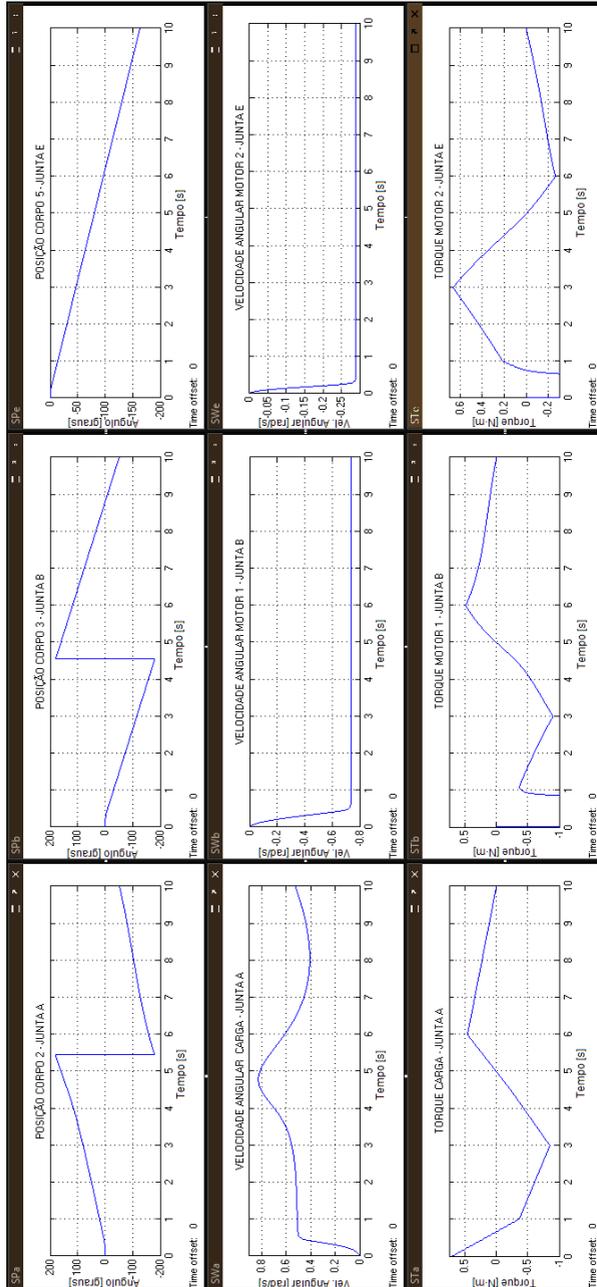


Figura 35: Comportamento do 5R com motores para  $\omega_b$  e  $\omega_e$  constantes e  $T_a$  variável.

Com as equações obtidas da Matriz Escalonada Geral, não é possível conhecer o comportamento do mecanismo 5R com motores para outro instante de tempo, devido à variação constante da posição das juntas do mecanismo, portanto, também não é possível estabelecer uma relação entre os resultados teóricos e os resultados práticos (simulação).

Pela mesma razão de variação das posições, o mecanismo do mesmo jeito que no caso sem motores, não apresenta valores constantes durante a simulação para a velocidade angular da carga  $\omega_a$  e os torques de reação  $T_b$  e  $T_e$ , como apresentado na Figura 34, nos quadrantes (2, 1), (3, 2) e (3, 3) respectivamente. Os quadrantes (1, 1), (1, 2) e (1, 3) são os ângulos de posição para os corpos 2, 3 e 5, e os quadrantes (2, 2), (2, 3) e (3, 1) são os valores de  $\omega_b$ ,  $\omega_c$  e  $T_a$  respectivamente.

Porém, ainda tendo aquela variação na velocidade angular da carga  $\omega_a$ , e aplicando um torque de carga variável, o comportamento da velocidade fica invariável, como apresentado na Figura 35.

Comparando as reações de torque dos motores (sinal azul) com os torques requeridos nas juntas (sinal amarelo), pode-se observar que os motores conseguem atingir os torques necessários, como apresentado na Figura 36. Sendo os quadrantes superiores os correspondentes aos torques de reação para torque de carga constante, e os quadrantes inferiores os correspondentes aos torques de reação para torque de carga variável.

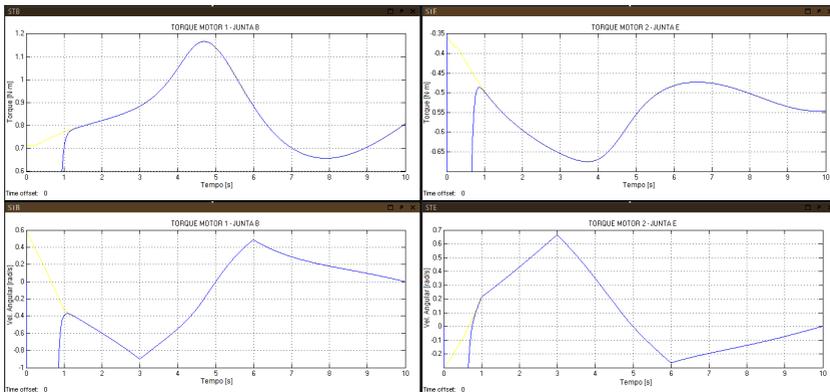


Figura 36: Torque de Reação dos Motores vs Torque Requerido na Junta.

### 5.1.3 Análise de Resultados

Comparando os resultados obtidos nos dois casos para o 5R, inicialmente se observa a diferença de posição do mecanismo entre o caso sem motores e o caso com motores, como apresentado na Figura 37.

Esta diferença se apresenta ao considerar a dinâmica do motor na simulação, portanto, no mesmo tempo real de simulação ( $t = 10\text{ s}$ ), não se consegue atingir a mesma posição do caso sem motores. Esta diferença faz também com que o modelo cinetoestático do mecanismo seja variável em cada instante de tempo, pelo que não é feita a simulação para o caso de controle de torque em um dos motores e controle de velocidade angular no outro motor.

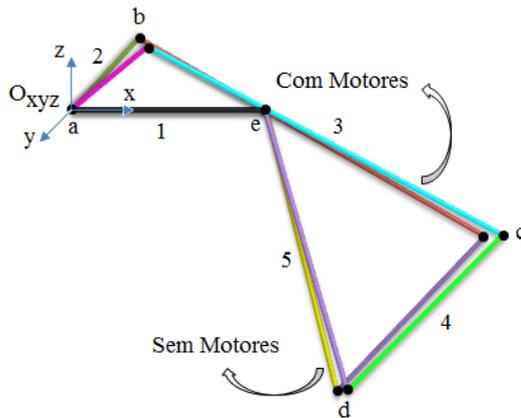


Figura 37: Comparação de posição nos casos sem motores e com motores.

Com relação às respostas da simulação para os casos de variáveis de entrada  $\omega_b$ ,  $\omega_e$  e  $T_a$  constantes, como apresentado na Figura 38, observa-se que o mecanismo no caso com motores (sinal azul), apresenta um atraso nas respostas devido à dinâmica do motor, apresentando as respostas na velocidade angular da carga  $\omega_a$  e os torques de reação  $T_b$  e  $T_c$  similares ao caso sem motores, entanto, não é possível determinar com exatidão o comportamento destas variáveis a partir da metodologia.

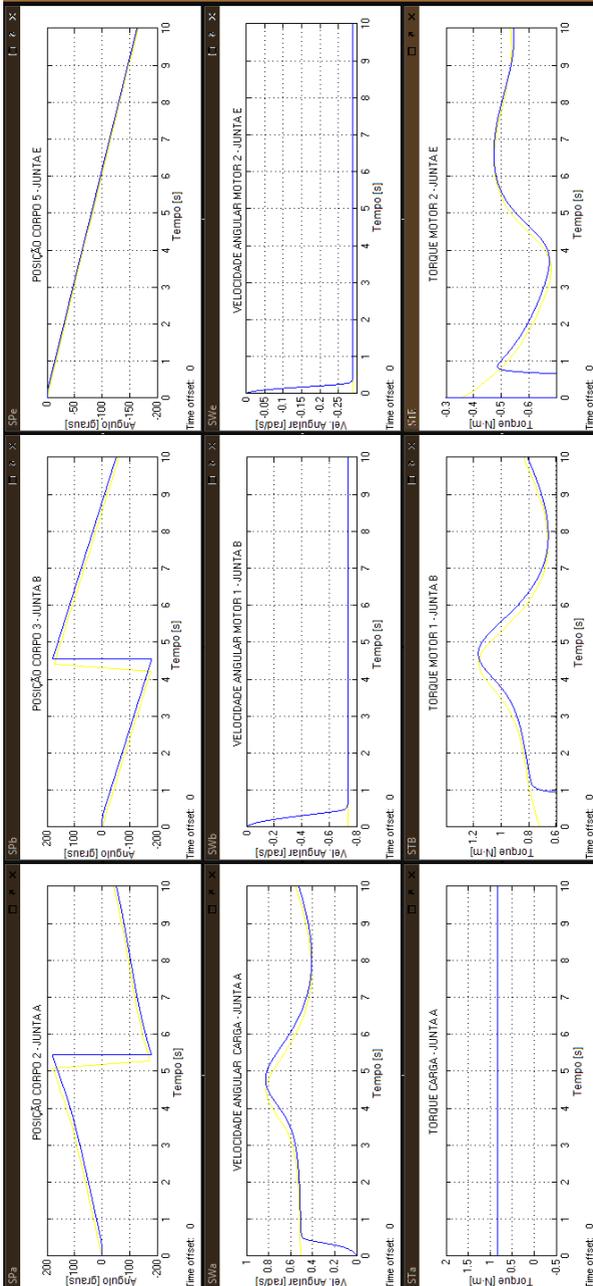


Figura 38: Comparação de resultados do 5R para  $\omega_b$ ,  $\omega_e$  e  $T_a$  constantes.

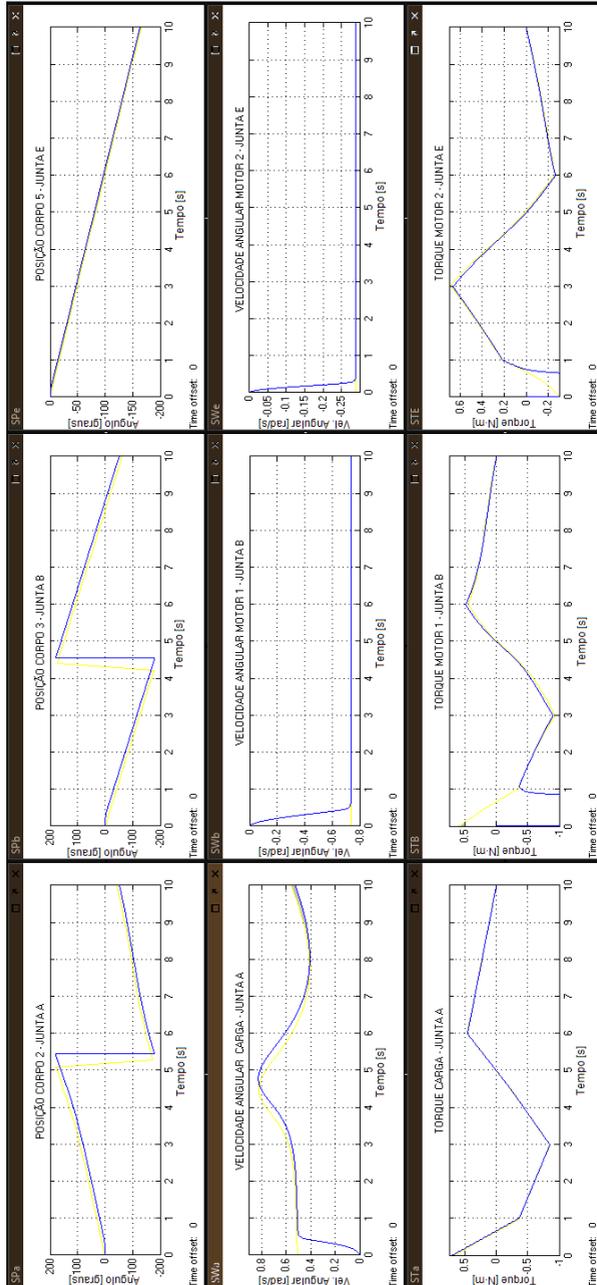


Figura 39: Comparação de resultados do 5R para  $\omega_b$  e  $\omega_e$  constantes e  $T_a$  variável.

Com relação às respostas da simulação para os casos de variáveis de entrada  $\omega_b$  e  $\omega_e$  constantes e  $T_a$  variável, como apresentado na Figura 39, observa-se um atraso na resposta da velocidade angular da carga  $\omega_a$  do mesmo jeito da Figura 38, entanto, os torques de reação  $T_b$  e  $T_c$  não apresentam atraso significativo, devido a mesma variação de torque da carga.

## 5.2 PLANETÁRIO MODIFICADO

O mecanismo Planetário Modificado ou PM, é uma variação do mecanismo planetário convencional (Tsai 2001), ao qual foi acrescentado uma engrenagem de saída como apresentado na Figura 40. Esta variação foi feita com o propósito de obter a saída da coroa, como saída para a junta do robô manipulador serial e de aplicar a ação dos motores na junta rotacional do sol e no "*carrier*", sem interferir com a saída do mecanismo, além de acrescentar um grau de liberdade ao sistema. Este mecanismo possui as características apresentadas na Tabela 16, as quais são proporcionadas à ferramenta do Capítulo D na seção D.2.

Tabela 16: Características principais do mecanismo PM.

	Simbolo	Valor
Elos	$n$	6
Juntas	$j$	8
Espaço de Trabalho	$\lambda$	2
Cortes-f	$\kappa$	5
Grau de Liberdade no Modelo de Estática	$S_N$	1
Circuitos-f	$v$	3
Grau de Liberdade na Cinemática	$F_N$	2

Este tipo de mecanismo, devido a sua configuração é utilizado em aplicações onde a transmissão de potência é a prioridade e pode ser configurado segundo as necessidades do usuário, fixando algum dos elementos do mecanismo.



Figura 40: Aparência Mecanismo PM.

### 5.2.1 Caso sem Motores

Para conhecer o comportamento do PM no caso sem motores ou seja sem considerar a dinâmica dos motores, configura-se inicialmente um modelo de medições para variáveis independentes de velocidade angular em  $\omega_a$  e  $\omega_c$ , e o torque em  $T_b$ , ou seja que as juntas atuadas serão controladas por velocidade angular e os torques de reação serão dependentes do torque da carga, como apresentado na Figura 41 e com as características do Apêndice B.2. Este modelo possui:

- A representação do mecanismo planetário ("Planetary Gear").
- 1 engrenagem correspondente à saída do mecanismo planetário modificado ("Simple Gear").
- 1 atuador gerador de torque ("Torque Actuator2") correspondente à carga.
- 2 atuadores geradores de velocidade angular ("Motion Actuator2" e "Motion Actuator3").
- 3 sensores (Motion Sensor) para a obtenção de velocidade angular.
- 4 sensores (Torque Sensor) para a obtenção de torque.
- 3 constantes correspondentes aos valores de velocidade angular ("Wa" e "Wc") e de torque ("Tb").
- 2 constantes nulas correspondentes às acelerações.
- 3 geradores de sinal (WSSb) correspondentes aos sinais de torque da carga variável e velocidades angulares variáveis.

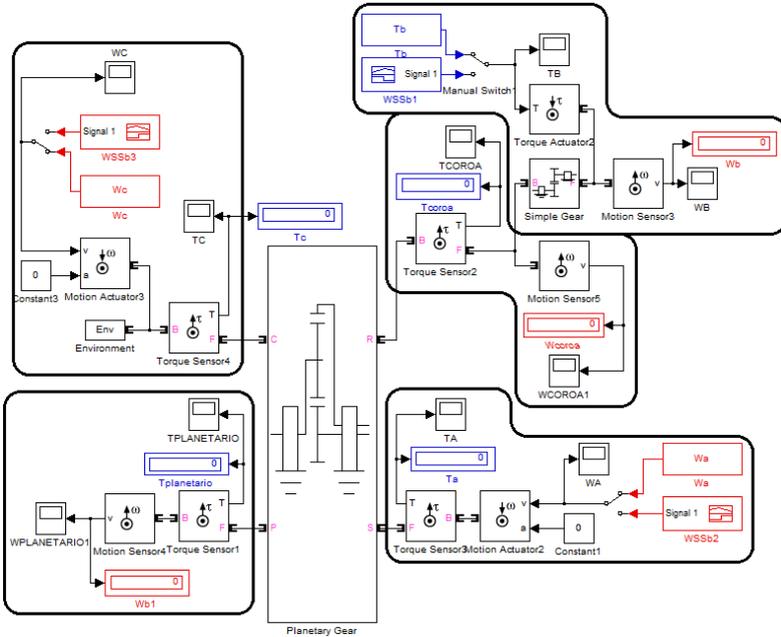


Figura 41: Configuração de Medição do PM para simulação do controle de velocidade angular.

Para conhecer o comportamento do mecanismo PM por meio da simulação, substituem-se as variáveis "Wa", "Wc" e "Tb" (Figura 41), pelos valores para as quais se deseja conhecer o comportamento do mecanismo. Baseado nos resultados da Figura 22, vão-se substituir pelos valores:

- $\omega_a = 0,738 \text{ rad/s}$
- $\omega_c = 0,738 \text{ rad/s}$
- $T_b = 0,5 \text{ N} \cdot \text{m}$

As juntas do mecanismo são dispostas como apresentado na Tabela 17. Simulando com os valores acima e para um tempo real de  $t = 10 \text{ s}$ , observa-se que as juntas não mudam de posição durante a simulação. Portanto, para qualquer instante de tempo ou variáveis de entrada, as juntas ficaram nas coordenadas iniciais.

Tabela 17: Posição das juntas do PM.

Junta	$x$	$y$	$z$
1 (a)	0,00	0,00	0,00
2 (b)	0,24	0,00	0,00
3 (c)	0,00	0,00	0,00
4 (d)	0,08	0,00	0,00
5 (e)	0,16	0,00	0,00
6 (f)	0,18	0,00	0,00
7 (g)	0,12	0,00	0,00
8 (h)	0,00	0,00	0,00

Com as posições das juntas (Tabela 17), entregam-se à ferramenta desenvolvida do Capítulo D na seção D.3. Os dados a ser proporcionados na seção D.4, são:

- "ATUAÇÃO"  $\rightarrow [ 1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ]^T$
- "EIXO"  $\rightarrow [ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 ]^T$

Para obter a matriz de incidência que deve ser entregue na seção D.5, precisa-se efetuar as quatro primeiras etapas da Metodologia.

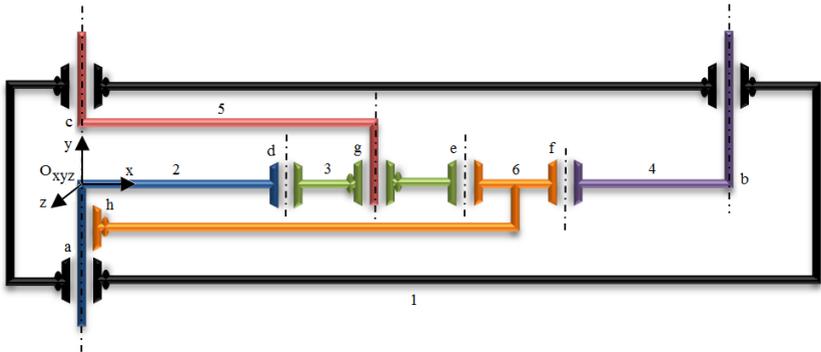


Figura 42: Representação Esquemática do PM.

### ETAPA 1.a:

Tendo o modelo físico do mecanismo (Figura 40), simplifica-se a uma representação esquemática como apresentado na Figura 42. Sendo as juntas  $d$ ,  $e$  e  $f$  de engrenagem e as juntas  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $g$  e  $h$  rotativas como apresentado na Tabela 18, e os corpos 2, 3, 4, 5 e 6 móveis, o

corpo 1 fixo e o sistema inercial  $O_{xyz}$  definido na junta  $a$ .

**ETAPA 1.b:**

Determinados estes parâmetros, forma-se a rede de acoplamentos como apresentado na Figura (43a), onde as juntas de engrenagem são apresentadas de cor cinza e as rotativas de cor branca.

Tabela 18: Identificação dos acoplamentos do mecanismo PM

Junta	Elementos	Tipo	Função
a	1,2	Rotativa	Reação (Atuador)
b	1,4	Rotativa	Carga
c	1,5	Rotativa	Reação (Atuador)
d	2,3	Engrenagem	Transmissão
e	3,6	Engrenagem	Transmissão
f	4,6	Engrenagem	Transmissão
g	3,5	Rotativa	Transmissão
h	1,6	Rotativa	Transmissão

**ETAPA 1.c:**

Constroi-se o grafo de acoplamentos  $G_c$  aplicando a Teoria de Grafos (Seção A.7) como apresentado na Figura (43b), onde as arestas pertencentes as juntas de engrenagem são apresentadas por meio de linhas pontilhadas. Também é preciso determinar as cordas deste grafo, sendo as arestas referentes à junta  $f$ ,  $g$  e  $h$  referente ao circuito externo.

**ETAPA 1.d:**

Para formação da Matriz de Incidência  $[I_d]_{n \times j}$ , é preciso atender aos parâmetros estabelecidos na Equação (B.1). Na Equação (5.24) apresenta-se a Matriz de Incidência  $[I_d]_{6 \times 8}$  correspondente ao grafo de acoplamentos do mecanismo PM.

$$[I_d]_{6 \times 8} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{6 \times 8} \quad (5.24)$$

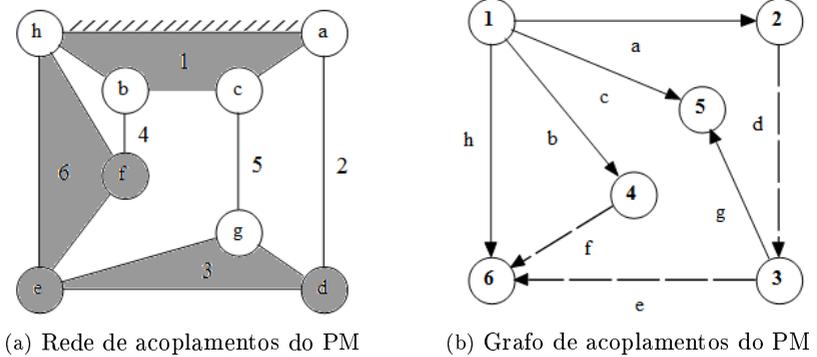


Figura 43: Acoplamentos

Obtida a Matriz de Incidência, só fica faltando proporcionar à ferramenta os dados dos motores, que serão os mesmos apresentados na seção D.6.

