

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

Rafael Camargo Rodrigues de Lima

**MATÉRIA NPE NÃO HOMOGÊNEA NA PRESENÇA DE
CAMPOS MAGNÉTICOS GIGANTES NA
APROXIMAÇÃO DE THOMAS-FERMI**

Florianópolis (SC)

2012

Rafael Camargo Rodrigues de Lima

**MATÉRIA NPE NÃO HOMOGÊNEA NA PRESENÇA DE
CAMPOS MAGNÉTICOS GIGANTES NA
APROXIMAÇÃO DE THOMAS-FERMI**

Tese submetido ao Curso de Pós-Graduação
em Física para a obtenção do Grau de
Física Nuclear.

Orientador: Sidney dos Santos Avan-
cini

Coorientadora: Constança Providência

Florianópolis (SC)

2012

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

LIMA, Rafael Camargo Rodrigues de
Matéria npe não homogênea na presença de campos
magnéticos gigantes na aproximação de Thomas-Fermi [tese] /
Rafael Camargo Rodrigues de LIMA ; orientador, Sidney dos
Santos Avancini ; co-orientador, Constança Providência. -
Florianópolis, SC, 2012.
177 p. ; 21cm

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.
Programa de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Estrelas de Nêutrons. 3. Matéria não-
homogênea. 4. Campos magnéticos gigantes. 5. Aproximação de
Thomas-Fermi. I. Avancini, Sidney dos Santos. II.
Providência, Constança. III. Universidade Federal de Santa
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. IV. Título.

Para Lilian Spieker.

AGRADECIMENTOS

Desejo expressar meus agradecimentos
a Deus, pelo fôlego da vida,
aos meus pais, pelo apoio em todos os momentos difíceis,
à Lilian, minha esposa, pela resiliência, pelo amor e pelo apoio em todas as decisões,
ao Professor Sidney, pelos conselhos, orientações e por acreditar na possibilidade deste trabalho,
à Professora Constança Providência, pelo apoio durante o período em Coimbra, e pela pronta resposta aos incontáveis e-mails referentes a este trabalho,
à Professora Débora Menezes, pelo projeto que tornou possível o período de estudos em Portugal.
Ao CNPq, à CAPES e ao Povo Brasileiro pelo financiamento.

Os homens tornaram-se cientistas porque esperavam encontrar lei na natureza, e esperavam encontrar lei na natureza porque criam em um Legislador.

C. S. Lewis

SUMÁRIO

Resumo	
Abstract	
Lista de Figuras	
Lista de Tabelas	
1 INTRODUÇÃO	23
PASTA NUCLEAR	25
O MODELO	29
2 TEORIA DE WALECKA E FASE DE PASTA	31
2.1 FORMALISMO	32
2.1.1 Equações de Movimento Fermiônicas	36
2.1.2 Equações de Movimento Bosônicas	36
2.2 A CÉLULA DE WIGNER-SEITZ E UMA VISÃO GERAL DO PROCEDIMENTO NUMÉRICO	37
2.3 APROXIMAÇÃO DE THOMAS-FERMI	38
2.3.1 Considerações Gerais	38
2.3.2 Aproximação de Thomas-Fermi no Contexto da Matéria <i>npe</i> Não-Homogênea	42
2.4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC PARA PARTÍCULAS LIVRES NA PRESENÇA DE CAMPO MAGNÉTICO	44
2.5 POTENCIAL TERMODINÂMICO GRANDE-CANÔNICO E OS POTENCIAIS QUÍMICOS	46
2.6 EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON	49
2.7 COEFICIENTE DE TENSÃO SUPERFICIAL	51
3 MAGNETIZAÇÃO E EFEITO DE HAAS-VAN ALPHEN	55
3.1 OS NÍVEIS DE LANDAU COMO QUANTIDADES LO- CAIS NA CÉLULA DE WIGNER-SEITZ	57
3.2 O EFEITO DE HAAS-VAN ALPHEN	64
4 EFEITOS DO CAMPO MAGNÉTICO NA EOS	73
4.1 CÁLCULOS DE VALIDAÇÃO	74
4.1.1 Comparação entre <i>pastaTF-B</i> e <i>pastaTF</i>	74
4.1.2 Comparação entre <i>pastaTF-B</i> e <i>tm1eosb</i>	79
4.1.3 Cálculo da Energia de Superfície com o <i>pastaTF-B</i> ..	83
4.2 TRANSIÇÃO GOTA/CILINDRO	87
4.3 TRANSIÇÃO TUBO/BOLHA	91
4.4 TRANSIÇÃO BOLHA/MATÉRIA-HOMOGÊNEA	106
5 NOTAS EM CONVERGÊNCIA NUMÉRICA	121
5.1 FLUTUAÇÕES NUMÉRICAS EM TRANSIÇÕES	121

5.2 NÚMERO DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO	124
6 CONCLUSÃO	127
APÊNDICE A – Solução para a Equação de Dirac	133
APÊNDICE B – Normalização da Solução para a Equação de Dirac	143
APÊNDICE C – Cálculo das Densidades	149
DENSIDADE DE NÚMERO	149
DENSIDADE ESCALAR	151
DENSIDADES DE ENERGIA	154
Prótons e Elétrons	154
Nêutrons	155
APÊNDICE D – Encontrando os Potenciais Químicos ..	159
APÊNDICE E – Polinômios Associados de Laguerre	163
APÊNDICE F – Solução da Equação de Klein-Gordon 3D	167
REFERÊNCIAS	175

RESUMO

Neste trabalho tratamos do problema da matéria assimétrica npe (nêutrons, prótons e elétrons) na aproximação de Thomas-Fermi, onde os elétrons tem a função de neutralizar a matéria. Esta matéria neutra é considerada à temperatura zero e submetida a campos magnéticos gigantes. A EOS é obtida à partir do modelo efetivo de Walecka não-linear, e para ajustar as propriedades da matéria, tais como densidade de saturação nuclear e coeficiente de tensão superficial, são utilizados dois conjuntos de parâmetros diferentes, NL3 e TM1.

Utilizamos um procedimento conhecido como aproximação de Wigner-Seitz, para assim podermos considerar as diferentes estruturas nucleares exóticas que surgem no interior da matéria nuclear assimétrica não-homogênea, conhecidas coletivamente como pasta e nomeadas individualmente como: bolha, gota, cilindro, tubo e placa. Os perfis de densidade de cada partícula são calculados no interior da célula de Wigner-Seitz, respeitando-se a simetria de cada estrutura da pasta. Isto permite a obtenção de várias quantidades globais da matéria, por exemplo, a energia-livre e o número de partículas, e a obtenção de quantidades locais, como o número de níveis quantizados de energia devido à presença do campo magnético.

Estudamos a magnetização da pasta e o efeito quântico oscilatório de Haas-van Alphen, e mostramos como a energia livre por partícula, o raio da célula de Wigner-Seitz e o número de nucleons na célula variam com o campo magnético. Mostramos como as densidades de transição entre as diferentes estruturas da pasta dependem da intensidade do campo magnético, inclusive obtendo o comportamento da transição de fase da pasta para a matéria-homogênea.

Também obtivemos o comportamento do coeficiente de tensão superficial em função do campo magnético.

Palavras-chave: Física nuclear. Matéria não homogênea. Campos magnéticos. Aproximação de Thomas-Fermi. Estrelas de Nêutrons.

ABSTRACT

In this work we treat the problem of asymmetric npe matter (neutrons, protons and electrons) in the Thomas-Fermi approximation, where electrons act neutralizing the matter. This neutral matter is considered at zero temperature and subjected to giant magnetic field. The EOS is calculated from the effective nonlinear Walecka model using two different sets of parameters, NL3 and TM1, to adjust the properties of matter such as nuclear saturation density, surface tension coefficient, etc.

We use a procedure known as the Wigner-Seitz approximation thus we can consider the different exotic nuclear structures which arise within the inhomogeneous asymmetric nuclear matter. These structures are known collectively as pasta and named individually as: bubble, droplet, rod, tube and slab. The density profiles are calculated for each particle within the Wigner-Seitz cell, respecting the symmetry of each structure. This allows us to obtain several global quantities, for instance, the free energy and the number of particles. Also, makes possible to obtain local quantities like the quantized energy levels due to presence of magnetic field.

We study the magnetization and the quantum oscillatory effect known as the de Haas-van Alphen Effect, and show how the free energy per particle, the radius of the Wigner-Seitz cell and the number of nucleons in the cell depends on the magnetic field. We show how the density transition between different pasta structures depends on the magnetic field intensity, including the phase transition behavior from the pasta phase to the homogeneous matter.

We also have included the behavior of the surface tension coefficient as a function of magnetic field.

Keywords: Nuclear Physics. Nonhomogeneous matter. Magnetic fields. Thomas-Fermi approximation. Neutron stars.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Perfil de uma estrela de nêutrons.....	24
Figura 2	Estruturas da pasta.....	26
Figura 3	Perfil típico da geometria <i>gota</i> para campo $B = 1 \times 10^{17} G$ na aproximação de Thomas-Fermi com $Y_p = 0.3$	38
Figura 4	Perfil típico da geometria <i>cilindro</i> para campo $B = 1 \times 10^{17} G$ na aproximação de Thomas-Fermi com $Y_p = 0.3$	39
Figura 5	Perfil típico da geometria <i>placa</i> para campo $B = 1 \times 10^{17} G$ na aproximação de Thomas-Fermi com $Y_p = 0.3$	39
Figura 6	Perfil típico da geometria <i>tubo</i> para campo $B = 1 \times 10^{17} G$ na aproximação de Thomas-Fermi com $Y_p = 0.3$	40
Figura 7	Perfil típico da geometria <i>bolha</i> para campo $B = 1 \times 10^{17} G$ na aproximação de Thomas-Fermi com $Y_p = 0.3$	40
Figura 8	Geometrias <i>gota</i> (superior) e <i>cilindro</i> (inferior). Fração de prótons $Y_p = 0.5$. O rótulo <i>total</i> indica a densidade bariônica, ou seja, $\rho_b = \rho_p + \rho_n$	53
Figura 9	Número de níveis de Landau para a geometria <i>bolha</i> em função do raio da célula de Wigner-Seitz à densidade $\rho_b = 0.095 fm^{-3}$ e campo magnético $B = 1 \times 10^{17} G$. Parametrização NL3 e fração de prótons $Y_p = 0.3$	58
Figura 10	número de níveis de Landau para a geometria <i>bolha</i> em função do raio da célula de Wigner-Seitz à densidade $\rho_b = 0.095 fm^{-3}$ e campo magnético $B = 2.56 \times 10^{17} G$. Parametrização NL3 e fração de prótons $Y_p = 0.3$	59
Figura 11	número de níveis de Landau para a geometria <i>bolha</i> em função do raio da célula de Wigner-Seitz à densidade $\rho_b = 0.095 fm^{-3}$ e campo magnético $B = 3.34 \times 10^{17} G$. Parametrização NL3 e fração de prótons $Y_p = 0.3$	60
Figura 12	número de níveis de Landau para a geometria <i>bolha</i> em função do raio da célula de Wigner-Seitz à densidade $\rho_b = 0.095 fm^{-3}$ e campo magnético $B = 1.7 \times 10^{18} G$. Parametrização NL3 e fração de prótons $Y_p = 0.3$	61
Figura 13	Número de níveis de Landau do elétron no centro da célula de WS, em função do campo magnético para a geometria <i>bolha</i>	62
Figura 14	Momentos de Fermi do elétron no centro da célula de	

WS, em função do campo magnético para a geometria bolha.	62
Figura 15 Momentos de Fermi no centro da célula de WS, em função do campo magnético para a geometria bolha.	63
Figura 16 Potenciais químicos em função do campo magnético aplicado.	65
Figura 17 Potenciais químicos em função do campo magnético aplicado.	65
Figura 18 Potenciais químicos em função do campo magnético aplicado.	66
Figura 19 NL3 e $Y_p = 0.3$	69
Figura 20 NL3 e $Y_p = 0.3$	69
Figura 21 NL3 e $Y_p = 0.3$	70
Figura 22 NL3 e $Y_p = 0.3$	70
Figura 23 NL3 e $Y_p = 0.3$	71
Figura 24 TM1 e $Y_p = 0.3$	71
Figura 25 TM1 e $Y_p = 0.3$	72
Figura 26 Energia livre calculada com $B = 1.10^{17} G$ comparada ao cálculo sem campo magnético. Parametrização NL3 e fração de prótons $Y_p = 0.3$	76
Figura 27 Energia livre calculada para as geometrias da pasta sob campo constante $B = 1.10^{17} G$, NL3 e $Y_p = 0.3$	77
Figura 28 Energias Livres para cada estrutura da pasta em função da densidade. Foi incluída no gráfico a curva calculada pelo código <i>tm1eosb</i> . Em todos os casos o campo magnético é $B = 10^{17} G$, fração de prótons $Y_p = 0.3$ e parametrização NL3.	80
Figura 29 Energias de superfície em função da densidade média na célula de Wigner-Seitz.	82
Figura 30 Energias de superfície em função do campo magnético para $Y_p = 0.3$ e parametrizações NL3 e TM1.	85
Figura 31 Energias de superfície em função do campo magnético para $Y_p = 0.5$ e parametrizações NL3 e TM1.	86
Figura 32 Diferença entre as energias livre <i>gota</i> e <i>cilindro</i>	87
Figura 33 Densidade de Transição <i>gota/cilindro</i> em função de B. .	89
Figura 34 Variação da densidade de transição <i>gota/cilindro</i> em relação à densidade de transição para $B = 0$, segundo a equação (4.4).	90
Figura 35 Variação da densidade de transição <i>gota/cilindro</i> em relação à densidade de transição para $B = 0$	90

Figura 36 Energia de superfície para a transição <i>gota/cilindro</i>	91
Figura 37 Energia de superfície para a transição <i>gota/cilindro</i>	92
Figura 38 Raio médio dos bárions, geometria <i>gota</i>	92
Figura 39 Raio médio dos nêutrons, geometria <i>gota</i>	93
Figura 40 Raio médio dos prótons, geometria <i>gota</i>	93
Figura 41 Raio médio dos elétrons, geometria <i>gota</i>	94
Figura 42 Raio médio dos bárions, geometria <i>cilindro</i>	94
Figura 43 Raio médio dos nêutrons, geometria <i>cilindro</i>	95
Figura 44 Raio médio dos prótons, geometria <i>cilindro</i>	95
Figura 45 Raio médio dos elétrons, geometria <i>cilindro</i>	96
Figura 46 Pele de nêutrons da geometria <i>gota</i> . Parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$	96
Figura 47 Pele de nêutrons da geometria cilindro. Parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$	97
Figura 48 Energia Livre em função do campo magnético. Transição entre geometrias <i>tubo/bolha</i> , parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$	99
Figura 49 Energia de superfície em função do campo magnético. Transição entre geometrias <i>tubo/bolha</i> , parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$	100
Figura 50 Número de massa nuclear em função da densidade bariônica para vários campos magnéticos. A transição <i>tubo/bolha</i> pode ser observada por volta de 0.068 fm^{-3} . Parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$.	101
Figura 51 Raio da célula de WS em função da densidade bariônica para vários campos magnéticos. A transição <i>tubo/bolha</i> pode ser observada por volta de 0.068 fm^{-3} . Parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$	102
Figura 52 Energia livre para a geometria <i>bolha</i> em função da densidade para vários campos magnéticos. Parametrização NL3, $Y_p = 0.3$	108
Figura 53 Energia de superfície para a geometria <i>bolha</i> em função da densidade para vários campos magnéticos. Parametrização NL3, $Y_p = 0.3$. As transições para a matéria-homogênea acontecem quando σ cai a zero.	109
Figura 54 Densidade de transição bolha/matéria-homogênea em função do campo magnético. Parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$	110
Figura 55 Variação da densidade de transição bolha/matéria-homogênea em função do campo magnético em relação à densidade de transição	

para $B = 0$. Parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$ 111

Figura 56 Energia Livre em função do campo magnético. Parame-
trização NL3, $Y_p = 0.3$. Densidade bariônica $\rho_B = 0.095 fm^{-3}$ 111

Figura 57 Energia de Superfície em função do campo magnético.
Parametrização NL3, $Y_p = 0.3$. Densidade bariônica $\rho_B = 0.095 fm^{-3}$. 112

Figura 58 Número de Bárions em função do campo magnético. Pa-
rametrização NL3, $Y_p = 0.3$. Densidade bariônica $\rho_B = 0.095 fm^{-3}$. 112

Figura 59 Raio de Wigner-Seitz em função do campo magnético.
Parametrização NL3, $Y_p = 0.3$. Densidade bariônica $\rho_B = 0.095 fm^{-3}$. 115

Figura 60 Potenciais químicos dos nucleons em função do campo
magnético. Geometria *bolha* com parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$. 115

Figura 61 Potenciais químicos do próton em função do campo magnético.
Geometria *bolha* com parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$ 116

Figura 62 Potenciais químicos do nêutron em função do campo
magnético. Geometria *bolha* com parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$. 116

Figura 63 Potenciais químicos do elétron em função do campo magnético.
Geometria *bolha* com parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$ 117

Figura 64 Transições para $\rho_B = 0.015 fm^{-3}$ 121

Figura 65 Transições para $\rho_B = 0.019 fm^{-3}$ 122

Figura 66 Transições para $\rho_B = 0.020 fm^{-3}$ 122

Figura 67 Fases da pasta em função do campo magnético para
densidade $\rho = 0.020 fm^{-3}$. Cada resultado foi calculado com um
número diferente de pontos na integração dos potenciais. 124

Figura 68 Diferença entre a energias livres da geometria droplet e
rod em função do campo magnético. 125

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Intensidade de campos magnéticos típicos.....	28
Tabela 2	Parametrizações utilizadas.....	34
Tabela 3	Grandezas: (a) Energia Livre por partícula, (b) Energia de superfície σ , (c) Raio da célula de Wigner-Seitz (RWZ) e número de (d) Nucleons (e) Prótons e (f) Nêutrons.....	67
Tabela 4	(a) Linhas pontilhadas indicam as transições na matéria npe para TF com NL3. (b) Cálculo com o <i>pastaTF-B</i> , com $T = 0$ e $B = 1 \times 10^{17} G$	78
Tabela 5	Sequência de perfis de densidade na célula de Wigner-Seitz. Cada figura foi tomada para uma densidade total constante indicada por ρ_B	81
Tabela 6	Valores de referência de σ para as parametrizações TM1 e NL3 e frações de prótons $Y_p = 0.3$ e $Y_p = 0.5$ com campo magnético igual a zero.....	84
Tabela 7	Densidade de transição <i>tubo/bolha</i> em função do campo magnético. Parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$	103
Tabela 8	Perfis de densidade na célula de WS, para geometria <i>tubo</i> . Parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$	104
Tabela 9	Perfis de densidade na célula de WS, para a geometria <i>bolha</i> . Parametrização NL3, $Y_p = 0.3$	105
Tabela 10	Espessura da pele de nêutrons. Superior: Tubo; Inferior: Bolha. Ambas foram calculadas para a densidade $0.069 fm^{-3}$. Parametrização NL3, $Y_p = 0.3$	107
Tabela 11	Perfis de densidade e de níveis de Landau para geometria <i>bolha</i> . Parametrização NL3. $Y_p = 0.3$. $B = 1.426 \times 10^{18} G$	113
Tabela 12	Perfis de densidade e de níveis de Landau para geometria <i>bolha</i> . Parametrização NL3. $Y_p = 0.3$. $B = 1.738 \times 10^{18} G$	114
Tabela 13	Perfis de densidade para a geometria bubble.....	118
Tabela 14	Níveis de Landau na célula para a geometria bubble... ..	119

1 INTRODUÇÃO

Lá em cima, além do véu de céu azul que as esconde, as estrelas cantaram novamente: uma música pura, gelada, difícil. - C.S. Lewis.

Estrelas de nêutrons representam um desafio para a física e estão na fronteira do conhecimento humano. São as estrelas compactas mais densas conhecidas no Universo, e o segundo tipo de objetos mais densos da natureza, perdendo apenas para os buracos negros. Este tipo de estrela possui a massa da ordem da massa solar, $M \sim 1.4M_{\odot}$, porém em uma esfera com raio $R \sim 10$ km; ou seja, um raio 10^5 vezes menor que o raio do sol¹. E, apesar disso, estrelas de nêutrons possuem regiões com densidades muito abaixo da densidade de saturação nuclear. São estrelas altamente relativísticas que existem sob condições extremas. Assim, modelos dos mais avançados que a física pode oferecer devem ser extrapolados muito além dos regimes conhecidos em laboratório.

Na figura (1), mostramos um esquema da estrutura de uma estrela de nêutrons. Pode-se dizer que uma estrela de nêutrons possui duas regiões principais: a crosta, uma rede cristalina de núcleos ricos em nêutrons, e o núcleo, constituído por matéria nuclear várias vezes mais densa que ρ_0 (densidade de saturação nuclear, $\rho_0 = 0.165 fm^{-3} = 3 \times 10^{14} g cm^{-3}$). A interface crosta interna/núcleo é provavelmente constituída de matéria nuclear homogênea, com densidade ρ_0 . A crosta possui uma camada mais externa constituída por prótons, nêutrons, elétrons e muons. A equação de estado (EOS) se torna incerta em regiões mais internas da estrela. Especula-se que o centro da estrela possa ser constituído por matéria quarkiônica ou condensados de mésons e talvez híperons.

A crosta é constituída por prótons, nêutrons e elétrons e pode ser dividida em duas regiões principais: a crosta externa, cuja densidade se encontra abaixo da $\rho_{drip} = 4 \times 10^{11} g cm^{-3}$ (neutron drip density) e a crosta interna que se encontra acima de ρ_{drip} . Essa diferença acontece porque conforme se aumenta a densidade nas partes mais internas da crosta, maior é o potencial químico dos elétrons. Isto aumenta a captura de elétrons favorecendo o aparecimento de novos nêutrons. Com densidade acima de ρ_{drip} os núcleos estão tão ricos em nêutrons que

¹Estes dados foram retirados da referência (HAENSEL; POTEKHIN; YAKOVLEV, 2007). A massa e o raio do sol são respectivamente $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30} kg$ e $R_{\odot} = 6.96 \times 10^5 km$.

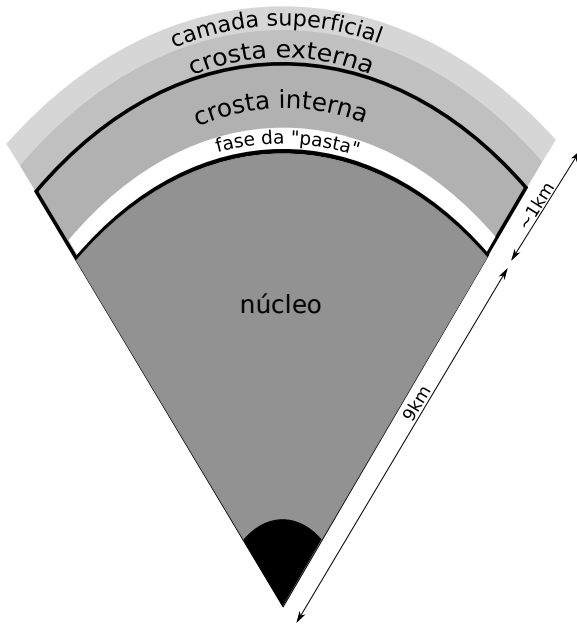


Figura 1: Perfil de uma estrela de nêutrons.

todos os estados ligados abaixo do nível de Fermi estão populados, fazendo com que os nêutrons excedentes sejam expulsos do núcleo².

é na camada mais profunda da crosta interna, onde os núcleos estão imersos em um gás uniforme de elétrons e nêutrons, onde espera-se a existência de uma fase especial da matéria, uma fase não-homogênea conhecida como *pasta*.

PASTA NUCLEAR

Normalmente imaginamos núcleos atômicos como pequenas esferas. E de fato, nas condições de temperatura e pressão terráqueas, os núcleos atômicos podem ser modelados como sendo aproximadamente esféricos. Os núcleos comuns seriam gotas de matéria altamente incompressível com densidade de saturação ρ_0 , que corresponde a aproximadamente 0.16 nucleons por fm^3 . Na camada externa da crosta das estrelas de nêutrons, onde a densidade é da ordem de $\rho \sim 10^{11} g/cm^3$, espera-se que os núcleos atômicos sejam aproximadamente esféricos.

Porém, na região das estrelas de nêutrons conhecida como *crosta interna*, onde a matéria consiste de elétrons, nêutrons livres e núcleos atômicos ricos em nêutrons, as densidades variam da ordem³ de $\rho \approx 10^{13} - 10^{14} g/cm^3 \approx 0.1 - 1.0\rho_0$. Para esta ordem de densidades a matéria nuclear torna-se um sistema frustrado conhecido como *pasta*.

No modelo da gota líquida, a energia dos núcleos consiste na soma da energia de volume da matéria no interior do núcleo, da energia de superfície dos núcleos, $E_S \sim R^2$, e da energia Coulombiana da interação entre os prótons no interior do núcleo, $E_C \sim 1/R$, onde estamos desprezando as energias de assimetria e de emparelhamento. Tanto a energia de superfície quanto a energia Coulombiana dependem da forma do núcleo. A energia de superfície favorece a esféricidade do núcleo, pois a esfera minimiza a superfície, conquanto a energia advinda dos prótons tende a deformar o núcleo. Para densidades muito abaixo de ρ_0 , a energia de superfície predomina e assim a forma do núcleo é a de *gota*. Porém, quando a densidade da matéria nuclear é de aproximadamente $\rho_0/2$, a energia Coulombiana é da mesma ordem

²Daí o termo inglês *neutron drip* associado a esse fenômeno, significando literalmente que os nêutrons gotejam para fora do núcleo. Uma discussão sobre este assunto específico, no que diz respeito a estrelas de nêutrons, é encontrada na referência (CHAMEL; HAENSEL, 2008).

³O valor depende de estarmos considerando matéria nuclear neutra ou matéria nuclear em equilíbrio β . Por exemplo, no primeiro caso a densidade varia na ordem de $0.006 - 0.01 fm^{-3}$, e no segundo de $0.029 - 0.065 fm^{-3}$.

de grandeza da energia de superfície(WATANABE; MARUYAMA, 2012). Assim, um dos modos do sistema reduzir sua energia é pela combinação entre núcleos vizinhos, reduzindo a superfície total.

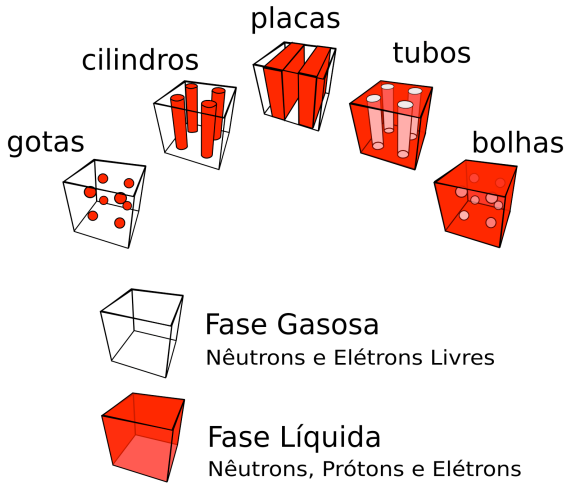


Figura 2: Estruturas da pasta.

No modelo efetivo aqui utilizado, os mésons são os responsáveis pela energia de superfície, portanto o que há é uma competição entre as interações eletromagnética e forte. Essa competição resulta em mais de uma configuração de baixa energia(AVANCINI et al., 2008), caracterizando aquilo que se chama de *sistema frustrado*. Neste cenário, devemos esperar que formas bastante diferentes do núcleo esférico usual sejam as configurações energeticamente mais favoráveis. A matéria se divide em setores periódicos nos quais os núcleos, embebidos em um gás aproximadamente uniforme de elétrons, assumem as formas da figura (2): gotas, cilindros e placas. Além disso, pode haver fases nas quais os núcleos literalmente virem do avesso, tornando-se bolhas e tubos de gás no interior da fase líquida. é desta aparência singular que surge a denominação *pasta*, pois esta matéria não-homogênea assemelha-se à variedade de massas italianas⁴.

⁴De acordo com Bethe, o termo *pasta nuclear* foi cunhado por Cooperstein e Baron. Porém, Watanabe e Maruyama defendem que Ravenhall foi o primeiro a utilizar o termo.

Historicamente, os primeiros estudos de tais tipos de fases da matéria estão ligados ao estudo da matéria no colapso gravitacional de núcleos estelares massivos. Em 1978, Lattimer *et al.* mostraram que para densidades entre ρ_0 e $\rho_0/10$ a matéria pode existir em fases mais estáveis que os convencionais núcleos esféricos imersos em um vapor de nucleons. Uma geometria nuclear bastante explorada foi a chamada *fase de bolha*, em que a matéria nuclear densa se apresenta com buracos esféricos preenchidos com o vapor de nucleons(LAMB *et al.*, 1978).

Em 1983, Ravenhall, Pethick e Wilson(LAMB *et al.*, 1983) mostraram que estruturas cilíndricas são energeticamente mais favoráveis de acontecer em um espaço de densidades relativamente grande. Eles consideraram um conjunto básico de geometrias esféricas, cilíndricas e planares, correspondendo à dimensionalidade $d=3,2,1$. Para $d=3$, por exemplo, eles estudaram núcleos esféricos imersos em um gás de nucleons e bolhas esféricas em matéria nuclear densa, referidos respectivamente como 3N e 3B. Para $d=2$, consideraram núcleos cilíndricos (2N) e buracos cilíndricos preenchidos com gás de nucleons (2B). E para $d=1$, consideraram placas de matéria nuclear paralelas e separadas pelo gás de nucleons. Neste último caso tanto o núcleo quanto o 'buraco' estão presentes, e a notação é 1N. Então, utilizando um modelo de gota líquida, fizeram a densidade variar de forma gradativa e encontraram as seguintes transições antes de se chegar à matéria uniforme: $3N \rightarrow 2N \rightarrow 1N \rightarrow 2B \rightarrow 3B$.

Em 2006, Avancini *et al.* mostraram que a EOS da matéria estelar em equilíbrio β atravessa a superfície spinodal a $T=0$ MeV. Isso significa que a baixas densidades uma estrela de nêutrons tem uma fase não-homogênea, que corresponde à sua crosta.

Neste trabalho vamos tratar do problema da matéria não-homogênea à temperatura zero e submetida a campos magnéticos gigantesco ($> 10^{15}$ G), ver tabela de campos magnéticos típicos (1). Sabe-se que tais campos, que devem existir ao menos em algumas estrelas de nêutrons(CHANMUGA 1992), modificam grandemente as propriedades da matéria nas proximidades da superfície estelar. Ainda que a crosta estelar represente apenas uma fração pequena da estrela, ela tem grande importância, por exemplo, no transporte de calor do núcleo estelar para a superfície(GUNDMUNDSSON; PETHICK; EPSTEIN, 1983) e na determinação do espectro da radiação emitida pela superfície(ROMANI, 1987).

Tabela 1: Intensidade de campos magnéticos típicos.

Objeto	B (G)
Terra	0.6
Barra de ferro magnetizada	10^2
Os mais fortes campos mantidos em laboratório	10^5
Os mais fortes campos alcançados em laboratório (duração de milissegundos)	10^7
Estrelas ordinárias	10^6
Estrelas de nêutrons	$10^{12} - 10^{13}$
Magnetares	$> 10^{14}$

O estudo da pasta é importante tanto no entendimento de estrelas de nêutrons como também no entendimento da dinâmica de supernovas (HOROWITZ; PEREZ-GARCIA; PIEKAREWICZ, 2004).

O MODELO

No estudo de estrelas, a estrutura estelar depende da equação de estado (EOS) que se está usando, que por sua vez é construída de acordo com o modelo escolhido. Nos seguintes artigos as estrelas de nêutrons com campos magnéticos fortes são modeladas como sendo compostas de hádrons e léptons (DUNCAN, 2003)(BRODERICK; PRAKASH; LATTIMER, 2000). Estrelas deste tipo também são chamadas de *Estrelas Hadrônicas* (WALECKA, 1995). As estrelas de nêutrons mais comuns possuem campos magnéticos da ordem de $10^{12} - 10^{13} G$. As estrelas de nêutrons com campos magnéticos da ordem de $10^{14} - 10^{15} G$ são conhecidas como *magnetares* (GLENDEENING, 2000).

O estado fundamental ainda é objeto de discussão e especulação. Nos modelos mais usados, hádrons são assumidos como o verdadeiro estado fundamental da interação forte (AVANCINI et al., 2010). No entanto, já foi argumentado que o verdadeiro estado fundamental é a matéria estranha (*strange quark matter*) (ITOH, 1970)(BODMER, 1971).

Neste trabalho, que se insere nos recentes desenvolvimentos alcançados pelo *Grupo de Física Nuclear da UFSC* e pelo *Departamento de Física Nuclear de Coimbra*, trataremos da matéria nuclear submetida a campos magnéticos gigantesco, mais especificamente nosso trabalho se atém à matéria nuclear assimétrica, constituída de nêutrons, prótons e elétrons (*npe*), a qual, acredita-se, forma a crosta interna de estrelas de nêutrons. Os cálculos das densidades de aparecimento destas estruturas, e de outras propriedades, podem ser encontrados nos trabalhos (AVANCINI et al., 2008) e (AVANCINI et al., 2010). Estendemos estes trabalhos com a inclusão do campo magnético, porém não utilizamos o equilíbrio β . Como aproximação desprezamos os efeitos de antipartículas (*no sea approximation*)(GAMBHIR; RING; THIMET, 1990).

Para a EOS utilizaremos o chamado *Modelo de Walecka não-linear*. Fortes campos magnéticos da ordem de $10^{12} G$ são esperados em pulsares. Até mesmo campos mais fortes $> 10^{15} G$ na superfície são preditos por observação de SGR (Soft Gamma-ray Repeaters) e pulsares de raios-X (Kouveluotou et al. 1998,1999). O campo magnético no interior destas estrelas podem ser ainda maiores que na superfície. O limite do campo no interior é estimado pelo teorema virial (Lai &

Shapiro 1991). Para uma estrela de nêutrons típica⁵, com massa de $1.5M_{\odot}$ e raio de $15km$, o campo interior pode chegar a $\approx 10^{18}G$.

O capítulo 2 apresenta o modelo de Walecka, que será utilizado no presente trabalho para a obtenção da EOS. São apresentadas a densidade de Lagrangeana, as parametrizações utilizadas e as equações de movimento. Os procedimentos numéricos são apresentados ao longo do capítulo: a aproximação de Wigner-Seitz, as expansões dos campos mesônicos, a aproximação de Thomas-Fermi e o modo pelo qual os potenciais químicos das partículas fermiônicas são obtidos.

O capítulo 3 discute detalhadamente o papel dos chamados níveis de Landau que surgem devido ao campo magnético. Neste capítulo mostra-se como aparece o efeito quântico oscilatório conhecido como efeito *de Haas-van Alphen*. Este fenômeno desempenha um papel importante na magnetização e em outras quantidades referentes à matéria não-homogênea. São apresentados os cálculos da magnetização para as diferentes estruturas da pasta.

O capítulo 4 apresenta resultados relacionados diretamente à EOS. Apresentamos neste capítulo a determinação de fases da pasta sob a influência do campo magnético, analisando também a influência do campo magnético na transição entre algumas fases internas da pasta. A energia livre é o nosso principal foco devido ao seu papel na determinação de cada fase. Também apresentamos as energias de superfície e algumas outras quantidades globais da matéria.

O capítulo 5 discute brevemente alguns aspectos a se levar em conta na convergência numérica.

O capítulo 6 apresenta conclusões e perspectivas.

⁵Vale mencionar aqui que nem todos os autores concordam com a existência de tais estrelas, ver Malheiro *et al.* (MALHEIRO; RUEDA; RUFFINI, 2011).

2 TEORIA DE WALECKA E FASE DE PASTA

God does not care about our mathematical difficulties; He integrates empirically. - Albert Einstein.

Nos dias de hoje, acredita-se que os verdadeiros graus de liberdade das interações fortes são quarks e glúons que, na teoria QCD (*Cromodinâmica Quântica*), entram na constituição dos nucleons. No entanto, não é trivial descrever sistemas e interações nucleares a partir de quarks. Assim, se tornam importantes as teorias efetivas nas quais os graus de liberdade são bárions e mésons. No limite de baixas energias a QCD ainda não possui solução¹ e, portanto, temos a necessidade de usar modelos computacionalmente viáveis que incorporem as simetrias essenciais da QCD, tais como simetria de isospin e quiral, e invariância de Lorentz. São modelos fenomenológicos e assim alguns parâmetros são ajustados de modo a poder-se extrapolar a teoria além do regime em que estes parâmetros foram obtidos, por exemplo, indo para altas ou baixas densidades ou para temperaturas finitas.

O formalismo para campos relativísticos para nucleons foi desenvolvido por M. H. Johnson e E. Teller, H. P. Duerr e J. D. Walecka. No artigo de 1955, *Classical Field Theory for Nuclear Forces*(JOHNSON; TELLER, 1955), Johnson e Teller idealizaram um modelo não-relativístico em que os nucleons interagiam por meio de dois campos, um escalar e um vetorial. O campo escalar, mediado pelo méson σ , representava as interações de médio e longo alcance e seria responsável pela ligação dos nucleons. O campo vetorial, mediado pelo méson vetor ω , representava a interação de curto alcance repulsiva e seria o responsável pela saturação nuclear. O potencial estático não relativístico, para a troca de mésons σ e ω , entre dois nucleons é então a soma de duas interações de Yukawa

$$V(r) = \frac{g_\omega^2}{4\pi} \frac{e^{-m_\omega r}}{r} - \frac{g_\sigma^2}{4\pi} \frac{e^{-m_\sigma r}}{r}, \quad (2.1)$$

tal que se $g_\omega > g_\sigma$ e $m_\omega > m_\sigma$, então o potencial é atrativo a longas distâncias e repulsivo a curtas distâncias.

