

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA**

Anésio Felipe Zeitune

**SOLUÇÕES DO FLUXO DE POTÊNCIA EM PONTOS DE  
MÁXIMO CARREGAMENTO UTILIZANDO MÉTODOS  
DIRETOS BASEADOS NO USO DE TENSORES**

Florianópolis

2012



Anésio Felipe Zeitune

**SOLUÇÕES DO FLUXO DE POTÊNCIA EM PONTOS DE  
MÁXIMO CARREGAMENTO UTILIZANDO MÉTODOS  
DIRETOS BASEADOS NO USO DE TENSORES**

Tese submetida ao programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Elétrica da  
Universidade Federal de Santa  
Catarina para a obtenção do Grau de  
Doutor em Engenharia Elétrica.  
Orientador: Prof. Roberto de Souza  
Salgado, Ph.D.

Florianópolis

2012

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Zeitune, Anésio Felipe

Soluções do Fluxo de Potência em Pontos de Máximo Carregamento Utilizando Métodos Diretos Baseados no Uso de Tensores [tese] / Anésio Felipe Zeitune ; orientador, Roberto de Souza Salgado - Florianópolis, SC, 2012.  
157 p. ; 21cm

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Inclui referências

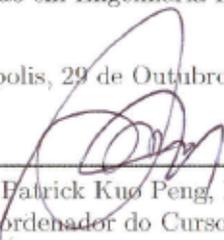
1. Engenharia Elétrica. 2. métodos tensoriais. 3. máximo carregamento. 4. métodos diretos. 5. coordenadas retangulares. I. de Souza Salgado, Roberto. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

Anésio Felipe Zeitzune

**SOLUÇÕES DO FLUXO DE POTÊNCIA EM PONTOS DE  
MÁXIMO CARREGAMENTO UTILIZANDO MÉTODOS  
DIRETOS BASEADOS NO USO DE TENSORES**

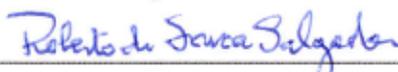
Esta Tese foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Doutor em Engenharia Elétrica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Florianópolis, 29 de Outubro 2012.



---

Prof. Patrick Kuo Peng, Dr.  
Coordenador do Curso



---

Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph.D.  
Orientador

Banca Examinadora:



---

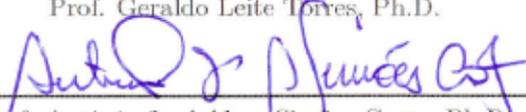
Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph.D.  
Presidente

---

Prof. Antonio Carlos Zambroni de Souza, Ph.D.

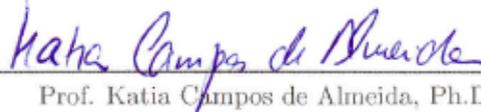
---

Prof. Geraldo Leite Torres, Ph.D.



---

Prof. Antônio José Alves Simões Costa, Ph.D.



---

Prof. Katia Campos de Almeida, Ph.D.

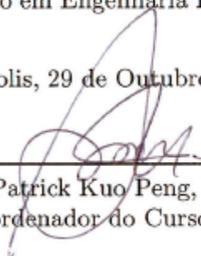


Anésio Felipe Zeitune

**SOLUÇÕES DO FLUXO DE POTÊNCIA EM PONTOS DE  
MÁXIMO CARREGAMENTO UTILIZANDO MÉTODOS  
DIRETOS BASEADOS NO USO DE TENSORES**

Esta Tese foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Doutor em Engenharia Elétrica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Florianópolis, 29 de Outubro 2012.



---

Prof. Patrick Kuo Peng, Dr.  
Coordenador do Curso

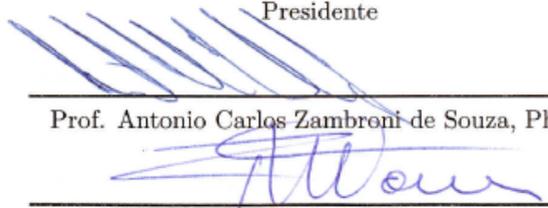
---

Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph.D.  
Orientador

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph.D.  
Presidente



---

Prof. Antonio Carlos Zambroni de Souza, Ph.D.