Uma vez ingressadas as informações na ferramenta, pode ser obtida a Matriz Geral Escalonada  $[\hat{G}_{nesc}]_{18 \times 21}$ , como apresentada na Figura 44. A obtenção desta matriz faz referência à ETAPA 7.b da Metodologia (Figura 21).

Esta matriz descreve o comportamento cinetoestático do mecanismo PM para qualquer instante de tempo e variáveis de entrada ( $\omega_a$ ,  $\omega_c$  e  $T_b$ ), devido a que as posições das juntas não variam com o tempo.

MATRIZ FINAL ACOPLADA

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.5932e-05	-0.0154	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.3899e-04	-0.0231	0.0692
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.0780e-04	0	-0.0154
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4.3119e-04	0.0462	-0.0462
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.1559e-04	-0.0231	0.0231
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-7.1865e-04	0.0308	-0.0923
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.8746e-04	-0.0308	0.0308
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.7966e-04	0.0077	-0.0231
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0417	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0370	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0833	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.0417	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-0.0417	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0.0370	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.0833	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0.0046	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0.3333	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-0.2222	0

Figura 44: Matriz Geral Escalonada do PM.



Dos dados da terceira linha da Matriz Geral Escalonada (Figura 44) e multiplicando pelo Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetostático  $\begin{bmatrix} \vec{\Omega} \end{bmatrix}_{21 \times 1}$  (Equação (5.25)) como feito para a primeira linha, gera-se a equação correspondente à velocidade angular  $\omega_c$  do motor  $A_{R_2}$ , obtendo a expressão exposta na Equação (5.29).

$$\omega_c = 1,0780 \cdot 10^{-04} \cdot T_c + 0,0154 \cdot V_c \quad (5.29)$$

Dos dados da quarta linha da Matriz Geral Escalonada (Figura 44) e multiplicando pelo Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetostático  $\begin{bmatrix} \vec{\Omega} \end{bmatrix}_{21 \times 1}$  (Equação (5.25)) como feito para a primeira linha, gera-se a equação correspondente à velocidade angular  $\omega_d$ , como consequência da ação do motor  $A_{R_1}$ , obtendo a expressão exposta na Equação (5.30).

$$\omega_d = 4,3119 \cdot 10^{-04} \cdot T_c - 0,0462 \cdot V_a + 0,0462 \cdot V_c \quad (5.30)$$

Dos dados da quinta linha da Matriz Geral Escalonada (Figura 44) e multiplicando pelo Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetostático  $\begin{bmatrix} \vec{\Omega} \end{bmatrix}_{21 \times 1}$  (Equação (5.25)) como feito para a primeira linha, gera-se a equação correspondente à velocidade angular  $\omega_e$ , como consequência da ação dos motores  $A_{R_1}$  e  $A_{R_2}$ , obtendo a expressão exposta na Equação (5.31).

$$\omega_e = -2,1559 \cdot 10^{-04} \cdot T_c + 0,0231 \cdot V_a - 0,0231 \cdot V_c \quad (5.31)$$

Dos dados da sexta linha da Matriz Geral Escalonada (Figura 44) e multiplicando pelo Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetostático  $\begin{bmatrix} \vec{\Omega} \end{bmatrix}_{21 \times 1}$  (Equação (5.25)) como feito para a primeira linha, gera-se a equação correspondente à velocidade angular  $\omega_f$ , como consequência da ação dos motores  $A_{R_1}$  e  $A_{R_2}$ , obtendo a expressão exposta na Equação (5.32).

$$\omega_f = 7,1865 \cdot 10^{-04} \cdot T_c - 0,0308 \cdot V_a + 0,0923 \cdot V_c \quad (5.32)$$

Dos dados da sétima linha da Matriz Geral Escalonada (Figura 44) e multiplicando pelo Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetostático  $\begin{bmatrix} \vec{\Omega} \end{bmatrix}_{21 \times 1}$  (Equação (5.25)) como feito para a primeira linha, gera-se

a equação correspondente à velocidade angular  $\omega_g$ , como consequência da ação dos motores  $A_{R_1}$  e  $A_{R_2}$ , obtendo a expressão exposta na Equação (5.33).

$$\omega_g = -2,8746 \cdot 10^{-04} \cdot T_c + 0,0308 \cdot V_a - 0,0308 \cdot V_c \quad (5.33)$$

Dos dados da sétima linha da Matriz Geral Escalonada (Figura 44) e multiplicando pelo Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetoestático  $\left[\vec{\Omega}\right]_{21 \times 1}$  (Equação (5.25)) como feito para a primeira linha, gera-se a equação correspondente à velocidade angular  $\omega_h$ , como consequência da ação dos motores  $A_{R_1}$  e  $A_{R_2}$ , obtendo a expressão exposta na Equação (5.34).

$$\omega_h = 1,7966 \cdot 10^{-04} \cdot T_c - 0,0077 \cdot V_a + 0,0231 \cdot V_c \quad (5.34)$$

Dos dados da décima sétima linha da Matriz Geral Escalonada (Figura 44) e multiplicando pelo Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetoestático  $\left[\vec{\Omega}\right]_{21 \times 1}$  (Equação (5.25)) como feito para a primeira linha, gera-se a equação correspondente ao torque  $T_a$  do motor  $mu_1$ , obtendo a expressão exposta na Equação (5.35).

$$T_a = -0,3333 \cdot T_c \quad (5.35)$$

Dos dados da décima oitava linha da Matriz Geral Escalonada (Figura 44) e multiplicando pelo Vetor das Magnitudes do Sistema Cinetoestático  $\left[\vec{\Omega}\right]_{21 \times 1}$  (Equação (5.25)) como feito para a primeira linha, gera-se a equação correspondente ao torque  $T_b$  da carga, obtendo a expressão exposta na Equação (5.36).

$$T_b = 0,2222 \cdot T_c \quad (5.36)$$

Para substituir os valores  $\omega_a = 0,738$  rad/s,  $\omega_c = 0,738$  rad/s e  $T_b = 0,5$  N · m, que são os valores de entrada, precisa-se isolar as variáveis independentes  $T_c$ ,  $V_a$  e  $V_c$  das Equações (5.27), (5.29) e (5.36), ficando em função das variáveis  $\omega_a$ ,  $\omega_c$  e  $T_b$ , e obtendo as Equações (5.37), (5.38) e (5.39).

$$T_c = \frac{T_b}{0,2222} \quad (5.37)$$

$$V_a = \frac{0,2222 \cdot \omega_a + 0,3593 \cdot 10^{-04} \cdot T_b}{0,00342} \quad (5.38)$$

$$V_c = \frac{0,2222 \cdot \omega_c - 1,0780 \cdot 10^{-04} \cdot T_b}{0,00342} \quad (5.39)$$

Substituindo os valores  $\omega_a = 0,738 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_c = 0,738 \text{ rad/s}$  e  $T_b = 0,5 \text{ N} \cdot \text{m}$ , nas Equações (5.37), (5.38) e (5.39), obtêm-se os valores teóricos para  $T_c$ ,  $V_a$  e  $V_c$ , e substituindo estes nas Equações (5.28), (5.30), (5.31), (5.32), (5.33), (5.34) e (5.35), obtêm-se os valores teóricos para  $\omega_b$ ,  $\omega_d$ ,  $\omega_e$ ,  $\omega_f$ ,  $\omega_g$ ,  $\omega_h$  e  $T_a$ , como apresentado na Tabela 19.

Com as equações obtidas da Matriz Escalonada Geral, é possível conhecer o comportamento do mecanismo PM para qualquer instante de tempo, devido às posições das juntas não variaem com o tempo.

Tabela 19: Simulação comportamento do PM para  $\omega_a = 0,738 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_c = 0,738 \text{ rad/s}$  e  $t = 10 \text{ s}$ .

Junta	$(x,y,z)$ (cm)	Simulação			Teoria	
		$\omega_i$ (rad/s)	$T_i$ (N·m)	$\omega_i$ (rad/s)	$T_i$ (N·m)	$V_i$ (V)
a	0,0,0	0,738	-0,75	0,738	-0,75	47,9273
b	24,0,0	-2,214	0,5	-2,209	0,5	-
c	0,0,0	0,738	2,25	0,738	2,25	47,9063
d	8,0,0	-	-	0	-	-
e	16,0,0	-	-	0	-	-
f	18,0,0	-	-	2,9472	-	-
g	12,0,0	0,738	0	0	-	-
h	0,0,0	0,738	1,5	0,738	-	-

$(x, y, z)$ : Coordenadas das juntas.

Os valores de simulação apresentados na Tabela 19, são os valores correspondentes ao instante de tempo real de simulação  $t = 10 \text{ s}$ . Porém, estes valores são constantes durante todo o tempo real de simulação para a velocidade angular da carga  $\omega_b$  e os torques de reação  $T_a$  e  $T_c$ , como apresentado na Figura 45, nos quadrantes (2, 2), (1, 1) e (1, 3) respectivamente, e os quadrantes (2, 1), (2, 3) e (1, 2) são os valores de  $\omega_a$ ,  $\omega_c$  e  $T_b$  respectivamente. Também se observa que por meio da

teoria foi possível determinar exatamente quais seriam os valores para torques e velocidades angulares presentes no mecanismo.

Pode-se observar que aplicando um torque de carga variável, o comportamento da velocidade angular da carga  $\omega_a$  fica invariável, como apresentado na Figura 46.

### 5.2.2 Caso com Motores

No caso com motores é considerada a dinâmica dos motores, configura-se um modelo de medições para variáveis independentes de velocidade angular em  $\omega_a$  e  $\omega_c$ , e o torque em  $T_b$ , ou seja que as juntas atuadas serão controladas por velocidade angular e os torques de reação serão dependentes do torque da carga, como apresentado na Figura 47 e com as características dos Apêndices B.2 e B.3. Este modelo possui:

- A representação do mecanismo planetário ("Planetary Gear").
- 1 engrenagem correspondente à saída do mecanismo planetário modificado ("Simple Gear").
- 1 atuador gerador de torque ("Torque Actuator2") correspondente à carga.
- 2 atuadores geradores de velocidade angular ("Motion Actuator2" e "Motion Actuator3").
- 3 sensores (Motion Sensor) para a obtenção de velocidade angular.
- 4 sensores (Torque Sensor) para a obtenção de torque.
- 3 constantes correspondentes aos valores de velocidade angular ("Wa" e "Wc") e de torque ("Tb").
- 2 constantes nulas correspondentes às acelerações.
- 3 gerador de sinal (WSSb) correspondentes aos sinais de torque da carga variável e velocidades angulares variáveis.
- 2 modelos de motores (Figura 8).

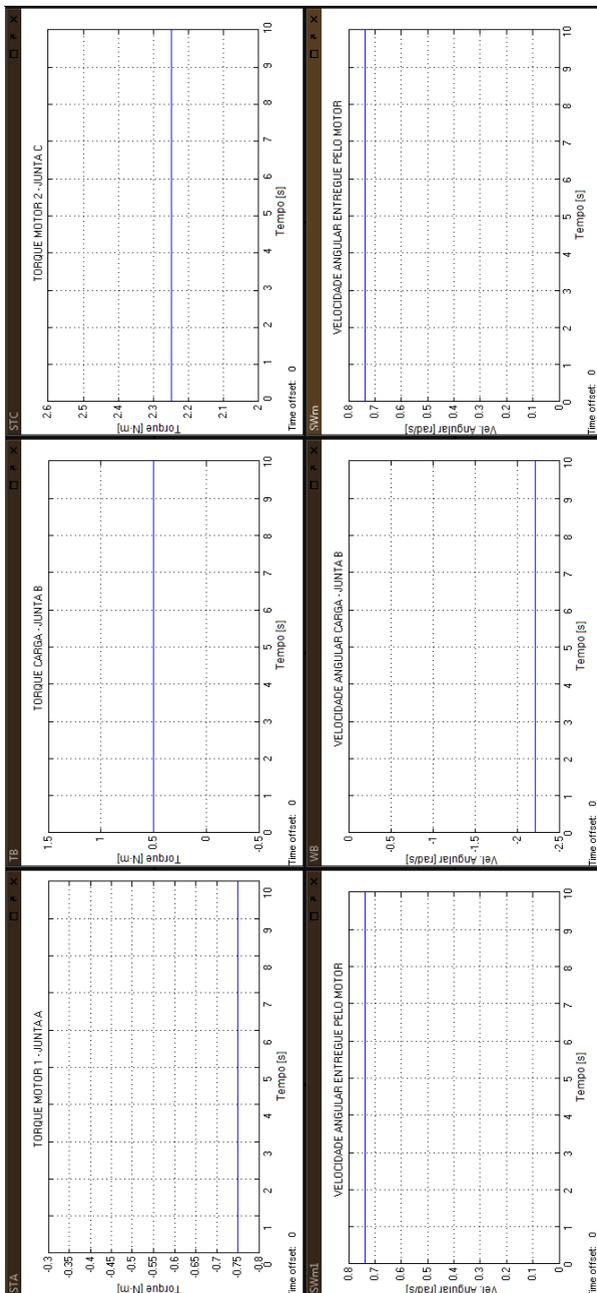


Figura 45: Comportamento do PM para  $\omega_b$ ,  $\omega_e$  e  $T_a$  constantes.

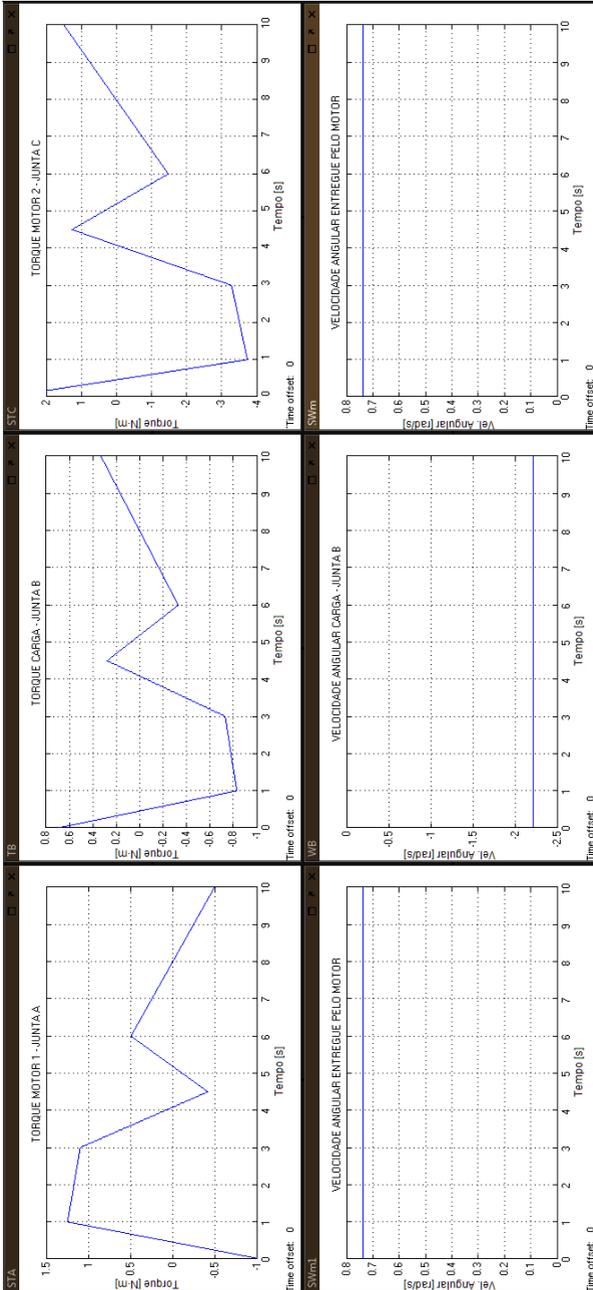


Figura 46: Comportamento do PM para  $\omega_b$  e  $\omega_e$  constantes e  $T_a$  variável.

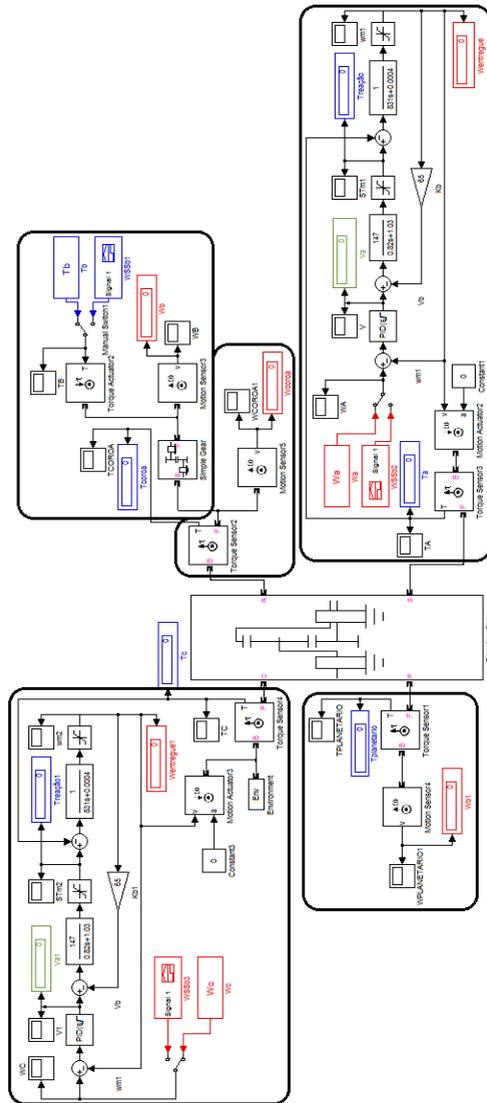


Figura 47: Configuração de Medição do PM com motores para simulação do controle de velocidade angular.

Para conhecer o comportamento do mecanismo PM com motores por meio da simulação para controle de velocidade angular, substituem-se as variáveis "Wa", "Wc" e "Tb" (Figura 47), pelos valores para as

quais se deseja conhecer o comportamento do mecanismo, neste caso serão os mesmos dados do caso sem motores (Seção 5.2.1).

Dispondo as juntas do mecanismo na mesma posição do caso sem motores (Tabela 17), o sistema cinetoestático do mecanismo fica sendo o mesmo da Seção 5.2.1, pelo qual não se precisa determinar novamente a Matriz Escalonada Geral e nem as equações de comportamento de torques e velocidades angulares, pois ficam sendo as mesmas.

Devido a que não mudaram os valores de entrada  $\omega_a$ ,  $\omega_c$  e  $T_b$ , nem o comportamento cinetoestático do mecanismo, obtêm-se os mesmos valores teóricos da Tabela 19.

Também foram obtidos os mesmos valores de simulação apresentados na Tabela 19, os quais correspondem ao instante de tempo real de simulação de  $t = 10\text{ s}$  da ferramenta de prototipagem matemática, como apresentado na Figura 48, para a velocidade angular da carga  $\omega_b$  e os torques de reação  $T_a$  e  $T_c$ , nos quadrantes (2, 2), (1, 1) e (1, 3) respectivamente, e os quadrantes (2, 1), (2, 3) e (1, 2) são os valores de  $\omega_a$ ,  $\omega_c$  e  $T_b$  respectivamente.

Pode-se observar que aplicando um torque de carga variável, o comportamento da velocidade angular da carga  $\omega_a$  fica invariável, como apresentado na Figura 49.

Configurando um segundo modelo de medições para variáveis independentes de velocidade angular em  $\omega_b$  e  $\omega_c$ , e o torque em  $T_c$ , ou seja definindo a velocidade angular desejada na saída (junta  $b$ ) e adotando como referência a velocidade angular de reação do motor na junta  $c$  devido ao torque imposto, que define o torque de reação no motor da junta  $a$  e o torque na junta  $b$ , como apresentado na Figura 50 e com as características dos Apêndices B.2 e B.3. Este modelo possui:

- A representação do mecanismo planetário ("Planetary Gear").
- 1 engrenagem correspondente à saída do mecanismo planetário modificado ("Simple Gear").
- 1 atuador gerador de torque ("Torque Actuator2") correspondente à carga.
- 2 atuadores geradores de velocidade angular ("Motion Actuator2" e "Motion Actuator3").
- 3 sensores (Motion Sensor) para a obtenção de velocidade angular.
- 4 sensores (Torque Sensor) para a obtenção de torque.

