

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Leandro Rogel da Silva

MODELAGEM DO VAZAMENTO DE GÁS EM VÁLVULAS
AUTOMÁTICAS DE COMPRESSORES

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. César José Deschamps, Ph.D.

Florianópolis

2012

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Silva, Leandro Rogel da
Modelagem do vazamento de gás em válvulas automáticas
de compressores [dissertação] / Leandro Rogel da Silva ;
orientador, César José Deschamps - Florianópolis, SC, 2012.
156 p. ; 21cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Compressores. 3. Válvulas. 4.
Vazamentos. I. Deschamps, César José . II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica. III. Título.

Leandro Rogel da Silva

**MODELAGEM DO VAZAMENTO DE GÁS EM VÁLVULAS
AUTOMÁTICAS DE COMPRESSORES**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 29 de outubro de 2012

Prof. César José Deschamps, Ph.D – Orientador

Prof. Júlio César Passos, Dr. – Coordenador do curso

BANCA EXAMINADORA

Prof. César José Deschamps, Ph.D – Presidente

Prof. Luís Orlando Emerich do Santos, Dr. (UFSC)

Prof. Juan Pablo de Lima Costa Salazar, Ph.D (UFSC)

Prof. Júlio César Passos, Dr. (UFSC)

*Dedico este trabalho aos meus pais Celso e Rondina,
aos meus irmãos Josiane, Deivid e Lucas
e à minha namorada Bianca.*

Agradecimentos

Aos meus pais, irmãos e minha namorada e seus familiares, pelo apoio e carinho ao longo dessa jornada.

Ao professor César José Deschamps pela confiança depositada, o acolhimento e a competente orientação durante o período de realização deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, pela disposição em avaliar este trabalho e pelas contribuições prestadas.

À CAPES e EMBRACO pelo suporte financeiro.

À escola Municipal Maria Regina Leal, ao colégio Nova Era, à UDESC e à UFSC.

Aos amigos Ernane Silva, Erick Azevedo, Marcus Alves, Evandro Pereira, Jorge Bezerra e Francisco Lajus pelas constantes discussões e aprendizado.

Aos amigos Alessandro Dal Pizzol, André Popinhak, Giovani Cerbato, Joel Sanvezzo, Marco Diniz, Maurício Oliveira, Ricardo Hellmann, Ricardo Brancher e Victor Rosa, pela convivência, amizade e aprendizado.

Aos amigos Alessandro, Alexandre, Anderson, Arnaldo, Bruno, Cairo, César, Danilo, Deivid, Eduardo, Jhonny, Maurício, Osmar, Rafael, Rodrigo e Simão, pelo companheirismo e grandes momentos de alegria. Alguns destes desde a época de infância, outros na época de ensino médio e de graduação.

*“Seja você quem for,
seja qual for a posição social que você tenha na vida,
a mais alta ou a mais baixa,
tenha sempre como meta muita força,
muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com
muita fé em Deus,
que um dia você chega lá.
De alguma maneira você chega lá.”
(Ayrton Senna)*

Resumo

Compressores de refrigeração adotam válvulas automáticas que abrem e fecham em função da diferença de pressão entre a câmara de compressão e as câmaras de sucção e descarga. A especificação dessas válvulas é um dos passos mais importantes do projeto de um compressor de alta eficiência. Por exemplo, se a vedação da válvula não é completa, devido a irregularidades superficiais ou desalinhamentos, vazamento de gás pode ocorrer e reduzir de forma significativa o desempenho do compressor. Esta dissertação apresenta um modelo de simulação desenvolvido para prever vazamento de gás em válvulas de compressores. O óleo lubrificante em compressores também atua como elemento vedante em válvulas. No entanto, uma vez que pouca informação está disponível sobre a quantidade de óleo que realmente existe entre a válvula e o assento, a presença do óleo foi desprezada no modelo. A diferença de pressão entre a câmara de compressão e as câmaras de sucção e de descarga origina a força motriz do vazamento de gás em válvulas. O modelo proposto assume uma formulação de escoamento unidimensional através do microcanal formado entre a válvula e o assento, considerando os efeitos de atrito viscoso, compressibilidade, rarefação do gás e flexão da válvula devido ao carregamento de pressão. Simulações são realizadas para uma faixa ampla de diferenças de pressão que atuam sobre o escoamento na folga da válvula ao longo do ciclo de compressão de um compressor alternativo de refrigeração doméstica. Os resultados mostram que o vazamento de gás nas válvulas de sucção e descarga podem comprometer as eficiências volumétrica e isentrópica do compressor e que a flexão da válvula e a rarefação do gás são parâmetros muito importantes da análise.

Palavras-chave: Válvulas de compressores, válvulas tipo palheta, vazamento de gás.

Abstract

Refrigeration compressors adopt valves that automatically open due to the pressure difference between the compression and suction/discharge chambers. The specification of such valves is one of the most important steps in the design of a high efficiency compressor. For instance, if the sealing of the valve is not complete due to surface irregularity or misalignment, gas leakage will occur and significantly reduce the compressor performance. This thesis reports a simulation model developed to predict gas leakage in compressor valves. The lubricating oil in compressors acts also as a sealing element for valves. However, since very little information is available about the amount of oil that is actually present between the valve and its seat, the presence of oil has been neglected in the model. The pressure difference between the compression and suction/discharge chambers is the driving force of gas leakage through valves. The model developed in the present work assumes a one-dimensional flow through the micro channel formed between the reed valve and its seat, considering the effects of viscous friction, compressibility, gas rarefaction and valve bending into the port due to pressure load. Computations are carried out for a wide range of pressure differences that prevail in the valve clearances during the complete compression cycle of a small reciprocating compressor designed for household refrigeration. Results show that gas leakage in the suction and discharge valves significantly affect the compressor volumetric and isentropic efficiencies and that valve bending and gas rarefaction are very important parameters of the analysis.

Keywords: compressor valves, reed type valves, gas leakage.

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Organograma dos tipos de compressores de deslocamento positivo.	30
Figura 1.2 – Esquema simplificado do cabeçote, que engloba as câmaras de descarga e sucção, pistão e cilindro de compressores alternativos.	31
Figura 1.3 – Diagrama pressão-volume de um ciclo ideal de compressão.	32
Figura 1.4 – Esquema ilustrando a válvula do tipo palheta e a placa de válvulas.	34
Figura 2.1 – Eficiência volumétrica para diferentes valores de fatores de vazamento, Machu (1992).	38
Figura 2.2 – Efeitos do vazamento na válvula de sucção do segundo estágio de compressão, Habing (2005).	39
Figura 2.3 – Escoamento entre discos paralelos.	40
Figura 2.4 – Distribuição de pressão adimensionalizada e normalizada na direção radial para diferentes condições. Adaptado de Savage (1964).	41
Figura 2.5 – Regimes de escoamento em função do número de Knudsen.	44
Figura 2.6 – Comparação da vazão mássica de gás Hélio obtida por Arkilic <i>et al.</i> (1997). Dados experimentais e modelos analíticos com e sem escorregamento.	47
Figura 2.7 – Razão dos valores de Poiseuille obtidos experimentalmente normalizados pelo número de Poiseuille obtido teoricamente. As normalizações representadas pelas linhas sólidas e tracejadas correspondem as teorias de escoamento com e sem escorregamento, respectivamente. (Harley <i>et al.</i> (1994)). Os símbolos ▲ e ○ representam os gases nitrogênio e hélio, respectivamente.	48
Figura 3.1 – Volume da câmara de compressão.	52
Figura 3.2 – Volume de controle para balanço de massa e energia no cilindro.	53
Figura 3.3 – Modelo adotado para descrever a dinâmica das válvulas de sucção e descarga.	57
Figura 3.4 – Modelo adotado para o cálculo da vazão mássica por fluxo e refluxo quando as válvulas estão abertas.	58
Figura 3.5 – Modelo adotado para o cálculo de vazamento na folga pistão-cilindro.	59

Figura 3.6 – Diagrama pressão-volume de um ciclo de compressão ideal sem volume morto.	61
Figura 3.7 – Diagrama pressão-volume de um ciclo de compressão ideal com volume morto.	62
Figura 3.8 – Diagrama pressão-volume de um ciclo de compressão real com volume morto.	64
Figura 4.1 – Geometria utilizada na modelagem do problema.	66
Figura 4.2 – Geometria do canal 'sem lados' e a referente mudança de coordenadas e adimensionalização para solução do problema.	67
Figura 4.3 – Formulação diferencial do duto.	67
Figura 4.4 – Transformação da geometria assimétrica, à esquerda, para a simétrica, à direita, com o respectivo perfil de velocidades.	73
Figura 4.5 – Modelagem adotada para estimar a deflexão da palheta.	76
Figura 4.6 – Plano médio antes e depois da deformação.	78
Figura 4.7 – Momentos e forças cisalhantes atuando num elemento infinitesimal (VENTSEL; KRAUTHAMMER, 2001).	78
Figura 4.8 – Fluxograma ilustrativo do método de Runge-Kutta aplicado para solução problema.	84
Figura 4.9 – Fluxograma ilustrativo do método de Runge-Kutta aplicado para solução problema tendo x^* variável independente.	86
Figura 4.10 – Exemplo do processo iterativo para calcular as variações de propriedades do escoamento e, conseqüentemente, a pressão crítica no microcanal (escoamento sônico).	88
Figura 4.11 – Exemplo do processo iterativo para calcular as variações de propriedades do escoamento no microcanal (escoamento subsônico).	89
Figura 4.12 – Fluxograma da metodologia adotada para a solução numérica do problema.	91
Figura 5.1 – Comparação entre as diferentes formas de discretização do microcanal.	94
Figura 5.2 – Análise do número de elementos e critério de convergência no cálculo de vazamento sem flexão da palheta e com a condição de não-escorregamento do fluido na parede.	96
Figura 5.3 – Análise do número de elementos e critério de convergência no cálculo de vazamento contabilizando a flexão da palheta.	97
Figura 5.4 – Comparação da solução de Karniadakis e Beskok (2002) com o código que foi adaptado modelando o problema como escoamento de Fanno para três condições diferentes.	99
Figura 5.5 – Comparação entre as variações de propriedades do escoamento das formulações isotérmica e adiabática.	103
Figura 5.6 – Variação de pressão ao longo do microcanal da válvula de descarga.	105

Figura 5.7 – Variação de densidade ao longo do microcanal da válvula de descarga.	106
Figura 5.8 – Variação do número de Mach ao longo do microcanal da válvula de descarga.	107
Figura 5.9 – Variação da temperatura ao longo do microcanal da válvula de descarga.	107
Figura 5.10 – Variação do número de Reynolds ao longo do microcanal da válvula de descarga.	108
Figura 5.11 – Variação do número de Knudsen ao longo do microcanal da válvula de descarga.	109
Figura 5.12 – Variação de pressão ao longo do microcanal da válvula de sucção.	110
Figura 5.13 – Variação de densidade ao longo do microcanal da válvula de sucção.	111
Figura 5.14 – Variação do número de Mach ao longo do microcanal da válvula de sucção.	111
Figura 5.15 – Variação da temperatura ao longo do microcanal da válvula de sucção.	112
Figura 5.16 – Variação do número de Reynolds ao longo do microcanal da válvula de sucção.	113
Figura 5.17 – Variação do número de Knudsen ao longo do microcanal da válvula de sucção.	113
Figura 5.18 – Flexão das válvulas de descarga e sucção na condição de máxima diferença de pressão atuando.	114
Figura 5.19 – Comparação da variação do número de Mach ao longo do microcanal para os modelos com e sem flexão da palheta. A folga de $0,2 \mu\text{m}$ foi utilizada.	115
Figura 5.20 – Comparação da variação da pressão ao longo do microcanal, na válvula de descarga, para os modelos com e sem flexão da palheta. A folga de $0,2 \mu\text{m}$ foi utilizada.	116
Figura 5.21 – Comparação da variação da densidade ao longo do microcanal, na válvula de descarga, para os modelos com e sem flexão da palheta. A folga de $0,2 \mu\text{m}$ foi utilizada.	117
Figura 5.22 – Comparação da variação da temperatura ao longo do microcanal para os modelos com e sem flexão da palheta. A folga de $0,2 \mu\text{m}$ foi utilizada.	118
Figura 5.23 – Comparação da variação do número de Knudsen ao longo do microcanal para os modelos com e sem flexão da palheta. A folga de $0,2 \mu\text{m}$ foi utilizada.	119
Figura 5.24 – Variação do vazamento na válvula de descarga com o aumento da pressão no cilindro.	119

Figura 5.25 – Variação do vazamento na válvula de descarga com a diminuição da pressão no cilindro.	120
Figura 5.26 – Variação do número de Poiseuille ao longo do microcanal para as condições de máxima diferença de pressão nas quais as válvulas estão submetidas no ciclo de compressão.	121
Figura 5.27 – Aumento da vazão mássica devido ao escorregamento do escoamento em contato com a parede.	122
Figura 5.28 – Comparação das variação do número de Mach (a) e do número de Reynolds (b) ao longo do microcanal para a válvula de sucção sujeita a condição de uma baixa diferença de pressão dos modelos com e sem escorregamento. A folga utilizada foi de $0,1 \mu\text{m}$	123
Figura 5.29 – Variação de pressão (a) e densidade (b) ao longo do microcanal para a válvula de sucção sujeita a condição de baixa diferença de pressão para os modelos com e sem escorregamento. A folga utilizada foi de $0,1 \mu\text{m}$	123
Figura 5.30 – Análise da influência de diferentes valores de espessura da válvula sobre o vazamento na válvula de descarga.	124
Figura 5.31 – Análise da influência de diferentes valores de razão r_d/r_o sobre o vazamento na válvula de descarga.	125
Figura 5.32 – Diagrama pressão-volume de um ciclo de compressão de um compressor de refrigeração ilustrando os períodos de abertura e fechamento das válvulas.	126
Figura 5.33 – Vazamento através das válvulas ao longo do ciclo de compressão para três valores de folga.	127
Figura 5.34 – Número de Reynolds na saída do microcanal para três valores de folga ao longo do ciclo de compressão.	128
Figura 5.35 – Número de Mach na saída das válvulas ao longo do ciclo de compressão para dois valores de folga.	129
Figura 5.36 – Perda de eficiência por vazamento nas válvulas, ao longo do ciclo de compressão para diferentes valores de folga entre válvula e assento.	129
Figura 5.37 – Comparação da vazão mássica na válvula de sucção de um compressor sem vazamento nas válvulas e com vazamento, onde o valor da folga entre a válvula e assento é de $3,0 \mu\text{m}$	130
Figura 5.38 – Comparação da vazão mássica na válvula de descarga de um compressor sem vazamento nas válvulas e com vazamento, onde o valor da folga entre a válvula e assento é de $3,0 \mu\text{m}$	131
Figura 5.39 – Efeito do vazamento em cada uma das válvulas sobre o digrama pressão-volume do compressor.	132
Figura 5.40 – Efeito do vazamento simultâneo nas válvulas de sucção e descarga sobre o diagrama pressão-volume.	133

Figura 5.41 – Efeito do tamanho da folga na eficiência volumétrica do compressor.	134
Figura 5.42 – Efeito do tamanho da folga na eficiência isentrópica do compressor.	135

Lista de Tabelas

Tabela 5.1 – Resultados do código comparados aos dados experimentais de Harley (1993).	101
Tabela 5.2 – Algumas condições no interior da câmara de compressão para análise diferencial do escoamento na válvula de descarga.	105
Tabela 5.3 – Algumas condições no interior da câmara de compressão para análise diferencial do escoamento na válvula de sucção.	109
Tabela 5.4 – Mudança no ângulo de manivela (ωt) correspondente a abertura e fechamento das válvulas em função da folga presente entre válvula e assento.	133
Tabela 5.5 – Intervalo de ângulo de manivela (ωt) correspondente ao instante em que as válvulas permanecem abertas durante o ciclo de compressão em função da folga presente entre válvula e assento.	134

Lista de Símbolos e Abreviaturas

Símbolos Gerais

A	Área	[m ²]
A_{ee}	Área efetiva de escoamento na válvula	[m ²]
A_{ef}	Área efetiva de força que atua na válvula	[m ²]
A_t	Área de troca térmica entre parede do cilindro e gás	[J/kg]
C_1, C_2, C_3, C_4	Constantes	-
C_f	Coefficiente de atrito	-
C_b	Comprimento da biela	[m]
c_p	Calor específico a pressão constante	[J/(kg.K)]
C_{pms}	Distância máxima entre o eixo da manivela e o pino do pistão	[m]
c_v	Calor específico a volume constante	[J/(kg.K)]
c_v	Coefficiente de amortecimento equivalente da válvula	[N.s/m]
d	Diâmetro molecular	[m]
d_m	Desalinhamento entre o eixo da manivela e o pino do pistão	[m]
D_{cil}	Diâmetro do cilindro	[m]
D_h	Diâmetro hidráulico	[m]
D	Rigidez a flexão da válvula	-
E	Módulo de elasticidade do material da válvula	-
e	Excentricidade da manivela	[m]
f_D	Fator de atrito de Darcy	-

f_F	Fator de atrito de Fanning	-
F_v	Força que atua na válvula	[m/s ²]
f_o	Frequência de operação do compressor	[Hz]
h	Entalpia específica	[J/kg]
h_1	Entalpia específica do fluido refrigerante na sucção do compressor	[J/kg]
$h_{2,s}$	Entalpia específica do fluido refrigerante na descarga do compressor, após um processo isentrópico	[J/kg]
h_{des}	Entalpia do gás na câmara de descarga	[J/kg]
h_{suc}	Entalpia do gás na câmara de sucção	[J/kg]
h_{vdes}	Entalpia do gás que vaza pela válvula de descarga	[J/kg]
h_{vsuc}	Entalpia do gás que vaza pela válvula de sucção	[J/kg]
h_w	Coefficiente de transferência de calor por convecção entre a superfície interna do cilindro e o gás	[W/(m ² K)]
i, j	Subíndices que representam o interior do volume de controle e na superfície do volume de controle	-
k_B	Constante de Boltzmann	[J/K]
Kn	Número de Knudsen	-
$k_{\phi, j}$	Funções utilizadas no método de Runge-Kutta	
K_R	Razão entre o raio do cilindro e o raio do pistão	-
k_v	Rigidez equivalente da válvula	[N/m]
L_c	Comprimento característico da seção de escoamento	[m]
L_o	Comprimento mínimo de contato entre pistão e cilindro	[m]
L_{pc}	Comprimento do contato entre o pistão e o cilindro	[m]
M	Número de Mach médio do fluido	-
\dot{m}	Vazão mássica real do compressor	[kg/s]
m	Massa molecular do gás	[kg]

$\dot{m}_{c,rdes}$	Perda de vazão mássica por ciclo, devido ao refluxo na válvula de descarga	[kg/s]
$\dot{m}_{c,rsuc}$	Perda de vazão mássica por ciclo, devido ao refluxo na válvula de sucção	[kg/s]
$\dot{m}_{c,sup}$	Perda de vazão mássica por ciclo, devido ao efeito do superaquecimento	[kg/s]
$\dot{m}_{c,vm}$	Perda de vazão mássica por ciclo, devido ao efeito do volume morto	[kg/s]
$\dot{m}_{c,vdes}$	Perda de vazão mássica por ciclo, devido ao vazamento na válvula de descarga	[kg/s]
$\dot{m}_{c,vpc}$	Perda de vazão mássica por ciclo, devido ao vazamento na folga entre o pistão e o cilindro	[kg/s]
$\dot{m}_{c,vsuc}$	Perda de vazão mássica por ciclo, devido ao vazamento na válvula de sucção	[kg/s]
\dot{m}	Vazão mássica	[kg/s]
\dot{m}_{des}	Vazão mássica por fluxo na válvula de descarga	[kg/s]
\dot{m}_{suc}	Vazão mássica por fluxo na válvula de sucção	[kg/s]
\dot{m}_{th}	Vazão mássica ideal do compressor	[kg/s]
$M_r, M_\theta, M_{r\theta}$	Momentos radial, tangencial e torsor	[N.m/m]
\dot{m}_{rdes}	Vazão mássica por refluxo na válvula de descarga	[kg/s]
\dot{m}_{rsuc}	Vazão mássica por refluxo na válvula de sucção	[kg/s]
m_v	Massa equivalente da válvula	[kg]
\dot{m}_{vdes}	Vazão mássica por vazamento na válvula de descarga	[kg/s]
\dot{m}_{vpc}	Vazão mássica por vazamento na folga entre o pistão e o cilindro	[kg/s]
\dot{m}_{vsuc}	Vazão mássica por vazamento na válvula de sucção	[kg/s]
n	Densidade numérica do gás	[1/m ³]
Nu_w	Número de Nusselt na parede do cilindro	-

Δp	Diferença de pressão	[Pa]
p_{cd}	Pressão da câmara de descarga	[Pa]
p_{ld}	Pressão do fluido na linha de descarga	[Pa]
p_{ls}	Pressão do fluido na linha de sucção	[Pa]
Po	Número de Poiseuille	-
p_{out}	Pressão a jusante	[Pa]
p	Pressão média do fluido	[Pa]
Pr	Número de Prandtl	-
p_o	Pressão de estagnação	[Pa]
p_{cs}	Pressão da câmara de sucção	[Pa]
q	Transferência de calor por unidade de massa no microcanal	[J/kg]
\dot{Q}	Taxa de transferência de calor	[W]
Q_r, Q_θ	Forças cisalhantes radial e tangencial	[N/m]
r_d	Raio do disco	[m]
r_o	Raio do orifício	m
R_{cil}	Raio do cilindro	[m]
Re	Número de Reynolds	-
Re_{cr}	Número de Reynolds crítico de transição laminar para turbulento	-
R	Constante do gás	[J/(kg.K)]
R_{pis}	Raio do pistão	[m]
r, θ, z	Coordenadas polares	[m, graus, m]
s	Entropia específica	[J/(kg.K)]
τ_w	Tensão cisalhante na parede	[Pa]
T	Temperatura média do fluido	[K]

T_g	Temperatura do fluido em contato com a parede	[K]
T_o	Temperatura de estagnação	[K]
T_w	Temperatura da parede	[K]
T_w	Temperatura da superfície interna do cilindro	[K]
t	Espessura da válvula	[m]
t	Tempo	[s]
u	Energia interna específica	[J/kg]
\bar{V}_{fpc}	Velocidade média na folga entre o pistão e o cilindro	[m]
V_{fpc}	Velocidade do fluido na folga entre o pistão e o cilindro	[m/s]
V_{pis}	Velocidade do pistão	[m/s]
u_w	Velocidade da parede	[m/s]
u_g	Velocidade do fluido em contato com a parede	[m/s]
v	Volume específico	[m ³ /kg]
\forall_{cil}	Volume do cilindro	[m ³]
\forall_{des}	Volume deslocado	[m ³]
\forall_m	Volume morto	[m ³]
w	Deflexão da palheta	[m]
\dot{W}	Taxa de trabalho	[W]
\dot{W}_{ind}	Potência indicada	[W]
w_{max}	Deflexão máxima da válvula	[m]
x^*	Coordenada adimensional na direção radial	-
x, y, z	Coordenadas cartesianas	[m]
y_v	Deslocamento da válvula	[m]
\ddot{y}_v	Aceleração da válvula	[m/s ²]
\dot{y}_v	Velocidade da válvula	[m/s]

Símbolos Gregos

δ	Distância entre os discos, ou folga	[m]
δ	Folga entre a válvula e o assento	[m]
δ_q	Folga de quina entre a válvula e o assento	[m]
ε_v	Fração de perdas em eficiência volumétrica	-
$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$	Componentes de deformações normais nas direções radial e tangencial	-
η_s	Eficiência isentrópica	-
η_v	Eficiência volumétrica	-
γ	Razão de calores específicos	-
λ	Livre caminho médio	[m]
μ	Viscosidade dinâmica	[Pa.s]
ν	Coefficiente de Poisson do material da válvula	-
ϕ, η	Variáveis genéricas	
ρ	Densidade	[kg/m ³]
ρ_{cs}	Densidade do fluido na câmara de sucção	[kg/m ³]
ρ_{ls}	Densidade do fluido na linha de sucção	[kg/m ³]
ρ_o	Densidade de estagnação	[kg/m ³]
σ_T	Coefficiente de acomodação térmico	-
σ_r, σ_θ	Componentes de tensões nas direções radial e tangencial	[Pa]
σ_v	Coefficiente de acomodação de quantidade de movimento	-
θ	Ângulo de manivela	[graus]
θ_{max}	Ângulo de manivela correspondente a posição que o pistão alcança o ponto morto superior	[graus]

Sumário

1	Introdução	29
1.1	Perdas de Eficiência em Compressores Alternativos	32
1.2	Vazamentos em Compressores	33
1.3	Estrutura da Dissertação	34
2	Revisão Bibliográfica	37
2.1	Vazamento em Válvulas de Compressores	37
2.2	Escoamento entre Discos Paralelos	40
2.3	Escoamento em Microcanais	42
2.4	Síntese	50
3	Modelagem Matemática do Ciclo de Compressão	51
3.1	Equações Governantes	51
3.1.1	Volume da Câmara de Compressão	51
3.1.2	Estado Termodinâmico do Fluido Refrigerante	53
3.1.3	Dinâmica de Válvulas	57
3.1.4	Vazão Mássica nas Válvulas e Vazamento na Folga Pistão Cilindro	58
3.2	Avaliação das Perdas no Ciclo de Compressão	60
4	Modelagem do Vazamento em Válvulas	65
4.1	Modelagem do Escoamento	65
4.1.1	Escoamento isotérmico	69
4.1.2	Escoamento adiabático	70
4.2	Limite da Teoria do Contínuo	72
4.2.1	Coefficiente de Atrito para Região de Escorregamento	73
4.3	Modelagem Matemática da Deflexão da Palheta	75
4.3.1	Válvulas Rígidas com Pequenas Deformações	77
4.4	Metodologia de Solução	81
4.4.1	Solução no Domínio do Espaço	83
4.4.2	Solução no Domínio do número de Mach e no domínio da Pressão	85
5	Resultados e Discussões	93

5.1	Verificação do Modelo	94
5.2	Validação do Modelo	98
5.3	Comparação entre Formulações de Escoamento Isotérmico e Escoamento Adiabático	102
5.4	Vazamento sem Considerar a Flexão da Palheta	104
5.4.1	Válvula de Descarga	104
5.4.2	Válvula de Sucção	109
5.5	Vazamento Considerando a Flexão da Palheta	113
5.6	Influência da Condição de Escorregamento	120
5.7	Influência de parâmetros geométricos da válvula	123
5.8	Efeito do Vazamento sobre a Eficiência do Compressor	125
6	Conclusões	137
6.1	Considerações preliminares	137
6.2	Principais conclusões	138
6.3	Sugestões de trabalhos futuros	138
	Referências Bibliográficas	139
	Apêndice A Equações governantes	145
A.1	Equações Básicas	145
A.2	Escoamento Isotérmico	146
A.3	Escoamento Adiabático	147
A.4	Escoamento entre Discos Paralelos	149
A.5	Escoamento Isotérmico entre Discos Paralelos	149
A.6	Escoamento Adiabático entre Discos Paralelos	150
	Apêndice B Equações da Teoria de Placas	151
B.1	Placas circulares finas	152

1 *Introdução*

Atualmente, a refrigeração é essencial em aplicações residenciais, comerciais, industriais, de transporte e até mesmo em equipamentos eletrônicos. Basicamente, existem diferentes alternativas de ciclos de refrigeração, tais como compressão mecânica de vapor, absorção de vapor, expansão de ar, efeito termoelétrico, ejeção de vapor e, recentemente, ainda em fase exploratória, a refrigeração por efeito magnetocalórico.

O ciclo de refrigeração por compressão mecânica de vapor é o mais utilizado, sendo composto fundamentalmente por quatro componentes: evaporador, compressor, condensador e dispositivo de expansão. O fluido refrigerante, no estado líquido, é forçado a evaporar em uma temperatura baixa no evaporador devido à ação conjunta do compressor e do dispositivo de expansão. Durante a evaporação, calor é retirado do ambiente a ser refrigerado, produzindo assim o efeito de refrigeração. No estado de vapor, o fluido refrigerante é comprimido, elevando a sua temperatura e pressão e em seguida é levado ao condensador. No condensador o fluido rejeita calor para um meio externo, condensando-se e voltando ao estado líquido. O líquido refrigerante volta então ao dispositivo de expansão e o processo se repete.

Refrigeradores, congeladores e condicionadores de ar operam de acordo com o ciclo de refrigeração por compressão mecânica de vapor e, de acordo com o relatório da pesquisa de posse de equipamentos e hábitos de consumo realizado pela ELETROBRÁS/PROCEL (2005), são responsáveis por 47% do consumo total de energia elétrica residencial no Brasil, sendo que os refrigeradores domésticos representam em média 22% do consumo de uma residência. Desta forma, devido à elevada demanda de energia elétrica para a remoção da carga térmica, um bom projeto do sistema deve ser elaborado no sentido de aproveitar essa energia consumida da melhor maneira.

Os compressores podem ser classificados em dois grandes grupos: i) compressores roto-dinâmicos e ii) compressores de deslocamento positivo. Nos compressores roto-dinâmicos, energia cinética é fornecida inicialmente ao fluido através de pás e então recuperada na forma de um aumento de pressão ao passar por um difusor. Nos compressores de deslocamento positivo

a compressão do vapor é efetuada mecanicamente por um elemento de compressão. Uma porção de vapor é introduzida no compressor e comprimida, diminuindo o seu volume. Durante o processo de compressão, a pressão do refrigerante aumenta até atingir o valor desejado e em seguida é liberado na linha de descarga. Assim, a vazão mássica neste tipo de compressores ocorre de forma intermitente.

Os compressores de deslocamento positivo podem ser ainda classificados de acordo com o mecanismo de compressão, conforme mostrado esquematicamente na figura 1.1.

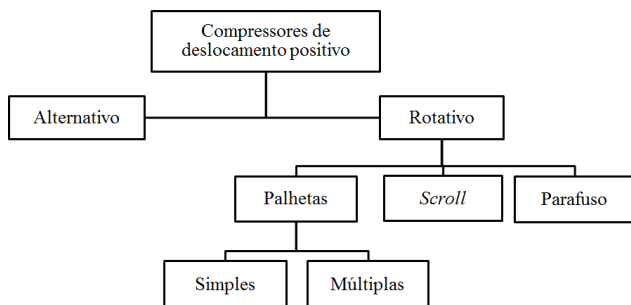


Figura 1.1 – Organograma dos tipos de compressores de deslocamento positivo.

O tipo de compressor a ser utilizado é função das características do sistema de refrigeração, tais como fluido refrigerante, capacidade e custo. Apesar de tecnologias emergentes na área de compressores, o compressor alternativo ainda continua a ser o mais difundido na indústria de refrigeração em diferentes faixas de capacidade.

Compressores alternativos de refrigeração doméstica utilizam válvulas do tipo palheta, cujos movimentos de abertura e fechamento ocorrem automaticamente devido à diferença de pressão entre a câmara de compressão e as câmaras de sucção/descarga. A variação de pressão do fluido no interior do cilindro se deve ao deslocamento alternado do pistão. Um esquema simplificado desses componentes do compressor alternativo é ilustrado na figura 1.2.

A figura 1.3 mostra o diagrama pressão-volume de um ciclo ideal de compressão. No processo de expansão, trecho DA, as duas válvulas permanecem fechadas e o pistão move-se no sentido de aumentar o volume da câmara de compressão, reduzindo a pressão do gás. Quando a pressão alcança um valor menor do que a pressão na câmara de sucção, a válvula de sucção abre, ponto A, e o gás é succionado no cilindro. Durante o processo de sucção,

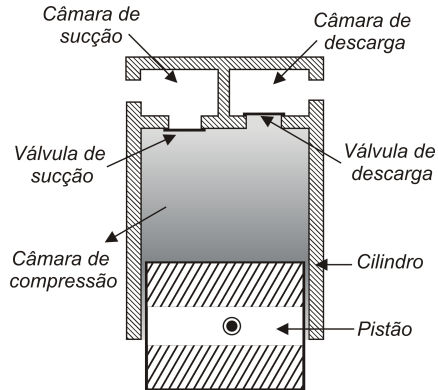


Figura 1.2 – Esquema simplificado do cabeçote, que engloba as câmaras de descarga e sucção, pistão e cilindro de compressores alternativos.

trecho AB, o volume do cilindro continua aumentando enquanto a válvula de sucção se mantém aberta. O pistão inverte o sentido de seu movimento quando alcança o ponto morto inferior e a válvula de sucção se fecha no ponto B. O processo de compressão do gás, trecho BC, ocorre até que a pressão do gás no cilindro seja suficiente para abrir a válvula de descarga, ponto C. No processo de descarga, trecho CD, o gás então é descarregado para a câmara de descarga. Quando alcança o ponto morto superior, o pistão inverte novamente o sentido de seu movimento, com o conseqüente fechamento da válvula de descarga, ponto D, completando assim o ciclo de compressão.

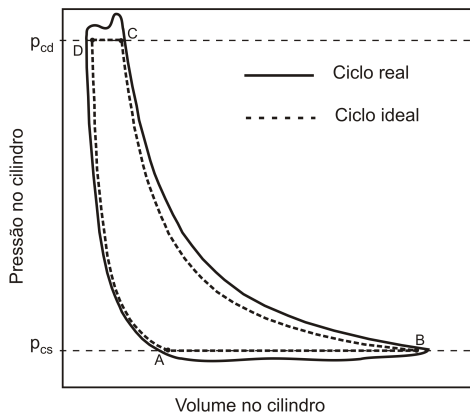


Figura 1.3 – Diagrama pressão-volume de um ciclo ideal de compressão.

1.1 Perdas de Eficiência em Compressores Alternativos

A eficiência de compressores alternativos é afetada por diversos fenômenos indesejáveis, dando origem a perdas de vazão mássica e perdas energéticas Ussyk (1984). As perdas de vazão mássica se devem à presença de volume morto, restrição ao escoamento e refluxo em válvulas, superaquecimento do gás na sucção, vazamento na folga pistão-cilindro e vazamento nas válvulas.

Por outro lado, as perdas energéticas são divididas em três parcelas: i) perdas elétricas, devido ao efeito Joule, histerese e correntes parasitas no motor; ii) perdas mecânicas, devido ao atrito em mancais e iii) perdas termodinâmicas, devido a ineficiências do processo de compressão, expansão, sucção e descarga, decorrente de vazamentos, restrições e refluxo em válvulas e transferência de calor no sistema de sucção e na câmara de compressão.

A eficiência volumétrica e a eficiência isentrópica são dois parâmetros bastante utilizados para avaliar o desempenho de um compressor. A eficiência volumétrica, η_v , caracteriza as perdas de vazão mássica e é dada pela razão entre a vazão mássica real \dot{m} do compressor e a vazão mássica que seria alcançada em um processo de compressão ideal, \dot{m}_{th} :

$$\eta_v = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_{th}} \quad (1.1)$$

A eficiência isentrópica, η_s , é dada pela razão entre a potência associada a um processo de compressão isentrópico e a potência real consumida pelo compressor:

$$\eta_s = \frac{\dot{m}(h_{2,s} - h_1)}{\dot{W}} \quad (1.2)$$

Na equação (1.2), h_1 representa a entalpia do fluido refrigerante no início do processo de compressão, $h_{2,s}$ é a entalpia do fluido ao final de um processo de compressão isentrópico e \dot{W} é a potência consumida pelo compressor.

1.2 Vazamentos em Compressores

A função básica de óleos lubrificantes em compressores alternativos é diminuir o atrito em mancais, evitando o desgaste prematuro das peças. Além disto, o óleo atua também na redução do aquecimento do motor elétrico, do ruído acústico e de vazamentos de refrigerante na folga pistão-cilindro e em válvulas. As características de lubrificação permanecerão satisfatórias por toda a vida útil do compressor se as temperaturas e pressões de operação forem adequadas e se o sistema estiver isento de contaminantes.

Apesar de seus benefícios, o óleo aumenta os custos de fabricação, causa problemas ambientais quando o compressor é descartado inadequadamente, aumenta o número de acessórios do sistema de refrigeração e pode dificultar a transferência de calor no evaporador, diminuindo assim a eficiência do sistema.