Após isso, em 1956, Hans Peter Durr desenvolveu uma versão relativística do modelo $\sigma - \omega$. Em 1974, John Dirk Walecka desenvolveu uma teoria detalhada para o modelo $\sigma - \omega$ relativístico. O

¹Na melhor das hipóteses existem cálculos na rede, com todas as suas enormes limitações(SCHÄFER; SHURYAK, 1998).

modelo tem como ponto de partida uma Lagrangeana que contém os graus de liberdade mesônicos e nucleônicos. Então, se pode encontrar as equações de movimento para os campos, energia, potenciais e etc. Nestas equações, aplica-se uma aproximação relativística de campo médio utilizando constantes de acoplamento e massas mesônicas como parâmetros ajustados para reproduzir dados conhecidos da matéria nuclear e de núcleos finitos. Por exemplo, na aproximação de Hartree os termos de troca são negligenciados assim como as contribuições de antipartículas para as fontes mesônicas (WALECKA, 1995). Além disso, são utilizados apenas alguns dos mésons conhecidos.

2.1 FORMALISMO

Para a descrição da EOS da matéria não-homogênea da crosta das estrelas de nêutrons, aplicamos o modelo de Walecka na aproximação de campo médio. É um modelo efetivo quântico-relativístico capaz de reproduzir com razoável precisão as interações de curto e longo alcance da matéria nuclear. Neste modelo os campos bariônicos (nêutrons, n , e prótons, p) interagem pela troca de mésons $\sigma - \omega - \rho$. Este modelo tem sido amplamente usado no estudo da matéria em altas densidades, por exemplo, na fase hadrônica de estrelas de nêutrons. Aqui aplicamos o modelo à matéria npe (nêutrons, prótons e elétrons), na qual consiste as crostas das estrelas de nêutrons. Esta região do magnetar possui baixas densidades e poderá estar submetida a gigantescos campos magnéticos ($> 10^{15}G$). Não tratamos aqui das regiões mais internas da estrela onde as densidades tornam-se altíssimas. As densidades de interesse aqui estão na faixa de $0.01 - 0.1 fm^{-3}$, e consideraremos campos magnéticos $\approx 10^{17} - 10^{18} G$. Em alguns casos apresentaremos campos fora desta faixa apenas para fins de comparação ou de validação dos resultados computacionais.

A densidade de Lagrangeana associada a este modelo é dada por (AVANCINI et al., 2010)

$$\mathcal{L} = \sum_{i=p,n} \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_\omega + \mathcal{L}_\rho + \mathcal{L}_\gamma \quad , \quad (2.2)$$

onde as Lagrangeanas acima são dadas explicitamente por

$$\mathcal{L}_i = \bar{\psi}_i[\gamma_\mu iD^\mu - M^*]\psi_i, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_e = \bar{\psi}_e[\gamma_\mu(i\partial^\mu + eA^\mu) - m_e]\psi_e, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m_s^2\phi^2 - \frac{1}{3}\kappa\phi^3 - \frac{1}{12}\lambda\phi^4), \quad (2.5)$$

$$\mathcal{L}_\omega = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} + m_v^2V_\mu V^\mu + \frac{1}{12}\xi g_v^4(V_\mu V^\mu)^2\right), \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L}_\rho = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\vec{B}_{\mu\nu} \cdot \vec{B}^{\mu\nu} + m_\rho^2\vec{b}_\mu \cdot \vec{b}^\mu\right), \quad (2.7)$$

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

Os campos dos bárions são representados por espinores de Dirac, ψ_i ($i = p, n$). Fazemos a aproximação de considerar próton e nêutron como estados de uma mesma partícula chamada de nucleon, e de massa $M = 939 \text{ MeV}$. A massa efetiva dos nucleons é

$$M^* = M - g_s\phi. \quad (2.9)$$

Os únicos léptons neste modelo são os elétrons representados pelo campo ψ_e , com massa m_e . O campo do méson escalar-isoescalar é representado por ϕ com massa m_s , o campo isoescalar-vetor é representado por V_μ com massa m_v e o campo isovetor-vetor é representado por \vec{b}_μ com massa m_ρ . Prótons e elétrons interagem através do campo eletromagnético representado por A_μ . O acoplamento mínimo é dado por

$$iD^\mu = i\partial^\mu - g_v V^\mu - \frac{g_\rho}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{b}^\mu - e\frac{1 + \tau_3}{2}A^\mu, \quad (2.10)$$

onde $\vec{\tau}$ é o operador isospin. Os parâmetros g_s , g_ρ e g_v são as constantes de acoplamento dos mésons e nucleons, e a constante de acoplamento eletromagnético é dada por $e = \sqrt{4\pi/137}$; os acoplamentos de autointeração são dados por κ , λ e ξ . Nós usamos os conjuntos de parâmetros identificados na tabela (2).

Tabela 2: Parametrizações utilizadas.

	NL3(LALAZISSIS; KONIG; RING, 1997)	TMI(SUGAHARA; TOKI, 1994)
M (MeV)	939	938
m_s (MeV)	508.194	511.198
m_v (MeV)	782.501	783
m_ρ (MeV)	763.000	770
g_s	10.217	10.0289
g_v	12.868	12.6139
g_ρ	4.474	4.6322
κ	20.862	14.465
λ	-173.31	3.7098
ξ	0.0	1.69×10^{-2}
Propriedades da matéria nuclear		
ρ_0 (fm^{-3})	0.148	0.145
m^*/M	0.60	0.634
$\sigma(Y_p = 0.3)$ (MeV/ fm^2)	0.481	0.492
$\sigma(Y_p = 0.5)$ (MeV/ fm^2)	1.123	1.077

Os tensores são

$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu , \quad (2.11)$$

$$\vec{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{b}_\nu - \partial_\nu \vec{b}_\mu - g_\rho (\vec{b}_\mu \times \vec{b}_\nu) , \quad (2.12)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (2.13)$$

A partir da densidade de Lagrangeana e do tensor energia-momento obtemos a Hamiltoniana

$$\begin{aligned} H = \int d^3r \sum_{i=p,n} \psi_i^\dagger [& \vec{\alpha} \cdot (-i\vec{\nabla} - e\frac{1+\tau_3}{2}\vec{A}) + \beta(M - g_s\phi(\vec{r})) \\ & + g_v V_0(\vec{r}) + \frac{1}{2}g_\rho\tau_3 b_0(\vec{r}) + e\frac{1+\tau_3}{2}A_0(\vec{r})] \psi_i \\ & + \frac{1}{2}[(\nabla\phi(\vec{r}))^2 + m_s^2\phi^2(\vec{r})] + \frac{\kappa}{3!}\phi^3(\vec{r}) + \frac{\lambda}{4!}\phi^4(\vec{r}) \\ & - \frac{1}{2}[(\nabla V_0(\vec{r}))^2 + m_v^2 V_0^2(\vec{r})] - \frac{1}{4!}\xi g_v^4 V_0^4 \\ & - \frac{1}{2}[(\nabla b_0(\vec{r}))^2 + m_\rho^2 b_0^2(\vec{r})] \\ & - \frac{1}{2}[\nabla A_0(\vec{r})^2 - B^2] \\ & + \psi_e^\dagger [\vec{\alpha} \cdot (-i\vec{\nabla} + e\vec{A}) + \beta m_e - eA_0(\vec{r})] \psi_e . \end{aligned} \quad (2.14)$$

A partir do formalismo de Euler-Lagrange, obtemos as equações de movimento para os campos escalar, isoescalar-vetor, isovetor-vetor, eletromagnético e dos nucleons. Nosso modelo se enquadra no chamado *caso estático*, o que simplifica a obtenção das equações de movimento. Neste caso, há simetria por inversão temporal e portanto não existem correntes (GAMBHIR; RING; THIMET, 1990); assim, as componentes espaciais \vec{V} e \vec{b} desaparecem². Abaixo temos sumarizada as equações de movimento de cada espécie.

²Veremos a seguir que escolhemos $\vec{A} = Bx\hat{j}$ que resulta em um campo B estático na direção z .

2.1.1 Equações de Movimento Fermiônicas

Para os bárions a equação de movimento é:

$$\left\{ \vec{\alpha} \cdot (-i\vec{\nabla} - e\frac{1+\tau_3}{2}\vec{A}) + \beta M^*(\vec{r}) + U(\vec{r}) \right\} \psi_i = E_i \psi_i(\vec{r}) , \quad (2.15)$$

onde a energia potencial $U(\vec{r})$ corresponde à parte temporal de um vetor de Lorentz,

$$U(\vec{r}) = g_v V_0 + \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 b_0 + e \frac{(1+\tau_3)}{2} A_0(\vec{r}) , \quad (2.16)$$

$$M^* = M - g_s \phi . \quad (2.17)$$

Vemos acima que os spinores ψ_i são autovetores da equação de Dirac estática, que tem como autovalores a energia de uma partícula, E_i . Aqui utilizamos a convenção $\tau_3(p) = 1$, $\tau_3(n) = -1$.

A equação de movimento dos elétrons é dada pela equação de Dirac:

$$\left\{ \vec{\alpha} \cdot (-i\vec{\nabla} + e\vec{A}) + \beta m_e - e A_0(\vec{r}) \right\} \psi_e = E_e \psi_e(\vec{r}) . \quad (2.18)$$

2.1.2 Equações de Movimento Bosônicas

$$\begin{aligned} (-\nabla^2 + m_s^2)\phi &= g_s \bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}\kappa\phi^2 - \frac{1}{6}\lambda\phi^3 , \\ (-\nabla^2 + m_v^2)V_0 &= g_v \psi^\dagger\psi - \frac{1}{3!}\xi g_v^4 V_0^3 , \\ (-\nabla^2 + m_\rho^2)b_0 &= \frac{g_\rho}{2}\psi^\dagger\tau_3\psi , \\ -\nabla^2 A_0 &= e\psi^\dagger\frac{1+\tau_3}{2}\psi - e\psi_e^\dagger\psi_e . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Veja que o termo de auto-interação do méson ω , isto é, o termo $\frac{1}{3!}\xi g_v^4 V_0^3$, só trará contribuição no caso da utilização do conjunto de parâmetros $TM1$, devido ao parâmetro ξ . No caso do conjunto $NL3$ tem-se $\xi = 0$, como pode ser visto na tabela (2).

2.2 A CÉLULA DE WIGNER-SEITZ E UMA VISÃO GERAL DO PROCEDIMENTO NUMÉRICO

Vamos utilizar a aproximação de Wigner-Seitz para descrever a matéria *npe* não-homogênea (WATANABE; MARUYAMA, 2012). Neste procedimento, assume-se que a matéria se comporta como uma estrutura periódica e resolvemos as equações para os campos em uma célula unitária, conhecida como célula de Wigner-Seitz (WS). A célula de WS é construída com a geometria adequada, ou seja, uma esfera em três dimensões (3D), um cilindro em 2D ou uma placa em 1D. A célula tem carga global neutra e, como condição de contorno, impomos que as derivadas radiais de todos os campos sejam nulas nos contornos da célula; assim as quantidades físicas de uma célula são suavemente conectadas às mesmas quantidades nas células vizinhas.

Então, as equações de Klein-Gordon são resolvidas expandindo-se os campos mesônicos na base do oscilador harmônico, em 1D, 2D e 3D. Em 3D consideramos simetria esférica, e em 2D simetria cilíndrica. Temos utilizado uma base com 125 estados, o que tem se mostrado eficiente. Após a expansão dos campos, e da substituição destes nas equações de Klein-Gordon, obtemos um sistema matricial. Devido às características deste sistema (tridiagonal) várias rotinas existentes podem ser aplicadas na resolução do sistema. A solução destas equações nos retorna perfis de densidades para nêutrons, prótons e elétrons: em 3D, um dos resultados é uma região densa no centro da célula composta por prótons, nêutrons e elétrons rodeada por um gás de elétrons. Esta configuração é chamada de gota. Por outro lado, a configuração em 3D para a qual a região densa está ao redor de uma região gasosa de elétrons é chamada de bolha. De modo similar identificamos as configurações cilíndricas e tubulares em 2D. Finalmente, em 1D aparecem apenas as estruturas planares³.

Os potenciais químicos são usados para garantir a neutralidade de carga, a densidade global fixa, e a fração de prótons. Para cada densidade e fração de prótons (que são condições iniciais) um cálculo auto-consistente é realizado. A geometria correta é determinada segundo o critério de minimização de energia: a geometria que resulta na menor energia livre é a geometria para o ρ_B e Y_p escolhidos.

As figuras (3-7) apresentam cinco perfis típicos de cada geometria da pasta nuclear. O eixo das abscissas representa a coordenada radial r

³Neste trabalho utilizamos as traduções portuguesas mais comuns para os nomes destas estruturas, que em inglês são: (3D) *droplet* e *bubble*, (2D) *rod* e *tube* e (1D) *slab*.

para cada geometria. Portanto, $r = 0$ indica o centro da célula. Estas figuras foram calculadas para campo $B = 1 \times 10^{17} \text{ G}$ e $Y_p = 0.3$.

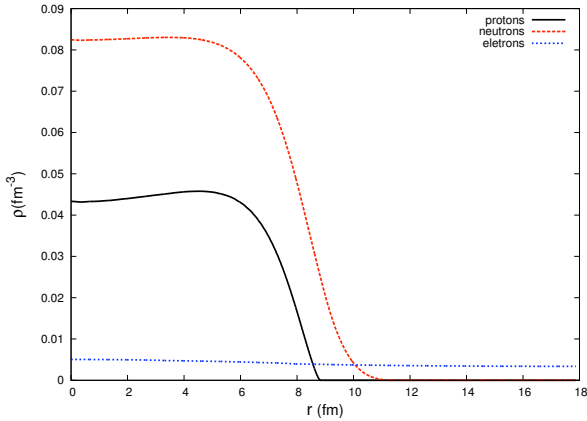


Figura 3: Perfil típico da geometria *gota* para campo $B = 1 \times 10^{17} \text{ G}$ na aproximação de Thomas-Fermi com $Y_p = 0.3$.

A figura (8) foi calculada por Avancini et al. (AVANCINI et al., 2008), e mostra o cálculo na aproximação de Thomas-Fermi dos perfis gota e cilindro, com $Y_p = 0.5$, na ausência de campos magnéticos. Comparando-se com as figuras (3) e (4) vê-se que estes perfis calculados a $1 \times 10^{17} \text{ G}$ mantém características semelhantes àqueles, calculados sem campo magnético. Esta situação se altera dramaticamente para campos maiores, como será visto no capítulo 4⁴.

2.3 APROXIMAÇÃO DE THOMAS-FERMI

2.3.1 Considerações Gerais

Antes de utilizarmos a aproximação de Thomas-Fermi no caso nuclear, vamos discutir aqui sua aplicação no caso atômico, historicamente o primeiro problema físico no qual foi utilizado este tipo de aproximação.

O cálculo teórico de grandezas observáveis atômicas é possível apenas se o campo eletromagnético efetivo dentro do átomo é conhe-

⁴Por exemplo, na tabela (13).

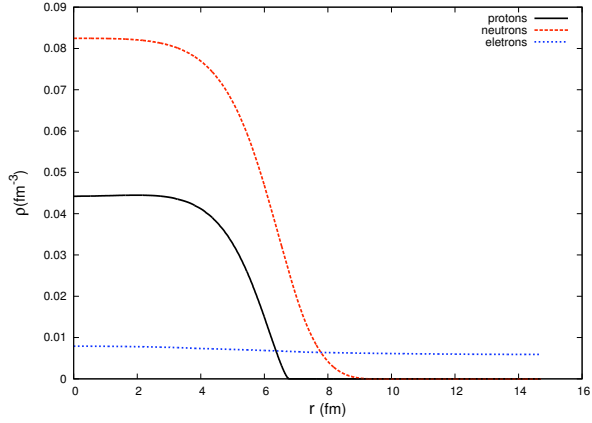


Figura 4: Perfil típico da geometria *cilindro* para campo $B = 1 \times 10^{17} G$ na aproximação de Thomas-Fermi com $Y_p = 0.3$.

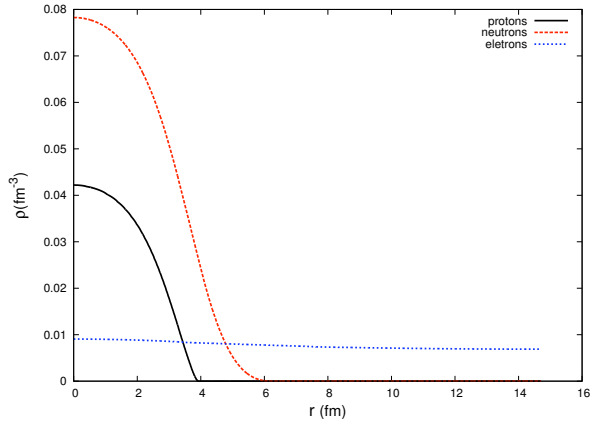


Figura 5: Perfil típico da geometria *placa* para campo $B = 1 \times 10^{17} G$ na aproximação de Thomas-Fermi com $Y_p = 0.3$.

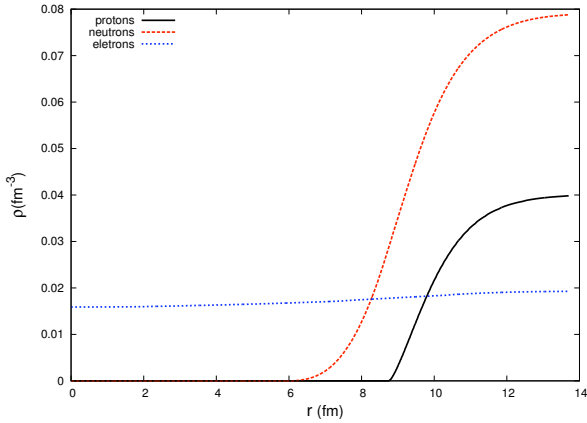


Figura 6: Perfil típico da geometria *tubo* para campo $B = 1 \times 10^{17} G$ na aproximação de Thomas-Fermi com $Y_p = 0.3$.

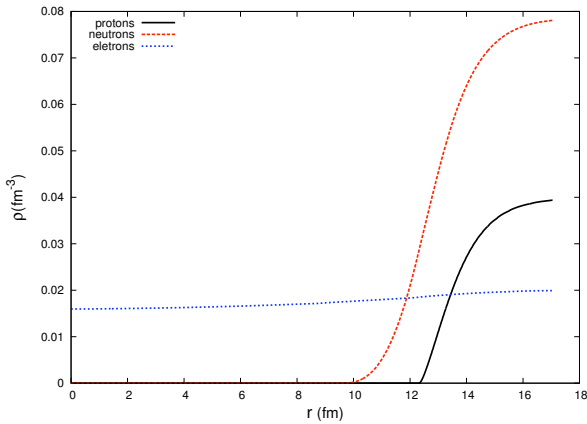


Figura 7: Perfil típico da geometria *bolha* para campo $B = 1 \times 10^{17} G$ na aproximação de Thomas-Fermi com $Y_p = 0.3$.

cido, e é claro, um cálculo assim é extremamente complicado por ser, entre outras coisas, autoconsistente: o cálculo de uma grandeza depende da distribuição das cargas que depende do campo efetivo que, por sua vez, depende da distribuição das cargas. Durante muito tempo procurou-se uma forma de aproximação para a energia cinética de cargas elétricas, onde a energia seria um funcional direto das densidades das cargas. Procurava-se uma aproximação que fosse precisa o suficiente e de baixo custo computacional.

A primeira aproximação a atender estas expectativas com sucesso foi a aproximação de Thomas-Fermi (THOMAS, 1926)(FERMI, 1928). A teoria de Thomas-Fermi resulta em uma forma funcional para a energia cinética de um gás de elétrons não-interagentes submetidos a um potencial externo $V(\vec{r})$. A energia cinética na teoria de Thomas-Fermi é um funcional da densidade local e é baseada em uma aproximação semi-clássica.

Por exemplo, seja um sistema de partículas de spin 1/2 uniformemente distribuídos no interior de uma caixa de volume arbitrário V . E seja ϕ , a função que representa uma partícula, uma onda plana normalizada no volume dada por

$$\phi_{k,\lambda} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i(Et - \vec{k} \cdot \vec{r})} \sigma_\lambda, \quad (2.20)$$

onde σ_λ é o spin da função de onda, tal que $\sigma_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\sigma_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Então, a densidade de partículas é encontrada por

$$\begin{aligned} n &= \sum_\lambda \sum_k \phi_{k,\lambda}^\dagger(\vec{r}) \phi(\vec{r})_{k,\lambda} = \frac{2}{V} \sum_k \\ &\approx \frac{2}{V} \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{p_F} k^2 dk, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde substituímos o somatório nos momentos por uma integral, e p_F indica o momento de Fermi. Assim, a densidade em um sistema uniforme é

$$n = \frac{p_F^3}{3\pi^2}. \quad (2.22)$$

A densidade de energia cinética deste sistema uniforme é dada

por:

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= \sum_{k < p_F} \sum_{\sigma} \frac{k^2}{2m} \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{p_F} k^2 dk \frac{k^2}{2m} \\
 &= \frac{p_F^5}{\pi^2 10m}, \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

onde m é a massa do férmion. Então, a energia cinética em termos da densidade é

$$\epsilon = \frac{3p_F^2}{10m} n \sim n^{5/3}. \tag{2.24}$$

Agora, passemos para um sistema não-uniforme, ou seja, um sistema no qual a densidade é uma função da posição $n(\vec{r})$. A aproximação semi-clássica consiste em assumir que a densidade possui a mesma forma funcional de (2.22). Assim, o momento de Fermi torna-se dependente da posição:

$$n(\vec{r}) = \frac{p_F^3(\vec{r})}{3\pi^2}, \tag{2.25}$$

e a densidade de energia cinética é agora um funcional da densidade local

$$\epsilon[n] = \frac{3p_F^2(\vec{r})}{10m} n(\vec{r}) \sim n^{5/3}(\vec{r}). \tag{2.26}$$

O próximo passo na teoria de Thomas-Fermi é relacionar o potencial externo $V(\vec{r})$ com a densidade local através da minimização do potencial termodinâmico grande-canônico. Veremos isto mais adiante.

2.3.2 Aproximação de Thomas-Fermi no Contexto da Matéria *npe* Não-Homogênea

Aqui vamos generalizar o procedimento do caso atômico para o caso nuclear. A matéria *npe* não-homogênea é tratada na aproximação de Wigner-Seitz.

Nas equações de movimento dos mésons (2.19), vemos nas fontes mesônicas os seguintes valores locais dos nucleons e dos elétrons: $\hat{\psi}\hat{\psi}$, $\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}$, $\hat{\psi}^\dagger\tau_3\hat{\psi}$ e $\hat{\psi}_e^\dagger\hat{\psi}_e$. Aqui aplicamos a aproximação de Thomas-Fermi identificando estes valores locais com o valor esperado no sistema:

$$n(\vec{r}) = \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}(\vec{r}) \equiv \langle \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}(\vec{r}) \rangle \quad (2.27)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{p_F(\vec{r})} k^2 dk . \quad (2.28)$$

Isto equivale a considerar o mesmo cálculo de densidade feito para um gás uniforme como sendo válido localmente para um gás não uniforme. Dito de outra forma, a aproximação de Thomas Fermi consiste em considerar que o sistema se comporta localmente como um gás. Isto é feito como em (2.27), da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \rho_B(\vec{r}) &= \rho_p(\vec{r}) + \rho_n(\vec{r}) = \langle \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \rangle , \\ \rho_3(\vec{r}) &= \rho_p(\vec{r}) - \rho_n(\vec{r}) = \langle \hat{\psi}^\dagger \tau_3 \hat{\psi} \rangle , \\ \rho_s(\vec{r}) &= \rho_{s_p}(\vec{r}) + \rho_{s_n}(\vec{r}) = \langle \hat{\psi} \hat{\psi} \rangle , \\ \rho_e(\vec{r}) &= \langle \hat{\psi}_e^\dagger \hat{\psi}_e \rangle , \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\langle \dots \rangle \equiv \sum_r \dots , \quad r \equiv \text{Todos os rótulos de estado} \quad (2.30)$$

onde ρ_B é a densidade bariônica e ρ_3 é a densidade de isospin (TYPEL; WOLTER, 1999); ρ_p , ρ_n e ρ_e são as densidades dos prótons, nêutrons e elétrons, e ρ_s é a densidade escalar. Usando as expressões acima podemos escrever as equações de movimento dos mésons (2.19) na aproximação de campo médio como

$$(-\nabla^2 + m_s^2)\phi(\vec{r}) = g_s \rho_s(\vec{r}) - \frac{1}{2} \kappa \phi^2(\vec{r}) - \frac{1}{6} \lambda \phi^3(\vec{r}) , \quad (2.31)$$

$$(-\nabla^2 + m_v^2)V_0(\vec{r}) = g_v \rho_B(\vec{r}) - \frac{1}{3!} \xi g_v^4 V_0^3(\vec{r}) , \quad (2.32)$$

$$(-\nabla^2 + m_\rho^2)b_0(\vec{r}) = \frac{g_\rho}{2} \rho_3(\vec{r}) , \quad (2.33)$$

$$-\nabla^2 A_0(\vec{r}) = e(\rho_p(\vec{r}) - \rho_n(\vec{r})) . \quad (2.34)$$

As equações (2.15,2.18) em conjunto com as equações acima, constituem um conjunto fechado de equações que podem ser solucionadas pelo método de Hartree (GAMBHIR; RING; THIMET, 1990). No entanto, tal procedimento é viável apenas para núcleos com poucos

nucleons e no caso da matéria *npe* da crosta de estrelas de nêutrons⁵ $A \sim 2000$. Mas a aproximação de Thomas-Fermi nos permite evitar resolver a equação de Dirac dos nucleons envolvidos e obter um método iterativo que nos forneça as densidades das partículas. O procedimento segundo o qual estamos trabalhando é o seguinte: primeiramente estima-se distribuições tentativa para as densidades (2.29). As soluções das equações de Klein-Gordon (2.31), usando estas fontes, nos retornam os campos mesônicos e um novo campo eletromagnético que podem ser usados para se calcular o potencial $U(\vec{r})$, equação (2.16) e a massa efetiva (2.17). Os potenciais químicos são ajustados em cada iteração para que a densidade bariônica global na célula de Wigner-Seitz seja mantida fixa.

A partir desta solução podemos calcular quantidades físicas tais como a energia total, magnetização e valores esperados como o raio quadrático médio, etc. Nas próximas seções vamos discutir mais detalhadamente estes cálculos na presença do campo magnético.

2.4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC PARA PARTÍCULAS LIVRES NA PRESENÇA DE CAMPO MAGNÉTICO

Vamos a seguir aplicar o procedimento descrito por *Melrose* (MELROSE; PARLE, 1983) para encontrar os autovalores das energias dos férmions submetidos a campos magnéticos fortes.

Em nosso modelo consideramos férmions completamente degenerados, ou seja, à temperatura zero. Além disso, as partículas estão sujeitas a um campo magnético externo constante na direção⁶ x_3 , garantido pelo potencial vetor $\vec{A} = (Bx_1)\hat{j}$, pois $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = B\hat{k}$. Portanto, A^μ é dado por

$$A^\mu = (A_0, 0, Bx_1, 0) = (A_0, \vec{A}) , \quad (2.35)$$

onde A_0 indica o potencial escalar.

A seguir apresentamos a equação de Dirac de forma generalizada para prótons e elétrons. Identificamos o sinal da carga por $\epsilon_q = \pm 1$, $q = p, e$, onde $\epsilon_p = +1$ e $\epsilon_e = -1$, e o módulo da carga é indicado simplesmente por e . Neste caso, a equação de Dirac é dada por

$$\{i\partial/\partial t - H_q(\vec{x})\}\psi(\vec{x}, t) = 0 , \quad (2.36)$$

⁵Cálculos deste tipo serão vistos no capítulo 4.

⁶Notação: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$

onde

$$H_q(\vec{x}) = \vec{\alpha} \cdot \{-i\vec{\nabla} - \epsilon_q e\vec{A}\} + \beta m_q + U_q, \quad (2.37)$$

e $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ indica as coordenadas espaciais. O momento linear dos férmions será indicado por $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$. As energias potenciais são

$$\begin{aligned} U_e &= -eA_0, \\ U_p &= g_v V_0 - \frac{1}{2} g_\rho b_0 + eA_0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

A massa m_q aqui simboliza a massa dos elétrons, m_e ou a massa efetiva dos prótons, M^* .

Pode-se mostrar que as componentes p_2 e p_3 do operador momento linear comutam com o Hamiltoniano (2.37), ou seja

$$[-i\partial/\partial x_2, H_q] = 0, \quad (2.39)$$

$$[-i\partial/\partial x_3, H_q] = 0, \quad (2.40)$$

porém, a componente p_1 não comuta devido à coordenada x_1 presente em \vec{A} . Logo, as autofunções da energia podem ser autofunções simultaneamente de p_2 e p_3 e o ansatz pode ser escrito como

$$\psi_r^\epsilon(\vec{x}, t) = f^\epsilon(x_1) e^{i[\epsilon p_2 x_2 + \epsilon p_3 x_3 - (\epsilon \mathcal{E}_q + U_q)t]}, \quad (2.41)$$

onde a solução⁷ para $f^\epsilon(x_1)$ nos retorna

$$\psi_r^\epsilon(\vec{x}, t) = \begin{bmatrix} C_1^\epsilon \nu_{nq}(\xi) \\ C_2^\epsilon \nu_{mq}(\xi) \\ C_3^\epsilon \nu_{nq}(\xi) \\ C_4^\epsilon \nu_{mq}(\xi) \end{bmatrix} e^{i[\epsilon p_2 x_2 + \epsilon p_3 x_3 - (\epsilon \mathcal{E}_q + U_q)t]}, \quad (2.42)$$

onde $\epsilon = \pm$, e indica a solução para partícula (+) e anti-partícula (-), porém, como não consideraremos as soluções para anti-partículas, esta notação será suprimida. Os ν 's são os polinômios de Hermite. Os polinômios a serem usados dependem do sinal da carga, tal que $n_q = n - \frac{(\epsilon_q + 1)}{2}$ e $m_q = n + \frac{(\epsilon_q - 1)}{2}$ e $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. A variável ξ é uma transformação de variáveis em termos de x_1 ⁸. Por fim, o rótulo r indica todos os rótulos quânticos deste modelo: n, σ_z, p_2, p_3 , onde n é o chamado número quântico principal e σ_z é o spin ao longo do eixo

⁷A derivação completa se encontra no Apêndice A.

⁸Apêndice A, equação (A.19).

do campo magnético. A normalização é dada por

$$N_{rr'} \equiv \int_V d^3x \psi_{r'}^\epsilon(\vec{x}, t)^\dagger \psi_r^\epsilon(\vec{x}, t) = \delta_{nn'} \delta_{\sigma_z \sigma'_z} \delta_{p_2 p'_2} \delta_{p_3 p'_3} . \quad (2.43)$$

Para que a solução da equação de Dirac não seja uma solução trivial, a energia cinética \mathcal{E}_q está restringida segundo a condição de que

$$\mathcal{E}_q = \sqrt{p_3^2 + \tilde{m}_{n, \sigma_z}^2} , \quad (2.44)$$

onde

$$\tilde{m}_{n, \sigma_z}^2 = m_q^2 + 2\left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\epsilon_q \sigma_z\right) eB . \quad (2.45)$$

A quantidade $l = \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\epsilon_q \sigma_z\right)$ é o chamado nível de Landau. Portanto o espectro de energia para os elétrons e para os prótons é, respectivamente,

$$E_e = \sqrt{p_3^2 + \tilde{m}_{n, \sigma_z}^2} - eA_0 , \quad (2.46)$$

$$E_p = \sqrt{p_3^2 + \tilde{m}_{n, \sigma_z}^2} + g_v V_0 + \frac{1}{2} g_\rho b_0 + eA_0 . \quad (2.47)$$

O espectro de energia do nêutron é o usual do modelo de Walecka, isto é, o de uma partícula fermiônica livre, encontrado pela equação de Dirac sem a interação com o campo eletromagnético. No entanto, o espectro é alterado pelas interações mesônicas:

$$E_n = \sqrt{p^2 + M^{*2}} + g_v V_0 - \frac{1}{2} g_\rho b_0 . \quad (2.48)$$

2.5 POTENCIAL TERMODINÂMICO GRANDE-CANÔNICO E OS POTENCIAIS QUÍMICOS

A partir das soluções da seção (2.4), podemos calcular as densidades de número de partículas (2.29) e também densidades de energia⁹. Para a temperatura zero e na presença de um campo magnético externo B , as densidades de número e de energia, excluída a interação,

⁹Os cálculos das densidades podem ser vistos no Apêndice C.

de férmions carregados são dadas respectivamente por

$$\rho_q(\vec{r}) = \frac{(eB)}{2\pi^2} \sum_{\sigma_z=\pm 1} \sum_{n=0}^{n_{max}} p_{F,n,\sigma_z}^q, \quad (2.49)$$

$$\epsilon_q(\vec{r}) = \frac{(eB)}{4\pi^2} \sum_{\sigma_z=\pm 1} \sum_{n=0}^{n_{max}} \left[p_{F,n,\sigma_z}^q \mathcal{E}_F^q + \tilde{m}_{n,\sigma_z}^{q2} \ln \left(\frac{p_{F,n,\sigma_z}^q + \mathcal{E}_F^q}{\tilde{m}_{n,\sigma_z}^q} \right) \right], \quad q = p, e. \quad (2.50)$$

Nas expressões acima, p_{F,n,σ_z}^q é o momento de Fermi para o nível com o número quântico principal n e spin σ_z . Conforme a condição (2.44), o momento de Fermi é dado por

$$p_{F,n,\sigma_z}^q = \sqrt{\mathcal{E}_F^{q2} - \tilde{m}_{n,\sigma_z}^{q2}}. \quad (2.51)$$

Veremos mais adiante que as energias de Fermi, \mathcal{E}_F^q , são encontradas pela fixação dos respectivos potenciais químicos. é importante notar que os somatórios sobre n são interrompidos em n_{max} , o qual é o número inteiro anterior ao valor de n para o qual o momento de Fermi é a raiz de um número negativo.

Como os níveis de energia do nêutron não são alterados pela presença do campo magnético (BRODERICK; PRAKASH; LATTIMER, 2000), a densidade de energia do nêutron, sem a interação, é encontrada por

$$\epsilon_n(\vec{r}) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{p_F^n(\vec{r})} dp p^2 \sqrt{p^2 + M^*}, \quad (2.52)$$

$$\epsilon_n(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^2} [2p_F^n(\vec{r})\mathcal{E}_F^{n3}(\vec{r}) - M^{*2}p_F^n(\vec{r})\mathcal{E}_F^n(\vec{r}) - M^{*4} \quad (2.53)$$

$$\times \ln\left(\frac{p_F^n(\vec{r}) + \mathcal{E}_F^n(\vec{r})}{M^*}\right)]. \quad (2.54)$$

A partir da Hamiltoniana (2.14) escrevemos a energia total na aproximação de Thomas-Fermi:

$$E_{TF} = \int \epsilon(\vec{r}) d^3r, \quad (2.55)$$

onde a integração é feita em uma célula de Wigner-Seitz, e

$$\begin{aligned} \epsilon(\vec{r}) = & \sum_{i=p,n,e} \epsilon_i(\vec{r}) + \frac{1}{2}e(\rho_p - \rho_e)A_0(\vec{r}) + g_v(\rho_p + \rho_n)V_0(\vec{r}) \\ & + \frac{1}{2}g_\rho(\rho_p - \rho_n)b_0(\vec{r}) + \frac{1}{2}[(\vec{\nabla}\phi)^2 + m_s^2\phi^2] \\ & + \frac{\kappa}{3!}\phi^3 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 - \frac{1}{2}[(\vec{\nabla}V_0)^2 + m_v^2V_0^2] \\ & - \frac{1}{4!}\xi g_v^4V_0^4 - \frac{1}{2}[(\vec{\nabla}b_0)^2 + m_\rho^2b_0^2] - \frac{1}{2}[(\vec{\nabla}A_0)^2 - B^2]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Utilizando as equações de movimento (2.31-2.34), pode-se reescrever $\epsilon(\vec{r})$ como

$$\epsilon(\vec{r}) = \sum_{i=p,n,e} \epsilon_i(\vec{r}) + \frac{1}{2}e(\rho_p(\vec{r}) - \rho_n(\vec{r}))A_0 + \frac{1}{2}g_v\rho(\vec{r})V_0 \quad (2.57)$$

$$+ \frac{1}{2}g_s\rho_s(\vec{r})\phi - \frac{1}{12}\kappa\phi^3 - \frac{1}{24}\lambda\phi^4 + \frac{1}{4}g_\rho b_0\rho_3(\vec{r}) + \frac{1}{2}B^2, \quad (2.58)$$

Portanto, na aproximação de Thomas-Fermi, a energia é um funcional das densidades.

O grande potencial termodinâmico é definido como (FETTER; WALECKA, 1971):

$$\Omega(T, V, \mu) = E_{TF} - TS - \sum_{i=n,p,e} \mu_i N_i, \quad (2.59)$$

onde T é a temperatura, S a entropia, μ_i o potencial químico da espécie em questão e N_i o número de partículas da mesma, na célula de Wigner-Seitz. Em nosso trabalho estamos utilizando $T = 0$, e considerando todos os férmions temos

$$\Omega = E_{TF} - \sum_{i=p,n,e} \mu_i \int d^3r \rho_i(\vec{r}). \quad (2.60)$$

A minimização do potencial termodinâmico¹⁰ acima, com o vínculo no número de partículas, resulta nas equações que relacionam as energias de Fermi com os potenciais químicos¹¹:

¹⁰Chakrabarty(CHAKRABARTY, 1996) realiza esse procedimento para o modelo de sacola do MIT, onde os férmions são quarks u e d livres.

¹¹O Apêndice D apresenta os cálculos para os potenciais químicos.

$$\sum_{s=\pm 1} \sum_{n=0}^{n_{max}} \sqrt{p_{F,n,\sigma_z}^2 + \tilde{m}_{n,\sigma_z}^2} + g_v V_0 + \frac{1}{2} g_\rho b_0 + e A_0 = \mu_p, \quad (2.61)$$

$$\sum_{s=\pm 1} \sum_{n=0}^{n_{max}} \sqrt{p_{F,n,\sigma_z}^2 + \tilde{m}_{n,\sigma_z}^2} - e A_0 = \mu_e, \quad (2.62)$$

$$\sqrt{p_F^2 + M^{*2}} + g_v V_0 - \frac{1}{2} g_\rho b_0 = \mu_n. \quad (2.63)$$

As três equações acima são fundamentais na iteração numérica. Elas relacionam as energias de Fermi aos potenciais químicos e, no caso de prótons e elétrons, aos níveis quantizados de Landau. Os potenciais químicos são encontrados por um processo de minimização numérica de forma que ρ_B e Y_p sejam fixos na célula de Wigner-Seitz. Esse processo também nos retorna o número correto de níveis de Landau.