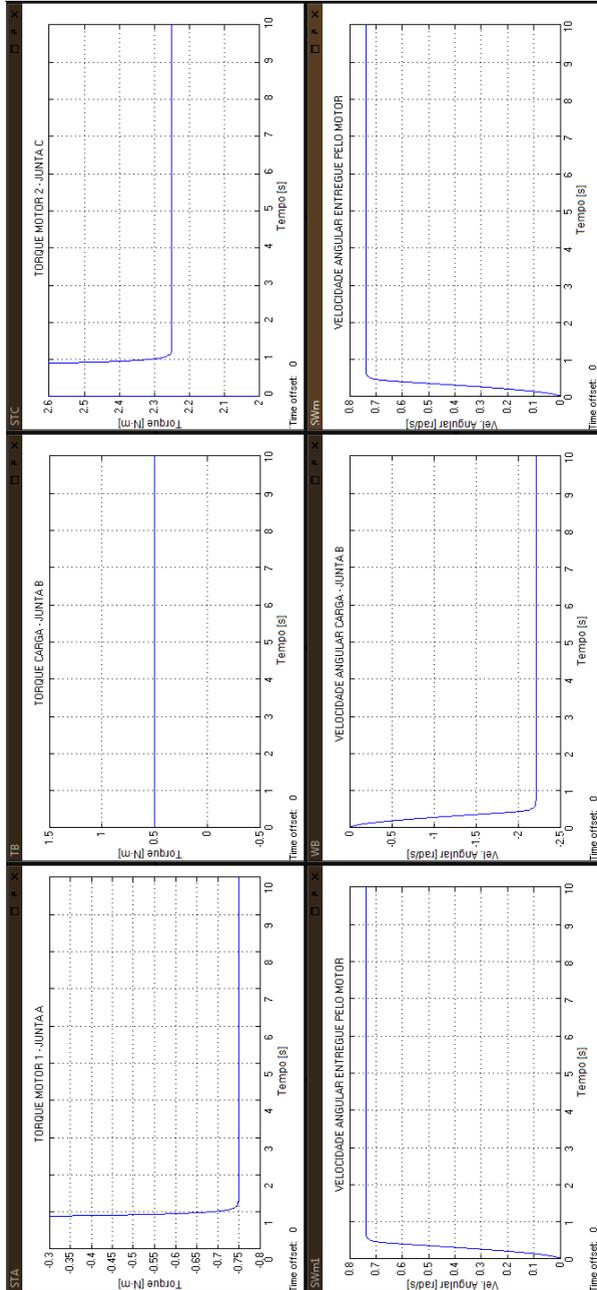


Figura 48: Comportamento do PM com motores para  $\omega_b$ ,  $\omega_e$  e  $T_a$  constantes.

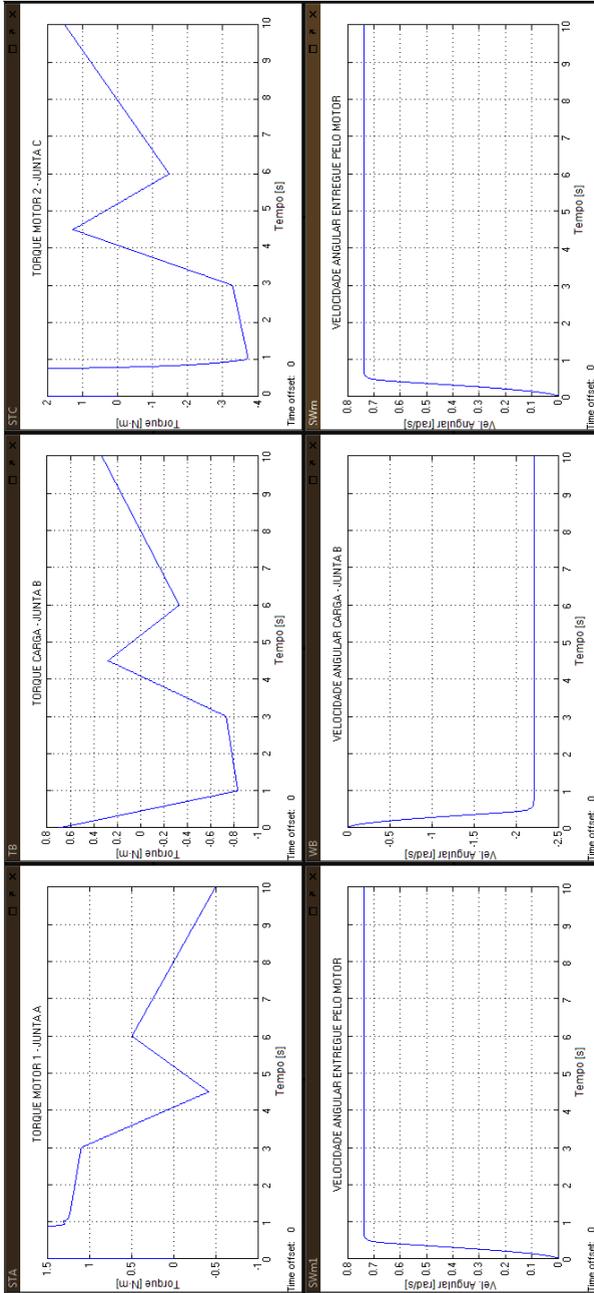


Figura 49: Comportamento do PM com motores para  $\omega_a$  e  $\omega_c$  constantes e  $T_b$  variável.

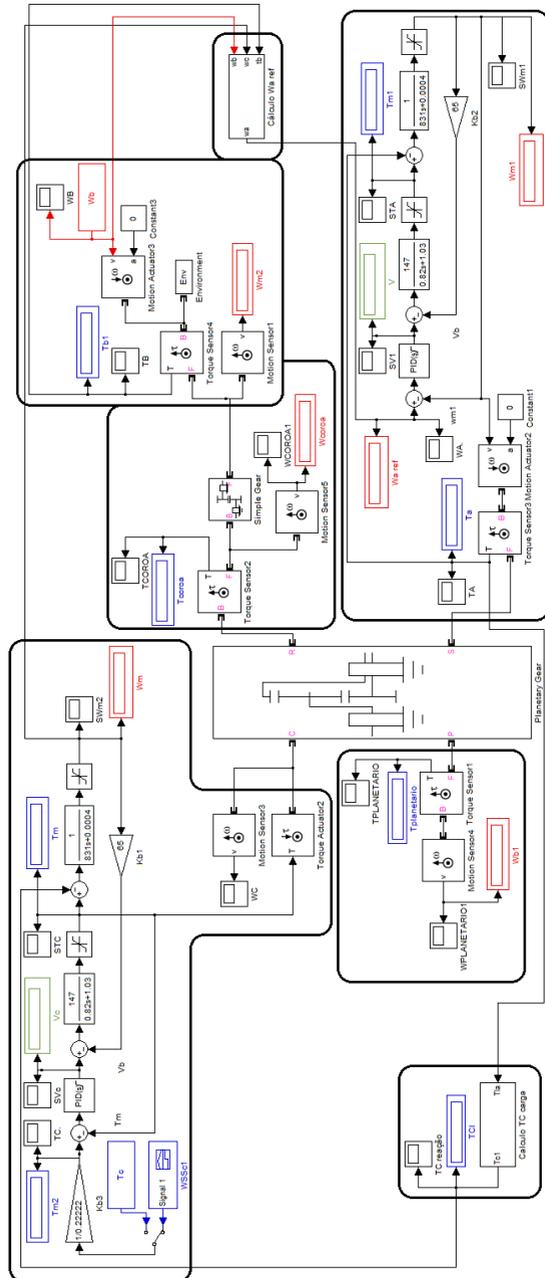


Figura 50: Configuração de Medição do PM com motores para simulação do controle de torque e velocidade angular.

- 2 constantes correspondentes aos valores de velocidade angular ("Wb") e de torque ("Tb").
- 2 constantes nulas correspondentes às acelerações.
- 2 gerador de sinal (WSSb) correspondentes aos sinais de torque da carga variável e velocidade angular da carga variável.
- 2 modelos de motores (Figura 8).
- 2 subsistemas de cálculo teórico dos valores de velocidade angular ("Wa") e torque ("Tc").

Para conhecer o comportamento do mecanismo PM com motores por meio da simulação para controle de torque e velocidade angular, substituem-se as variáveis "Wb" e "Tb" (Figura 50), pelos valores para as quais se deseja conhecer o comportamento do mecanismo, neste caso serão  $\omega_b = 0,7 \text{ rad/s}$  e  $T_b = -0,5 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

Tabela 20: Simulação comportamento do PM para  $\omega_b = 0,7 \text{ rad/s}$ ,  $T_b = -0,5 \text{ N} \cdot \text{m}$  e  $t = 10 \text{ s}$ .

Junta	$(x,y,z)$ (cm)	Simulação		Teoria		
		$\omega_i$ (rad/s)	$T_i$ (N·m)	$\omega_i$ (rad/s)	$T_i$ (N·m)	$V_i$ (V)
a	0,0,0	0,4666	0,75	0,4666	0,75	30,2967
b	24,0,0	0,700	-0,50	0,700	-0,50	-
c	0,0,0	0,000	-2,25	0,000	-2,25	0,0157
d	8,0,0	-	-	0	-	-
e	16,0,0	-	-	0	-	-
f	18,0,0	-	-	-0,933	-	-
g	12,0,0	-0,933	0	0	-	-
h	0,0,0	-0,233	-1,5	-0,233	-	-

$(x, y, z)$ : Coordenadas das juntas.

Os valores de simulação apresentados na Tabela 20, são os valores correspondentes ao instante de tempo real de simulação  $t = 10 \text{ s}$ . Porém, estes valores são constantes durante todo o tempo real de simulação em estado permanente, como apresentado na Figura 51. Também se observa que por meio da teoria foi possível determinar exatamente quais seriam os valores para torques e velocidades angulares presentes no mecanismo.

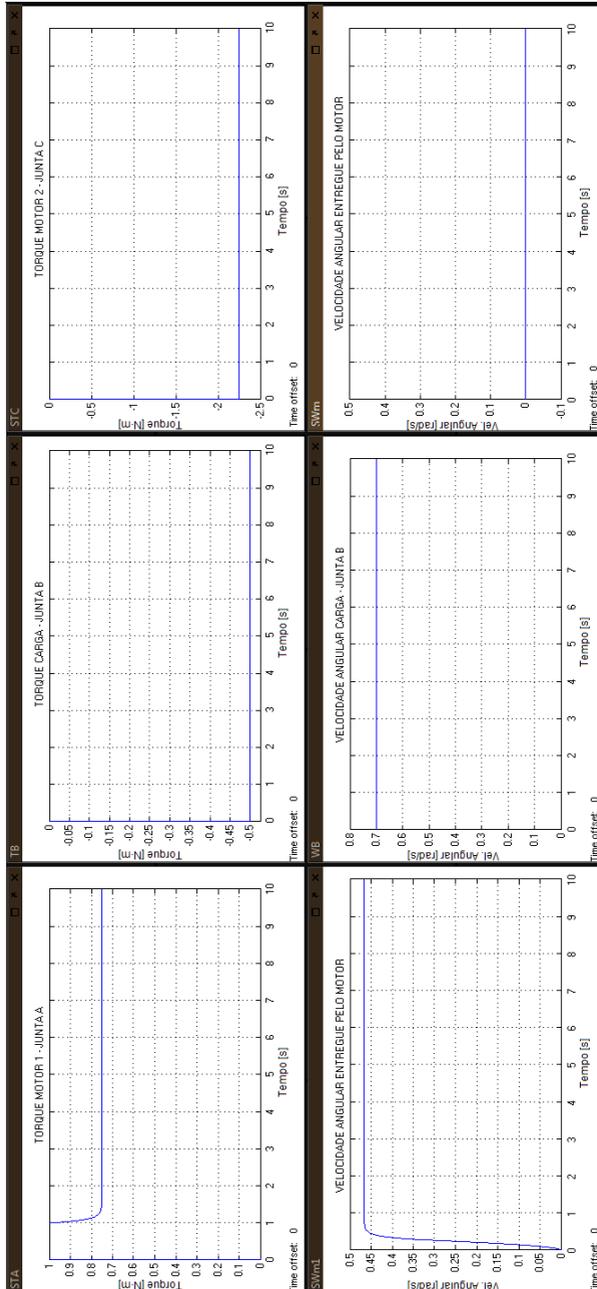


Figura 51: Comportamento do PM com motores para  $\omega_b$ ,  $\omega_e$  e  $T_a$  constantes.

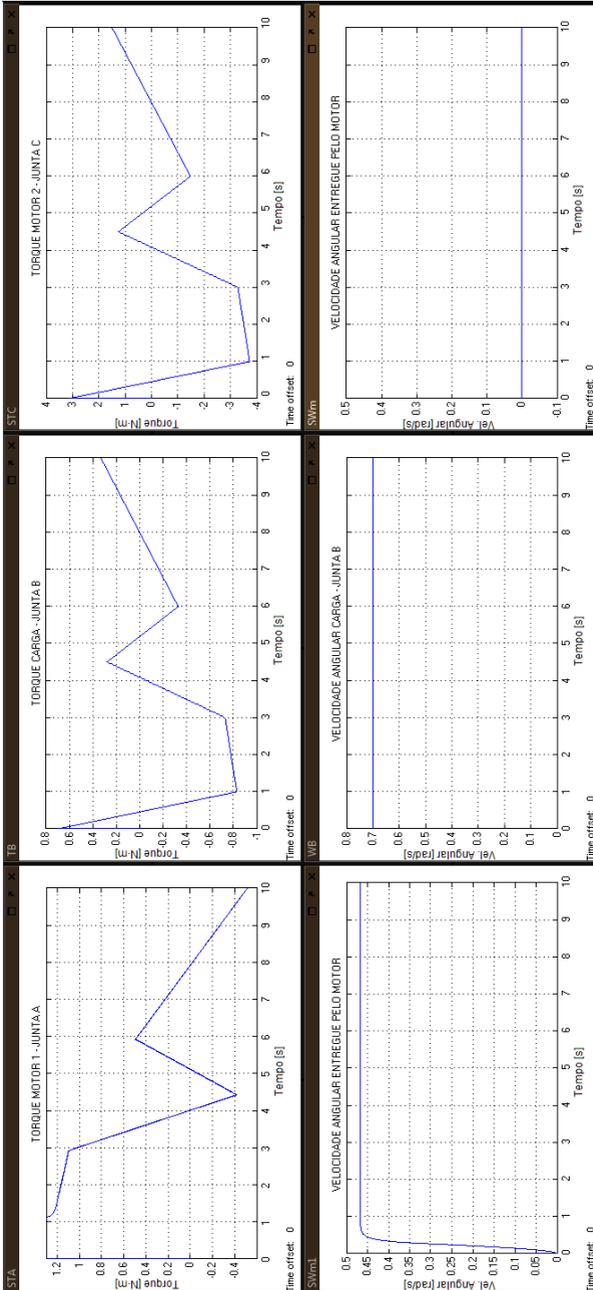


Figura 52: Comportamento do PM com motores para  $\omega_a$  e  $\omega_c$  constantes e  $T_b$  variável.

Pode-se observar para um torque de carga variável  $T_b$ , que o comportamento do motor controlado por torque ( $T_c$ ) consegue atingir estes valores, da mesma forma que a velocidade angular da carga  $\omega_b$  fica invariável, como apresentado na Figura 52.

### 5.2.3 Análise de Resultados

Comparando os resultados obtidos nos dois casos para o PM, com relação às respostas da simulação para os casos de variáveis de entrada  $\omega_a$ ,  $\omega_c$  e  $T_b$  constantes, como apresentado na Figura 53, observa-se que o mecanismo no caso com motores (sinal azul), apresenta um comportamento idêntico ao caso sem motores (sinal amarelo) no estado permanente.

Com relação às respostas da simulação para os casos de variáveis de entrada  $\omega_a$  e  $\omega_c$  constantes e  $T_b$  variável, como apresentado na Figura 54, observa-se que os motores conseguem atingir aos requerimentos de carga sem apresentar variações nas velocidades angulares.

Tabela 21: Respostas para  $\omega_c = 0,738$  rad/s e  $T_b = 0,5$  N · m

$\omega_a$	$\omega_b$	
	Simulação	Teoria
-0,738	-4,428	-4,423
-0,662	-4,314	-4,309
-0,562	-4,164	-4,159
-0,462	-4,014	-4,009
-0,362	-3,864	-3,859
-0,262	-3,714	-3,709
-0,162	-3,564	-3,559
-0,062	-3,414	-3,409
0,038	-3,264	-3,259
0,138	-3,114	-3,109
0,238	-2,964	-2,959
0,338	-2,814	-2,809
0,438	-2,664	-2,659
0,538	-2,514	-2,509
0,638	-2,364	-2,359
0,738	-2,214	-2,209

Devido ao mecanismo apresentar o mesmo comportamento ci-

netoestático para qualquer instante de tempo, é possível determinar o comportamento do sistema com motores em circunstâncias determinadas.

Na Tabela 21, é possível observar que para um incremento de 0,1 na velocidade angular  $\omega_a$ , apresenta-se um incremento de 0,15 nos resultados teóricos e nas respostas da simulação para  $\omega_b$ .

Nota-se que a diferença apresentada entre os valores teóricos  $\omega_{bT}$  e os valores da simulação  $\omega_{bS}$  é de 0,005, conseguindo estabelecer a relação apresentada na Equação (5.40), para a faixa de  $\omega_{bT}$  entre  $-4,423$  e  $-2,209$  rad/s .

$$\omega_{bS} = \omega_{bT} - 0,005 \quad (5.40)$$

Na Tabela 22, é possível observar que para um incremento de 0,1 na velocidade angular  $\omega_c$ , apresenta-se um incremento de 0,45 nas respostas da simulação e aproximadamente de 0,4494 nos resultados teóricos para  $\omega_b$ .

Tabela 22: Respostas para  $\omega_a = 0,738$  rad/s e  $T_b = 0,5$  N · m

$\omega_c$	$\omega_b$	
	Simulação	Teoria
-0,738	4,428	4,423
-0,638	3,978	3,974
-0,538	3,528	3,525
-0,438	3,078	3,075
-0,338	2,628	2,626
-0,238	2,178	2,177
-0,138	1,728	1,727
-0,038	1,278	1,278
0,038	0,936	0,936
0,138	0,486	0,487
0,238	0,036	0,038
0,338	-0,414	-0,412
0,438	-0,864	-0,861
0,538	-1,314	-1,311
0,638	-1,764	-1,760
0,738	-2,214	-2,209

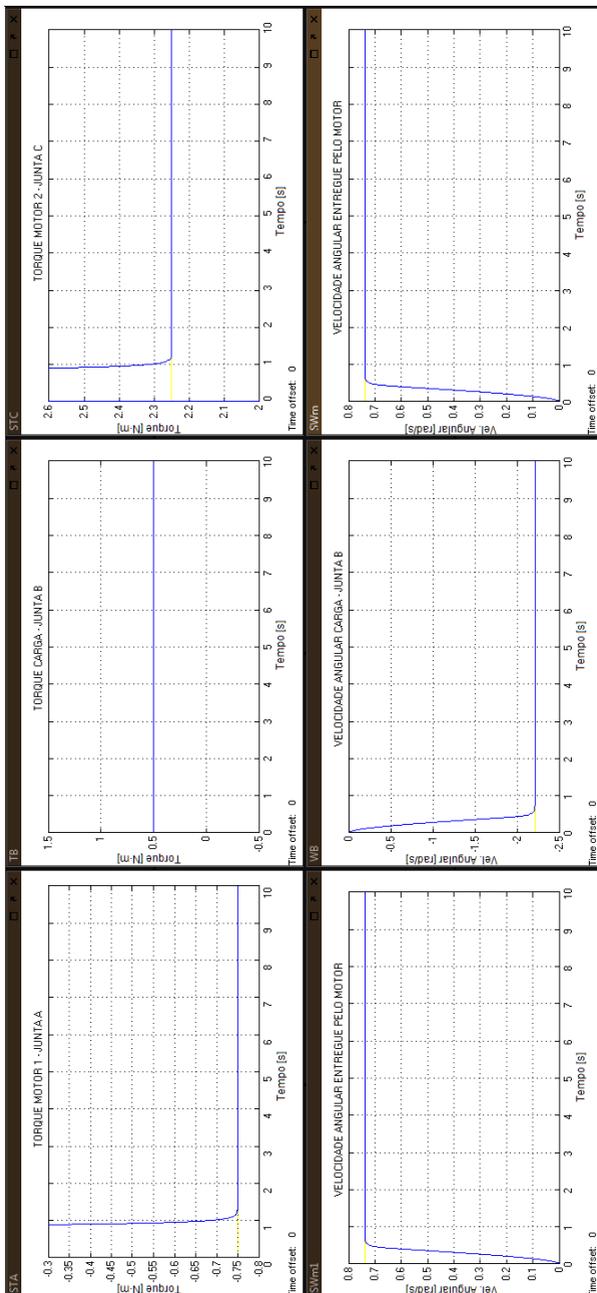


Figura 53: Comparação de resultados do PM para  $\omega_a$ ,  $\omega_c$  e  $T_b$  constantes.

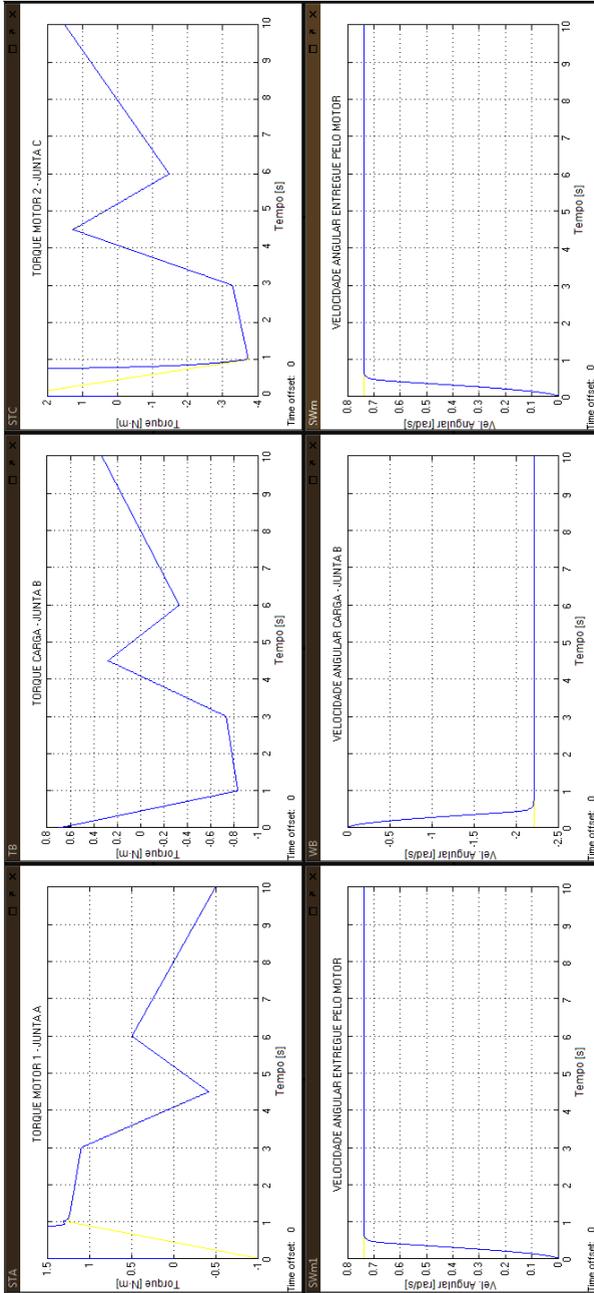


Figura 54: Comparação de resultados do PM para  $\omega_a$  e  $\omega_c$  constantes e  $T_b$  variável.