A figura 1.4 ilustra a placa de válvula e uma válvula do tipo palheta comumente empregada em compressores de refrigeração. O vazamento de refrigerante em válvulas é um resultado da diferença de pressão entre a câmara de compressão e as câmaras de sucção/descarga e de irregularidades superficiais da palheta da válvula e do assento oriundas do processo de fabricação.

As palhetas são normalmente confeccionadas em aço laminado de alto teor de carbono através do processo de estampagem, com um processo posterior de tamboreamento e polimento com material abrasivo, para conferir-lhes as características de resistência à fadiga necessárias e de bom acabamento superficial (PUFF, 2002).

As placas de válvula, por sua vez, são geralmente fabricadas através da metalurgia do pó pelo processo de sinterização do aço. Embora este processo proporcione um acabamento superficial razoável, existe a necessidade de uma operação complementar de usinagem na região do assento da válvula, via retificação ou brunimento.

O contato entre a palheta e o assento deve ser perfeito a fim de garantir que nenhum vazamento ocorra. De fato, em nível macroscópico a palheta

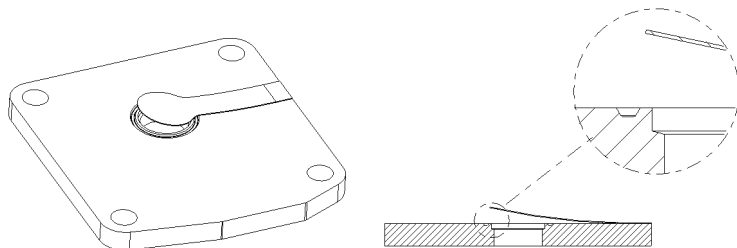


Figura 1.4 – Esquema ilustrando a válvula do tipo palheta e a placa de válvulas.

fica perfeitamente apoiada no assento quando a válvula está fechada, porém se observa em nível microscópico que o contato entre as superfícies da palheta e do assento é irregular. Isto significa dizer que embora a forma e a superfície desses componentes sejam projetadas para garantir um assentamento correto, geralmente haverá alguma irregularidade e, conseqüentemente, vazamento de fluido refrigerante.

Dentre os erros de forma que geram erros macro geométricos, tem-se a planeza do assento, a circularidade do assento e a planeza da válvula. Os erros de superfície, por sua vez, produzem erros micro geométricos e são definidos pela rugosidade de ambas as partes. Outros fatores podem também influenciar o vazamento em válvulas, tais como riscos na superfície, desalinhamento na montagem da válvula e até mesmo partículas estranhas retidas sobre o assento.

A diferença de pressão à qual a válvula está submetida gera a força motriz do vazamento. Em geral a taxa de vazamento depende do tipo de fluido, das condições de operação do sistema de refrigeração, do material, geometria e acabamento superficial do conjunto válvula e assento.

Sendo assim, o objetivo da presente dissertação é elaborar um modelo e uma metodologia de solução para quantificar vazamentos de fluido refrigerante em válvulas do tipo palheta e suas influências sobre o desempenho de compressores de refrigeração.

1.3 Estrutura da Dissertação

Após a introdução deste capítulo, contextualizando o estudo de vazamento nos compressores alternativos de refrigeração e o objetivo do trabalho, o capítulo 2 apresenta uma revisão da literatura de trabalhos relacionados ao tema.

O capítulo 3 descreve o modelo matemático adotado para descrever o

ciclo de compressão, originalmente desenvolvido por Ussyk (1984), e as mudanças introduzidas nas equações de balanço de massa e energia a fim de incluir os efeitos dos vazamentos. A modelagem matemática empregada para estimar o vazamento nas válvulas é detalhada no capítulo 4, incluindo a formulação diferencial do escoamento, a deflexão da palheta, bem como o método de solução numérica.

O capítulo 5 traz uma extensa análise dos principais resultados obtidos com a aplicação do modelo, destacando-se os efeitos de diversos parâmetros do problema sobre o vazamento e a eficiência do compressor, tais como o regime de escoamento, a deflexão da palheta, a geometria da válvula e a dimensão da folga. Por fim, as conclusões do estudo e sugestões para trabalhos futuros são indicados no capítulo 6.

2 *Revisão Bibliográfica*

O presente capítulo apresenta uma revisão de trabalhos disponíveis na literatura que servem de base para o estudo aqui proposto. Inicialmente, consideraram-se as investigações realizadas especificamente sobre vazamento em válvulas de compressores. O escoamento em difusores radiais formados por discos paralelos é uma geometria simplificada na análise da distribuição de pressão em válvulas do tipo palheta. Desta forma, esta geometria de escoamento foi também incluída na revisão, com ênfase nas soluções analíticas para o regime laminar que ocorre em pequenas folgas entre os discos. Finalmente, considerando que o fenômeno do vazamento ocorre em folgas de dimensões diminutas, a teoria associada a escoamentos em microcanais foi também abordada. Ao final do capítulo, apresenta-se uma síntese da revisão e as contribuições específicas deste trabalho.

2.1 **Vazamento em Válvulas de Compressores**

Machu (1990) estudou o efeito da vedação de válvulas em compressores alternativos de dupla ação, empregando um código para simular o ciclo de compressão, mas sem levar consideração o vazamento na folga entre pistão e cilindro e o refluxo e a dinâmica de válvulas. O autor adotou o hidrogênio e o metano como fluidos de trabalho, fixando as pressões nas câmaras de sucção e de descarga em 16 e 50 bar, respectivamente.

O vazamento nas válvulas foi estimado através do conceito de área equivalente de vazamento e o modelo de escoamento compressível isentrópico em bocal convergente. A área equivalente de vazamento é uma dimensão que corrige o valor da vazão mássica obtido do modelo adotado em relação ao valor real da massa de gás que vaza pela válvula e foi assumida ser igual a $0,04 \text{ cm}^2$, um valor bem menor do que aquela durante a abertura da válvula. Juntamente com essa área, Machu (1990) variou um fator de vazamento da válvula, que é um fator multiplicativo da área equivalente de vazamento, de 0 à 10 para uma análise de sensibilidade da pressão e da temperatura ao longo

ciclo, bem como da eficiência volumétrica e da potência indicada.

Concluiu que em algumas ocasiões o vazamento na válvula tem um efeito mais significativo sobre as eficiências volumétrica e isentrópica do que a restrição ao escoamento nos períodos em que a válvula está aberta. A figura 2.1 mostra como a eficiência volumétrica é afetada pelo fator de vazamento, sendo que valores maiores de n equivalem a uma diminuição da área de passagem do escoamento quando a válvula está aberta. Os casos para n entre 1 e 3 se referem ao hidrogênio e valores de n entre 4 e 7 representam o metano.

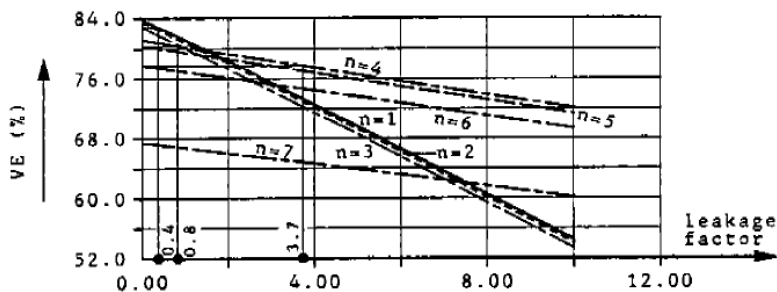


Figura 2.1 – Eficiência volumétrica para diferentes valores de fatores de vazamento, Machu (1992).

Habing (2005) avaliou coeficientes semi-empíricos de áreas efetivas de escoamento utilizados para a modelagem de válvulas automáticas. A área equivalente de escoamento é uma dimensão que corrige a vazão mássica estimada pelo modelo de escoamento adotado para representar a vazão mássica real através das válvulas do compressor. Utilizando um compressor de ar de dois estágios, detectou a presença de vazamento na válvula de sucção do segundo estágio, a partir de dados experimentais e do auxílio de um código de simulação de compressores. A origem do vazamento foi uma trinca na palheta devido a impactos sucessivos contra o assento. A parte defeituosa da válvula foi modelada como um orifício e o vazamento foi avaliado através da hipótese de escoamento incompressível. Os efeitos do vazamento da referida válvula são mostrados na figura 2.2. No diagrama pressão-volume, figura 2.2(a), observa-se um aumento na pressão de sucção. Dos resultados de vazão mássica nas válvulas de sucção e descarga, figura 2.2(b), percebe-se a presença de vazamento na válvula de sucção através dos valores negativos indicados pela linha contínua com símbolos circulares. Deve ser mencionado que o autor utilizou uma área efetiva de vazamento correspondente a 10% do valor da área efetiva de escoamento para a condição de válvula aberta.

Namdeo *et al.* (2008) aplicaram a técnica de redes neurais artificiais para

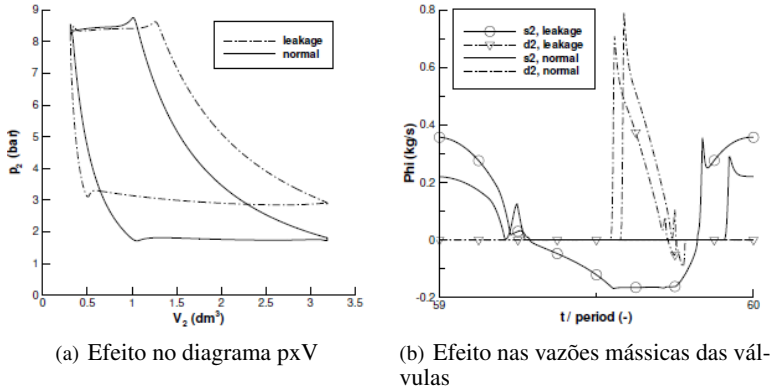


Figura 2.2 – Efeitos do vazamento na válvula de sucção do segundo estágio de compressão, Habing (2005).

a identificação de falha em válvulas de compressores alternativos através da detecção de vazamentos. Esse método se justifica pela praticidade e como forma de evitar danos ao pistão ou à superfície interna do cilindro devido ao lascamento da válvula. Através de simulação é possível identificar em quais das válvulas existe vazamento comparando-se o processo de expansão do gás de um compressor com e sem vazamento. Os resultados permitiram a importante conclusão de que o vazamento na válvula de descarga é mais crítico do que na válvula de sucção.

Elhaj *et al.* (2008) desenvolveram um modelo matemático para a simulação de um compressor alternativo de ar de dois estágios, na presença de vazamentos em válvulas. Além disso, uma bancada foi desenvolvida para avaliar os resultados globais do modelo. Segundo os autores o vazamento em válvulas é um defeito comum em compressores alternativos que operam sob diferenças de pressão elevadas, pois as mesmas sofrem impactos muito severos. O vazamento nas válvulas foi modelado como um escoamento incompressível através de um orifício definido pelo conceito de área efetiva de vazamento. Para avaliar o fenômeno de vazamento experimentalmente foi realizado um pequeno furo na placa de válvula. Os resultados numéricos e experimentais da pressão no interior do cilindro de compressão mostraram a mesma tendência.

2.2 Escoamento entre Discos Paralelos

Existe um grande número de estudos na literatura sobre o escoamento entre discos paralelos, conforme a representação da figura 2.3. Quando o fluido provém do orifício, as linhas de corrente do escoamento divergem e a geometria é conhecida como difusor radial (figura 2.3a). Quando o escoamento se dá no sentido contrário, figura 2.3(b), forma-se a geometria de um bocal radial.

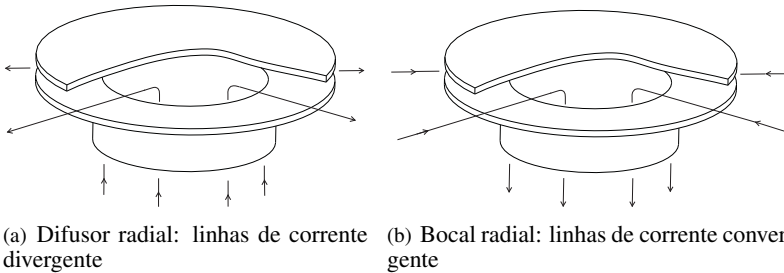


Figura 2.3 – Escoamento entre discos paralelos.

Livesey (1959) resolveu analiticamente as equações governantes do escoamento em um difusor radial pelo método integral aproximado de Von-Karman, adotando as hipóteses de perfil de velocidade parabólico, escoamento incompressível em regime laminar e permanente, obtendo a distribuição radial de pressão.

Moller (1963) realizou um extenso estudo experimental e teórico, utilizando a formulação integral do escoamento incompressível em difusores radiais, com o objetivo de determinar a distribuição radial de pressão nos escoamentos laminar e turbulento. O autor concluiu que o número de Reynolds da transição do escoamento entre os regimes laminar e turbulento, baseado na velocidade média e no diâmetro hidráulico, é aproximadamente igual a 2000. Além disto, observou que a pressão na região de entrada do difusor obtido por Livesey (1959) é maior do que o valor obtido em seus experimentos.

Savage (1964) resolveu a equação de quantidade de movimento utilizando uma expansão em série de potência com as mesmas hipóteses adotadas por Livesey (1959), porém sem assumir um perfil de velocidade. Conforme mostra a figura 2.4, os resultados se mostraram em boa concordância com os dados experimentais de Moller (1963), exceto na região de entrada onde o escoamento não está completamente desenvolvido. Savage (1964) questionou a hipótese do perfil de velocidade admitido por Livesey (1959), dizendo que o mesmo somente é adequado quando os efeitos viscosos predominam sobre

os de inércia.

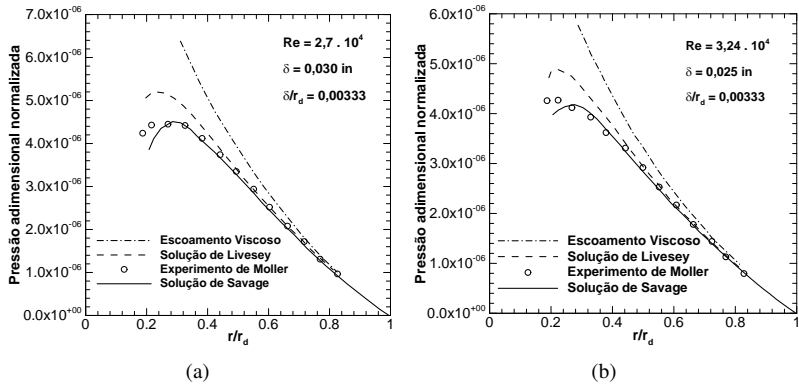


Figura 2.4 – Distribuição de pressão adimensionalizada e normalizada na direção radial para diferentes condições. Adaptado de Savage (1964).

Takenaka *et al.* (1964) formularam alguns modelos analíticos de escoamento para o cálculo da distribuição de pressão, e conseqüentemente a força resultante, sob o disco frontal variando a distância entre o mesmo e o assento para três geometrias de válvula. Os autores observaram que a força resultante sobre o disco frontal em função do aumento do espaçamento entre os discos sofre inicialmente uma queda brusca e em seguida uma elevação gradativa. A concordância entre os resultados com os dados experimentais foi satisfatória somente para pequenos espaçamentos entre os discos.

Jackson e Symmons (1965) realizaram medições para fins de comparação com resultados teóricos da distribuição de pressão do escoamento entre discos paralelos com efeitos de inércia dominantes na região central dos discos. Deve ser observado que no trabalho em questão a razão r_d/r_o adotada é bem maior do que aquela investigada por Moller (1963). Apesar da geometria axissimétrica do escoamento, os resultados experimentais mostraram a assimetria quando o espaçamento entre os discos foi aumentado, fato explicado pela instabilidade gerada no escoamento devido a gradientes de pressão adversos na região central dos discos. Os autores concluíram que os efeitos de inércia previstos teoricamente até aquele momento eram menores do que os encontrados no experimento.

Raal (1978) resolveu numericamente, pelo método das diferenças finitas, as equações de transporte de vorticidade para o escoamento incompressível entre discos paralelos. A solução permitiu caracterizar a presença de vórtices no escoamento para $Re > 60$.

Lee e Lin (1985) obtiveram a solução da distribuição de pressão sem a necessidade de assumir um perfil de velocidade para escoamento incompressível num bocal radial. Os autores linearizaram as equações da conservação da massa e quantidade de movimento e dessa forma obtiveram uma equação diferencial para a pressão na forma $dp/dr = f(Re, r)$. Devido à não-linearidade desta equação, o método de Runge-Kutta foi utilizado para solução numérica. As soluções situaram-se entre os limites de escoamento viscoso ($Re \rightarrow 0$) e escoamento potencial ($Re \rightarrow \infty$). Os resultados da distribuição de pressão ficaram próximos de experimentos realizados anteriormente.

Fleming *et al.* (1984) resolveram o escoamento compressível, permanente e adiabático no difusor radial levando em conta o efeito da variação da área e o atrito viscoso, avaliando a força resultante do campo de pressão do escoamento sobre o disco frontal. Segundo os autores, o escoamento no difusor é similar ao escoamento em um duto divergente de seção transversal retangular com variação de área gradativa. De acordo com os autores, os comportamentos se aproximam quando razão entre a largura e a altura é maior que sete.

Ghila (1995) resolveu o escoamento incompressível convergente entre discos paralelos com o método de diferenças finitas. Tanto a distribuição de pressão quanto a velocidade se mostraram dependentes de um único parâmetro adimensional que combina o número de Reynolds e a coordenada espacial na direção radial. Ghila (1995) mostrou que as teorias anteriores se aplicam somente para baixo número de Reynolds e subestimam a tensão cisalhante na parede, produzindo valores de velocidade mais altos no centro do canal e mais baixos perto da superfície.

Sato *et al.* (2005) adotaram uma linearização das equações do escoamento compressível e adiabático entre discos paralelos para configurações de difusor e bocal. Considerou que a parte não linear da equação diferencial que envolve o número de Mach elevado ao quadrado pode ser escrito como uma média dos valores da entrada e da saída, quando o termo associado ao atrito viscoso é bem menor que o termo da variação de área.

2.3 Escoamento em Microcanais

Devido ao crescente número de aplicações de sistemas microeletromecânicos (*Micro Electro Mechanical Systems* - MEMS) e a possibilidade de fabricar componentes cada vez menores com precisão elevada, diversas pesquisas vêm sendo realizadas desde o final dos anos 80 na área de microescoamento.

Pfahler *et al.* (1991) foram uns dos primeiros pesquisadores na área de

MEMS, com uma investigação experimental do escoamento de líquido e de gás em microcanais. Observaram que ao reduzir a altura do microcanal, a resistência que a parede oferece ao escoamento também diminuía, discordando do comportamento previsto pela teoria do contínuo. Esta conclusão foi obtida ao verificarem a redução do número de Poiseuille (que será explicado a seguir) do escoamento,

$$Po = C_f Re \quad (2.1)$$

em relação ao valor convencional previsto pelas equações de Navier-Stokes. Na equação anterior, C_f representa o coeficiente de atrito e Re o número de Reynolds. No entanto, as medições foram limitadas pela impossibilidade de se medir com precisão a altura do microcanal.

Na teoria do contínuo, a qual chamamos de teoria convencional, o número de Poiseuille é um número adimensional que caracteriza a seção transversal do canal, indicando a intensidade de restrição ao escoamento. Como exemplo alguns valores comuns são $Po = 16$, para dutos de seção circulares, e $Po = 24$, para placas planas paralelas.

O escoamento de um gás pode ser analisado em nível macroscópico, considerando o fluido como um meio contínuo e infinitamente divisível. Uma alternativa é considerar o escoamento em nível microscópico, tratando o fluido como um número elevado de moléculas e utilizando recursos estatísticos para descrever a posição, a velocidade e o estado das moléculas em cada instante. Dentro deste contexto, torna-se importante entender quando a hipótese do contínuo deixa de ser válida e um modelo molecular é necessário. O regime de escoamento pode ser caracterizado através do número de Knudsen

$$Kn = \frac{\lambda}{L_c} \quad (2.2)$$

que representa a razão entre o livre caminho médio entre as moléculas, λ , e o comprimento característico da região de escoamento, L_c . O comprimento característico geralmente é representado pela altura ou o diâmetro hidráulico do microcanal. Os regimes de escoamento de acordo com o número de Knudsen podem ser assim classificados (KARNIADAKIS; BESKOK, 2002):

- $Kn \leq 10^{-2}$: escoamento seguindo a teoria do contínuo;
- $Kn \geq O(10)$: o escoamento molecular livre.

Na faixa intermediária de números de Knudsen entre 10^{-2} e 10, outra classificação é necessária:

- $10^{-2} < Kn < 10$: escoamento com deslizamento;

- $0, 1 < Kn < 10$: escoamento de transição.

Essa classificação, mostrada de forma esquemática na figura 2.5, é baseada em informações empíricas. No entanto, observa-se que o limite entre os diferentes regimes de escoamento pode depender da geometria do problema e da escolha do comprimento característico, L_c . Assim, por exemplo, alguns autores consideram $Kn = 10^{-3}$ o limite do contínuo. No presente trabalho, adota-se a classificação de Karniadakis e Beskok (2002).

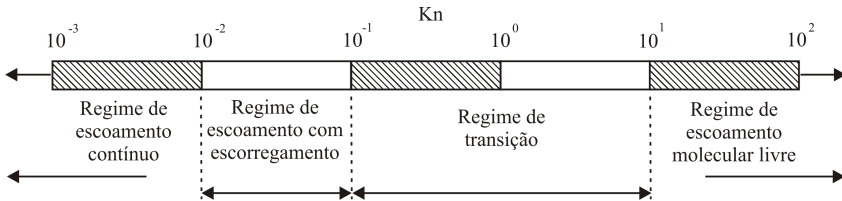


Figura 2.5 – Regimes de escoamento em função do número de Knudsen.

No regime de escoamento contínuo ($Kn < 10^{-2}$) as equações de Navier-Stokes juntamente com as condições de contorno convencionais de não deslizamento são aplicáveis.

No regime de escoamento com escorregamento ($10^{-2} < Kn < 0, 1$), a condição de contorno usual de não deslizamento na parede deixa de ser válida pois uma subcamada da ordem do caminho livre médio das moléculas, conhecida como camada de Knudsen, começa a dominar a região de escoamento próxima a parede. Dentro dessa camada, as equações de Navier-Stokes não são aplicáveis e a solução do problema dá-se através da equação de Boltzmann. Entretanto, nesta faixa de valores de Kn , a camada de Knudsen é menor do que 10% da altura do canal e pode ser desprezada, extrapolando-se o perfil de velocidade até a parede e aplicando assim uma condição de contorno de escorregamento na parede. Portanto, as equações de Navier-Stokes podem ser utilizadas para descrever o escoamento neste regime e o efeito de rarefação do gás próximo a parede deve ser corrigido através da velocidade de escorregamento e o salto de temperatura (Karniadakis e Beskok (2002)).

No regime de transição ($0, 1 < Kn < 10$) as equações constitutivas que definem o tensor tensão e o vetor fluxo de calor tornam-se inválidas. Uma alternativa de solução são as equações de Burnett ou Woods deduzidas a partir da equação de Boltzmann, que corrigem as leis constitutivas. Outras alternativas seriam utilizar simulação direta de Monte Carlo, DSMC, que é uma técnica de simulação numérica baseada na dinâmica das partículas ou a solução da equação de Boltzmann, através do método de lattice Boltzmann. O primeiro método tem sido amplamente empregado nos últimos anos para o

regime de transição.

No regime de escoamento molecular livre, $Kn > O(10)$, as partículas do gás estão bastante afastadas e colidem com maior frequência com a superfície do que entre si. As interações intermoleculares não podem ser ignoradas e as colisões das partículas com a superfície são importantes. Neste caso a solução do escoamento pode também ser obtida através da equação de Boltzmann.

Do ponto de vista teórico, o regime de escoamento com escorregamento é particularmente interessante porque geralmente resulta em modelos analíticos ou semianalíticos no caso de escoamentos em geometrias simples. Conforme já mencionado, as condições de contorno convencionais entre gás e superfície devem ser corrigidas. Maxwell (1879) apresentou uma proposta para a condição de contorno em que a velocidade de escorregamento na parede é dada por:

$$u_g - u_w = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \lambda \left. \frac{\partial u_g}{\partial y} \right|_w + \frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho T} \left. \frac{\partial T_g}{\partial x} \right|_w \quad (2.3)$$

O primeiro termo do lado direito da igualdade representa a rarefação e a forma de interação das moléculas de gás com a superfície. O segundo termo do lado direito da equação considera o rastejo térmico (*thermal creep*) a que o gás está sujeito na presença de um gradiente de temperatura ao longo do microcanal. Devido ao efeito de rastejo térmico, o fluido em um microcanal pode escoar entre dois reservatórios com temperaturas diferentes, no sentido da menor para maior temperatura, mesmo quando os reservatórios se encontram no mesmo nível de pressão.

A condição de contorno que expressa o salto de temperatura na parede foi proposta por Smoluchowski (1898):

$$T_g - T_w = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{\lambda}{Pr} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_w \quad (2.4)$$

Nas equações (2.3) e (2.4), os sub índices w e g denotam a parede e o gás, respectivamente. As coordenadas x e y representam as direções tangencial e normal à parede. A densidade, a viscosidade, a razão de calores específicos e o número de Prandtl são representados por ρ , μ , γ e Pr , respectivamente.

O coeficiente de acomodação de quantidade de movimento tangencial σ_v é um parâmetro que contabiliza a redução da quantidade de movimento, na direção tangencial, das moléculas após a colisão com a superfície. Idealmente este valor pode assumir dois extremos: quando a quantidade de movimento das moléculas incidentes é igual a das moléculas refletidas, $\sigma_v = 0$ e a reflexão é dita especular, pois a quantidade de movimento tangencial da molécula é mantida; por outro lado, quando a superfície adsorve a molécula por um longo

período, a quantidade de movimento tangencial é totalmente perdida, $\sigma_v = 1$ e a reflexão é dita difusa (KANDLIKAR, 2006).

Da mesma forma, o coeficiente de acomodação térmico σ_T , considera a energia trocada entre as moléculas e a superfície. Se a molécula adquire a temperatura da superfície, $\sigma_T = 1$. Caso ela mantenha a sua temperatura original, $\sigma_T = 0$. Os coeficientes σ_v e σ_T caracterizam a interação entre gás e superfície e são parâmetros de entrada necessários para se modelar o regime de escoamento com deslizamento.

Cao *et al.* (2009) realizaram uma revisão bibliográfica extensa a respeito dos valores de σ_v disponíveis na literatura a partir de dados teóricos, experimentais e de simulações de dinâmica molecular. Segundo o autor, vários fatores afetam o valor deste coeficiente, tais como o potencial de interação entre gás-sólido, a energia das moléculas incidentes e as condições da superfície (temperatura, estrutura cristalina, rugosidade, absorvidade), mas os efeitos de muitos deles permanecem obscuros.

Mo e Rosenberger (1990) simularam o escoamento bidimensional em um canal com superfícies rugosas em nível atômico através de simulação dinâmica molecular. Consideraram rugosidades senoidais e randômicas, variando a amplitude e o período. Concluíram que, além do número de Knudsen, Kn , a razão entre o caminho livre médio, λ , e a amplitude da rugosidade deve também ser considerada na avaliação da condição de escorregamento na parede. Segundo os autores, a condição de não escorregamento ocorre quando o caminho livre médio é da mesma ordem de grandeza ou menor do que a rugosidade da superfície.

Dados experimentais muito utilizados para a validação de teorias e simulações de escoamento em microcanais podem ser encontrados nos trabalhos de Arkilic (1994), Arkilic *et al.* (1994) e Arkilic *et al.* (1997). Nesses trabalhos os autores utilizaram um microcanal de comprimento de 7,5 mm, largura de 52,25 μm e altura de 1,33 μm . O processo de fabricação do microcanal garantiu uma altura bastante uniforme e rugosidade menor que 65 nm. Uma completa descrição do processo de fabricação do microcanal pode ser encontrada em Arkilic (1994). A figura 2.6 apresenta uma comparação entre os dados experimentais e resultados obtidos de modelos com e sem escorregamento na parede, disponível em Arkilic *et al.* (1997), observando-se uma excelente concordância quando o modelo considera o escorregamento. Arkilic *et al.* (1997) notaram que a condição de contorno de não escorregamento faz com que o modelo subestime a vazão mássica e que, devido aos baixos valores dos números de Mach e Reynolds, o modelo de escoamento isotérmico compressível adotado é justificável.

Harley *et al.* (1994) realizaram uma investigação teórica e experimental do problema de escoamento em microcanais com dimensões de 100 μm de

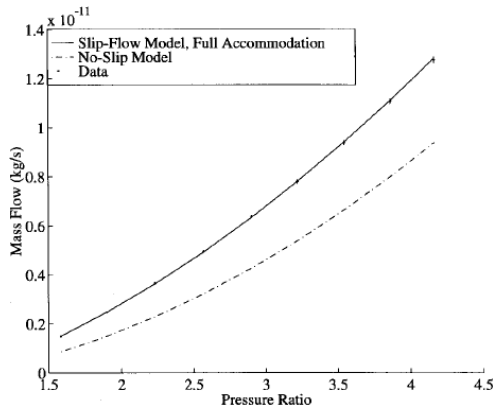


Figura 2.6 – Comparação da vazão mássica de gás Hélio obtida por Arkilic *et al.* (1997). Dados experimentais e modelos analíticos com e sem escorregamento.

largura, 10 mm de comprimento e altura variando de 0,5 a 20 μm , utilizando nitrogênio, hélio e argônio. Através da simulação numérica das equações de Navier-Stokes e da energia para o escoamento compressível bidimensional entre placas planas paralelas, os autores concluíram que a velocidade transversal pode ser desprezada e a pressão e a densidade podem ser admitidas constantes em cada seção do microcanal. Assim o escoamento pode ser considerado como 'localmente plenamente desenvolvido', ou seja, o perfil de velocidade em uma seção é muito similar àquele do escoamento incompressível plenamente desenvolvido, mas com a densidade sendo atualizada de acordo com as mudanças de temperatura e pressão. Com a hipótese de escoamento localmente plenamente desenvolvido e a condição de contorno de escorregamento, Harley *et al.* (1994) calcularam o número de Poiseuille baseado nas medições experimentais para os casos com e sem escorregamento. A figura 2.7 mostra os resultados obtidos, onde C^* representa a razão entre o número de Poiseuille obtido experimentalmente e o teórico. Observando que as linhas cheia e tracejada correspondem aos resultados dos modelos com e sem escorregamento, respectivamente, pode-se concluir que a teoria de escoamento sem escorregamento falha à medida que o número de Reynolds diminui.

Asako *et al.* (2003) investigaram o efeito de compressibilidade isoladamente no regime do contínuo, ou seja, sem o efeito de escorregamento no escoamento de gás em microcanais de placas planas paralelas. O modelo numérico de formulação lagrangiana-euleriana foi utilizado para resolver as equações de quantidade de movimento e energia do escoamento compressível bidimensional. Os modelos adiabático e isotérmico foram analisados e

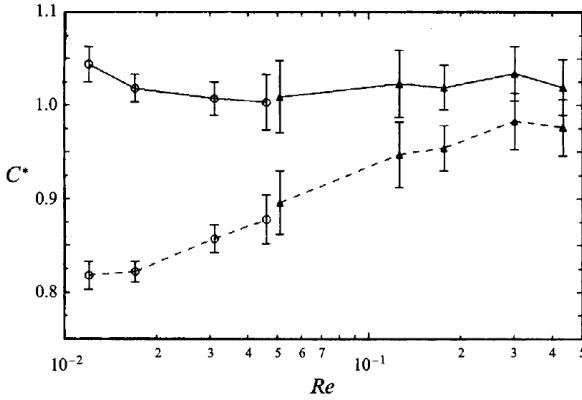


Figura 2.7 – Razão dos valores de Poiseuille obtidos experimentalmente normalizados pelo número de Poiseuille obtido teoricamente. As normalizações representadas pelas linhas sólidas e tracejadas correspondem as teorias de escoamento com e sem escorregamento, respectivamente. (Harley *et al.* (1994)). Os símbolos ▲ e ○ representam os gases nitrogênio e hélio, respectivamente.

mostraram que o número de Poiseuille não deve ser considerado constante ao longo do canal como na teoria convencional de escoamento incompressível. Os autores propuseram uma correlação para os números de Poiseuille e Mach para $Re < 500$ e $M < 0,4$. Posteriormente Asako *et al.* (2005) realizaram uma análise numérica similar para um microtubo. Um aparato experimental foi também construído, possibilitando assim a validação do modelo. O experimento demonstrou a mesma tendência da correlação proposta de que o número de Poiseuille aumenta com o número de Mach.

Dando continuidade ao trabalho de Asako *et al.* (2005), Hong *et al.* (2007) usaram o mesmo modelo numérico e obtiveram correlações para o número de Poiseuille com o objetivo de avaliar os efeitos de compressibilidade e rarefação do escoamento de gás entre placas planas paralelas nos regimes contínuo e de escorregamento. Analisaram uma faixa mais ampla dos números de Reynolds e Mach e consideraram a temperatura da superfície do canal constante. A altura do microcanal variou de 2,0 a 10,0 μm . Duas correlações foram propostas como funções dos números de Reynolds, Mach e Poiseuille para o escoamento, sendo válidas para $Re < 3600$ e $M < 0,6$:

$$f_F Re = \frac{96}{1 + 12Kn} + \frac{5,02M + 13,12M^2 + 76,69M^3}{(1 + 12Kn)^2} \quad (2.5)$$

$$f_D Re = \frac{96}{1 + 12Kn} + \frac{15,03M + 59,28M^2 + 414,31M^3}{(1 + 12Kn)^2} \quad (2.6)$$

onde f_F e f_D representam os fatores de atrito de Fanning (modificado, pois $f_F = 4C_f$) e de Darcy, respectivamente. No caso de escoamento a baixas velocidades, o número de Poiseuille diminui com o aumento do número de Knudsen, devido ao efeito de rarefação. Por outro lado, para escoamento com velocidade mais elevada, o número de Poiseuille aumenta com o aumento do número de Mach, devido ao efeito de compressibilidade. Os resultados dessas correlações ficaram dentro de uma faixa de desvio de $\pm 2\%$ em relação aos dados experimentais de Turner *et al.* (2004).

Hong *et al.* (2009) apresentaram um método para o cálculo do vazamento de gás através de trincas em vasos de pressão. Os autores utilizaram um modelo de escoamento compressível unidimensional e o fator de atrito foi estimado das correlações (2.5) e (2.6) anteriores. A estimativa correta do vazamento é fundamental para as indústrias de vasos de pressão que utilizam o método vazamento antes da quebra (*leak-before-brake* - LBB), como uma forma de assegurar confiabilidade e desempenho do produto. O trabalho incluiu as condições de escoamento com e sem escorregamento, escoamento sônico e subsônico. O método de Runge-Kutta de quarta ordem foi utilizado para resolver a equação diferencial não linear que descreve a variação de pressão ao longo do microcanal juntamente com o método da falsa posição para encontrar o número de Mach na entrada do microcanal. A trinca foi modelada na forma de um microcanal com altura variando de $2 \mu\text{m}$ a $50 \mu\text{m}$ e razão de aspecto de 200, 1000 e 2000. Os resultados foram comparados com simulações numéricas e experimentos realizados anteriormente e boa concordância foi observada.

Devido à existência de dados contraditórios relativos à transição do escoamento entre os regimes laminar e turbulento, Hetsroni *et al.* (2005) revisaram os estudos presentes até aquele momento de escoamento de líquido e gás em microcanais com $15 < D_h < 4010 \mu\text{m}$. O comportamento do escoamento em microcanais com $D_h > 50 \mu\text{m}$ não apresentou diferenças em relação à descrição do escoamento de acordo com a teoria do contínuo. Para microcanais lisos ou com rugosidade relativa menor do que 7%, a transição de laminar para turbulento pode ocorrer em $1800 < Re_{cr} < 2200$.