2.6 EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

Veremos agora as soluções das equações bosônicas. Nosso objetivo central é analisar a matéria *npe* neutra na formação das estruturas da *pasta*. Para isto, as equações de Klein-Gordon associadas aos campos mesônicos (2.31-2.33) são resolvidas através da expansão dos campos em bases de oscilador harmônico em 1,2 e 3 dimensões, de acordo com a estrutura que estivermos tratando. Utilizamos aqui as técnicas ensinadas por Y. K. Gambhir, P. Ring e A. Thimet, principalmente a referência (GAMBHIR; RING; THIMET, 1990). O apêndice (F) do presente trabalho contém a solução completa para o caso 3D. Apresentaremos a seguir um breve resumo da solução.

As equações de Klein-Gordon (2.31-2.33) podem ser todas representadas de forma concisa por

$$(-\nabla^2 + m_\zeta^2)|\zeta\rangle = |s_\zeta\rangle, \quad (2.64)$$

ou, devido às simetrias que estamos assumindo

$$(3D) \quad \left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + m_\zeta^2 \right) \zeta(r) = s_\zeta(r) , \quad (2.65)$$

$$(2D) \quad \left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + m_\zeta^2 \right) \zeta(r) = s_\zeta(r) , \quad (2.66)$$

$$(1D) \quad \left(-\frac{d^2}{dr^2} + m_\zeta^2 \right) \zeta(r) = s_\zeta(r) , \quad (2.67)$$

onde ζ representa os campos mesônicos ϕ , V_0 e b_0 , e s_ζ representa as fontes correspondentes, ou seja,

$$s_\sigma = g_s \rho_s(r) - \frac{1}{2} \kappa \phi^2 - \frac{1}{6} \lambda \phi^3 , \quad (2.68)$$

$$s_v = g_v \rho(r) - \frac{1}{3!} \xi g_v^4 V_0^3 , \quad (2.69)$$

$$s_\rho = \frac{g_\rho}{2} \rho_3(r) . \quad (2.70)$$

As equações de Klein-Gordon são resolvidas expandindo-se os campos em bases do oscilador harmônico. Em particular, a base do oscilador 3D é dada em termos dos polinômios associados de Laguerre¹² \mathcal{L}_n^a na forma

$$\phi_n(r) = \frac{N_{n0}}{b_B^{3/2}} L_{n-1}^{1/2} \left(\frac{r^2}{b_B^2} \right) e^{-r^2/2b_B^2} , \quad (2.71)$$

onde b_B é o comprimento do oscilador, r o raio no interior da célula de Wigner-Seitz (tal que $r \equiv |\vec{r}|$), e N_{n0} é a constante de normalização. Portanto, expandindo os campos e fontes correspondentes, temos

$$\begin{aligned} \zeta(r) &= \sum_{n=1}^{N_B} a_n \phi_n(r) , \\ s_\zeta(r) &= \sum_{n=1}^{N_B} b_n \phi_n(r) . \end{aligned} \quad (2.72)$$

Substituindo as expansões (2.72) na equação (2.65) obtemos uma equação matricial tridiagonal,

$$\sum_{n'=1}^{N_B} \mathcal{H}_{n'n} a_{n'} = b_n , \quad (2.73)$$

¹²Os Polinômios e algumas relações importantes se encontram no Apêndice (E).

onde

$$\mathcal{H}_{n'n} = \left(b_B^{-2} \left(2(n-1) + \frac{3}{2} \right) + m_\xi^2 \right) \delta_{n'n} \quad (2.74)$$

$$+ b_B^{-2} \sqrt{n'(n'+1/2)} \delta_{n,n'+1} \quad (2.75)$$

$$+ b_B^{-2} \sqrt{n(n+1/2)} \delta_{n',n+1} . \quad (2.76)$$

A solução de (2.73) nos retorna os coeficientes corretos para as expansões dos campos e das fontes. Há muitos algoritmos eficientes que podem ser utilizados para solucionar equações matriciais tridiagonais (PRESS et al., 1992). Para os termos não-lineares das fontes é usado um procedimento de autoconsistência, que pode ser visto na seção (F.2) do Apêndice.

2.7 COEFICIENTE DE TENSÃO SUPERFICIAL

O cálculo da energia de superfície por unidade de área σ , também chamado de coeficiente de tensão superficial, será importante na determinação da geometria dos núcleos na pasta, principalmente no que diz respeito à transição da geometria bolha para a matéria-homogênea. A derivação completa da expressão para σ pode ser encontrada no apêndice da referência (AVANCINI et al., 2010). Obtém-se σ a partir da energia livre de um sistema com um número fixo de partículas, $N = N_p + N_n$, onde N_p e N_n correspondem respectivamente ao número de prótons e ao número de nêutrons no sistema. A energia livre para um agregado de volume V e superfície S , imerso em uma fase gasosa é

$$F = \Omega + \mu_p N_p + \mu_n N_n \quad (2.77)$$

$$= S\sigma - CV + \mu_p N_p + \mu_n N_n , \quad (2.78)$$

onde C é a constante que corresponde à contribuição do volume para o potencial grande-canônico Ω . Pode-se identificar C com a pressão P .

O potencial grande-canônico é dado por

$$\Omega = \int dV \left[\left(\frac{d\phi_0}{dz} \right)^2 - \left(\frac{dV_0}{dz} \right)^2 - \left(\frac{db_0}{dz} \right)^2 \right] - CV \quad (2.79)$$

$$= S \int dr \left[\left(\frac{d\phi_0}{dz} \right)^2 - \left(\frac{dV_0}{dz} \right)^2 - \left(\frac{db_0}{dz} \right)^2 \right] - CV \quad (2.80)$$

e a energia de superfície por unidade de área é

$$\sigma = \int_0^\infty dr \left[\left(\frac{d\phi_0}{dr} \right)^2 - \left(\frac{dV_0}{dr} \right)^2 - \left(\frac{db_0}{dr} \right)^2 \right]. \quad (2.81)$$

Rigorosamente falando, a equação (2.81) nos retorna precisamente a energia devido a uma superfície plana considerando-se a matéria semi-infinita, com a interação Coulombiana desligada. No entanto, utilizaremos esta expressão como uma aproximação capaz de nos fornecer o grau de importância da superfície no balanço energético do núcleo formado, qualquer que seja sua geometria.

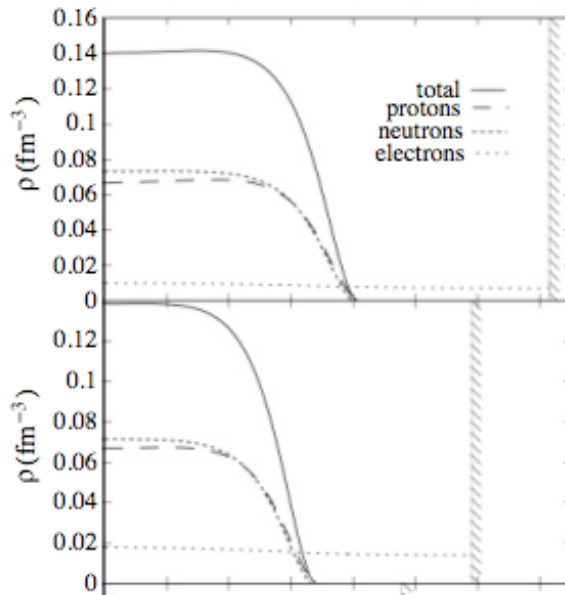


Figura 8: Geometrias *gota* (superior) e *cilindro* (inferior). Fração de prótons $Y_p = 0.5$. O rótulo *total* indica a densidade bariônica, ou seja, $\rho_b = \rho_p + \rho_n$.

3 MAGNETIZAÇÃO E EFEITO DE HAAS-VAN ALPHEN

*At quite uncertain times and places,
The atoms left their heavenly path,
And by fortuitous embraces,
Engendered all that being hath.*
- James Clerck Maxwell.

Neste capítulo discutiremos alguns efeitos devido à quantização de Landau. As grandezas importantes nesta análise são a magnetização \mathcal{M} da matéria e a intensidade H do campo magnético induzido em relação ao campo magnético externo B . A magnetização caracteriza a resposta da matéria ao campo magnético B , a qual pode atuar, por exemplo, reduzindo ou aumentando a intensidade do campo induzido (LANDAU; LIFSHITZ, 1982).

Sabe-se que a magnetização da matéria na crosta das estrelas de nêutrons, em geral, é muito pequena quando comparada ao campo B externo (BLANDFORD; HERNQUIST, 1982). No entanto, a magnetização pode sofrer grandes oscilações conforme o campo magnético é alterado se a energia térmica dos elétrons é menor que o espaçamento entre os níveis de Landau. Este efeito será explorado mais adiante.

Nossa base teórica é o amplo estudo da matéria estelar sob campos magnéticos gigantes feito por Broderick et al. (BRODERICK; PRAKASH; LATTIMER, 2000). Os resultados apresentados por Broderick são para matéria constituída por bárions (n,p) e léptons (e, μ) em equilíbrio β . E as densidades exploradas são de $0.5\rho_0$, $1\rho_0$ e $2\rho_0$. Ressaltamos que em nosso caso não utilizamos equilíbrio β , ainda que tenhamos matéria nuclear neutra pela adição de elétrons (matéria npe). Estudamos exclusivamente a pasta nuclear, para a qual levamos em conta as geometrias adequadas (bolha, gota, etc). A expressão que relaciona a densidade de energia total, $\epsilon \equiv E_{TF}/V$, com a intensidade do campo magnético e com a magnetização, em unidades Heaviside-Lorentz¹, é (LANDAU; LIFSHITZ, 1982):

$$H = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial B} \right)_{\rho_B} = B + \mathcal{M}, \quad (3.1)$$

em que ρ_B é mantida constante.

¹Neste sistema de unidade a carga do elétron é dada por $e = \sqrt{4\pi/137}$.

O campo magnético necessário para afetar a estrutura de uma estrela de nêutrons pode ser estimado com análise dimensional, como ensinado por Lai e Shapiro (1991): A energia devido ao campo magnético B ,

$$E_B \sim \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right) \left(\frac{B^2}{8\pi} \right), \quad (3.2)$$

deve ser da mesma ordem de grandeza da energia de ligação gravitacional,

$$E_G \sim GM^2/R, \quad (3.3)$$

ou seja

$$B \sim 2.10^{18} \left(\frac{M}{1.4 M_\odot} \right) \left(\frac{R}{10 \text{ km}} \right)^{-2} G, \quad (3.4)$$

onde M e R são, respectivamente, a massa e o raio da estrela. Cristian *et al.* estudam esta correspondência entre a estrutura estelar e o campo magnético na referência (CARDALL; PRAKASH; LATTIMER, 2001).

Sabemos que o movimento orbital das partículas carregadas da matéria é quantizado pelos níveis de Landau. Nesse contexto, pode-se estimar para qual campo magnético, chamado de campo crítico, efeitos relativísticos tornam-se importantes no cálculo da EOS. O campo crítico é aquele em que a energia de ciclotron das partículas, (para o elétron $e\hbar B/mc$), é comparável à sua massa vezes c^2 . Ou seja, o campo magnético crítico para o elétron, denotado por B_c^e , é dado por

$$\frac{e\hbar B_c^e}{m_e c} = m_e c^2, \quad (3.5)$$

$$B_c^e = \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^2 \times \frac{\hbar c}{e} = 4,41 \times 10^{13} G, \quad (3.6)$$

e para o próton temos o campo crítico

$$B_c^p = (m_p/m_e)^2 B_c^e = 1,487 \times 10^{20} G. \quad (3.7)$$

Em virtude da ordem de grandeza dos campos que entrarão em nossos cálculos, e também para melhor comparação com a literatura da área, será conveniente em alguns gráficos expressar B em termos de B_c^e , ou seja, $B^* \equiv B/B_c^e$.

3.1 OS NÍVEIS DE LANDAU COMO QUANTIDADES LOCAIS NA CÉLULA DE WIGNER-SEITZ

Como já foi mostrado², o momento de Fermi das partículas carregadas é uma quantidade local na aproximação de Thomas-Fermi. Para facilitar a nossa discussão, escrevemos novamente a equação (2.49) para a densidade de um férmion carregado:

$$\rho_q(\vec{r}) = \frac{(eB)}{2\pi^2} \sum_{\sigma_z = \pm 1} \sum_{n=0}^{n_{max}} p_{F,n,\sigma_z}^q, \quad (3.8)$$

onde o momento de Fermi é

$$p_{F,n,\sigma_z}^q = \sqrt{\mathcal{E}_F^{q2} - m_q^2 - 2\left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\epsilon_q\sigma_z\right)eB}, \quad q = p, e.$$

As relações acima implicam que existe a possibilidade de se encontrar uma quantidade diferente de níveis de Landau para cada ponto da célula de Wigner-Seitz, lembrando que n_{max} interrompe o somatório antes do quadrado do momento de Fermi tornar-se negativo. As figuras (9-12) apresentam o número de níveis de Landau ao longo do raio de uma célula de Wigner-Seitz com geometria *bolha*; cada uma das figuras foi obtida para um campo magnético diferente. Estas figuras são exemplos típicos deste tipo de cálculo.

Comparando-se as figuras para diferentes campos magnéticos torna-se evidente um outro efeito da quantização de Landau: quanto maior o campo magnético, menor o número de níveis. Observe, por exemplo, em $r = 12 \text{ fm}$ o próton possui um total de 34 níveis de Landau para $B = 10^{17} \text{ G}$, figura (9), e apenas 1 nível quando $B = 1.7 \times 10^{18} \text{ G}$, figura (12). Este efeito é uma consequência direta da forma do momento de Fermi e da exigência de que seu valor seja positivo.

A seguir, apresentamos uma outra consequência direta da quantização de Landau. Nossa análise será facilitada se observarmos o número de níveis de Landau em um único ponto da célula enquanto fazemos o campo magnético variar: escolhemos o ponto central da célula. Apresentamos na figura (13) o número de níveis de Landau, e na figura (14) alguns valores do momento de Fermi para cada nível de Landau.

Novamente, observa-se que o número de níveis decresce conforme

²Seção 2.3.

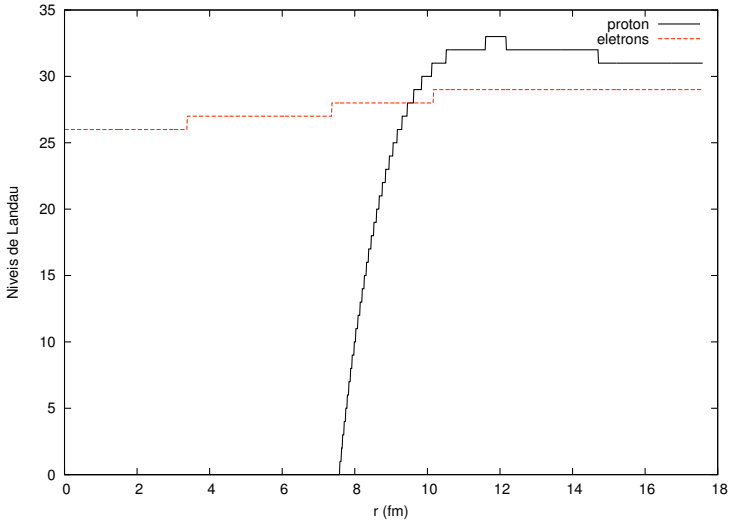


Figura 9: Número de níveis de Landau para a geometria *bolha* em função do raio da célula de Wigner-Seitz à densidade $\rho_b = 0.095 \text{ fm}^{-3}$ e campo magnético $B = 1 \times 10^{17} \text{ G}$. Parametrização NL3 e fração de prótons $Y_p = 0.3$.

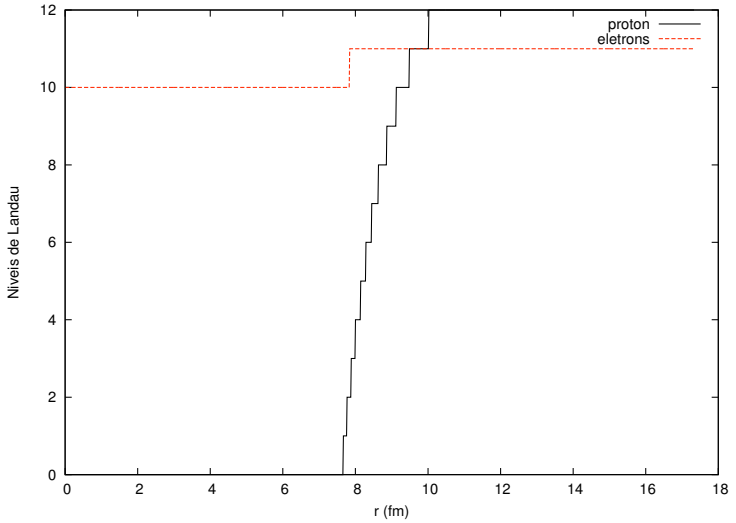


Figura 10: número de níveis de Landau para a geometria *bolha* em função do raio da célula de Wigner-Seitz à densidade $\rho_b = 0.095 \text{ fm}^{-3}$ e campo magnético $B = 2.56 \times 10^{17} \text{ G}$. Parametrização NL3 e fração de prótons $Y_p = 0.3$.

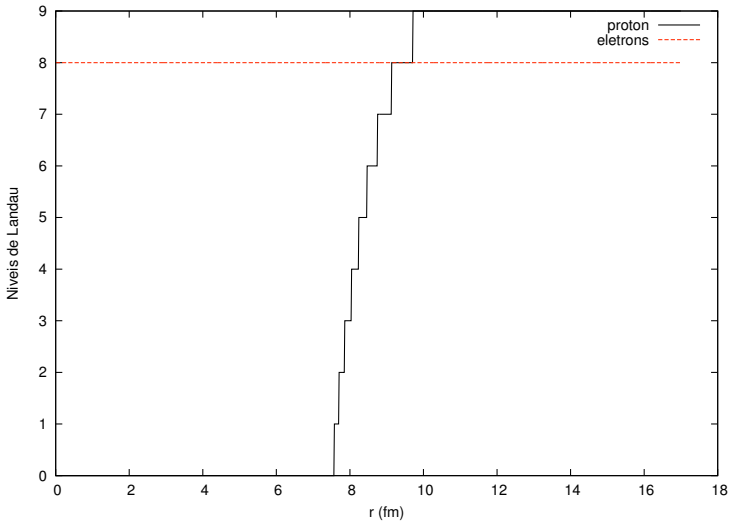


Figura 11: número de níveis de Landau para a geometria *bolha* em função do raio da célula de Wigner-Seitz à densidade $\rho_b = 0.095 \text{ fm}^{-3}$ e campo magnético $B = 3.34 \times 10^{17} \text{ G}$. Parametrização NL3 e fração de prótons $Y_p = 0.3$.

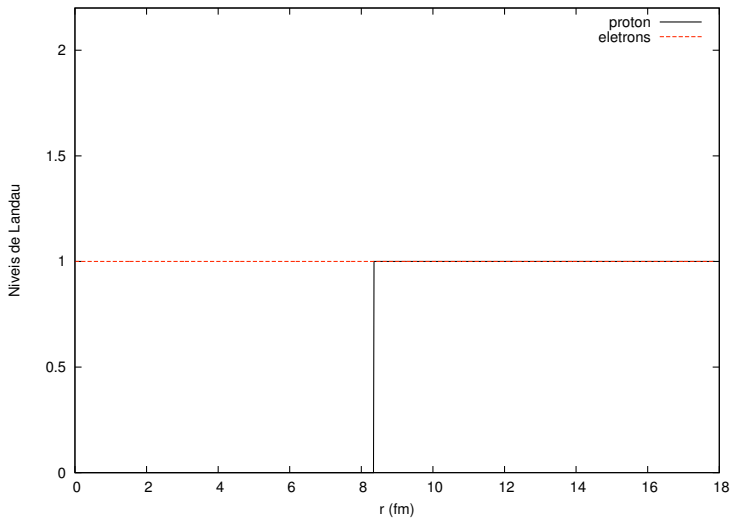


Figura 12: número de níveis de Landau para a geometria *bolha* em função do raio da célula de Wigner-Seitz à densidade $\rho_b = 0.095 fm^{-3}$ e campo magnético $B = 1.7 \times 10^{18} G$. Parametrização NL3 e fração de prótons $Y_p = 0.3$.

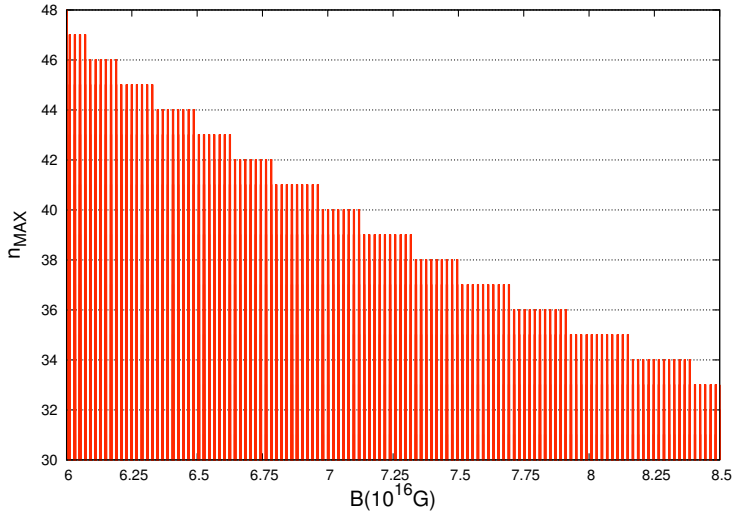


Figura 13: Número de níveis de Landau do elétron no centro da célula de WS, em função do campo magnético para a geometria bolha..

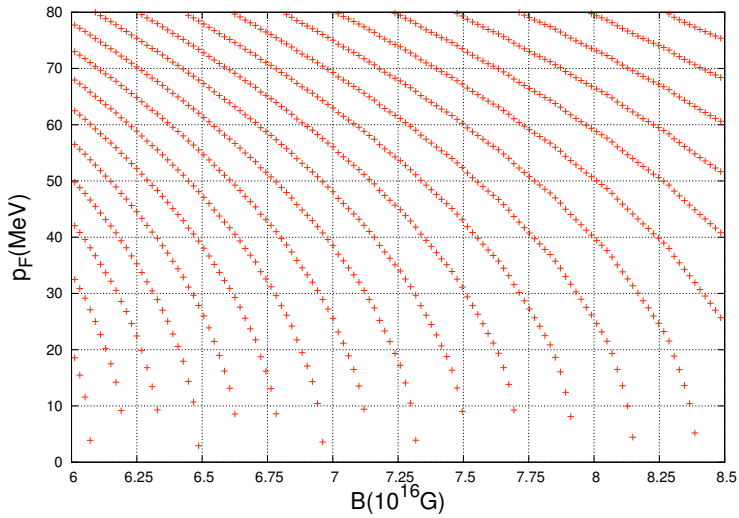


Figura 14: Momentos de Fermi do elétron no centro da célula de WS, em função do campo magnético para a geometria bolha.

se aumenta o campo magnético. No entanto, estas figuras ressaltam outra consequência da quantização de Landau. A equação (3.8) nos diz que a densidade em r é igual à soma de todos os níveis de momentos de Fermi disponíveis em r . Observe na figura (14) que em $B = 7.5 \times 10^{16} G$, os dois níveis com valores mais baixos tem momentos de Fermi igual a 10 e 30 MeV, ou seja, possuem uma diferença de 20 MeV. Então, quando $B = 7.75 \times 10^{16} G$, o número de níveis cai de 37 para 36. Para este campo, os dois níveis mais baixos possuem uma diferença de $\sim 12.5 MeV$. Portanto, a diferença entre os níveis mais baixos decresceu com o aumento do campo magnético. Mas, em seguida, quando o campo chega a $8 \times 10^{16} G$, a diferença entre os níveis mais baixos cresce para 15 MeV.

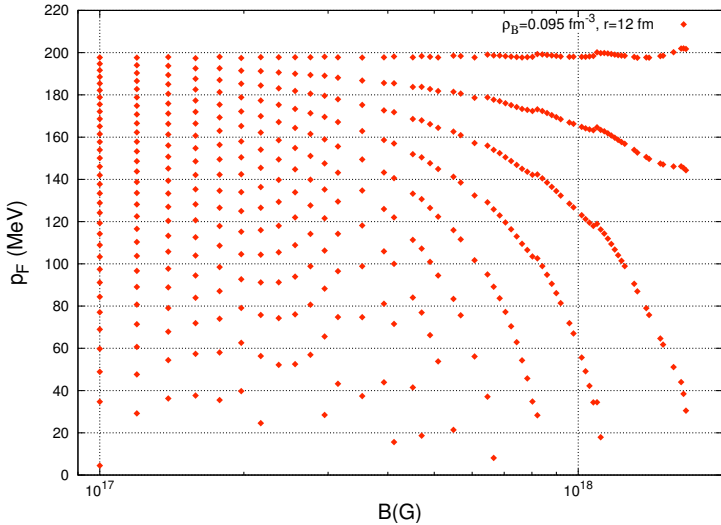


Figura 15: Momentos de Fermi no centro da célula de WS, em função do campo magnético para a geometria bolha.

Para campos magnéticos altos esta oscilação torna-se mais importante devido ao pequeno número de níveis de Landau: para campos altos o número de níveis é pequeno (1 a 3 níveis), e a diferença de energia entre os níveis consecutivos é grande. Considere a figura (15) calculada para a geometria bolha. Observa-se grande diferença entre cada um dos 3 níveis de Landau restantes quando o campo se torna maior que $10^{18} G$. Cada incremento no campo B obriga as partículas a ocuparem novos níveis fazendo com que a densidade local oscile. Este efeito

quântico oscilatório é conhecido na literatura como *efeito de Haas-van Alphen*.

3.2 O EFEITO DE HAAS-VAN ALPHEN

O Efeito *de Haas-van Alphen* (dHvA), nomeado após sua descoberta em 1930 por W. J. de Haas e P. M. van Alphen, é um fenômeno bastante conhecido tanto experimentalmente quanto teoricamente (SHOEMBERG, 1984), e desde sua descoberta tem sido usado como uma poderosa ferramenta no estudo de superfícies de Fermi e de propriedades eletrônicas. Tem sido muito estudado no âmbito da fase hadrônica das estrelas de nêutrons (BRODERICK; PRAKASH; LATTIMER, 2000) e também da crosta de estrelas de nêutrons (BLANDFORD; HERNQUIST, 1982).

A seguir vemos resultados para campos magnéticos da ordem de $10^{16} G$. Nesta faixa de campos os resultados são praticamente idênticos a um sistema com campo magnético igual a zero. No entanto, pode-se ver a influência do campo B surgindo em pequenas escalas. As figuras (16-18) mostram a evolução dos potenciais químicos de cada partícula. Note o comportamento oscilatório dos potenciais químicos de cada espécie inclusive do nêutron, ainda que este não participe da interação eletromagnética e portanto não interage diretamente com o campo B . Veremos no próximo capítulo que estas oscilações tornam-se relevantes para campos magnéticos $\sim 10^{17} G$.

Lembramos aqui que a densidade bariônica na célula de Wigner-Seitz é constante, no entanto o número de bárions no interior da célula não é constante. A variação periódica das densidades locais e dos potenciais químicos obriga outras quantidades a variarem afim de manter a densidade bariônica constante, bem como preservar a neutralidade de carga. Isto pode ser observado na tabela de figuras (3). Perceba que o raio da célula de Wigner-Seitz e o número de partículas tem o mesmo perfil de mudança com o campo magnético.

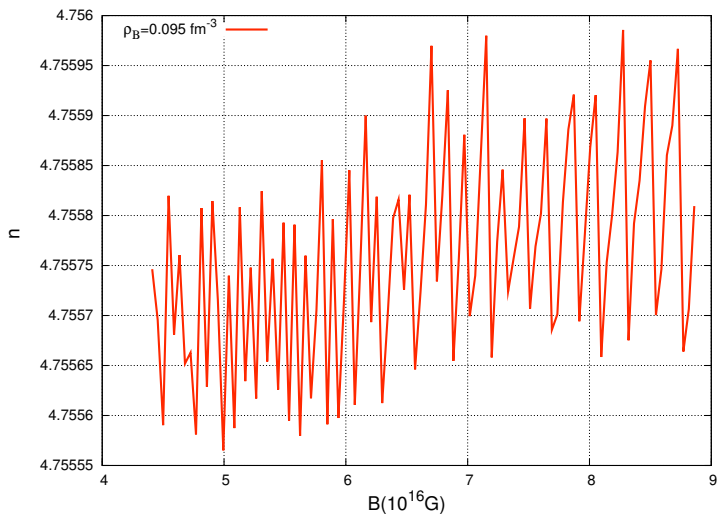


Figura 16: Potenciais químicos em função do campo magnético aplicado.

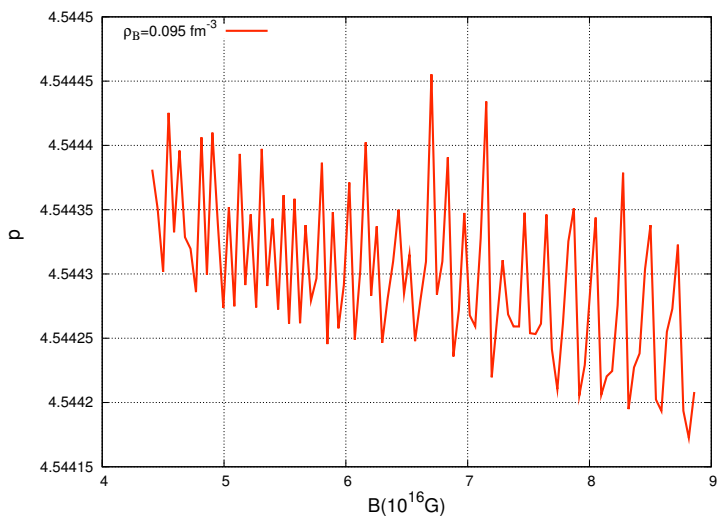


Figura 17: Potenciais químicos em função do campo magnético aplicado.

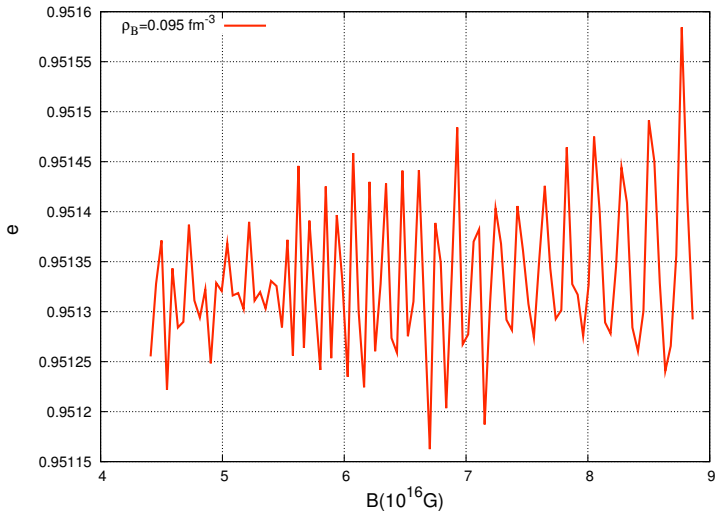
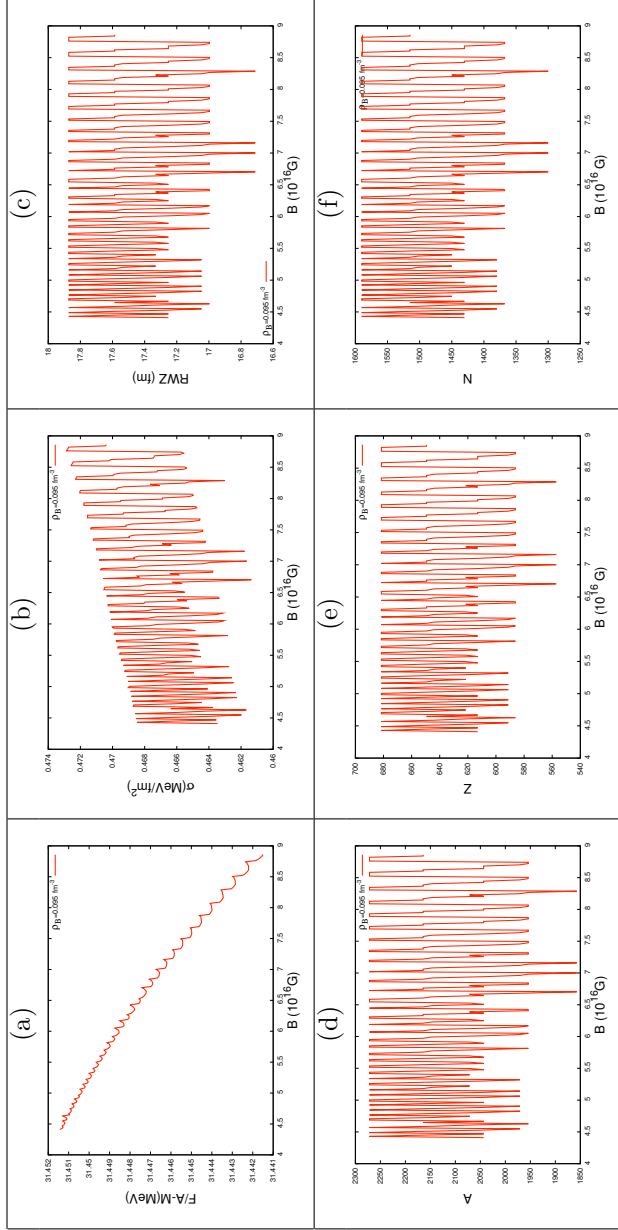


Figura 18: Potenciais químicos em função do campo magnético aplicado.

Tabela 3: Grandezas: (a) Energia Livre por partícula, (b) Energia de superfície σ , (c) Raio da célula de Wigner-Seitz (RWZ) e número de (d) Nucleons (e) Prótons e (f) Nêutrons.



Na seção (2.3) vimos que na aproximação de Thomas-Fermi a densidade total de energia é um funcional da densidade de número de partículas. Isto explica os pequenos saltos na equação de estado, apresentada na figura (a) da tabela (3). A diminuição da energia livre, devido ao campo magnético, é uma consequência do surgimento dos níveis de Landau.

Como vimos, o número de níveis de Landau diminui conforme se aumenta o campo. Em virtude disto, cresce a degenerescência no sistema e poucos níveis são populados, levando a uma diminuição na energia livre total. Além disso, a diminuição da energia livre significa um estado de partículas mais ligadas e, desta forma, o sistema gasta mais energia para criar uma superfície na qual as partículas não possuem todos os vizinhos (PROVIDENCIA, 2012). Isto pode ser visto na figura (b) da tabela (3), onde a energia de superfície cresce com o campo magnético.

A seguir são apresentados os cálculos da intensidade do campo H . As figuras (19-23) apresentam os resultados para a parametrização NL3, e as figuras (24-25) apresentam os resultados para TM1. Vê-se claramente o efeito $dHvA$, em que a magnetização oscila conforme as partículas populam novos níveis de Landau, fazendo também o campo H variar com B . Perceba-se que cada um destes cálculos foi feito para uma densidade bariônica diferente, a saber, a densidade para a qual cada estrutura da pasta deve existir para a fração de prótons $Y_p \equiv \rho_p/\rho_B = 0.3$, com temperatura $T = 0$ na aproximação de Thomas-Fermi (AVANCINI et al., 2008). Pode-se ver que, como comportamento geral para as diferentes estruturas, a magnetização é extremamente pequena. Percebe-se também que para campos magnéticos baixos, $B^* < 10^4$, as oscilações $dHvA$ possuem uma frequência alta, consistente com a grande variação no número de níveis de Landau. É bastante evidente que para campos próximos de $B^* = 10^4$ as oscilações tendem a um período longo devido ao baixo número de níveis de Landau pois, tipicamente, nesta região, tem-se apenas um nível. A maioria das oscilações, devido a $|4\pi\mathcal{M}/B|$, nunca atingem amplitudes maiores que 1% dos campos B aqui investigados. Este resultado é consistente com os cálculos na matéria homogênea de Broderick *et al.* (BRODERICK; PRAKASH; LATTIMER, 2000). No entanto, para campos baixos, $B^* \sim 10^3$, notamos uma considerável diferença para a geometria bolha quando a parametrização é TM1, ver figura (25). A maioria das oscilações, nesta região, tem amplitudes em torno de 2%, e as maiores em torno de 4%. Um comportamento semelhante é encontrado por Broderick apenas para densidades $\rho_B \sim 2\rho_0$.

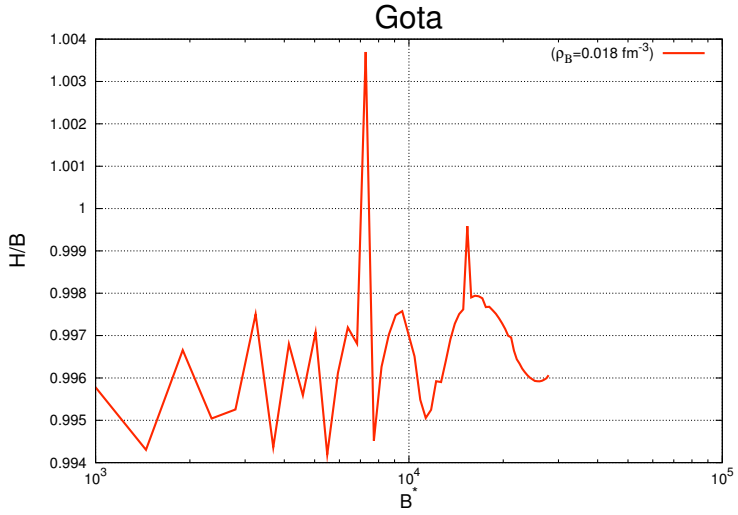


Figura 19: NL3 e $Y_p = 0.3$.