Devido à falta de exatidão na variação dos dados teóricos para  $\omega_b$ , não é possível estabelecer uma relação entre os dados teóricos e os dados de simulação. Porém, consegue-se estabelecer uma relação para a velocidade angular de simulação  $\omega_{b_S}$  com respeito a  $\omega_c$ , como apresentada na Equação (5.41), para a faixa de  $\omega_b$  entre  $-2,209$  e  $4,423$  rad/s .

Da simulação feita, foi possível determinar faixas de trabalho segundo o comportamento apresentado pelos atuadores devido à variação de torque. Supondo uma velocidade angular  $\omega_a = 0,738$  rad/s, determina-se valores máximos e mínimos para as velocidades angulares  $\omega_b$  e  $\omega_c$ , como apresentado na Tabela 23.

$$\omega_{b_S} = 4,428 - \frac{0,738 + \omega_c}{0,1} \cdot 0,45 \quad (5.41)$$

Estes valores são determinados segundo o comportamento apresentado pelos motores, pois durante as simulações, obteve-se que fora da faixa dos valores apresentados na Tabela 23 e para torques de carga  $T_b$  negativos, os motores apresentam perturbações que alteram a estabilidade do sistema.

Tabela 23: Faixas de Trabalho para  $\omega_a = 0,738$  rad/s

$T_b$	$\omega_{b_{max}}$	$\omega_{b_{min}}$	$\omega_{c_{max}}$	$\omega_{c_{min}}$
0,5	4,430	-2,216	0,7384	-0,7384
1	4,433	-2,214	0,7379	-0,739
2	4,435	-2,211	0,7373	-0,7395
3	4,435	-2,208	0,7367	-0,74
5	4,442	-2,203	0,7356	-0,741
10	4,451	-2,194	0,7335	-0,743
20	4,473	-2,172	0,7286	-0,748
30	4,496	-2,147	0,723	-0,753
50	4,527	1,242	-0,03	-0,76
100	4,649	1,242	-0,03	-0,787

Representando graficamente os dados da Tabela 23, observa-se que não será possível trabalhar velocidades angulares  $\omega_c$  maiores à velocidade angular máxima do maior torque  $T_b$ , e velocidades angulares  $\omega_c$  mínimas à velocidade angular mínima do menor torque  $T_b$ , como apresentado na Figura 55.

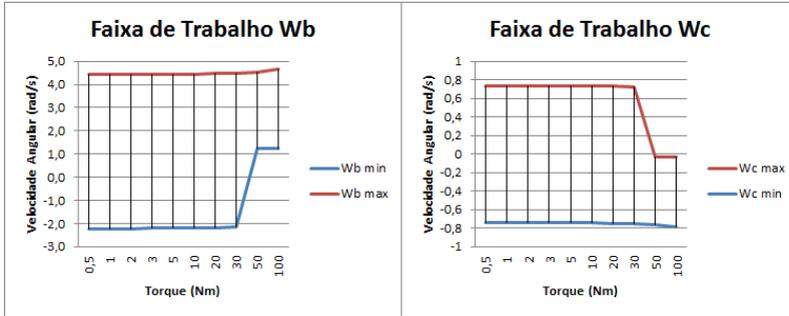


Figura 55: Faixas de Trabalho de  $\omega_b$  e  $\omega_c$  para  $\omega_a = 0,738$ .

Por exemplo, para torques de carga  $T_b$  variáveis entre 0 e  $30 \text{ N} \cdot \text{m}$ , pode-se trabalhar numa faixa de velocidades angulares na carga  $\omega_b$  entre 0,723 e 0,7384 rad/s.

Para o caso de variáveis de entrada  $\omega_b$  e  $T_b$ , sendo o sistema controlado por torque e velocidade angular, observa-se que é possível gerar um controle de forma independente para torque e velocidade angular controlando um dos motores por torque e o outro motor por velocidade angular, pois o sistema não fica dependente da carga aplicada na saída do mecanismo (Junta  $b$ ).

## 6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi proposta uma metodologia baseada no Método de Davies, que permite conhecer o comportamento cinetoestático de uma cadeia cinemática segundo sua configuração, características e elementos de atuação utilizados. Esta metodologia permitiu identificar alguns mecanismos que apresentando dois graus de liberdade na cinemática (mobilidade)  $F_N = 2$  e um grau de liberdade na estática  $S_N = 2$ , conseguissem a independência com sucesso o torque e a velocidade angular proporcionadas pelo mecanismo em regime permanente.

Entre os mecanismos identificados, foram encontrados o mecanismo de cinco barras (5R), o planetário modificado (PM) sendo uma variante do planetário convencional (Tsai 2001) e o Ravigneaux, mas para realizar as validações somente foram utilizados o mecanismo 5R e o mecanismo PM.

Do estudo realizado para o mecanismo 5R se pode concluir que:

- Sendo um mecanismo simples, de fácil construção e de baixo custo, não apresenta boas características de implementação para o caso de estudo, no qual a prioridade é a transmissão de força e velocidade, não a geração de trajetória.
- O fato do mecanismo ter elementos flutuantes faz com que se apresentem variações no comportamento cinetoestático, exigindo maior desempenho computacional, pois é preciso o cálculo em tempo real dos valores de entrada necessários para atingir os requerimentos de funcionamento.
- As diferenças obtidas nos resultados do caso com motores com relação ao caso sem motores do mecanismo 5R, são consequência da variação no modelo cinetoestático do mecanismo, além da dinâmica dos motores.

Do estudo realizado para o mecanismo PM se pode concluir que:

- Sendo um mecanismo um pouco mais complexo do que o mecanismo de 5R, apresenta características ótimas para implementar no caso de estudo, pois o fato de manter o comportamento cinetoestático invariável no tempo, permite conhecer os valores para as variáveis dos torques e velocidades angulares, segundo as variáveis da carga necessárias em cada instante de tempo, sem maior requerimento computacional.

- Foi possível efetuar para o sistema em regime permanente o controle de torque e velocidade angular de forma independente, configurando o sistema de forma a controlar por torque um dos motores e por velocidade angular o outro motor, estabelecendo uma relação de comportamento por meio do equacionamento matemático obtido da metodologia.

Em geral se pode concluir que devido à mudança de posição das juntas de um mecanismo, o sistema cinetoestático do mesmo também muda, portanto as relações entre as variáveis dos motores e as variáveis da carga, é possível para o caso do PM ou mecanismos para os quais as juntas não mudem de posição, otimizar suas dimensões procurando velocidades angulares ou torques maiores aos obtidos numa condição inicial qualquer.

Também é possível obter velocidades angulares ou torques maiores procurando motores com características diferentes, pois variáveis como  $K_b$  e  $K_m$  fazem mudar o sistema cinetoestático do mecanismo.

Em mecanismos como o PM ou mecanismos para os quais as juntas não mudem de posição, é possível estabelecer uma relação direta entre os valores calculados teoricamente e os esperados na simulação, lembrando que esta simulação só considera a dinâmica dos motores, mas não a dinâmica do mecanismo.

O comportamento apresentado pelos motores ou seja, o tempo de resposta e faixas de trabalho sem perturbação, vai depender não somente das características dos motores, mas também do controlador PID implementado.

As faixas de trabalho devem ser determinadas na simulação segundo o comportamento dinâmico dos motores, pois não é possível por meio da teoria, por não considerar a dinâmica dos motores. Estas faixas serão dependentes também da geometria do mecanismo.

## 6.1 CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

A principal contribuição do presente trabalho foi demonstrar a possibilidade de obter na carga de um mecanismo cinetoestático de  $F_N = 2$  e  $S_N = 1$  o torque e a velocidade angular de forma independente.

- Inclusão dos conceitos de Restrição  $C_S$ , grau de liberdade da estática  $S_N$ , número de equações dependentes do sistema estático  $S_D$  e número de equações dependentes do sistema cinemático  $K_D$ ,

devido à consideração das ações ativas no desenvolvimento da metodologia.

- O desenvolvimento de uma metodologia baseada no Método de Davies, permitindo estudar o comportamento cinetoestático para sistemas de cadeia fechada.
- O relacionamento entre graus de liberdade dos sistemas estatico ( $S_N$ ) e cinemático ( $F_N$ ) com o número de cargas ( $\sigma$ ) e o número de atuadores ( $A_R$ ) respectivamente.
- O controle de torque e velocidade angular de forma independente para sistemas configurados com mínimos dois motores, sendo um deles controlado por torque e o outro controlado por velocidade angular para regime permanente.

## 6.2 PERSPECTIVAS FUTURAS

Partindo do desenvolvimento deste trabalho, expõe-se uma série de possíveis trabalhos futuros a serem desenvolvidos como mostrados a seguir.

- Estender a metodologia na otimização da capacidade de força de robôs mais complexos como manipuladores paralelos espaciais e humanóides;
- Inclusão da eficiência dos mecanismo (Laus 2011) à metodologia desenvolvida e estudo do comportamento dos mecanismos.
- Implementação da dinâmica dos motores e estudo de comportamento para outro tipo de controladores;
- Estudo de comportamento do efetuador final de um robô manipulador serial, substituindo os motores das juntas por mecanismos PM;
- Desenvolver uma metodologia que permita implementando o mecanismo PM, determinar os valores de velocidade angular e torque necessários para cada motor, segundo as trajetórias de força e posição requeridas para o efetuador final de um robô manipulador serial;



## REFERÊNCIAS

- Ball 1876 BALL, R. *Theory of Screws*. [S.l.]: HODGES, FOSTER, AND CO., GRAFTON-STREET., 1876.
- Barasuol 2008 BARASUOL, V. *Controle de Força Indireto para Manipuladores com Transmissões Flexíveis Empregados em Tarefas de Esmerilhamento*. [S.l.]: Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.
- Cazangi 2008 CAZANGI, H. R. Tese de Doutorado. *Aplicação do Método de Davies para Análise Cinemática e Estática de Mecanismos com Múltiplos Graus de Liberdade*. [S.l.]: Tese de Doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.
- Cervera 2002 CERVERA, M. R. *Mecánica de Estructuras Libro 2: Método de Análisis*. 2a edição. ed. [S.l.]: Edicions UPC, 2002.
- Cruz 2010 CRUZ, F. B. *Modelagem, Controle e Emprego de Robôs em Processos de Usinagem*. [S.l.]: Tese de Doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina, 2010.
- Davies 1981 DAVIES, T. Kirchhoff's circulation law applied to multi-loop kinematic chains. *Mechanism and Machine Theory*, v. 16, p. 171–183, 1981.
- Davies 1995 DAVIES, T. Circuit actions attributable to active couplings. *Mechanism and Machine Theory*, v. 30, n. 7, p. 1001–1012, 1995.
- Davies 1995 DAVIES, T. Couplings, coupling network and their graphs. *Mechanism and Machine Theory*, v. 30, n. 7, p. 991–1000, 1995.
- Davies 2005 DAVIES, T. Freedom and constraint in coupling networks. *Loughborough's Institutional Repository*, p. 989–1010, 2005.
- Kuo 1996 KUO, B. C. *Sistemas de Control Automatico*. 7a edição. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1996.
- Laus 2011 LAUS, L. *Determinação da Eficiência de Máquinas com Base em Teoria de Helicoides e Grafos: Aplicação em Trens de Engrenagens e Robôs Paralelos*. [S.l.]: Tese de Doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina, 2011.

Laus No prelo LAUS, L. P. Efficiency of gear trains determined using graph and screw theories. *Mechanism and Machine Theory*, No prelo.

Martins 2002 MARTINS, D. *Análise Cinemática Hierárquica de Robôs Manipuladores*. [S.l.]: Tese de Doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.

Martins e Guenther 2003 MARTINS, D.; GUENTHER, R. Hierarchical kinematic analysis of robots. *Mechanism and machine theory*, Elsevier, v. 38, n. 6, p. 497–518, 2003.

Merlet 2006 MERLET, J. P. *Solid Mechanics and Its Applications: Parallel Robots*. 2da. ed. [S.l.]: Springer, 2006.

Ogata 1998 OGATA, K. *Ingenieria de Control Moderno*. 3ra. ed. [S.l.]: Prentice Hall Inc., 1998.

Polli 2005 POLLI, M. L. *Análise da Estabilidade Dinâmica do Processo de Fresamento a Altas Velocidades de Corte*. [S.l.]: Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, 2005.

Sciavicco e Siciliano 1996 SCIAVICCO, L.; SICILIANO, B. *Modeling and Control of Robot Manipulators*. [S.l.]: McGraw - Hill, 1996.

Shai O. e Preiss 1999 SHAI O. E PREISS, K. Graph theory representations of engineering systems and their embedded knowledge. *Artificial Intelligence in Engineering*, v. 13, p. 273–285, 1999.

Simas 2008 SIMAS, H. *Planejamento de Trajetórias e Evitamento de Colisão em Tarefas de Manipuladores Redundantes Operando em Ambientes Confinados*. [S.l.]: Tese de Doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.

Spong 2004 SPONG, M. W. *Robot Dynamics and Control*. 2a edição digital. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2004.

Stemmer 2005 STEMMER, C. E. *Ferramentas de Corte I*. 6a edição. ed. [S.l.]: Editora da UFSC, 2005.

Tsai 2001 TSAI, L. W. *Mechanism Design: Enumeration of Kinematic Structures According to Function*. [S.l.]: CRC Press, 2001.

## **ANEXO A – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**



Para compreender de forma apropriada alguns conceitos básicos sobre o estabelecimento, desenvolvimento e resultados do Método de Davies, faz-se necessário entender o exposto nesta seção, sendo a reciprocidade, acoplamentos ativos e passivos, espaço de trabalho e grau de liberdade redundante ou passivo alguns dos conceitos mais importantes para a compreensão deste trabalho.

## A.1 RECIPROCIDADE

Para explicar o conceito da reciprocidade, tem-se o Teorema da Reciprocidade dos Movimentos ou também conhecido como teorema de Maxwell, o qual estabelece que: Numa estrutura de comportamento linear (ou corpo rígido), o movimento de um ponto  $A$ , numa certa direção  $\vec{a}$  devido à aplicação de uma força de valor  $F$  de direção  $\vec{b}$  num ponto  $B$ , é igual ao movimento do ponto  $B$ , na direção  $\vec{b}$ , quando se aplica num ponto  $A$  uma força de valor  $F$  na direção  $\vec{a}$  (Cervera 2002).

$$\begin{pmatrix} \vec{\omega} \\ \dots\dots\dots \\ \vec{v} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \vec{M}_O \\ \dots\dots\dots \\ \vec{F} \end{pmatrix} = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O + \vec{v} \cdot \vec{F} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Mas aplicando este conceito à Teoria de Helicoides, diz-se que dois helicoides são recíprocos, se tendo um corpo disposto para girar livremente ao redor de um helicóide  $\mathcal{S}_a$ , mantém-se em equilíbrio, enquanto atua uma força sobre o helicóide  $\mathcal{S}_b$ , e do mesmo jeito, um corpo disposto para girar livremente ao redor de um helicóide  $\mathcal{S}_b$ , mantém-se em equilíbrio, enquanto atua uma força sobre o helicóide  $\mathcal{S}_a$  (Ball 1876).

Em termos mais simples, pode-se dizer que dois helicoides são recíprocos se um deles representa um heligiro e o outro representa uma heliforça, mas a heliforça não executa trabalho sobre o heligiro, cumprindo com a expressão da Equação (A.1).

Para compreender este conceito mais claramente, apresenta-se um exemplo, de forma a determinar uma heliforça recíproca ao heligiro apresentado na Figura (56).

Sejam dois corpos 1 e 2, unidos mediante uma dobradeira a qual é o heligiro  $\mathcal{S}_{12}$ . O corpo 1 é o corpo fixo e o corpo 2 vai-se movimentar com relação ao corpo 1. Na posição apresentada na Figura (56), onde o corpo 2 encontra-se a  $90^\circ$  no sentido anti-horário do corpo 1, as únicas

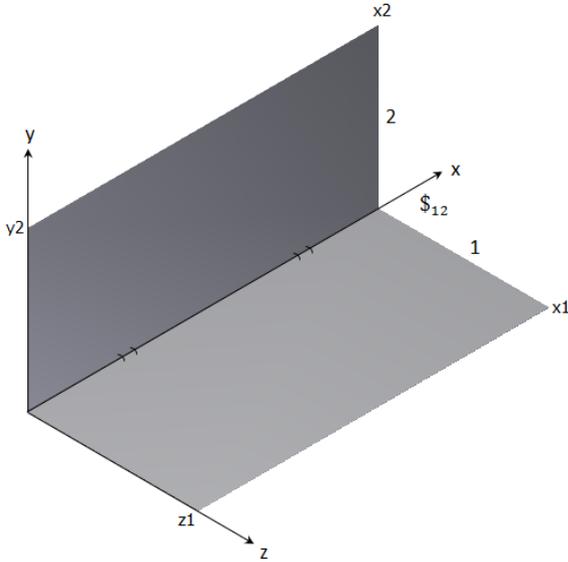


Figura 56: Corpos ligados com dobradeira.

forças que exercem algum tipo de interação com o corpo 2 são forças na direção  $x$ ,  $y$  e  $z$  com coordenadas de  $(0, 0, 0)$  até  $(x_2, y_2, 0)$ .

Para determinar as forças que não exercem trabalho no corpo 2, é empregada a Teoria de Helicoides. Tendo o heligiro  $S_{12}$ , o qual é representado mediante a Equação (A.2), onde o vetor  $\vec{S} = [ 1 \ 0 \ 0 ]^T$ , pois o heligiro está disposto na direção de  $x$ ; o vetor  $\vec{S}o = [ x \ 0 \ 0 ]^T$ , pois o heligiro pode ser situado em qualquer ponto do eixo  $x$ ; e por ser a dobradeira uma junta rotacional, o passo deste helicoides é  $h = 0$  (Equação (A.7)).

$$S_{12} = \omega_{12} \cdot \begin{pmatrix} \vec{S} \\ \dots\dots\dots \\ \vec{S}o \times \vec{S} + h\vec{S} \end{pmatrix} = \omega_{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A.2)$$

Uma heliforça  $\$a$  qualquer na forma da Equação (A.6), é representada pela Equação (A.3), onde o vetor  $\vec{M}o = [y \cdot F_z - z \cdot F_y \quad -x \cdot F_z + z \cdot F_x \quad x \cdot F_y - y \cdot F_x]^T$  e o vetor  $\vec{F} = [F_x \quad F_y \quad F_z]^T$ .

Levando em conta a forma do heligiro da Equação (A.2) e devido a que sua componente  $\omega_{12}$  pode ser diferente de 0, tem-se que para cumprir com a condição apresentada na Equação (A.1), a primeira componente  $M_x$  do vetor  $\vec{M}o$  da heliforça apresentada na Equação (A.3), tem que ser igual a 0, como se apresenta na Equação (A.4).

$$\$a = \begin{pmatrix} \vec{M}o \\ \dots\dots\dots \\ \vec{F} \end{pmatrix} = \tag{A.3}$$

$$\begin{pmatrix} x & F_x \\ y \times & F_y \\ z & F_z \\ \dots\dots\dots \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \cdot F_z - z \cdot F_y \\ -x \cdot F_z + z \cdot F_x \\ x \cdot F_y - y \cdot F_x \\ \dots\dots\dots \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

Na Equação (A.4), é possível observar que sendo sempre  $z = 0$  para que qualquer força aplicada interaja com o corpo 2, têm-se duas opções: que  $y$  tenha qualquer valor enquanto  $F_z = 0$ ; ou  $y = 0$  para qualquer valor de  $F_z$ .

$$\begin{pmatrix} \omega_{12} \\ 0 \\ 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \\ \dots\dots\dots \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \omega_{12} \cdot M_x = \omega_{12} \cdot (y \cdot F_z - z \cdot F_y) = 0 \tag{A.4}$$

Então se pode concluir que as únicas forças que não apresentariam trabalho no corpo 2, seriam as forças na direção de  $x$  ou  $F_x$ , em qualquer ponto do corpo; as forças na direção de  $y$  ou  $F_y$ , em qualquer ponto do corpo, e as forças na direção de  $z$  ou  $F_z$ , para as coordenadas de  $(0, 0, 0)$  até  $(x_2, 0, 0)$ , caso contrario, o corpo se movimentará. Estas forças que não exerceriam trabalho sobre o corpo 2, são as chamadas heliforças reciprocas.

## A.2 GRAU DE LIBERDADE REDUNDANTE OU PASSIVO

O grau de liberdade redundante é aquele que não gera nenhum efeito na transferência de movimento desde o corpo de entrada até o corpo de saída do mecanismo. Por exemplo, um corpo com duas juntas esféricas gera um grau de liberdade redundante como apresentado na Figura (57). Segundo (Tsai 2001), este grau de liberdade redundante é chamado de grau de liberdade passivo, pois esta configuração permite que o corpo fique movimentando-se sobre o eixo de rotação gerado pelas duas juntas, sem a capacidade de transferir torque ao longo do eixo.

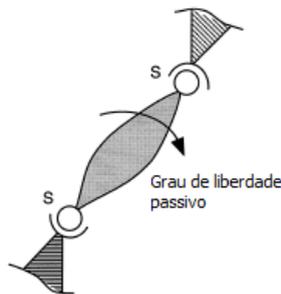


Figura 57: Corpo com duas juntas esféricas.