Chong (2006) estudou o escoamento bloqueado de gás em microcanais de placas planas paralelas, utilizando o método da simulação direta de Monte Carlo para microcanais com comprimentos de 10, 100 e $1000 \mu\text{m}$. O valor de pressão na entrada adotado foi de 1 bar e na saída valores de 0,1 até 0,01 bar foram utilizados. O autor observou que o escoamento atingiu a velocidade sônica somente na linha de centro do microcanal. Os resultados de vazão mássica obtidos via simulação numérica direta de Monte Carlo foram com-

parados com aqueles obtidos das equações de Navier-Stokes com a condição de escorregamento na parede, indicando que os dois são similares quando o comprimento do canal é bem maior do que a altura.

2.4 Síntese

A partir da revisão bibliográfica, observa-se que existem poucos trabalhos sobre vazamento em válvulas de compressores. Nos estudos disponíveis, os autores modelaram o vazamento através de uma área equivalente de passagem do gás, sem um maior detalhamento do escoamento. A maior motivação desses trabalhos foi a determinação do vazamento em válvulas quebradas devido à falha por sucessivos impactos. Uma exceção é o trabalho de Machu (1990) em que o vazamento é analisado para uma válvula intacta.

O escoamento entre dois discos paralelos é a geometria fundamental para análise de escoamentos em válvulas do tipo palheta. Diversos trabalhos podem ser encontrados na literatura para esta geometria simplificada de escoamento, mas somente Fleming *et al.* (1984) e Sato *et al.* (2005) consideraram o efeito de compressibilidade do gás.

A revisão de trabalhos de escoamento em microcanais no regime de escoamento com escorregamento revelou que modelos simplificados unidimensionais podem ser empregados para avaliar o efeito de rarefação do escoamento. Modelos analíticos podem ser obtidos quando o escoamento é isotérmico, sem considerar assim o efeito de rastejo térmico, mas corrigindo-se o fator de atrito. Não encontrou-se nenhum estudo na literatura que trate o escoamento como adiabático. Por outro lado, os efeitos de aceleração para escoamento com número de Mach entre 0,3 e 1 só podem ser avaliados através da solução das equações de Navier-Stokes para formulação bidimensional. Outro aspecto relevante é que todos os estudos na literatura consideram escoamentos em microcanais de seção transversal constante. Além disto, deve ser mencionado que o escoamento bloqueado em microcanais não é muito comum e somente um estudo nesta condição foi encontrado.

3 *Modelagem Matemática do Ciclo de Compressão*

3.1 Equações Governantes

Um modelo de formulação integral foi adotado para descrever os diversos processos que ocorrem ao longo do ciclo de compressão, conforme proposta de Ussyk (1984), sendo constituído por quatro conjunto de equações para descrever os seguintes parâmetros:

- (i) Volume da câmara de compressão em função do movimento do pistão;
- (ii) Estado termodinâmico do fluido refrigerante dentro da câmara ao longo do ciclo de compressão;
- (iii) Dinâmica das válvulas de sucção e descarga;
- (iv) Vazão mássica nas válvulas e por vazamento em folgas.

Em função do objetivo do presente estudo, o modelo recebeu algumas modificações que serão detalhadas neste capítulo.

3.1.1 Volume da Câmara de Compressão

O volume da câmara de compressão, ou do cilindro, \forall_{cil} , mostrado na figura 3.1, pode ser expresso por

$$\forall_{cil} = \forall + \forall_m \quad (3.1)$$

onde o volume morto \forall_m é fixo e o volume \forall varia em função do ângulo de manivela θ , sendo obtido pelo produto da área da seção transversal do cilindro pelo deslocamento do pistão $z(\theta)$:

$$\forall_{cil}(\theta) = \frac{\pi D_{cil}^2}{4} z(\theta) + \forall_m \quad (3.2)$$

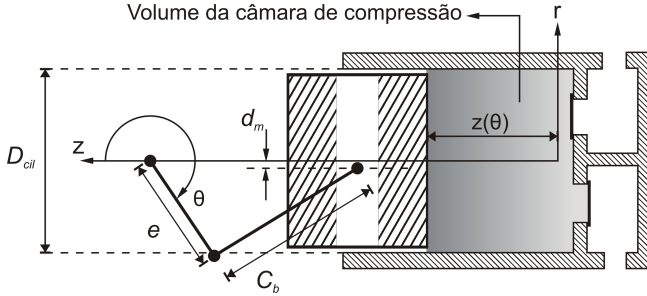


Figura 3.1 – Volume da câmara de compressão.

A posição do pistão $z(\theta)$ é determinada tendo como referência o sistema de coordenadas (r, z) situado no ponto morto superior como mostrado na figura 3.1. Logo,

$$z(\theta) = C_{pms} - \left[-e \cos \theta + \sqrt{C_b^2 - (e \sin \theta - d_m)^2} \right] \quad (3.3)$$

onde C_{pms} representa a máxima distância entre o eixo da manivela e o pino que liga a biela e o pistão, e representa a excentricidade da manivela, C_b o comprimento da biela e d_m o desalinhamento entre o eixo da manivela e o pino do pistão. O valor de C_{pms} pode ser determinado utilizando o ângulo θ_{max} que é alcançado quando o pistão alcança o ponto morto superior:

$$C_{pms} = -e \cos \theta_{max} + \sqrt{C_b^2 - (e \sin \theta_{max} - d_m)^2} \quad (3.4)$$

onde

$$\theta_{max} = \pi - \arcsen \left(\frac{d_m}{C_b + e} \right) \quad (3.5)$$

Substituindo a equação (3.3) na equação (3.2) obtém-se

$$\forall_{cil}(\theta) = \frac{\pi D_{cil}^2}{4} \left\{ C_{pms} - \left[-e \cos \theta + \sqrt{C_b^2 - (e \sin \theta - d_m)^2} \right] \right\} + \forall_m \quad (3.6)$$

Pode-se também escrever a equação (3.6) em função do tempo t . Para isto, basta reconhecer que o ângulo de manivela θ está relacionado com velocidade angular do compressor ω , ou seja, $\theta = \omega t = 2\pi f_o t$ onde f_o é a

frequência de operação do compressor. Assim,

$$\begin{aligned} \forall_{cil}(t) = \frac{\pi D_{cil}^2}{4} \left[C_{pms} - \left(-e \cos(2\pi f_o t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{C_b^2 - (e \sin(2\pi f_o t) - d_m)^2} \right) \right] + \forall_m \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.1.2 Estado Termodinâmico do Fluido Refrigerante

A variação das propriedades termodinâmicas do fluido refrigerante é resultado do movimento do pistão que causa a variação do volume da câmara de compressão, de vazões mássicas nas válvulas, de vazamentos em folgas e da troca térmica entre o fluido e a parede do cilindro. As propriedades do fluido são consideradas uniformes no interior da câmara de compressão em cada ângulo de manivela. Além disto, o valor da temperatura da parede do cilindro T_w é prescrito como constante.

Para determinar as propriedades do gás na câmara de compressão aplica-se a primeira lei da termodinâmica

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho d\forall + \int_{SC} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (3.8)$$

ao volume de controle representado pela linha tracejada na figura 3.2.

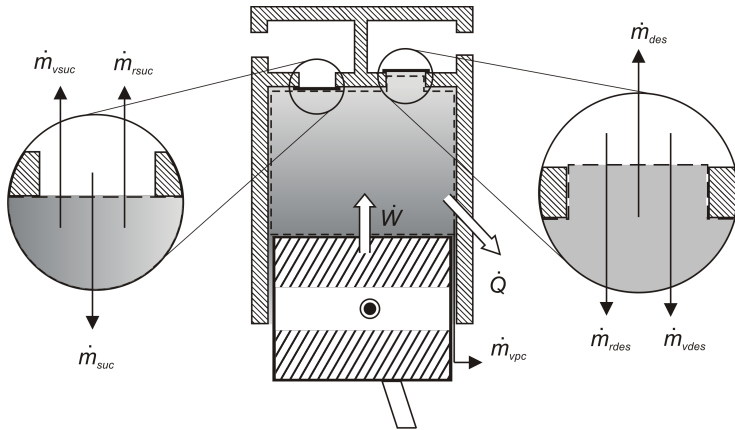


Figura 3.2 – Volume de controle para balanço de massa e energia no cilindro.

O termo $e = u + V^2/2 + gz$ representa a energia específica do gás, que é composta pela soma da energia interna, u , energia cinética, $V^2/2$ e energia

potencial, gz , sendo que estas duas últimas parcelas podem ser desprezadas.

As propriedades avaliadas no interior do volume de controle e as que atravessam a superfície do volume de controle serão denotadas pelos índices i e j , respectivamente. Adotando esta notação e a definição de entalpia específica, $h = u + p/\rho$, tem-se:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} u_i \rho_i dV + \int_{SC} h_j \rho_j \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (3.9)$$

A taxa de transferência de calor \dot{Q} entre o gás e o cilindro é calculada através da lei de resfriamento de Newton:

$$\dot{Q} = h_w A_t (T_w - T_i) \quad (3.10)$$

onde h_w é o coeficiente de transferência convectiva de calor entre a parede do cilindro e o gás, A_t é a área de troca entre a parede do cilindro e o gás e T_i é a temperatura do fluido dentro do cilindro. De acordo com Prata *et al.* (1992), coeficiente de transferência convectiva de calor h_w pode ser obtido da correlação de Annand (1963):

$$Nu_w = \frac{h_w D_{cil}}{k_g} = a (Re Pr)^b \quad (3.11)$$

em que k_g é a condutividade térmica do gás, D_{cil} é o diâmetro do cilindro e a e b são constantes, ambas consideradas iguais a 0,7 no presente trabalho.

O termo \dot{W} refere-se à potência ou taxa de trabalho realizada sobre o gás e pode ser reescrito como

$$\dot{W} = p_i \frac{dV_i}{dt} \quad (3.12)$$

onde p_i e dV_i/dt representam, respectivamente, a pressão e a taxa de variação do volume do gás no interior da câmara de compressão.

O primeiro termo do lado direito da igualdade da equação (3.9) descreve a variação temporal da energia do gás no volume de controle e pode ser reescrito como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} u_i \rho_i dV = \frac{d}{dt} (m_i u_i) = m_i \frac{du_i}{dt} + u_i \frac{dm_i}{dt} \quad (3.13)$$

onde m_i , dm_i/dt , u_i e du_i/dt representam, respectivamente, a massa, a taxa de variação da massa, a energia interna e a taxa de variação da energia interna do gás no interior da câmara de compressão.

O segundo termo do lado direito da equação (3.9) representa o balanço líquido da energia transportada pelo escoamento através das entradas e saídas na superfície de controle e pode ser escrito na forma de um somatório das

várias contribuições:

$$\int_{SC} h_j \rho_j \vec{V} \cdot d\vec{A} = \sum \dot{m}_j h_j \quad (3.14)$$

onde \dot{m}_j e h_j representam respectivamente a vazão mássica e a entalpia específica. O produto $\dot{m}_j h_j$ ser á positivo quando o escoamento estiver saindo da câmara de compressão e vice-versa. O número de termos do somatório varia de acordo com a quantidade de entradas e saídas de massa sobre a superfície de controle.

Substituindo as equações (3.14), (3.13), (3.12) e (3.10) na equação (3.9) e rearranjando os termos, obtém-se:

$$m_i \frac{du_i}{dt} = h_w A_r T_w - h_w A_r T_i - p_i \frac{dV_i}{dt} - \sum \dot{m}_j h_j - u_i \frac{dm_i}{dt} \quad (3.15)$$

é possível representar algumas das propriedades termodinâmicas presentes na equação anterior com o emprego das relações de Maxwell. Por exemplo,

$$\frac{du_i}{dt} = c_{v,i} \frac{dT_i}{dt} + \left[T_i \left. \frac{\partial p_i}{\partial T_i} \right|_v - p_i \right] \frac{dv_i}{dt} \quad (3.16)$$

onde a taxa de variação do volume específico dv_i/dt

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_i}{m_i} \right) = \frac{1}{m_i} \frac{dV_i}{dt} - \frac{v_i}{m_i} \frac{dm_i}{dt} \quad (3.17)$$

Substituindo as equações (3.17) e (3.16) na equação (3.15) e, após algumas manipulações algébricas, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{dt} = & \frac{1}{m_i c_{v,i}} \left[h_w A_r T_w - h_i \frac{dm_i}{dt} - \sum \dot{m}_j h_j \right] + \\ & - \frac{T_i}{m_i c_{v,i}} \left[h_w A_r + \left. \frac{\partial p_i}{\partial T_i} \right|_v \frac{dV_i}{dt} - \left. \frac{\partial p_i}{\partial T_i} \right|_v v_i \frac{dm_i}{dt} \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

A taxa de variação de massa dm_i/dt no interior do cilindro é determinada da equação da conservação da massa:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho_i dV + \int_{SC} \rho_j \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (3.19)$$

onde o primeiro termo representa a taxa de variação de massa dentro do cilindro e o segundo é o balanço líquido da vazão mássica que atravessa a superfície de controle. Identificando os termos referentes a vazão mássica através da superfície de controle representada de forma ampliada na figura 3.2, tem-se

que

$$\frac{dm_i}{dt} = (\dot{m}_{suc} - \dot{m}_{des} - \dot{m}_{rsuc} + \dot{m}_{rdes} - \dot{m}_{vpc} - \dot{m}_{vsuc} + \dot{m}_{vdes}) \quad (3.20)$$

onde os termos \dot{m}_{suc} e \dot{m}_{des} representam a vazão mássica por fluxo normal nas válvulas de sucção e descarga, respectivamente. Caso haja atraso no fechamento das válvulas, ocorrerá refluxos de gás para o interior do cilindro através das válvulas de descarga e de sucção denotados por \dot{m}_{rdes} e \dot{m}_{rsuc} , respectivamente. O vazamento na folga pistão-cilindro é denotado por \dot{m}_{vpc} e os vazamentos nas válvulas de sucção e descarga são representados por \dot{m}_{vsuc} e \dot{m}_{vdes} .

Desta forma, o somatório dos fluxos de entalpia através da superfície de controle pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sum \dot{m}_j h_j = (-\dot{m}_{suc} h_{suc} + \dot{m}_{des} h_i + \dot{m}_{rsuc} h_i + \dot{m}_{rdes} h_{des} + \dot{m}_{vpc} h_i + \dot{m}_{vsuc} h_{vsuc} - \dot{m}_{vdes} h_{vdes}) \quad (3.21)$$

onde h_{suc} e h_{des} representam as entalpias do gás na câmara de sucção e descarga. Por outro lado, os termos h_{vsuc} e h_{vdes} representam as entalpias do gás que vaza através das válvulas de sucção e de descarga.

Substituindo as equações (3.20) e (3.21) na equação (3.18) e fazendo algumas manipulações algébricas,

$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{dt} = & \frac{1}{m_i c_{v,i}} \left[h_w A_t T_w + \dot{m}_{suc} (h_{suc} - h_i) + \dot{m}_{rdes} (h_{des} - h_i) + \right. \\ & \left. + \dot{m}_{vsuc} (h_i - h_{vsuc}) + \dot{m}_{vdes} (h_{vdes} - h_i) \right] - \frac{T_i}{m_i c_{v,i}} \left[h_w A_t + \frac{\partial p_i}{\partial T_i} \Big|_v \frac{dV_i}{dt} + \right. \\ & \left. - \frac{\partial p_i}{\partial T_i} \Big|_v v_i (\dot{m}_{suc} - \dot{m}_{des} - \dot{m}_{rsuc} + \dot{m}_{rdes} - \dot{m}_{vpc} - \dot{m}_{vsuc} + \dot{m}_{vdes}) \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Essa equação é resolvida numericamente pelo método de Euler. Uma boa estimativa inicial para as propriedades do gás no cilindro é utilizar os valores de temperatura e pressão do gás na câmara de sucção, já que o pistão se encontra na posição do ponto morto inferior no tempo inicial.

Em cada instante de tempo haverá uma certa quantidade de massa de gás no volume da câmara de compressão e, assim, a densidade é conhecida. A equação (3.22) é utilizada para determinar a temperatura no cilindro em cada instante de tempo a partir das propriedades do fluido no instante de tempo anterior. Com as propriedades termodinâmicas temperatura e densidade conhecidas, as demais propriedades são avaliadas através de uma equação de

estado de gás real. Um maior detalhamento do modelo descrito nesta seção pode ser encontrado em Gomes (2006).

3.1.3 Dinâmica de Válvulas

O modelo de sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade foi utilizado para descrever a dinâmica das válvulas, conforme representado esquematicamente na figura 3.3.

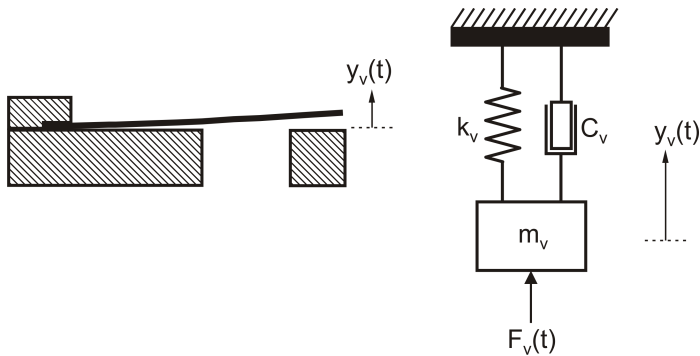


Figura 3.3 – Modelo adotado para descrever a dinâmica das válvulas de sucção e descarga.

Adotando este modelo, o movimento da válvula é descrito pela equação diferencial de segunda ordem obtida a partir da segunda lei de Newton:

$$m_v \ddot{y}_v(t) + C_v \dot{y}_v(t) + k_v y_v(t) = F_v(t) \quad (3.23)$$

onde $\ddot{y}_v(t)$, $\dot{y}_v(t)$ e $y_v(t)$ representam, respectivamente, a aceleração, a velocidade e posição da palheta em cada instante de tempo. O símbolo m_v representa a massa equivalente da válvula, C_v é o coeficiente de amortecimento equivalente, k_v é a constante elástica equivalente da válvula.

A força F_v resulta do carregamento de pressão em ambos os lados da válvula e a um eventual pré-tensionamento da válvula. Em compressores que operam com óleo lubrificante pode também existir uma força de colamento que atrasa a abertura das válvulas. Neste trabalho considerou-se somente a força devido ao escoamento que é calculada pela expressão:

$$F_v(t) = A_{ef} \Delta p \quad (3.24)$$

onde A_{ef} representa a área efetiva de força, a qual pode ser obtida experi-

mentalmente ou através de simulações numéricas do escoamento, e Δp é a diferença de pressão a qual a válvula está submetida. A solução da equação (3.23) fornece a abertura instantânea das válvulas, $y_v(t)$.

3.1.4 Vazão Mássica nas Válvulas e Vazamento na Folga Pistão Cilindro

O fluxo e o refluxo de gás através das válvulas de sucção e de descarga são avaliados com referência à condição de escoamento compressível, unidimensional e isentrópico através de um bocal convergente com condições de estagnação a montante conhecidas, conforme mostra a figura 3.4.

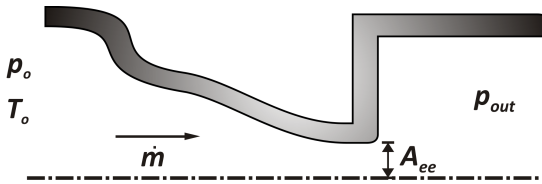


Figura 3.4 – Modelo adotado para o cálculo da vazão mássica por fluxo e refluxo quando as válvulas estão abertas.

Sendo assim, a vazão mássica pode ser calculada por:

$$\dot{m} = A_{ee} p_o \sqrt{\frac{2\gamma}{RT_o(\gamma-1)} \left[\left(\frac{p_{out}}{p_o} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_{out}}{p_o} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]} \quad (3.25)$$

onde A_{ee} representa a área efetiva de escoamento que corrige a vazão em função dos efeitos viscosos do fluido que escoam através da válvula. Na equação anterior, os parâmetros p_o e T_o são a pressão e a temperatura de estagnação a montante da válvula e p_{out} é a pressão a jusante da válvula. Além disso, γ e R são a razão entre calores específicos e a constante do gás.

A situação de escoamento bloqueado acontece quando p_{out} é inferior ou igual a pressão crítica

$$p_{out}^* = p_o \left(\frac{2}{\gamma-1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.26)$$

na qual o escoamento atinge a condição sônica, $M = 1$, na saída do bocal. Neste caso, deve-se utilizar $p_{out} = p_{out}^*$ na equação (3.25).

Na válvula de sucção, a condição de fluxo normal ocorre se $p_{cil} < p_{suc}$ e, assim, $p_o = p_{suc}$ e $p_{out} = p_{cil}$. Refluxo pode existir se a válvula estiver

aberta e $p_{cil} > p_{suc}$ e, neste caso, $p_o = p_{cil}$ e $p_{out} = p_{suc}$. Da mesma forma, a condição de fluxo normal na válvulas de descarga implica $p_{des} < p_{cil}$ e $p_o = p_{cil}$ e $p_{out} = p_{des}$. Na condição de refluxo, $p_{des} > p_{cil}$, $p_o = p_{des}$ e $p_{out} = p_{cil}$.

Para calcular o vazamento de fluido refrigerante através da folga existente entre as superfícies do pistão e do cilindro admite-se a hipótese de escoamento laminar incompressível plenamente desenvolvido. A figura 3.5 mostra o perfil de velocidade e as características geométricas do problema.

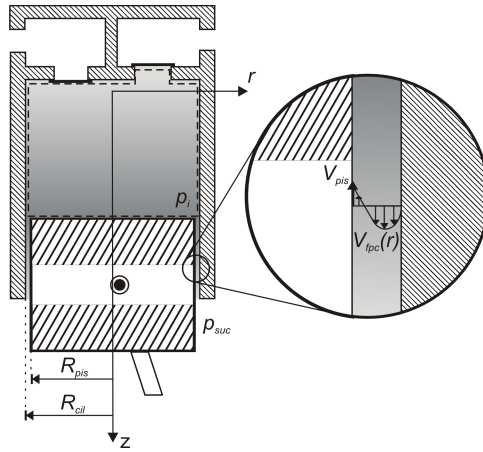


Figura 3.5 – Modelo adotado para o cálculo de vazamento na folga pistão-cilindro.

Utilizando as equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas com as devidas simplificações e aplicando as condições de contorno de velocidade nula na interface do cilindro e velocidade igual V_{pis} na superfície do pistão, obtém-se o seguinte perfil de velocidade do escoamento na folga:

$$V_{fpc}(r) = \frac{-V_{pis}}{\ln K_R} \ln \left(\frac{r}{R_{cil}} \right) + \frac{(p_i - p_{suc})R_{cil}^2}{4\mu L_{pc}} \left[1 - \left(\frac{r}{R_{cil}} \right)^2 - \frac{(1 - K_R^2)}{\ln K_R} \ln \left(\frac{r}{R_{cil}} \right) \right] \quad (3.27)$$

A velocidade do pistão V_{pis} pode ser obtida da equação de movimento do pistão, enquanto que K_R é a razão entre os raios do pistão R_{pis} e do cilindro R_{cil} . O comprimento do contato entre o pistão e o cilindro L_{pc} pode ser determinado de

$$L_{pc} = L_o + e(1 - \cos \theta) \quad (3.28)$$

onde L_o é o comprimento mínimo de contato.

A velocidade média do escoamento na folga

$$\bar{V}_{fpc} = V_{pis} \frac{1 - K_R^2 + 2K_R^2 \ln K_R}{2 \ln K_R (1 - K_R^2)} + \frac{(p_i - p_{suc}) R_{cil}^2}{8\mu L_{pc}} \left[\frac{1 - K_R^4}{1 - K_R^2} + \frac{1 - K_R^2}{\ln K_R} \right] \quad (3.29)$$

pode ser obtida pela integração do perfil de velocidade.

Por fim, o vazamento na folga pistão cilindro pode ser calculado por

$$\dot{m}_{vpc} = \bar{V}_{fpc} \rho_i \pi R_{cil}^2 (1 - K_R^2) \quad (3.30)$$

Lilie e Ferreira (1984) mediram o vazamento de uma mistura de óleo e fluido refrigerante e compararam os resultados com esse modelo teórico considerando somente o gás. Os resultados experimentais obtidos demonstraram boa concordância com o modelo analítico para folgas entre pistão e cilindro de até $10\mu\text{m}$.

3.2 Avaliação das Perdas no Ciclo de Compressão

Nesta seção serão abordadas as principais fontes de ineficiências devido a perdas em vazões mássicas e perdas energéticas do ciclo de compressão, tomando o ciclo ideal de compressão como referência. Maiores detalhes da abordagem desta seção podem ser encontrados em Gosney (1982) e Bezerra (2011).

O diagrama pressão-volume de um ciclo de compressão ideal é ilustrado na figura 3.6. Conforme pode ser notado, um compressor ideal não possui volume morto e todo o gás succionado é descarregado ao final do ciclo. Desta forma, não existirá o processo de expansão do gás e durante todo o percurso em que pistão se afasta do cabeçote gás é admitido no cilindro. Os processos de admissão e descarga do compressor ideal são realizados nas mesmas pressões das respectivas linhas de sucção e descarga do sistema de refrigeração. Além disto, o processo de compressão idealizado, trecho BC, é isentrópico.

Utilizando a primeira e segunda leis da termodinâmica e desprezando-se as variações de energia cinética e potencial, é possível concluir que o trabalho de eixo necessário para comprimir o gás no trecho BC, pode ser escrito como:

$$W = \int_{p_{cs}}^{p_{cd}} V dp \quad (3.31)$$

Este trabalho é numericamente igual a área do ciclo ABCDA represen-

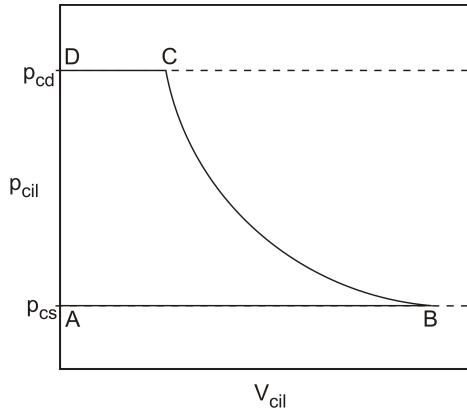


Figura 3.6 – Diagrama pressão-volume de um ciclo de compressão ideal sem volume morto.

tada na figura 3.6 e quando multiplicado pela frequência de operação do compressor, obtém-se a potência indicada \dot{W}_{ind} .

A expressão (3.31) pode ser dividida pela massa de gás existente durante o processo de compressão, resultando na seguinte expressão para o trabalho específico:

$$w = \int_{p_{cs}}^{p_{cd}} v dp \quad (3.32)$$

onde v representa o volume específico. Utilizando a identidade termodinâmica

$$dh = T ds + v dp \quad (3.33)$$

e reconhecendo que o processo é isentrópico, é possível escrever:

$$\dot{W}_{ind} = \dot{m}(h_B - h_C) = \dot{m}(h_{2,s} - h_1) \quad (3.34)$$

A massa introduzida no cilindro por ciclo de compressão seria o produto da densidade da linha de sucção, ρ_{ls} , pelo volume deslocado pelo compressor, ∇ , durante o processo de admissão, sendo descarregada ao final do processo de descarga, no ponto D. Portanto, a vazão mássica ideal do compressor seria:

$$\dot{m}_{th} = \rho_{ls} \nabla f_o \quad (3.35)$$

Devido a ineficiências do ciclo de compressão, a vazão mássica real do compressor representada por \dot{m} será sempre menor do que a ideal.

A presença do volume morto é um espaço residual necessário para evi-

tar que a superfície superior do pistão se choque contra a placa de válvulas e provoca uma redução na eficiência volumétrica. Dessa forma, o gás remanescente no cilindro ao final do ciclo de compressão acaba sendo reexpandido e assim o processo de sucção que deveria iniciar no ponto morto superior sofre um atraso. O espaço percorrido pelo pistão devido à reexpansão do gás até a abertura da válvula de sucção pode ser entendido como uma perda na quantidade de massa de fluido refrigerante que poderia ser admitida no cilindro. O efeito do volume morto no diagrama pressão-volume de um ciclo de compressão ideal é mostrado na figura 3.7.

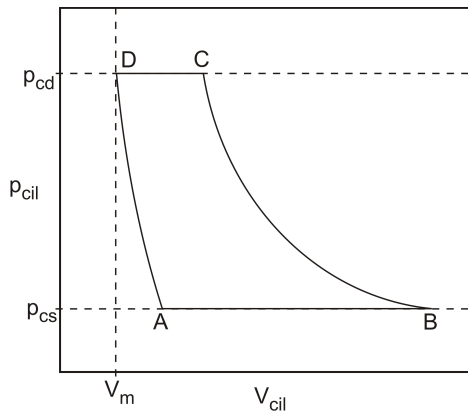


Figura 3.7 – Diagrama pressão-volume de um ciclo de compressão ideal com volume morto.

Segundo Gosney (1982), a presença do volume morto não afeta o trabalho específico de compressão, dado pela equação (3.32), desde que todos os processos sejam internamente reversíveis.

Considerando um processo de expansão isentrópica, pode-se calcular a perda de vazão mássica devido ao efeito do volume morto da seguinte maneira:

$$\Delta \dot{m}_{vm} = \rho_{cs} \nabla_m f_o \left[\left(\frac{p_{ld}}{p_{ls}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right] \quad (3.36)$$

onde p_{ld} , p_{ls} e ρ_{cs} representam a pressão na linha de descarga, a pressão na linha de sucção e a densidade na câmara de sucção, respectivamente.

Outra fonte de perda de vazão mássica importante é o superaquecimento do gás desde a linha de sucção até a câmara de sucção, devido à transferência de calor de componentes do compressor para o gás. Este fenômeno reduz a massa succionada pelo compressor devido à redução na densidade do fluido

refrigerante na câmara de sucção. A perda por superaquecimento pode ser avaliada através da seguinte expressão:

$$\Delta\dot{m}_{sup} = \dot{m} \left(\frac{\rho_{ls}}{\rho_{cs}} - 1 \right) \quad (3.37)$$

onde ρ_{ls} e ρ_{cs} representam as densidades na linha de sucção e na câmara de sucção, respectivamente.

As demais perdas do ciclo de compressão devem ser avaliadas de acordo com a equação (3.38), escrita de uma maneira generalizada através do sub índice n de acordo com a equação abaixo

$$\Delta\dot{m}_n = f_o \int_0^T \dot{m}_n dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{m}_n d\theta \quad (3.38)$$

Na equação (3.38), T representa o período. O sub índice n pode representar as perdas por refluxo na sucção, $rsuc$, refluxo na descarga, $rdes$, vazamento na sucção, $vsuc$, vazamento na descarga, $vdes$, e vazamento na folga pistão-cilindro, vpc . Assim, a vazão mássica real do compressor será:

$$\begin{aligned} \dot{m} = & \dot{m}_{th} - \Delta\dot{m}_{vm} - \Delta\dot{m}_{sup} - \Delta\dot{m}_{rsuc} + \\ & - \Delta\dot{m}_{rdes} - \Delta\dot{m}_{vsuc} - \Delta\dot{m}_{vdes} - \Delta\dot{m}_{vpc} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Dividindo a equação (3.39) pela vazão mássica ideal do ciclo de compressão obtém-se a eficiência volumétrica real como a soma de várias parcelas de perdas de eficiência representadas por $\epsilon_{v,n}$:

$$\eta_v = 1 - \epsilon_{v,vm} - \epsilon_{v,sup} - \epsilon_{v,rsuc} - \epsilon_{v,rdes} - \epsilon_{v,vsuc} - \epsilon_{v,vdes} - \epsilon_{v,vpc} \quad (3.40)$$

Cabe ressaltar que estas são as ineficiências consideradas no modelo adotado neste trabalho e que existem ainda outras perdas, tais como aquelas devido à dinâmica de válvulas e restrições ao escoamento no filtro de sucção.

O diagrama de um ciclo real de compressão pode ser visto na figura 3.8. No ciclo real de compressão, a energia consumida é ainda maior devido às restrições ao escoamento de gás nos processos de sucção e descarga, mostrados nas porções hachuradas da figura. Além disso, há perdas de energia devido ao efeito do superaquecimento, vazamentos e refluxos, que já foram mencionados.

Sendo assim, o trabalho específico real do compressor, w , pode ser obtido pela soma do trabalho específico isentrópico, w_s , com os respectivos tra-

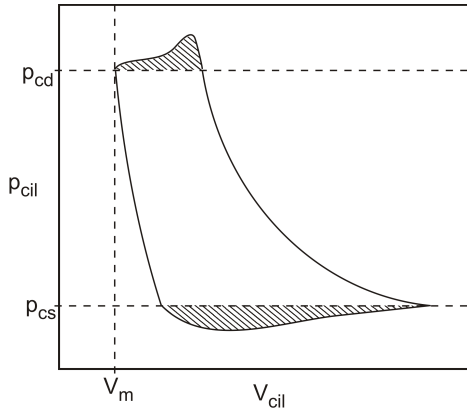


Figura 3.8 – Diagrama pressão-volume de um ciclo de compressão real com volume morto.

balhos específicos adicionais do ciclo:

$$w = w_s + \Delta w_{suc} + \Delta w_{des} + \Delta w_{sup} + \Delta w_{vpc} + \Delta w_{vsuc} + \Delta w_{vdes} + \Delta w_{outros} \quad (3.41)$$

onde as parcelas Δw_{suc} e Δw_{des} representam as energias adicionais consumidas no processo de sucção e descarga, respectivamente. Os termos Δw_{sup} e Δw_{vpc} , por sua vez, representam as energias consumidas devido ao superaquecimento e ao vazamento na folga pistão-cilindro. Δw_{vsuc} e Δw_{vdes} representam as energias adicionais devido à vazamentos nas válvulas de sucção e descarga. Por fim, Δw_{outros} representa outras perdas termodinâmicas tais como aquelas devido ao refluxo nas válvulas de sucção e descarga e irreversibilidades no ciclo de compressão.

Dividindo a equação (3.41) pelo trabalho específico real do compressor e rearranjando os termos obtém-se, da mesma forma como feito para a eficiência volumétrica, a eficiência isentrópica do compressor como a soma de várias parcelas de perdas de eficiências isentrópica:

$$\eta_s = 1 - \varepsilon_{s,suc} - \varepsilon_{s,des} - \varepsilon_{s,sup} - \varepsilon_{s,vpc} - \varepsilon_{s,vsuc} - \varepsilon_{s,vdes} - \varepsilon_{s,outros} \quad (3.42)$$

4 *Modelagem do Vazamento em Válvulas*

Este capítulo apresenta o modelo desenvolvido para estimar o vazamento de fluido refrigerante nas válvulas de sucção e descarga, considerando formulações de escoamento isotérmico e de escoamento adiabático. Além disto, apresenta-se também a solução analítica da teoria de placas empregada para avaliar a deflexão da palheta devido ao carregamento de pressão. Uma vez que o vazamento ocorre em geometrias de dimensões reduzidas, o limite da teoria do contínuo foi verificado, incorporando o efeito de rarefação do escoamento junto à parede através de uma correção do coeficiente de atrito do escoamento. O capítulo é encerrado com a apresentação de duas alternativas de solução numérica do modelo.

4.1 **Modelagem do Escoamento**

Conforme já citado, o escoamento ocorre em uma folga $\delta(r)$ entre a palheta e o seu assento. Quando a palheta é considerada rígida, a folga $\delta(r)$ será constante, caso contrário variará com a coordenada espacial r , podendo ser representada pela soma da deflexão da palheta, $w(r)$, e da folga na quina do orifício de passagem da válvula, δ_q :

$$\delta(r) = \delta_q + w(r) \quad (4.1)$$

A figura 4.1 mostra a geometria do modelo proposto, onde a palheta é representada por um disco de raio r_d e o assento é representado por um apoio cujo orifício possui raio r_o . A modelagem da folga, que é calculada pela equação (4.1), é representada pela figura 4.1(c).

O domínio de análise do escoamento entre os discos, $r_o < r < r_d$, foi modelado como um microcanal de área variável representado na figura 4.2.