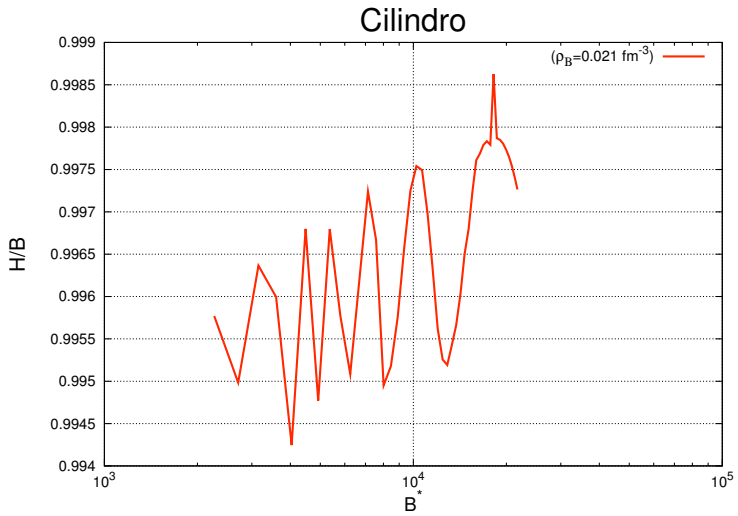


Figura 20: NL3 e $Y_p = 0.3$.

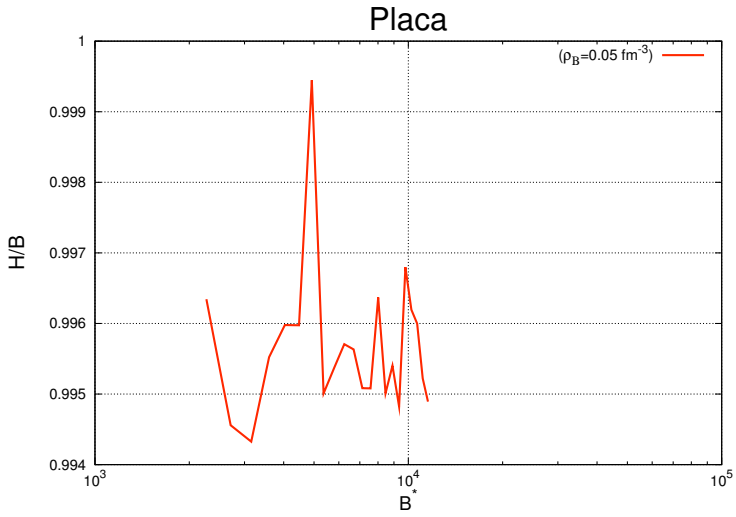


Figura 21: NL3 e $Y_p = 0.3$.

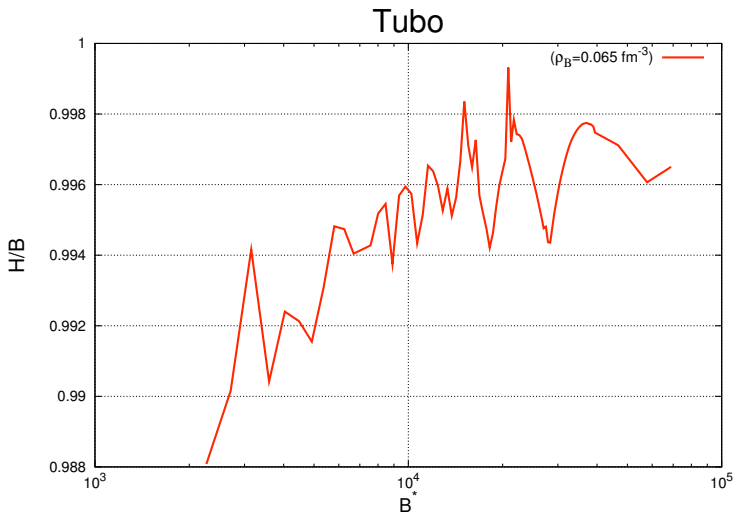


Figura 22: NL3 e $Y_p = 0.3$.

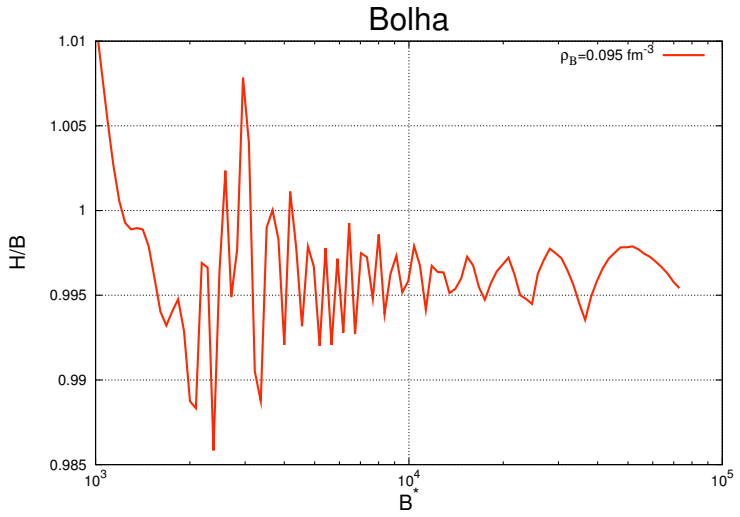


Figura 23: NL3 e $Y_p = 0.3$.

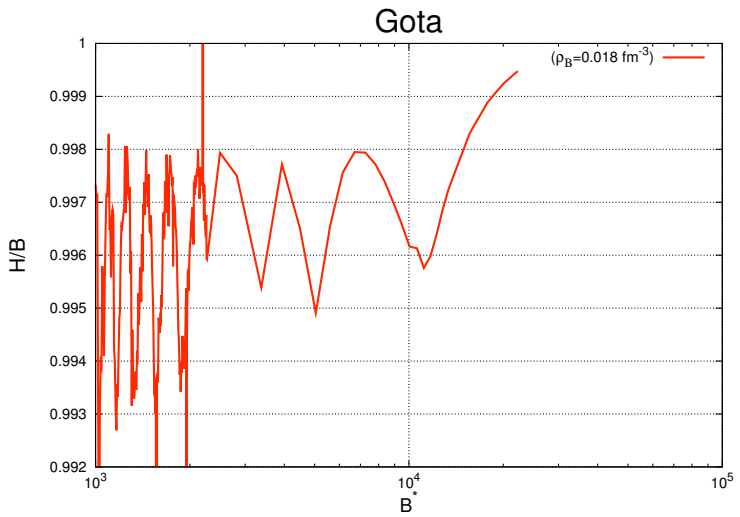


Figura 24: TM1 e $Y_p = 0.3$.

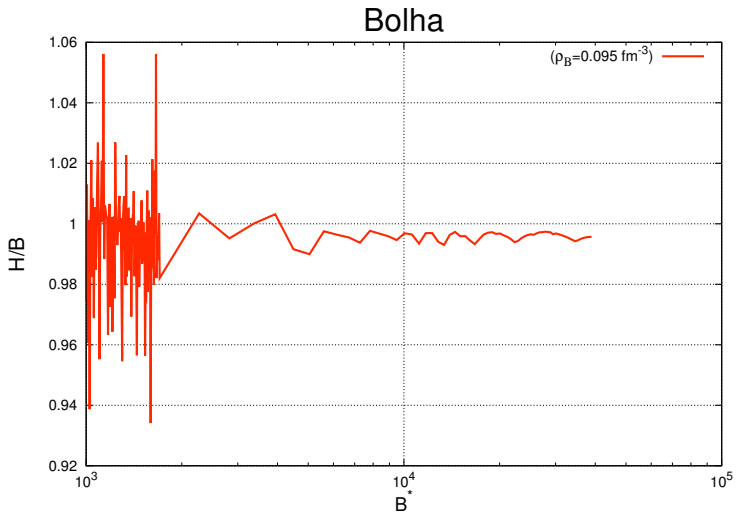


Figura 25: TM1 e $Y_p = 0.3$.

4 EFEITOS DO CAMPO MAGNÉTICO NA EOS

There's two possible outcomes: if the result confirms the hypothesis, then you've made a discovery. If the result is contrary to the hypothesis, then you've made a discovery. - Enrico Fermi.

Aqui apresentamos os resultados obtidos pelos cálculos numéricos implementados para o modelo discutido. Em suma, tratamos de nucleons e elétrons no interior de uma célula de Wigner-Seitz interagindo segundo o modelo de Walecka não-linear.

Inicialmente apresentamos alguns cálculos de validação. A validação é feita para campos magnéticos da ordem de $10^{15} - 10^{17} G$. Em tal região os resultados devem ser idênticos aos resultados obtidos para campo magnético igual a zero, já que os campos críticos para elétron e próton são¹, respectivamente, $4.41 \times 10^{13} G$ e $1.487 \times 10^{20} G$.

Após isso, passamos ao estudo de transições que ocorrem nas mais baixas densidades da matéria *npe*: Transição da fase de gotas para a fase de cilindros. Então apresentamos os resultados na região oposta da pasta, ou seja, as transições que precedem a matéria homogênea. Assim, estendemos os resultados de Avancini *et al.* (AVANCINI et al., 2008)(AVANCINI et al., 2010), pela inclusão do campo magnético. Em todos estes casos os campos magnéticos são variados dos mais baixos até os mais altos de forma que seja possível ao código numérico utilizar a cada novo campo calculado parte das soluções de passos anteriores. Tal procedimento tem se mostrado eficaz no cálculo de campos acima de $10^{17} G$. Em alguns casos, para fins de comparação, apresentamos cálculos com campo magnético zero.

Todos os cálculos foram realizados com a parametrização NL3, e a fração de prótons é dada por

$$Y_p = \rho_p / \rho_B, \quad (4.1)$$

onde ρ_p é a densidade de prótons e ρ_B é a densidade bariônica. Fixamos $Y_p = 0.3$ por ser relevante no estudo da matéria de supernova e de estrelas de nêutrons (AVANCINI et al., 2010). Também tem-se neutralidade de carga na célula de Wigner-Seitz, garantida por

$$\rho_e = \rho_p, \quad (4.2)$$

¹Capítulo 3.

onde ρ_e é a densidade de elétrons na célula.

A energia livre é definida como

$$F = E_{TF} - TS, \quad (4.3)$$

mas todos os nossos resultados são para temperatura zero, logo $F = E_{TF}$. Além disso, apresentaremos a energia livre por nucleon com a massa do nucleon subtraída, ou seja, $F/A - M$. Esta escala é usada frequentemente na literatura para se comparar os números obtidos às energias de ligação normalmente utilizadas para temperatura zero (AVANCINI et al., 2008).

4.1 CÁLCULOS DE VALIDAÇÃO

Para efeito de teste e validação de nosso código numérico fazemos aqui uma comparação entre nossos resultados e os resultados obtidos por outros algoritmos já estabelecidos neste campo de pesquisa. Iremos nos referir ao nosso código como *pastaTF-B*². A baixas densidades, na ausência de campo magnético, o comparamos ao *pastaTF*, desenvolvido por Sidney S. Avancini. Para densidades $\rho_B > 0.1 \text{ fm}^{-3}$, com campo magnético, o comparamos ao código *tm1eosb*, desenvolvido por Constança Providência.

4.1.1 Comparação entre *pastaTF-B* e *pastaTF*

A figura (26) mostra a primeira validação. O *pastaTF* fornece o resultado da energia livre para a geometria bolha na ausência de campo magnético (indicado como $B = 0$). O *pastaTF-B* foi ajustado para o campo $B = 1 \times 10^{17} \text{ G}$. Essa magnitude de campo corresponde a $B^* = 2.2 \times 10^3$ e deve fornecer a mesma EOS que o caso sem campo. Pode-se perguntar porque não escolhemos campos ainda menores já que desejamos um resultado próximo daquele sem campo magnético. Deve-se lembrar de discussões anteriores que quanto menor o campo magnético, maior o número de níveis de Landau em cada ponto da célula. Poderíamos escolher, por exemplo, $B = 4.41 \times 10^{15} \text{ G}$, que corresponderia a $B^* = 100$. Nesse caso teríamos cerca de 4000 níveis de Landau em muitos pontos da célula. Como, em geral, trabalhamos com 2800 pontos, tais cálculos podem ser muito lentos e até impra-

²Acrônimo para *Pasta Nuclear na Aproximação de Thomas-Fermi sob Campo Magnético (B)*.

ticáveis. Daí escolhermos um campo que, apesar de alto, se aproxima muito de um cálculo completamente sem campos magnéticos. Esta correspondência pode ser vista claramente na figura (26).

A figura (27) apresenta as energias livres calculadas com o *pastaTF-B* para as cinco geometrias da pasta, também sob $B = 1 \times 10^{17} G$. Pode-se perceber que em certas regiões um tipo de geometria pode favorecer uma energia livre menor. Por exemplo, no intervalo $(0.0325, 0.0375) fm^{-3}$ (mostrado no detalhe da figura) pode-se ver a inversão entre as energias das fases *cilindro* e *placa*, culminando na transição de fase quando a energia livre da fase *placa* passa a ser menor. Este é justamente o critério para a determinação das fases da pasta nuclear e, dado o campo magnético escolhido, podemos comparar estes resultados aos resultados estabelecidos na literatura da área. A tabela (4) apresenta na figura (a) os resultados da referência (AVANCINI et al., 2010). A figura (b) corresponde aos cálculos da figura (27) com $T = 0$. A transição para a matéria homogênea não é apresentada nesta figura, isto será discutido mais adiante.

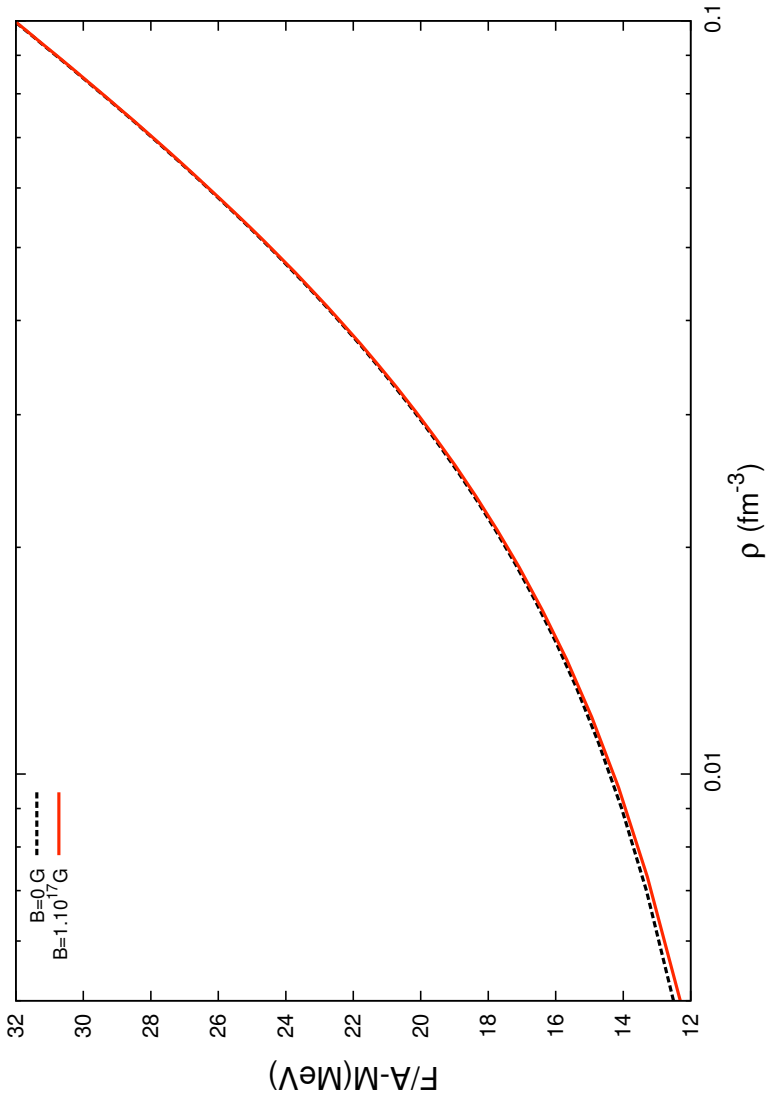


Figura 26: Energia livre calculada com $B = 1 \cdot 10^{17} \text{ G}$ comparada ao cálculo sem campo magnético. Parametrização NL3 e fração de prótons $Y_p = 0.3$.

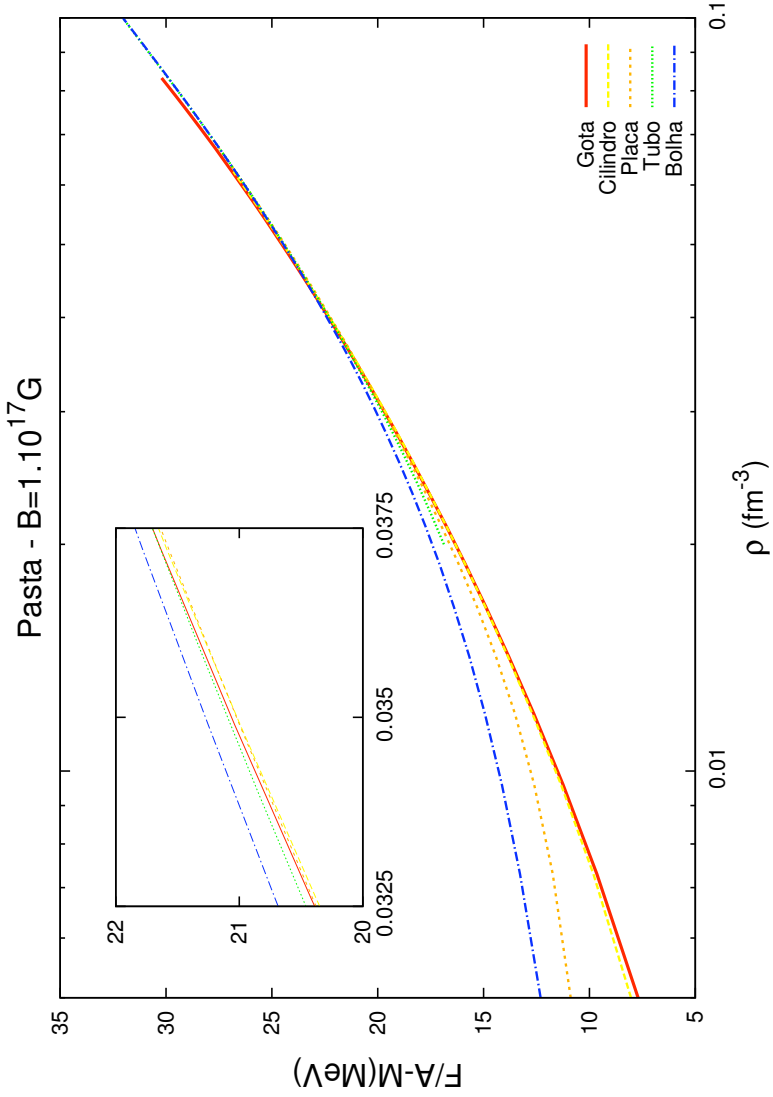
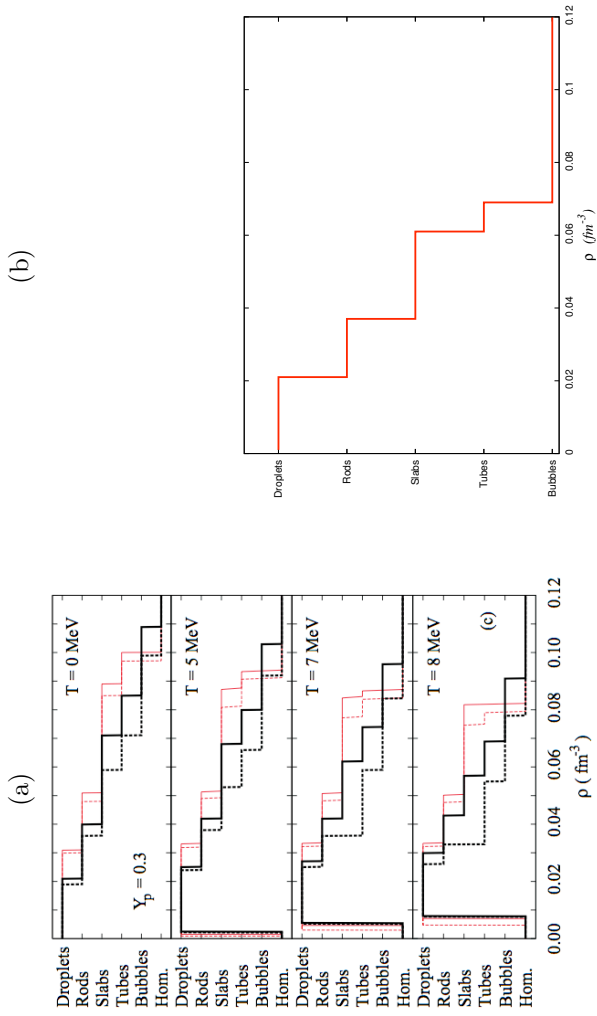


Figura 27: Energia livre calculada para as geometrias da pasta sob campo constante $B = 1 \cdot 10^{17} G$, $NL3$ e $Y_p = 0.3$.

Tabela 4: (a) Linhas pontilhadas indicam as transições na matéria npe para TF com NL3. (b) Cálculo com o $pastafTF-B$, com $T = 0$ e $B = 1 \times 10^{17} G$.



4.1.2 Comparação entre *pastaTF-B* e *tm1eosb*

Agora passamos à comparação com o código *tm1eosb*. Este algoritmo realiza o cálculo da EOS para a matéria bariônica (n,p) homogênea. Para efetuar a comparação, retiramos os elétrons de nosso modelo e fixamos o campo magnético em $B = 10^{17} G$. Tanto para o *tm1eosb* quanto para o *pastaTF-B*, foi utilizada a parametrização *NL3*.

A figura (28) mostra as curvas de energia livre por partícula em função da densidade, para diferentes estruturas da pasta. Vê-se que ambos os algoritmos concordam bem onde a densidade deve favorecer o surgimento da matéria homogênea, em torno de $\rho = 0.1 fm^{-3}$. Cabe aqui uma observação. Note que em certo ponto a curva da geometria bolha passa a seguir perfeitamente a curva para matéria homogênea, calculada pelo *tm1eosb*. Isto acontece por que σ é função de derivadas espaciais dos campos, equação (2.81). O programa naturalmente, a certa densidade, obtém soluções homogêneas e, portanto, as derivadas resultam em zero e consequentemente σ se iguala a zero. A partir de então desaparece a pasta e todos os cálculos correspondem à matéria homogênea, daí que a EOS se iguale ao cálculo do *tm1eosb*. Pode-se mostrar isto de duas formas: pelo perfil de densidade na célula de Wigner-Seitz ou pela curva da energia de superfície. A tabela (5) mostra uma sequência de perfis para densidades diferentes, dispostas em ordem crescente, para a geometria bolha. Perceba como o perfil das partículas ocupa cada vez raios maiores até que, na figura (f), se chega à matéria homogênea.

Observando a figura (29) vê-se que a transição para a matéria homogênea acontece no momento em que a energia de superfície σ cai a zero. Este será nosso critério na determinação de transições de fase para a matéria homogênea.

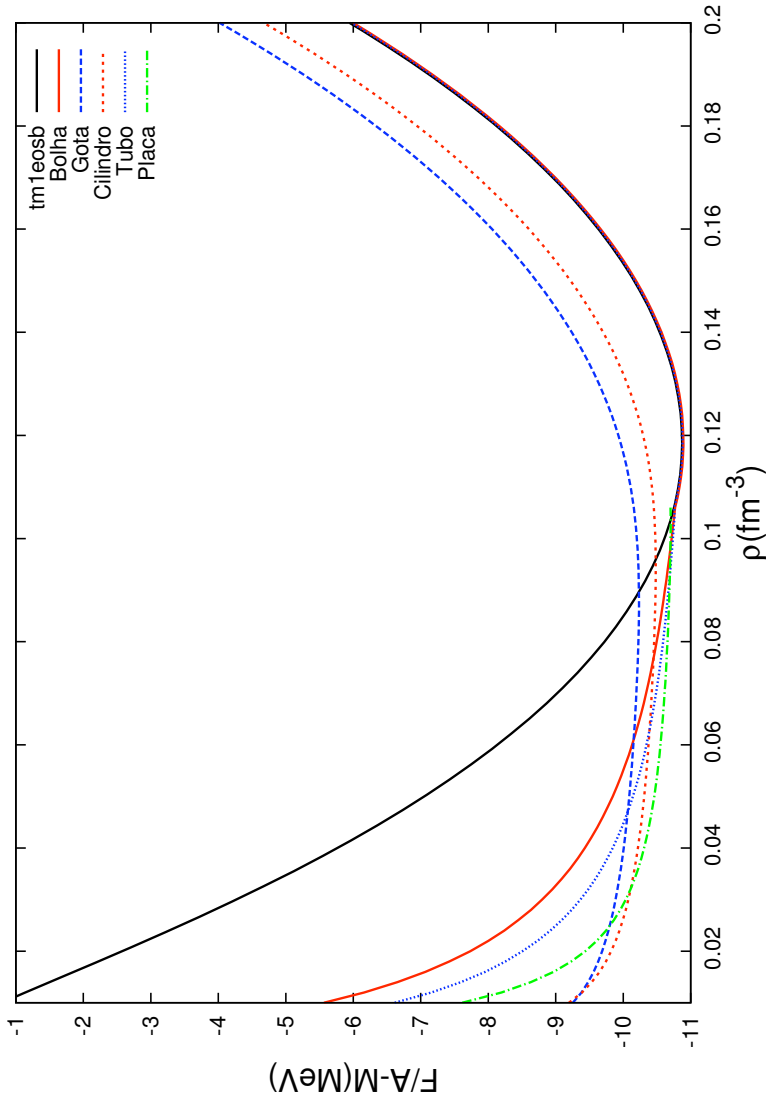
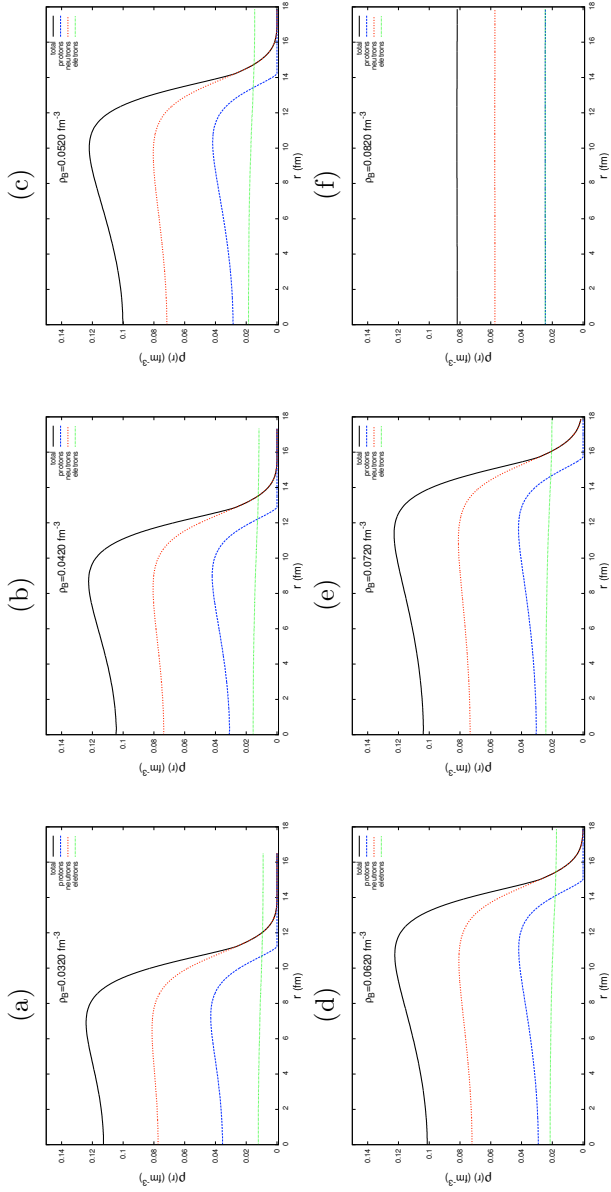


Figura 28: Energias Livres para cada estrutura da pasta em função da densidade. Foi incluída no gráfico a curva calculada pelo código *tm1eosb*. Em todos os casos o campo magnético é $B = 10^{17}G$, fração de prótons $Y_p = 0.3$ e parametrização NL3.

Tabela 5: Sequência de perfis de densidade na célula de Wigner-Seitz. Cada figura foi tomada para uma densidade total constante indicada por ρ_B .



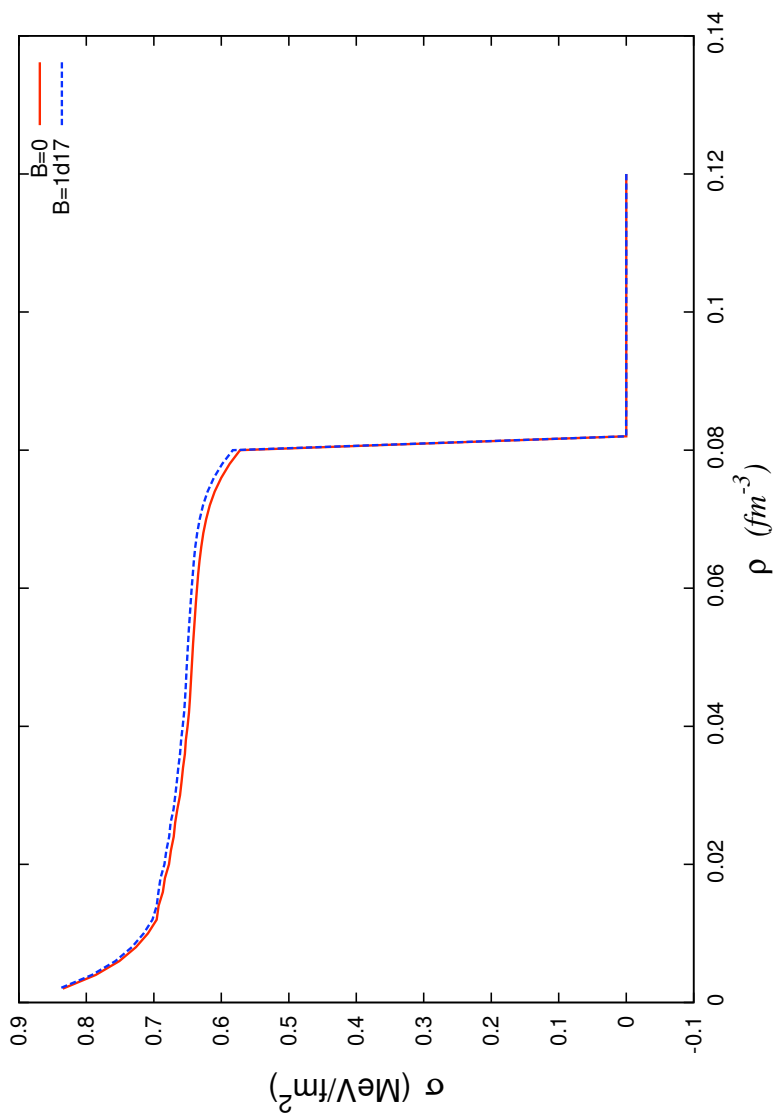


Figura 29: Energias de superfície em função da densidade média na célula de Wigner-Seitz.

4.1.3 Cálculo da Energia de Superfície com o *placaTF-B*

Na seção (2.7), deste trabalho, foi dito que o cálculo da energia de superfície, equação (2.81), é rigorosamente correto apenas para a geometria *placa* com a interação Coulombiana desligada. Nas próximas seções utilizaremos esta equação para outras geometrias e levando em conta a interação Coulombiana. Tais resultados devem ser interpretados como informações qualitativas e aproximadas dos sistemas estudados.

Na presente seção apresentamos resultados rigorosamente válidos para o cálculo da energia de superfície, ou seja, desligamos a interação Coulombiana e escolhemos a geometria *placa*. Estes cálculos foram realizados para as duas parametrizações, TM1 e NL3, e para duas frações de prótons, $Y_p = 0.3$ e $Y_p = 0.5$. Estes resultados podem ser vistos nas figuras (30) e (31). Vê-se que estes resultados servem de validação do código numérico e, ao mesmo tempo, mostram resultados novos. Como já foi dito, para campos magnéticos $\sim 10^{17} G$ os cálculos para a EOS deste modelo devem corresponder a cálculos em que não se leva em consideração campos magnéticos. Isto pode ser visto em ambas as figuras. Para campos baixos os valores de σ permanecem próximos dos valores de referência calculados sem campo magnético, apresentados na tabela (6). Note-se que o valor de σ começa a se alterar de forma mais dramática nas proximidades de $\sim 10^{18} G$. Será mostrado mais adiante que este crescimento na energia de superfície está ligado à diminuição na energia livre. Também será mostrado que a espessura da pele de nêutrons diminui com o aumento do campo.

Tabela 6: Valores de referência de σ para as parametrizações TM1 e NL3 e frações de prótons $Y_p = 0.3$ e $Y_p = 0.5$ com campo magnético igual a zero.

	NL3(LALAZISSIS; KONIG; RING, 1997)	TM1(SUGAHARA; TOKI, 1994)
$\sigma(Y_p = 0.3) (MeV/fm^2)$	0.481	0.492
$\sigma(Y_p = 0.5) (MeV/fm^2)$	1.123	1.077

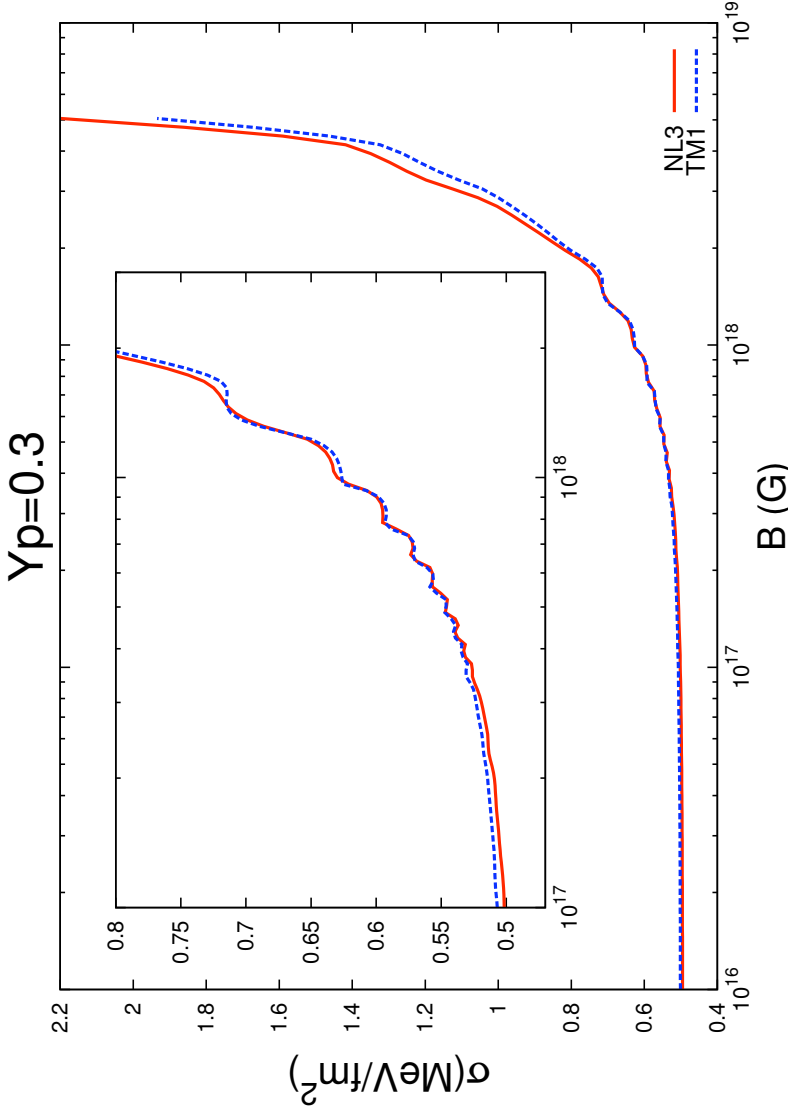


Figura 30: Energias de superfície em função do campo magnético para $Y_p = 0.3$ e parametrizações NL3 e TM1.

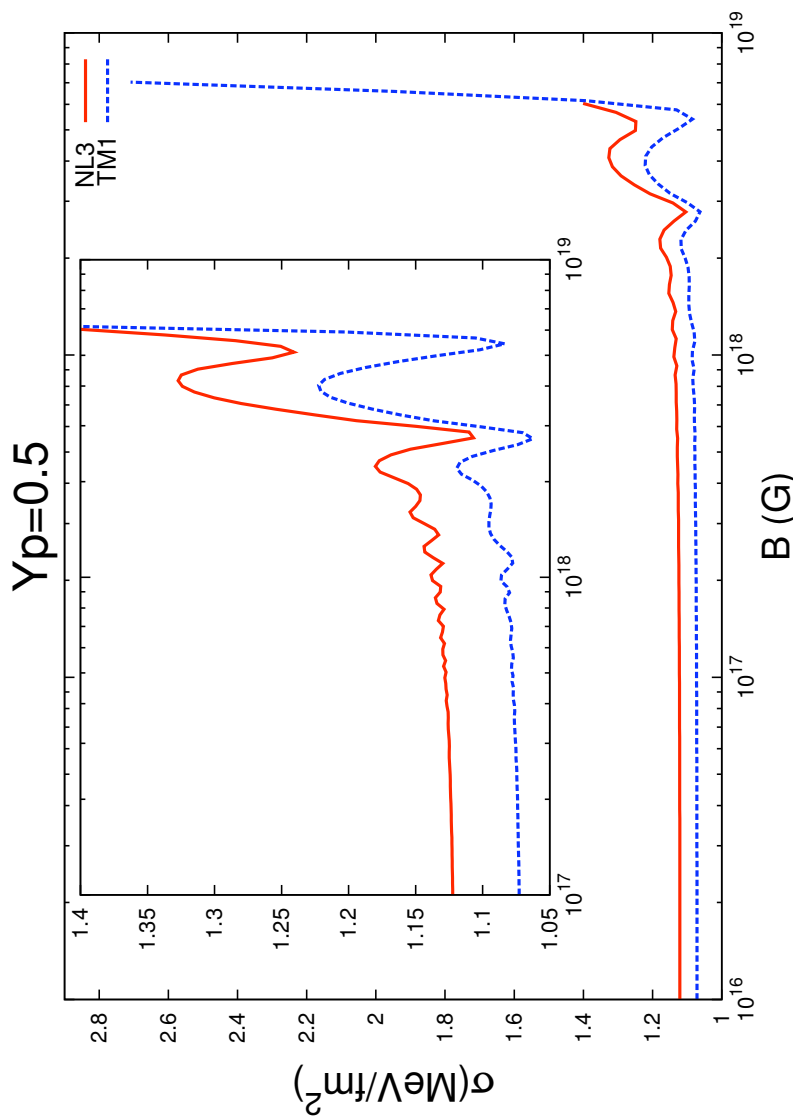


Figura 31: Energias de superfície em função do campo magnético para $Y_p = 0.5$ e parametrizações NL3 e TM1.