Fonte: (Tsai 2001, Seção 4.3)

## A.3 ESPAÇO DE TRABALHO

O espaço de trabalho é o grau de liberdade que pode atingir um mecanismo segundo a função para a qual é pretendido (Tsai 2001). Também chamado de espaço de operação ou espaço operacional, seu

grau de liberdade representado por  $\lambda$ , dependente das características do mecanismo. No caso dos mecanismos planares, o espaço de trabalho é  $\lambda = 3$ ; no caso dos mecanismos espaciais, o espaço de trabalho é  $\lambda = 6$ ; e no caso dos mecanismos de engrenagens, o espaço de trabalho é  $\lambda = 2$ .

#### A.4 ACOPLAMENTOS ATIVOS E PASSIVOS

Tendo uma rede de acoplamentos, formada por corpos e acoplamentos, apresentam-se dois tipos de acoplamentos. O primeiro tipo de acoplamento é o *Acoplamento Passivo*, o qual não gera nenhum tipo de transmissão de potência. O segundo tipo de acoplamento é o *Acoplamento Ativo*, o qual, no caso das reações  $A_R$ , transmite potência de um atuador  $A_{R_i}$  para a rede de acoplamentos, e no caso das cargas  $\sigma$ , retira-se potência da rede de acoplamentos para a carga  $\sigma_i$ .

#### A.5 TEORIA DOS HELICOIDES

A Teoria de Helicoides é uma ferramenta muito utilizada na análise estática e cinemática de mecanismos, a qual está baseada em dois teoremas:

- O primeiro deles é o Teorema de Poincot, o qual estabelece que qualquer sistema de forças que agem sobre um corpo rígido, pode ser substituído por uma única força e momento na mesma direção da força (Ball 1876).
- O segundo deles é o Teorema de Mozzi - Chasles, o qual estabelece que o movimento de um corpo rígido no espaço pode ser representado por uma rotação sobre um eixo seguido de uma translação ao longo do mesmo eixo (Simas 2008). Este movimento combinado de translação e rotação, pode ser representado por um **helicóide**.

Um helicóide, representado pelo símbolo  $\$$ , é definido como uma linha reta (eixo) no espaço, com uma magnitude linear associada, chamada de **passo**  $h$  (Ball 1876).

Os helicoides são expressos usualmente em coordenadas de Plücker como pode ser visto na Equação (A.5), sendo  $\vec{S}$  o vetor direção do eixo do helicóide,  $\vec{S}_0$  o vetor posição do eixo do helicóide relativo à origem do sistema de coordenadas, e  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{R}$  são as coordenadas de Plücker.

Estas coordenadas podem ser vistas como um par de vetores de três dimensões normais entre eles, que representam as coordenadas dos movimentos (sistemas cinemático) e as coordenadas das ações (sistemas estático) de uma cadeia cinemática. Na notação dos helicoides, as componentes são separadas por marcadores (tracejado na forma matricial) para facilitar a distinção dos vetores, como visto na Equação (A.5).

$$\mathcal{S}^M = \begin{pmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \\ \dots\dots\dots \\ \mathcal{P}^* = \mathcal{P} + h \cdot \mathcal{L} \\ \mathcal{Q}^* = \mathcal{Q} + h \cdot \mathcal{M} \\ \mathcal{R}^* = \mathcal{R} + h \cdot \mathcal{N} \end{pmatrix} = \omega \cdot \begin{pmatrix} \vec{S} \\ \dots\dots\dots \\ \vec{S}_o \times \vec{S} + h\vec{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\omega} \\ \dots\dots \\ \vec{v} \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

Dependente da disposição das coordenadas de Plücker, obtêm-se dois tipos de helicoides que são chamados de recíprocos (Seção A.1).

Os **Helicoides Axiais** ou **Heligiros**  $\mathcal{S}^M$ , os quais são empregados na análise cinemática do mecanismo e têm a configuração disposta na Equação (A.5), onde  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$ , representam o vetor de Velocidades Angulares, e  $\mathcal{P}^*$ ,  $\mathcal{Q}^*$ ,  $\mathcal{R}^*$  representam o vetor de Velocidades Lineares.

Os **Helicoides Radiais** ou **Heliforças**  $\mathcal{S}^A$ , os quais são empregados na análise estática da cadeia e têm a configuração disposta na Equação (A.6), onde  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$ , representam o vetor de Forças, e  $\mathcal{P}^*$ ,  $\mathcal{Q}^*$ ,  $\mathcal{R}^*$  representam o vetor de Momentos.

$$\mathcal{S}^A = \begin{pmatrix} \mathcal{P}^* = \mathcal{P} + h \cdot \mathcal{L} \\ \mathcal{Q}^* = \mathcal{Q} + h \cdot \mathcal{M} \\ \mathcal{R}^* = \mathcal{R} + h \cdot \mathcal{N} \\ \dots\dots\dots \\ \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \end{pmatrix} = F \cdot \begin{pmatrix} \vec{S}_o \times \vec{S} + h\vec{S} \\ \dots\dots\dots \\ \vec{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{M}_o \\ \dots\dots \\ \vec{F} \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

Para determinar o passo  $h$  apropriado para cada heligiros, deve-se levar em conta as condições da Equação (A.7), onde o valor do passo  $h$  do heligiros vai depender do tipo de movimento que representa.

$$\begin{aligned}
 h &= 0 \text{ se é uma ação rotacional ou momentos,} \\
 h &= x \text{ se é uma ação helicoidal ou momento produto de uma força,} \\
 h &= \infty \text{ se é uma ação linear ou forças.}
 \end{aligned}
 \tag{A.7}$$

Pode representar:

- um movimento rotativo, como se apresenta no caso de juntas rotativas,
- um movimento de helicóide, como se apresenta no caso dos parafusos,
- um movimento de translação, como se apresenta no caso de juntas prismáticas.

## A.6 LEIS DE KIRCHHOFF

Kirchhoff enuncia duas leis *relacionadas* aos circuitos elétricos. A primeira delas é a Lei dos Nós, a qual estabelece que a soma algébrica das correntes que se encontram em um mesmo nó, é nula. A segunda é a Lei das Malhas, a qual diz que a soma algébrica das diferenças de potencial ao longo de um percurso fechado é zero (Davies 1981).

Os sistemas hidráulicos, pneumáticos, mecânicos, etc., podem ser representados mediante analogias com os sistemas elétricos. Esta abordagem pode ser estendida aos mecanismos, pois (Davies 1981) estabelece uma analogia entre um mecanismo e um circuito elétrico, indicando a similaridade que tem a força com a corrente, e a velocidade angular com a diferença de potencial.

O Método de Davies propõe aplicar a Lei das Malhas e a Lei dos Nós aos mecanismos, de forma a obterem-se as analogias respectivas: à **Lei dos Circuitos** e à **Lei dos Cortes**. (Davies 1981) estabelece que a Lei dos circuitos se baseia em que a soma algébrica dos heligiros ao longo de um percurso fechado, é zero; e a Lei dos Cortes se baseia em que a soma algébrica das heliforças que pertencem a um mesmo corte, é zero.

## A.7 TEORIA DE GRAFOS

A Teoria de Grafos é uma ferramenta essencial para a análise estrutural e a síntese estrutural de mecanismos. Freudenstein foi o primeiro em propor o uso da Teoria de Grafos para determinar o número de graus de liberdade de uma estrutura, pois a enumeração de todas as estruturas possíveis com um determinado número de graus de liberdade pode ser realizada considerando que aquela é apenas um conjunto finito de possíveis pares cinemáticos e, portanto um conjunto muito grande, mas finito de possíveis combinações estruturais (Merlet 2006).

Freudenstein concebeu um esquema gráfico (**grafo**) em que os vértices correspondem aos elos do mecanismo, e as arestas corresponde às articulações. Inicialmente esta descrição gráfica foi utilizada como uma simples representação gráfica de um mecanismo, mas estudos posteriores mostraram que a Teoria de Grafos era uma ferramenta poderosa para manipular estes gráficos, em especial, com computadores (Merlet 2006).

Por outro lado, os teoremas e algoritmos da Teoria de Grafos permitem também representar propriedades de comportamento do sistema, tais como deformações e forças, ou velocidades e movimentos, como as propriedades dos vértices ou arestas do grafo (Shai O. e Preiss 1999). O Método de Davies propõe representar uma cadeia ou mecanismo mediante grafos para a identificação das ações e dos movimentos da análise estática e cinemática respectivamente.

**ANEXO B – MÉTODO DE DAVIES: ESTÁTICA E  
CINEMÁTICA**



O Método de Davies é uma metodologia baseada nas Leis de Kirchhoff, na Teoria de Helicoides e na Teoria de Grafos, que permite determinar o comportamento estático e cinemático de uma cadeia cinemática fechada, sem considerar os efeitos dinâmicos dados pela força gravitacional, acelerações, inércias, entre outros.

O Método de Davies relaciona as forças, os torques, as velocidades angulares e as velocidades lineares de todas as juntas de uma cadeia cinemática, por meio da implementação das etapas apresentadas na frente.

No Anexo C, apresenta-se um exemplo de implementação do Método de Davies a um mecanismo de quatro barras em configuração RSSR, ou seja, com duas juntas rotativas e duas juntas esféricas, onde o atuador e a carga são aplicados nas juntas rotativas.

## B.1 CARACTERÍSTICAS TOPOLÓGICAS

### ETAPA 1.a:

Partindo de um **modelo físico** do mecanismo, gera-se uma **representação esquemática**, que é uma versão simplificada do modelo físico, contendo as informações de topologia e geometria, além do sistema de referência inercial  $O_{xyz}$ , que pode ser disposto de forma arbitrária, mas visando sempre reduzir a complexidade do problema.

Também se identifica: quais elementos encontram-se unidos por determinadas juntas; o tipo de junta, sendo rotativa, esférica, prismática, cilíndrica, etc; e as juntas a serem atuadas.

### ETAPA 1.b:

Depois de ter a representação esquemática, forma-se a **rede de acoplamentos** do mecanismo, que é a representação topológica do mecanismo, sendo apresentado como um polígono onde seus vértices são os acoplamentos ou **juntas** do mecanismo e as arestas são os corpos ou **elos** do mecanismo.

### ETAPA 1.c:

A partir da rede de acoplamentos e aplicando a Teoria de Grafos, obtém-se o **Grafo de Acoplamentos**  $GC$ , onde cada elo é representado por um **vértice** e cada junta é representada por uma **aresta**.

É preciso atribuir um sentido de orientação às arestas, de modo que sempre se direcionem dos vértices menores para os maiores. Isto

permite definir este grafo de acoplamentos como um **di-grafo**. Caso contrário, em que não se direcionaram as arestas, o grafo será denominado de **não direcionado**.

Os vértices devem ser numerados de menor a maior, as arestas devem ser representadas por letras, e ambos devem ser dispostos no sentido de orientação atribuída as mesmas.

### ETAPA 1.d:

Este Grafo de Acoplamentos com  $n$  vértices e  $j$  arestas, deve ser representado matematicamente através de uma matriz denominada **Matriz de Incidência**  $[I_d]_{n \times j}$ , onde as linhas representam os vértices  $n$  e as colunas as arestas  $j$  do Grafo de Acoplamentos. Para formação desta matriz, é preciso atender aos parâmetros estabelecidos na Equação B.1.

$$\begin{aligned} I_{d_{i,j}} &= 1 \text{ se } n_i \text{ é o vértice de partida da aresta } j_j, \\ I_{d_{i,j}} &= -1 \text{ se } n_i \text{ é o vértice de chegada da aresta } j_j, \\ I_{d_{i,j}} &= 0 \text{ se o vértice } n_i \text{ não apresenta adjacência com a aresta } j_j. \end{aligned} \tag{B.1}$$

### ETAPA 1.e:

A partir do escalonamento da Matriz de Incidência  $[I_d]_{n \times j}$  (Equação (B.1)) e o cancelamento das linhas nulas resultantes, obtém-se a Matriz Incidência-Cortes Escalonada  $[IQ_{esc}]_{\kappa \times j}$ .

De aqui para frente, o desenvolvimento do método se faz de forma particular, pois a análise estática e a análise cinemática apresentam certas particularidades que devem ser ressaltadas.

## B.2 IDENTIFICAÇÃO PARÂMETROS DA ESTÁTICA

Para a análise estática, é preciso determinar as características do mecanismo, envolvendo:

- o número de corpos ou elos  $n$ ,
- o número de pares cinemáticos ou juntas  $j$ ,
- o espaço de trabalho  $\lambda$ ,
- o número de ações por acoplamentos ativos  $C_a$ , e
- as ações passivas  $C_p$  ou restrições para cada uma das juntas.

O espaço de trabalho vai depender do ambiente de operação do mecanismo, como apresentado na seção A.3. O número de ações por acoplamentos ativos (seção A.4), obtém-se ao internalizar as ações externas geradas pelas cargas  $\sigma$  e reações  $A_R$  aplicadas nos acoplamentos ativos, transformando-as em **ações internas** ou **restrições** do mecanismo e gerando um mecanismo **Super Restringido**. E as ações passivas, são ações internas do mecanismo e dependerão do espaço de trabalho e do grau de liberdade  $f$  de cada junta, como se apresenta na Equação (B.2).

### ETAPA 2.a:

Para determinar estes acoplamentos ativos e passivos, constrói-se a **Representação das Ações nos Acoplamentos do Mecanismo**, onde se identificam as cargas  $\sigma$  e reações  $A_R$  aplicadas a cada uma das juntas, e as restrições de força e de momentos inerentes à configuração do mecanismo.

$$C_p = \lambda - f \quad (\text{B.2})$$

### ETAPA 2.b:

Tendo as informações dos acoplamentos do mecanismo:

- Calcula-se o **Grau de Restrição**  $C_S$ , que resulta da somatória das ações passivas (**Grau de Restrição bruto**  $C$ ) do mecanismo (Equação (B.3)) e das ações ativas, obtendo a Equação (B.4).

$$C = \sum_{i=1}^j C_{p_i} \quad (\text{B.3})$$

$$R = C + \sum_{t=1}^{j_a} C_{a_t} \quad (\text{B.4})$$

- Calcula-se o número de **Cortes-f**  $\kappa$ , que serão aqueles que removendo um único ramo do grafo e um número qualquer de cordas, separa o grafo em dois subgrafos independentes. O número de Cortes-f, obtém-se da Equação (B.5).

$$\kappa = n - 1 \quad (\text{B.5})$$

### B.3 OBTENÇÃO MATRIZES DA ESTÁTICA

#### ETAPA 3.a:

Substituindo na Matriz Incidência-Cortes Escalonada  $[IQ_{esc}]_{\kappa \times j}$  a coluna de cada junta  $j_i$  pelas colunas das ações internas  $C_{p_i} + C_{a_i}$ , obtêm-se a **Matriz de Cortes-f**  $[Q]_{\kappa \times C_S}$ :

$$[I_d]_{n \times j} \implies [Q]_{\kappa \times R} = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & \cdots & Q_{1,R} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & \cdots & Q_{2,R} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q_{\kappa,1} & Q_{\kappa,2} & \cdots & Q_{\kappa,R} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Esta matriz expressa a relação existente entre cada um dos Cortes-f  $\kappa$  (linhas da matriz) presentes no Grafo de Acoplamentos, e as restrições  $C_S$  do sistema (colunas da matriz) do mecanismo.

Para determinar quais das colunas da Matriz de Cortes-f representam as cordas do grafo, deve-se identificar aquelas que não representam vetores unitários.

#### ETAPA 3.b:

Deve-se construir a **Matriz das Ações**  $[A_d]_{\lambda \times C_S}$ , composta pelas heliforças de cada uma das ações internalizadas ou restrições  $C_S$  do sistema como apresentado na Equação (A.6).

Para a conformação das heliforças das restrições de força, tem-se que determinar três fatores importantes:

- O passo  $h$  do helicóide, que representa o tipo de heliforça de cada uma das restrições de força, e portanto precisa-se determinar o tipo de ação (linear, helicoidal ou rotacional) e escolher o passo segundo a Equação (A.7);
- O vetor direção  $\vec{S}$ , que depende da direção em que as restrições atuam sobre a junta como apresentado na Equação (B.7);
- O vetor posição  $\vec{S}o$ , que tendo a configuração:  $[x, y, z]^T$  depende da posição em que se encontra localizada a junta em questão (onde se apresenta a restrições de força) no momento da análise.

Para a formação das heliforças dos momentos ou torques, faz-se necessário apenas o vetor  $\vec{M}o$ , que será o vetor de direções apresentado

na Equação (B.7).

$$\vec{S}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{S}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{S}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Tendo as heliforças definidas para cada uma das restrições  $C_S$  do sistema, conforma-se a Matriz das Ações  $[A_d]_{\lambda \times C_S}$ , onde cada uma das heliforças é disposta na ordem em que foram dispostas na Matriz de Cortes  $[Q]_{\kappa \times C_S}$  (Equação B.6), e eliminam-se todas as linhas nulas apresentadas, com o objetivo de atingir a condição das dimensões  $\lambda \times C_S$  da Matriz das Ações  $[A_d]_{\lambda \times C_S}$ , obtendo uma matriz como apresentada na Equação (B.8).

$$[A_d]_{\lambda \times R} = [ \ \$_a^A \quad \$_b^A \quad \dots \quad \$_R^A \ ] \quad (\text{B.8})$$

### ETAPA 3.c:

Para expressar de forma mais adequada o sistema de equações matricial, isolam-se as magnitudes da Matriz das Ações  $[A_d]_{\lambda \times C_S}$  (Equação (B.8)), obtendo a **Matriz das Ações Unitárias**  $[\hat{A}_d]_{\lambda \times C_S}$  e o **Vetor das Magnitudes das Ações**  $[\vec{\Psi}]_{C_S \times 1}$ .

A Matriz das Ações Unitárias  $[\hat{A}_d]_{\lambda \times C_S}$  continuará tendo as mesmas dimensões da Matriz das Ações  $[A_d]_{\lambda \times C_S}$ , porém, conterà as heliforças unitárias de cada uma das restrições, como apresentado na Equação (B.9).

$$[\hat{A}_d]_{\lambda \times R} = [ \ \hat{\$}_a^A \quad \hat{\$}_b^A \quad \dots \quad \hat{\$}_R^A \ ] \quad (\text{B.9})$$

O Vetor das Magnitudes das Ações  $[\vec{\Psi}]_{C_S \times 1}$  conterà as magnitudes de cada uma das restrições do sistema, como apresentado na Equação (B.10).

$$[\vec{\Psi}]_{C_S \times 1} = [ \ \Psi_a \quad \Psi_b \quad \dots \quad \Psi_R \ ]^T \quad (\text{B.10})$$

**ETAPA 3.d:**

Para atingir a Lei dos Cortes (Seção A.6) estabelecida por Davies, tem-se que construir uma matriz que relacione as heliforças de todo o mecanismo (Equação (B.12)) com cada um dos Cortes- $f$   $\kappa$  feitos no mesmo, resultando na denominada **Matriz das Ações Unitárias em Rede**  $\left[ \hat{A}_n \right]_{\lambda \cdot \kappa \times C_S}$ .

A construção da Matriz das Ações Unitárias em Rede  $\left[ \hat{A}_n \right]_{\lambda \cdot \kappa \times C_S}$  é possível através da distribuição das heliforças normalizadas pertencentes a cada corte, obtida da multiplicação da Matriz das Ações Unitárias  $\left[ \hat{A}_d \right]_{\lambda \times C_S}$  pela matriz resultante da diagonalização de cada linha da Matriz de Cortes- $f$   $[Q]_{\kappa \times C_S}$  (Equação (B.6)). Esta operação matricial dá origem a expressão da Matriz das Ações Unitárias em Rede  $\left[ \hat{A}_n \right]_{\lambda \cdot \kappa \times C_S}$  apresentada na Equação (B.11).

$$\left[ \hat{A}_n \right]_{\lambda \cdot \kappa \times R} = \begin{bmatrix} \left[ \hat{A}_d \right]_{\lambda \times R} \cdot \text{diag} ([Q_1]_{1 \times R}) \\ \left[ \hat{A}_d \right]_{\lambda \times R} \cdot \text{diag} ([Q_2]_{1 \times R}) \\ \vdots \\ \left[ \hat{A}_d \right]_{\lambda \times R} \cdot \text{diag} ([Q_\kappa]_{1 \times R}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Operando matricialmente a Matriz das Ações Unitárias em Rede  $\left[ \hat{A}_n \right]_{\lambda \cdot \kappa \times C_S}$  e o Vetor das Magnitudes das Ações  $\left[ \vec{\Psi} \right]_{C_S \times 1}$ , obtém-se o sistema de equações da estática do mecanismo, como apresentado na Equação (B.12).

$$\begin{bmatrix} \left[ \hat{A}_n \right]_{\lambda \cdot \kappa \times R} \cdot \left[ \vec{\Psi} \right]_{C_S \times 1} \\ \left[ \hat{A}_d \right]_{\lambda \times R} \cdot \text{diag} ([Q_1]_{1 \times R}) \\ \left[ \hat{A}_d \right]_{\lambda \times R} \cdot \text{diag} ([Q_2]_{1 \times R}) \\ \vdots \\ \left[ \hat{A}_d \right]_{\lambda \times R} \cdot \text{diag} ([Q_\kappa]_{1 \times R}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \vdots \\ \Psi_R \end{bmatrix} = \left[ \vec{0} \right]_{\lambda \cdot \kappa \times 1} \quad (\text{B.12})$$

**ETAPA 3.e:**

Do escalonamento da Matriz das Ações Unitárias em Rede  $\left[\hat{A}_n\right]_{\lambda \cdot \kappa \times C_S}$  do qual resulta a **Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede**  $\left[\hat{A}_{n_{esc}}\right]_{(\lambda \cdot \kappa - S_D) \times C_S}$ , é possível determinar o número de variáveis independentes ou grau de liberdade  $S_N$  do sistema estático.