Para facilitar a análise do problema, adotou-se uma mudança na origem do sistema de coordenadas e uma adimensionalização da coordenada princi-

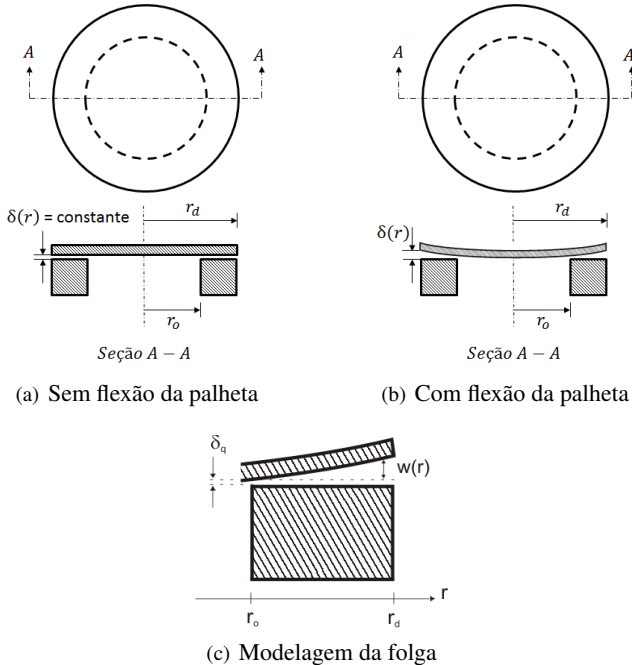


Figura 4.1 – Geometria utilizada na modelagem do problema.

pal r da seguinte forma:

$$x^* = \frac{-r + r_d}{r_d - r_o}, \text{ para } 0 \leq x^* \leq 1 \quad (4.2)$$

Fleming *et al.* (1984) estudou o escoamento compressível em difusor radial e indicou que o comportamento do escoamento entre discos paralelos é muito similar ao escoamento no canal proposto quando a razão entre largura e altura é maior que sete, justificando assim a transformação supracitada.

As seguintes hipóteses foram adotadas para os modelos de escoamento adiabático e de escoamento isotérmico: (i) escoamento compressível unidimensional; (ii) regime laminar e permanente; (iii) ausência de perda de carga na região de entrada do escoamento; (iv) gás ideal; (v) viscosidade e a razão de calores específicos constantes e (vi) paredes do microcanal perfeitamente lisas.

Analisando um elemento infinitesimal de comprimento dr , largura $2\pi r$ perpendicular ao plano da página e altura $\delta(r)$ conforme indicado na figura

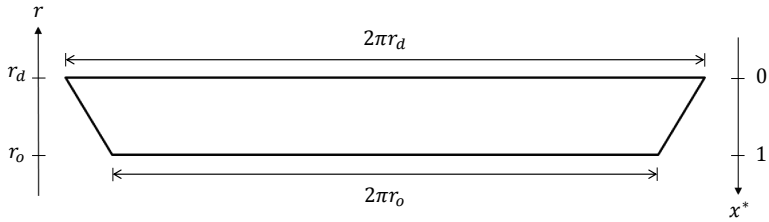


Figura 4.2 – Geometria do canal 'sem lados' e a referente mudança de coordenadas e adimensionalização para solução do problema.

4.3, pode-se obter as equações que descrevem as variações de propriedades do escoamento devido ao atrito viscoso e à variação da área da seção transversal.

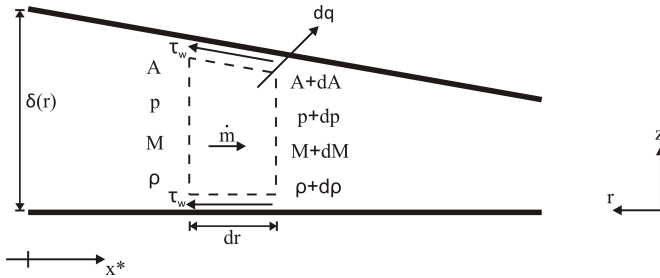


Figura 4.3 – Formulação diferencial do duto.

As equações básicas que governam o escoamento, bem como números adimensionais necessários para a modelagem do problema são mostradas a seguir na forma diferencial:

- Equação da conservação da massa:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (4.3)$$

- Equação da conservação da quantidade de movimento:

$$-Adp - C_f \frac{1}{2} \rho V^2 dA_s = \rho V AdV \quad (4.4)$$

- Equação da conservação da energia:

$$dq = dh + VdV = c_p dT_0 \quad (4.5)$$

- Equação de estado para gás ideal:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (4.6)$$

- Definição de número de Mach:

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{dV^2}{V^2} - \frac{dT}{T} \quad (4.7)$$

- Segunda lei da termodinâmica:

$$dS \geq 0 \quad (4.8)$$

Para se obter a vazão mássica, as equações (4.3) até (4.8) devem ser resolvidas e para isso é necessário utilizar a definição do coeficiente de atrito superficial:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho V^2} \quad (4.9)$$

onde τ_w representa a tensão cisalhante na parede.

A formulação proposta tem por objetivo descrever o escoamento na forma diferencial. Para isto, torna-se necessária a obtenção de três propriedades do escoamento que definem o estado do gás ao longo do microcanal. No presente trabalho, as equações são combinadas e escritas na forma de diferenciais do número de Mach, da pressão e da densidade em relação à coordenada espacial r ou x^* . Devido ao algebrismo demasiado envolvido para alcançar tais equações, as deduções encontram-se no apêndice A.

A formulação assume que o escoamento viscoso no microcanal é precedido por um escoamento isentrópico em um bocal. Assim, as condições de contorno do problema são pressão e temperatura de estagnação a montante e pressão a jusante. Considerando a hipótese de gás ideal, as seguintes relações são utilizadas para calcular as propriedades do gás na entrada do microcanal:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \quad (4.10)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.11)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (4.12)$$

4.1.1 Escoamento isotérmico

Em dutos longos a área superficial é significativa para a transferência de calor e o escoamento pode ser considerado isotérmico. Um exemplo de aplicação deste modelo é o escoamento em linhas de gás natural, onde os números de Mach são em geral baixos e a queda de pressão é significativa.

Na análise de escoamento isotérmico o termo relativo à troca de calor do escoamento com o meio externo dq é mantido e o termo relativo a variação de temperatura dT é nulo. Dessa forma as equações (4.3) a (4.9) devem ser manipuladas utilizando a hipótese de escoamento isotérmico, conforme mostrado no apêndice A, resultando no seguinte sistema de equações:

$$\frac{dM}{dx^*} = (r_d - r_o) \frac{M}{1 - \gamma M^2} \left[\gamma M^2 \frac{2C_f}{D_h} - \frac{1}{A(x^*) (r_d - r_o)} \frac{dA(x^*)}{dx^*} \right] \quad (4.13)$$

$$\frac{dp}{dx^*} = (r_d - r_o) \frac{\gamma p M^2}{1 - \gamma M^2} \left[-\frac{2C_f}{D_h} + \frac{1}{A(x^*) (r_d - r_o)} \frac{dA(x^*)}{dx^*} \right] \quad (4.14)$$

$$\frac{d\rho}{dx^*} = (r_d - r_o) \frac{\gamma p M^2}{1 - \gamma M^2} \left[-\frac{2C_f}{D_h} + \frac{1}{A(x^*) (r_d - r_o)} \frac{dA(x^*)}{dx^*} \right] \quad (4.15)$$

As equações (4.13), (4.14) e (4.15) descrevem as variações do número de Mach M , da pressão p e da densidade ρ ao longo do microcanal.

Estas equações podem ser transformadas em equações diferenciais de primeira ordem se a geometria for conhecida. Percebe-se que a variação nas propriedades é o resultado dos efeitos do atrito viscoso e da variação de área, representados pelo primeiro e segundo termo entre colchetes, respectivamente. No caso de escoamento subsônico e $M < 1/\sqrt{\gamma}$, o atrito viscoso e a redução da área do escoamento provocam uma queda na pressão, diminuição da densidade e aumento no número de Mach.

Deve ser observado que estas equações apresentam uma singularidade em $M = 1/\sqrt{\gamma}$, significando que seria necessária uma taxa de transferência de calor infinita nesta condição para manter o escoamento isotérmico. Este fato pode ser demonstrado matematicamente utilizando a equação (4.5), onde o termo fluxo de calor é reescrito como:

$$\frac{dq}{dx^*} = c_p T_0 \frac{M(\gamma - 1)}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{dx^*} \quad (4.16)$$

Portanto conclui-se que o modelo isotérmico é adequado somente para

escoamento a baixos números de Mach, caso contrário, a modelagem adiabática é fisicamente mais consistente (SHAPIRO, 1953).

4.1.2 Escoamento adiabático

Conforme Saad (1993), o modelo de escoamento adiabático é comumente aplicado em dutos isolados ou em dutos curtos, onde o escoamento é tão rápido que a troca de calor com as vizinhanças pode ser desprezada. Neste caso, a temperatura do escoamento subsônico diminuirá devido à expansão do gás ao longo do microcanal.

Para escoamento adiabático, o termo relativo à troca de calor do fluido com as redondezas dq na equação (4.5) deve ser nulo e, conseqüentemente, a temperatura de estagnação do escoamento permanece constante. Logo, manipulando as equações 4.3 a (4.9), conforme mostrado no apêndice A, pode-se escrever as variações das propriedades do escoamento através das seguintes equações diferenciais:

$$\frac{dM}{dx^*} = (r_d - r_o) \frac{M \left(1 + M^2 \frac{\gamma - 1}{2} \right)}{(1 - M^2)} \left[\gamma M^2 \frac{2C_f}{D_h} - \frac{1}{(r_d - r_o)A(x^*)} \frac{dA(x^*)}{dx^*} \right] \quad (4.17)$$

$$\frac{dp}{dx^*} = (r_d - r_o) \frac{\rho \gamma M^2}{(1 - M^2)} \left[- (1 + M^2 (\gamma - 1)) \frac{2C_f}{D_h} + \frac{1}{(r_d - r_o)A(x^*)} \frac{dA(x^*)}{dx^*} \right] \quad (4.18)$$

$$\frac{d\rho}{dx^*} = (r_d - r_o) \frac{\rho M^2}{1 - M^2} \left[-\gamma \frac{2C_f}{D_h} + \frac{1}{(r_d - r_o)A(x^*)} \frac{dA(x^*)}{dx^*} \right] \quad (4.19)$$

Da mesma forma como realizado no caso anterior, as equações 4.17, 4.18 e 4.19 podem ser transformadas em equações diferenciais ordinárias de primeira ordem se a variação da área ao longo do microcanal for conhecida.

Nas equações 4.17, 4.18 e 4.19, a variável independente é a posição adimensional x^* . Observa-se que existe uma singularidade quando o escoamento atinge o número de Mach de valor unitário, correspondente à condição de escoamento bloqueado.

Este problema de singularidade pode ser evitado no procedimento de solução numérica através da manipulação das equações. Conforme a condição de contorno na saída do microcanal, pode-se mudar a variável independente

para número de Mach M , para resolver o escoamento bloqueado, ou para a pressão p , para resolver o caso de escoamento subsônico. Essa mudança, além de resolver o problema da singularidade das equações 4.17 à 4.19, também traz os benefícios de uma metodologia de solução mais robusta e um refino de malha mais adequado para solucionar o problema, conforme será justificada adiante. Sendo assim, as equações podem ser escritas no domínio do número de Mach,

$$\frac{dx^*}{dM} = \frac{-D_h A(x^*)(M^2 - 1)}{[2 + M^2(\gamma - 1)] \left[A(x^*)(r_d - r_o)\gamma C_f M^2 - \frac{D_h dA(x^*)}{2 dx^*} \right]} \quad (4.20)$$

$$\frac{dp}{dM} = \frac{-2\gamma M p \left[A(x^*)(r_d - r_o)C_f [1 + M^2(\gamma - 1)] - \frac{D_h dA(x^*)}{2 dx^*} \right]}{[2 + M^2(\gamma - 1)] \left[A(x^*)(r_d - r_o)\gamma C_f M^2 - \frac{D_h dA(x^*)}{2 dx^*} \right]} \quad (4.21)$$

$$\frac{dp}{dM} = \frac{-2M p \left[A(x^*)(r_d - r_o)\gamma C_f - \frac{D_h dA(x^*)}{2 dx^*} \right]}{[2 + M^2(\gamma - 1)] \left[A(x^*)(r_d - r_o)\gamma C_f M^2 - \frac{D_h dA(x^*)}{2 dx^*} \right]} \quad (4.22)$$

ou no domínio da pressão,

$$\frac{dx^*}{dp} = \frac{1}{2} \frac{D_h A(x^*)(M^2 - 1)}{\gamma M^2 p \left[A(x^*)(r_d - r_o)C_f [1 + M^2(\gamma - 1)] - \frac{D_h dA(x^*)}{2 dx^*} \right]} \quad (4.23)$$

$$\frac{dM}{dp} = -\frac{1}{2} \frac{[2 + M^2(\gamma - 1)] \left[A(x^*)(r_d - r_o)\gamma C_f M^2 - \frac{D_h dA(x^*)}{2 dx^*} \right]}{\gamma M p \left[A(x^*)(r_d - r_o)C_f [1 + M^2(\gamma - 1)] - \frac{D_h dA(x^*)}{2 dx^*} \right]} \quad (4.24)$$

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{\rho}{\gamma p} \frac{\left[A(x^*)(r_d - r_o)\gamma C_f - \frac{D_h dA(x^*)}{2 dx^*} \right]}{\left[A(x^*)(r_d - r_o)C_f [1 + M^2(\gamma - 1)] - \frac{D_h dA(x^*)}{2 dx^*} \right]} \quad (4.25)$$

4.2 Limite da Teoria do Contínuo

O regime de escoamento quanto à rarefação foi caracterizado através do número de Knudsen, de acordo com a equação (2.2), onde o comprimento característico foi representado pelo diâmetro hidráulico, D_h , do escoamento. Logo,

$$Kn = \frac{\lambda}{D_h} \quad (4.26)$$

onde λ é o livre caminho médio das moléculas.

Para um gás em equilíbrio termodinâmico, λ pode ser obtido por um modelo simplificado de esferas rígidas:

$$\lambda = (\sqrt{2}\pi d^2 n)^{-1} \quad (4.27)$$

onde d representa o diâmetro da molécula e n é a densidade molecular do gás, a qual por sua vez é estimada pelo número de moléculas por unidade de volume. A densidade molecular depende da pressão e da temperatura, mas independe da composição do gás. O termo πd^2 é comumente chamado de seção transversal de colisão entre duas moléculas.

O diâmetro da molécula, d , pode ser calculado através da teoria de Chapman-Enskog proposta para o cálculo da viscosidade:

$$\mu = \frac{5}{16} \frac{\sqrt{\pi m k_B T}}{\pi d^2} \quad (4.28)$$

onde m representa a massa molecular do gás, k_B a constante de Boltzmann ($k_B = 1,3805 \times 10^{-23}$ J/K) e T a temperatura do gás. Dessa maneira, o diâmetro molecular pode ser estimado a partir da composição do gás, da temperatura e da viscosidade.

Isolando o termo referente à seção transversal de colisão na equação (4.28), substituindo-o na equação (4.27) e utilizando as definições de densi-

dade $\rho = nm$ e da constante do gás $R = k_B/m$, obtém-se

$$\lambda = \frac{16}{5\sqrt{2\pi}} \frac{\mu}{\rho\sqrt{RT}} \quad (4.29)$$

Desta forma, o número de Knudsen pode ser calculado da seguinte relação:

$$Kn = \frac{16}{5} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{M}{Re} \quad (4.30)$$

onde M e Re representam respectivamente o número de Mach e o número de Reynolds, sendo que o último é calculado com base no diâmetro hidráulico.

Deve ser enfatizado que a avaliação do número de Knudsen através da equação (4.30) é baseado num modelo de esferas rígidas e que modelos mais elaborados e uma discussão mais detalha do assunto podem ser encontrados em Bird (1994) e Prasanth e Kakkassery (2008).

4.2.1 Coeficiente de Atrito para Região de Escorregamento

Para inserir a condição de contorno de escorregamento na parede, dada pela equação (2.3), são adotadas algumas hipóteses. Primeiramente a geometria do microcanal é modificada de maneira que as paredes do microcanal sejam simétricas, conforme mostra a figura 4.4.

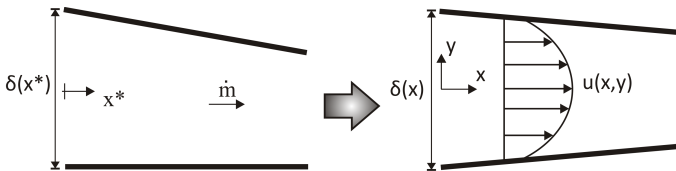


Figura 4.4 – Transformação da geometria assimétrica, à esquerda, para a simétrica, à direita, com o respectivo perfil de velocidades.

Além disto, assume-se que o perfil de velocidade do escoamento em uma dada seção é aquele do escoamento incompressível plenamente desenvolvido, mas com o valor da velocidade média e da densidade do gás em cada seção transversal do microcanal sendo recalculado através das equações de escoamento compressível. Dessa maneira o perfil de velocidade é considerado parabólico e as três constantes que definem a curva são determinadas com o emprego das seguintes condições:

- Simetria na linha de centro:

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = 0 \quad (4.31)$$

- Velocidade do fluido em contato com a parede dada pela equação (2.3), reescrita abaixo sem o sub índice g e de forma mais compacta com o termo σ_1 :

$$u|_{\pm \frac{\delta}{2}} = \sigma_1 \lambda \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w + \frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho T} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_w \quad (4.32)$$

onde

$$\sigma_1 = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \quad (4.33)$$

Na equação (4.35) a derivada da temperatura em relação a coordenada espacial ($\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_w$) deve ser avaliada na interface do gás com a superfície. Como o modelo adotado é unidimensional este termo será avaliado através da temperatura média e dessa maneira teremos $\frac{\partial T}{\partial x}$.

- Velocidade média do escoamento:

$$\bar{V} = \frac{1}{A} \int_{+\frac{\delta}{2}}^{-\frac{\delta}{2}} u(x, y) dA \quad (4.34)$$

Aplicando essas três condições, obtém-se o seguinte perfil de velocidade parabólico:

$$u(x, y) = -\frac{6}{\delta^2} \left(V - \frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho T} \frac{dT}{dx} \right) y^2 + \frac{3V(1 + 8\sigma_1 Kn)}{2(1 + 12\sigma_1 Kn)} + \frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho T} \frac{dT}{dx} \left[\frac{3(1 + 8\sigma_1 Kn)}{2(1 + 12\sigma_1 Kn)} + 1 \right] \quad (4.35)$$

Logo, o coeficiente de atrito superficial, C_f , definido pela equação (4.9) pode ser assim reescrito:

$$C_f = \frac{24}{Re} \frac{\left(1 - \frac{3}{4} \frac{D_h}{ReT} \frac{1}{(r_d - r_o)} \frac{dT}{dx^*} \right)}{(1 + 12\sigma_1 Kn)} \quad (4.36)$$

e o número de Poiseuille, Po , pode ser escrito como

$$Po = C_f Re = 24 \frac{\left(1 - \frac{3 D_h}{4 Re T} \frac{dT}{dx}\right)}{(1 + 12 \sigma_1 Kn)} \quad (4.37)$$

Nas equações (4.36) e (4.37), o coeficiente de atrito e o número de Poiseuille são corrigidos tanto pelo escorregamento quanto pelo rastejo térmico e a derivada da temperatura pode ser calculada pela temperatura de estagnação dada pela expressão (4.10):

$$\frac{dT}{dx^*} = \frac{-TM(\gamma-1)dM}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{dx^*} \quad (4.38)$$

Como já foi abordado na revisão bibliográfica, valores de σ_v ainda é uma questão que está em aberto na literatura e no presente trabalho será adotado $\sigma_v = 1$. Dessa maneira a reflexão das moléculas foi admitida difusa.

4.3 Modelagem Matemática da Deflexão da Palheta

Placas são elementos estruturais em que a espessura, variável ou constante, é muito menor do que as demais dimensões (comprimento, largura, diâmetro, etc). As cargas estáticas ou dinâmicas atuantes nessas estruturas são predominantemente perpendiculares às faces da superfície, causando flexão. O modelo adotado neste trabalho para estimar a deflexão da palheta provém da teoria de placas finas, considerando as hipóteses de material homogêneo, linear, elástico e isotrópico.

A geometria, conforme mostra a figura 4.5, é um disco de raio r_d e espessura t simplesmente apoiado em uma circunferência de raio r_o que representa o orifício do assento. O carregamento uniformemente distribuído que atua sobre o disco, representado por p , é resultante da diferença de pressão a qual a palheta está submetida. Para a válvula de descarga $p = p_{cd} - p_{cil}$ e para a válvula de sucção $p = p_{cil} - p_{cs}$, onde p_{cd} , p_{cs} e p_{cil} representam as pressões na câmara de descarga, na câmara de sucção e na câmara de compressão, respectivamente.

De acordo com Ventsel e Krauthammer (2001), o estudo de placas se divide em três grupos de acordo com a razão a/t , onde a é a maior dimensão da placa em um plano e t a espessura:

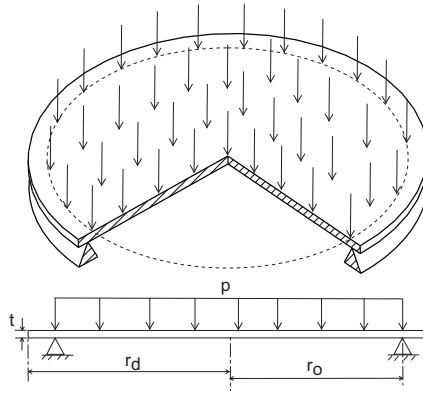


Figura 4.5 – Modelagem adotada para estimar a deflexão da palheta.

- Placas espessas: $a/t \leq 8 \dots 10$. A análise dessas estruturas inclui todas as componentes de tensões, deformações e deslocamentos e deve utilizar as equações gerais tridimensionais da elasticidade;
- Placas finas com grandes deformações: $a/t \geq 80 \dots 100$. Estas placas são denominadas membranas com rigidez à flexão D extremamente baixa. O carregamento é suportado predominantemente por forças normais atuantes no plano médio da placa, pois o cisalhamento é pequeno.
- Placas finas com pequenas deformações: $8 \dots 10 \leq a/t \leq 80 \dots 100$. Dependendo da razão entre a máxima deflexão da placa e a espessura, w_{max}/t , tanto a parcela das forças de flexão quanto a parcela das forças de membrana podem estar presentes. Logo este grupo pode ser subdividido em duas diferentes classes:
 - Placas rígidas $w_{max}/t \leq 0,2 \dots 0,3$: os esforços internos atuantes nesse tipo de estrutura são momentos fletores e torsões e forças de cisalhamento. As deformações do plano médio e as forças de membrana são desprezáveis, o que permite simplificações expressivas. A característica fundamental de placas rígidas é que as equações de equilíbrio estático para um elemento de placa é escolhido na configuração indeformada;
 - Placas flexíveis $w_{max}/t \geq 0,3$: neste grupo as deflexões verticais ocorrem simultaneamente com o alongamento da placa na direção normal (esticamento do plano médio) representando uma combinação de placas rígidas e membranas. Os esforços internos atuantes nesse tipo de estrutura são os momentos fletor e torsor e as

forças de cisalhamento e normais (também conhecidas como forças de membrana). Quando o valor da razão $w_{max}/t \geq 5$ as forças de membrana predominam e as demais forças atuantes podem ser desprezadas. Assim, o carregamento transversal é suportado pela tensão normal uniformemente distribuída ao longo da espessura.

A classificação acima serve como primeiro parâmetro para análise do problema, já que condições de contorno, tipo de carregamento e outras variáveis devem ser incluídas nos limites desses agrupamentos (VENTSEL; KRAUTHAMMER, 2001).

4.3.1 Válvulas Rígidas com Pequenas Deformações

Neste caso, as hipóteses de Kirchhoff podem ser adotadas, permitindo a simplificação de um problema de placas inicialmente tridimensional para outro bidimensional. As hipóteses são análogas à teoria de deformação por flexão de vigas, ou seja:

1. Não há deformação normal do plano médio da placa, o qual permanece neutro durante a aplicação da carga, conforme mostra a figura 4.6;
2. As linhas retas e perpendiculares ao plano médio antes da deformação, permanecem retas e perpendiculares ao plano médio durante a ação do carregamento e o comprimento desses elementos não é alterado. Isto significa dizer que as deformações por cisalhamento vertical (γ_{zx} e γ_{yz}) e a deformação normal (ϵ_z) podem ser desprezadas;
3. O deslocamento vertical do plano médio é pequeno comparado com a espessura da placa. Portanto, a inclinação da superfície defletida é pequena e, conseqüentemente, o quadrado da inclinação é desprezível em comparação à unidade;
4. A tensão normal ao plano médio σ_z é pequena quando comparada às outras componentes de tensão e pode ser desprezada.

Considerando uma placa circular submetida a um carregamento externo arbitrário p , as forças e momentos internos atuantes nas faces desse elemento pode ser visualizada na figura 4.7.

Se uma placa está sujeita a um carregamento axissimétrico em relação ao eixo z , então os momentos e forças cisalhantes internos e deslocamentos serão somente funções da coordenada r . Nesse caso todos planos rz da placa serão planos principais e dessa maneira o momento torsor $M_{r\theta}$ e a força cisalhante Q_θ serão nulos. Os esforços nas seções posteriores do elemento podem ser obtidos por expansão em série de Taylor com truncamento no primeiro termo.

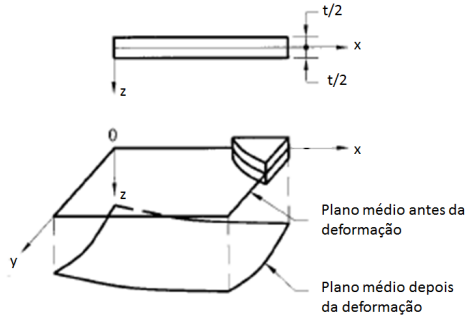


Figura 4.6 – Plano médio antes e depois da deformação.

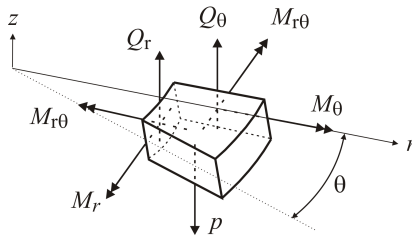


Figura 4.7 – Momentos e forças cisalhantes atuando num elemento infinitesimal (VENTSEL; KRAUTHAMMER, 2001).

Os momentos internos M_r e M_θ mostrados na figura 4.7 devem ser equilibrados pelos momentos causados pela distribuição de tensões normais σ_r e σ_θ , respectivamente, nas respectivas faces do elemento. Estes balanços de momentos podem ser escritos da seguinte forma:

$$\int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_r z r d\theta dz = M_r r d\theta \quad (4.39)$$

$$\int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_\theta z r dr dz = M_\theta dr \quad (4.40)$$

As tensões σ_r e σ_θ estão relacionadas às deformações ϵ_r e ϵ_θ através da Lei de Hooke:

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta) \quad (4.41)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_{\theta} + \nu \epsilon_r) \quad (4.42)$$

As equações do apêndice B.1 descrevem as deformações ϵ_r e ϵ_{θ} em função do deslocamento vertical w . Como o problema é axissimétrico, as derivadas em relação a θ são desprezadas. Substituindo as deformações nas equações (4.41) e (4.42) e posteriormente realizando a integração de acordo com as equações (4.39) e (4.40), obtém-se:

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (4.43)$$

$$M_{\theta} = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \quad (4.44)$$

onde

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (4.45)$$

é a constante de rigidez à flexão da placa, similar à rigidez de flexão de vigas EI .

Analisando o elemento da placa em equilíbrio e fazendo um balanço de momentos na direção radial, obtém-se a seguinte equação:

$$\left[M_r + \frac{dM_r}{dr} dr \right] (r + dr) d\theta - M_r r d\theta - M_{\theta} dr d\theta + Q_r r d\theta dr = 0 \quad (4.46)$$

que, por sua vez, ao se desprezarem os termos de ordem elevada, resulta em

$$M_r + \frac{dM_r}{dr} r - M_{\theta} + Q_r r = 0 \quad (4.47)$$

Substituindo as relações de momento (4.43) e (4.45) na equação (4.47), obtém-se

$$\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = \frac{Q_r}{D} \quad (4.48)$$

que pode ser reescrita na seguinte forma

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{Q_r}{D} \quad (4.49)$$

A equação (4.49) pode ser escrita de forma mais apropriada em termos do carregamento p . Para isto, torna-se necessário fazer um balanço de forças:

$$Q_r 2\pi r = \int_0^r p 2\pi r dr \quad (4.50)$$

Substituindo o valor de Q_r na equação (4.49), rearranjando os termos e derivando novamente a equação em relação a r , obtém-se:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right] = \frac{p}{D} \quad (4.51)$$

Esta é a equação diferencial que descreve o problema de flexão de placa fina axissimétrica com o emprego das hipóteses de Kirchhoff. Para encontrar o formato da superfície defletida da placa circular, esta equação deve ser integrada quatro vezes, resultando na seguinte solução geral:

$$w(r) = C_1 r^2 \ln(r) + C_2 \ln(r) + C_3 r^2 + C_4 + \frac{pr^2}{64D} \quad (4.52)$$

Esta solução é válida tanto para a condição simplesmente apoiada como para a condição engastada. Como a deflexão em $r = 0$ deve ser um valor finito, as constantes C_1 e C_2 devem ser nulas. Então, as superfícies defletidas associadas às duas condições supracitadas serão caracterizadas pelas constantes de integração C_3 e C_4 . No presente estudo a hipótese de placa simplesmente apoiada é mais apropriada e, desta forma, as condições de contorno são:

$$w(r = r_o) = 0 \quad \text{e} \quad M_r(r = r_o) = 0 \quad (4.53)$$

Aplicando-se estas duas condições de contorno, os valores de C_3 e C_4 são determinados e a equação (4.52) assume a seguinte forma:

$$w(r) = \frac{pr_o^4}{64D} \left[\left(\frac{r}{r_o} \right)^4 - 2 \frac{3 + \nu}{1 + \nu} \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 + \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \right] \quad (4.54)$$

Deve ser mencionado que esta equação é válida no intervalo $0 \leq r \leq r_o$. Para $r_o \leq r \leq r_d$, que é o intervalo de interesse, a deflexão é calculada com o valor de $\left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=r_o}$. Sendo assim, a deflexão do disco é dada por:

$$w(r) = \frac{pr_o^3}{8D(1 + \nu)} (r - r_o) \quad (4.55)$$

A equação (4.55) pode ser escrita em função da coordenada adimensional x^* :

$$w(x^*) = \frac{pr_o^3}{8D(1+\nu)} (1-x^*)(r_d - r_o) \quad (4.56)$$

4.4 Metodologia de Solução

Como já foi abordado no início deste capítulo, a folga existente entre os discos é representada como a soma da deflexão local do disco e da folga de quina formada no contato entre o disco e a quina do orifício. Sendo assim, a geometria do escoamento está definida e o termo que descreve a variação da área, $A(x^*)$, nas equações diferenciais do problema é conhecido e função apenas da coordenada espacial. Dessa maneira, as equações diferenciais ordinárias resultantes podem ser resolvidas através do método de Runge-Kutta.

As equações diferenciais que governam o escoamento nos diferentes domínios (M , p , ρ ou x^*), seja escoamento isotérmico ou escoamento adiabático, são funções das variáveis M , p e ρ que definem o estado do fluido e da posição x^* . Por conveniência tais equações são reescritas através da seguinte forma generalizada compacta:

$$\frac{d\phi}{d\eta} = F(\phi, \eta) \quad (4.57)$$

onde ϕ representa a variável dependente e η a variável independente. Para escoamento adiabático, por exemplo, se variável independente η for a coordenada espacial x^* , ϕ representará então M , p ou ρ .

O método de Runge-Kutta é proveniente da expansão em série de Taylor em torno da variável dependente η , ou seja,

$$\begin{aligned} \phi(\eta) = & \phi(\eta_i) + \phi'(\eta_i)(\eta - \eta_i) + \phi''(\eta_i) \frac{(\eta - \eta_i)^2}{2!} + \dots + \\ & + \phi^k(\eta_i) \frac{(\eta - \eta_i)^k}{k!} + \phi^{k+1}(\xi) \frac{(\eta - \eta_i)^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde o último termo, dado pela fórmula de Lagrange, representa o resto da série truncada no k -ésimo termo e ξ é um número entre η e $\eta + \Delta\eta$. Substituindo η_{i+1} em η e reconhecendo que $\Delta\eta = \eta_{i+1} - \eta_i$, tem-se

$$\begin{aligned} \phi(\eta_{i+1}) = & \phi(\eta_i) + (\Delta\eta)\phi'(\eta_i) + \frac{(\Delta\eta)^2}{2!}\phi''(\eta_i) + \dots + \\ & + \frac{(\Delta\eta)^k}{k!}\phi^k(\eta_i) + \phi^{k+1}(\xi) \frac{(\Delta\eta)^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned} \quad (4.59)$$

No caso de $k = 1$ têm-se o método de Euler que é um método de Runge-Kutta de primeira ordem. Sendo assim,

$$\phi(\eta_{i+1}) = \phi(\eta_i) + (\Delta\eta)\phi'(\eta_i)$$

ou de forma compacta para o presente problema

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \Delta\eta F(\phi_i, \eta_i) \quad (4.60)$$

O método de Runge-Kutta de quarta ordem pode ser entendido como um aperfeiçoamento do método de Euler devido a uma melhor estimativa da derivada da função, reduzindo o erro de truncamento de $O(\Delta\eta^2)$ para a ordem de $O(\Delta\eta^5)$.

O método de Runge-Kutta é muito difundido para a obtenção de soluções numéricas de problemas de valor inicial. A solução consiste em calcular os valores atuais ϕ_{i+1} a partir dos valores anteriores ϕ_i , do incremento da variável independente $\Delta\eta$ e dos valores das funções $k_{\phi,j}$ com $j = 1, 2, 3, 4$, de acordo com a expressão a seguir:

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \Delta\eta \frac{(k_{\phi,1} + 2k_{\phi,2} + 2k_{\phi,3} + k_{\phi,4})}{6} \quad (4.61)$$

onde

$$\begin{aligned} k_{\phi,1} &= F_{\phi}(\eta_i, \phi_i) \\ k_{\phi,2} &= F_{\phi}\left(\eta_i + \frac{1}{2}\Delta\eta, \phi_i + \frac{1}{2}k_{\phi,1}\right) \\ k_{\phi,3} &= F_{\phi}\left(\eta_i + \frac{1}{2}\Delta\eta, \phi_i + \frac{1}{2}k_{\phi,2}\right) \\ k_{\phi,4} &= F_{\phi}(\eta_i + \Delta\eta, \phi_i + k_{\phi,3}) \end{aligned}$$

O emprego do método de Runge-Kutta se justifica devido às não linearidades de termos das equações do modelo proposto que dificultam a obtenção da solução analítica do problema. Um valor inicial é requerido para avançar o procedimento de solução e, como no presente problema este valor não é conhecido, torna-se necessária uma estimativa. Por questão de simplicidade, escolheu-se arbitrar o número de Mach na entrada do microcanal. Esta escolha é também conveniente porque tal valor deve estar entre zero e um.

Conhecendo-se as condições de estagnação a montante do microcanal, com a estimativa inicial de Mach na entrada, é possível obter os valores da velocidade, temperatura, pressão, densidade, número de Reynolds, número de Knudsen e o coeficiente de atrito do escoamento na correspondente posição

através das relações de escoamento isentrópico descritas nas equações (4.10) a (4.12). Dessa forma, os valores iniciais exigidos para a solução das três equações diferenciais estarão definidos.