4.2 TRANSIÇÃO GOTA/CILINDRO

Nesta seção procuramos investigar os efeitos do campo magnético sobre a densidade de transição da geometria *gota* para a *cilindro*. Primeiramente, determinamos com maior precisão em qual densidade a transição acontece para campos magnéticos baixos, e então investigamos o que acontece quando o campo magnético é aumentado. A figura (32) mostra nossa primeira tentativa neste sentido. Esta figura apresenta a diferença entre a energia livre da geometria *cilindro* e a energia livre da *gota*. Assim, quando esta diferença é positiva a fase é *gota*, e se é negativa a fase é *cilindro*.

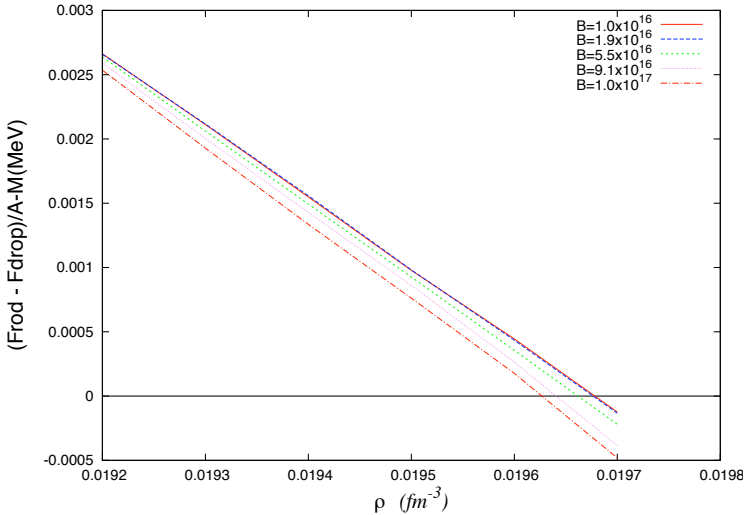


Figura 32: Diferença entre as energias livre *gota* e *cilindro*.

A figura mostra que a transição ocorre entre as densidades 0.0196 e 0.0197 fm^{-3} . A figura também parece sugerir que a densidade de transição decresce, de modo mais ou menos regular, conforme o campo magnético é incrementado. No entanto, mostramos a seguir que este não é o caso.

Calculamos, no intervalo indicado acima, a densidade em que a transição ocorre para uma série de campos magnéticos. A grandeza $\rho_t = \rho_t(B)$ na figura (33) indica a densidade de transição gota/cilindro em função do campo magnético. Para facilitar a comparação com $B =$

0, a figura (34) mostra os resultados para o cálculo

$$\frac{\delta\rho_t(B)}{\rho_{0t}} = \frac{(\rho_t - \rho_{0t})}{\rho_{0t}}, \quad (4.4)$$

onde $\rho_{0t} \equiv \rho_t(B=0)$.

Pode-se ver, em (34) e (33), o chamado efeito *de Hass-van Alphen*³ - à medida que as diferenças de energia entre níveis consecutivos aumenta, devido ao aumento do campo magnético, os saltos na densidade de transição aumentam. A seguir estendemos o cálculo para campos magnéticos maiores; a figura (35) mostra que o comportamento oscilatório persiste também neste caso.

As figuras seguintes, (36) e (37), apresentam a energia livre e a energia de superfície, respectivamente. Novamente, vemos que essencialmente F diminui com B devido ao aparecimento dos níveis de Landau com grande degenerescência. Conseqüentemente a energia de superfície σ aumenta com B . Em seguida, vemos os raios médios do agregado e das distribuições de nêutrons, prótons, e elétrons em cada geometria, figuras (38-45). O cálculo é feito segundo a equação

$$\langle r^2 \rangle = \int r^2 \rho(r) dr / \int \rho(r) dr, \quad (4.5)$$

onde a integral é tomada na célula de Wigner-Seitz. As figuras apresentam a raiz quadrada deste cálculo, para a qual utilizamos a notação $\langle r \rangle$. Para ambas as geometrias vemos o seguinte comportamento. Como a energia de superfície aumenta com B e, no entanto, o número de partículas na célula varia muito pouco, o raio médio bariônico da gota diminui. Uma energia superficial maior significa que os nêutrons não podem se espalhar na célula, e a *neutron drip* tem mais dificuldade em acontecer. Os prótons sentem a força Coulombiana e distribuem-se melhor no interior do núcleo. Como os nêutrons estão cada vez mais obrigados a se comprimir na gota devido à superfície, eles acabam por seguir mais fortemente os prótons. Assim, a pele de nêutrons se reduz com o aumento do campo B , como pode ser visto nas figuras (46-47). A pele de nêutrons é definida simplesmente como o módulo da diferença entre os raios dos prótons e dos nêutrons para os quais as respectivas densidades são iguais a zero, ou seja,

$$\Theta = |r_{0n} - r_{0p}|, \quad (4.6)$$

onde $r_{0n} \equiv r(\rho_n = 0)$ e $r_{0p} \equiv r(\rho_p = 0)$. O módulo serve apenas para

³Seção 3.2.

lembrar que para as geometrias *bolha* e *tubo* a distribuição das partículas está invertida. Nestes casos, as soluções encontradas mostram a pele de nêutrons no interior do núcleo.

Quanto aos elétrons, estes permanecem espalhados de modo quase uniforme na célula, ainda que haja uma oscilação em seu raio médio, figuras (41) e (45).

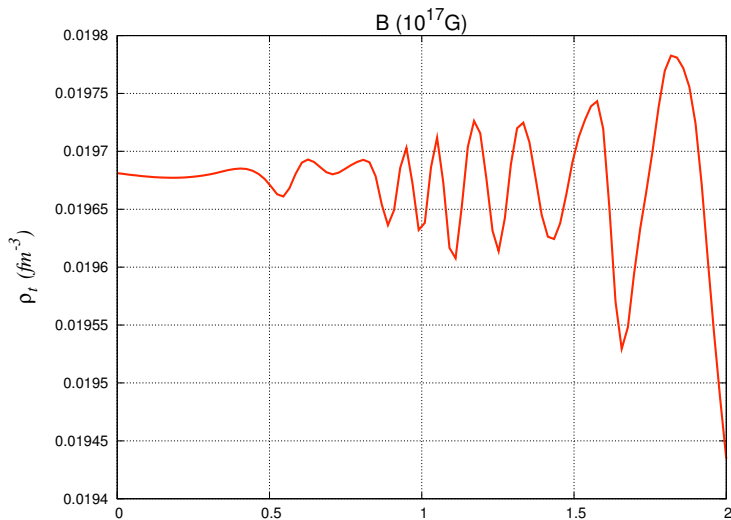


Figura 33: Densidade de Transição *gota/cilindro* em função de B .

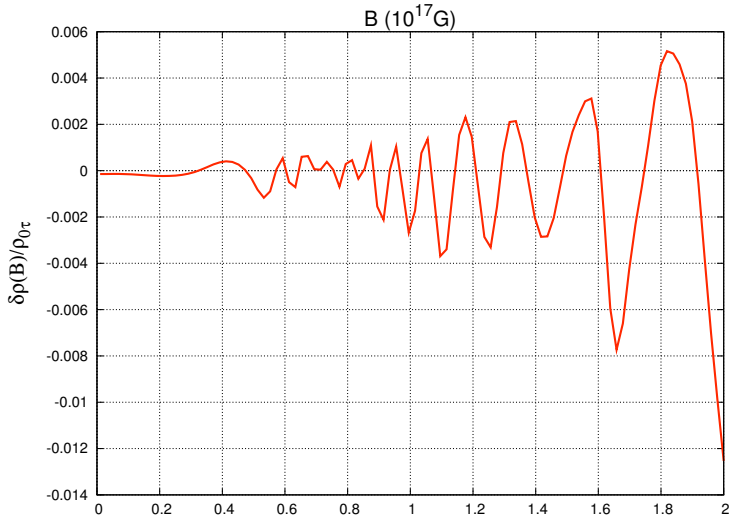


Figura 34: Variação da densidade de transição *gota/cilindro* em relação à densidade de transição para $B = 0$, segundo a equação (4.4).

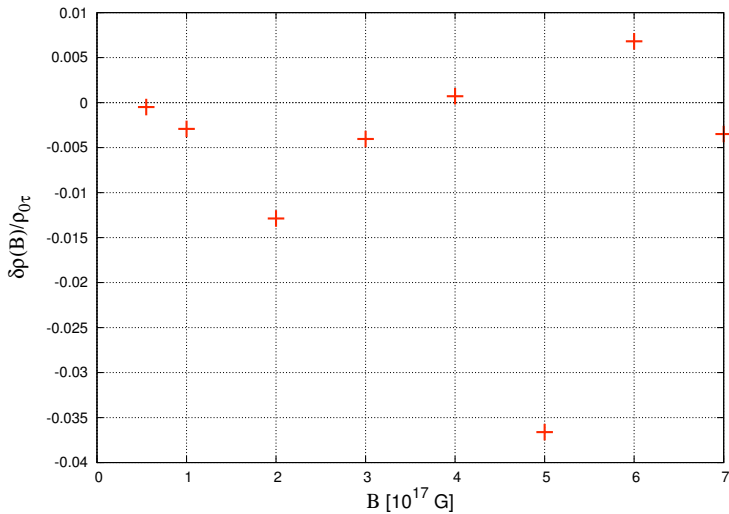


Figura 35: Variação da densidade de transição *gota/cilindro* em relação à densidade de transição para $B = 0$.

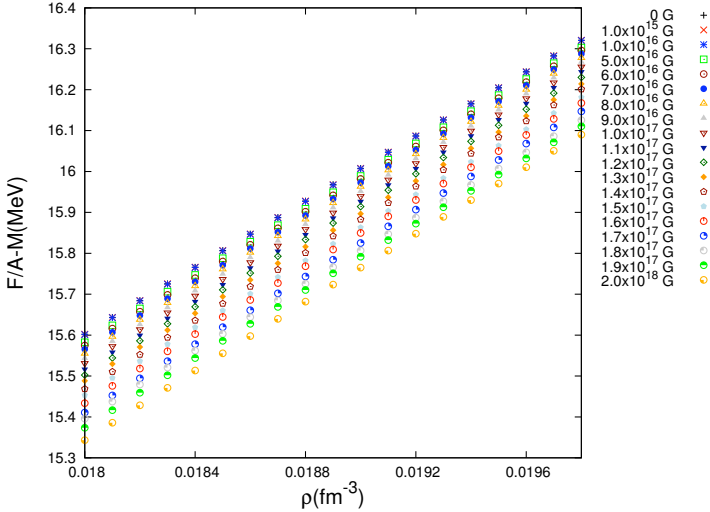


Figura 36: Energia de superfície para a transição *gota/cilindro*.

4.3 TRANSIÇÃO TUBO/BOLHA

Para a transição tubo/bolha, investigamos o intervalo de densidades $[0.061, 0.071] \text{ fm}^{-3}$, pois como indica o gráfico (28), a transição deve ocorrer em torno de $\rho = 0.07 \text{ fm}^{-3}$. O campo magnético foi iterado no intervalo $[10^{17}, 10^{18}] \text{ Gauss}$. As figuras (48-51) apresentam algumas grandezas calculadas. Para este caso vê-se novamente que a energia livre, figura (48), diminui devido ao campo magnético. A energia de superfície, figura (49), cresce devido ao campo magnético. Vê-se que o número de partículas no interior da célula de Wigner-Seitz sofre uma grande mudança quando se dá a transição para a geometria bolha. Essa diferença se deve principalmente à mudança no raio da célula, figura (51). O raio é determinado no momento em que se encontra as soluções para os campos no interior da célula, exigindo-se que a densidade e a fração de prótons seja constante. Neste caso o raio cresce e, portanto, o número de partículas também deve aumentar para que os vínculos globais permaneçam constantes.

A tabela (7) apresenta a densidade de transição (ρ_t) entre as geometrias. Também apresenta a o cálculo $\delta\rho(B)/\rho_{0t} = (\rho(B) - \rho_{0t})/\rho_{0t}$, onde $\rho_{0t} \equiv \rho_t(B = 0)$. Vê-se que a densidade de transição não varia

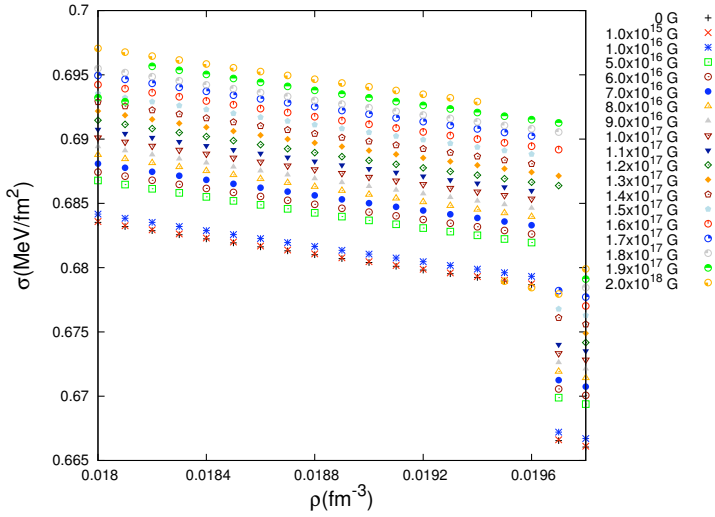


Figura 37: Energia de superfície para a transição *gota/cilindro*.

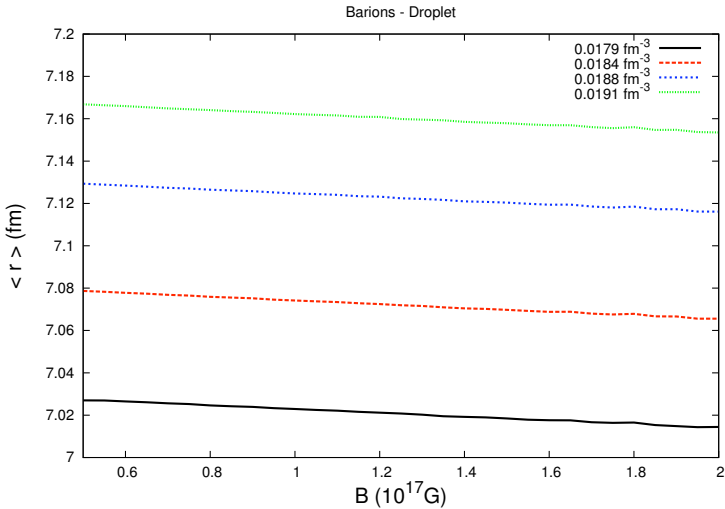


Figura 38: Raio médio dos bárions, geometria *gota*.

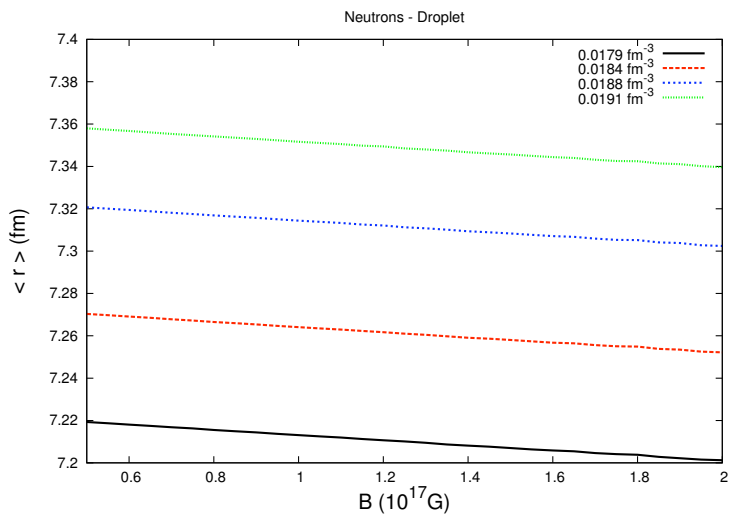


Figura 39: Raio médio dos nêutrons, geometria *gota*.

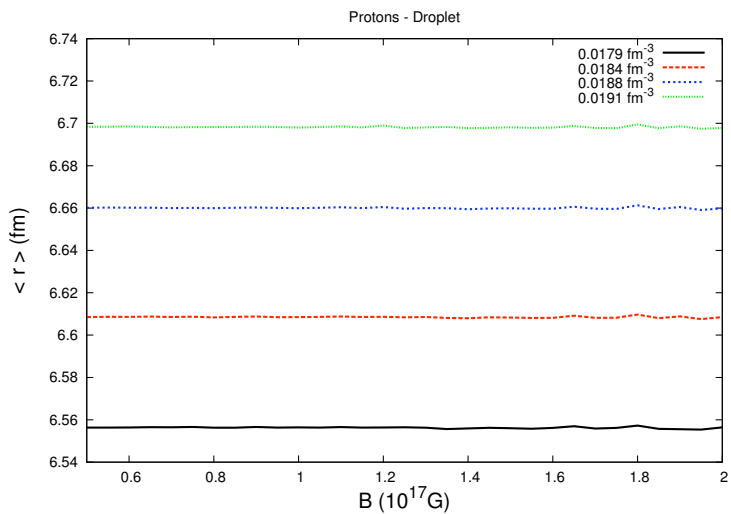


Figura 40: Raio médio dos prótons, geometria *gota*.

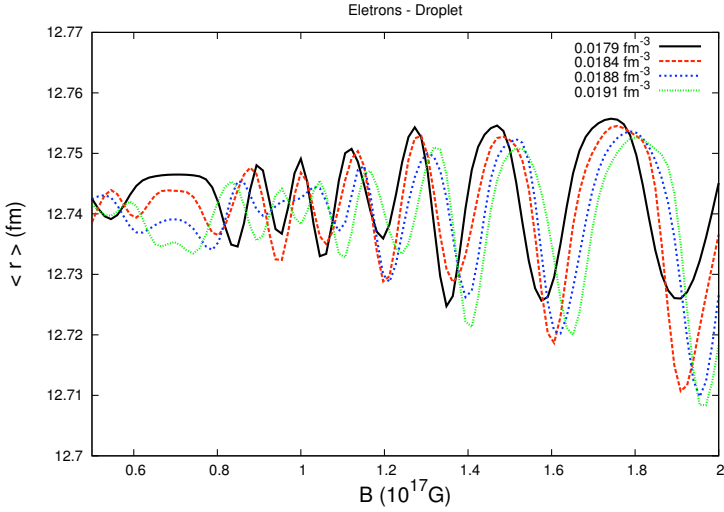


Figura 41: Raio médio dos elétrons, geometria *gota*.

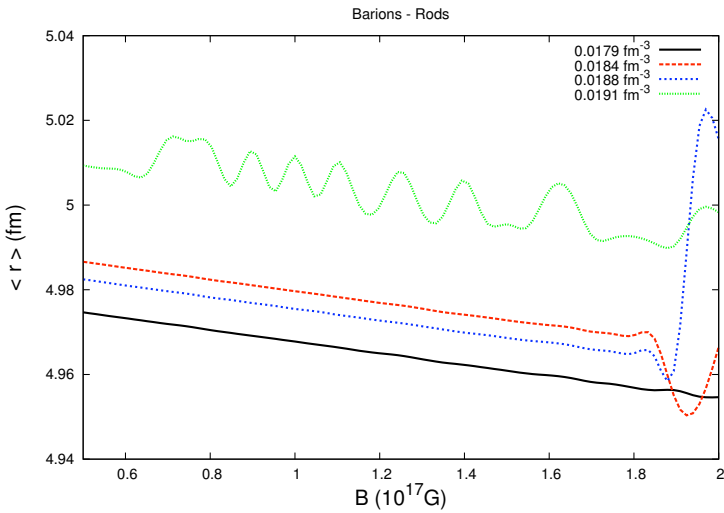


Figura 42: Raio médio dos bárions, geometria *cilindro*.

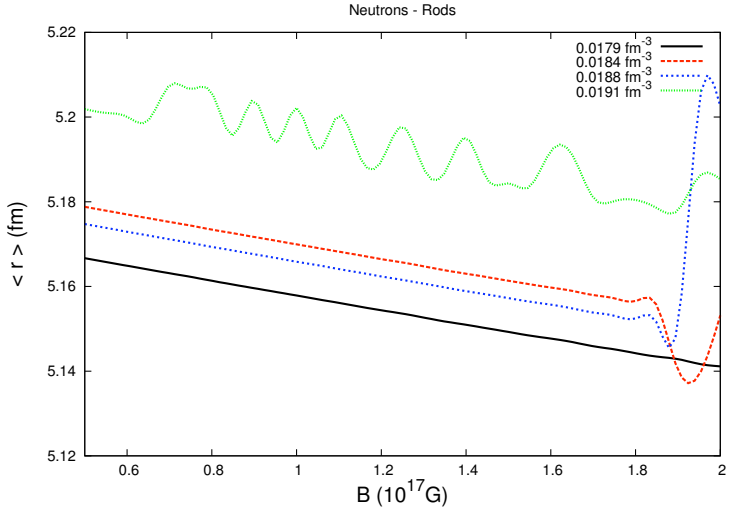


Figura 43: Raio médio dos nêutrons, geometria *cilindro*.

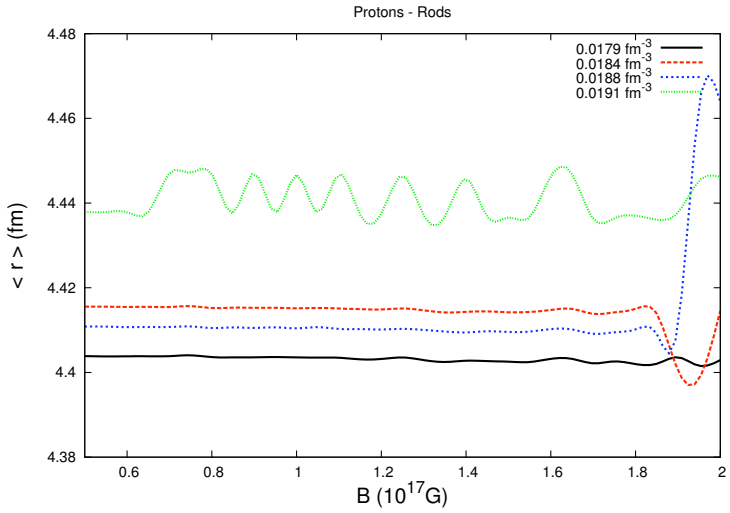


Figura 44: Raio médio dos prótons, geometria *cilindro*.

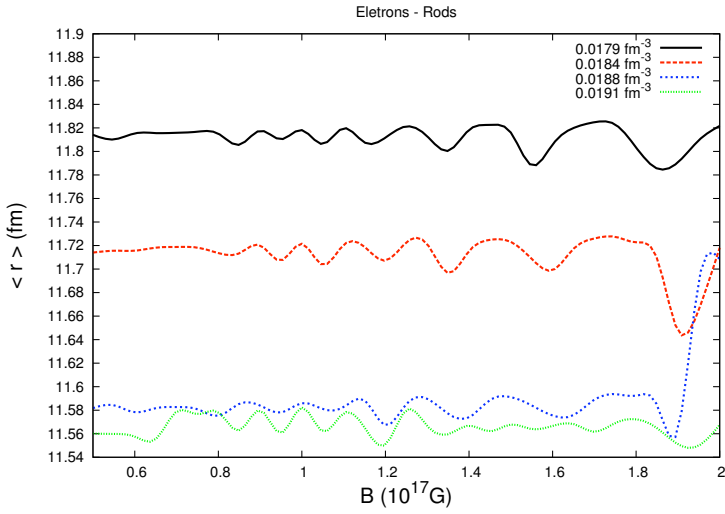


Figura 45: Raio médio dos elétrons, geometria *cilindro*.

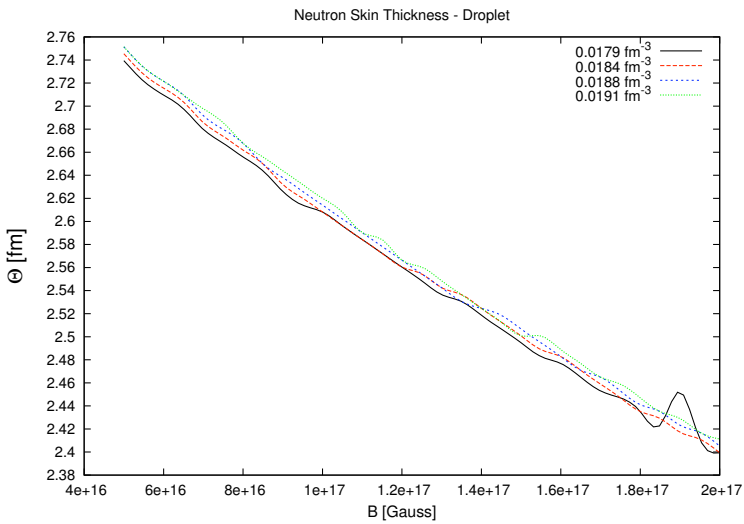


Figura 46: Pele de nêutrons da geometria *gota*. Parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$.

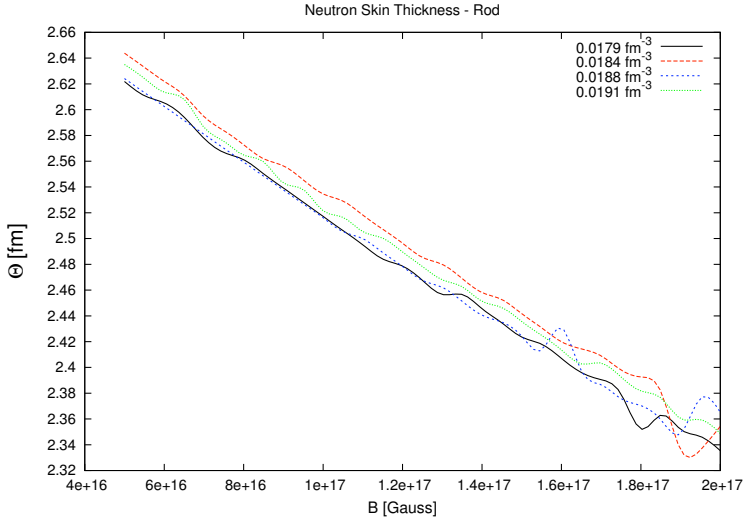


Figura 47: Pele de nêutrons da geometria cilindro. Parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$.

mais do que 3% no intervalo investigado. As tabelas (8) e (9) apresentam os perfis de densidade e o número de níveis de Landau para as respectivas geometrias, calculados a $B = 10^{17}$ e 10^{18} Gauss. Vê-se nestas figuras a redistribuição das partículas no interior da célula e a diminuição do número de níveis de Landau devido ao aumento do campo magnético. é importante perceber que em ambas as geometrias tem-se apenas um nível de Landau para o elétron, em toda a célula, quando o campo é $B = 10^{18}$ G; mas, apesar disso, a densidade do elétron não é uniforme no interior da célula.

A tabela (10) apresenta os cálculos da pele de nêutrons para as geometrias tubo e bolha. A análise é um tanto complicada e precisamos do auxílio da tabela (7), que apresenta as densidades de transição tubo/bolha em função do campo B. Vê-se que o cálculo da pele de nêutrons foi realizado para a densidade $\rho_B = 0.069 \text{ fm}^{-3}$, uma densidade bastante próxima da densidade na qual ocorre a transição tubo/bolha, quando o campo magnético está próximo de 10^{17} G. Então, conforme o campo magnético é aumentado pode acontecer de a densidade $\rho_B = 0.069 \text{ fm}^{-3}$ ser mais favorável para uma geometria do que para outra. Na tabela (7) vê-se, por exemplo, que aproximadamente no intervalo $B = [0.4, 0.5] \times 10^{18}$ G a geometria favorável é tubo. Anali-

sando a figura da pele de nêutrons para esta geometria vê-se que neste intervalo a pele de nêutrons decresce. Assim como no caso da transição gota/cilindro, essa redução da pele de nêutrons está ligada ao aumento na energia de superfície devido ao campo magnético, o que obriga os nêutrons a se espalharem menos na célula de Wigner-Seitz. A mesma análise pode ser feita para a pele de nêutrons no caso da geometria bolha. No intervalo $B = [0.5, 0.6] \times 10^{18} G$ a geometria bolha é a mais favorável de acontecer com a densidade $0.069 fm^{-3}$. Percebe-se que neste intervalo de campo a pele de nêutrons decresce para a geometria bolha.

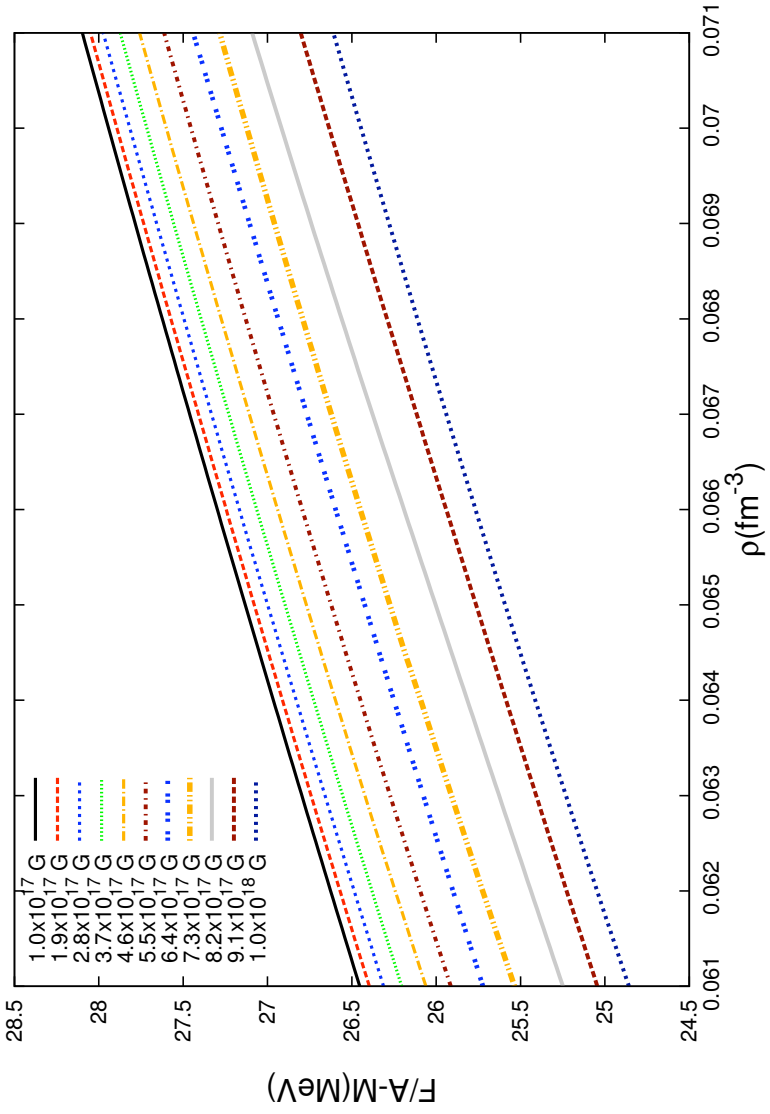


Figura 48: Energia Livre em função do campo magnético. Transição entre geometrias *tubo/bolha*, parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$.

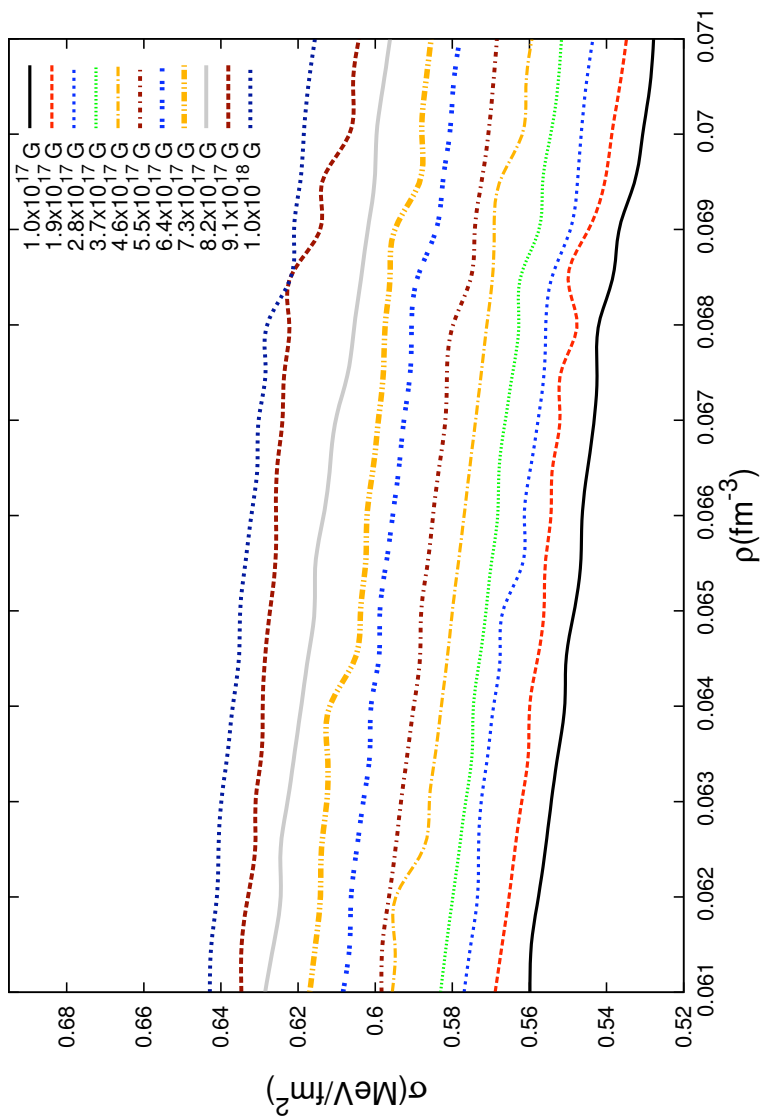


Figura 49: Energia de superfície em função do campo magnético. Transição entre geometrias *tubo/bolha*, parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$.

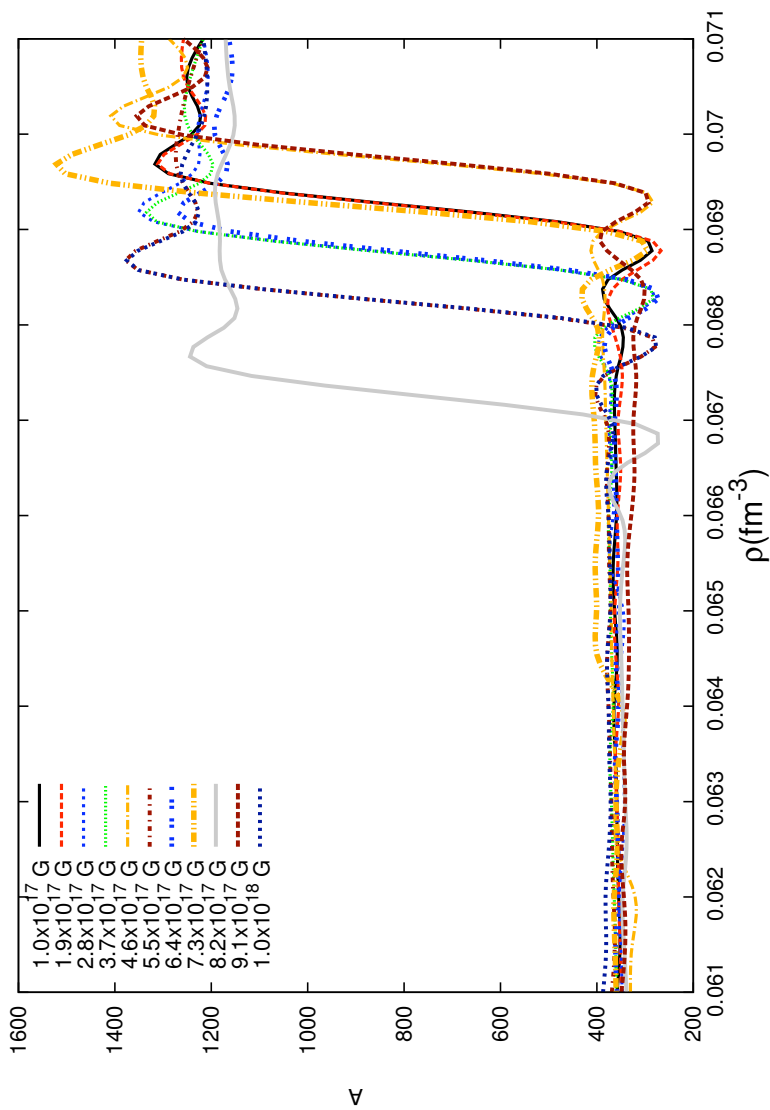


Figura 50: Número de massa nuclear em função da densidade bariônica para vários campos magnéticos. A transição *tubo/bolha* pode ser observada por volta de 0.068 fm^{-3} . Parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$.