Para isto é necessário determinar alguns fatores importantes, sendo:

- As linhas nulas da Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede  $\left[\hat{A}_{n_{esc}}\right]_{(\lambda \cdot \kappa - S_D) \times C_S}$ , que representam as equações dependentes  $S_D$  do sistema,
- As linhas não nulas da Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede  $\left[\hat{A}_{n_{esc}}\right]_{(\lambda \cdot \kappa - S_D) \times C_S}$  ou **posto da matriz**  $a$ , que representam as equações independentes do sistema,
- As colunas que não pertencem a matriz identidade resultante do escalonamento, que representam as variáveis independentes do sistema.

O posto  $a$  da Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede  $\left[\hat{A}_{n_{esc}}\right]_{(\lambda \cdot \kappa - S_D) \times C_S}$ , por ser o número de equações linearmente independentes do sistema estático, pode ser obtido da Equação (B.13), sendo  $\lambda \cdot \kappa$  o número de linhas total da matriz  $\left[\hat{A}_n\right]_{\lambda \cdot \kappa \times C_S}$  e  $S_D$  o número de equações dependentes do sistema estático.

$$a = \lambda \cdot \kappa - S_D \quad (\text{B.13})$$

**ETAPA 3.f:**

O **grau de liberdade**  $S_N$  do sistema estático, obtém-se a partir do número de equações independentes do sistema ou posto  $a$  da Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede  $\left[\hat{A}_{n_{esc}}\right]_{(\lambda \cdot \kappa - S_D) \times C_S}$  e o número total de variáveis do sistema, sendo a dimensão do Vetor das Magnitudes das Ações  $\left[\vec{\Psi}\right]_{C_S \times 1}$ , é dizer, o número de restrições  $C_S$  do sistema, como apresentado na Equação (B.14).

$$S_N = R - a \quad (\text{B.14})$$

## B.4 IDENTIFICAÇÃO PARÂMETROS DA CINEMÁTICA

Para a análise cinemática, é preciso determinar as características do mecanismo, envolvendo:

- o número de corpos ou elos  $n$ ,
- o número de pares cinemáticos ou juntas  $j$ ,
- o espaço de trabalho  $\lambda$ , e
- o grau de liberdade por cada junta  $f$ .

O espaço de trabalho vai depender do ambiente de operação do mecanismo, como foi apresentado na Seção A.3. O grau de liberdade  $f$  de cada junta vai depender do tipo de junta que apresente o mecanismo.

### ETAPA 4.a:

Para determinar o grau de liberdade  $f$  para cada junta, constrói-se a **Representação dos Movimentos nos Acoplamentos do Mecanismo**, onde se identifica os movimentos inerentes à configuração do mecanismo.

### ETAPA 4.b:

Tendo as informações acima:

- Calcula-se o **Grau de Liberdade Bruto**  $F$ , que resulta da somatória dos graus de liberdade de cada uma das juntas do mecanismo, obtendo a Equação (B.15).

$$F = \sum_{i=1}^j f_i \quad (\text{B.15})$$

- Calcula-se o número de **Circuitos-f**  $\nu$ , que serão aqueles que conformem uma malha fechada com um número qualquer de ramos e uma única corda. O número de Circuitos-f, obtém-se da Equação (B.16).

$$\nu = j - n + 1 \quad (\text{B.16})$$

## B.5 OBTENÇÃO MATRIZES DA CINEMÁTICA

### ETAPA 5.a:

Transpondo a Matriz Incidência-Cortes Escalonada  $[IQ_{esc}]_{\kappa \times j}$ , invertendo o signo, eliminando a Matriz Identidade  $[I]_{\kappa}$  resultante, adicionando outra Matriz Identidade  $[I]_{\nu}$ , substituindo a coluna de cada junta  $j_i$  por um número de colunas igual ao número dos graus de liberdade ( $f_i$ ) da mesma junta, é possível obter a **Matriz de Circuitos-f**  $[B]_{\nu \times F}$  (Equação (B.17)).

Esta matriz expressa de forma matemática à relação existente entre cada um dos Circuitos-f  $\nu$  (linhas da matriz) presentes no Grafo de Acoplamentos, e a somatória dos graus de liberdade das juntas ou Grau de Liberdade Bruto  $F$  (colunas da matriz) do mecanismo.

### ETAPA 5.b:

Deve-se construir a **Matriz dos Movimentos**  $[M_d]_{\lambda \times F}$ , composta pelos heliños de cada um dos graus de liberdade  $f$  das juntas do mecanismo, como apresentado na Equação (A.5).

$$\begin{aligned} [I_d]_{n \times j} &\implies - [IQ_{esc}]_{\kappa \times j}^T = \\ &\left[ \begin{array}{cccc} U_{1,j} & U_{2,j} & \cdots & U_{\kappa,j} \\ U_{1,(j-1)} & U_{2,(j-1)} & \cdots & U_{\kappa,(j-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ U_{1,(\kappa+1)} & U_{2,(\kappa+1)} & \cdots & U_{\kappa,(\kappa+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right] \\ &\implies B_{\nu \times F} = \left[ \begin{array}{cccc|c} U_{1,j} & U_{2,j} & \cdots & U_{\kappa,j} & [I]_{\nu} \\ U_{1,(j-1)} & U_{2,(j-1)} & \cdots & U_{\kappa,(j-1)} & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ U_{1,(\kappa+1)} & U_{2,(\kappa+1)} & \cdots & U_{\kappa,(\kappa+1)} & \end{array} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Para a conformação dos heliños das velocidades angulares ou das liberdades angulares, tem-se que determinar três fatores importantes, sendo:

- O passo  $h$  do helicoide, que representar o tipo de heliño de cada uma das velocidades angulares ou liberdades angulares, pelo qual

se precisa determinar o tipo de ação (linear ou rotacional) e escolher o passo segundo a Equação (A.7);

- O vetor direção  $\vec{S}$ , que depende da direção em que as liberdades resultam do movimento da junta como apresentado na Equação (B.7);
- O vetor posição  $\vec{S}o$ , que tendo a configuração:  $[x, y, z]^T$ , dependerá da posição em que se encontra localizada a junta em questão (onde se apresenta o grau de liberdade angular) no momento da análise.

Para a formação dos heligiros das velocidades lineares ou liberdades lineares só precisa-se do vetor  $\vec{v}$ , que será o mesmo vetor de direções apresentado na Equação (B.7).

Tendo os heligiros definidos para cada um dos graus de liberdade  $f$  das juntas do mecanismo, conforma-se a Matriz dos Movimentos  $[M_d]_{\lambda \times F}$ , onde cada um dos heligiros são disposto em ordem ascendente segundo a denominação alfabética empregada para as juntas, e eliminam-se todas as linhas nulas apresentadas, com o objetivo de atingir a condição das dimensões  $\lambda \times F$  da Matriz dos Movimentos  $[M_d]_{\lambda \times F}$ , obtendo uma matriz como apresentada na Equação (B.18).

$$[M_d]_{\lambda \times F} = \begin{bmatrix} \$^M_a & \$^M_b & \dots & \$^M_F \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

### ETAPA 5.c:

Para expressar de forma mais adequada o sistema de equações matricial, isolam-se as magnitudes da Matriz dos Movimentos  $[M_d]_{\lambda \times F}$  (Equação B.18), obtendo a **Matriz dos Movimentos Unitários**  $[\hat{M}_d]_{\lambda \times F}$  e o **Vetor das Magnitudes dos Movimentos**  $[\vec{\Phi}]_{F \times 1}$ .

A Matriz dos Movimentos Unitários  $[\hat{M}_d]_{\lambda \times F}$  continuará tendo as mesmas dimensões da Matriz dos Movimentos  $[M_d]_{\lambda \times F}$ , porém, conterá os heligiros unitários de cada um dos graus de liberdade, como apresentado na Equação B.19.

$$[\hat{M}_d]_{\lambda \times F} = \begin{bmatrix} \hat{\$}^M_a & \hat{\$}^M_b & \dots & \hat{\$}^M_F \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

O Vetor das Magnitudes dos Movimentos  $\left[\vec{\Phi}\right]_{F \times 1}$  conterà as magnitudes de cada um dos graus de liberdade do sistema, como apresentado na Equação B.20.

$$\left[\vec{\Phi}\right]_{F \times 1} = \left[ \Phi_a \quad \Phi_b \quad \cdots \quad \Phi_F \right]^T \quad (\text{B.20})$$

**ETAPA 5.d:**

Para atingir a Lei dos Circuitos (Seção A.6) estabelecida por Davies, tem-se que construir uma matriz que relacione os heligiros de todo o mecanismo (Equação (B.22)) com cada um dos Circuitos-f  $\nu$  presentes no mesmo, resultando na denominada **Matriz dos Movimentos Unitários em Rede**  $\left[\hat{M}_n\right]_{\lambda \cdot \nu \times F}$ .

$$\left[\hat{M}_n\right]_{\lambda \cdot \nu \times F} = \begin{bmatrix} \left[\hat{M}_d\right]_{\lambda \times F} \cdot \text{diag}([B_1]_{1 \times F}) \\ \left[\hat{M}_d\right]_{\lambda \times F} \cdot \text{diag}([B_2]_{1 \times F}) \\ \vdots \\ \left[\hat{M}_d\right]_{\lambda \times F} \cdot \text{diag}([B_\nu]_{1 \times F}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

A construção da Matriz dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[\hat{M}_n\right]_{\lambda \cdot \nu \times F}$  é possível através da distribuição dos heligiros normalizados pertencentes a cada circuito, o qual se obtém da multiplicação da Matriz dos Movimentos Unitários  $\left[\hat{M}_d\right]_{\lambda \times F}$  pela matriz resultante da diagonalização de cada linha da Matriz de Circuitos-f  $[B]_{\nu \times F}$  (Equação (B.17)). Esta operação matricial da origem a expressão da Matriz dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[\hat{M}_n\right]_{\lambda \cdot \nu \times F}$  apresentada na Equação (B.21).

Operando a Matriz dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[\hat{M}_n\right]_{\lambda \cdot \nu \times F}$  e o Vetor das Magnitudes dos Movimentos  $\left[\vec{\Phi}\right]_{F \times 1}$ , obtém-se o sistema de equações apresentado na Equação (B.22).

$$\begin{aligned}
 & \left[ \hat{M}_n \right]_{\lambda \cdot \nu \times F} \cdot \left[ \vec{\Phi} \right]_{F \times 1} = \\
 & \left[ \begin{array}{c} \left[ \hat{M}_d \right]_{\lambda \times F} \cdot \text{diag}([B_1]_{1 \times F}) \\ \left[ \hat{M}_d \right]_{\lambda \times F} \cdot \text{diag}([B_2]_{1 \times F}) \\ \vdots \\ \left[ \hat{M}_d \right]_{\lambda \times F} \cdot \text{diag}([B_\nu]_{1 \times F}) \end{array} \right] \cdot \left[ \Phi_a \quad \Phi_b \quad \dots \quad \Phi_F \right]^T = \left[ \vec{0} \right]_{\lambda \cdot \nu \times 1}
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

### ETAPA 5.e:

Do escalonamento da Matriz dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[ \hat{M}_n \right]_{\lambda \cdot \nu \times F}$ , do qual resulta a **Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede**  $\left[ \hat{M}_{nesc} \right]_{(\lambda \cdot \nu - K_D) \times F}$ , é possível determinar o número de variáveis independentes ou grau de liberdade  $F_N$  do sistema cinemático.

Para isto é necessário determinar alguns fatores importantes, sendo:

- As linhas nulas da Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[ \hat{M}_{nesc} \right]_{(\lambda \cdot \nu - K_D) \times F}$ , que representam as equações dependentes  $K_D$  do sistema,
- As linhas não nulas da Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[ \hat{M}_{nesc} \right]_{(\lambda \cdot \nu - K_D) \times F}$  ou **posto da matriz**  $m$ , que representam as equações independentes do sistema,
- As colunas que não pertencem a matriz identidade resultante do escalonamento que representam as variáveis independentes do sistema.

O posto  $m$  da Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[ \hat{M}_{nesc} \right]_{(\lambda \cdot \nu - K_D) \times F}$ , por ser o número de equações linearmente independentes do sistema estático, pode ser obtido da Equação (B.23), sendo  $\lambda \cdot \nu$  o número de linhas total da matriz  $\left[ \hat{M}_n \right]_{\lambda \cdot \nu \times F}$  e  $K_D$  o número de equações dependentes do sistema cinemático.

$$m = \lambda \cdot \nu - K_D \quad (\text{B.23})$$

**ETAPA 5.f:**

O grau de liberdade  $F_N$  do sistema cinemático, obtém-se a partir do número de equações independentes do sistema ou posto  $m$  da Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[ \hat{M}_{n_{esc}} \right]_{(\lambda \cdot \nu - K_D) \times F}$  e o número total de variáveis do sistema, sendo a dimensão do Vetor das Magnitudes dos Movimentos  $\left[ \vec{\Phi} \right]_{F \times 1}$ , ou seja, o número de graus de liberdade  $F$  do sistema, como apresentado na Equação (B.24).

$$F_N = F - m \quad (\text{B.24})$$



**ANEXO C – IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE  
DAVIES**



Com o objetivo de acompanhar o desenvolvimento feito, supõe-se um mecanismo de quatro barras, com duas juntas rotativas e duas juntas esféricas, como apresentado na Figura 58, e com as características da Tabela 24. Algumas destas características serão justificadas ao longo desta seção.

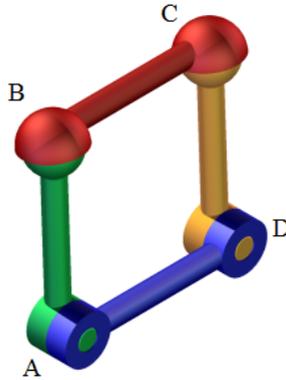


Figura 58: Mecanismo de quatro barras em configuração RSSR

Tabela 24: Características principais do mecanismo em configuração RSSR

	Simbolo	Valor
Elos	$n$	4
Juntas	$j$	4
Espaço de Trabalho	$\lambda$	6
Cortes-f	$\kappa$	3
Grau de Liberdade no modelo de estática	$S_N$	1
Circuitos-f	$v$	1
Grau de Liberdade na Cinemática	$F_N$	2
Atuadores	$A_R$	1
Cargas	$\sigma$	1

## C.1 CARACTERÍSTICAS TOPOLÓGICAS

### ETAPA 1.a:

Do modelo físico do mecanismo (Figura 58), obtém-se a representação esquemática apresentada na Figura 59. Sendo as juntas  $a$  e  $d$  rotativas, as juntas  $b$  e  $c$  esféricas, como apresentado na Tabela 25, e os corpos 1, 2 e 3 moveis, o corpo 0 fixo e o sistema inercial  $O_{xyz}$  definido na junta  $a$ .

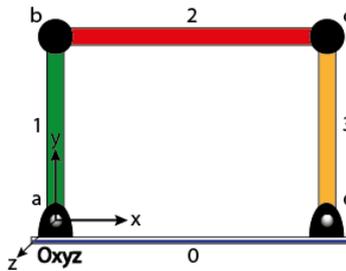


Figura 59: Representação esquemática do RSSR

### ETAPA 1.b:

Determinados estes parâmetros, forma-se a rede de acoplamentos como apresentado na Figura (60a). Quando se apresentam tipos diferentes de juntas, é importante identificá-las mediante representações diferentes, sendo para o caso do mecanismo RSSR (Figura (60a)), os círculos pretos a representação das juntas esféricas e os círculos brancos a representação das juntas rotativas.

Tabela 25: Identificação dos acoplamentos do mecanismo em configuração RSSR

Junta	Elementos	Tipo	Função
a	0,1	Rotativa	Reação (Atuador)
b	1,2	Esférica	Transmissão
c	2,3	Esférica	Transmissão
d	0,3	Rotativa	Carga

### ETAPA 1.c:

Constroi-se o grafo de acoplamentos  $G_c$  aplicando a Teoria de

Grafos (Seção A.7) como apresentado na Figura (60b). Neste caso, atribui-se a direção da aresta  $a$  sendo do corpo 0 e chegando ao corpo 1 e assim por diante.

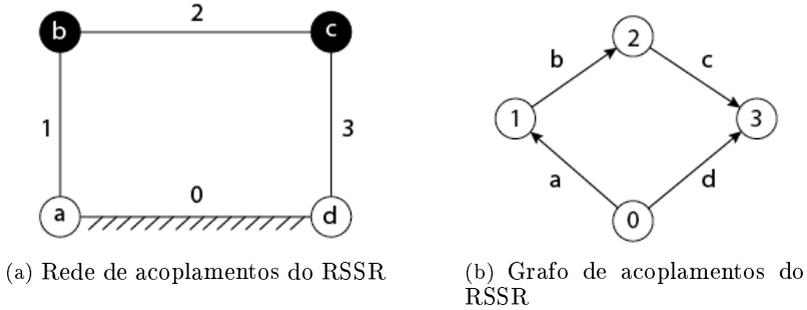


Figura 60: Acoplamentos

#### ETAPA 1.d:

Para formação da Matriz de Incidência  $[I_d]_{n \times j}$ , precisa-se atender aos parâmetros estabelecidos na Equação (B.1). Na Equação (C.1) apresenta-se a Matriz de Incidência  $[I_d]_{4 \times 4}$  correspondente ao grafo de acoplamentos do mecanismo de quatro barras em configuração RSSR.

$$[I_d]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (C.1)$$

#### ETAPA 1.e:

Do escalonamento da Matriz de Incidência (Equação (C.1)), e cancelando todas as linhas nulas resultantes, obtém-se a Matriz Incidência-Cortes Escalonada  $[IQ_{esc}]_{3 \times 4}$ , como apresentado na Equação (C.2).

$$[IQ_{esc}]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \quad (C.2)$$

## C.2 IDENTIFICAÇÃO PARÂMETROS DA ESTÁTICA

#### ETAPA 2.a:

Para determinar os acoplamentos ativos e passivos, constrói-se

a **Representação das Ações nos Acoplamentos do Mecanismo** como apresentado na Figura 61.

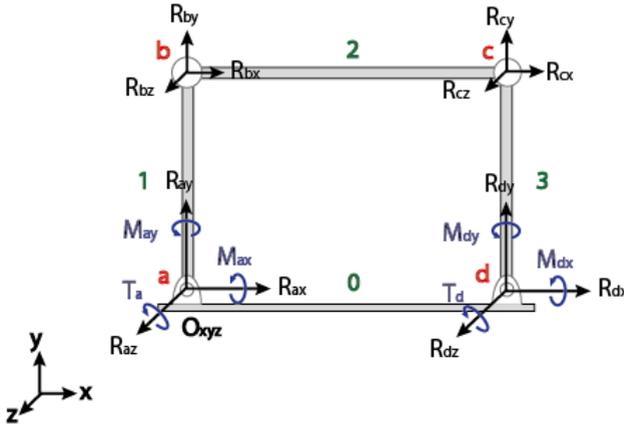


Figura 61: Representação das ações nos acoplamentos do RSSR

- Para a junta  $a$ , tem-se: Um torque de reação (torque entregue pelo atuador  $A_{R1}$ )  $T_a$ , as restrições de força  $R_{ax}$ ,  $R_{ay}$  e  $R_{az}$  as quais impedem o deslocamento entre os corpos 0 e 1 que são adjacentes à junta, e as restrições de momentos  $M_{ax}$  e  $M_{ay}$  as quais impedem que o corpo 0 gire sobre o eixo  $x$  e que o corpo 1 gire sobre o eixo  $y$  respectivamente.
- Para a junta  $b$  tem-se: as restrições de força  $R_{bx}$ ,  $R_{by}$  e  $R_{bz}$  as quais impedem o deslocamento entre os corpos 1 e 2 que são adjacentes à junta, porém não se apresentam restrições de momentos nesta junta, pois sendo uma junta esférica possui liberdade de giro nos três eixos:  $x$ ,  $y$  e  $z$ .
- Para a junta  $c$  tem-se: as restrições de força  $R_{cx}$ ,  $R_{cy}$  e  $R_{cz}$  as quais impedem o deslocamento entre os corpos 2 e 3 que são adjacentes à junta, porém não se apresentam restrições de momentos nesta junta, pois sendo uma junta esférica possui liberdade de giro nos três eixos:  $x$ ,  $y$  e  $z$ .
- Para a junta  $d$  tem-se: Um torque de carga (torque gerado pela carga  $\sigma_1$  a ser movimentada)  $T_d$ , as restrições de força  $R_{dx}$ ,  $R_{dy}$  e  $R_{dz}$  as quais impedem o deslocamento entre os corpos 0 e 4 que são adjacentes à junta, e as restrições de momentos  $M_{dx}$  e  $M_{dy}$  as

quais impedem que o corpo 0 gire sobre o eixo  $x$  e que o corpo 4 gire sobre o eixo  $y$  respectivamente. Estes dados são apresentados em resumo na Tabela 26.