A partir das condições iniciais, o valor do incremento $\Delta\eta$ pode ser calculado. Os valores das funções $k_{\phi,j}$ devem ser calculados para estimar as variáveis ϕ na próxima posição do canal através da equação generalizada (4.61). Consequentemente, todas as variáveis envolvidas no escoamento estarão determinadas. Esse processo deve ser repetido N vezes, até a posição de saída do escoamento no duto ($i = N$). O fluxograma da figura 4.8 apresenta de forma ilustrativa o processo da aplicação do método de Runge-Kutta para o presente caso.

As três equações diferenciais são resolvidas simultaneamente, atualizando as propriedades do fluido e os números adimensionais do escoamento ao longo do microcanal de acordo com o procedimento descrito. O coeficiente de atrito na posição η é calculado a partir das variáveis locais do escoamento.

A condição de contorno na saída do microcanal pode ser de dois tipos: número de Mach unitário ou pressão a jusante. Isso será melhor detalhado nas próximas seções.

Para a válvula de descarga o vazamento ocorre da câmara de descarga para a câmara de compressão. Considera-se então que o fluido está estagnado na câmara de descarga (condição de entrada) e escoo através do microcanal. Então, duas condições podem ser alcançadas na saída do microcanal: caso o escoamento seja subsônico a pressão de saída do escoamento deverá ser igual ao valor da pressão a jusante, correspondente à pressão no cilindro; caso o escoamento seja sônico o valor de $M = 1$ será a condição de contorno na saída do microcanal.

Para a válvula de sucção o vazamento ocorre da câmara de compressão para a câmara de sucção. Nesta situação o fluido está estagnado no cilindro (condições de entrada) e escoo através do microcanal. As duas condições mencionadas para a válvula de descarga podem ser alcançadas na saída do microcanal da válvula de sucção.

4.4.1 Solução no Domínio do Espaço

Este procedimento seria a forma mais natural para se obter a solução do problema, porém não é robusto.

Primeiramente, calcula-se a deflexão da palheta de acordo com os dados de entrada, definindo assim a geometria do problema. O comprimento do duto é então dividido em N elementos de comprimento Δx^* igualmente espaçados. Para a solução do escoamento, o processo iterativo é iniciado com uma estimativa do número de Mach na entrada da válvula, M_e . As proprieda-

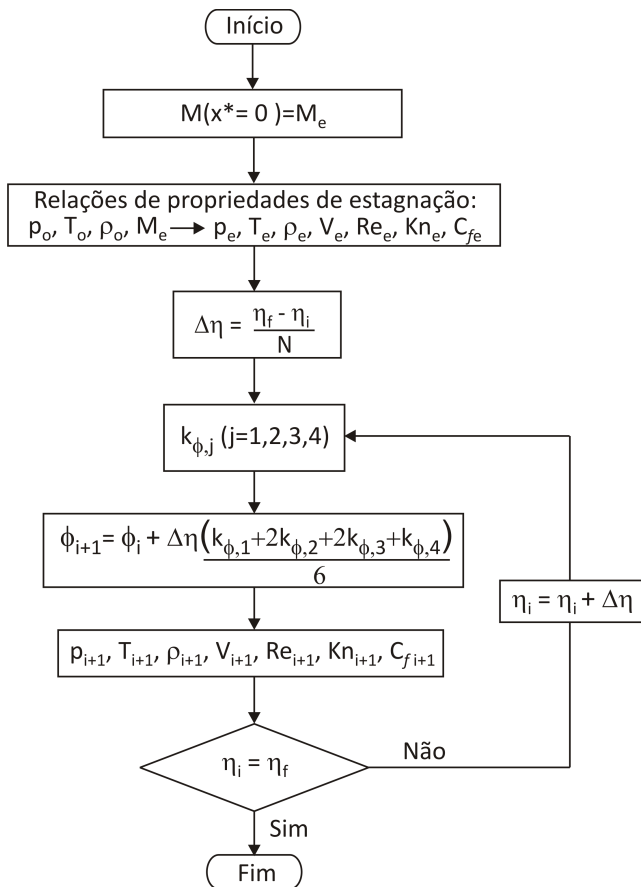


Figura 4.8 – Fluxograma ilustrativo do método de Runge-Kutta aplicado para solução problema.

des do fluido bem como os números adimensionais do escoamento na posição $x^* = 0$ estarão então todos definidos.

Utilizando o método numérico descrito na seção anterior, obtém-se o valor das variáveis do escoamento na saída do microcanal, devendo ser verificado se o escoamento atingiu número de Mach igual a 1 na saída. Se o valor for menor que uma determinada tolerância definida para número de Mach, Tol_M , o processo iterativo é finalizado, caso contrário, o escoamento é subsônico e o processo deve prosseguir.

No caso de escoamento subsônico, o valor da pressão na posição final

do microcanal deve ser comparado ao valor da pressão a jusante. Se a diferença percentual for menor que uma determinada tolerância admissível para a pressão, Tol_p , o processo iterativo é finalizado. Caso contrário, deve ser dado um incremento δM no valor de Mach na entrada, M_e , para a próxima iteração. Este processo deve ser repetido até se atingir a convergência. A figura 4.9 apresenta o fluxograma do procedimento de solução do problema tendo como variável independente a variável x^* .

Neste método, tanto o chute inicial quanto o incremento dado no número de Mach na entrada devem ser pequenos o suficiente para que o valor deste não ultrapasse a unidade em alguma posição do canal. Quanto maior o valor de Mach na entrada, menor será o valor da pressão na saída do microcanal.

Devido este método não ser robusto substituiu-se pelo procedimento da seção seguinte.

4.4.2 Solução no Domínio do número de Mach e no domínio da Pressão

A representação das equações tendo como variável independente o número de Mach é adequado para a condição de escoamento bloqueado, pois a condição de contorno na saída da válvula é $M = 1$. Por outro lado, o uso da pressão como variável independente é indicado para a condição de escoamento subsônico, pois a condição de contorno na saída deve ser igual à pressão no cilindro para a válvula de descarga e à pressão na câmara de sucção para a válvula de sucção.

A ideia geral deste procedimento é resolver em primeiro lugar as equações diferenciais tendo como variável independente o número de Mach. O número de Mach na entrada do microcanal deve ser calculado, iterativamente, para se obter $M = 1$ na saída do microcanal e, conseqüentemente, o valor da pressão crítica na correspondente posição. O valor da pressão crítica deve ser comparado com o valor da pressão a jusante. Se a pressão crítica for maior ou igual que a pressão a jusante, o escoamento está bloqueado e o processo é finalizado. Caso seja menor, o escoamento é subsônico e o processo iterativo deve ser realizado mudando a variável independente para a pressão.

Em ambos os casos, o domínio não é mais dividido em elementos igualmente espaçados por Δx^* , pois x^* agora é uma variável dependente. Para o domínio de Mach os N elementos serão espaçados com a mesma variação no número de Mach (ΔM), enquanto no domínio da pressão o escoamento é dividido em N elementos com a mesma variação de pressão (Δp).

O critério de convergência no caso anterior quando a variável independente era x^* , era em relação à pressão para escoamento subsônico e em relação ao número de Mach unitário para escoamento bloqueado. Nesta nova

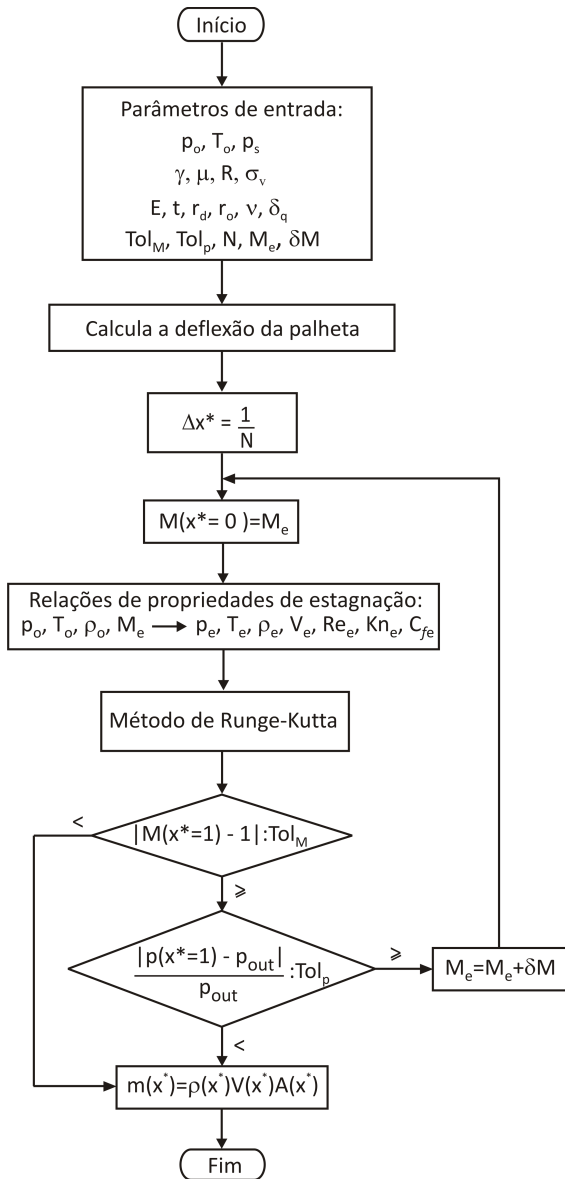


Figura 4.9 – Fluxograma ilustrativo do método de Runge-Kutta aplicado para solução problema tendo x^* variável independente.

abordagem, tanto para o domínio de Mach como para o domínio da pressão, a convergência é analisada em relação à variável x^* , denominada comprimento adimensional do microcanal, L^* , que deve atingir o valor unitário dentro de uma tolerância especificada, Tol_{L^*} . Em princípio, quanto maior o número de Mach na entrada da válvula, menor será o comprimento L^* do microcanal para alcançar as condições de contorno na saída e vice-versa.

O procedimento é iniciado da mesma maneira como o procedimento descrito na seção anterior, ou seja, calculando-se a flexão da palheta para definir a geometria do escoamento. Em seguida, estima-se o número de Mach na entrada da válvula, M_e . O método da bisseção adotado para atualizar as estimativas do número de Mach na entrada da válvula exige que o valor da raiz procurada esteja dentro de um intervalo previamente definido. Sabe-se de antemão que a raiz procurada está entre os limites zero e um, ou seja, $M_{inf} = 0$ e $M_{sup} = 1$.

O espaçamento ΔM ou Δp de cada elemento será definido de acordo com a estimativa inicial do número de Mach na entrada. Com os valores de Mach na entrada e ΔM definidos, calculam-se as demais propriedades e números adimensionais do escoamento na entrada do microcanal através das relações de escoamento isentrópico. A solução das equações diferenciais é então realizada através do método de Runge-Kutta descrito no fluxograma da figura 4.8, possibilitando avaliar o comprimento adimensional do microcanal. Caso o módulo da diferença entre o comprimento adimensional do microcanal e o valor unitário seja menor do que uma tolerância, a pressão crítica do microcanal estará definida. Caso contrário, o processo iterativo deve ser repetido, atualizando-se o valor do número de Mach na entrada do microcanal.

Se o comprimento adimensional do microcanal for maior que um, o número de Mach na entrada deve ser aumentado, logo o valor inferior de Mach M_{inf} deve assumir o valor de Mach na entrada M_e . Se o comprimento adimensional do microcanal for menor que um, o número de Mach na entrada deve ser diminuído, logo o valor superior de Mach M_{sup} deve assumir o número de Mach na entrada M_e .

Então deve ser estimado um novo número de Mach, baseado na média aritmética dos valores superior e inferior do número de Mach, M_{sup} e M_{inf} , na entrada e assim recalculado um novo comprimento adimensional do microcanal. Este processo deve ser repetido até atingir a convergência.

A figura 4.10 ilustra como é realizado o processo iterativo adotando o número de Mach como variável independente. Na figura superior observa-se as variações do número de Mach obtidas para diferentes estimativas de M_e . Na figura inferior observa-se as distribuições de pressão para as correspondentes estimativas de Mach na entrada do microcanal. Os números romanos indicam o número de iterações necessários para atingir a convergência. A so-

lução para escoamento bloqueado está indicada pela quarta iteração e assim a pressão crítica está determinada.

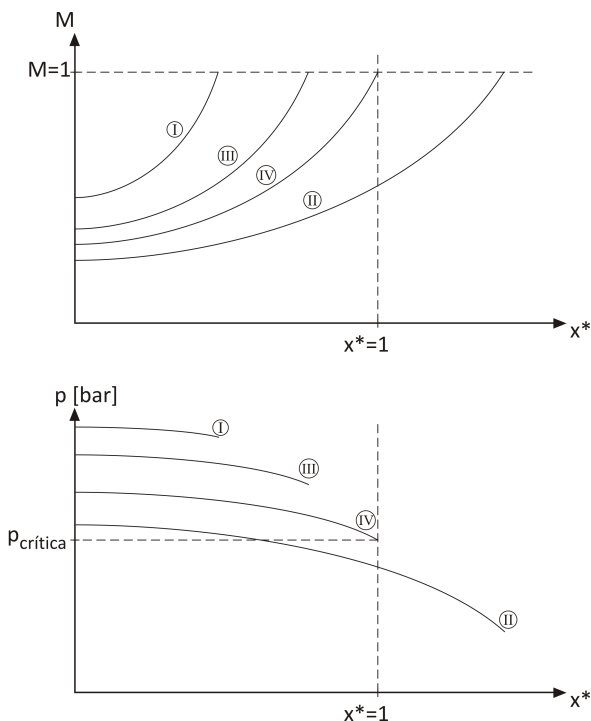


Figura 4.10 – Exemplo do processo iterativo para calcular as variações de propriedades do escoamento e, conseqüentemente, a pressão crítica no microcanal (escoamento sônico).

O valor da pressão a jusante deve ser comparado ao valor da pressão crítica obtido na saída do microcanal. Se for menor ou igual, o escoamento está bloqueado e a vazão mássica é estimada finalizando o processo iterativo. Se for maior, o escoamento é subsônico e um novo processo iterativo deve ser realizado tendo como variável independente a pressão e assim determinar a vazão mássica. Esta metodologia de solução, tendo como variável independente a pressão, é similar àquela descrita quando a variável independente é o número de Mach.

A figura 4.11 ilustra como é realizado o processo iterativo adotando a pressão como variável independente. O procedimento é similar ao adotado anteriormente, quando a variável independente era o número de Mach. Nova-

mente, na figura superior observa-se as variações do número de Mach obtidas para diferentes estimativas de M_e e também pode ser observado, na figura inferior, as distribuições de pressão para as correspondentes estimativas de Mach na entrada do microcanal. Da mesma forma que no exemplo anterior, a solução para escoamento subsônico está indicada pela quarta iteração apenas de forma ilustrativa.

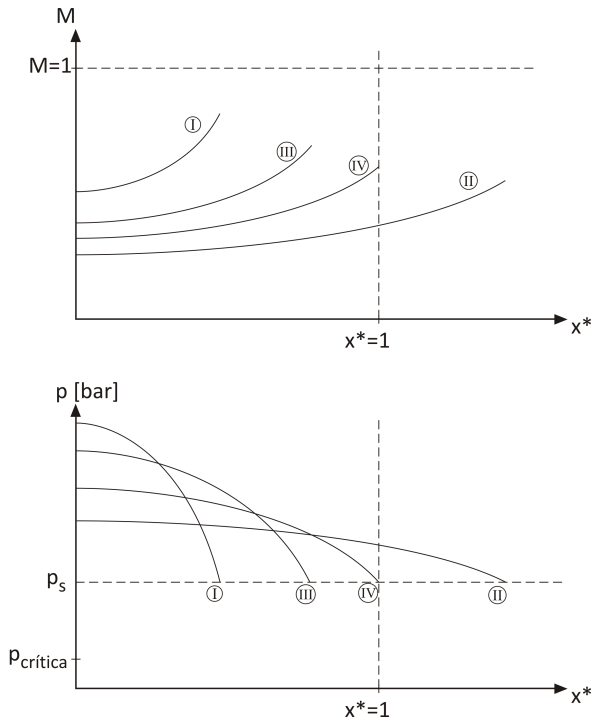
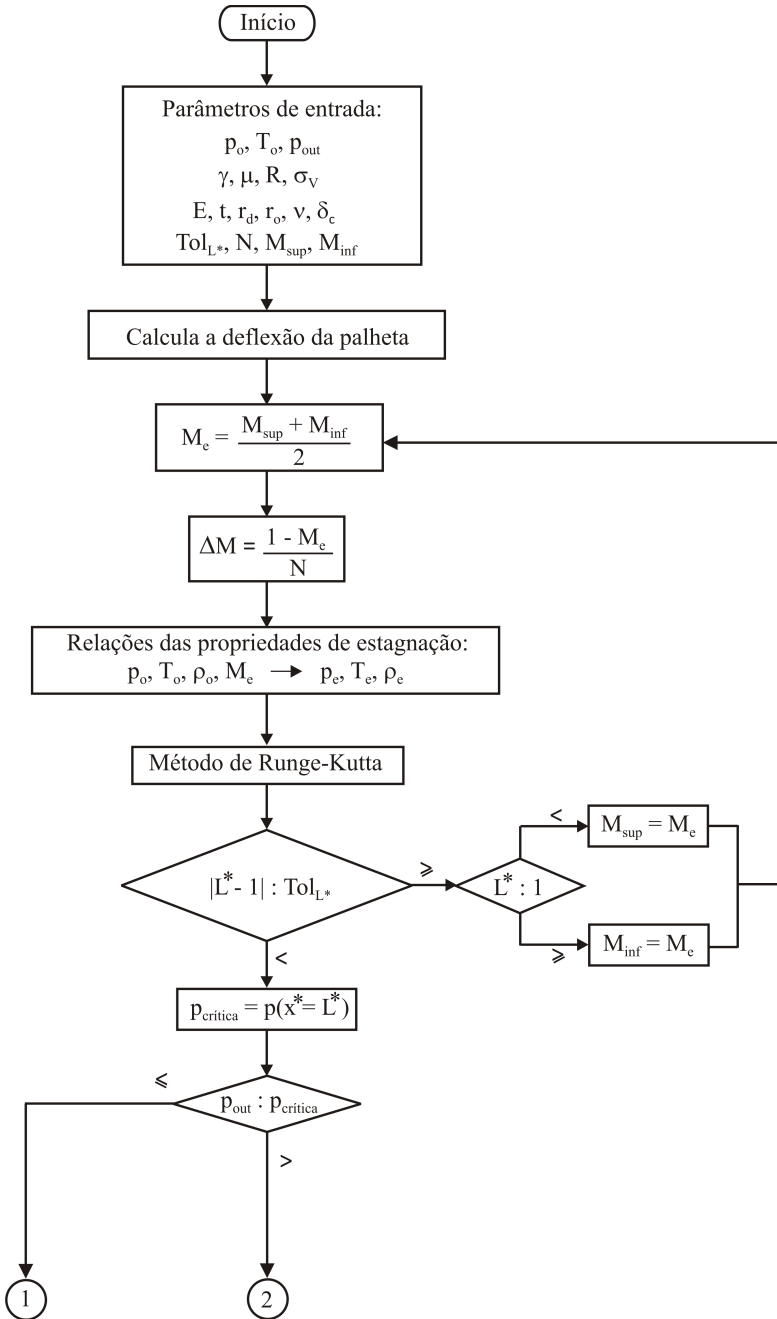


Figura 4.11 – Exemplo do processo iterativo para calcular as variações de propriedades do escoamento no microcanal (escoamento subsônico).

A figura 4.12 apresenta o fluxograma do procedimento geral de solução numérica, tendo como variáveis independentes o número de Mach e a pressão para estimar o vazamento nas válvulas.



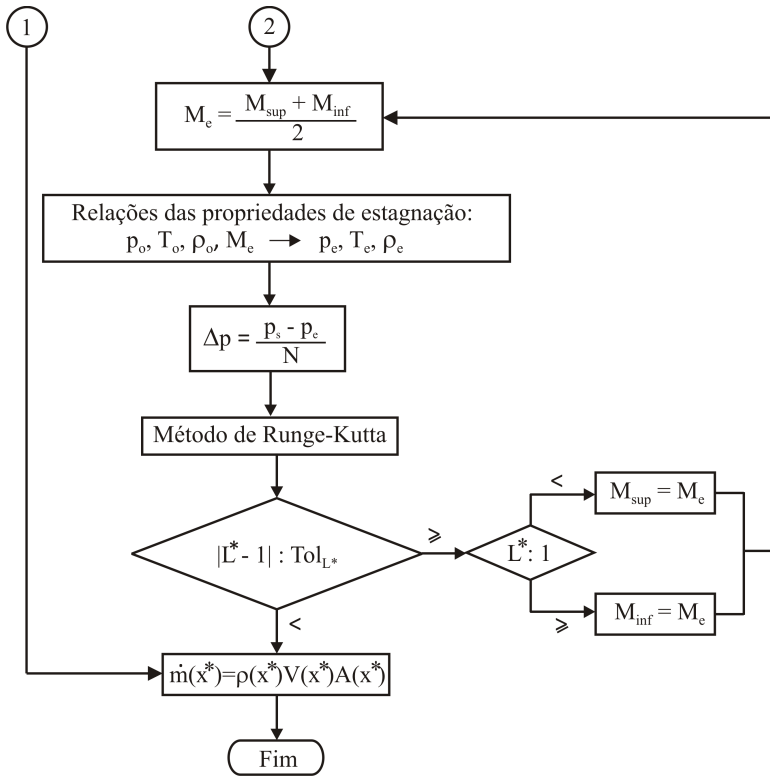


Figura 4.12 – Fluxograma da metodologia adotada para a solução numérica do problema.

5 *Resultados e Discussões*

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos com o modelo desenvolvido para estimar o vazamento em válvulas automáticas de compressores.

A qualidade da solução numérica deve ser assegurada através de testes de verificação e de validação do modelo. Os testes de verificação se destinam a avaliar se as equações estão sendo resolvidas corretamente, enquanto que a validação mostra se as equações do modelo são adequadas para resolver o problema. Assim, a avaliação de erros de truncamento devido à discretização da malha computacional é um teste de verificação e a comparação da previsão numérica com dados experimentais, por exemplo, faz parte da validação do modelo. A seção 5.1 apresenta detalhes da verificação do modelo, realizada através da comparação de resultados obtidos com diferentes discretizações do domínio de solução, tendo a coordenada espacial x^* , ou número de Mach M , como variável independente. Além disto, investiga-se também o critério de convergência do procedimento de solução tendo a pressão e o número de Mach como variáveis independentes. A validação do modelo é realizada na seção 5.2, através da comparação das previsões numéricas com a solução analítica do escoamento de Fanno.

A seção 5.3 traz uma análise do efeito do emprego de formulações de escoamento adiabático e de escoamento isotérmico sobre a vazão na folga entre a palheta e o assento. Os resultados de vazamento são apresentados inicialmente na seção 5.4 sem considerar a flexão das palhetas das válvulas de sucção e descarga e, posteriormente, a flexão foi introduzida na seção 5.5 a fim de se verificar a sua influência sobre o vazamento. As influências da condição de escorregamento e do rastejo térmico sobre o escoamento e, conseqüentemente, o vazamento nas válvulas de sucção e descarga, foram avaliados na seção 5.6.

A partir da formulação final do modelo, resultados globais do vazamento nas válvulas e do efeito do mesmo sobre a eficiência volumétrica e eficiência isentrópica do compressor são discutidos na seção 5.7. O capítulo é finalizado com uma síntese dos principais resultados do modelo e conclusões sobre o

fenômeno de vazamento de gás em válvulas de compressores.

5.1 Verificação do Modelo

Nas simulações preliminares do escoamento, observou-se uma grande variação do número de Mach e das propriedades do fluido na porção final do microcanal, fazendo com que as derivadas dM/dx^* , dp/dx^* e $d\rho/dx^*$ se tornassem bastante íngremes e sugerindo a necessidade de uma maior discretização naquela região.

A figura 5.1 ilustra um exemplo no qual a derivada do número de Mach em relação ao espaço (dM/dx^*) é pequena na entrada do microcanal e aumenta consideravelmente na região de saída.

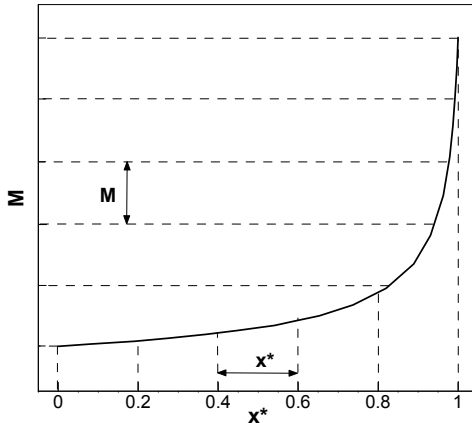


Figura 5.1 – Comparação entre as diferentes formas de discretização do microcanal.

Conforme já foi abordado no capítulo 4, pode-se resolver o problema no domínio da coordenada espacial, $M = F(x^*)$, ou no domínio do número de Mach, $x^* = F(M)$. Como mostra a figura 5.1, o domínio foi dividido em cinco porções com mesmo espaçamento. Para a solução no domínio da coordenada espacial, a variável independente é x^* e a região é dividida em espaçamentos de mesmo comprimento adimensional Δx^* . Para a solução no domínio do número de Mach, a variável independente é M e a região é dividida em espaçamentos iguais ΔM . Observa-se que quando as equações adotam o número de Mach como variável independente a discretização é alterada.

Por exemplo, utiliza-se apenas uma divisão para estimar a derivada no trecho final correspondente a 20% do comprimento do microcanal quando a

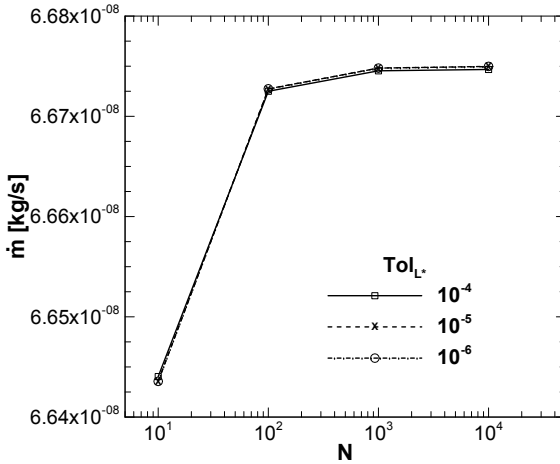
variável independente é o comprimento adimensional. Por outro lado, o número de divisões aumenta para quatro quando a variável independente é o número de Mach. Isto é, o refino adequado da malha pode ser atendido automaticamente na região de elevados gradientes. Esta forma de discretização das equações foi vantajosa quando a flexão da palheta foi incluída no modelo, uma vez que as derivadas na região de saída do escoamento são extremamente elevadas em tal situação, como será mostrado posteriormente.

Os mesmos comentários realizados sobre a solução do problema tendo como variável independente o número de Mach podem ser feitos quando a variável independente é a pressão. No presente trabalho, adotaram-se as variáveis p e M como variáveis independentes, pois além de evitar as singularidades das equações diferenciais em suas formas originais, favorece as suas discretizações.

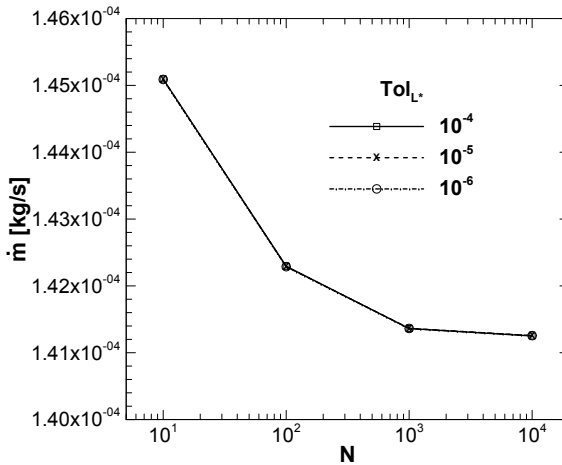
Com os objetivos de definir a quantidade de elementos necessários na discretização do domínio de solução e o critério de convergência, procedeu-se uma análise da influência de tais parâmetros sobre o resultado de vazão mássica. Nesta análise, a flexão da palheta não foi considerada. A figura 5.2 mostra os resultados para o caso de máxima diferença de pressão atuando na válvula de descarga. Os valores de folgas escolhidos foram de 0,2 e 3,0 μm e ilustram os casos de escoamento subsônico e escoamento bloqueado, respectivamente. Como esperado, percebe-se das figuras 5.2 (a) e (b) que, em ambos os casos, o resultado de vazão mássica tende para um valor limite de forma assintótica com o aumento do número de elementos.

Para o caso da figura 5.2 (a), o escoamento é subsônico e ao aumentar-se o número de elementos, o fluxo de massa também aumenta. De fato verificou-se que o aumento do refino da discretização do domínio torna o efeito do aumento de velocidade mais significativo do que o efeito da queda de densidade. Para o caso da 5.2 (b) o escoamento é bloqueado e ao aumentar-se o número de elementos, o fluxo de massa diminui. Neste caso, mesmo com o número de Mach fixo na saída do microcanal, tanto a velocidade como a densidade diminuem, diminuindo também a vazão mássica. O aumento do número de elementos testado na discretização produziu uma variação percentual pequena no fluxo de massa em ambos os casos, não ultrapassando 3% no caso mais crítico, representado na 5.2 (b). Deve ser observado também que os resultados foram insensíveis em relação aos critérios de convergência testados, estabelecidos por uma tolerância adimensional no comprimento do microcanal.

Posteriormente, a análise do efeito do número de elementos e do critério de convergência foi realizada para o modelo que inclui a flexão da palheta sem escorregamento do escoamento e para o modelo completo (com flexão da palheta e com escorregamento). Os resultados desta análise são mostrados



(a) Folga de 0,2 μm .

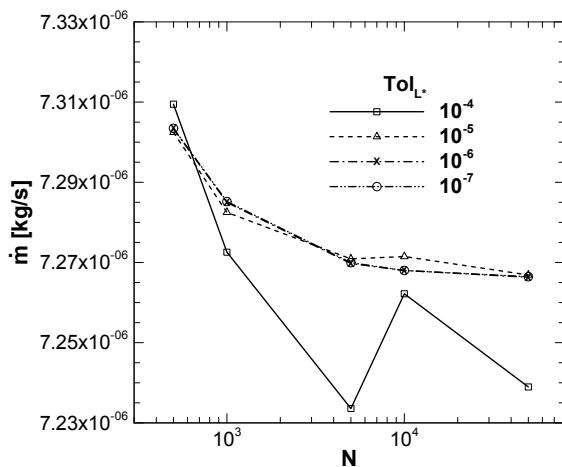


(b) Folga de 3,0 μm .

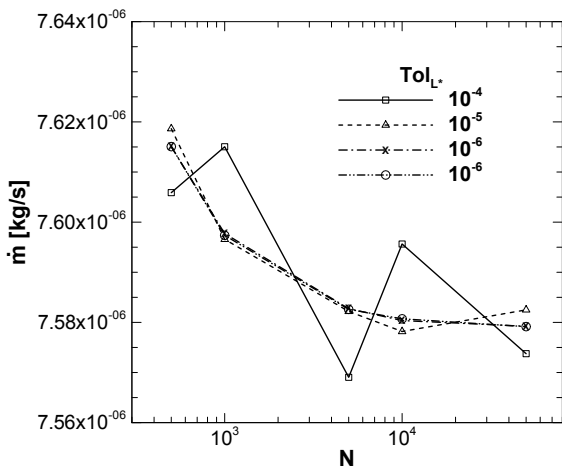
Figura 5.2 – Análise do número de elementos e critério de convergência no cálculo de vazamento sem flexão da palheta e com a condição de não-escorregamento do fluido na parede.

nas figuras 5.3 (a) e (b). Em ambos os modelos, utilizou-se a condição de máxima diferença de pressão e folga de 0,2 μm que tornam o escoamento bloqueado. O procedimento de solução não convergiu quando o número de

elementos do domínio era menor ou igual a cem e, assim, manteve-se o valor mínimo de elementos em quinhentos.



(a) Sem escorregamento na parede



(b) Com escorregamento na parede.

Figura 5.3 – Análise do número de elementos e critério de convergência no cálculo de vazamento contabilizando a flexão da palheta.

Observa-se que ao incluir a flexão da palheta no modelo, o critério de convergência deve ser menor para evitar o comportamento não assintótico da

vazão mássica com o aumento do número de elementos do domínio. Esta anomalia não foi observada na figura 5.2 e, no presente caso, deve-se provavelmente ao aumento significativo do valor das derivadas das funções que descrevem as variações do número Mach, pressão e densidade no trecho final do microcanal. Em função dos testes apresentados nesta seção, adotou-se uma discretização de 5000 elementos e uma tolerância de 10^{-6} no comprimento adimensional do microcanal em todas as simulações realizadas no presente trabalho.

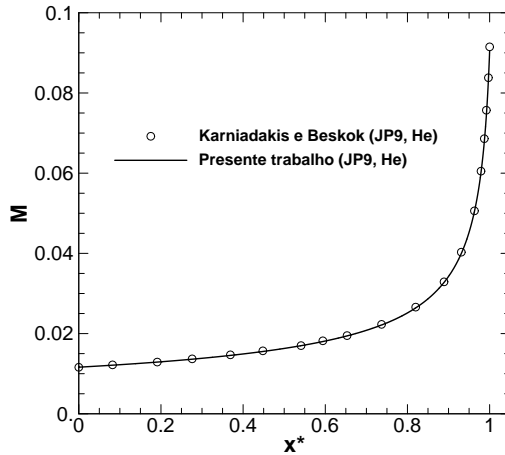
5.2 Validação do Modelo

A validação do modelo foi realizada com o auxílio dos resultados de Karniadakis e Beskok (2002) e Harley (1993). Karniadakis e Beskok (2002) obteve a solução do escoamento compressível, adiabático e com atrito, conhecido escoamento de Fanno e comparou o resultado do fator de atrito com o dado experimental de Harley (1993). O modelo de Karniadakis e Beskok (2002) previu uma variação máxima de $0,1^\circ$ na temperatura, sugerindo assim que o modelo adiabático é similar ao isotérmico nas condições de baixo número de Mach.

A fim de validar o modelo desenvolvido neste trabalho foi necessário retirar o termo que descreve a variação de área das equações diferenciais propostas no capítulo 4 e também desconsiderar o bocal isentrópico que precede o microcanal. Outra alteração necessária foi substituir o fator de atrito local do modelo proposto pelo fator de atrito médio obtido por Karniadakis e Beskok (2002). A introdução dessas modificações permite que o modelo resolva então o escoamento de Fanno.

Os resultados numéricos do modelo foram comparados com os resultados obtidos por Karniadakis e Beskok (2002) para a variação do número de Mach ao longo do microcanal em diferentes condições, conforme mostrado nas figuras 5.4 (a) e (b). Os símbolos JP9 e JH6 representam as diferentes geometrias utilizadas por Harley (1993) com o emprego dos gases Hélio (He) e Nitrogênio (N_2). Na solução numérica das equações diferenciais do modelo, testaram-se a coordenada espacial e a pressão como variáveis independentes e ambas as alternativas de discretização do domínio forneceram resultados equivalentes.

Conforme mostra a figura 5.4, o modelo desenvolvido neste trabalho, com as modificações supracitadas, demonstrou ser confiável para prever a variação do número de Mach. A previsão da variação das demais propriedades ao longo do microcanal também se mostraram em boa concordância com os resultados de Karniadakis e Beskok (2002) e, por questão de concisão, foram omitidas do texto.



(a) Amostra JP9, gás He

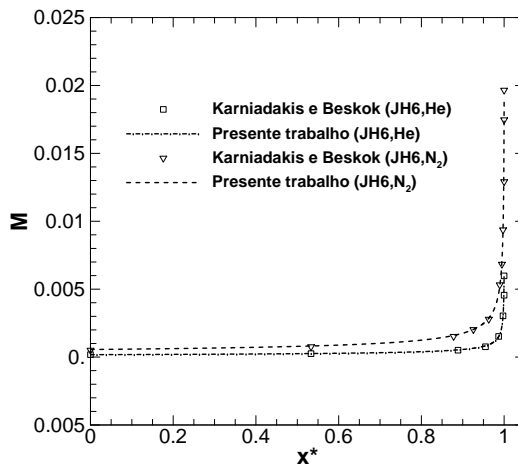
(b) Amostra JH6, gases He e N_2

Figura 5.4 – Comparação da solução de Karniadakis e Beskok (2002) com o código que foi adaptado modelando o problema como escoamento de Fanno para três condições diferentes.