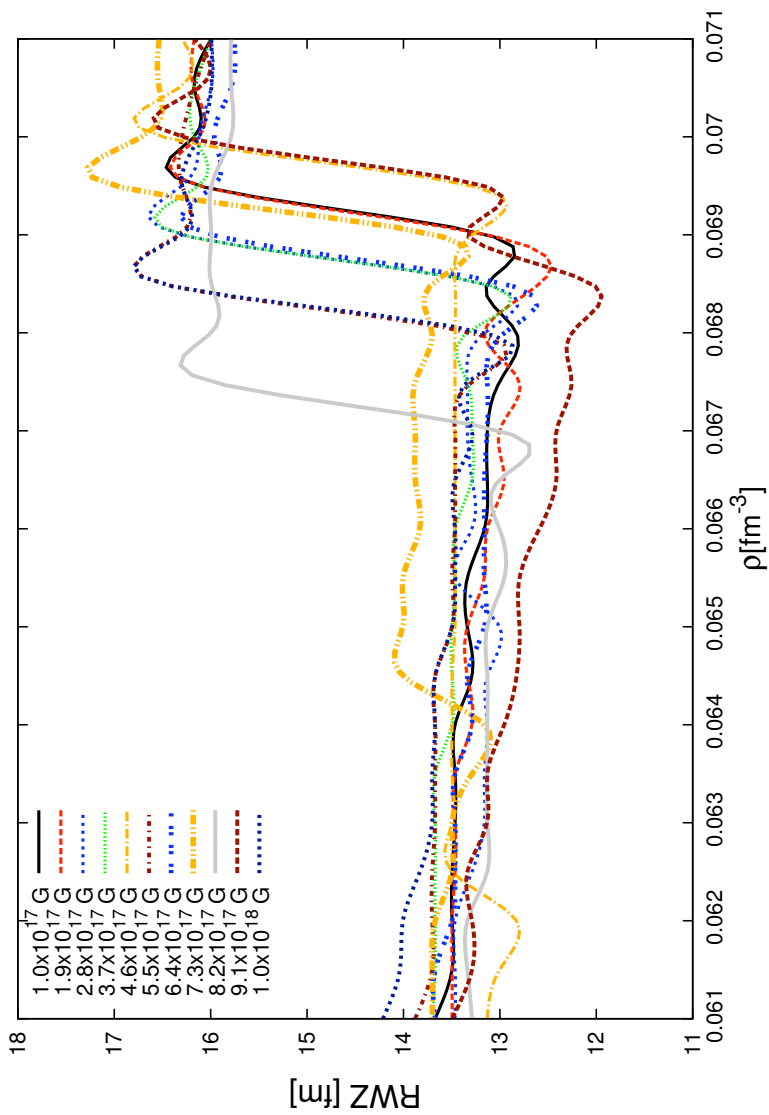


Figura 51: Raio da célula de WS em função da densidade barionica para vários campos magnéticos. A transição *tubo/bolha* pode ser observada por volta de 0.068 fm^{-3} . Parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$.

Tabela 7: Densidade de transição *tubo/bolha* em função do campo magnético. Parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$.

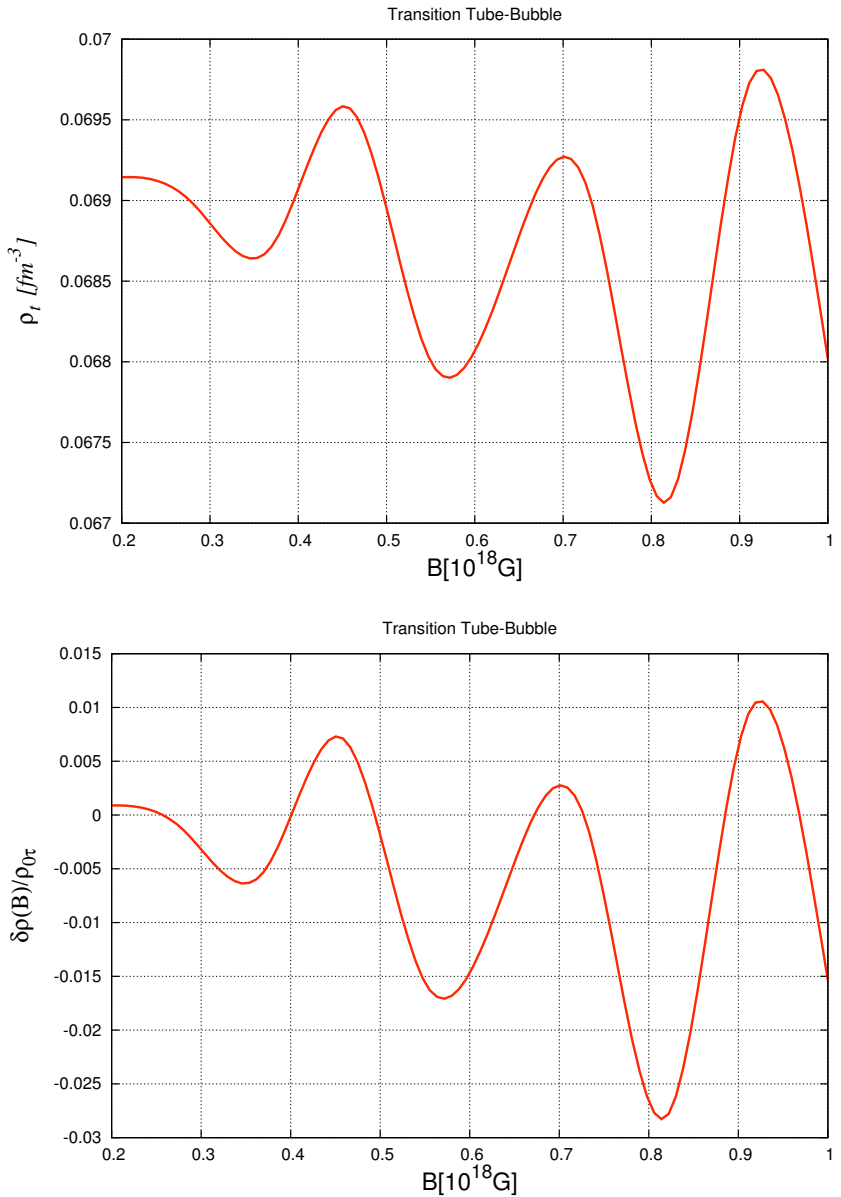


Tabela 8: Perfis de densidade na célula de WS, para geometria *tubo*. Parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$.

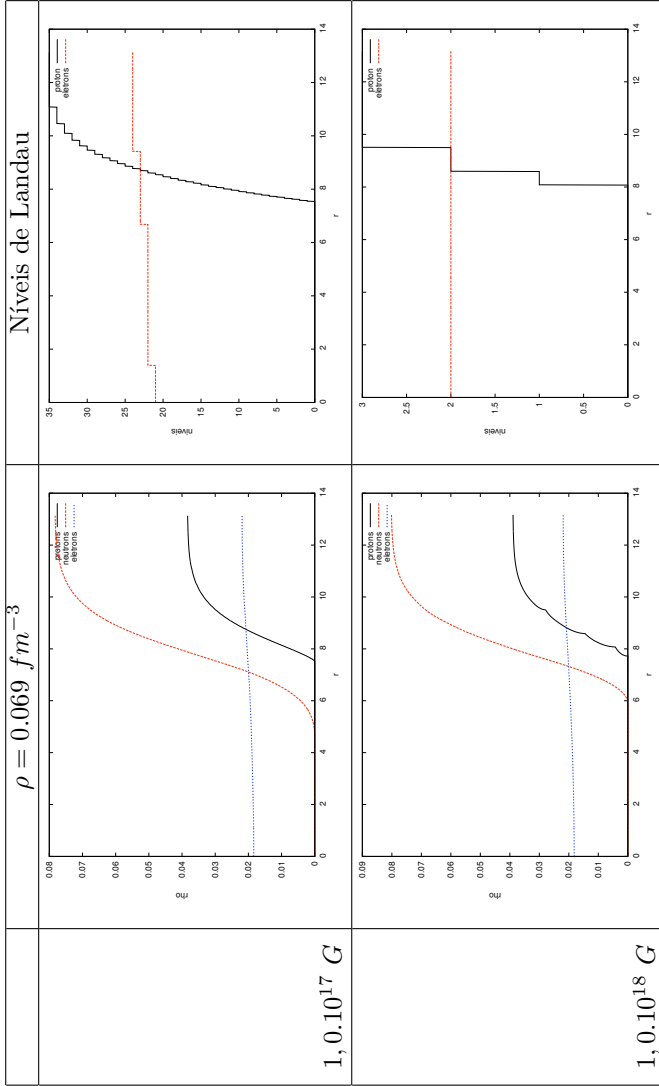
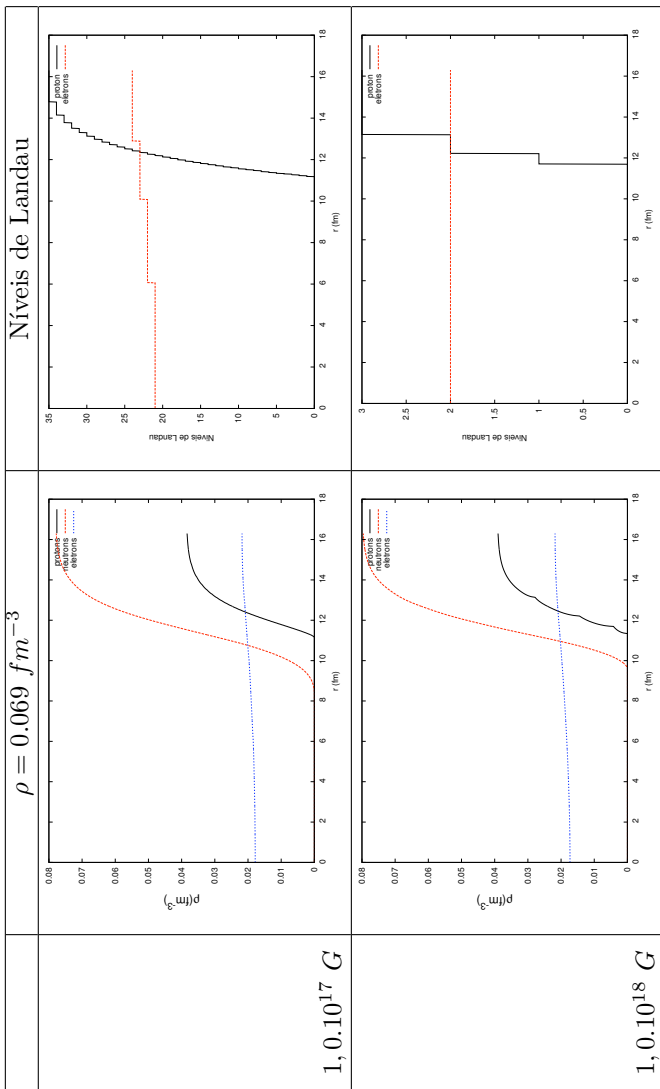


Tabela 9: Perfis de densidade na célula de WS, para a geometria *bolha*. Parametrização NL3, $Y_p = 0.3$.



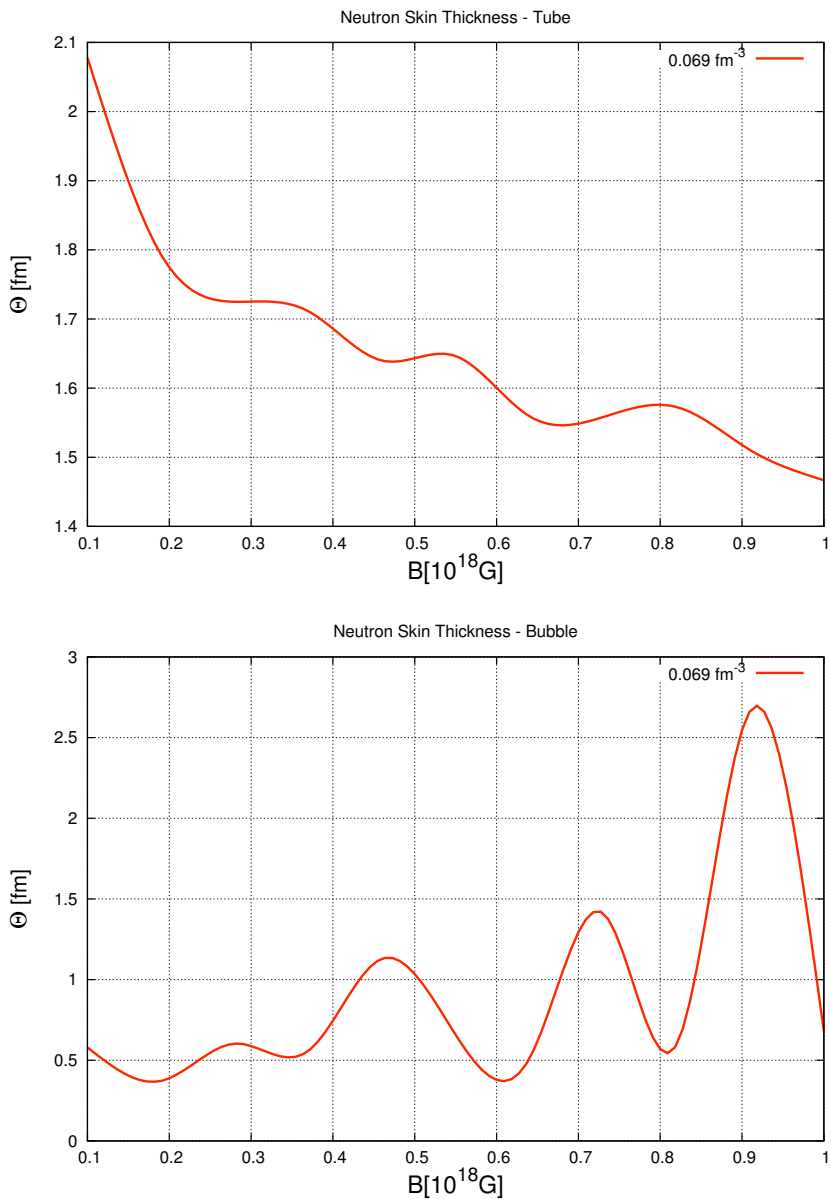
4.4 TRANSIÇÃO BOLHA/MATÉRIA-HOMOGÊNEA

Aqui exploramos o intervalo de densidades $[0.095, 0.11] fm^{-3}$ com o objetivo de flagrar a transição *bolha/matéria homogênea*. O campo é iterado no intervalo $[1.10^{17}, 3.10^{18}] G$. A análise da EOS, figura (52), é semelhante ao que se viu anteriormente, ou seja, o campo magnético diminui a energia livre. A figura (53) mostra que a energia de superfície, em geral, aumenta devido ao campo magnético, embora oscile de forma diferente para algumas densidades. Com base nos valores de σ criamos as figuras (54) e (55), onde apresentamos as densidades de transição bolha/matéria-homogênea pelo campo magnético. Pode-se ver que, para os campos magnéticos aqui explorados, a densidade de transição para a matéria homogênea pode variar até 4%. Vê-se que o campo magnético pode aumentar a fase da pasta fazendo com que exista à densidades maiores. Porém, este cálculo é feito com temperatura zero e já foi demonstrado que a pasta tende a diminuir com o aumento da temperatura (AVANCINI et al., 2010).

Para os resultados a seguir, figuras (56-59), fixamos a densidade bariônica em $\rho_B = 0.095 fm^{-3}$. Para esta densidade, segundo a figura (57), a transição ocorre por volta de $B = 3.25 \times 10^{18} G$, quando a energia de superfície cai a zero.

Nestes resultados pode-se ver o papel dos níveis de Landau nas oscilações de grandezas globais, como o número de partículas ou do raio da célula de WS. Como exemplo, destacamos os perfis de densidades e de níveis de Landau para os campos magnéticos $B_a = 1.426 \times 10^{18} G$ e $B_b = 1.738 \times 10^{18} G$. Vê-se, nas tabelas (11) e (12), que tanto o próton quanto o elétron possuem 2 níveis de Landau em B_a e apenas 1 nível em B_b . Esta mudança de nível causa uma variação nas densidades ao longo da célula de WS, como pode ser visto na mesma tabela. Nas figuras (60-62), vemos que em B_a o potencial químico do nêutron estava aproximadamente em um máximo ao passo que o potencial químico do próton estava em um mínimo. Para B_b , quando o número de níveis cai a 1, os potenciais químicos do próton e do elétron aumentam. Todas estas quantidades variam de forma a manter os vínculos globais constantes, ou seja, Y_p e ρ_B . Vê-se também que todos os potenciais químicos sofrem mudanças drásticas na transição *bolha/matéria-homogênea*.

Tabela 10: Espessura da pele de nêutrons. Superior: Tubo; Inferior: Bolha. Ambas foram calculadas para a densidade 0.069 fm^{-3} . Parametrização NL3, $Y_p = 0.3$.



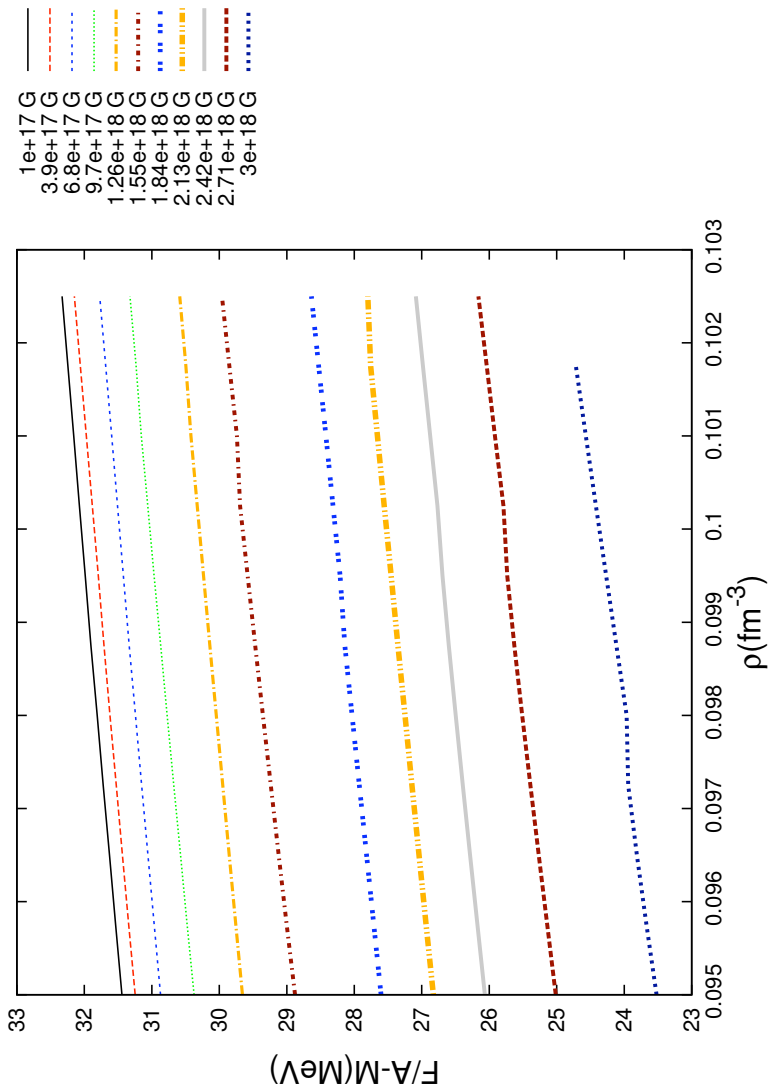


Figura 52: Energia livre para a geometria *bolha* em função da densidade para vários campos magnéticos. Parâmetro NL3, $Y_p = 0.3$.

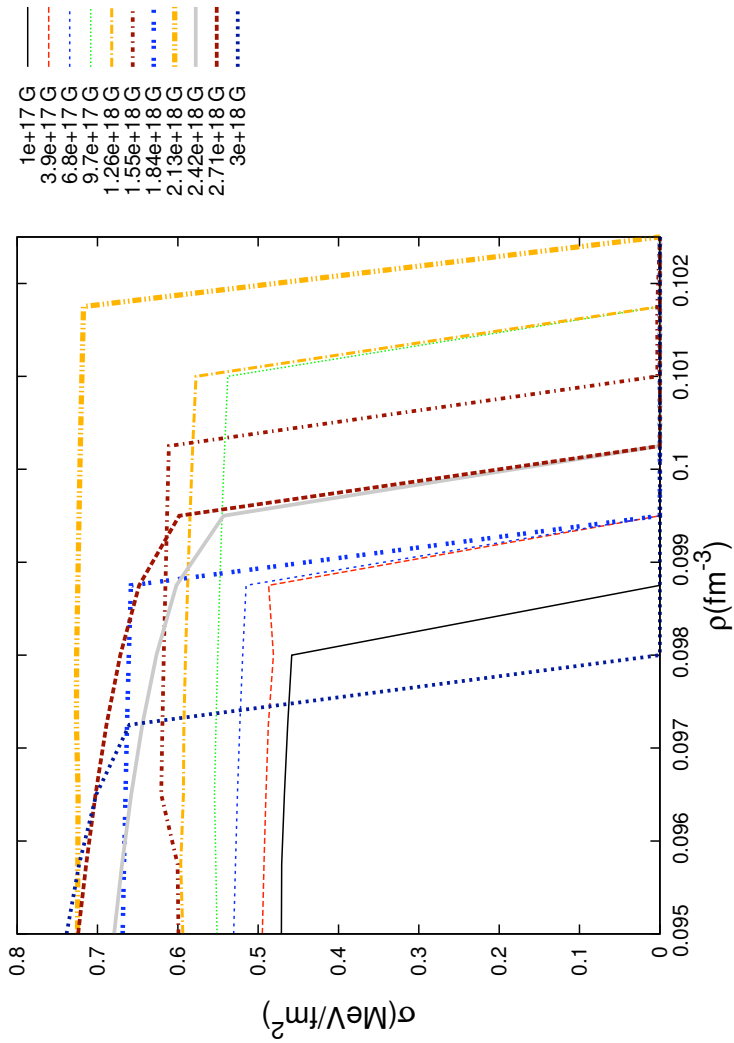


Figura 53: Energia de superfície para a geometria *bolha* em função da densidade para vários campos magnéticos. Parametrização NL3, $Y_p = 0.3$. As transições para a matéria-homôgenea acontecem quando σ cai a zero.

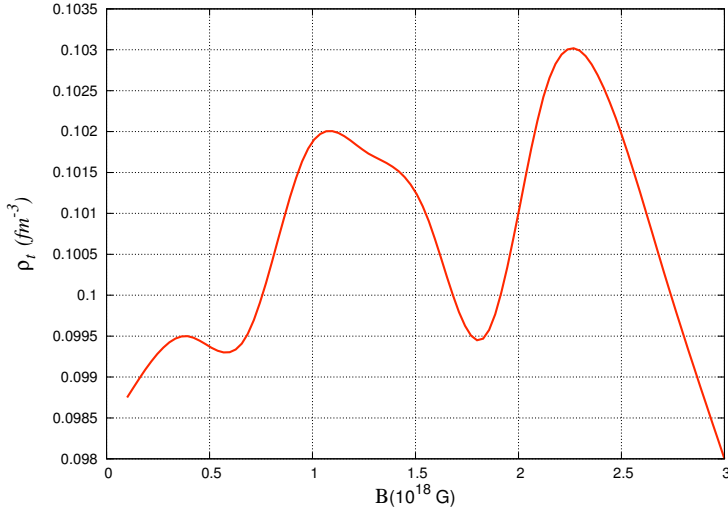


Figura 54: Densidade de transição bolha/matéria-homogênea em função do campo magnético. Parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$.

Por fim, apresentamos duas tabelas. A primeira tabela, (13), apresenta uma série de perfis de densidades na célula de Wigner-Seitz, para várias densidades e campos magnéticos. Percebe-se nesta sequência de figuras como o campo magnético pode modificar grandemente os perfis de densidades. Em alguns casos até mesmo o elétron torna-se mais denso na parede da bolha, como pode-se ver para $B = 3.10^{18}G$ e $\rho_B = 0.095 fm^{-3}$. Vê-se também que para $B = 3.10^{18}G$ surge uma estrutura intermediária entra a fase de bolha e a fase homogênea a partir de $\rho_B = 0.09875 fm^{-3}$. Pode-se ver na tabela (14) os níveis de Landau correspondentes a estas densidades e campos calculados.

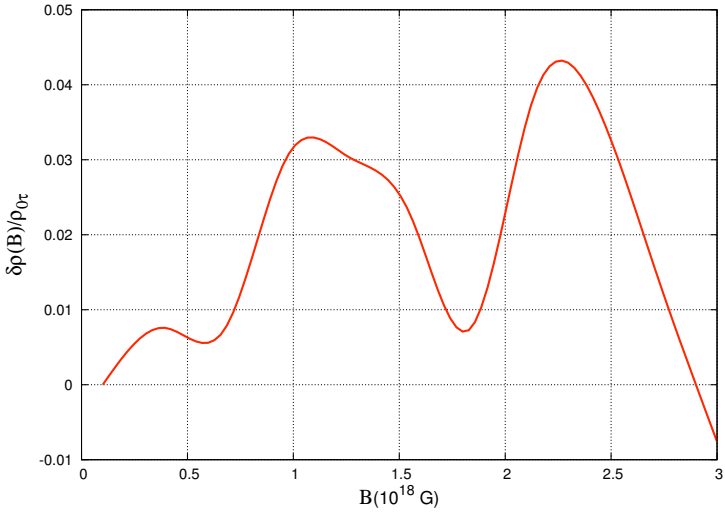


Figura 55: Variação da densidade de transição bolha/matéria-homogênea em função do campo magnético em relação à densidade de transição para $B = 0$. Parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$.

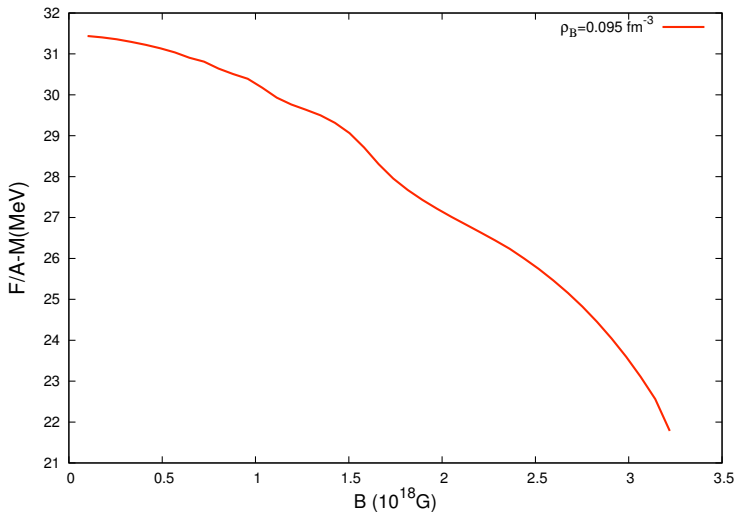


Figura 56: Energia Livre em função do campo magnético. Parametrização NL3, $Y_p = 0.3$. Densidade bariônica $\rho_B = 0.095 \text{ fm}^{-3}$.

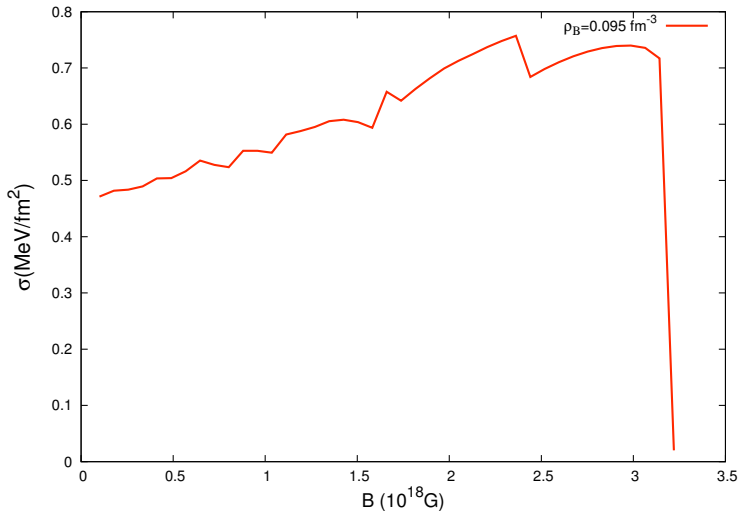


Figura 57: Energia de Superfície em função do campo magnético. Parametrização NL3, $Y_p = 0.3$. Densidade bariônica $\rho_B = 0.095 \text{ fm}^{-3}$.

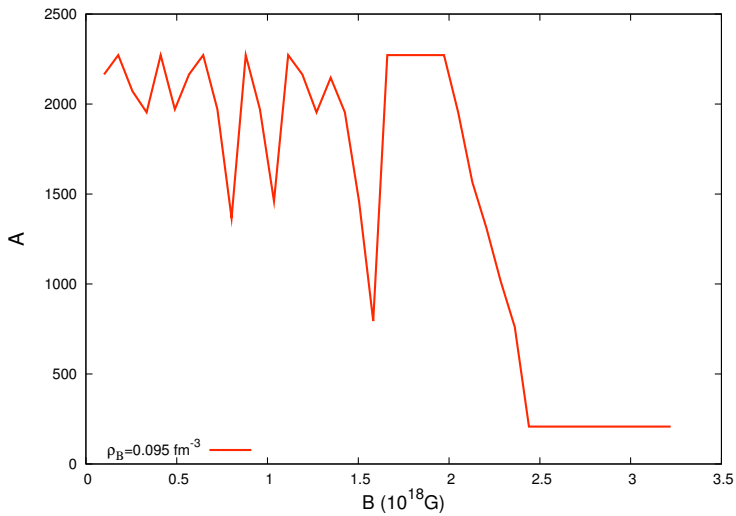


Figura 58: Número de Bárions em função do campo magnético. Parametrização NL3, $Y_p = 0.3$. Densidade bariônica $\rho_B = 0.095 \text{ fm}^{-3}$.

Tabela 11: Perfis de densidade e de níveis de Landau para geometria *bolha*. Parametrização NL3. $Y_p = 0.3$. $B = 1.426 \times 10^{18} G$.

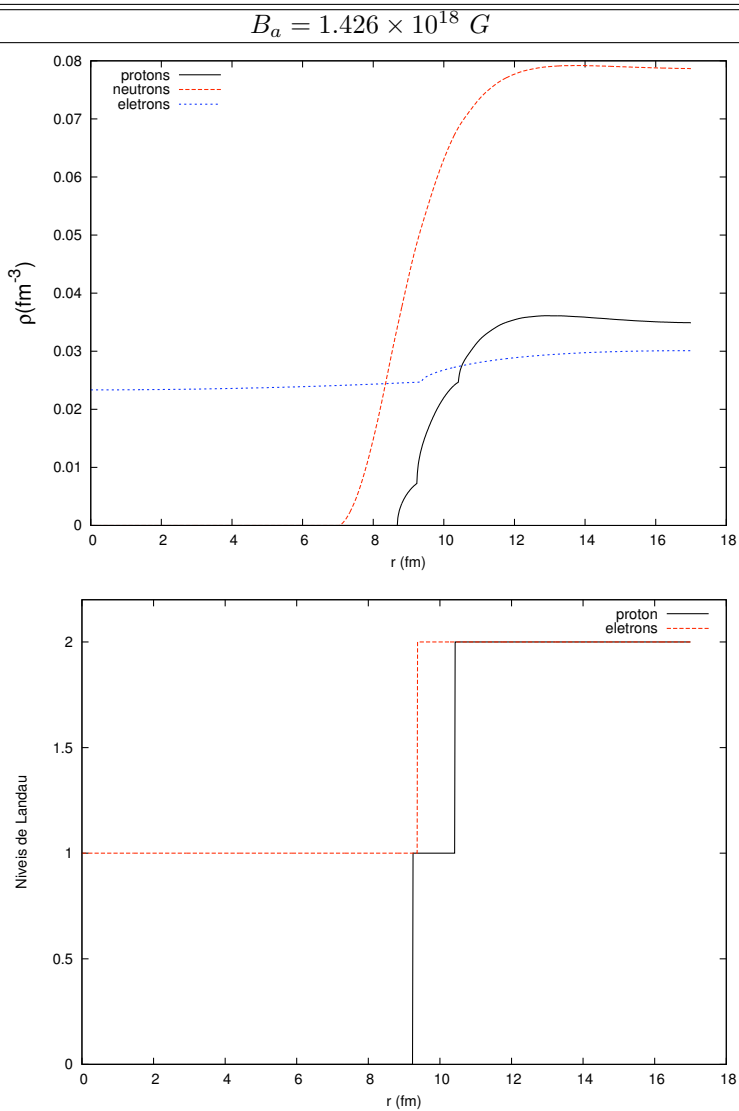
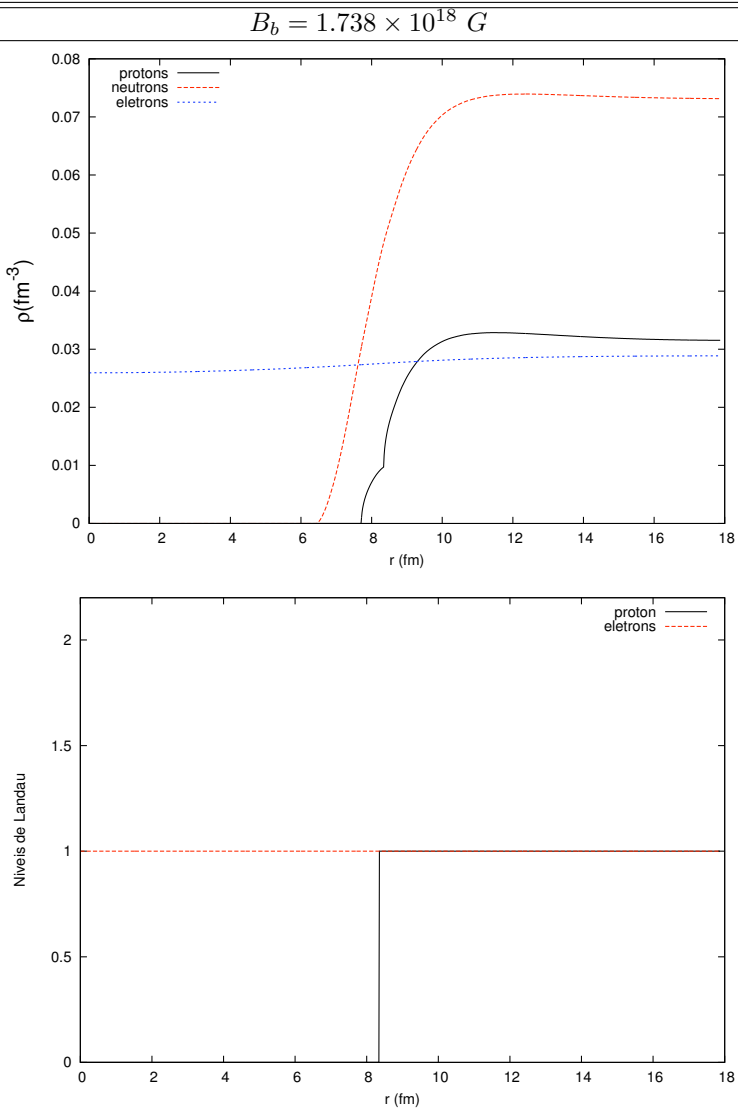


Tabela 12: Perfis de densidade e de níveis de Landau para geometria *bolha*. Parametrização NL3. $Y_p = 0.3$. $B = 1.738 \times 10^{18} G$.



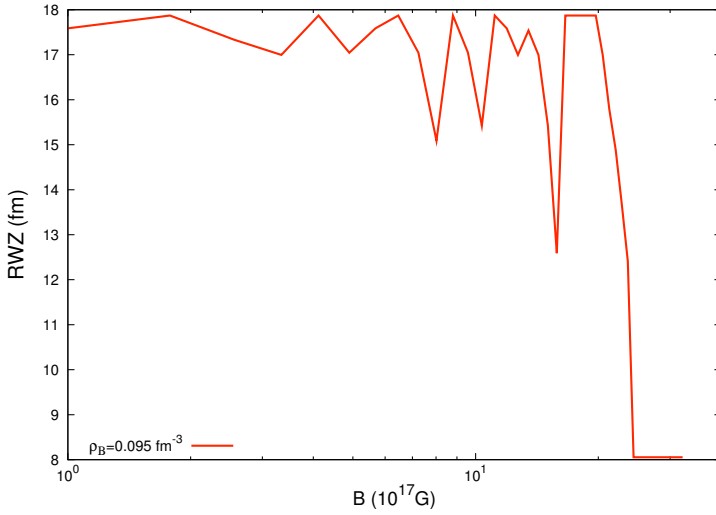


Figura 59: Raio de Wigner-Seitz em função do campo magnético. Parametrização NL3, $Y_p = 0.3$. Densidade bariônica $\rho_B = 0.095 \text{ fm}^{-3}$.

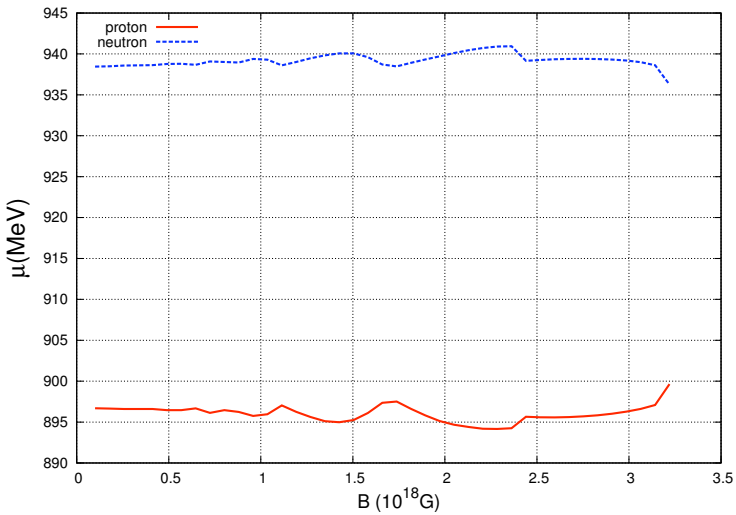


Figura 60: Potenciais químicos dos nucleons em função do campo magnético. Geometria *bolha* com parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$.