Tabela 26: Identificação das ações estáticas no mecanismo em configuração RSSR

Junta	Torques e Momentos	Restrições
a	$T_a, M_{a_x}$ e $M_{a_y}$	$R_{a_x}, R_{a_y}$ e $R_{a_z}$
b	-	$R_{b_x}, R_{b_y}$ e $R_{b_z}$
c	-	$R_{c_x}, R_{c_y}$ e $R_{c_z}$
d	$T_d, M_{d_x}$ e $M_{d_y}$	$R_{d_x}, R_{d_y}$ e $R_{d_z}$

### ETAPA 2.b:

Para a obtenção do Grau de Restrição do mecanismo e o número de Cortes- $f$   $\kappa$ , precisa-se identificar da Figura (61), os seguintes parâmetros:

- $\sum_{t=1}^{j_a} C_{a_t} = 2$ , que é igual à somatória dos torques presentes no mecanismo ( $T_a$  e  $T_d$ );
- $C_{p_1} = 5$  que é igual ao número de restrições da junta  $a$  ( $R_{a_x}, R_{a_y}, R_{a_z}, M_{a_x}$  e  $M_{a_y}$ ), e que pode ser comprovado mediante a aplicação da Equação (B.2) sendo  $C_{p_1} = \lambda - f = 6 - 1 = 5$ , com  $f = 1$  por ser uma junta rotativa (um grau de liberdade);
- $C_{p_2} = 3$  que é igual ao número de restrições da junta  $b$  ( $R_{b_x}, R_{b_y}, R_{b_z}$ ), e que pode ser comprovado mediante a aplicação da Equação (B.2) sendo  $C_{p_2} = \lambda - f = 6 - 3 = 3$ , com  $f = 3$  por ser uma junta esférica (três graus de liberdade);
- $C_{p_3} = 3$  que é igual ao número de restrições da junta  $c$  ( $R_{c_x}, R_{c_y}, R_{c_z}$ ), e que pode ser comprovado mediante a aplicação da Equação (B.2) sendo  $C_{p_3} = \lambda - f = 6 - 3 = 3$ , com  $f = 3$  por ser uma junta esférica (três graus de liberdade);
- $C_{p_4} = 5$  que é igual ao número de restrições da junta  $d$  ( $R_{d_x}, R_{d_y}, R_{d_z}, M_{d_x}$  e  $M_{d_y}$ ), e que pode ser comprovado mediante a aplicação da Equação (B.2) sendo  $C_{p_4} = \lambda - f = 6 - 1 = 5$ , com  $f = 1$  por ser uma junta rotativa (um grau de liberdade).

O grau de restrição bruto está definido pela Equação (B.3), sendo  $C = \sum_{i=1}^j Cp_i = 5 + 3 + 3 + 5 = 16$  e o Grau de Restrição do mecanismo está definido pela Equação (B.4), obtendo a Equação (C.3)

$$R = C + Ca = 16 + 2 = 18 \quad (C.3)$$

O número de Cortes-f  $\kappa$ , está definido pela Equação (B.5), obtendo a Equação (C.4).

$$\kappa = n - 1 = 4 - 1 = 3 \quad (C.4)$$

### C.3 OBTENÇÃO MATRIZES DA ESTÁTICA

#### ETAPA 3.a:

Da Matriz Incidência-Cortes Escalonada  $[IQ_{esc}]_{3 \times 4}$  (Equação (C.2)), substitui-se a coluna de cada junta  $j_i$ , por um número de colunas igual ao número das ações internas ( $C_{p_i} + C_{a_i}$ ) da mesma junta, deixando as colunas correspondentes às ações ativas ao final da matriz, como apresentado na Equação (C.5).

$$[Q]_{3 \times 18} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 18} \quad (C.5)$$

As dimensões da Matriz de Cortes-f  $[Q]_{\kappa \times C_S}$  (Equação (C.5)) estão definidas por dois conceitos:

- As linhas representam o número de Cortes-f  $\kappa$ , obtido da Equação (C.4), sendo  $[Corte\ a, Corte\ b, Corte\ c]^T$
- As colunas representam o grau de restrição do mecanismo obtido

$${}^A R_{a_x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ R_{a_x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^A R_{a_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ R_{a_y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^A R_{a_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ R_{a_z} \end{pmatrix}, \quad {}^A M_{a_x} = \begin{pmatrix} M_{a_x} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^A M_{a_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_{a_y} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^A T_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T_a \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^A R_{b_x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b_y \cdot R_{b_x} \\ \dots \\ R_{b_x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^A R_{b_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_x \cdot R_{b_y} \\ \dots \\ 0 \\ R_{b_y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^A R_{b_z} = \begin{pmatrix} b_y \cdot R_{b_z} \\ -b_x \cdot R_{b_z} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ R_{b_z} \end{pmatrix}, \quad {}^A R_{c_x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_y \cdot R_{c_x} \\ \dots \\ R_{c_x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
\$^A R_{c_y} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_x \cdot R_{c_y} \\ \dots\dots \\ 0 \\ R_{c_y} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \$^A R_{c_z} = \begin{pmatrix} c_y \cdot R_{c_z} \\ -c_x \cdot R_{c_z} \\ 0 \\ \dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ R_{c_z} \end{pmatrix} \\
\$^A R_{d_x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d_y \cdot R_{d_x} \\ \dots\dots \\ R_{d_x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \$^A R_{d_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_x \cdot R_{d_y} \\ \dots\dots \\ 0 \\ R_{d_y} \\ 0 \end{pmatrix} \\
\$^A R_{d_z} &= \begin{pmatrix} d_y \cdot R_{d_z} \\ -d_x \cdot R_{d_z} \\ 0 \\ \dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ R_{d_z} \end{pmatrix}, \quad \$^A M_{d_x} = \begin{pmatrix} M_{d_x} \\ 0 \\ 0 \\ \dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\$^A M_{d_y} &= \begin{pmatrix} 0 \\ M_{d_y} \\ 0 \\ \dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \$^A T_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T_d \\ \dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(C.6)





Matriz das Ações Unitárias em Rede  $[\hat{A}_n]_{18 \times 18}$  apresentada na Equação (C.10).

$$\begin{aligned}
 [\hat{A}_n]_{18 \times 18} = & \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_y & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_x & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_y & b_x & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & d_y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -d_x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -d_y & d_x & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & d_y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -d_x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -d_y & d_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & c_y & 0 & 0 & d_y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -c_x & 0 & 0 & -d_x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -c_y & c_x & 0 & -d_y & d_x & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}_{18 \times 18}
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

**ETAPA 3.e:**

Escalonando a Matriz das Ações Unitárias em Rede  $[\hat{A}_n]_{18 \times 18}$  (Equação (C.10)), obtém-se a Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede  $[\hat{A}_{nesc}]_{(6 \cdot 3 - 1) \times 18}$  da Equação (C.11), apresentando: uma variável  $D$  em substituição da expressão  $(b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x - b_x \cdot d_y + b_y \cdot dx + c_x \cdot dy - c_y \cdot dx)$ ; uma linha nula o que quer dizer que se apresenta uma equação dependente no sistema, sendo  $S_D = 1$  e apresentando um posto  $a$  da matriz, como expressado na Equação (C.12).

$$[\hat{A}_{nesc}]_{17 \times 18} = [I]_{17} \begin{bmatrix} \frac{-(b_x - c_x)}{D} \\ \frac{-(b_y - c_y)}{D} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-(b_x - c_x)}{D} \\ \frac{-(b_y - c_y)}{D} \\ 0 \\ \frac{-(b_x - c_x)}{D} \\ \frac{-(b_y - c_y)}{D} \\ 0 \\ \frac{b_x - c_x}{D} \\ \frac{b_y - c_y}{D} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x}{D} \end{bmatrix}_{17 \times 18} \quad (C.11)$$

Também se obtém uma única coluna não pertencente à Matriz Identidade  $[I]_{17}$  (Equação (C.11)), que representa a variável independente do sistema sendo para o RSSR o torque de carga  $T_d$  aplicado ao mecanismo na junta  $d$ .

$$a = \lambda \cdot \kappa - S_D = 6 \cdot 3 - 1 = 17 \quad (C.12)$$

**ETAPA 3.f:**

O grau de liberdade  $S_N$  do sistema estático, obtém-se a partir do número de equações independentes do sistema ou posto  $a$  da Matriz

Escalonada das Ações Unitárias em Rede  $\left[\hat{A}_{n_{esc}}\right]_{(18-1)\times 18}$  e o número de restrições  $C_S$  do sistema, segundo o apresentado na Equação (C.13).

$$S_N = R - a = 18 - 17 = 1 \quad (\text{C.13})$$

#### C.4 IDENTIFICAÇÃO PARÂMETROS DA CINEMÁTICA

##### ETAPA 4.a:

Para determinar estes graus de liberdade para cada junta, constrói-se a **Representação dos Movimentos nos Acoplamentos do Mecanismo** como apresentado na Figura (62).

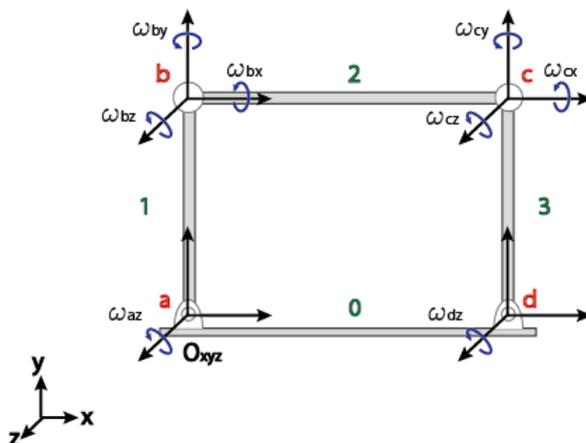


Figura 62: Representação dos movimentos nos acoplamentos do RSSR

- Para a junta  $a$ , tem-se: Uma liberdade angular  $\omega_{a_z}$  a qual permite obter uma velocidade angular de reação (velocidade angular entregue pelo atuador) no eixo  $z$ .
- Para a junta  $b$ , tem-se: Uma liberdade angular  $\omega_{b_z}$  a qual permite obter uma velocidade angular no eixo  $z$ ; Uma liberdade angular  $\omega_{b_y}$ , mas que não gera nenhuma velocidade angular devido à configuração do mecanismo, pois está restrita a rotação no eixo  $y$ ; E uma liberdade angular  $\omega_{b_x}$ , que apresenta movimento no eixo  $x$ , denominada **grau de liberdade passivo** (Seção A.2), pois a rotação apresentada neste eixo não influencia no movimento sobre

a carga nem reação aplicados ao mecanismo.

- Para a junta  $c$ , tem-se: Uma liberdade angular  $\omega_{c_z}$  a qual permite obter uma velocidade angular no eixo  $z$ ; Uma liberdade angular  $\omega_{c_y}$ , mas que não gera nenhuma velocidade angular devido à configuração do mecanismo, pois está restrita a rotação no eixo  $y$ ; E uma liberdade angular  $\omega_{c_x}$ , que apresenta movimento no eixo  $x$ , gerando um grau de liberdade passivo.
- Para a junta  $d$ , tem-se: Uma liberdade angular  $\omega_{d_z}$  a qual permite obter uma velocidade angular de carga (velocidade angular entregue à carga aplicada) no eixo  $z$ .

Tabela 27: Identificação das ações cinemáticas no mecanismo em configuração RSSR

Junta	Velocidades Angulares
a	$\omega_{a_z}$
b	$\omega_{b_x}, \omega_{b_y}, \omega_{b_z}$
c	$\omega_{c_x}, \omega_{c_y}, \omega_{c_z}$
d	$\omega_{d_z}$

#### ETAPA 4.b:

Para a obtenção do Grau de Liberdade Bruto, precisa-se identificar da Figura (62), os seguintes parâmetros:

- $f_1 = 1$  que é igual ao grau de liberdade da junta  $a$  ( $\omega_{a_z}$ ), pois toda junta rotativa só apresenta um grau de liberdade rotacional ou angular;
- $f_2 = 3$  que é igual aos graus de liberdade da junta  $b$  ( $\omega_{b_x}, \omega_{b_y}, \omega_{b_z}$ ), pois toda junta esférica apresenta um grau de liberdade rotacional ou angular para os três eixos  $x, y$  e  $z$ ;
- $f_3 = 3$  que é igual aos graus de liberdade da junta  $c$  ( $\omega_{c_x}, \omega_{c_y}, \omega_{c_z}$ ), pois toda junta esférica apresenta um grau de liberdade rotacional ou angular para os três eixos  $x, y$  e  $z$ ;
- $f_4 = 1$  que é igual ao grau de liberdade da junta  $d$  ( $\omega_{d_z}$ ), pois toda junta rotativa só apresenta um grau de liberdade rotacional ou angular.

O grau de liberdade bruto está definido pela Equação (B.15), obtendo a Equação (C.14)

$$F = \sum_{i=1}^j f_i = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 \quad (\text{C.14})$$

O número de Circuitos-f  $\nu$  está definido pela Equação (B.16), obtendo a Equação (C.15).

$$\nu = j - n + 1 = 4 - 4 + 1 = 1 \quad (\text{C.15})$$

## C.5 OBTENÇÃO MATRIZES DA CINEMÁTICA

### ETAPA 5.a:

Transpondo a Matriz Incidência-Cortes Escalonada  $[IQ_{esc}]_{3 \times 4}$  (Equação (C.2)), invertendo o signo, eliminando a Matriz Identidade  $[I]_3$  resultante, adicionando outra Matriz Identidade  $[I]_1$ , substituindo a coluna de cada junta  $j_i$  por um número de colunas igual ao número de graus de liberdade ( $f_i$ ) da mesma junta, obtém-se a Matriz de Circuitos-f  $[B]_{\nu \times F}$ , como apresentada na Equação (C.16).

$$[B]_{1 \times 8} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times 8} \quad (\text{C.16})$$

As dimensões da Matriz de Circuitos-f  $[B]_{\nu \times F}$  (Equação (C.16)) estão definidas por dois conceitos:

- As linhas representam o número de Circuitos-f  $\nu$ , sendo  $[Circuito\ 1]^T$ .
- As colunas representam o grau de liberdade bruto do mecanismo, sendo  $[\omega_{a_z}, \omega_{b_x}, \omega_{b_y}, \omega_{b_z}, \omega_{c_x}, \omega_{c_y}, \omega_{c_z}, \omega_{d_z}]$ .

### ETAPA 5.b:

Para a construção da Matriz dos Movimentos  $[M_d]_{\lambda \times F}$ , precisa-se construir para cada grau de liberdade  $f$  do sistema os heligiros correspondentes com a estrutura apresentada na Equação (A.5).

Supondo que cada junta  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  está disposta nas coordenadas  $(0, 0, 0)$ ,  $(b_x, b_y, 0)$ ,  $(c_x, c_y, 0)$  e  $(d_x, d_y, 0)$  respectivamente, tem-se os

heliros correspondentes a cada um dos graus de liberdade das juntas, como apresentado na Equação (C.17).

$$\begin{aligned}
 {}^M\omega_{a_z} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{a_z} \\ \dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & {}^M\omega_{b_x} &= \begin{pmatrix} \omega_{b_x} \\ 0 \\ 0 \\ \dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ -b_y \cdot \omega_{b_x} \end{pmatrix} \\
 {}^M\omega_{b_y} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{b_y} \\ 0 \\ \dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ b_x \cdot \omega_{b_y} \end{pmatrix}, & {}^M\omega_{b_z} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{b_z} \\ \dots\dots \\ b_y \cdot \omega_{b_z} \\ -b_x \cdot \omega_{b_z} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 {}^M\omega_{c_x} &= \begin{pmatrix} \omega_{c_x} \\ 0 \\ 0 \\ \dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ -c_y \cdot \omega_{c_x} \end{pmatrix}, & {}^M\omega_{c_y} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{c_y} \\ 0 \\ \dots\dots \\ 0 \\ 0 \\ c_x \cdot \omega_{c_y} \end{pmatrix} \\
 {}^M\omega_{c_z} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{c_z} \\ \dots\dots \\ c_y \cdot \omega_{c_z} \\ -c_x \cdot \omega_{c_z} \\ 0 \end{pmatrix}, & {}^M\omega_{d_z} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{d_z} \\ \dots\dots \\ d_y \cdot \omega_{d_z} \\ -d_x \cdot \omega_{d_z} \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{C.17}$$

Tendo os heliros definidos para cada um dos graus de liberdade  $f$  das juntas, conforma-se a Matriz dos Movimentos  $[M_d]_{6 \times 8}$ , como apresentado na Equação (C.18), onde cada um dos heliros é dispostos na ordem em que foram dispostos na Matriz de Circuitos-f  $[B]_{1 \times 8}$

(Equação (C.16)), sendo:  $[\hat{\$}^M \omega_{a_z}, \hat{\$}^M \omega_{b_x}, \hat{\$}^M \omega_{b_y}, \hat{\$}^M \omega_{b_z}, \hat{\$}^M \omega_{c_x}, \hat{\$}^M \omega_{c_y}, \hat{\$}^M \omega_{c_z}, \hat{\$}^M \omega_{d_z}]$

Neste caso não se precisa eliminar linhas, pois além de não se apresentar, cumpre-se com a condição das dimensões  $\lambda \times F = 6 \times 8$  da Matriz dos Movimentos  $[M_d]_{\lambda \times F}$  para o mecanismo RSSR.

$$[M_d]_{6 \times 8} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{b_x} & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \omega_{b_y} & 0 & & & & \\ \omega_{a_z} & 0 & 0 & \omega_{b_z} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & b_y \cdot \omega_{b_z} & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & -b_x \cdot \omega_{b_z} & & & & \\ 0 & -b_y \cdot \omega_{b_x} & b_x \cdot \omega_{b_y} & 0 & & & & \\ & \omega_{c_x} & 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & \omega_{c_y} & 0 & 0 & & & \\ \dots & 0 & 0 & \omega_{c_z} & \omega_{d_z} & & & \\ & 0 & 0 & c_y \cdot \omega_{c_z} & d_y \cdot \omega_{d_z} & & & \\ & 0 & 0 & -c_x \cdot \omega_{c_z} & -d_x \cdot \omega_{d_z} & & & \\ -c_y \cdot \omega_{c_x} & c_x \cdot \omega_{c_y} & 0 & 0 & 0 & & & \end{bmatrix}_{6 \times 8} \quad (\text{C.18})$$

### ETAPA 5.c:

Para obter a Matriz dos Movimentos Unitários  $[\hat{M}_d]_{6 \times 8}$  do RSSR, escalona-se a Matriz dos Movimentos  $[M_d]_{6 \times 8}$  (Equação (C.18)), com os heligros unitários dispostos segundo o vetor:  $[\hat{\$}^M \omega_{a_z}, \hat{\$}^M \omega_{b_x}, \hat{\$}^M \omega_{b_y}, \hat{\$}^M \omega_{b_z}, \hat{\$}^M \omega_{c_x}, \hat{\$}^M \omega_{c_y}, \hat{\$}^M \omega_{c_z}, \hat{\$}^M \omega_{d_z}]$ , obtendo a Equação (C.19).

$$[\hat{M}_d]_{6 \times 8} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b_y & 0 & 0 & c_y & d_y \\ 0 & 0 & 0 & -b_x & 0 & 0 & -c_x & -d_x \\ 0 & -b_y & b_x & 0 & -c_y & c_x & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 8} \quad (\text{C.19})$$

O Vetor das Magnitudes dos Movimentos  $[\vec{\Phi}]_{8F \times 1}$  obtém-se isolando as magnitudes da Matriz dos Movimentos  $[M_d]_{6 \times 8}$  (Equação (C.18)), como apresentado na Equação (C.20).

$$\left[ \vec{\Phi} \right]_{8 \times 1} = \left[ \omega_{a_z} \quad \omega_{b_x} \quad \omega_{b_y} \quad \omega_{b_z} \quad \omega_{c_x} \quad \omega_{c_y} \quad \omega_{c_z} \quad \omega_{d_z} \right]_{8 \times 1}^T \quad (\text{C.20})$$

**ETAPA 5.d:**

Multiplicando a Matriz dos Movimentos Unitários  $\left[ \hat{M}_d \right]_{6 \times 8}$  (Equação (C.19)) pela matriz resultante da diagonalização de cada linha da Matriz de Circuitos-f  $[B]_{1 \times 8}$  (Equação (C.16)), obtém-se a Matriz dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[ \hat{M}_n \right]_{6.1 \times 8}$ , como apresentado na Equação (C.21).

$$\left[ \hat{M}_n \right]_{6.1 \times 8} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b_y & 0 & 0 & -c_y & d_y \\ 0 & 0 & 0 & b_x & 0 & 0 & c_x & -d_x \\ 0 & b_y & -b_x & 0 & c_y & -c_x & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 8} \quad (\text{C.21})$$

**ETAPA 5.e:**

Escalonando a Matriz dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[ \hat{M}_n \right]_{6 \times 8}$  (Equação (C.21)), obtém-se a Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[ \hat{M}_{n_{esc}} \right]_{(6.1-0) \times 8}$  da Equação (C.22), apresentando: uma variável  $D$  em substituição da expressão  $(b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x - b_x \cdot d_y + b_y \cdot d_x + c_x \cdot d_y - c_y \cdot d_x)$ ; linhas não nulas, sendo  $K_D = 0$ , o que quer dizer que não se apresenta uma equação dependente no sistema, e um posto  $m$  da matriz, como apresentado na Equação (C.23).

$$\left[ \hat{M}_{n_{esc}} \right]_{6 \times 8} = \left[ [I]_6 \left| \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ \frac{b_x - c_x}{b_y - c_y} \\ 0 \\ \frac{b_x - c_x}{b_y - c_y} \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{c} \frac{-D}{b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x} \\ 0 \\ \frac{c_x \cdot d_y - c_y \cdot d_x}{b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x} \\ 0 \\ \frac{-(b_x \cdot d_y - b_y \cdot d_x)}{b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x} \end{array} \right]_{6 \times 8} \quad (\text{C.22})$$

Além, do escalonamento obtém-se duas colunas não pertencente

à Matriz Identidade  $[I]_6$  (Equação (C.22)), que representa as variáveis independentes do sistema sendo para o RSSR a velocidade angular  $\omega_{c_x}$  da junta  $c$  no eixo  $x$ , e velocidade angular  $\omega_{d_z}$  da junta  $d$  no eixo  $z$ .

$$m = \lambda \cdot \nu - K_D = 6 \cdot 1 - 0 = 6 \quad (\text{C.23})$$

**ETAPA 5.f:**

O grau de liberdade  $F_N$  do sistema cinemático, obtém-se a partir do número de equações independentes do sistema ou posto  $m$  da Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede  $[\hat{M}_{nesc}]_{(\lambda \cdot \nu - K_D) \times F}$  e o número total de variáveis do sistema, sendo a dimensão do Vetor das Magnitudes dos Movimentos  $[\vec{\Phi}]_{F \times 1}$ , ou seja, o número de graus de liberdade ou grau de liberdade bruto  $F$  do sistema, segundo o apresentado na Equação (C.24).

$$F_N = F - m = 8 - 6 = 2 \quad (\text{C.24})$$

Sendo o grau de liberdade referente à variável de velocidade angular  $\omega_{c_x}$  da junta  $c$  no eixo  $x$ , um grau de liberdade passivo.