A tabela 5.1 mostra de forma comparativa as medições de Harley (1993) e os resultados do modelo para pressão, densidade e número de Mach na entrada (ρ_{in} , M_{in} , p_{in}) e saída (ρ_{out} , M_{out} e p_{out}) do microcanal, bem como

para o número de Reynolds Re e o comprimento adimensional do microcanal L^* . No caso do modelo, apresentam-se resultados obtidos tendo a pressão, p , e a coordenada espacial, x^* , como variáveis independentes.

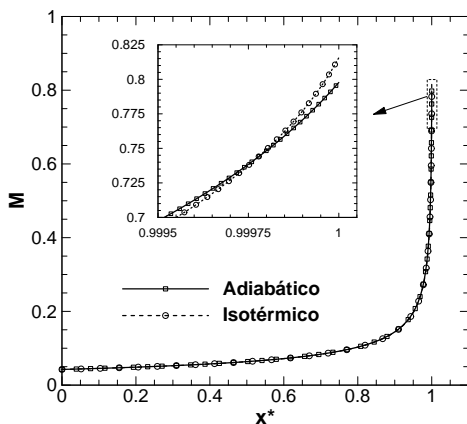
Conforme observado na tabela, o modelo adaptado para escoamento de Fanno prevê de forma satisfatória o escoamento no microcanal construído por Harley (1993). Além disto, a escolha da variável independente p ou x^* praticamente não afeta o resultado.

Tabela 5.1 – Resultados do código comparados aos dados experimentais de Harley (1993).

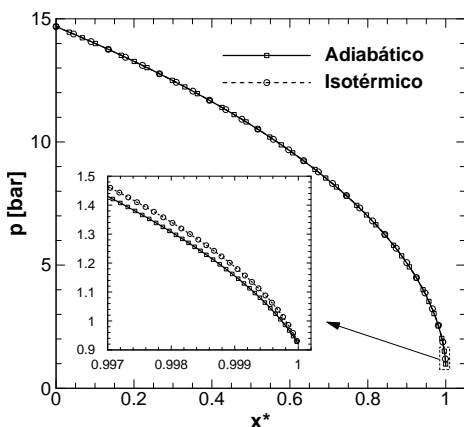
	Harley (1993)	Domínio x*	Domínio p	x*: Erro (%)	p: Erro (%)
JP9 - Nitrogênio					
p_{in} (kPa)	800	800	800	0	0,00
p_{out} (kPa)	102,8	102,8	102,8	< 0,01	0
ρ_{in} (kg/m ³)	9,16	9,16	9,16	0	0
ρ_{out} (kg/m ³)	1,18	1,179	1,178	0,08	0,20
M_{in}	0,0117	0,0116	0,0116	0,66	0,66
M_{out}	0,0915	0,0904	0,0905	1,24	1,12
Re	17,324	17,886	17,887	3,24	3,25
L^*	1	1	$\simeq 1,0$	0	< 10 ⁻⁶
JH6 - Nitrogênio					
p_{in} (kPa)	3398	3398	3398	0	0
p_{out} (kPa)	101,2	101,19	101,2	0,01	0
ρ_{in} (kg/m ³)	38,57	38,57	38,57	0	0
ρ_{out} (kg/m ³)	1,14	1,149	1,141	0,76	0,13
M_{in}	0,00057	0,000558	0,000558	2,18	2,18
M_{out}	0,01965	0,0187	0,0188	4,71	4,12
Re	0,433	0,428	0,428	1,10	1,10
L^*	1	1	$\simeq 1,0$	0	< 10 ⁻⁶
JH6 - Hélio					
p_{in} (kPa)	3115	3115	3115	0	0
p_{out} (kPa)	91,93	92,23	91,93	0,33	0
ρ_{in} (kg/m ³)	5,05	5,05	5,05	0	0
ρ_{out} (kg/m ³)	0,15	0,149	0,148	0,32	1,27
M_{in}	0,00018	0,000178	0,000178	1,05	1,05
M_{out}	0,00598	0,00601	0,00607	0,59	1,57
Re	0,0462	0,0464	0,0464	0,54	0,54
L^*	1	1	$\simeq 1,0$	0	< 10 ⁻⁶

5.3 Comparação entre Formulações de Escoamento Isotérmico e Escoamento Adiabático

A fim de analisar o efeito da formulação adotada para o escoamento, isotérmico ou adiabático, sobre os resultados do modelo, simulou-se o escoamento para uma folga de $1,0 \mu\text{m}$ entre a palheta e o assento, sem considerar a flexão da palheta. Além disto, adotou-se uma diferença de pressão elevada entre a câmara de descarga e o cilindro. Os resultados podem ser observados na figura 5.5.

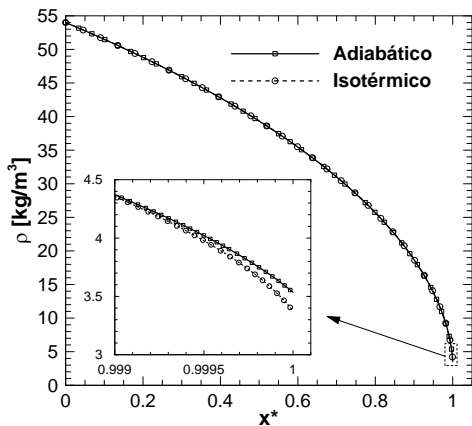


(a) Variação do número de Mach

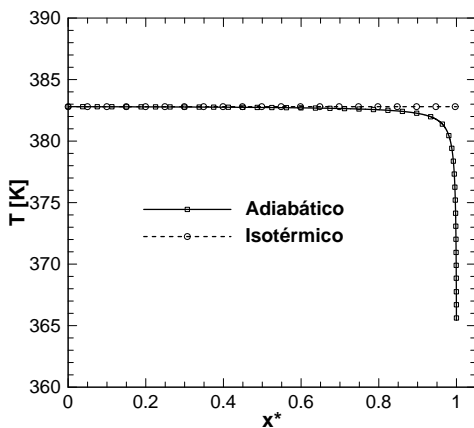


(b) Variação da pressão

Figura 5.5 – Continua na próxima página.



(c) Variação da densidade



(d) Variação da temperatura

Figura 5.5 – Comparação entre as variações de propriedades do escoamento das formulações isotérmica e adiabática.

Embora as diferenças entre os resultados para número de Mach, pressão e densidade sejam quase imperceptíveis, no caso do modelo adiabático a temperatura cai drasticamente nos últimos 10% do comprimento do microcanal.

A vista ampliada das figuras 5.5 (a), (b) e (c) revela que o aumento do número de Mach e a diminuição da pressão e da densidade são mais acentuados quando o modelo de escoamento isotérmico é adotado. A justificativa disto se deve ao fato de que o fluido recebe calor para manter a temperatura constante no modelo isotérmico e, desta forma, o número de Mach é maior e

a densidade é menor na saída do microcanal. No entanto, como visto anteriormente, os resultados dos modelos de escoamento adiabático e de escoamento isotérmico se aproximam mais ainda no caso de baixos valores de número de Mach.

Para folgas menores ou menores diferença de pressão, o número de Mach é baixo e a queda de temperatura do modelo adiabático passa a ser menor. Por exemplo, para uma folga de $0,2 \mu\text{m}$ a queda de temperatura no modelo adiabático é de aproximadamente $0,05 \text{ K}$ para a mesma diferença de pressão do caso analisado na figura 5.5 e, assim, as duas formulações fornecem resultados virtualmente iguais.

Portanto, para comparar estes dois modelos, utilizou-se uma maior diferença de pressão entre as câmaras e uma folga maior para atingir maiores valores de Mach, e conseqüentemente possibilitar uma discrepância entre os modelos, porém respeitando o limite teórico $M = 1/\sqrt{\gamma}$.

Através de uma simples análise das equações diferenciais que descrevem o escoamento, observa-se que a diferença entre os modelos deve ser mais pronunciada quando a razão de calores específicos γ é aumentada, ou quando o número de Mach na entrada do microcanal for maior. Em função dos resultados discutidos nesta seção e dos argumentos de consistência física indicados na seção 4.1.1, o modelo adiabático foi selecionado para as demais simulações deste trabalho.

5.4 Vazamento sem Considerar a Flexão da Palheta

Esta seção apresenta os resultados obtidos com o modelo para o escoamento na folga entre palheta e assento em uma determinada condição de operação do compressor em estudo. Inicialmente, considera-se o vazamento na válvula de descarga e posteriormente na válvula de sucção, considerando duas folgas e uma relação entre os diâmetros da palheta e do orifício de passagem da válvula, $r_d/r_o = 1, 2$.

A pressão e a temperatura das câmaras de sucção e de descarga são fixadas, mas os valores dessas quantidades na câmara de compressão foram avaliadas em algumas posições do pistão, nos processos de expansão e compressão, com o auxílio do código de simulação RECIP (Ussyk, 1984).

5.4.1 Válvula de Descarga

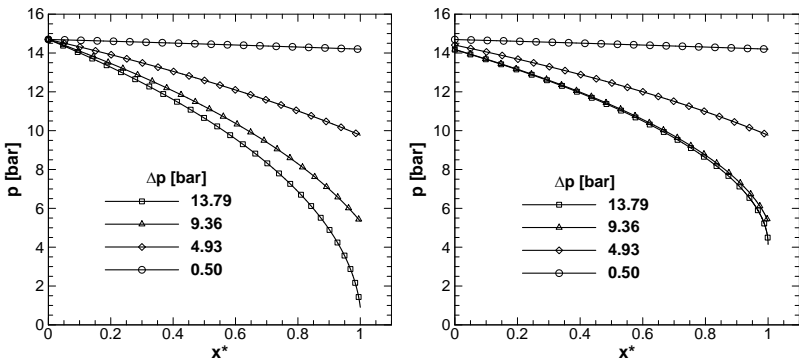
A tabela 5.2 mostra quatro condições de diferença de pressão, Δp , entre a pressão na câmara de descarga, $p_{cd} = 14,7 \text{ bar}$, e a pressão no cilindro, p_{cil} ,

adotadas na análise do escoamento. Observa-se que a diferença de pressão varia de forma significativa ao longo do processo de compressão. Naturalmente, o maior valor de Δp ocorre para o menor valor de pressão na câmara de compressão.

Tabela 5.2 – Algumas condições no interior da câmara de compressão para análise diferencial do escoamento na válvula de descarga.

Caso	p_{cil} [bar]	Δp [bar]
1	0,91	13,79
2	5,34	9,36
3	9,77	4,93
4	14,20	0,50

As figuras 5.6 (a) e (b) mostram a distribuição de pressão ao longo do micro canal para os quatro valores de diferenças de pressão, Δp . Observa-se que a distribuição de pressão varia linearmente para pequenos valores de Δp , mas se afasta desta variação linear quando Δp é elevado.



(a) Folga de $0,2 \mu\text{m}$.

(b) Folga de $3,0 \mu\text{m}$.

Figura 5.6 – Variação de pressão ao longo do microcanal da válvula de descarga.

Outro aspecto observado é que a pressão na saída do microcanal não atinge o valor da pressão no cilindro para a folga de $3,0 \mu\text{m}$ com $\Delta p = 13,79$ bar, indicando que o escoamento está bloqueado. Assim, o efeito de redução de pressão na câmara de compressão não afeta a distribuição de pressão ao longo do canal e nem a vazão mássica. Nota-se também que a queda da

pressão na entrada do microcanal aumenta com a dimensão da folga e com a diferença de pressão, conforme mostra a figura (b). Para a folga de $0,2 \mu\text{m}$ e $\Delta p = 13,79 \text{ bar}$, verifica-se que metade da variação da pressão ocorre nos 25% restantes do comprimento do micro canal, com o escoamento na saída atingindo a condição de pressão da câmara de compressão.

As figuras 5.7 e 5.8 mostram as variações da densidade e do número de Mach, respectivamente, com os mesmos comentários realizados anteriormente para a distribuição de pressão podendo ser aplicados para variação de densidade.

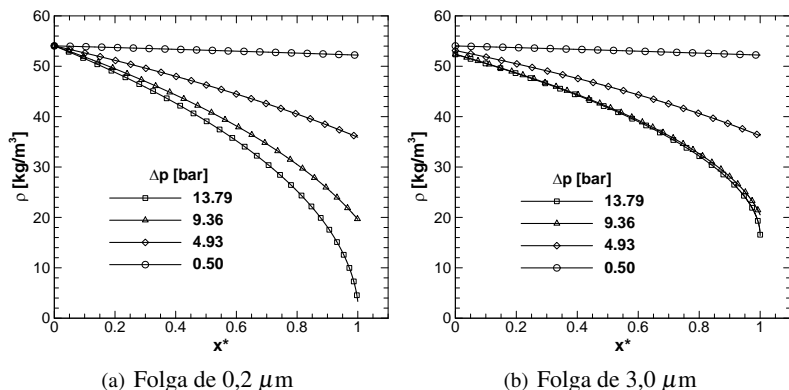


Figura 5.7 – Variação de densidade ao longo do microcanal da válvula de descarga.

Como esperado, um aumento do número de Mach ocorre à medida que a diferença de pressão, Δp , aumenta. Para a folga de $0,2 \mu\text{m}$, figura 5.8 (a), observa-se que os valores de Mach são inicialmente baixos, mas uma aceleração considerável ocorre nos últimos 10% de comprimento do microcanal na condição de maior Δp . Este aumento de velocidade do fluido está em linha com a queda de pressão mostrada na figura 5.6. Para a folga de $3,0 \mu\text{m}$, figura 5.8 (b), os valores de Mach na entrada do microcanal são maiores devido a menor restrição ao escoamento na entrada e a condição de escoamento sônico na saída é alcançada para a maior diferença de pressão, conforme já observado na figura 5.6. Além disto, a aceleração do escoamento é mais gradual, contrário ao efeito da aceleração concentrada junto à saída do microcanal observado para a folga de $0,2 \mu\text{m}$.

Nas figuras 5.9 (a) e (b) é possível observar a variação de temperatura. Para folga de $0,2 \mu\text{m}$ o efeito da queda na temperatura é desprezível, pois o número de Mach é baixo, e a formulação isotérmica seria apropriada. Já para folga de $3,0 \mu\text{m}$, o efeito da queda de temperatura é significativo, apresen-

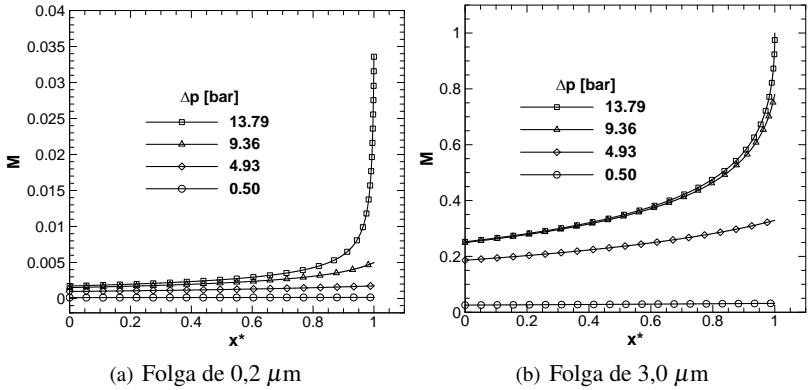


Figura 5.8 – Variação do número de Mach ao longo do microcanal da válvula de descarga.

tando um decaimento de quase 25 K para a condição de maior diferença de pressão.

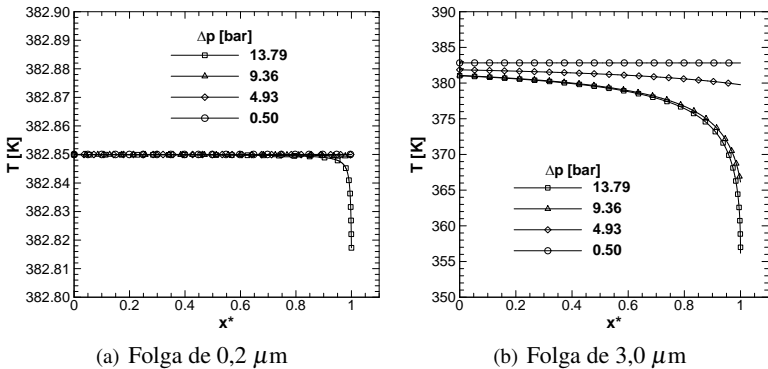


Figura 5.9 – Variação da temperatura ao longo do microcanal da válvula de descarga.

Nas figuras 5.10 (a) e (b), observa-se que o número de Reynolds é extremamente baixo para folga de $0,2 \mu\text{m}$, não passando da unidade. Por outro lado, a variação linear do número de Reynolds ao longo do micro canal pode ser explicada a partir de sua definição reescrita com a combinação da expres-

são da vazão mássica:

$$Re = \frac{\dot{m}}{\pi\mu} \frac{1}{r_d - x^*(r_d - r_o)}$$

Esta equação mostra que o número de Reynolds varia essencialmente devido à variação da área da seção transversal do microcanal. Deve ser observado que a máxima variação da viscosidade foi de aproximadamente 9,0% e então foi admitida constante na modelagem.

O número de Reynolds crítico no qual ocorre o início da transição entre os regimes laminar e turbulento em microcanais é um tanto controverso. Os resultados experimentais de Hao *et al.* (2005) revelam que a transição ocorre para Reynolds variando entre 1500 e 1800. Por outro lado, Celata *et al.* (2009) afirma que a transição ocorre para números de Reynolds variando de 3200 a 4500 em canais rugosos. É interessante observar que somente para a maior folga, $\delta_q = 3,0 \mu\text{m}$, e diferenças elevadas de pressão, o número de Reynolds alcança valores que sugerem que escoamento possa estar na região de transição. Apesar disto, e considerando a discussão ainda em andamento na literatura, a formulação de escoamento laminar foi mantida em todas as simulações.

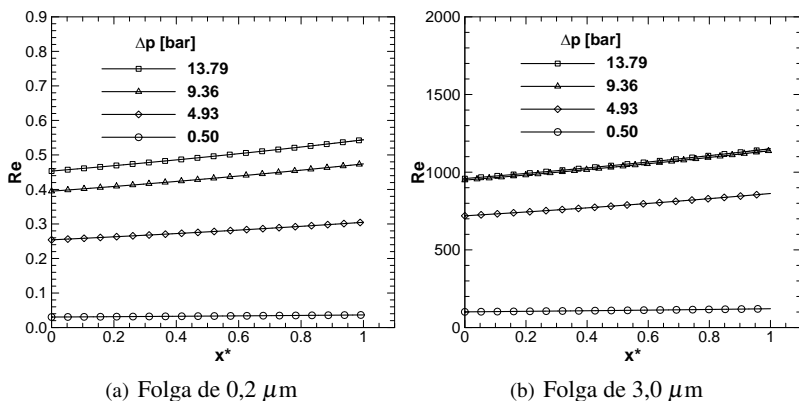


Figura 5.10 – Variação do número de Reynolds ao longo do microcanal da válvula de descarga.

Outro parâmetro importante na caracterização do escoamento é o número de Knudsen, cuja variação ao longo do microcanal pode ser vista nas figuras 5.11 (a) e (b). Para a folga de $0,2\mu\text{m}$, os valores de Knudsen do escoamento no final do microcanal ficam na faixa $10^{-2} < Kn < 10^{-1}$ quando a

diferença de pressão Δp é elevada, caracterizando um escoamento com deslizamento. À medida que Δp diminui, ou seja, a pressão no cilindro aumenta, o número de Knudsen diminui para $Kn < 10^{-2}$ e o efeito escorregamento é menos relevante. Para a folga de $3,0 \mu\text{m}$ o escoamento ocorre inteiramente na região do contínuo, com $Kn < 10^{-2}$.

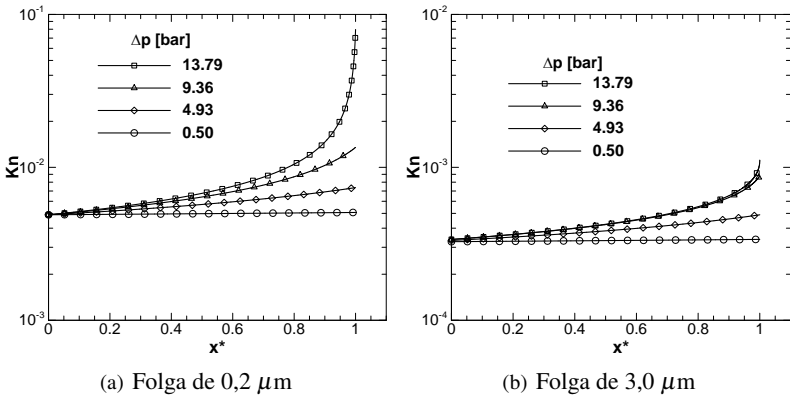


Figura 5.11 – Variação do número de Knudsen ao longo do microcanal da válvula de descarga.

5.4.2 Válvula de Sucção

O escoamento através da válvula de sucção foi também simulado para quatro condições de diferença de pressão Δp entre a pressão no cilindro, p_{cil} , que varia de acordo com a posição do pistão, e a pressão na câmara de sucção, $p_{cs} = 1,15 \text{ bar}$. Tais condições estão mostradas na tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Algumas condições no interior da câmara de compressão para análise diferencial do escoamento na válvula de sucção.

Caso	p_{cil} [bar]	T_{cil} [°C]	Δp [bar]
1	16,51	140,9	15,36
2	11,58	128,4	10,43
3	6,61	109,2	5,46
4	1,65	63,3	0,50

As figuras 5.12 (a) e (b) mostram a distribuição de pressão ao longo do microcanal da válvula de sucção. Percebe-se que a distribuição de pressão é praticamente linear para pequenas diferenças de pressão Δp , mas se torna não linear à medida que os valores de Δp aumentam. Para a folga de $0,2 \mu\text{m}$, em todas as condições, a pressão na saída da válvula atinge o valor da pressão da câmara de sucção, indicando que o escoamento é subsônico. Para a folga de $3,0 \mu\text{m}$, nas condições 1 e 2 em que a diferença de pressão é maior, a pressão na saída do microcanal é maior do que a pressão na câmara de sucção, indicando que o escoamento está bloqueado.

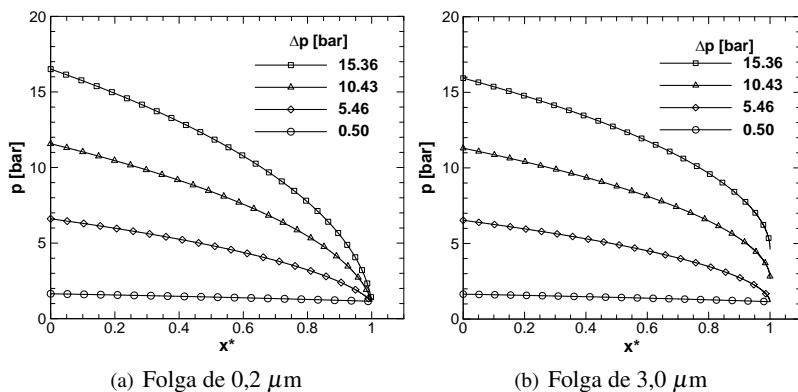


Figura 5.12 – Variação de pressão ao longo do microcanal da válvula de sucção.

A maior aceleração e, assim, a maior queda de pressão na entrada do canal são verificadas para a folga de $3,0 \mu\text{m}$ e $\Delta p = 15,36$ bar, de forma similar ao observado anteriormente para a válvula de descarga. Para esta condição de escoamento, verifica-se também uma variação mais abrupta na pressão no final do microcanal.

Quando o escoamento está bloqueado na folga da válvula de descarga, a variação das propriedades ao longo do microcanal e a vazão permanecem as mesmas, independente do valor da pressão no cilindro. No entanto, isto não ocorre para condição de escoamento bloqueado na válvula de sucção e as propriedades ao longo do microcanal e a vazão continuam variando de acordo com a condição de pressão e temperatura no cilindro.

As figuras 5.13 e 5.14 mostram respectivamente, a variação de densidade e a variação do número de Mach ao longo do canal. Assim como a distribuição de pressão, a variação de densidade para as condições analisadas segue a mesma tendência. O aumento de Δp , devido à elevação da pressão na câmara de compressão, faz com que o número de Mach do escoamento também au-

mente. O aumento da folga também provoca o mesmo efeito. Para a folga de $0,2 \mu\text{m}$ o escoamento é subsônico e, da mesma forma como observado na válvula de descarga, uma aceleração elevada ocorre na porção final do comprimento do microcanal. Para a folga de $3,0 \mu\text{m}$ o escoamento atinge a velocidade sônica para as condições dos dois maiores níveis de Δp . Observou-se também que a variação do número de Mach ao longo do microcanal é mais gradual quando os valores de folga aumentam.

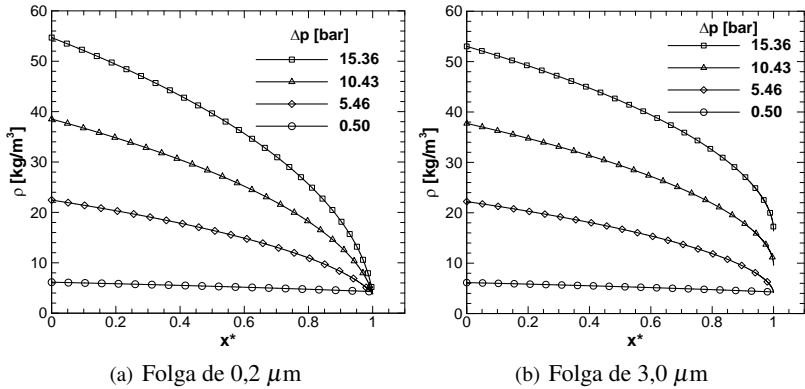


Figura 5.13 – Variação de densidade ao longo do microcanal da válvula de sucção.

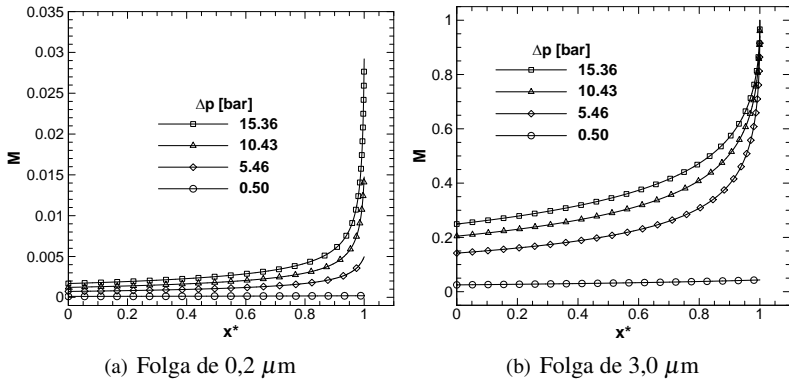


Figura 5.14 – Variação do número de Mach ao longo do microcanal da válvula de sucção.

Nas figuras 5.15 (a) e (b) observa-se a variação de temperatura para as

folgas de $0,2 \mu\text{m}$ e $3,0 \mu\text{m}$. Como observado anteriormente para a descarga, para folga de $0,2 \mu\text{m}$ a temperatura é praticamente constante. Ao aumentar-se a folga, o efeito da queda na temperatura torna-se mais evidente, pois o número de Mach para o escoamento é maior ao longo de todo o comprimento do microcanal. Para folga de $3,0 \mu\text{m}$, a condição 2 ($\Delta p = 10.43 \text{ bar}$) apresenta uma queda de temperatura de aproximadamente 26 K .

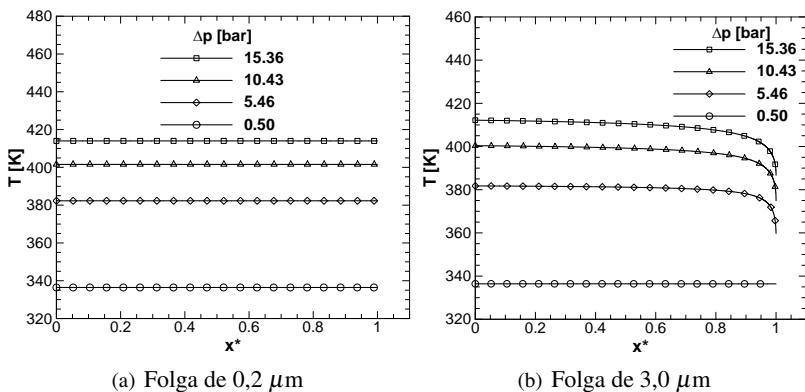


Figura 5.15 – Variação da temperatura ao longo do microcanal da válvula de sucção.

Nas figuras 5.16 (a) e (b) observa-se a variação linear do número de Reynolds ao longo do microcanal, a qual pode ser explicada com os mesmos argumentos adotados na análise do escoamento na válvula de descarga. Novamente, a transição para o regime turbulento do escoamento ainda é controversa na literatura e embora o escoamento possa estar na região de transição para a maior folga e maiores valores de Δp , a formulação de escoamento laminar foi mantida nas simulações. A hipótese de viscosidade constante também é adequada pois uma variação máxima de $9,0\%$ foi encontrada.

Finalmente a variação do número de Knudsen para o escoamento pode ser verificado nas figuras 5.17 (a) e (b). Para folga de $0,2 \mu\text{m}$, percebe-se que o escoamento ocorre com deslizamento na parede para valores reduzidos de Δp . Com o aumento de Δp , a condição de escorregamento surge somente no trecho final do microcanal. O aumento da folga para $3,0 \mu\text{m}$ faz com que o número de Knudsen diminua de forma a fazer com que o escoamento ocorra totalmente na região do contínuo.

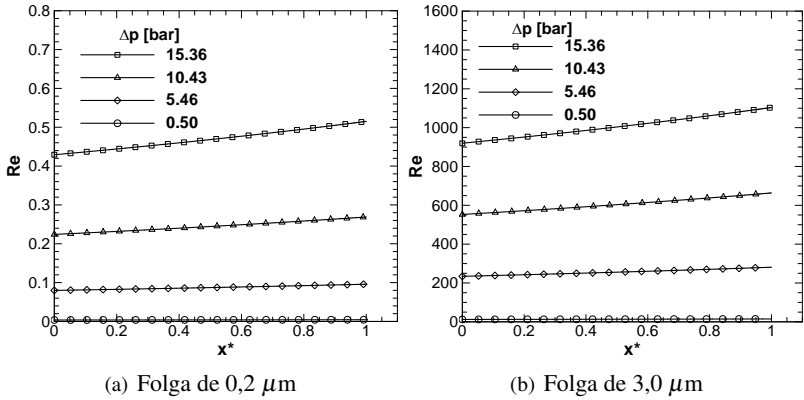


Figura 5.16 – Variação do número de Reynolds ao longo do microcanal da válvula de sucção.

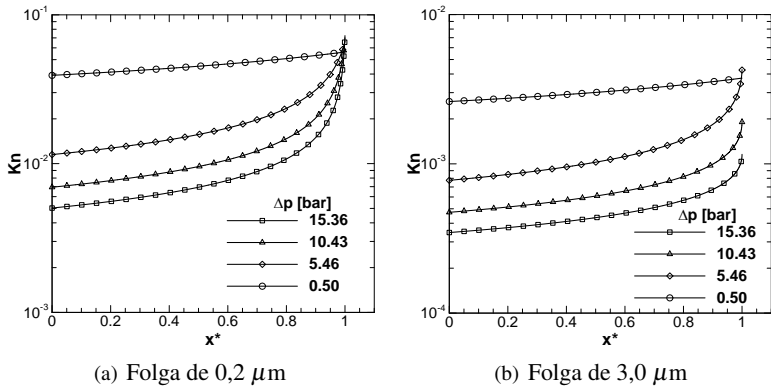


Figura 5.17 – Variação do número de Knudsen ao longo do microcanal da válvula de sucção.

5.5 Vazamento Considerando a Flexão da Palheta

De acordo com o exposto na seção 4.3.1, a geometria da válvula utilizada na presente análise pode ser analisada através da teoria de placas finas com pequenas deformações. Nesta seção são mostrados resultados do modelo de flexão da válvula.

As linhas elásticas que representam a deformação das superfícies das

válvulas de sucção e de descarga são mostradas na figura 5.18 para as solicitações mais críticas a que são submetidas durante o ciclo de compressão. Os níveis do carregamento de pressão sobre as válvulas de descarga e sucção são iguais a 13,8 e 15,4 bar, respectivamente, justificando assim a maior flexão da válvula de sucção, conforme mostra a figura 5.18.

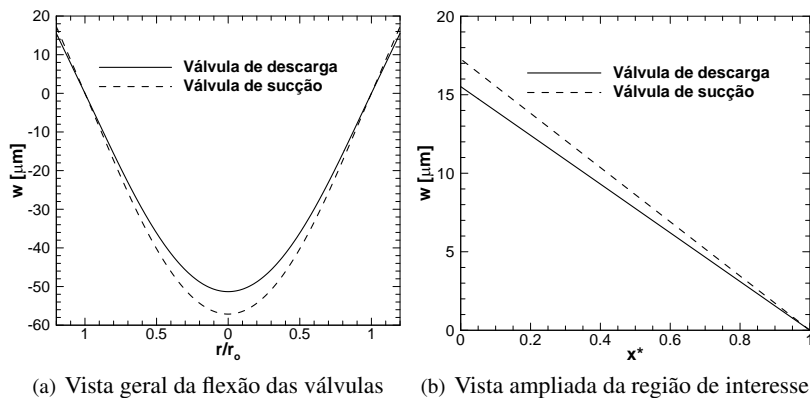


Figura 5.18 – Flexão das válvulas de descarga e sucção na condição de máxima diferença de pressão atuando.

O valor nulo de flexão na figura 5.18 (a) representa a quina do orifício na qual a superfície do disco se apoia. A flexão na região do canal formado entre a palheta e o assento ($r/r_o \geq 1$) parece ser pequena, mas altera a folga de forma significativa. Por exemplo, conforme mostra a vista ampliada do canal na figura 5.18 (b), o valor de flexão na posição mais extrema da válvula de sucção chega a ser 17,0 μm .

Com a linha elástica calculada, pode-se verificar se o modelo adotado de placa circular rígida é realmente adequado. Os valores de w_{max}/t para as válvulas de descarga e sucção na solicitação mais crítica ao longo do ciclo de compressão são iguais a 0,34 e 0,38, respectivamente. Isto significa que as forças de membrana também deveriam ser levadas em consideração no modelo, porque w_{max}/t é maior do que o valor limite de 0,3. No entanto, como os valores de w_{max}/t não excedem de forma demasiada este limite, o modelo de circular rígida foi mantido. Cabe ressaltar que se as forças de membrana fossem incluídas no modelo, a flexão da válvula seria menor e, conseqüentemente, o vazamento seria menor. Portanto, a estimativa de vazamento obtida no presente trabalho é um tanto superestimada e, assim, conservadora.

De forma geral, o efeito da flexão da palheta é aumentar as derivadas de funções das equações do modelo que descrevem o escoamento, descri-

tas na seção 4.1.2. Quando as válvulas são submetidas a uma diferença de pressão pequena, a flexão também é pequena, porém mesmo assim afeta o escoamento. À medida que as válvulas são mais solicitadas, o efeito de flexão se torna cada vez mais evidente sobre a variação das propriedades do escoamento.

A comparação entre os resultados dos modelos com e sem a inclusão da flexão da palheta foi inicialmente realizada para o número de Mach ao longo do microcanal, conforme mostra a figura 5.19. Utilizou-se uma folga de $0,2 \mu\text{m}$ entre a válvula e o assento de forma a evidenciar ainda mais o efeito de variação de área devido à flexão da palheta.