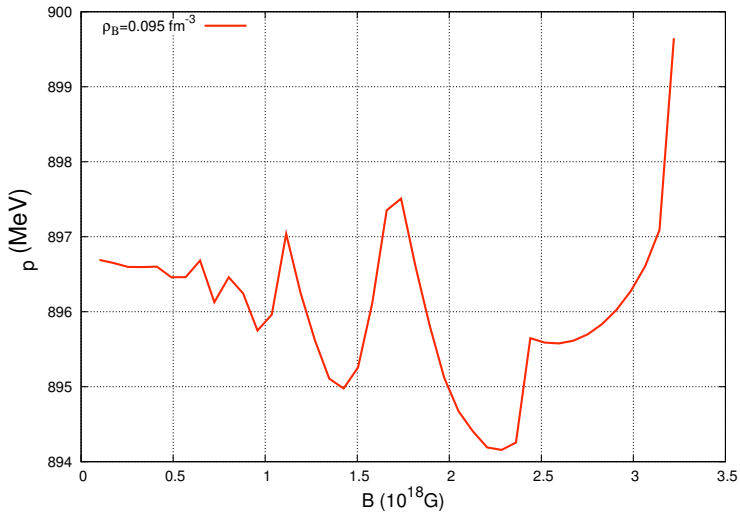


Figura 61: Potenciais químicos do próton em função do campo magnético. Geometria *bolha* com parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$.

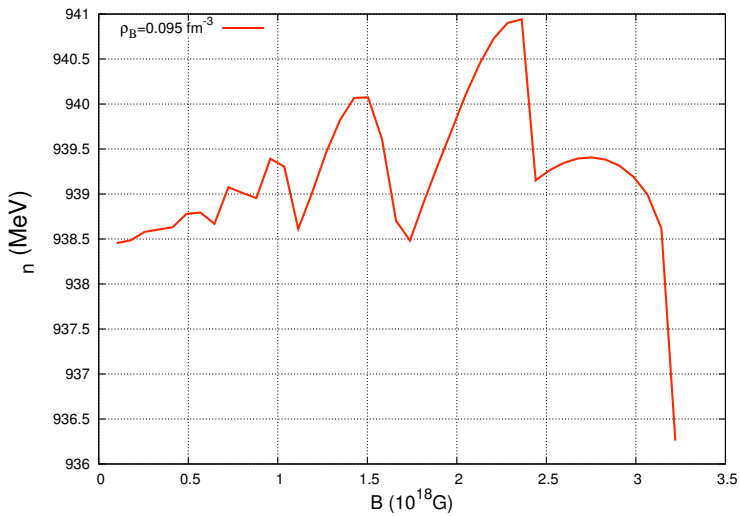


Figura 62: Potenciais químicos do nêutron em função do campo magnético. Geometria *bolha* com parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$.

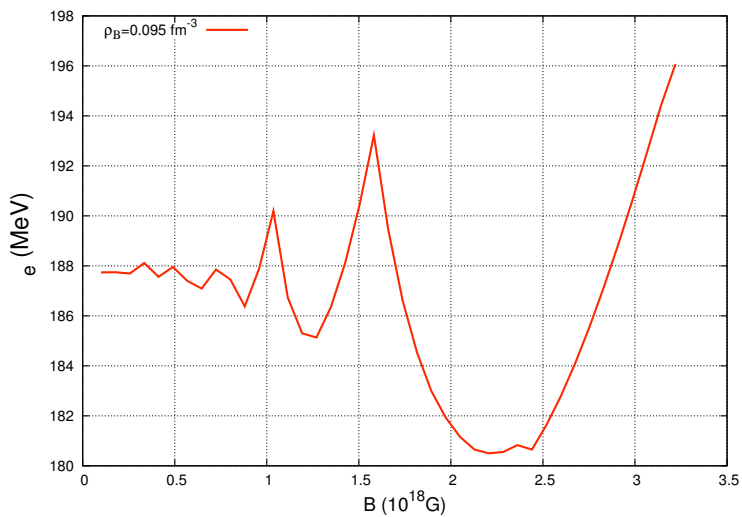


Figura 63: Potenciais químicos do elétron em função do campo magnético. Geometria *bolha* com parametrização NL3 e $Y_p = 0.3$.

Tabela 13: Perfis de densidade para a geometria bubble.

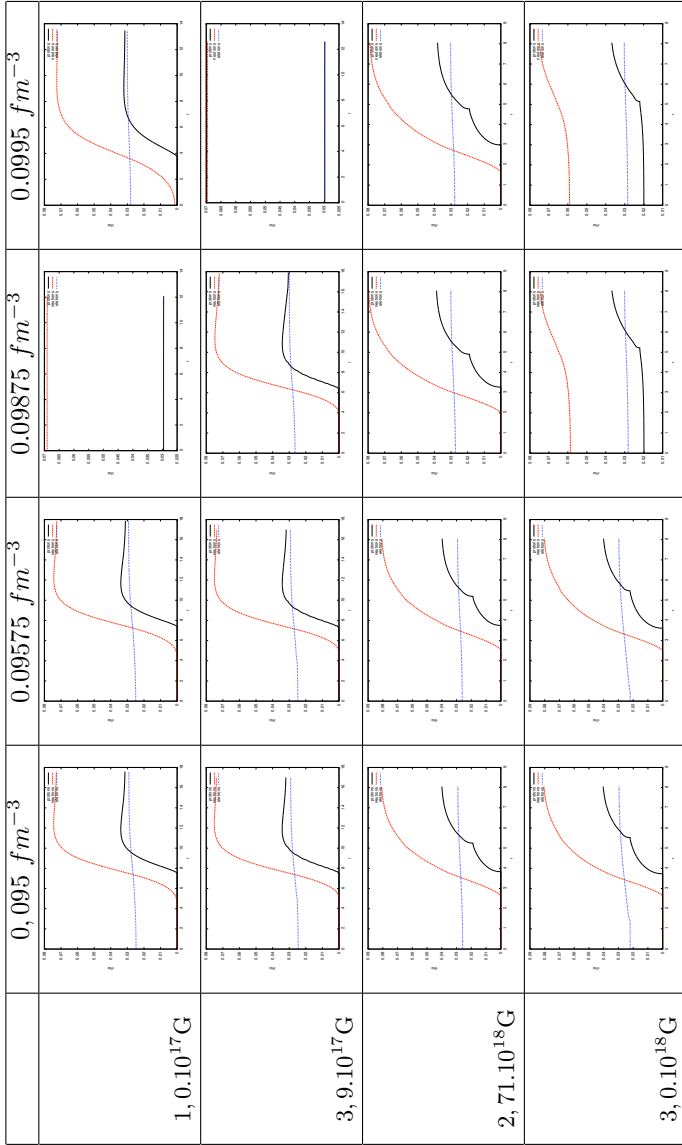


Tabela 14: Níveis de Landau na célula para a geometria bubble.

	$0,095 \text{ fm}^{-3}$	$0,09575 \text{ fm}^{-3}$	$0,09875 \text{ fm}^{-3}$	$0,0995 \text{ fm}^{-3}$
$1, 0 \cdot 10^{17} \text{ G}$				
$3, 9 \cdot 10^{17} \text{ G}$				
$2, 71 \cdot 10^{18} \text{ G}$				
$3, 0 \cdot 10^{18} \text{ G}$				

5 NOTAS EM CONVERGÊNCIA NUMÉRICA

5.1 FLUTUAÇÕES NUMÉRICAS EM TRANSIÇÕES

Com a inclusão do campo magnético espera-se, como vimos, alterações nas densidades de transição de uma estrutura da pasta para outra. Aqui investigamos, como exemplo, a convergência da transição gota/cilindro. Sem campo magnético a transição de gota para cilindro é observada próximo de $\rho = 0.0196 fm^{-3}$, como foi visto na seção (4.2). Vimos também que mesmo para campos magnéticos altos a densidade de transição variou no máximo 4%. Assim, podemos testar a estabilidade de nosso código em regiões onde não se espera transição.

é o que fazemos a seguir, de modo que geramos os gráficos mostrados nas figuras (64-66).

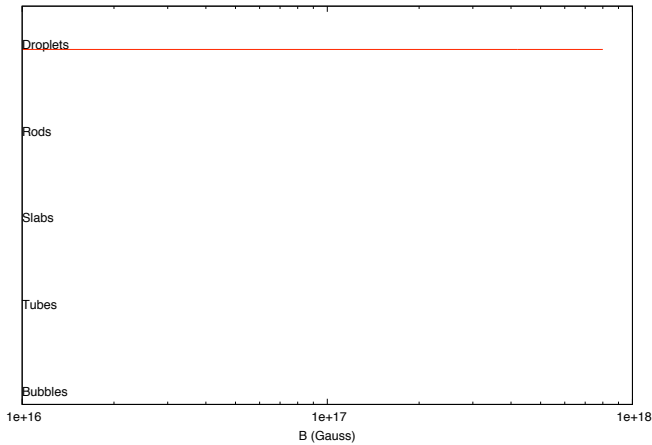


Figura 64: Transições para $\rho_B = 0.015 fm^{-3}$.

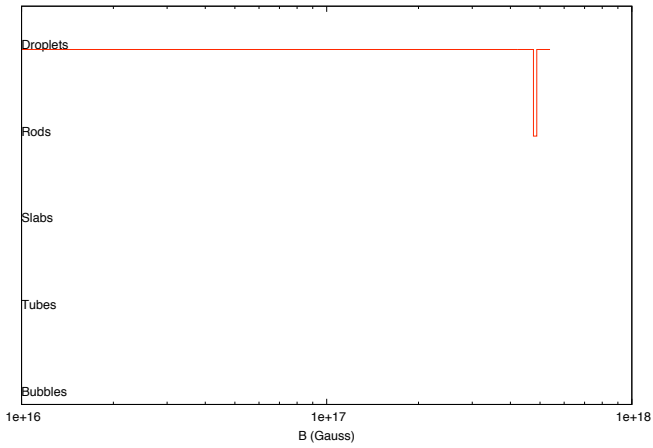


Figura 65: Transições para $\rho_B = 0.019 \text{ fm}^{-3}$.

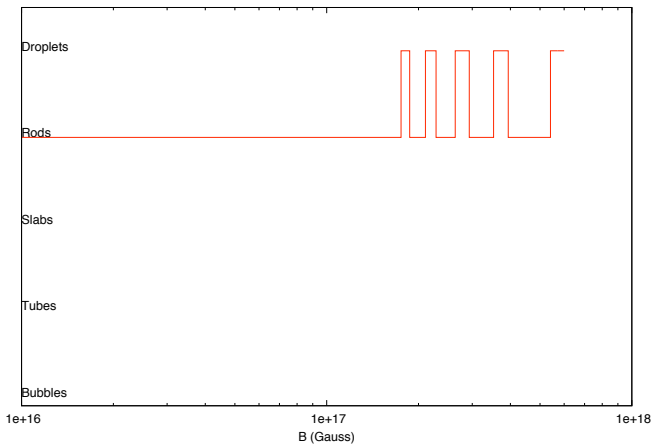


Figura 66: Transições para $\rho_B = 0.020 \text{ fm}^{-3}$.

Como pode ser visto nestas figuras, existem flutuações de uma estrutura para outra. Estas flutuações se devem apenas a imprecisões numéricas causadas pela grande proximidade entre as curvas de energia livre para gota e cilindro. Mostramos a seguir que este problema pode ser resolvido com um número maior de pontos de integração dos campos.

5.2 NÚMERO DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO

Para resolver o problema da flutuação mencionada anteriormente aumentamos o número de pontos na integração dos potenciais. Para o primeiro teste fixamos a densidade em $0.020 fm^{-3}$. Escolhemos esta densidade por ter apresentado um grande número de flutuações. A figura (67) mostra o resultado para escolhas diferentes do número de pontos de integração. Nota-se que o aumento no número de pontos tem efeito sobre as flutuações. Vê-se que a flutuação próxima de $B = 3 \cdot 10^{17} G$ foi extinta tanto para 2500 quanto para 2800 pontos. A flutuação próxima de $B = 4 \cdot 10^{17} G$ teve sua largura reduzida com o aumento de pontos. Além disso, o código conseguiu convergência até próximo de $B = 6 \cdot 10^{17} G$ com 2800 pontos, o que não havia sido possível com a escolha de um número menor.

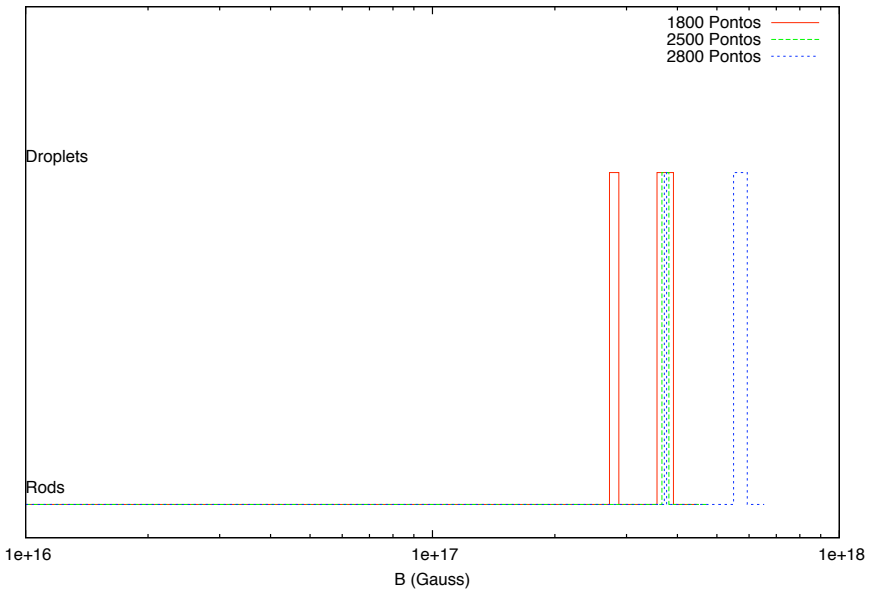


Figura 67: Fases da pasta em função do campo magnético para densidade $\rho = 0.020 fm^{-3}$. Cada resultado foi calculado com um número diferente de pontos na integração dos potenciais.

A figura (68) mostra a diferença entre as energias livres calculadas para as geometrias gota e cilindro. As flutuações de uma geometria

para a outra acontecem quando a curva mostrada se torna negativa. Pode-se ver pelo gráfico que as diferenças negativas são extremamente pequenas, praticamente iguais a zero. O aumento do número de pontos de integração altera o perfil da curva e a impede de se tornar negativa.

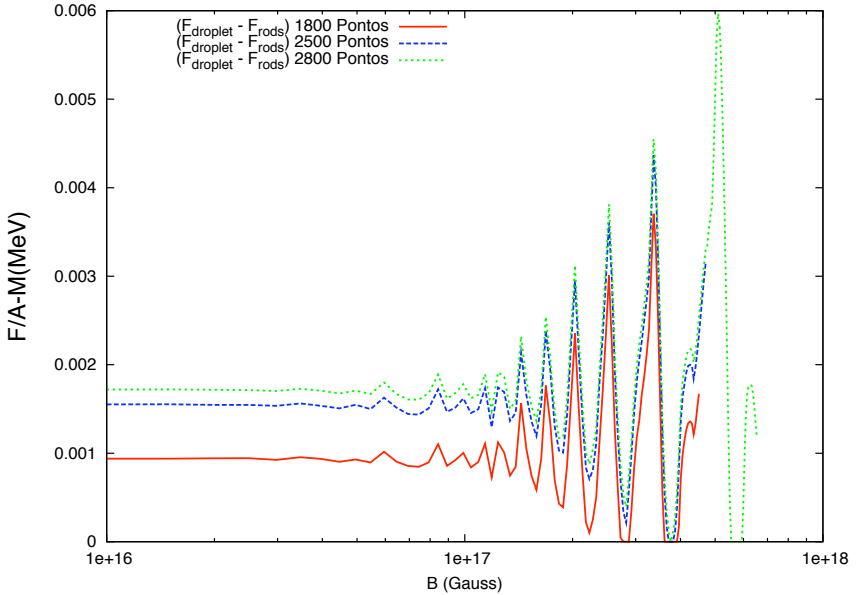


Figura 68: Diferença entre a energias livres da geometria droplet e rod em função do campo magnético.

Se desejamos apenas a EOS em determinada região de densidade em que sabemos previamente não haver transição de fase, basta escolher a estrutura esperada, e neste caso, o número de pontos de integração não necessita ser exageradamente grande. Porém, informações a respeito da estrutura da pasta (σ , ρ_t , RWZ, etc) exigem um cuidado maior. O teste mostrado aqui serve como guia para determinar o número de pontos necessários para determinado campo magnético. Por exemplo, 2800 pontos é um bom número de pontos para campos magnéticos abaixo de $10^{18} G$. Para a grande maioria dos resultados apresentados em seções anteriores a esta, onde havia campos maiores e a possibilidade de transição, utilizamos em geral 3000 pontos. Números maiores que este, embora desejáveis, tornam o tempo de máquina extremamente grande.

6 CONCLUSÃO

It's more fun to arrive a conclusion than to justify it. -
Malcolm Forbes.

Neste trabalho aplicamos a aproximação de Thomas-Fermi à matéria *npe* não-homogênea, obtendo informações de sistemas com grande número de partículas submetidas a campos magnéticos gigantes. Para a EOS utilizamos o modelo de Walecka não-linear. Para a maioria dos resultados pertinentes ao comportamento da EOS devido a um campo magnético externo, utilizamos a parametrização NL3 que, entre outras coisas, não leva em conta os termos de auto-interação do méson ω . Para as densidades estudadas, $0.1\rho_0 - 1.0\rho_0$, surgem no interior da matéria *npe* estruturas conhecidas coletivamente como pasta. O estudo da pasta é importante para modelos baseados em coexistência de fases, e o nosso trabalho é o primeiro a estudar o comportamento da pasta na presença de campos magnéticos.

Em nossos primeiros resultados determinamos os intervalos de densidades nos quais surge cada tipo de fase no interior da pasta (gotas, bolhas, tubos, cilindros e placas) para campos magnéticos em torno de $10^{17} G$. Tal resultado, mostrado na figura (27) e na tabela (4), nos serviu de validação do código numérico pois confirmou duas características consequentes da quantização de Landau: campos magnéticos da ordem dos campos críticos possuem um enorme número de níveis de Landau e, como consequência, a quantização não fica evidente; além disso, nesta faixa de campos a EOS não é consideravelmente afetada e, portanto, as estruturas da pasta devem surgir nos mesmos intervalos de densidades de um cálculo que não leve em conta campos magnéticos. Assim, foi possível comparar estes resultados aos resultados já existentes na literatura da área, onde a estrutura da pasta é calculada sem os níveis de Landau. Nossos resultados foram idênticos, servindo de validação do código numérico. Foram feitas outras validações como cálculos na fronteira da matéria homogênea na presença de campos magnéticos, e cálculos da magnetização para vários campos. Todos estes resultados permaneceram dentro do esperado.

Mas, de fato, o principal objetivo deste trabalho está na obtenção do comportamento da pasta para campos superiores aos campos críticos. Para estes campos o número de níveis de Landau cai acentuadamente, chegando a restar apenas um nível para campos superiores a $10^{18} G$, ver tabela (11). Para campos desta ordem foi possível mostrar que, para todas as geometrias estudadas, a energia livre do

sistema diminui devido ao campo magnético (B), ver figuras para a EOS das transições *gota/cilindro* (36), *tubo/bolha* (48) e *bolha/matéria-homogênea* (52). Por outro lado, a energia de superfície cresce com o aumento de B , ver transição *gota/cilindro* (37), transição *tubo/bolha* (49), transição *bolha/matéria-homogênea* (53). Este aumento na energia de superfície afeta a distribuição das partículas no interior da célula e faz a pele de nêutrons diminuir, ver tabela (10), figura (46) e figura (47). Como o número de níveis de Landau diminui conforme se aumenta o campo, cresce a degenerescência no sistema¹. Assim, poucos níveis de Landau são populados, levando a uma diminuição na energia livre total. A diminuição da energia livre significa um estado de partículas mais ligadas e, desta forma, o sistema gasta mais energia para criar uma superfície na qual as partículas não possuem todos os vizinhos, e assim o parâmetro σ da energia de superfície aumenta quando o campo magnético aumenta. A partir dos cálculos dos perfis de densidades na célula de Wigner-Seitz mostra-se então que a pele de nêutrons diminui pois os nêutrons estão se espalhando menos na célula. Lembramos que a equação utilizada para a energia de superfície é derivada para a geometria placa. O cálculo para esta geometria foi realizado para ambas as parametrizações, NL3 e TM1, e para as frações de prótons $Y_p = 0.3$ e $Y_p = 0.5$. Todos estes cálculos confirmaram o aumento na energia de superfície para $B > 10^{17} G$, obtendo resultados dramáticos para $B > 10^{18} G$, ver figuras (30) e (31).

Há quantidades que, devido à quantização, variam de forma mais complicada e oscilam com o aumento de B . Resultados importantes deste tipo foram obtidos nas fronteiras entre as fases no interior da pasta. O aumento da degenerescência das partículas carregadas (prótons e elétrons) faz surgir o efeito oscilatório conhecido como *efeito de Haas-van Alphen*. As quantidades que apresentam este efeito de forma mais evidente são a magnetização, ver figuras (19-25), RWZ, tabela (3) para $B \sim 10^{16} G$ e figura (59) para $B \sim 10^{18} G$, e as densidades de transição entre as fases, figuras (33-35). As densidades de transição são particularmente interessantes visto que determinam a extensão da pasta em um intervalo de densidades, informação que pode ser utilizada para determinar a extensão da pasta na crosta de magnetares. As oscilações encontradas nas densidades de transição entre as geometrias podem representar grandes alterações na extensão da pasta. Além disso, pequenas variações no campo magnético ao qual a pasta está submetida dão origem a mudanças elásticas na matéria, por exemplo, nos raios médios dos núcleos (ou bolhas). Existe a perspectiva de trabalhos

¹Ver seção (3.2).

futuros no que diz respeito a estes efeitos com origem na variação do campo magnético. Possivelmente tais oscilações possam desempenhar algum papel nos *starquakes*² e nas emissões de raios-X observados em magnetares. Neste contexto precisaremos estender o presente trabalho para outras parametrizações, tais como FSU(TODD-RUTEL; PIEKAREWICZ, 2005) e GM3(GLENDENNING; MOSZKOWSKI, 1991), e incluir o equilíbrio β em nossos cálculos, fenômeno de grande importância no estudo de estrelas de nêutrons. Sabe-se que para algumas parametrizações a estrutura da pasta é completamente diversa da que estudamos no presente trabalho(AVANCINI et al., 2008).

Quanto ao estudo da magnetização, obtivemos resultados com as parametrizações TM1 e NL3. Tais resultados confirmaram algumas características gerais da magnetização encontradas por Broderick *et al.*(BRODERICK; PRAKASH; LATTIMER, 2000) no contexto da matéria homogênea. Porém, nossos resultados também apresentaram diferenças específicas para cada geometria, por exemplo, amplitudes maiores nas oscilações da magnetização para baixas densidades. Como perspectiva futura pretendemos estender estes cálculos, e investigar a magnetização em um intervalo maior de campos magnéticos. Um dos interesses, neste caso, está em saber para qual campo magnético a *pasta* deixa de estar magnetizada e se existe alguma região com magnetização permanente.

Concluindo, nossos resultados mostraram claramente a importância de se levar em conta campos magnéticos no cálculo da EOS da matéria assimétrica neutra, *npe*, principalmente para campos acima de 10^{18} G. Mostramos que a energia livre tende a diminuir com o aumento do campo magnético, ao passo que a energia de superfície tende a aumentar. Calculamos a pele de nêutrons e constatamos a correlação entre o aumento na energia de superfície e a diminuição na pele de nêutrons, para algumas geometrias. Apresentamos também o aparecimento do efeito de Haas-van Alphen, quando a magnetização da matéria oscila com o aumento do campo magnético. Esse efeito tem papel fundamental em quantidades microscópicas da pasta, fazendo variar, por exemplo, o raio da célula de Wigner-Seitz e a densidade de transição entre as fases, alterando assim a própria estrutura da pasta como também sua extensão.

Assim, nosso trabalho além de ter obtido resultados inéditos, permite a ampliação do estudo da matéria nuclear assimétrica submetida a campos magnéticos gigantes em futuros estudos. Pretendemos ampliar os resultados atuais e também investigar suas implicações no

²De acordo com o modelo para magnetares de Thompson e Duncan (1995), grandes emissões de raios-X podem se originar em fraturas da crosta estelar.

que diz respeito à estrutura dos magnetares.

APÊNDICE A – Solução para a Equação de Dirac

Vamos aqui escolher um calibre para A^μ que corresponda ao sistema sujeito a um campo magnético, \mathbf{B} , externo na direção z ,

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{0}, Bx_1, 0). \quad (\text{A.1})$$

A equação de Dirac é dada por

$$\{i\partial/\partial t - H(\vec{x})\}\psi(\vec{x}, t) = 0, \quad (\text{A.2})$$

onde

$$H(\vec{x}) = \vec{\alpha} \cdot \{-i\vec{\nabla} - \epsilon_q |q| \vec{A}\} + \beta m + \epsilon_q |q| A^0. \quad (\text{A.3})$$

Lembrando que

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -i \\ i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

e o sinal da carga é dado por

$$\epsilon_q = \pm 1. \quad (\text{A.6})$$

Como a Hamiltoniana não depende de x_2 , x_3 ou t usamos o ansatz

$$\psi^\epsilon(\vec{x}, t) = f^{(\epsilon)}(x_1) \exp[-i(\epsilon E + \epsilon_q F)t + i\epsilon p_2 x_2 + i\epsilon p_3 x_3], \quad (\text{A.7})$$

onde $\epsilon = \pm 1$ identifica energia positiva/negativa e $F \equiv |q|A_0$.

Substituindo (A.4) e (A.5) em (A.3)

$$\left\{ \begin{pmatrix} i\partial t & 0 \\ 0 & i\partial t \end{pmatrix} - \tilde{\alpha} \cdot \vec{p} + \tilde{\alpha} \cdot \epsilon_q |q| \vec{A}(x_1) - \beta m - \epsilon_q |q| A_0 \right\} \psi^\epsilon(\vec{x}, t) = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} i\partial t & 0 \\ 0 & i\partial t \end{pmatrix} - \left(\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \epsilon_q |q| \vec{A}(x_1)) \right) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} m - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \epsilon_q |q| A_0 \right\} \psi^\epsilon = 0$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} i\partial t - m - \epsilon_q |q| A^0 & 0 \\ 0 & i\partial t + m - \epsilon_q |q| A^0 \end{pmatrix} - \left(\vec{\sigma} \cdot [\vec{p} - \epsilon_q |q| \vec{A}(x_1)] \right) \right\} \psi^\epsilon = 0$$

Sabendo que

$$\vec{\sigma} \cdot [\vec{p} - \epsilon_q |q| \vec{A}(x_1)] = \begin{pmatrix} \epsilon p_3 & -i[\epsilon p_2 - \epsilon_q |q| B x_1 + \partial_{x_1}] \\ i[\epsilon p_2 - \epsilon_q |q| B x_1 + \partial_{x_1}] & -\epsilon p_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

define-se os operadores

$$\hat{O}_1 \equiv -i[+\epsilon p_2 - \epsilon_q |q| B x_1 + \partial_{x_1}], \quad (\text{A.10})$$

$$\hat{O}_2 \equiv -i[-\epsilon p_2 + \epsilon_q |q| B x_1 + \partial_{x_1}]. \quad (\text{A.11})$$

Então (A.9) fica

$$\vec{\sigma} \cdot [\vec{p} - \epsilon_q |q| \vec{A}(x_1)] = \begin{pmatrix} \epsilon p_3 & \hat{O}_1 \\ \hat{O}_2 & -\epsilon p_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

e chegamos finalmente a

$$\begin{pmatrix} i\partial_t - m - \epsilon_q F & 0 & -\epsilon p_3 & -\hat{O}_1 \\ 0 & -\epsilon p_3 & -\hat{O}_2 & \epsilon p_3 \\ -\epsilon p_3 & -\hat{O}_1 & i\partial_t + m - \epsilon_q F & 0 \\ -\hat{O}_2 & \epsilon p_3 & 0 & i\partial_t + m - \epsilon_q F \end{pmatrix} f^\epsilon(x_1) e^{(-i\epsilon E t + i\epsilon p_2 w_2 + i\epsilon p_3 w_3)} = 0,$$

onde substituímos o ansatz (A.7). Aplicando o operador $i\partial_t$ ficamos com

$$\begin{pmatrix} -\epsilon E + m & 0 & \epsilon p_3 & \hat{O}_1 \\ 0 & -\epsilon E + m & \hat{O}_2 & -\epsilon p_3 \\ \epsilon p_3 & \hat{O}_1 & -\epsilon E - m & 0 \\ \hat{O}_2 & -\epsilon p_3 & 0 & -\epsilon E - m \end{pmatrix} f^\epsilon(x_1) = 0, \quad (\text{A.13})$$

ou, explicitando os termos f^ϵ ,

$$\begin{pmatrix} -\epsilon E + m & 0 & \epsilon p_3 & \hat{O}_1 \\ 0 & -\epsilon E + m & \hat{O}_2 & -\epsilon p_3 \\ \epsilon p_3 & \hat{O}_1 & -\epsilon E - m & 0 \\ \hat{O}_2 & -\epsilon p_3 & 0 & -\epsilon E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^\epsilon \\ f_2^\epsilon \\ f_3^\epsilon \\ f_4^\epsilon \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Portanto, temos o seguinte sistema

$$(-\epsilon E + m) f_1^\epsilon + \epsilon p_3 f_3^\epsilon + \hat{O}_1 f_4^\epsilon = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$(-\epsilon E + m) f_2^\epsilon + \hat{O}_2 f_3^\epsilon - \epsilon p_3 f_4^\epsilon = 0, \quad (\text{A.16})$$

$$\epsilon p_3 f_1^\epsilon + \hat{O}_1 f_2^\epsilon + (-\epsilon E - m) f_3^\epsilon = 0, \quad (\text{A.17})$$

$$\hat{O}_2 f_1^\epsilon - \epsilon p_3 f_2^\epsilon + (-\epsilon E - m) f_4^\epsilon = 0. \quad (\text{A.18})$$

Antes de resolvermos este sistema fazemos a seguinte transformação de variáveis

$$\xi = (|q|B)^{1/2} \left(x_1 - \frac{\epsilon_q \epsilon p_2}{|q|B} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = (|q|B)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (\text{A.19})$$

de forma que os operadores \hat{O}_1 e \hat{O}_2 ficam

$$\hat{O}_1 = -i(|q|B)^{1/2} \left(-\epsilon_q \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \quad (\text{A.20})$$

$$\hat{O}_2 = -i(|q|B)^{1/2} \left(+\epsilon_q \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right). \quad (\text{A.21})$$

As quatro equações (A.15) podem ser reescritas de forma simplificada como

$$(-\epsilon E \pm m) f_{1,3} + \epsilon p_3 f_{3,1} + \hat{O}_1 f_{4,2} = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$(-\epsilon E \pm m) f_{2,3} - \epsilon p_3 f_{4,2} + \hat{O}_2 f_{3,1} = 0. \quad (\text{A.23})$$

Utilizando-se os operadores O_1 e O_2 e alguma algebra pode-se encontrar as quatro equações abaixo.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{E^2 - m^2 - p_3^2}{|q|B} - (\xi^2 \pm \epsilon_q) \right] f_i^\epsilon = 0, \quad (\text{A.24})$$

onde o sinal é $- (+)$ se $i = 1, 3$ ($2, 4$).

Note que se rearranjarmos as equações acima

$$\left[\xi^2 - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] f_i^\epsilon = \left[\frac{E^2 - m^2 - p_3^2}{|q|B} \mp \epsilon_q \right] f_i^\epsilon, \quad (\text{A.25})$$

temos uma equação do tipo oscilador harmônico¹. Então, definindo

$$\frac{E^2 - m^2 - p_3^2}{|q|B} \equiv 2n, \quad (\text{A.26})$$

e assim

$$2n \mp \epsilon_q = 2l + 1, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.27})$$

$$n = l + \frac{1}{2}(1 \pm \epsilon_q). \quad (\text{A.28})$$

Note que o r—tulo n é degenerado para todos os valores exceto $n = 0$,

$$\epsilon_q = -1 \rightarrow n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.29})$$

$$\epsilon_q = +1 \rightarrow n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.30})$$

Esta degenerescência pode ser explicitada por um r—tulo de spin $(\sigma_z)^2$,

$$n = l + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_q \sigma_z), \quad (\text{A.31})$$

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \sigma_z = \pm 1. \quad (\text{A.32})$$

As soluções da equação (A.25) são então dadas em termos dos polinômios de Hermite, H_l ,

$$\nu_l(\xi) = \frac{H_l(\xi)e^{-\xi^2/2}}{(2^l l! \pi^{1/2})^{1/2}}, \quad (\text{A.33})$$

¹Por exemplo, $H_{osc}\Psi_l = E_l\Psi_l$, onde a Hamiltoniana do oscilador harmônico definida em termo dos operadores levantadores e abaixadores é $H_{osc} = a^\dagger a + 1/2$. Sendo que $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \partial/\partial\xi)$ e $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \partial/\partial\xi)$. Portanto, $(\xi^2 - \partial^2/\partial\xi^2)\Psi_l = (2l + 1)\Psi_l$.

²Na prática, ou seja, na implementação numérica, todo cálculo em que n apareça basta um fator dois nos casos onde $n \neq 0$.

com normalização

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nu_l(x) \nu_m(x) dx = \delta_{lm} . \quad (\text{A.34})$$

Para visualizarmos melhor como as soluções ficam em termos do n -tulo n reescrevemos a relação (A.27)

$$l = \frac{2n \mp \epsilon_q - 1}{2} , \quad (\text{A.35})$$

e então

$$f^\epsilon = \begin{pmatrix} C_1^\epsilon \nu_{\frac{2n+\epsilon_q-1}{2}}(\xi) \\ C_2^\epsilon \nu_{\frac{2n-\epsilon_q-1}{2}}(\xi) \\ C_3^\epsilon \nu_{\frac{2n+\epsilon_q-1}{2}}(\xi) \\ C_4^\epsilon \nu_{\frac{2n-\epsilon_q-1}{2}}(\xi) \end{pmatrix} . \quad (\text{A.36})$$

Portanto, para carga positiva ($\epsilon_q = +1$) a solução é

$$f^\epsilon(x_1) = \begin{pmatrix} C_1^\epsilon \nu_n(\xi) \\ C_2^\epsilon \nu_{n-1}(\xi) \\ C_3^\epsilon \nu_n(\xi) \\ C_4^\epsilon \nu_{n-1}(\xi) \end{pmatrix} , \text{ se } n = 0 \text{ então } C_2^\epsilon = C_4^\epsilon = 0 , \quad (\text{A.37})$$

e para carga negativa ($\epsilon_q = -1$),

$$f^\epsilon(x_1) = \begin{pmatrix} C_1^\epsilon \nu_{n-1}(\xi) \\ C_2^\epsilon \nu_n(\xi) \\ C_3^\epsilon \nu_{n-1}(\xi) \\ C_4^\epsilon \nu_n(\xi) \end{pmatrix} , \text{ se } n = 0 \text{ então } C_1^\epsilon = C_3^\epsilon = 0 . \quad (\text{A.38})$$

Para encontrarmos os C^ϵ 's aplicamos os operadores \hat{O}_1 e \hat{O}_2 da matriz (A.14). Fazendo isto encontramos

$$\begin{pmatrix} -\epsilon E + m & 0 & \epsilon p_3 & i\epsilon_q p_n \\ 0 & -\epsilon E + m & -i\epsilon_q p_n & -\epsilon p_3 \\ \epsilon p_3 & i\epsilon_q p_n & -\epsilon E - m & 0 \\ -i\epsilon_q p_n & -\epsilon p_3 & 0 & -\epsilon E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^\epsilon \\ C_2^\epsilon \\ C_3^\epsilon \\ C_4^\epsilon \end{pmatrix} = 0 , \quad (\text{A.39})$$

onde $p_n = \sqrt{2|q|nB}$. Para que exista uma solução não-trivial a

matriz não pode ser inversível³. Uma matriz 2×2 tem sua inversa

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, |\mathbf{A}| = \text{determinante de } \mathbf{A}, \quad (\text{A.40})$$

Ainda que para encontrarmos a inversa de matrizes maiores que 2×2 sejamos obrigados a recorrer a outros algoritmos (como a *eliminação de Gauss-Jordan*), para que \mathbf{A} não possua uma inversa basta exigir que seu determinante seja igual a zero. Então, calculando o determinante da matriz presente na equação (A.39) e igualando a zero encontramos

$$E = \sqrt{p_3^2 + m^2 + p_n^2}. \quad (\text{A.41})$$

Portanto, a eq.(A.41) é a condição para que (A.39) tenha solução não-trivial. Agora, analisando a equação matricial (A.39) vemos que

$$\begin{aligned} -i\epsilon_q p_n C_1^\epsilon - \epsilon p_3 C_2^\epsilon + [-\epsilon E - m] C_4^\epsilon &= 0 \\ C_4^\epsilon &= \frac{i\epsilon_q p_n C_1^\epsilon + \epsilon p_3 C_2^\epsilon}{-\epsilon E + m}, \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

e da mesma forma

$$C_3^\epsilon = \frac{1}{(\epsilon E + m)} [\epsilon p_1 C_1^\epsilon + i\epsilon_q p_n C_2^\epsilon]. \quad (\text{A.43})$$

Isto pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} C_1^\epsilon \\ C_2^\epsilon \\ C_3^\epsilon \\ C_4^\epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \epsilon p_3 / (\epsilon E + m) \\ -i\epsilon_q p_n / (\epsilon E + m) \end{bmatrix} C_1^\epsilon + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i\epsilon_q p_n / (\epsilon E + m) \\ -\epsilon p_3 / (\epsilon E + m) \end{bmatrix} C_2^\epsilon \quad (\text{A.44})$$

Os estados de energia positiva (ou negativa) dependem de duas constantes independentes (C_1^ϵ e C_2^ϵ) e portanto são duplamente degenerados⁴. Por exemplo, poderíamos escolher ($C_1^\epsilon = 1$ e $C_2^\epsilon = 0$) ou ($C_1^\epsilon = 0$ e $C_2^\epsilon = 1$) e obteríamos os estados usados na referência

³Pois se houver uma M^{-1} , então podemos fazer $M^{-1} M C = 0$, logo $C = 0$, que é a solução trivial.