**ANEXO D – FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA  
SISTEMAS CINETOESTÁTICOS**



Visto o volume de parâmetros relacionados ao modelo cinetoestático e das variáveis referentes ou comportamentos dos sistemas, foi proposta a criação e implementação de um aplicativo computacional que permitisse obter as matrizes dos sistemas de equações da estática, da cinemática diferencial e da cinetoestática.

Figura 63: Janela Principal da Ferramenta.

Esta ferramenta foi projetada para mecanismos compostos por juntas com graus de liberdade rotacionais, de forma com que o usuário possa obter os sistemas de equações da estática, da cinemática diferencial e da cinetoestática, portanto os comportamentos das variáveis principais do sistema correspondente aos torques e velocidades angulares de atuadores e cargas aplicados, partindo do conhecimento das informações básicas do mecanismo, sendo: número de elementos  $n$ , número de juntas  $j$ , número de atuadores  $A_R$ , número de cargas  $\sigma$ , espaço de trabalho  $\lambda$ , posição das juntas (Sistema de Inercial  $O_{xyz}$ ), o tipo de atuações e os eixos de atuação, e a matriz de incidência. O ambiente desta ferramenta (Figura 63) é constituído basicamente por oito painéis (setores): Mecanismo, Características, Posição das Juntas, Atuações, Matriz de Incidência, Nome do Mecanismo, Constantes dos Motores e Matrizes dos Sistemas.

## D.1 MECANISMO

Neste painel o usuário indica se o mecanismo que deseja analisar é um mecanismo conhecido para a ferramenta, ou seja foi previamente salvo na base de dados gerada em uma formulário de dados, ou é um mecanismo desconhecido para a ferramenta, ou seja não foi previamente salvo na base de dados.

No caso de ser conhecido o usuário deverá atualizar a lista da base de dados com o botão "Atualizar Lista" para ter acesso a aqueles mecanismos que foram salvos. Escolhendo um dos nomes disponíveis na lista de mecanismos, o usuário poderá ter aceso a informação correspondente salva com anterioridade; também por meio da caixa de seleção "Mudar Características" é possível modificar as características do mecanismo. No caso de não ser conhecido o usuário deverá ingressar os dados correspondentes ao novo mecanismo.

### D.1.1 Nome do Mecanismo

No caso de ser um mecanismo desconhecido que o usuário deseja salvar na base de dados, terá que indicar neste painel o nome pelo qual deseja reconhecer os dados do mecanismo, e clicando no botão "SALVAR DADOS" estes serão salvos na base de dados.

## D.2 CARACTERÍSTICAS

No caso em que o mecanismo não seja conhecido (não esteja na base de dados) ou deseje-se mudar os dados de um mecanismo conhecido, o usuário terá que entrar os dados correspondentes as informações do mecanismo, sendo: número de elementos  $n$ , número de juntas  $j$ , número de atuadores  $A_R$ , número de cargas  $\sigma$ , espaço de trabalho  $\lambda$ .

Ao clicar no botão "Calcular", obtém-se as informações relativas ao número de cortes  $\kappa$ , que é calculado por meio da Equação (B.5) e ao número de circuitos  $\nu$ , que é calculado por meio da Equação (B.16). Para obter as informações relativas ao grau de liberdade no modelo de estática  $S_N$  e ao grau de liberdade na cinemática  $F_N$  é preciso calcular as Matrizes dos Sistemas.

Retomando o caso exposto na Seção 3, onde é apresentado o mecanismo de quatro barras em configuração RSSR com expansão de juntas tornando-se mecanismo em configuração 8R, tem-se os dados

apresentados na Figura 64, tendo as características apresentadas na Tabela 2.

CARACTERÍSTICAS			
8	ELEMENTOS	1	CARGAS
8	JUNTAS	6	ESPAÇO DE TRABALHO
1	ATUADORES	<input type="button" value="CALCULAR"/>	
7	CORTES	1	Sn
1	CIRCUITOS	2	Fn

Figura 64: Painel de Caraterísticas do Mecanismo 8R

### D.3 POSIÇÃO DAS JUNTAS

No caso em que seja um mecanismo desconhecido ou as características de um mecanismo conhecido tenham mudado, o usuário terá que indicar as coordenadas numéricas em que encontram-se posicionadas cada uma das juntas do mecanismo no instante de tempo em que deseja-se efetuar a análise. Na ferramenta, as linhas representam cada uma das juntas do mecanismo ou da expansão do mesmo e as colunas as coordenadas correspondentes ao eixo  $x$  (coluna "X"), ao eixo  $y$  (coluna "Y"), e ao eixo  $z$  (coluna "Z"). No caso em que seja um mecanismo conhecido que não foi modificado, estes dados serão apresentados na tela automaticamente.

No caso do mecanismo em configuração 8R, as coordenadas entregues foram escolhidas aleatoriamente, supondo uma posição qualquer das juntas  $a$  (1),  $b$  (2),  $c$  (3) e  $d$  (4),  $f$  (5),  $g$  (6),  $h$  (7) e  $k$  (8), e levando em conta que as juntas rotativas resultantes da expansão das juntas esféricas devem estar na mesma coordenada respetivamente, como apresentado na Figura 65.

### D.4 ATUAÇÕES

Estão dispostas duas colunas referentes às atuações apresentadas nas juntas do mecanismo a ser analisado. Na primeira coluna "ATUAÇÃO", o usuário terá que definir quais das juntas apresentaram ações

POSIÇÃO DAS JUNTAS

	X	Y	Z
1	0	0	0
2	0	2	0
3	0	2	0
4	0	2	0
5	4	2	0
6	4	2	0
7	4	2	0
8	4	0	0

Figura 65: Painel de Coordenadas das Juntas do Mecanismo

passivas e quais apresentam ações ativas, atribuindo valores numéricos para cada caso sendo, 0: Passivas, 1: Atuadores e 2: Cargas, conseguindo identificar aquelas juntas que apresentam restrições adicionais devido a presença de ações externas.

Na segunda coluna "EIXO", o usuário terá que definir o eixo em que cada uma das juntas apresenta o grau de liberdade, atribuindo valores numéricos para cada caso sendo, 1: Eixo  $x$ , 2: Eixo  $y$  e 3: Eixo  $z$ , conseguindo identificar às restrições presentes por ações internas e definir o helicóide correspondente as restrições geradas pelas ações externas. No caso em que seja um mecanismo conhecido que não foi modificado, estes dados serão apresentados na tela automaticamente.

No caso do mecanismo em configuração 8R, para a primeira coluna "ATUAÇÃO", define-se como junta atuada a junta  $a$  (1) e como junta de carga a junta  $k$  (8). Para a segunda coluna "EIXO", os dados são dispostos segundo a Figura 61, onde definido o eixo  $z$  (3), como o eixo onde apresentado o grau de liberdade para as juntas  $a$  (1),  $b$  (2),  $h$  (7) e  $k$  (8), o eixo  $y$  (2), como o eixo onde apresentado o grau de liberdade para as juntas  $d$  (4) e  $f$  (5), e o eixo  $x$  (1), como o eixo onde apresentado o grau de liberdade para as juntas  $c$  (3) e  $g$  (6), como apresentado na Figura 66.

ATUAÇÕES

	ATUAÇÃO:	EIXO:
1	1	3
2	0	3
3	0	1
4	0	2
5	0	2
6	0	1
7	0	3
8	2	3

Figura 66: Painel de Atuações nas Juntas do Mecanismo

## D.5 MATRIZ DE INCIDÊNCIA

Quando ativado o botão "Calcular" (Seção D.2), esta matriz é auto-ajustada às dimensões respectivas segundo as características do mecanismo. As colunas da matriz representam cada uma das juntas do mecanismo e as linhas da matriz representam cada um dos elementos do mecanismo. O usuário terá identificado anteriormente as conexões presentes entre elementos  $n_i$  e juntas  $j_i$ , constituindo esta matriz segundo o apresentado no Anexo B e entregando a este painel os dados obtidos. No caso em que seja um mecanismo conhecido que não foi modificado, estes dados serão apresentados na tela automaticamente.

No caso do mecanismo em configuração 8R, apresentam-se as incidências segundo a configuração do mecanismo apresentada na Figura 61, obtendo a Matriz de Incidência apresentada na Figura 67.

MATRIZ DE INCIDÊNCIA								
n \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	-1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	-1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	-1	1	0	0	0	0
5	0	0	0	-1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	-1	1	0	0
7	0	0	0	0	0	-1	1	0
8	0	0	0	0	0	0	-1	-1

Figura 67: Painel da Matriz de Incidência do Mecanismo

## D.6 CONSTANTES DOS MOTORES

Neste painel o usuário inicialmente deve ingressar os dados relacionados às constantes  $K_m$ ,  $K_b$  e  $R_a$  dos motores, pois como visto na Seção 4.2, estes dados são de vital importância para a obtenção da Matriz Geral  $\left[ \hat{G}_n \right]_{(\lambda \cdot (\nu + \kappa) + A_R) \times \gamma}$ .

CONSTANTES DOS MOTORES	
	1
$K_m$	147
$K_b$	65
$R$	1.0300

Figura 68: Painel das Constantes do Motor Empregado

Para o caso do 8R, empregou-se o Motor Maxon EC 60 Ø60 mm, Brushless, 400 Watts, apresentando as características expostas na Tabela 28.

Tabela 28: Características de Operação do Motor MAXON RE 60

Dados do Motor	Simbolo	Unidades	Valor
Tensão Nominal	V	V	$\pm 48,0$
Velocidade Nominal	$\omega_m$	<i>rpm</i>	2680
Torque Nominal (Max. permanente)	$T_m$	<i>mNm</i>	830
Corrente Nominal (Max. CC)	$i_a$	A	5,85
Torque Inicial	$T_{m_{max}}$	<i>mNm</i>	6820
Corrente Inicial	$i_{a_{max}}$	A	46,4
Resistência de Armadura	$R_a$	$\Omega$	1,03
Indutância de Armadura	$L$	<i>mH</i>	0,82
Contante de Torque	$K_m$	<i>nNm/A</i>	147
Contante da Força Contra eletromotriz	$K_b$	<i>rpm/V</i>	65
Momento de Inercia	$J$	<i>gcm<sup>2</sup></i>	831

Estes dados são úteis tanto para efetuar a simulação do comportamento do motor, quanto para a obtenção da Matriz Geral  $\left[ \hat{G}_n \right]_{(\lambda \cdot (\nu + \kappa) + A_R) \times \gamma}$ . Por enquanto, são utilizados os dados relacionados com as constantes  $K_m$ ,  $K_b$  e  $R_a$  e dispostos na ferramenta como apresentado na Figura 68.

## D.7 MATRIZES DOS SISTEMAS

Já conhecidos e salvos todos os dados anteriores, podem ser obtidas as matrizes relativas ao sistema estático, cinemático e Cinetoes-tático.

### D.7.1 Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede

Para obter esta matriz, o usuário tem que clicar no botão "ESTÁTICA" entregando a Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede  $\left[ \hat{A}_{nesc} \right]_{(\lambda \cdot \kappa - S_D) \times C_S}$  e no painel de características (Seção D.2), obtém-

se o Grau de Liberdade da Estática  $S_N$ .

No caso do 8R que é a expansão do mecanismo de quatro barras em configuração RSSR, pode-se obter da Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede  $\left[\hat{A}_{nesc}\right]_{17 \times 18}$  da Equação (C.11), a expressão de relacionamento entre o torque do atuador  $T_a$  e o torque da carga  $T_d$  como apresentada na Equação (D.1).

$$T_a = -\frac{b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x}{b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x - b_x \cdot d_y + b_y \cdot d_x + c_x \cdot d_y - c_y \cdot d_x} \cdot T_d \quad (D.1)$$

Substituindo na Equação (D.1) os valores correspondentes às coordenadas das juntas do mecanismo como apresentado na Figura 65, obtém-se que  $T_a = -T_d$ , além a Matriz Escalonada das Ações Unitárias em Rede  $\left[\hat{A}_{nesc}\right]_{17 \times 18}$  da Equação (C.11) apresentou uma linha nula, ou seja  $S_D = 1$ . Na Figura 69, tem-se a coluna 42 como a coluna da variável independente correspondente ao torque da carga  $T_k$ , tem-se a coluna 41 como a coluna correspondente ao torque do atuador  $T_a$  e a linha 42 como a linha correspondente à equação dependente do sistema sendo  $S_D = 1$  (Seção B.2), por ser linha nula.

Finalmente tem-se que  $T_a + T_k = 0$ , correspondente a equação da linha 41 do Sistema de Equações da Estática (Figura 69), obtendo que os resultados teóricos obtidos na Equação (C.11) concordam com os dados entregues pela ferramenta.

## D.7.2 Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede

Para obter esta matriz, o usuário tem que clicar no botão "CINEMÁTICA" entregando a Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[\hat{M}_{nesc}\right]_{(\lambda \cdot \nu - K_D) \times F}$  e no painel de características (Seção D.2), obtém-se o Grau de Liberdade da Estática  $F_N$ .

No caso do 8R que é a expansão do mecanismo de quatro barras em configuração RSSR, pode-se obter da Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[\hat{M}_{nesc}\right]_{6 \times 8}$  da Equação (C.22), a expressão de relacionamento entre a velocidade angular do atuador  $\omega_{a_z}$  e a velocidade angular da carga  $\omega_{d_z}$  como apresentada na Equação (D.2).



$$w_{a_z} = \frac{b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x - b_x \cdot d_y + b_y \cdot dx + c_x \cdot dy - c_y \cdot dx}{b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x} \cdot w_{d_z} \quad (D.2)$$

Substituindo na Equação (D.2) os valores correspondentes às coordenadas das juntas do mecanismo como apresentado na Figura 65, obtém-se que  $\omega_{a_z} = -\omega_{d_z}$ , além a Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede  $\left[ \hat{M}_{nesc} \right]_{6 \times 8}$  da Equação (C.22) não apresentou nenhuma linha nula, ou seja  $K_D = 0$ . Na Figura 70, tem-se a coluna 8 como a coluna da variável independente correspondente à velocidade angular da carga  $\omega_k$ , tem-se a coluna 1 como a coluna correspondente à velocidade angular do atuador  $\omega_a$  e não apresenta linhas nulas ou equação dependente no sistema sendo  $K_D = 0$  (Seção B.4).

MATRIZ DE MOVIMENTOS UNITÁRIOS ESCALONADA								
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	-1
2	0	1	0	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	-1

Figura 70: Painel da Matriz Escalonada dos Movimentos Unitários em Rede

Finalmente tem-se que  $\omega_a - \omega_k = 0$ , correspondente a equação da linha 1 do Sistema de Equações da Cinemática (Figura 70), obtendo que os resultados teóricos obtidos na Equação (C.22) concordam com os dados entregues pela ferramenta.

### D.7.3 Matriz Escalonada Geral

Para obter esta matriz, o usuário tem que clicar no botão "MATRIZ FINAL". No caso do 8R que é a expansão do mecanismo de quatro barras em configuração RSSR, obtivesse da Matriz Geral Escalonada  $\left[ \hat{G}_{nesc} \right]_{24 \times 27}$  da Equação (4.6), as expressões de relacionamento entre o torque de carga  $T_d$  e a tensão do atuador  $V_a$ , e as velocidades angulares do atuador  $\omega_{a_z}$  e da carga  $\omega_{d_z}$ , e o torque do atuador  $T_a$  como apresentadas nas Equações (4.9), (4.10) e (4.11).



Substituindo nas Equações (4.9), (4.10) e (4.11) os valores correspondentes as coordenadas das juntas do mecanismo como apresentado na Figura 65 e os dados das constantes dos motores como apresentado na Figura 68, obtém-se que  $\omega_{a_z} = -1,078x10^{-04} \cdot T_d + 0,0154 \cdot V_a$ ,  $\omega_{d_z} = -1,078x10^{-04} \cdot T_d + 0,0154 \cdot V_a$ ,  $T_a = -T_d$ .

Na Figura 71, tem-se as colunas 50 e 51 como as colunas das variáveis independentes correspondentes ao torque da carga  $T_k$  e à tensão do atuador  $V_a$  respectivamente, tem-se a coluna 1 como a coluna correspondente à velocidade angular do atuador  $\omega_a$ , a coluna 7 como a coluna correspondente à velocidade angular da carga  $\omega_k$  e a coluna 49 como a coluna correspondente ao torque do atuador  $T_a$ .

Finalmente, tem-se que  $\omega_a + 1,078x10^{-04} \cdot T_k - 0,0154 \cdot V_a = 0$ ,  $\omega_k + 1,078x10^{-04} \cdot T_k - 0,0154 \cdot V_a = 0$ ,  $T_a + T_k = 0$ , correspondentes as equações das linhas 1, 6 e 48 do Sistema de Equações da Cinetostática (Figura 71), obtendo que os resultados teóricos obtidos na Equação (C.22) concordam com os dados entregues pela ferramenta.



## APÊNDICE A – EXEMPLOS DE MECANISMOS



Tabela 29: Relação  $S_N$  e  $F_N$ 

Mecanismo	Configuração	Elos ( $n$ )	Juntas ( $j$ )	Espaço de Trabalho ( $\lambda$ )	Atuadores ( $A_R$ )	Cargas ( $\sigma$ )	Eixos de Atuação/Carga	Grau Liberdade Cinemático ( $F_N$ )	Grau Liberdade Estático ( $S_N$ )
Planetário	RRREE	4	5	2	1	1	Z / Z	1	1
Quatro Barras	RRRR	4	4	3	1	1	Z / Z	1	1
Quatro Barras	RSSR	8	8	3	2	1	Z, X / Z	2	1
Cinco Barras	RRRRR	5	5	3	2	1	Z, Z / Z	2	1
PGT Ravignaux	RRRRR EEEE	7	10	2	2	1	Z, Z / Z	2	1
Cinco Barras	RSSRR	9	9	3	3	1	Z, Z, X / Z	3	1
Cinco Barras	RSSSR	11	11	3	5	1	Z, Z, X, Y / Z	5	1

E: Junta Engrenagem

R: Junta Rotacional

S: Junta Esférica



## APÊNDICE B - PARÂMETROS DE SIMULAÇÃO



## B.1 BLOCOS DO CINCO BARRAS

## B.1.1 "Body"

Tabela 30: Parâmetros "Body"

Parâmetro	Valor
MASS_VALUE	1
MASS_UNITS	kg
INERTIA_UNITS	kg*m <sup>2</sup>
INERTIA_VALUE	[0.00001 0 0; 0 0.00001 0; 0 0 0.00001]
GEOMETRY_USE	false
DENSITY_USE	false
ATTACHED_TO_CS	CS1
CGPos	[0 0 0]
CS1Pos	[0 0 0]
CS2Pos	[0 2 0]

Tabela 31: Parâmetros "Body1"

Parâmetro	Valor
MASS_VALUE	1
MASS_UNITS	kg
INERTIA_UNITS	kg*m <sup>2</sup>
INERTIA_VALUE	[0.00001 0 0; 0 0.00001 0; 0 0 0.00001]
GEOMETRY_USE	false
DENSITY_USE	false
ATTACHED_TO_CS	CG
CGPos	[0 0 0]
CS1Pos	[0 2 0]
CS2Pos	[2 10 0]

Tabela 32: Parâmetros "Body2"

Parâmetro	Valor
MASS_VALUE	1
MASS_UNITS	kg
INERTIA_UNITS	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
INERTIA_VALUE	[0.00001 0 0; 0 0.00001 0; 0 0 0.00001]
GEOMETRY_USE	false
DENSITY_USE	false
ATTACHED_TO_CS	CG
CGPos	[0 0 0]
CS1Pos	[2 10 0]
CS2Pos	[4 6 0]

Tabela 33: Parâmetros "Body3"

Parâmetro	Valor
MASS_VALUE	1
MASS_UNITS	kg
INERTIA_UNITS	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
INERTIA_VALUE	[0.00001 0 0; 0 0.00001 0; 0 0 0.00001]
GEOMETRY_USE	false
DENSITY_USE	false
ATTACHED_TO_CS	CG
CGPos	[0 0 0]
CS1Pos	[4 6 0]
CS2Pos	[4 0 0]

### B.1.2 "Revolute"

Tabela 34: Parâmetros "Revolute", "Revolute1" e "Revolute4"

Parâmetro	Valor
NumSAPorts	2
Primitives	prismatic
R1Axis	[0 0 1]

Tabela 35: Parâmetros "Revolute2" e "Revolute3"

Parâmetro	Valor
NumSAPorts	1
Primitives	prismatic
R1Axis	[0 0 1]

## B.2 BLOCOS DE MEDIÇÃO DO PLANETARIO MODIFICADO

### B.2.1 "Constant"

Tabela 36: Parâmetros "Constant1" e "Constant3"

Parâmetro	Valor
Constant value	0

### B.2.2 "Engrenagem"

Tabela 37: Parâmetros "'Simple Gear'"

Parâmetro	Valor
Follower (F)/Base (B) gear ratio	6/18

## B.3 BLOCOS DO MOTOR

### B.3.1 "Saturate"

Tabela 38: Parâmetros "Saturation T"

Parâmetro	Valor
Upper limit	6820
Lower limit	-6820
Treat as gain when linearizing	on
Enable zero-crossing detection	on
Sample time (-1 for inherited)	-1

Tabela 39: Parâmetros "Saturation W"

Parâmetro	Valor
Upper limit	2680
Lower limit	-2680
Treat as gain when linearizing	on
Enable zero-crossing detection	on
Sample time (-1 for inherited)	-1

### B.3.2 "PID"

Tabela 40: Parâmetros "PID"

Parâmetro	Valor
Controller form	Parallel
Proportional (P)	70000
Integral (I)	197
Derivative (D)	4200
Limit output	Selected
Upper saturation limit	48
Lower saturation limit	-48