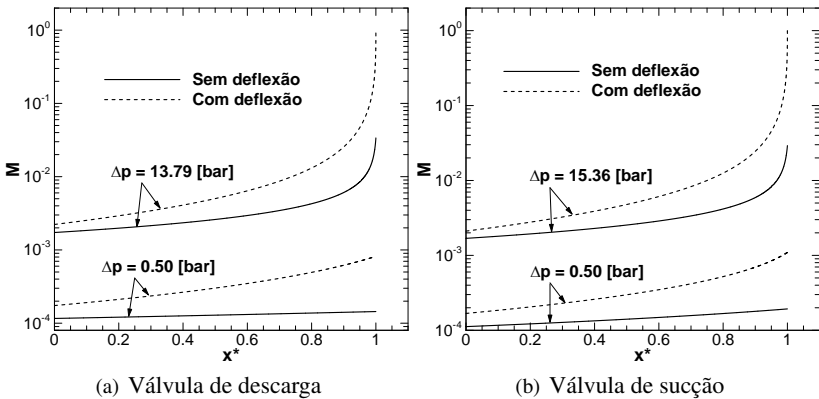


Figura 5.19 – Comparação da variação do número de Mach ao longo do microcanal para os modelos com e sem flexão da palheta. A folga de $0,2 \mu\text{m}$ foi utilizada.

Observa-se na figura 5.19 que o efeito da flexão da palheta é aumentar o número de Mach ao longo do microcanal, tanto na válvula de descarga, 5.19 (a), como na válvula de sucção, 5.19 (b). No caso de elevados níveis de diferença de pressão Δp , o escoamento atinge a condição sônica na saída do microcanal quando a flexão é incluída, enquanto que não chega a alcançar $M = 0,1$ se a flexão é desprezada. Este aumento de velocidade se deve à menor restrição ao escoamento associada ao aumento da seção transversal, na entrada do microcanal, originada pela flexão da palheta. Este efeito do aumento da área de passagem devido à flexão da palheta é menor quando a folga de quina δ_q é aumentada, resultando em diferenças menores sobre as propriedades do escoamento.

A figura 5.20 apresenta uma comparação entre as distribuições de pressão ao longo do microcanal obtidas com o modelo incluindo ou não a flexão

da válvula de descarga. As figuras 5.20 (a) e (b) apresentam os resultados referentes às condições 1 e 4 da tabela 5.2, as quais representam condições de diferença de pressão baixa e elevada ($\Delta p = 0,50$ e $13,79$ bar), respectivamente. Em ambos os casos a folga de $0,2\mu\text{m}$ foi utilizada.

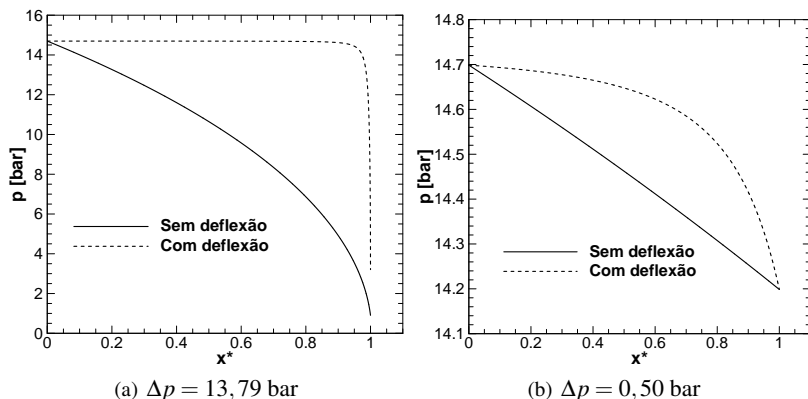


Figura 5.20 – Comparação da variação da pressão ao longo do microcanal, na válvula de descarga, para os modelos com e sem flexão da palheta. A folga de $0,2\mu\text{m}$ foi utilizada.

Percebe-se que, quando a flexão é incluída, a variação de pressão para a condição 1 ($\Delta p = 13,79$ bar) ocorre quase que exclusivamente nos últimos 5% do comprimento do microcanal. O efeito do escoamento bloqueado, que já foi observado na figura 5.19 (a), também é caracterizado na figura 5.20 (a), uma vez que a presença da flexão faz com que a pressão na saída não alcance o valor da pressão na câmara de compressão. Por outro lado, quando a flexão não é considerada, o modelo prevê a condição de escoamento subsônico na saída.

Para a condição 4 ($\Delta p = 0,50$ bar) a variação de pressão no microcanal é linear quando se despreza a flexão. Quando a flexão é introduzida no modelo, o aumento da área de passagem do escoamento afasta a distribuição de pressão de uma variação linear. Como se observa na figura 5.20 (b), a queda de pressão é relativamente baixa na primeira metade do microcanal e se acentua na segunda metade.

As distribuições de pressão na figura 5.20 justificam o carregamento de pressão assumido para avaliar a flexão da palheta. Ou seja, é mais apropriado aplicar um carregamento uniforme até a posição do raio do orifício do que até a posição do raio do disco (palheta). De fato, o carregamento de pressão na parte superior da válvula na região $r_o \leq r \leq r_d$ é cancelado pelo carregamento

de pressão na superfície inferior originado pelo escoamento.

Para valores maiores de folga, as diferenças entre as distribuições de pressão não são tão acentuadas devido ao menor efeito de variação de área. Os efeitos da flexão detalhados nesta seção para a válvula de descarga ocorrem também de forma similar para a válvula de sucção e, assim, não serão apresentados.

A partir da análise dos resultados de variação da densidade ao longo do microcanal para a folga de $0,2 \mu\text{m}$, mostrados na figura 5.21, observam-se efeitos consistentes com a variação de pressão.

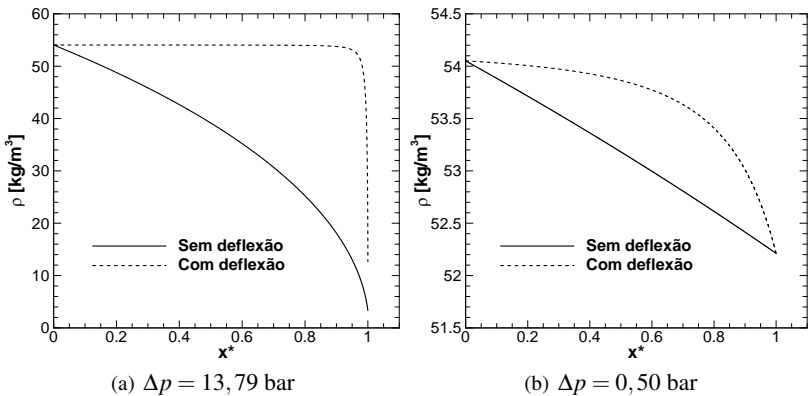


Figura 5.21 – Comparação da variação da densidade ao longo do microcanal, na válvula de descarga, para os modelos com e sem flexão da palheta. A folga de $0,2 \mu\text{m}$ foi utilizada.

A figura 5.22 mostra a variação de temperatura ao longo do microcanal para a condição mais extrema de diferença de pressão e folga de $0,2 \mu\text{m}$. Na válvula de descarga, figura 5.22 (a), a variação total de temperatura foi de aproximadamente 26 K, enquanto que na válvula de sucção, figura 5.22 (b), a variação foi de 28 K. Assim como nas análises anteriores, a queda de temperatura devido à flexão da palheta se concentra no trecho final do microcanal.

Na presença de baixos valores de diferença de pressão, a variação de temperatura não é significativa para a faixa de folgas analisadas no trabalho. De fato, a queda de temperatura passa a ser mais evidente quando a diferença de pressão aumenta. Observou-se que a queda de temperatura é mais gradual para valores maiores de folga, porém esta conclusão não está mostrada graficamente.

Resultados para o número de Reynolds do escoamento na presença de

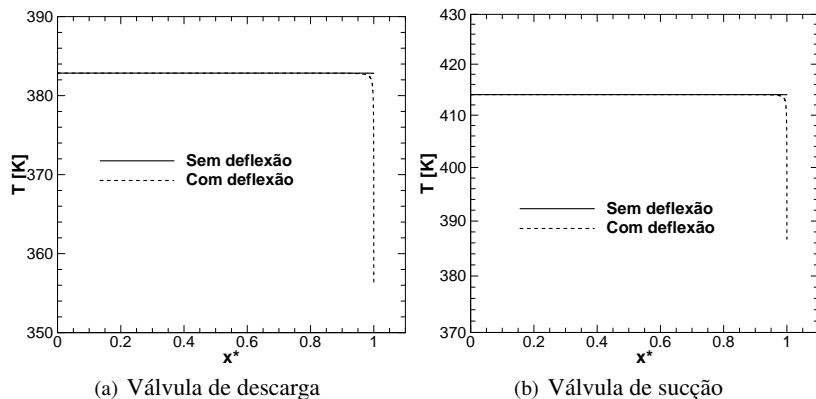


Figura 5.22 – Comparação da variação da temperatura ao longo do microcanal para os modelos com e sem flexão da palheta. A folga de $0,2 \mu\text{m}$ foi utilizada.

flexão das válvulas de descarga e de sucção mostram uma variação aproximadamente linear, também observada sem a inclusão da flexão, entretanto com um coeficiente angular maior. O número de Reynolds alcança maiores valores devido à menor restrição ao escoamento associada à maior área de passagem. Embora não mostrado aqui o valor máximo de Reynolds é igual a 2200 e ocorre para $\delta_q = 3,0 \mu\text{m}$ e $\Delta p = 16,51 \text{ bar}$ no microcanal da válvula de sucção.

A figura 5.23 apresenta a variação do número de Knudsen para as condições de baixa e alta diferença de pressão, $\Delta p = 0,50 \text{ bar}$ e $13,79 \text{ bar}$, para a válvula de descarga e, $\Delta p = 0,50 \text{ bar}$ e $15,36 \text{ bar}$, para a válvula de sucção. De um modo geral, o efeito de flexão da válvula tende diminuir o número de Knudsen, pois a folga aumenta, minimizando o efeito do deslizamento do escoamento junto à parede. A diferença absoluta entre os resultados de Kn obtidos dos modelos com e sem a flexão da palheta aumenta à medida que a diferença de pressão Δp aumenta. A região crítica de escorregamento ($Kn > 10^{-2}$) diminui e acaba se restringindo ao trecho final do microcanal.

A figura 5.24 apresenta resultados de vazamento na válvula de descarga em função da razão de pressão entre as câmaras de compressão e de descarga, p_{cil}/p_{cd} . Como a pressão na câmara de descarga é mantida constante no modelo, os diferentes valores de p_{cil}/p_{cd} se originam da variação da pressão na câmara de compressão (cilindro). Como esperado, o vazamento aumenta com a redução da pressão no cilindro, a qual aumenta a diferença de pressão Δp , e com a flexão da palheta, devido à menor restrição ao escoamento. Observa-se

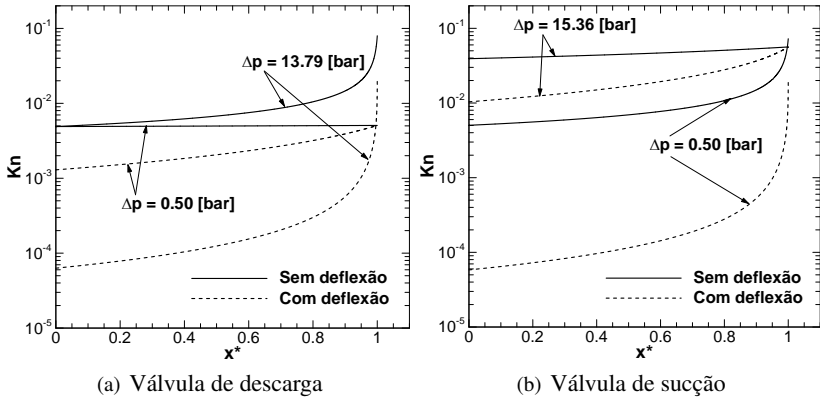


Figura 5.23 – Comparação da variação do número de Knudsen ao longo do microcanal para os modelos com e sem flexão da palheta. A folga de $0,2 \mu\text{m}$ foi utilizada.

que a diferença entre os resultados dos modelos com e sem a flexão diminui quando $p_{cil}/p_{cd} \rightarrow 1$ e quando se aumenta o valor da folga de quina, δ_q , porque a variação percentual de área é menor.

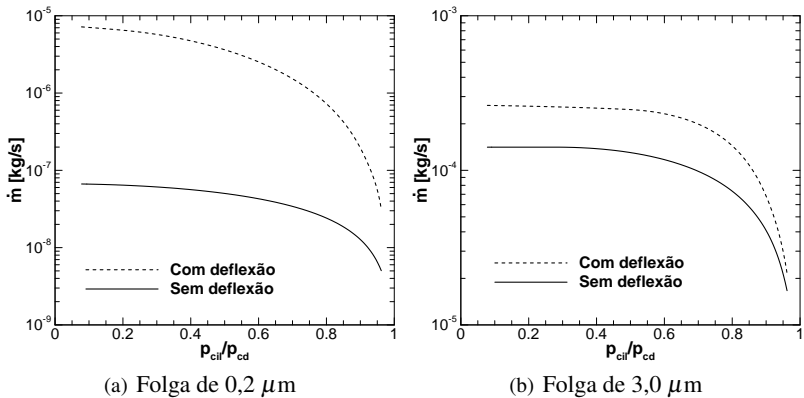


Figura 5.24 – Variação do vazamento na válvula de descarga com o aumento da pressão no cilindro.

A figura 5.25 mostra o vazamento na válvula de sucção em função da razão de pressão entre as câmaras de sucção e de compressão (cilindro), p_{cs}/p_{cil} . Neste caso, a pressão no cilindro varia e a pressão na câmara de suc-

ção é mantida constante. Neste caso, o vazamento aumenta com o aumento da pressão no cilindro. Os demais comentários realizados para a válvula de descarga são também válidos para a válvula de sucção.

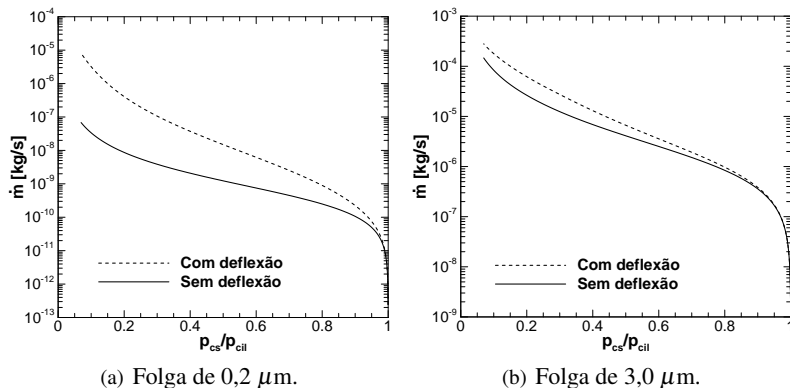


Figura 5.25 – Variação do vazamento na válvula de descarga com a diminuição da pressão no cilindro.

Considerando que a flexão da palheta influencia de forma significativa o vazamento nas válvulas de sucção e de descarga, todas as análises a partir deste ponto são realizadas para resultados do modelo com a incorporação deste aspecto.

5.6 Influência da Condição de Escorregamento

Esta seção objetiva avaliar a influência da condição de escorregamento sobre o escoamento e o vazamento em ambas as válvulas. Primeiramente, avalia-se o número de Poiseuille ao longo do microcanal com a expressão (4.37), que considera o escorregamento juntamente com o rastejo térmico. Como o modelo adotado para estimar a vazão mássica é unidimensional, não é possível se obter exatamente a derivada da temperatura do escoamento junto à parede. Assim, uma estimativa desta derivada foi realizada através da temperatura média do fluido, conforme indicado na seção 4.2.1.

A figura 5.26 mostra a variação do número de Poiseuille ao longo do microcanal para a condição de máxima diferença de pressão nas válvulas, considerando folgas de $0,2$ e $3,0 \mu\text{m}$.

O aumento do número de Poiseuille na porção final do microcanal é justificado pela queda abrupta da temperatura do escoamento naquele trecho.

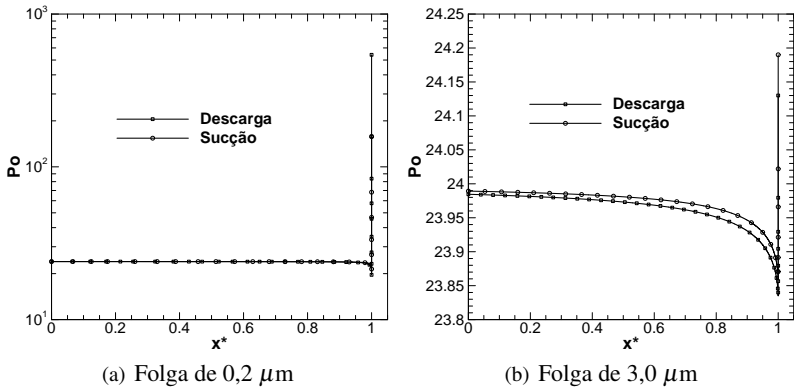


Figura 5.26 – Variação do número de Poiseuille ao longo do microcanal para as condições de máxima diferença de pressão nas quais as válvulas estão submetidas no ciclo de compressão.

Diminuindo-se o valor da folga, conforme mostra a figura 5.26 (a), este efeito é mais acentuado e o número de Poiseuille alcança os valores de 540 e 160 para as válvulas de descarga e de sucção, respectivamente.

A figura 5.26 mostra que o número de Poiseuille tende a infinito ao se reduzir ainda mais o valor da folga. Para evitar esta inconsistência, optou-se por desprezar o termo relativo ao rastejo térmico. Esta é uma modificação que não afeta o resultado da vazão mássica no microcanal, pois o coeficiente de atrito médio ao longo do microcanal não é influenciado de maneira significativa.

De fato, considerando a maior solicitação, maior Δp , e folga de $0,2\mu\text{m}$, a variação na vazão mássica é inferior a 0,1% quando se despreza o termo de rastejo térmico na correlação de fator de atrito, equação (4.36).

Embora tenha se concluído que o efeito do rastejo térmico não é significativo no modelo adotado, uma análise mais aprofundada deveria ser realizada em estudos futuros. Por exemplo, a simulação do escoamento bidimensional no microcanal permitiria avaliar de uma maneira mais assertiva a relevância deste efeito.

As figuras 5.27 (a) e (b) mostram o aumento da vazão mássica nas válvulas de descarga e de sucção devido ao efeito de escorregamento do escoamento nas paredes do microcanal, considerando as condições de máxima e mínima diferença de pressão Δp . Percebe-se que à medida que a folga aumenta, o aumento percentual da vazão mássica é diminuído, pois o escoamento junto à parede torna-se menos rarefeito e assim o escorregamento passa

a ser menos significante. De forma geral, o aumento na vazão mássica é maior para baixas diferenças de pressão, como mostram as linhas tracejadas nas figuras. Uma exceção ocorre na válvula de descarga quando os valores de folga estão abaixo de $0,2 \mu\text{m}$. Comparando-se as figuras 5.27 (a) e (b), observa-se que o escorregamento é mais crítico para a válvula de sucção, onde a vazão mássica pode aumentar em até 75% para folga de $0,1 \mu\text{m}$ e baixa diferença de pressão, $\Delta p = 0,50 \text{ bar}$.

Deve ser mencionado que quanto mais rígida for a válvula, menor será a deflexão e maior será o efeito de escorregamento.

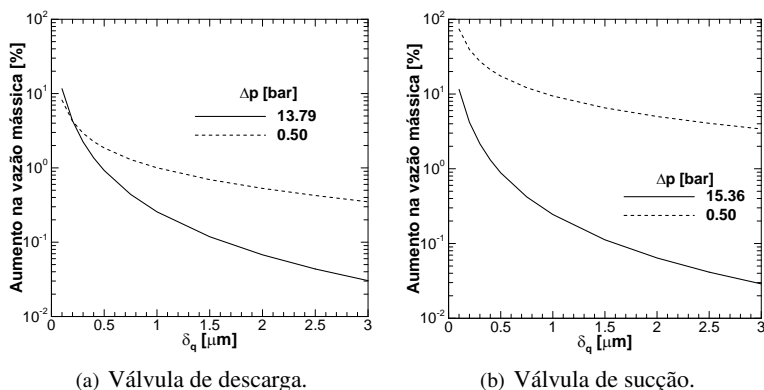


Figura 5.27 – Aumento da vazão mássica devido ao escorregamento do escoamento em contato com a parede.

O caso da figura 5.27 (b), onde o efeito de escorregamento é mais evidente, foi escolhido para analisar as variações das propriedades do escoamento ao longo do microcanal. Inicialmente, as figuras 5.28 (a) e (b) mostram que os números de Mach e de Reynolds ao longo do microcanal aumentam na presença de escorregamento, pelo fato da resistência por atrito ao escoamento diminuir.

As figuras 5.29 (a) e (b) apresentam a variação de pressão e densidade, respectivamente, ficando claro que a condição de escorregamento reduz os gradientes de ambas as quantidades ao longo do canal.

Portanto, os efeitos de rarefação reduzem a curvatura da distribuição de pressão e densidade no microcanal.

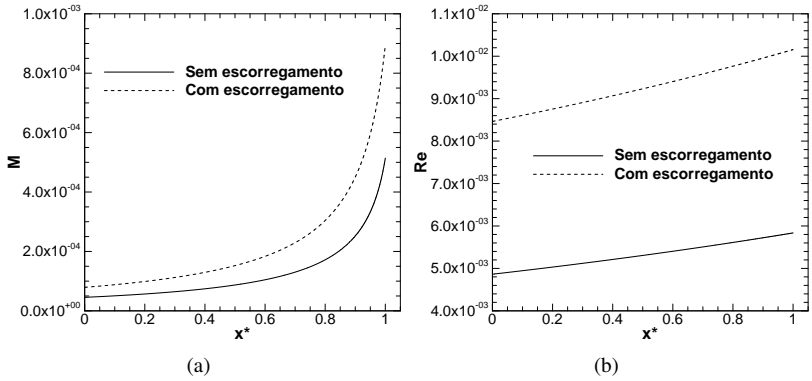


Figura 5.28 – Comparação das variações do número de Mach (a) e do número de Reynolds (b) ao longo do microcanal para a válvula de sucção sujeita a condição de uma baixa diferença de pressão dos modelos com e sem escorregamento. A folga utilizada foi de $0,1 \mu\text{m}$.

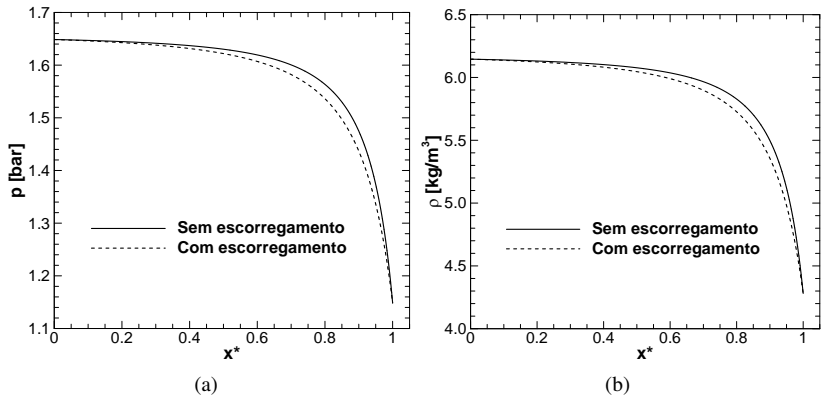


Figura 5.29 – Variação de pressão (a) e densidade (b) ao longo do microcanal para a válvula de sucção sujeita a condição de baixa diferença de pressão para os modelos com e sem escorregamento. A folga utilizada foi de $0,1 \mu\text{m}$.

5.7 Influência de parâmetros geométricos da válvula

A influência de parâmetros geométricos da válvula sobre o vazamento foi investigada através da variação da espessura da válvula, t , e da razão entre

os raios do disco (palheta) e do orifício, r_d/r_o , considerando uma folga de $0,5 \mu\text{m}$. Este valor foi adotado apenas para uma análise qualitativa.

Considerando $r_d/r_o = 1,2$, a figura 5.30 mostra que o vazamento é menor em válvulas mais espessas, pois a flexão é menor e, assim, o mesmo acontecendo com área de passagem do escoamento, reduzindo assim a vazão mássica.

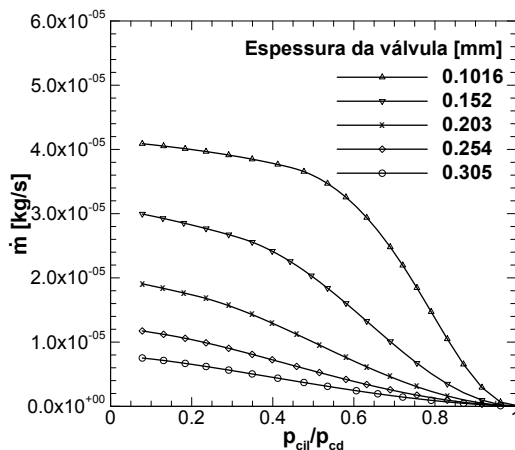


Figura 5.30 – Análise da influência de diferentes valores de espessura da válvula sobre o vazamento na válvula de descarga.

Por outro lado, assumindo folga de $0,5 \mu\text{m}$ e espessura da válvula de $0,152 \text{ mm}$, verifica-se na região ampliada da figura 5.31 que há um aumento, embora insignificante, na vazão quando a razão entre os raios do disco e do orifício é diminuída.

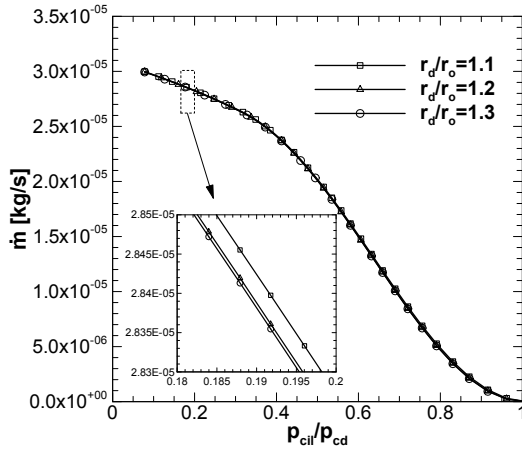


Figura 5.31 – Análise da influência de diferentes valores de razão r_d/r_o sobre o vazamento na válvula de descarga.

5.8 Efeito do Vazamento sobre a Eficiência do Compressor

Como já foi mencionado, o vazamento nas válvulas deve ser calculado somente nos períodos em que as válvulas estão fechadas. A figura 5.32 apresenta os períodos do ciclo de compressão em que ocorre o vazamento nas válvulas de descarga e de sucção, representados por linhas cheias.

Observa-se que a válvula de sucção permanece um menor período do ciclo submetida a vazamento em relação à válvula de descarga. Além disto, valores elevados de diferença de pressão Δp atuam sobre a válvula de descarga fechada durante um maior intervalo de tempo. Esses dois aspectos atuam no sentido de tornar a válvula de descarga mais crítica a vazamentos.

O vazamento através das válvulas de descarga e sucção em função do ângulo de manivela são apresentados na figura 5.33 para três valores de folga, δ_q . Os ângulos de manivela $\omega t = 0^\circ$ (ou 360°) e $\omega t = 180^\circ$ representam os pontos mortos inferior e superior, respectivamente. No período em que as válvulas estão abertas, a vazão mássica se dá por fluxo direto, ou refluxo, e o vazamento é considerado nulo.

Como esperado, observa-se que quanto maior a dimensão da folga, menor é a restrição ao escoamento e maior é o vazamento. Percebe-se também que o vazamento máximo na válvula de descarga ocorre no ponto morto inferior e para a válvula de sucção isto acontece no ponto morto superior, pois são

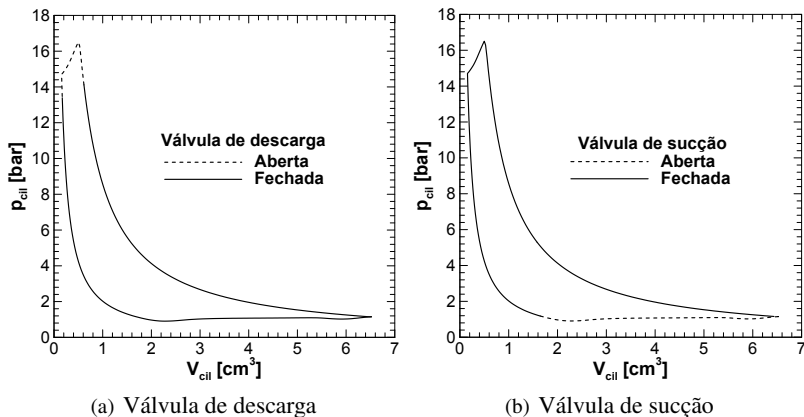


Figura 5.32 – Diagrama pressão-volume de um ciclo de compressão de um compressor de refrigeração ilustrando os períodos de abertura e fechamento das válvulas.

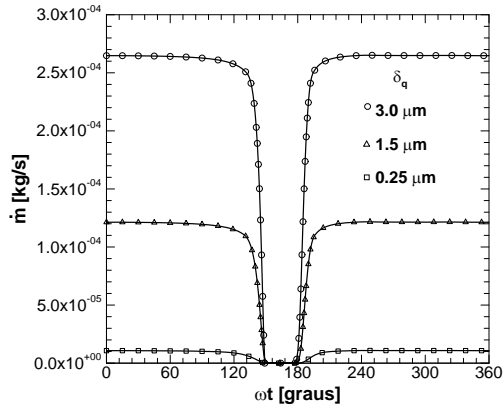
as posições do pistão que fornecem as máximas diferenças de pressão através das respectivas válvulas.

O vazamento total pode ser avaliado pela integração da área sob as curvas. Pela figura 5.33 também se pode concluir que o vazamento total na válvula de descarga é maior do que aquele na válvula de sucção durante o ciclo de compressão.

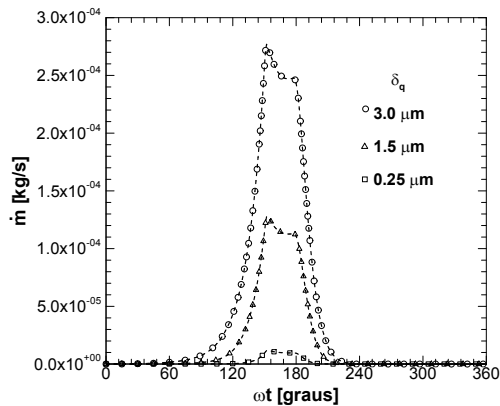
Para verificar a validade da hipótese de escoamento em regime laminar adotada na formulação do modelo, resultados para o número de Reynolds na saída das válvulas são apresentados em função do ângulo de manivela na figura 5.34. Para as geometrias das válvulas em estudo, a hipótese de regime laminar pode ser aceitável para valores de folga de até $3,0 \mu\text{m}$, pois como já foi abordado essa questão ainda é bastante discutida na literatura.

A figura 5.35 mostra o número de Mach na saída das válvulas de descarga e de sucção em função do ângulo de manivela. Em ambas as válvulas, observa-se a ocorrência de escoamento bloqueado, porém por um período maior na válvula de descarga, já que a mesma é submetida a valores de Δp elevados durante um período maior do ciclo de compressão. Também se observa que quanto maior a dimensão da folga, a condição sônica é alcançada mais facilmente. Naturalmente a condição sônica pode não ser alcançada em folgas menores.

Na figura 5.36, pode-se observar as perdas de eficiência volumétrica por vazamento nas válvulas de descarga ($\epsilon_{v, vdes}$) e sucção ($\epsilon_{v, vsuc}$) em função da folga existente entre válvula e assento.



(a) Válvula de descarga

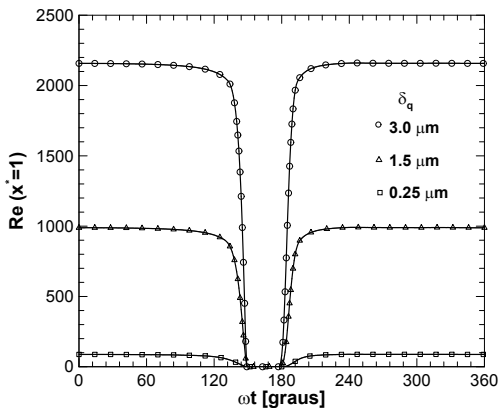


(b) Válvula de sucção

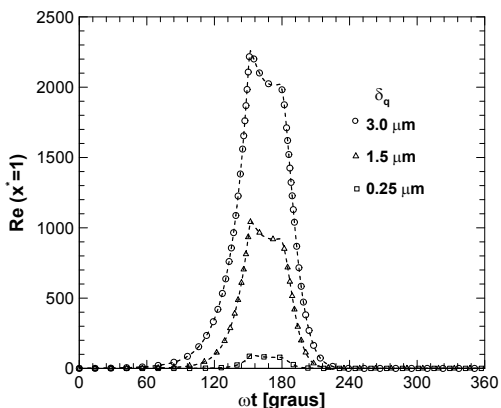
Figura 5.33 – Vazamento através das válvulas ao longo do ciclo de compressão para três valores de folga.

Em ambas as válvulas observa-se um aumento não linear das perdas para folgas até $0,5 \mu\text{m}$ e em seguida a curva segue uma variação praticamente linear. Isto pode ser justificado pela predominância de escoamento bloqueado ao longo do ciclo de compressão quando a folga entre a válvula e o assento é aumentada. Para valores de folgas iguais entre válvula e assento, conclui-se que o vazamento na válvula de descarga origina perdas quase cinco vezes maiores do que na válvula de sucção.

A figura 5.37 apresenta a vazão mássica na válvula de sucção em função



(a) Válvula de descarga



(b) Válvula de sucção

Figura 5.34 – Número de Reynolds na saída do microcanal para três valores de folga ao longo do ciclo de compressão.

do ângulo de manivela, sem vazamento e com vazamento em uma folga de $3.0 \mu m$. Além do fluxo normal positivo que ocorre quando a válvula está aberta no período ($240^\circ < \omega t < 350^\circ$), existe também refluxo de gás do cilindro para a câmara de sucção quando o pistão está próximo do ponto morto inferior ($350^\circ < \omega t < 13^\circ$), caracterizado por uma vazão negativa. Por outro lado, os valores negativos de vazão no intervalo $13^\circ < \omega t < 240^\circ$ representam o vazamento na válvula no período em que a válvula se encontra fechada.

Dois aspectos chamam atenção na figura 5.37. O primeiro é que a massa

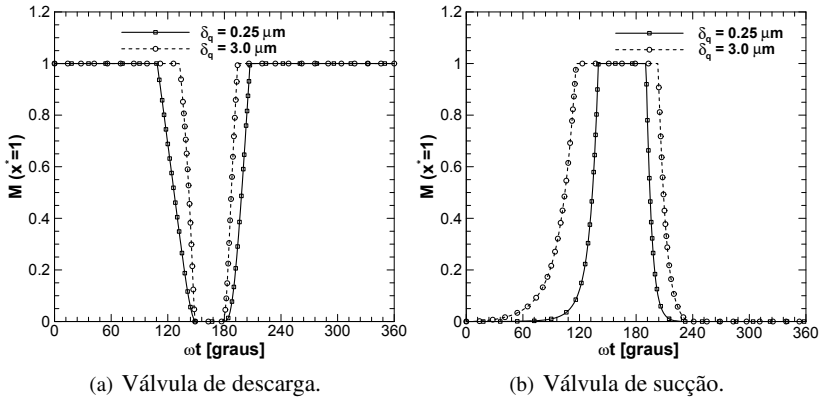


Figura 5.35 – Número de Mach na saída das válvulas ao longo do ciclo de compressão para dois valores de folga.

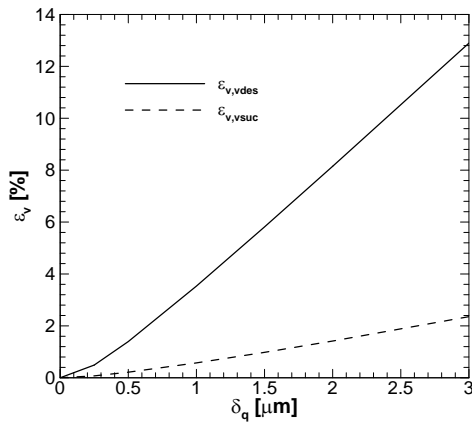


Figura 5.36 – Perda de eficiência por vazamento nas válvulas, ao longo do ciclo de compressão para diferentes valores de folga entre válvula e assento.

de fluido refrigerante succionada diminui e o segundo é que a vazão mássica por refluxo aumenta. Estes dois efeitos combinados resultam no menor enchimento da câmara de compressão durante o ciclo.