⁴Observe que o estado fundamental não é degenerado, mas resulta em um único estado pois $C_1 = C_3 = 0$ ($C_2 = C_4 = 0$) quando $n = 0$ para $\epsilon_q = -1$ ($\epsilon_q = +1$)

((JOHNSON; LIPPMANN, 1949)). Aqui, escolhemos seus valores de modo a garantir a normalização.

A solução com todos os índices é

$$\psi_{n,\sigma_z,p_2,p_3}^\epsilon = f^\epsilon(\mathbf{x}_1) e^{-i(\epsilon E + \epsilon_q F - \epsilon p_2 x_2 - \epsilon p_3 x_3)}, \quad (\text{A.45})$$

e a normalização⁵ é dada por

$$N_{rr'} = \delta_{nn'} \delta_{\sigma_z \sigma'_z} \delta_{p_2 p'_2} \delta_{p_3 p'_3}. \quad (\text{A.46})$$

⁵Veja o cálculo no Apêndice B.

**APÊNDICE B - Normalização da Solução para a Equação
de Dirac**

Para fins práticos vamos considerar o férmion no interior de uma caixa de volume $V = L_1 L_2 L_3$ e impor condições de contorno periódicas. Ao final as constantes de normalização são escolhidas de forma a eliminarem essas dimensões.

A normalização é dada por

$$N_{rr'} = \int_V d^3x \psi_r^\epsilon(\vec{x}, t)^\dagger \psi_r^\epsilon(\vec{x}, t), \quad r = n, \sigma_z, p_2, p_3, \quad (\text{B.1})$$

onde r representa todos os rótulos dos números quânticos dos estados.

Lembrando que

$$\psi_r^\epsilon(\vec{x}, t) = f^\epsilon(x_1) e^{i[\epsilon p_2 x_2 + \epsilon p_3 x_3 - (\epsilon E + \epsilon_q |q| A^0) t]}, \quad (\text{B.2})$$

ou mais explicitamente

$$\psi_r^\epsilon(\vec{x}, t) = \begin{bmatrix} C_1^\epsilon \nu_{nq}(\xi) \\ C_2^\epsilon \nu_{mq}(\xi) \\ C_3^\epsilon \nu_{nq}(\xi) \\ C_4^\epsilon \nu_{mq}(\xi) \end{bmatrix} e^{i[\epsilon p_2 x_2 + \epsilon p_3 x_3 - (\epsilon E + \epsilon_q |q| A^0) t]}, \quad (\text{B.3})$$

onde $n_q = n - \frac{(\epsilon_q + 1)}{2}$ e $m_q = n + \frac{(\epsilon_q - 1)}{2}$. Então, a eq.(B.1) fica

$$\begin{aligned} N_{rr'} = & \int_{L_1} dx_1 [C_1^{\prime\epsilon*} C_1^\epsilon \nu_{nq}(\xi') \nu_{nq}(\xi) + C_2^{\prime\epsilon*} C_2^\epsilon \nu_{mq}(\xi') \nu_{mq}(\xi) \\ & + C_3^{\prime\epsilon*} C_3^\epsilon \nu_{nq}(\xi') \nu_{nq}(\xi) + C_4^{\prime\epsilon*} C_4^\epsilon \nu_{mq}(\xi') \nu_{mq}(\xi)] \\ & \times \int_{L_2} dx_2 e^{i\epsilon(p_2 - p_2') x_2} \int_{L_3} dx_3 e^{i\epsilon(p_3 - p_3') x_3}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

mas

$$\frac{1}{L} \int dx e^{i\epsilon(p - p') x} = \delta_{pp'}, \quad (\text{B.5})$$

então

$$\begin{aligned}
N_{rr'} = & \int dx_1 [C_1^{\prime\epsilon*} C_1^\epsilon \nu_{nq}(\xi') \nu_{nq}(\xi) + C_2^{\prime\epsilon*} C_2^\epsilon \nu_{mq}(\xi') \nu_{mq}(\xi) \\
& + C_3^{\prime\epsilon*} C_3^\epsilon \nu_{nq}(\xi') \nu_{nq}(\xi) + C_4^{\prime\epsilon*} C_4^\epsilon \nu_{mq}(\xi') \nu_{mq}(\xi)] \\
& \times L_2 \delta_{p_2 p_2'} L_3 \delta_{p_3' p_3} , \tag{B.6}
\end{aligned}$$

e lembrando que a transformação de variáveis usada é

$$\xi = (|q|B)^{1/2} \left(x_1 - \frac{\epsilon_q \epsilon p_2}{|q|B} \right) \tag{B.7}$$

$$d\xi = (|q|B)^{1/2} dx_1 , \tag{B.8}$$

a integração dos polinômios de Hermite resulta finalmente na normalização

$$N_{rr'} = \frac{L_2 L_3}{(|q|B)^{1/2}} \sum_{i=1}^4 |C_i^\epsilon|^2 \delta_{nn'} \delta_{\sigma_z \sigma_z'} \delta_{p_2 p_2'} \delta_{p_3' p_3} . \tag{B.9}$$

Lembrando que os coeficientes C_i^ϵ estão relacionados por (A.44), o somatório resulta em

$$\sum_{i=1}^4 |C_i^\epsilon|^2 = (|C_1^\epsilon|^2 + |C_2^\epsilon|^2) \frac{2\epsilon E}{\epsilon E + m} . \tag{B.10}$$

Assim, se escolhermos C_1^ϵ e C_2^ϵ tais que

$$(|C_1^\epsilon|^2 + |C_2^\epsilon|^2) = \frac{(|q|B)^{1/2}}{L_2 L_3} \left(\frac{\epsilon E + m}{2\epsilon E} \right) , \tag{B.11}$$

então

$$\sum_{i=1}^4 |C_i^\epsilon|^2 = \frac{(|q|B)^{1/2}}{L_2 L_3} , \tag{B.12}$$

e a normalização torna-se

$$N_{rr'} = \delta_{nn'} \delta_{\sigma_z \sigma'_z} \delta_{p_2 p'_2} \delta_{p'_3 p_3} . \quad (\text{B.13})$$

APÊNDICE C - Cálculo das Densidades

DENSIDADE DE NÚMERO

Para encontrar a densidade de número de um férmion carregado, fazemos

$$\begin{aligned}
 \rho(\vec{r}) &= \sum_r \psi_r^\dagger(\vec{x}, t) \psi_r(\vec{x}, t) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma_z=\pm 1} \sum_{p_2} \sum_{p_3} f^\dagger(x_1) f(x_1) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma_z=\pm 1} \sum_{p_2} \sum_{p_3} [|C_1|^2 \nu_{nq}(\xi) \nu_{nq}(\xi) + |C_2|^2 \nu_{mq}(\xi) \nu_{mq}(\xi) \\
 &\quad + |C_3|^2 \nu_{nq}(\xi) \nu_{nq}(\xi) + |C_4|^2 \nu_{mq}(\xi) \nu_{mq}(\xi)] .
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Tomando um dos termos do somatório em p_2 fazemos a aproximação

$$\sum_{p_2} |C_1|^2 \nu_{nq}(\xi) \nu_{nq}(\xi) \approx \frac{L_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 |C_1|^2 \nu_{nq}(\xi) \nu_{nq}(\xi) . \tag{C.2}$$

Lembrando a transformação de variáveis usada nos polinômios de Hermite,

$$\xi = (|q|B)^{1/2} \left(x_1 - \frac{\epsilon_q p_2}{|q|B} \right) , \tag{C.3}$$

a integral resulta em

$$= \frac{L_2}{2\pi} (|q|B)^{1/2} |C_1|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \nu_{nq}(\xi) \nu_{nq}(\xi) \tag{C.4}$$

$$= \frac{L_2}{2\pi} (|q|B)^{1/2} |C_1|^2 . \tag{C.5}$$

Substituindo o resultado acima em cada um dos termos em (C.1) temos

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma_z=\pm 1} \sum_{p_3} \sum_{i=1}^4 \frac{L_2}{2\pi} (|q|B)^{1/2} |C_i|^2, \quad (\text{C.6})$$

e, devido à normalização¹,

$$\rho(\vec{r}) = \frac{(|q|B)}{2\pi L_3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma_z=\pm 1} \sum_{p_3}. \quad (\text{C.7})$$

Agora, aproximando por uma integral o somatório com respeito a p_3 ,

$$\rho(\vec{r}) = \frac{(|q|B)}{2\pi L_3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma_z=\pm 1} \frac{L_3}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3. \quad (\text{C.8})$$

Para temperatura zero a integral vai até o momento de Fermi (P_F^{n,σ_z}),

$$\rho(\vec{r}) = 2 \frac{(|q|B)}{(2\pi)^2} \sum_{\sigma_z=\pm 1} \sum_{n=0}^{n_{max}} \int_0^{P_F^{n,\sigma_z}} dp_3, \quad (\text{C.9})$$

e assim a densidade de partículas é dada por

$$\rho(\vec{r}) = \frac{(|q|B)}{2\pi^2} \sum_{\sigma_z=\pm 1} \sum_{n=0}^{n_{max}} P_F^{n,\sigma_z}. \quad (\text{C.10})$$

O momento de Fermi é encontrado por ²

$$P_F^{n,\sigma_z}{}^2 = E_F^2 - \tilde{m}_{n,\sigma_z}^2. \quad (\text{C.11})$$

Note que o somatório da equação (C.9) é interrompido em n_{max} , que é o último número inteiro antes do valor de n para o qual $P_F^{n,\sigma_z}{}^2$ é negativo. A densidade (C.10), em nosso trabalho, é válida para prótons e elétrons, bastando substituir corretamente os respectivos momentos de Fermi e respectivas massas efetivas.

¹Apêndice B.

²Ver equação (2.51).

DENSIDADE ESCALAR

$$\begin{aligned}
\rho_s(\vec{x}) &= \sum_{\tau} \bar{\psi}(\vec{x}) \psi(\vec{x}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{p_2} \sum_{p_3} f(x_1)^\dagger \gamma^0 f(x_1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{p_2} \sum_{p_3} [C_1 \nu_{nq}(\xi) C_2 \nu_{mq}(\xi) C_3 \nu_{nq}(\xi) C_4 \nu_{mq}(\xi)] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} C_1 \nu_{nq}(\xi) \\ C_2 \nu_{mq}(\xi) \\ C_3 \nu_{nq}(\xi) \\ C_4 \nu_{mq}(\xi) \end{bmatrix} \\
&= \frac{(|q|B)^{1/2} L_2}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{p_3} [|C_1|^2 + |C_2|^2 - |C_3|^2 - |C_4|^2] \\
&= \frac{(|q|B)^{1/2} L_2}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{p_3} \left[1 - \left(\frac{\epsilon p_3}{\epsilon E + m} \right)^2 - \left(\frac{2|q|\epsilon_\sigma B [n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\epsilon_\sigma \sigma_z]}{\epsilon E + m} \right)^2 \right] \\
&\quad \times (|C_1|^2 + |C_2|^2) \\
&= \frac{(|q|B)^{1/2} L_2}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{p_3} \left[1 - \frac{E^2 - m^2}{(\epsilon E + m)^2} \right] (|C_1|^2 + |C_2|^2) \\
&= \frac{(|q|B)^{1/2} L_2}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{p_3} \left[\frac{2m}{\epsilon E + m} \right] \frac{(|q|B)^{1/2}}{L_2 L_3} \left(\frac{\epsilon E + m}{2\epsilon E} \right),
\end{aligned}$$

$$\rho_s(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{p_3} \frac{(|q|B)}{2\pi L_3} \frac{m}{\epsilon E} . \quad (C.12)$$

Como antes, aproximamos o somatório em p_3 por uma integral. Este procedimento resulta em

$$\rho_s(\vec{x}) = \frac{m|q|B\epsilon}{2\pi^2} \sum_{\sigma_z=\pm 1} \sum_{n=0}^{n_{max}} \ln \left(\frac{E_F + P_F^{n,\sigma_z}}{\tilde{m}_{n,\sigma_z}} \right) . \quad (C.13)$$

DENSIDADES DE ENERGIA

PRÓTONS E ELÉTRONS

$$\epsilon_i(\vec{r}) = \sum_r \psi_r^i(\vec{r})^\dagger \hat{H}_i \psi_r^i(\vec{r}) , i = p, e . \quad (C.14)$$

$$\epsilon_i(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma_z} \sum_{p_2} \sum_{p_3} f^\dagger(x_1) f(x_1) E_n^i \quad (C.15)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma_z} \sum_{p_3} \sum_{j=1}^4 \frac{L_2}{2\pi} (|q|B)^{1/2} |C_j|^2 E_n^i \quad (C.16)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma_z} \sum_{p_3} \frac{(|q_i|B)}{2\pi L_3} \sqrt{p_3^2 + \tilde{m}_{n,\sigma_z}^2} , \quad (C.17)$$

e fazendo a aproximação $\sum_{p_3} \approx \frac{L_3}{2\pi} \int dp_3$, chegamos à expressão desejada

$$\epsilon_i(\vec{r}) = \frac{(|q_i|B)}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{\sigma_z=\pm 1} \left[P_F^{n,\sigma_z} E_F + \tilde{m}_{n,\sigma_z}^2 \ln \left(\frac{P_F^{n,\sigma_z} + E_F}{\tilde{m}_{n,\sigma_z}^i} \right) \right] , i = p, e . \quad (C.18)$$

NÊUTRONS

Como os níveis de energia dos nêutrons neste modelo não são alterados pela presença do campo magnético, usamos uma onda plana que leva a

$$\epsilon_n(\vec{r}) = \frac{1}{V} \sum_{p, \sigma_z} \sqrt{p^2 + m_n^{*2}}, \quad (\text{C.19})$$

somando no spin e aproximando o somatório em p por $\sum_p \approx \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3p$ chegamos a

$$\epsilon_n(\vec{r}) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{P_{fn}(\vec{r})} dp p^2 \sqrt{p^2 + m_n^{*2}}. \quad (\text{C.20})$$

APÊNDICE D - Encontrando os Potenciais Químicos

Para encontrar o potencial químico do próton fazemos a minimização do potencial termodinâmico em relação à densidade de prótons em um volume arbitrário. Assim,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_p} = \frac{\partial}{\partial \rho_p} \int_V \epsilon(\vec{r}) d^3 r - \mu_p \frac{\partial}{\partial \rho_p} \int_V \rho(\vec{r}) d^3 r = 0, \quad (\text{D.1})$$

ou seja,

$$\mu_p = \frac{\partial \epsilon(\vec{r})}{\partial \rho_p}. \quad (\text{D.2})$$

Substituindo a densidade total de energia(2.56), encontra-se

$$\mu_p = \frac{\partial \epsilon_p}{\partial \rho_p} + eA_0 + g_v V_0 + \frac{1}{2} g_\rho b_0. \quad (\text{D.3})$$

Por (C.15) sabemos que a densidade de energia dos prótons pode ser escrita como

$$\epsilon_p(\vec{r}) = \frac{eB}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{\sigma_z} \int_0^{P_{F_p}^{n,\sigma_z}} dp_3 \sqrt{p_3^2 + \tilde{m}_{n,\sigma_z}^2}, \quad (\text{D.4})$$

onde, aqui, $P_{F_p}^{n,\sigma_z}$ é o momento de Fermi do próton com número principal n e spin σ_z . Finalmente, calculando a derivada parcial encontramos

$$\frac{\partial \epsilon_p}{\partial \rho_p} = \frac{\partial \epsilon_p}{\partial P_{F_p}^{n,\sigma_z}} \frac{\partial P_{F_p}^{n,\sigma_z}}{\partial \rho_p} \quad (\text{D.5})$$

$$= \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{\sigma_z=\pm 1} \sqrt{P_{F_p}^{n,\sigma_z}{}^2 + \tilde{m}_{n,\sigma_z}^2}, \quad (\text{D.6})$$

onde usamos o teorema fundamental do cálculo.

Portanto, a equação do potencial químico do próton fica

$$\mu_p = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{\sigma_z=\pm 1} \sqrt{P_{F_p}^{n,\sigma_z}{}^2 + \tilde{m}_{n,\sigma_z}^2} + eA_0 + g_v V_0 + \frac{1}{2} g_\rho b_0. \quad (\text{D.7})$$

Aplicando o mesmo esquema para o nêutron,

$$\mu_n = \frac{\partial \epsilon_n}{\partial \rho_n} + g_v V_0 - \frac{1}{2} g_\rho b_0 , \quad (\text{D.8})$$

$$\mu_n = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{\sigma_z = \pm 1} \sqrt{P_{F_n}^{n, \sigma_z}{}^2 + M^{*2}} + g_v V_0 - \frac{1}{2} g_\rho b_0 , \quad (\text{D.9})$$

e da mesma forma para o elétron,

$$\mu_e = \frac{\partial \epsilon_e}{\partial \rho_e} - e A_0 , \quad (\text{D.10})$$

$$\mu_e = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{\sigma_z = \pm 1} \sqrt{P_{F_e}^{n, \sigma_z}{}^2 + \tilde{m}_{n, \sigma_z}^2} - e A_0 . \quad (\text{D.11})$$

APÊNDICE E – Polinômios Associados de Laguerre

A representação de Rodrigues para os polinômios associados de Laguerre é (MORSE; FESHBACH, 1953)

$$\mathcal{L}_n^a(z) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(n+a)!}{(n-m)!(a+m)!m!} x^m . \quad (\text{E.1})$$

Os polinômios associados de Laguerre são ortogonais no intervalo $[0, \infty)$ com respeito à função peso $e^{-z} z^a$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-z} z^a \mathcal{L}_m^a(z) \mathcal{L}_n^a(z) dz &= \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(n+1)} \delta_{mn} \\ &= \frac{(n+a)!}{n!} \delta_{mn} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Para o presente trabalho, as fórmulas de recorrência mais importantes são

$$\sum_{m=0}^n \mathcal{L}_m^a(z) = \mathcal{L}_n^{a+1}(z) , \quad (\text{E.3})$$

$$\frac{d}{dz} \mathcal{L}_n^a(z) = -\mathcal{L}_{n-1}^{a+1}(z) , \quad (\text{E.4})$$

$$z \frac{d^2}{dz^2} \mathcal{L}_n^a(z) + (a+1-z) \frac{d}{dz} \mathcal{L}_n^a(z) + n \mathcal{L}_n^a(z) = 0 . \quad (\text{E.5})$$

APÊNDICE F – Solução da Equação de Klein-Gordon 3D

F.1 TERMOS LINEARES

A equação de Klein-Gordon é dada por

$$(-\nabla^2 + m_\xi^2)|\xi\rangle = |s_\xi\rangle, \quad (\text{F.1})$$

ou em coordenadas esféricas

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + m_\xi^2\right)\xi(r) = s_\xi(r), \quad (\text{F.2})$$

onde ξ representa os campos mesônicos e s_ξ as fontes correspondentes (sem os termos não-lineares). A equação de Klein-Gordon é resolvida (GAMBHIR; RING; THIMET, 1990) expandindo-se os campos em bases do oscilador em 3 dimensões. A base do oscilador é dada em termos dos polinômios associados de Laguerre (Apêndice E) \mathcal{L}_n^a . Assim

$$\begin{aligned} \xi(r) &= \sum_{n=1}^{N_B} a_n \phi_n(r), \\ s_\xi(r) &= \sum_{n=1}^{N_B} b_n \phi_n(r), \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

onde

$$\phi_n(r) = \frac{N_{n0}}{b^{3/2}} L_{n-1}^{1/2} \left(\frac{r^2}{b^2}\right) e^{-r^2/2b^2}. \quad (\text{F.4})$$

O fator de normalização é

$$N_{n0} = \sqrt{2(n-1)!/(n-1/2)!}. \quad (\text{F.5})$$

Antes de utilizarmos o ansatz (F.3) na equação de Klein-Gordon, vamos calcular o elemento de matriz $\langle \phi_n | \nabla^2 | \phi_{n'} \rangle$. Em coordenadas esféricas encontramos

$$\langle \phi_{n'} | \nabla^2 | \phi_n \rangle = \int_0^\infty dr r^2 \phi_{n'}(r) \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right] \phi_n(r)$$

$$= \frac{N_{n'0} N_{n0}}{b^3} \int_0^\infty dr r^2 L_{n'-1}^{1/2} \quad (\text{F.6})$$

$$\times \left(\frac{r^2}{b_B^2} \right) e^{-r^2/2b_B^2} \left[\frac{d^2}{dr^2} \right. \quad (\text{F.7})$$

$$\left. + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right] L_{n-1}^{1/2} \left(\frac{r^2}{b_B^2} \right) e^{-r^2/2b_B^2} . \quad (\text{F.8})$$

Usando a transformação

$$z = \frac{r^2}{b_B^2} , \quad (\text{F.9})$$

encontramos as relações

$$\begin{aligned} \frac{2}{r} \frac{d}{dr} &= \frac{4}{b_B^2} \frac{d}{dz} \\ \frac{d^2}{dr^2} &= \frac{2}{b_B^2} \frac{d}{dz} + \frac{4}{b_B^2} z \frac{d^2}{dz^2} . \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Substituindo (F.10) em (F.6) encontra-se

$$= \frac{N_{n0} N_{n'0}}{b_B^2} \int_0^\infty dz z^{1/2} L_{n'-1}^{1/2}(z) e^{-z/2} \left[2z \frac{d^2}{dz^2} + 3 \frac{d}{dz} \right] L_{n-1}^{1/2}(z) e^{-z/2} . \quad (\text{F.11})$$

Aplicando-se as derivadas no segundo termo obtêm-se

$$\left[2z \frac{d^2}{dz^2} + 3 \frac{d}{dz} \right] L_{n-1}^{1/2}(z) e^{-z/2}$$

$$= 2\left[z \frac{d^2}{dz^2} L_{n-2}^{1/2}(z)\right. \quad (\text{F.12})$$

$$\left. + \left(\frac{3}{2} - z\right) \frac{d}{dz} L_{n-1}^{1/2}(z)\right] \quad (\text{F.13})$$

$$- \frac{3}{4} L_{n-1}^{1/2}(z)] e^{-z/2} \quad (\text{F.14})$$

$$+ \frac{z}{2} L_{n-1}^{1/2}(z) e^{-z/2}. \quad (\text{F.15})$$

$$(\text{F.16})$$

Usaremos a seguir a seguinte propriedade dos Polinômios Associados de Laguerre (MORSE; FESHBACH, 1953)

$$z \frac{d^2}{dz^2} \mathcal{L}_n^a(z) + (a + 1 - z) \frac{d}{dz} \mathcal{L}_n^a(z) + n \mathcal{L}_n^a(z) = 0, \quad (\text{F.17})$$

que no presente problema corresponde a

$$z \frac{d^2}{dz^2} \mathcal{L}_{n-1}^{1/2}(z) + \left(\frac{3}{2} - z\right) \frac{d}{dz} \mathcal{L}_{n-1}^{1/2}(z) + (n - 1) \mathcal{L}_{n-1}^{1/2}(z) = 0. \quad (\text{F.18})$$

Reescreve-se a equação anterior como

$$z \frac{d^2}{dz^2} \mathcal{L}_{n-1}^{1/2}(z) \quad (\text{F.19})$$

$$+ \left(\frac{3}{2} - z\right) \frac{d}{dz} \mathcal{L}_{n-1}^{1/2}(z) \quad (\text{F.20})$$

$$- \frac{3}{4} \mathcal{L}_{n-1}^{1/2} \quad (\text{F.21})$$

$$= - \left[(n - 1) + \frac{3}{4} \right] \mathcal{L}_{n-1}^{1/2}(z). \quad (\text{F.22})$$

A propriedade (F.19) pode ser substituída em (F.12), obtendo-se

$$= \left[- \left(2(n - 1) + \frac{3}{2} \right) \mathcal{L}_{n-1}^{1/2}(z) + \frac{z}{2} \mathcal{L}_{n-1}^{1/2}(z) \right] e^{-z/2}. \quad (\text{F.23})$$

Agora, para evitar o termo $z/2$ durante a integração, pode-se

usar a propriedade

$$z\mathcal{L}_{n-1}^{1/2}(z) = \left(2(n-1) + \frac{3}{2}\right) \mathcal{L}_{n-1}^{1/2}(z) - n\mathcal{L}_n^{1/2}(z) - \left(n - \frac{1}{2}\right) \mathcal{L}_{n-2}^{1/2}(z), \quad (\text{F.24})$$

e assim, a aplicação das derivadas em (F.12) resulta em

$$\begin{aligned} & \left[2z \frac{d^2}{dz^2} + 3 \frac{d}{dz}\right] L_{n-1}^{1/2}(z) e^{-z/2} \\ &= \left[-\frac{1}{2} \left(2(n-1) + \frac{3}{2}\right) \mathcal{L}_{n-1}^{1/2}(z) - \frac{n}{2} \mathcal{L}_n^{1/2}(z) - \frac{(n-1/2)}{2} \mathcal{L}_{n-2}^{1/2}(z)\right] e^{-z/2}. \end{aligned} \quad (\text{F.25})$$

Portanto, substituindo o resultado anterior na integral (F.6) obtêm-se a integral

$$\begin{aligned} &= \frac{N_{n0}N_{n'0}}{b_B^2} \int_0^\infty dz z^{1/2} L_{n'-1}^{1/2}(z) e^{-z/2} \times \\ & \left[-\frac{1}{2} \left(2(n-1) + \frac{3}{2}\right) \mathcal{L}_{n-1}^{1/2}(z) - \frac{n}{2} \mathcal{L}_n^{1/2}(z) - \frac{(n-1/2)}{2} \mathcal{L}_{n-2}^{1/2}(z)\right] e^{-z/2}. \end{aligned} \quad (\text{F.26})$$

A solução da integral é encontrada pela normalização

$$\int_0^\infty z^a \mathcal{L}_m^a(z) \mathcal{L}_n^a(z) e^{-z} = \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(n+1)} \delta_{mn}, \quad (\text{F.27})$$

que para $a = 1/2$, $m \equiv n' - 1$ e $n \equiv n - 1$, torna-se

$$\begin{aligned} \int_0^\infty z^{1/2} \mathcal{L}_{n'-1}^{1/2}(z) \mathcal{L}_{n-1}^{1/2}(z) e^{-z} &= \frac{\Gamma(1/2+n)}{\Gamma(n)} \delta_{n'-1, n-1} \\ &= \frac{(n-1/2)!}{(n-1)!} \delta_{n'-1, n-1}. \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

Portanto (F.26) é resolvida obtendo-se

$$\langle \phi_{n'} | \nabla^2 | \phi_n \rangle =$$

$$- \frac{1}{b_B^2} [(2(n-1) \quad (F.29)$$

$$+ \frac{3}{2}) \delta_{n'n} \quad (F.30)$$

$$+ \sqrt{n'(n'+1/2)} \delta_{n,n'+1} \quad (F.31)$$

$$+ \sqrt{n(n+1/2)} \delta_{n',n+1}] . \quad (F.32)$$

Finalmente, substituindo o ansatz na equação de Klein-Gordon,

$$\sum_{nn'=1}^{NB} \int_0^\infty dr r^2 a_{n'} \phi_{n'}(r) \left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + m_\xi^2 \right] a_n \phi_n(r) = \sum_{nn'=1}^{NB} \int_0^\infty dr r^2 a_{n'} \phi_{n'}(r) b_n \phi_n(r) \quad (F.33)$$

e utilizando o resultado (F.29), chegamos a

$$\begin{aligned} \sum_{n'n=1}^{NB} a_{n'} a_n \left[\left(b_B^{-2} (2(n-1) + \frac{3}{2}) + m_\xi^2 \right) \delta_{n'n} + b_B^{-2} \sqrt{n'(n'+1/2)} \delta_{n,n'+1} \right] \\ = \sum_{n'n=1}^{NB} a_{n'} b_n \delta_{n'n} , \end{aligned} \quad (F.34)$$

ou seja, obtemos o conjunto de equações lineares não-homogêneas

$$\sum_{n'n=1}^{NB} a_n \mathcal{H}_{n'n} a_{n'} = \sum_{n'n=1}^{NB} a_{n'} b_n \delta_{n'n} , \quad (F.35)$$

ou

$$\sum_{n'=1}^{NB} \mathcal{H}_{n'n} a_{n'} = b_n , \quad (F.36)$$

onde

$$\mathcal{H}_{n'n} = (b_B^{-2}(2(n-1) + \frac{3}{2})) \quad (\text{F.37})$$

$$+ m_\xi^2 \delta_{n'n} + b_B^{-2} \sqrt{n'(n'+1/2)} \delta_{n,n'+1} \quad (\text{F.38})$$

$$+ b_B^{-2} \sqrt{n(n+1/2)} \delta_{n',n+1} . \quad (\text{F.39})$$

O elemento (F.39) corresponde a uma matriz tridiagonal devido aos deltas de Kronicker, como pode ser visto no exemplo abaixo para o caso $N_B = 5$,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & A_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & A_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & A_4 & C_4 \\ 0 & 0 & 0 & B_4 & A_5 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.40})$$

onde

$$A_n = b_B^{-2}(2(n-1) + \frac{3}{2}) + m_\xi^2, \quad (\text{F.41})$$

$$B_n = b_B^{-2} \sqrt{n(n+1/2)}, \quad (\text{F.42})$$

$$C_n = b_B^{-2} \sqrt{n(n+1/2)}, \quad n = 1, 2, \dots, N_B . \quad (\text{F.43})$$

Existem diversos algoritmos capazes de resolver matrizes tridiagonais, por exemplo a rotina *tridag* da Numerical Recipes (PRESS et al., 1992). Esta rotina tem como entrada as três diagonais (F.41) e as fontes. O algoritmo resolve o sistema matricial.

Os termos não-lineares das fontes requerem um tratamento diferenciado, como pode ser visto na próxima seção.

F.2 TERMOS NÃO-LINEARES

Considere a equação completa para o campo ϕ ,

$$(-\nabla^2 + m_s^2)\phi(\mathbf{r}) = g_s \rho_s(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \kappa \phi^2(\mathbf{r}) - \frac{1}{6} \lambda \phi^3(\mathbf{r}) . \quad (\text{F.44})$$

Nesta seção, para facilitar a discussão, nomeamos o termo não-

linear de ρ_{s2} ,

$$\rho_{s2}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{2}\kappa\phi^2(\mathbf{r}) - \frac{1}{6}\lambda\phi^3(\mathbf{r}). \quad (\text{F.45})$$

Podemos dividir a solução para os campos, levando em conta o termo ρ_{s2} , em duas partes:

- (1) Solução do campo ϕ para $\rho_{s2}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \forall \mathbf{r}$;
- (2) Solução com ρ_{s2} .

A parte (1) é executada como mostrado na seção anterior, onde, da solução de um sistema matricial, se obtém $\phi(\mathbf{r})$.

Então, na parte (2), a partir do $\phi(\mathbf{r})$ calculado em (1), calcula-se o valor de ρ_{s2} pela equação (F.45). Assim, tem-se uma nova fonte dada pela soma $\mathbf{g}_s\rho_s(\mathbf{r}) - \rho_{s2}(\mathbf{r})$. Com esta nova fonte executa-se novamente o passo (1), ou seja, resolve-se mais uma vez o sistema matricial da seção anterior obtendo-se um novo $\phi(\mathbf{r})$. Com este novo $\phi(\mathbf{r})$ repete-se o passo (2). Esse procedimento autoconsistente é repetido tantas vezes quanto necessário, ou seja, até o valor de $\phi(\mathbf{r})$ convergir e não ser mais alterado pelo procedimento. Pode-se estabelecer um critério de parada para o algoritimo; por exemplo, em nosso caso, temos interrompido este procedimento quando a integral na célula de Wigner-Seitz de $\phi(\mathbf{r})$ do passo (2) varia de 10^{-10} em relação ao $\phi(\mathbf{r})$ do passo (1).

REFERÊNCIAS

- AVANCINI, S. et al. Warm pasta phase in the Thomas-Fermi approximation. *Physical Review C*, v. 82, n. 5, p. 1–10, nov. 2010. ISSN 0556-2813. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.82.055807>>.
- AVANCINI, S. S. et al. Warm and cold pasta phase in relativistic mean field theory. *Physical Review C*, v. 78, p. 015802, 2008.
- BLANDFORD, R. D.; HERNQUIST, L. Magnetic susceptibility of a neutron star crust. *J. Phys. C*, v. 15, p. 6233–6243, 1982.
- BODMER, A. R. *Phys. Rev. D*, v. 4, p. 1601, 1971.
- BRODERICK, A.; PRAKASH, M.; LATTIMER, J. M. The equation of state of neutron star matter in strong magnetic fields. *Astrophys. Journal*, v. 537, p. 351–367, 2000.
- CARDALL, C. Y.; PRAKASH, M.; LATTIMER, J. M. *Ap. J.*, v. 554, p. 332–339, 2001.
- CHAKRABARTY, S. Quark matter in a strong magnetic field. *Phys. Rev. D.*, v. 54, p. 1306, 1996.
- CHAMEL, N.; HAENSEL, P. Physics of neutron star crusts. *Living Rev. Relativity*, v. 11, p. 10, 2008.
- CHANMUGAM, G. Magnetic fields of degenerate stars. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, v. 30, p. 143, 1992.
- DUNCAN, R. C. Magnetars, soft gamma repeaters. <http://solomon.as.utexas.edu/magnetar.html>, 2003.
- FERMI, E. *Z. Phys.*, v. 48, p. 542–548, 1928.
- FETTER, A. L.; WALECKA, J. D. *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. New York, NY: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1971.
- GAMBHIR, Y. K.; RING, P.; THIMET, A. Relativistic mean field theory for finite nuclei. *Annals of Physics*, v. 198, p. 132–179, 1990.
- GLENDENNING, N. K. *Compact Stars - Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity, Second Edition*. [S.l.]: Springer, 2000.

- GLENDENNING, N. K.; MOSZKOWSKI, S. A. Reconciliation of neutron-star masses and binding of the λ in hypernuclei. *Physical Review Letters*, v. 67, p. 2414, 1991.
- GUNDMUNDSSON, E. H.; PETHICK, C. J.; EPSTEIN, R. I. *Astrophys. Journal*, v. 272, p. 286, 1983.
- HAENSEL, P.; POTEKHIN, A. Y.; YAKOVLEV, D. G. *Neutron Stars 1 - Equation of State and Structure*. New York, NY: Springer Science, 2007.
- HOROWITZ, C. J.; PEREZ-GARCIA, M. A.; PIEKA-REWICZ, J. Neutrino-“pasta” scattering: The opacity of nonuniform neutron-rich matter. *Phys. Rev. C*, American Physical Society, v. 69, p. 045804, Apr 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.69.045804>>.
- ITO, N. *Prog. Theor. Phys.*, v. 44, p. 291, 1970.
- JOHNSON, M. H.; LIPPMANN, B. A. *Physical Review*, v. 76, p. 828, 1949.
- JOHNSON, M. H.; TELLER, E. Classical field theory of nuclear forces. *Phys. Rev.*, v. 98, p. 783, Jan 1955.
- LALAZISSIS, G. A.; KONIG, J.; RING, P. *Phys. Rev. C*, v. 55, p. 540, 1997.
- LAMB, D. Q. et al. *Phys. Rev. Lett.*, v. 41, p. 1623, 1978.
- LAMB, D. Q. et al. Structure of matter below nuclear saturation density. *Phys. Rev. Lett.*, v. 50, p. 26, 1983.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Electrodynamics of Continuous Media*. Oxford, England: Pergamon Press, 1982.
- MALHEIRO, M.; RUEDA, J. A.; RUFFINI, R. SGRs and AXPs as rotation powered massive white dwarfs. *arXiv*, v. 0653, p. v7, 2011.
- MELROSE, D. B.; PARLE, A. J. Quantum electrodynamics in strong magnetic fields i. electron states. *Aust. J. Phys.*, v. 36, p. 755–774, 1983.
- MORSE, P. M.; FESHBACH, H. *Methods of Theoretical Physics I*. New York, NY: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.

PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes in C*. New York, NY: Cambridge University Press, 1992.

PROVIDENCIA, C. c. Comunicacao pessoal. 2012.

ROMANI, R. W. *Astrophys. Journal*, v. 331, p. 718, 1987.

SCHÄFER, T.; SHURYAK, E. Instantons in QCD. *Reviews of Modern Physics*, v. 70, n. 2, p. 323–425, abr. 1998. ISSN 0034-6861. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.70.323>>.

SHOEMBERG, D. *Magnetic Oscillations*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.

SUGAHARA, Y.; TOKI, H. Relativistic mean-field theory for unstable nuclei with non-linear terms and to terms. *Nuclear Physics A*, v. 579, p. 557–572, 1994.

THOMAS, L. H. The calculation of atomic fields. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 23, p. 542–548, 1926.

TODD-RUTEL, B. G.; PIEKAREWICZ, J. Neutron-rich nuclei and neutron stars: A new accurately calibrated interaction for the study of neutron-rich matter. *Physical Review Letters*, v. 95, n. 12, p. 1–4, set. 2005. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.122501>>.

TYPEL, S.; WOLTER, H. H. Relativistic mean field calculations with density-dependent meson-nucleon coupling. *Nuclear Physics A*, v. 656, n. 3-4, p. 331–364, 1999. ISSN 0375-9474. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVB-3XRPBVJ-2/2/efc61e5b0f8836d9d6bc28b00a62971e>>.

WALECKA, J. D. *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics*. Oxford, NY: Oxford University Press, 1995.

WATANABE, G.; MARUYAMA, T. Nuclear “pasta” in supernovae and neutron stars. *arXiv*, v. 1109.3511v2, p. Chapter 1, 2012.