A mesma análise realizada para a válvula de sucção pode ser estendida à válvula de descarga a partir dos resultados mostrados na figura 5.38.

Primeiramente, a análise é realizada através da vista ampliada da figura

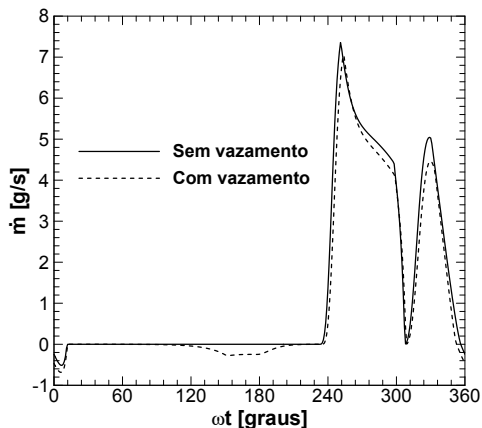
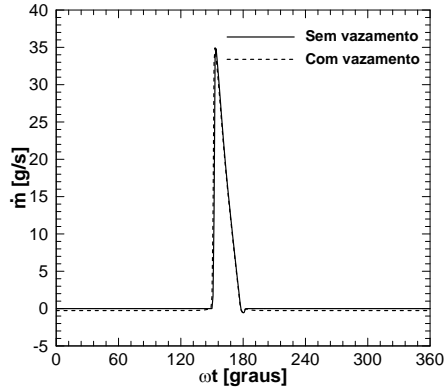


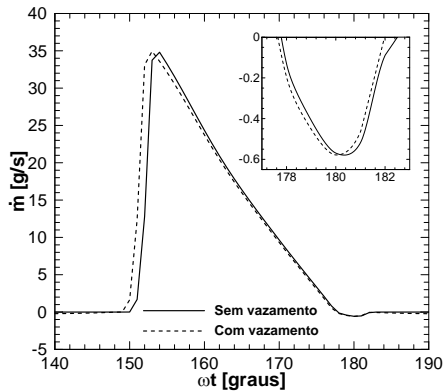
Figura 5.37 – Comparação da vazão mássica na válvula de sucção de um compressor sem vazamento nas válvulas e com vazamento, onde o valor da folga entre a válvula e assento é de $3,0\mu\text{m}$.

5.38 (b). Observa-se que o refluxo na descarga, caracterizado pelos valores negativos de vazão mássica, ocorre próximo do ponto morto superior ($178^\circ < \omega t < 182^\circ$), praticamente não é afetado pela presença de vazamento no compressor. O vazamento pode ser caracterizado pelos valores de vazão mássica negativos situados no intervalo $\omega t < 149^\circ$ e $\omega t > 182^\circ$ em que a válvula se encontra fechada, conforme mostra a figura 5.38 (a). Outra observação importante na figura 5.38 (b) é que a área limitada pela curva de linha tracejada e a reta $\dot{m}(\omega t) = 0$, é maior do que a referente curva de linha cheia. Isto quer dizer que a massa total de gás descarregada pela válvula aumenta devido ao vazamento nas válvulas, já que existe um enchimento extra da câmara de compressão com gás proveniente da câmara de descarga. Apesar desse aumento aparente na vazão do compressor, uma porção desse gás descarregado acaba voltando devido ao vazamento pela válvula de descarga.

O efeito do vazamento nas válvulas sobre o diagrama pressão-volume pode ser visualizado na figura 5.39. Com o objetivo de se avaliar o efeito sobre cada uma das válvulas separadamente, considerou-se primeiramente apenas o vazamento na válvula de descarga, com a válvula de sucção considerada perfeitamente vedada, conforme mostra a figura 5.39 (a). Posteriormente, considerou-se apenas o vazamento na válvula de sucção, uma situação representada na figura 5.39 (b). Utilizou-se uma folga de $3,0\mu\text{m}$ em as ambas análises a fim de tornar mais evidente o efeito do vazamento sobre o diagrama. Observa-se que o vazamento na válvula de descarga desloca as



(a) Vista geral.

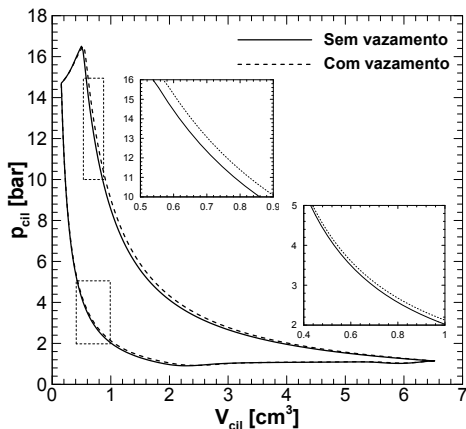


(b) Vista ampliada.

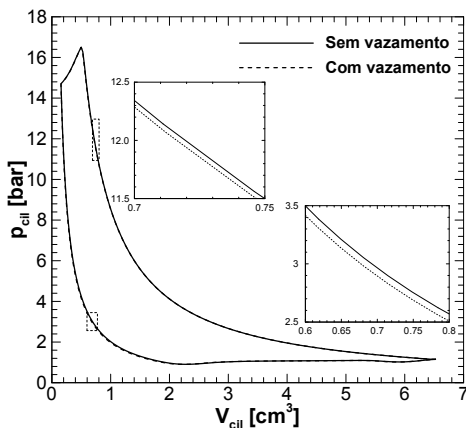
Figura 5.38 – Comparação da vazão mássica na válvula de descarga de um compressor sem vazamento nas válvulas e com vazamento, onde o valor da folga entre a válvula e assento é de $3,0\mu\text{m}$.

curvas de expansão e compressão para direita, ou seja, em cada posição ocupada pelo pistão no cilindro a pressão do gás será maior do que no caso sem vazamento nas válvulas. Por outro lado, o vazamento na válvula de sucção desloca as curvas de expansão e compressão para a esquerda. Neste caso, em cada posição ocupada pelo pistão no cilindro a pressão do gás será menor do que no caso sem vazamento nas válvulas.

O efeito do vazamento em ambas as válvulas simultaneamente no diagrama pressão-volume pode ser visualizado na figura 5.40. Tal compor-



(a) Válvula de sucção estanque e vazamento apenas na válvula de descarga



(b) Válvula de descarga estanque e vazamento apenas na válvula de sucção

Figura 5.39 – Efeito do vazamento em cada uma das válvulas sobre o digrama pressão-volume do compressor.

tamento aproxima-se ao da figura 5.39 (a) pois o vazamento na válvula de descarga é bem maior do que o da válvula de sucção.

Devido ao vazamento nas válvulas, o instante de abertura das válvulas durante o ciclo é também modificado. Na tabela 5.4, observa-se que o aumento da folga entre válvula e assento origina um adiantamento na abertura e

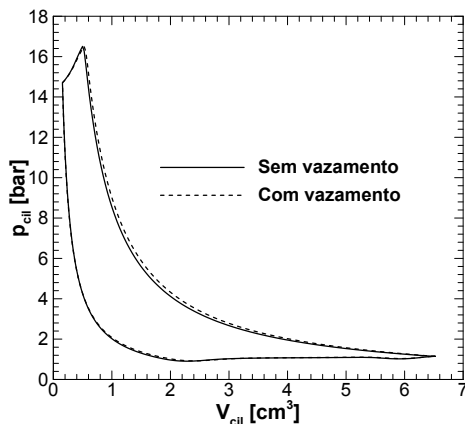


Figura 5.40 – Efeito do vazamento simultâneo nas válvulas de sucção e descarga sobre o diagrama pressão-volume.

no fechamento da válvula de descarga, enquanto que o efeito contrário ocorre na válvula de sucção.

Tabela 5.4 – Mudança no ângulo de manivela (ωt) correspondente a abertura e fechamento das válvulas em função da folga presente entre válvula e assento.

-	Válvula de Descarga		Válvula de Sucção	
	Abertura	Fechamento	Abertura	Fechamento
$\delta_q [\mu\text{m}]$				
0	149,96°	182,12°	232,84°	11,33°
1,0	149,68°	182,06°	233,29°	11,45°
2,0	149,29°	181,99°	233,96°	11,62°
3,0	148,97°	181,91°	234,63°	11,82°

Pode-se também verificar na tabela 5.5 que o aumento da folga ocasiona um aumento no intervalo de tempo em que a válvula de descarga permanece aberta. No caso da válvula de sucção, o intervalo de tempo diminui.

Por fim, a redução das eficiências volumétrica e isentrópica do compressor em função da folga podem ser observados nas figuras 5.41 e 5.42. A linha tracejada e a linha traço-ponto representam as perdas devido aos vazamentos na válvula de sucção e na válvula de descarga, respectivamente. O

efeito combinado de ambas as válvulas é representado pela linha contínua. Os resultados mostram que a eficiência volumétrica e a eficiência isentrópica são reduzidas em aproximadamente 15% e 22%, respectivamente, quando a folga é de 3,0 μm , sendo que o vazamento na válvula de descarga é bem mais crítico.

Tabela 5.5 – Intervalo de ângulo de manivela (ωt) correspondente ao instante em que as válvulas permanecem abertas durante o ciclo de compressão em função da folga presente entre válvula e assento.

Folga [μm]	Intervalo de abertura	
	Descarga	Sucção
0	32,16°	138,49°
1,0	32,38°	138,16°
2,0	32,70°	137,66°
3,0	32,94°	137,19°

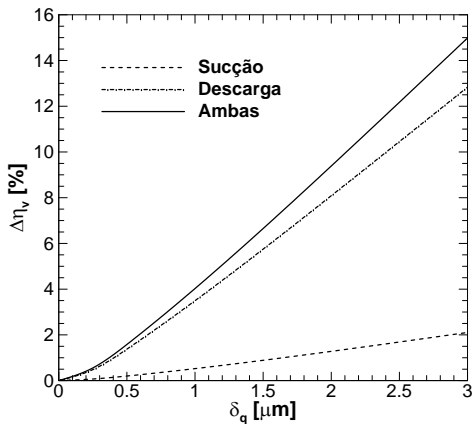


Figura 5.41 – Efeito do tamanho da folga na eficiência volumétrica do compressor.

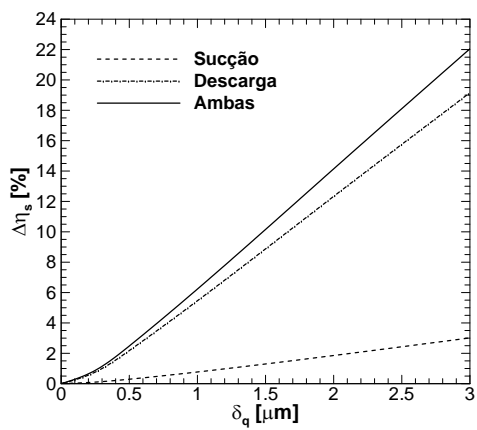


Figura 5.42 – Efeito do tamanho da folga na eficiência isentrópica do compressor.

6 *Conclusões*

6.1 *Considerações preliminares*

Esta dissertação apresentou um modelo para a análise de vazamentos de gás em válvulas automáticas de compressores que podem ocorrer devido a irregularidades geométricas do par palheta e assento. A revisão da literatura revelou poucos trabalhos sobre vazamento em válvulas de compressores, sendo que nenhum deles realiza uma análise detalhada do fenômeno.

O modelo desenvolvido considera o escoamento na folga entre a palheta da válvula e o assento. O contato não uniforme da superfície inferior da palheta com a quina do assento é assumido como uma folga equivalente na modelagem do escoamento. Devido ao carregamento de pressão a que as válvulas são submetidas durante o ciclo de compressão, a flexão da palheta foi avaliada por um modelo analítico da teoria de placas de tal forma a corrigir a geometria do escoamento. A modelagem matemática adotou uma formulação unidimensional para o escoamento em um microcanal convergente, incluindo efeitos de compressibilidade, atrito viscoso e rarefação do fluido junto a parede. A hipótese de escoamento adiabático foi assumida e demonstrou-se fisicamente mais consistente do que a hipótese isotérmica.

O modelo foi acoplado a um código de simulação de compressores previamente existente a fim de avaliar o efeito do vazamento nas válvulas de sucção e de descarga sobre o desempenho do compressor, caracterizado a partir de eficiências volumétrica e isentrópica. Algumas modificações nos balanços de massa e energia no interior da câmara de compressão foram realizados devido aos vazamentos nas válvulas.

Devido às não linearidades presentes nas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem propostas foi adotado o método de Runge-Kutta de quarta ordem para a solução. A variável independente, que era a coordenada espacial, foi mudada para a pressão, no caso de escoamento subsônico, e para o número de Mach, no caso de escoamento sônico. Essa mudança é justificada devido a singularidade presente nas equações e torna o método mais robusto.

6.2 Principais conclusões

Os resultados mostraram que a flexão da palheta aumenta significativamente o vazamento nas válvulas e, assim, deve ser incluída na análise. Além disto, verificou-se que o efeito de escorregamento do escoamento em contato com a parede se torna mais relevante à medida que a dimensão da folga diminui. Este efeito é mais crítico para a válvula de sucção nas condições de baixa diferença de pressão, onde a rarefação do gás junto a parede é maior e aumenta o vazamento em até 75% quando a folga é de $0,1 \mu\text{m}$.

A simulação do funcionamento do compressor com o modelo de vazamento acoplado indicou que o efeito de vazamento é mais crítico na válvula de descarga, quando as folgas em ambas as válvulas possuem a mesma geometria. Uma investigação dos parâmetros geométricos da válvula revelou que o vazamento é menor em válvulas mais espessas, devido à menor flexão da palheta. Além disso, os resultados revelaram que a razão entre os raios do disco e do orifício praticamente não afeta o vazamento para os valores comercialmente utilizados em válvulas.

Apesar dos vazamentos nas válvulas de sucção e descarga serem baixos, observou-se que os mesmos podem reduzir as eficiências volumétrica e isentrópica de compressores em aproximadamente 4,0% e 6,2% quando as folgas são tão pequenas quanto $1,0 \mu\text{m}$. Este fato merece atenção, principalmente em compressores que operam com múltiplas válvulas.

6.3 Sugestões de trabalhos futuros

Uma série de atividades pode ser proposta para melhoria da modelagem e do entendimento do fenômeno do vazamento em válvulas:

- Caracterização geométrica da folga existente entre a válvula e assento;
- Determinação mais precisa da flexão da válvula, considerando-a como engastada em um trecho circunferencial e simplesmente apoiada no restante;
- Investigação da influência do acabamento superficial e do processo de fabricação sobre o vazamento;
- Análise do efeito do desalinhamento da válvula decorrente do processo de montagem da válvula;
- Determinação do vazamento através de uma bancada experimental e assim, através do modelo, quantificar uma folga média que represente as imperfeições do acabamento superficial.

Referências Bibliográficas

ANNAND, W. J. D. Heat transfer in the cylinders of reciprocating internal combustion engines. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, v. 177, n. 1, p. 973–996, 1963.

ARKILIC, E.; SCHMIDT, M.; BREUER, K. Gaseous slip flow in long microchannels. *Microelectromechanical Systems, Journal of*, v. 6, n. 2, p. 167–178, jun. 1997.

ARKILIC, E. B. *Gaseous Flow in Micron-Sized Channels*. Dissertação (Mestrado) — Massachusetts Institute of Technology - MIT, 1994.

ARKILIC, E. B.; SCHMIDT, M. A.; BREUER, K. S. Gaseous flow in microchannels. *ASME Application of Microfabrication to Fluid Mechanics*, v. 197, p. 57 – 66, 1994.

ASAKO, Y.; NAKAYAMA, K.; SHINOZUKA, T. Effect of compressibility on gaseous flows in a micro-tube. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 48, p. 4985–4994, 2005.

ASAKO, Y.; PI, T.; TURNER, S. E.; FAGHRI, M. Effect of compressibility on gaseous flows in micro-channels. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 46, n. 16, p. 3041–3050, 2003.

BEZERRA, J. J. G. *Análise do Desempenho Termodinâmico de Compressores Alternativo e de Pistão Rolante para fins de Miniaturização através do Aumento da Rotação*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2011.

BIRD, G. *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*. Oxford: Clarendon Press, 1994.

CAO, B.-Y.; SUN, J.; CHEN, M.; GUO, Z.-Y. Molecular momentum transport at fluid-solid interfaces in mems/nems: A review. *International Journal of Molecular Sciences*, v. 10, n. 11, p. 4638–4706, 2009.

CELATA, G.; LORENZINI, M.; MORINI, G.; ZUMMO, G. Friction factor in micropipe gas flow under laminar, transition and turbulent flow regime. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v. 30, n. 5, p. 814 – 822, 2009.

CHONG, X. Subsonic choked flow in the microchannel. *Physics of Fluids*, AIP, v. 18, n. 12, p. 127104, 2006.

ELETRORBRÁS/PROCEL. *Avaliação do Mercado de Eficiência Energética do Brasil, Pesquisa de Posse de Equipamentos e Hábitos de Uso - Ano Base 2005*. Rio de Janeiro, 2005. Autores: Luiz Eduardo Menandro de Vasconcellos and Emerson Salvador and Karla Kwiatkowski Lepetitgaland and Marcio Vargas Lomelino and Moisés Antônio dos Santos and Roberto Ricardo de Araujo Goes.

ELHAJ, M.; GU, F.; BALL, A.; ALBARBAR, A.; AL-QATTAN, M.; NAID, A. Numerical simulation and experimental study of a two-stage reciprocating compressor for condition monitoring. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 22, n. 2, p. 374 – 389, 2008.

FLEMING, J. S.; SHU, P. C.; BROWN, J. The importance of wall friction in the compressible flow of gas through a compressor valve. In: *International Compressor Engineering Conference at Purdue*. West Lafayette, Purdue University: [s.n.], 1984. p. 195–197.

GHILA, A. M. *Converging Flow Between Two Flat Disks*. Dissertação (Mestrado) — Concordia University, 1995.

GOMES, A. R. *Análise Comparativa de Mecanismos de Compressão para Aplicação em Refrigeração Doméstica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2006.

GOSNEY, W. *Principles of Refrigeration*. New York: Cambridge University Press, 1982. 666 p.

HABING, R. A. *Flow and Plate Motion in Compressor Valves*. Tese (Doutorado) — University of Twente, Enschede, 2005.

HAO, P.-F.; HE, F.; ZHU, K.-Q. Flow characteristics in a trapezoidal silicon microchannel. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, v. 15, n. 6, p. 1362, 2005.

HARLEY, J. C. *Compressible Gas Flows in Microchannel and Microjets*. Tese (Doutorado) — University of Pennsylvania, 1993.

HARLEY, J. C.; HUANG, Y.; BAU, H. H.; ZEMEL, J. N. Gas flow in micro-channels. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 284, p. 257 – 274, apr. 1994.

HETSRONI, G.; MOSYAK, A.; POGREBNYAK, E.; YARIN, L. Fluid flow in micro-channels. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 48, n. 10, p. 1982 – 1998, 2005.

HONG, C.; ASAKO, Y.; LEE, J.-H. Estimation of leak flow rates through narrow cracks. *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*, v. 131, n. 5, p. 51–58, 2009.

HONG, C.; ASAKO, Y.; TURNER, S. E.; FAGHRI, M. Friction factor correlations for gas flow in slip flow regime. *Journal of Fluids Engineering, ASME*, v. 129, n. 10, p. 1268–1276, 2007.

JACKSON; SYMMONS. An investigation of laminar radial flow between two parallel discs. *Journal of Applied Sciences Research*, v. 15, p. 59–75, 1965.

KANDLIKAR, S. *Heat Transfer And Fluid Flow in Minichannels And Microchannels*. Great Britain: Elsevier, 2006. 450 p.

KARNIADAKIS, G. E.; BESKOK, A. *Microflows: Fundamentals and Simulation*. New York: Springer, 2nd edition, 2002. 340 p.

LEE, P.-M.; LIN, S. Pressure distribution for radial inflow between narrowly spaced disks. *Journal of Fluids Engineering, ASME*, v. 107, n. 3, p. 338–341, jun. 1985.

LILIE, D. E. B.; FERREIRA, R. T. S. Evaluation of the leakage through the clearance between piston and cylinder in hermetic compressors. In: *International Compressor Engineering Conference at Purdue*. West Lafayette, Purdue University: [s.n.], 1984. p. 1–6.

LIVESEY. Inertia effects in viscous flows. *International Journal of Mechanics Science*, v. 1, p. 84–88, 1959.

MACHU, E. How leakages in valves can influence the volumetric and isentropic efficiencies of reciprocating compressors. In: *International*

- Compressor Engineering Conference at Purdue*. West Lafayette, Purdue University: [s.n.], 1990. p. 482–494.
- MO, G.; ROSENBERGER, F. Molecular-dynamics simulation of flow in a two-dimensional channel with atomically rough walls. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 42, p. 4688–4692, Oct. 1990.
- MOLLER, P. S. Radial flow without swirl between parallel disks. *The Aeronautical Quarterly*, p. 163–185, 1963.
- NAMDEO, R.; MANEPATIL, S.; SARASWAT, S. Detection of Valve Leakage in Reciprocating Compressor Using Artificial Neural Network (ANN). In: *International Compressor Engineering Conference at Purdue*. West Lafayette, Purdue University: [s.n.], 2008. p. 1–8.
- PFÄHLER, J. N.; HARLEY, J. C.; BAU, H. H.; ZEMEL, J. N. Gas and liquid flow in small channels. *ASME Winter Annual Meeting*, v. 32, p. 49 – 59, 1991.
- PRASANTH, P.; KAKKASSERY, J. K. Molecular models for simulation of rarefied gas flows using direct simulation monte carlo method. *Fluid Dynamics Research*, v. 40, n. 4, p. 233 – 252, 2008.
- PRATA, A. T.; FERREIRA, R. T. S.; TODESCAT, M. L.; FAGOTTI, F. Thermal energy analysis in reciprocating hermetic compressors. In: *International Compressor Engineering Conference at Purdue*. West Lafayette, Purdue University: [s.n.], 1992. p. 1419–1428.
- PUFF, R. *Influência do Processo de Corte e Acabamento Superficial na Fadiga de Aço para Molas Planas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, 2002.
- RAAL, J. D. Radial source flow between parallel disks. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 85, Part 3, p. 401–416, 1978.
- SAAD, M. *Compressible Fluid Flow*. New Jersey: Prentice Hall, 1993. 688 p.
- SATO, H.; TAKAHASHI, K.; OHTANI, K.; IKEO, S. Characteristics of the compressible flow between two parallel disks. In: *Proceedings of the 6th JFPS International Symposium on Fluid Power*. Tsukuba, Ibaraki,

November 7-10: [s.n.], 2005. p. 817–822.

SAVAGE. Laminar radial flow between parallel plates. *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, v. 31, p. 594–596, 1964.

SHAPIRO, A. *The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow*. New York: Ronald Press Company, 1953. 672 p.

TAKENAKA, T.; YAMANE, R.; IWAMIZU, T. Thrust of the disc valves. *Bulletin of JSME*, v. 7, p. 558–566, 1964.

TURNER, S. E.; LAM, L. C.; FAGHRI, M.; GREGORY, O. J. Experimental investigation of gas flow in microchannels. *Journal of Heat Transfer-transactions of The Asme*, v. 126, p. 753 – 763, 2004.

USSYK, M. S. *Simulação numérica do desempenho de compressores herméticos alternativos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 1984.

VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T. *Thin plates and shells: theory, analysis, and applications*. New York: Taylor & Francis, 2001. 688 p.

APÊNDICE A

Equações governantes

A.1 Equações Básicas

Serão deduzidas as equações que governam o problema do escoamento unidimensional compressível levando em conta o efeito do atrito em um canal de área variável. Seguem as equações básicas:

- Equação da conservação da massa:

$$\dot{m} = \rho VA = cte. \quad (\text{A.1})$$

ou na forma diferencial:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (\text{A.2})$$

- Equação de gás perfeito:

$$p = \rho RT \quad (\text{A.3})$$

ou na forma diferencial:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (\text{A.4})$$

- Definição do número de Mach na forma diferencial:

$$M = \frac{V}{\sqrt{\gamma RT}} \quad (\text{A.5})$$

ou na forma diferencial:

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{dV^2}{V^2} - \frac{dT}{T} \quad (\text{A.6})$$

- Equação da conservação da quantidade de movimento (balanço de forças para o volume de controle mostrado na figura 4.3):

$$pA + \left(p + \frac{dp}{2} \right) dA - (p + dp)(A + dA) - \tau_w dA_s = \rho V A dV \quad (\text{A.7})$$

Desprezando os termos de segunda ordem e utilizando a definição de coeficiente de atrito de Fanning, a equação (A.7) pode ser escrita como:

$$-Adp - \frac{1}{2}C_f \rho V^2 dA_s = \rho V A dV \quad (\text{A.8})$$

Agora, as definições do diferencial de área da superfície do canal $dA_s = \Gamma dr$ e do diâmetro hidráulico $D_h = 4A/\Gamma$ devem ser utilizadas, onde o símbolo Γ representa o perímetro molhado. Dessa maneira, a equação (A.8) torna-se:

$$\rho V dV + dp + 2C_f \frac{\rho V^2}{D_h} dr = 0 \quad (\text{A.9})$$

Substituindo a relação $\rho V = \gamma p M^2 / V$, proveniente da definição do número de Mach, na equação (A.9) e em seguida dividindo por p , temos:

$$\frac{\gamma M^2}{V} dV + \frac{dp}{p} + 2C_f \frac{\gamma M^2}{D_h} dr = 0 \quad (\text{A.10})$$

- Equação da conservação da energia na forma diferencial:

$$dq = dh + V dV \quad (\text{A.11})$$

A.2 Escoamento Isotérmico

Primeiramente a hipótese de escoamento isotérmico será assumida para modelar o problema. A equação (A.4) na forma diferencial pode ser escrita como:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{A.12})$$

e combinando essa equação (A.12) com a conservação da massa (A.2), tem-se:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dA}{A} - \frac{dV}{V} \quad (\text{A.13})$$

Substituindo (A.13) em (A.9), tem-se:

$$\frac{\gamma M^2}{V} dV - \frac{dA}{A} - \frac{dV}{V} + 2C_f \frac{\gamma M^2}{D_h} dx = 0 \quad (\text{A.14})$$

Utilizando a definição de número de Mach e tratando o escoamento como isotérmico, $dM/M = dV/V$. Substituindo essa relação na equação (A.14), tem-se

$$\frac{dM}{M} = \frac{1}{1 - \gamma M^2} \left[\gamma M^2 \frac{2C_f}{D_h} dx - \frac{dA}{A} \right] \quad (\text{A.15})$$

Sabendo-se que $dp/p = d\rho/\rho = -dA/A - dM/M$ podemos escrever:

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma M^2}{1 - \gamma M^2} \left[-\frac{2C_f}{D_h} dx + \frac{dA}{A} \right] \quad (\text{A.16})$$

e também

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma M^2}{1 - \gamma M^2} \left[-\frac{2C_f}{D_h} dx + \frac{dA}{A} \right] \quad (\text{A.17})$$

Com as equações (A.15), (A.16) e (A.17) e conhecendo-se como varia a área da geometria do problema é possível obter a variação das propriedades do escoamento isotérmico ao longo do canal.

A.3 Escoamento Adiabático

Neste caso as equações (A.2) e (A.4) podem ser combinadas e escritas da seguinte forma:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} = -\frac{dA}{A} - \frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} \quad (\text{A.18})$$

Substituindo a equação (A.18) na equação (A.9), tem-se:

$$\frac{\gamma M^2}{V} dV - \frac{dA}{A} - \frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} + 2C_f \frac{\gamma M^2}{D_h} dx = 0 \quad (\text{A.19})$$

A relação dV/V , proveniente da equação (A.6), pode ser substituída na equação (A.19) resultando em:

$$\left(\frac{\gamma M^2 + 1}{2} \right) \frac{dT}{T} + (\gamma M^2 - 1) \frac{dM}{M} - \frac{dA}{A} + 2C_f \frac{\gamma M^2}{D_h} dx = 0 \quad (\text{A.20})$$

Para escoamento adiabático utiliza-se a equação da energia (A.11), com

$dq = 0$, combinada com a definição de calor específico a pressão constante para um gás ideal (c_p), resultando em:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{dV^2}{2c_p T} \quad (\text{A.21})$$

Escrevendo c_p em termos da razão de calores específicos $\gamma = c_p/c_v$ e da constante do gás $R = c_p - c_v$ e utilizando a definição do número de Mach, obtém-se:

$$\frac{dT}{T} = -M^2 \frac{\gamma - 1}{2} \frac{dV^2}{V^2} \quad (\text{A.22})$$

Utilizando a definição de Mach na forma diferencial e a substituindo o valor de dV^2/V^2 na equação (A.22) resulta em:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{M^2 \frac{\gamma - 1}{2}}{1 + M^2 \frac{\gamma - 1}{2}} \frac{dM^2}{M^2} \quad (\text{A.23})$$

Substituindo (A.23) em (A.20) e manipulando-se a equação obtém-se:

$$\frac{dM}{M} = \frac{1 + M^2 \frac{\gamma - 1}{2}}{1 - M^2} \left[-\frac{dA}{A} + 2C_f \frac{\gamma M^2}{D_h} dx \right] \quad (\text{A.24})$$

A relação obtida a partir da definição do número de Mach junto com a equação (A.22)

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{1 + M^2 \frac{\gamma - 1}{2}} \frac{dM}{M} \quad (\text{A.25})$$

pode ser substituída em (A.9) e após uma manipulação resulta em:

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma M^2}{1 - M^2} \left[\frac{dA}{A} - [1 + M^2(\gamma - 1)] \frac{2C_f}{D_h} dx \right] \quad (\text{A.26})$$

Agora pode-se combinar as equações (A.18) com a (A.25), obtendo-se

$$\frac{dp}{\rho} = -\frac{dA}{A} - \frac{1}{1 + M^2 \frac{\gamma - 1}{2}} \frac{dM}{M} \quad (\text{A.27})$$

Substituindo (A.24) em (A.27) e rearranjando a equação têm-se

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{M^2}{1 - M^2} \left[\frac{dA}{A} - \gamma \frac{2C_f}{D_h} dx \right] \quad (\text{A.28})$$

Da mesma maneira que no caso isotérmico, com as equações (A.24),

(A.26) e (A.28) e conhecendo-se como varia a área da geometria do problema é possível obter a variação das propriedades do escoamento adiabático ao longo do canal.

A.4 Escoamento entre Discos Paralelos

Neste caso, δ é constante e é possível escrever a área na direção normal ao escoamento como:

$$A(r) = 2\pi r\delta \quad (\text{A.29})$$

Se o escoamento é na mesma direção que r , têm-se:

$$\frac{dA(r)}{A(r)} = \frac{dr}{r} \quad (\text{A.30})$$

Caso o escoamento seja na direção contrária de r , a qual chamaremos de $r' = -r + r_d$, tem-se:

$$\frac{dA(r')}{A(r')} = \frac{dr'}{r' - r_d} \quad (\text{A.31})$$

Para facilitar a seguinte adimensionalização foi realizada:

$$x^* = \frac{r'}{r_d - r_o} \quad \text{com} \quad 0 \leq x^* \leq 1 \quad (\text{A.32})$$

Derivando a equação (A.32), pode-se escrever:

$$dr' = (r_d - r_o)dx^* \quad (\text{A.33})$$

Substituindo os valores de r' e dr' das equações (A.32) e (A.33) na equação (A.31), obtém-se:

$$\frac{dA(x^*)}{A(x^*)} = \frac{(r_d - r_o)dx^*}{(r_d - r_o)x^* - r_d} \quad (\text{A.34})$$

A.5 Escoamento Isotérmico entre Discos Paralelos

As equações adimensionalizadas para escoamento isotérmico num bocal radial, podem ser obtidas substituindo-se a equação (A.34) nas equações (A.15), (A.16) e (A.17). Sendo assim, escrevendo as equações diferenciais já na forma simplificada:

$$\frac{dM}{dx^*} = (r_d - r_o) \frac{M}{1 - \gamma M^2} \left[\gamma M^2 \frac{2C_f}{D_h} - \frac{1}{x^*(r_d - r_o) - r_d} \right] \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{dp}{dx^*} = (r_d - r_o) \frac{\gamma p M^2}{1 - \gamma M^2} \left[-\frac{2C_f}{D_h} + \frac{1}{x^*(r_d - r_o) - r_d} \right] \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{d\rho}{dx^*} = (r_d - r_o) \frac{\gamma \rho M^2}{1 - \gamma M^2} \left[-\frac{2C_f}{D_h} + \frac{1}{x^*(r_d - r_o) - r_d} \right] \quad (\text{A.37})$$

A.6 Escoamento Adiabático entre Discos Paralelos

As equações adimensionalizadas para escoamento adiabático num bocal radial, também podem ser obtidas substituindo-se a equação (A.34) nas equações (A.24), (A.26) e (A.28). Da mesma forma que foi feito para escoamento isotérmico, as equações diferenciais podem ser escritas na forma simplificada:

$$\frac{dM}{dx^*} = (r_d - r_o) \frac{M \left(1 + M^2 \frac{\gamma - 1}{2} \right)}{(1 - M^2)} \left[\gamma M^2 \frac{2C_f}{D_h} - \frac{1}{x^*(r_d - r_o) - r_d} \right] \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{dp}{dx^*} = (r_d - r_o) \frac{p \gamma M^2}{(1 - M^2)} \left[- (1 + M^2 (\gamma - 1)) \frac{2C_f}{D_h} + \frac{1}{x^*(r_d - r_o) - r_d} \right] \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{d\rho}{dx^*} = (r_d - r_o) \frac{\rho M^2}{1 - M^2} \left[-\gamma \frac{2C_f}{D_h} + \frac{1}{x^*(r_d - r_o) - r_d} \right] \quad (\text{A.40})$$

APÊNDICE B

Equações da Teoria de Placas

Serão apresentadas as relações gerais entre deformação e deslocamento e tensão e deformação, para o caso de pequenos deslocamentos. A maioria dos livros textos base de teoria de placas tratam o problema em coordenadas cartesianas e realizam uma transformação para coordenadas cilíndricas (também chamada de coordenadas polares). Aqui serão apresentadas diretamente as equações em coordenadas cilíndricas.

- Relações deformações-deslocamentos

As deformações normais são dadas por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\tag{B.1}$$

As deformações por cisalhamento são dadas por:

$$\begin{aligned}\gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \gamma_{zr} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\end{aligned}\tag{B.2}$$

B.1 Placas circulares finas

De acordo com a segunda hipótese de Kirchoff descrita no texto as deformações γ_{zr} , $\gamma_{\theta z}$ e ε_z podem ser desprezadas:

$$\begin{aligned}\gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \\ \gamma_{zr} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0\end{aligned}\tag{B.3}$$

As deformações normais são dadas por:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0\tag{B.4}$$

Integrando as equações (B.3), tem-se

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial r} + f_1(r, \theta)\tag{B.5}$$

$$v = -\frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + f_2(r, \theta)\tag{B.6}$$

De acordo com a primeira hipótese de Kirchoff (plano médio indeformável) em $z = 0$, $u = 0$ e $v = 0$. Utilizando essas condições pode ser mostrado que $f_1(r, \theta) = 0$ e $f_2(r, \theta) = 0$. Então os deslocamentos u e v são

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial r}\tag{B.7}$$

$$v = -\frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}\tag{B.8}$$

Integrando a equação (B.4)

$$w = w(r, \theta)\tag{B.9}$$

Dessa forma as variáveis ε_r e ε_θ das equações (B.1) podem ser reescritas

$$\varepsilon_r = -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\tag{B.10}$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\tag{B.11}$$