---

Prof. Geraldo Leite Torres, Ph.D.

---

Prof. Antônio José Alves Simões Costa, Ph.D.

---

Prof. Katia Campos de Almeida, Ph.D.



*Dedico este trabalho a minha mãe, Fátima.*



## AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte de minha vida. Não se trata apenas de agradecer aos que ajudaram na elaboração deste trabalho, mas também aos que me fizeram chegar até aqui.

Agradeço à minha mãe, por estar sempre me incentivando e apoiando meus estudos desde criança. Sem este apoio fundamental, não há dúvidas que não chegaria até aqui. Agradeço à minha família, sem a qual os momentos de descanso não seriam os mesmos.

Agradeço aos membros do Laboratório de Sistemas de Potência, professores e alunos, por toda a ajuda técnica e companheirismo em todas as horas. Ao meu orientador, professor Roberto de Souza Salgado, por acreditar em meu potencial desde a graduação, por me orientar nestes anos recentes, pelas muitas horas dedicadas e a quem espero fazer jus a este título. Aos meus professores do Labspot, pela dedicação e paciência nos ensinamentos realizados com dedicação. Aos meus valerosos amigos de doutorado: Bartolomeu, Danilo, Fernando, Gustavo, Miguel e Nastasha, que tantas dúvidas me esclareceram e momentos de distração me propiciaram.

Agradeço à minha namorada, Aline, pelo carinho, atenção e incentivo para concluir esta etapa de minha vida.

Aos meus amigos Maurício e Kadu, por me ajudarem quando estava distante.

Agradeço aos meus amigos, pessoas importantíssimas que tanto me ouviram reclamar nos maus momentos, e que tanto companheirismo tiveram nos bons momentos de minha vida.



*A tarefa não é tanto ver o que ninguém viu ainda, mas pensar o que ninguém pensou sobre algo que todos vêem.*

Arthur Schopenhauer



## RESUMO

Esta tese propõe um método direto para obtenção do ponto de bifurcação sela-nó correspondente ao máximo carregamento de sistemas elétricos de potência. Este método é formulado com base em um modelo de otimização estática, cuja solução é determinada por meio de uma extensão do método de Newton. As equações não lineares que representam o fluxo de potência são formuladas em coordenadas retangulares permitindo a utilização do termo de segunda ordem da expansão em série de Taylor destas equações para a obtenção de um método Tensorial relativamente rápido e de fácil implementação. Duas formas de parametrização das equações de balanço de potência são comparadas. A primeira é convencional, onde o parâmetro de carregamento é linear. A segunda, proposta neste trabalho, é uma parametrização quadrática, o que equivale a incluir uma restrição de não negatividade ao parâmetro. São obtidos resultados numéricos para três formas de inicialização dos multiplicadores de Lagrange, sendo uma unitária intuitiva, a segunda uma forma existente na literatura e a terceira uma nova forma proposta neste trabalho, que faz uso de uma equação auxiliar em conjunto com a matriz Jacobiana do fluxo de potência. As influências da inicialização dos multiplicadores de Lagrange e da execução de um fluxo de potência inicial para estimativa das variáveis são observadas para se encontrar uma forma mais adequada de inicialização. Aspectos complementares à obtenção do máximo carregamento são obtidos, tais como: sensibilidade do parâmetro de carregamento com relação às potências injetadas nas barras, obtida como um subproduto do processo de otimização; determinação de áreas críticas nos sistemas elétricos com relação à instabilidade de tensão; previsão de potência reativa gerada a cada iteração para facilitar a convergência do processo iterativo; decomposição dos sistemas de equações para redução do tempo de processamento; traçado completo das curvas PV nos métodos diretos de forma semelhante ao método da continuação. Resultados numéricos obtidos com simulações de sistemas teste de diferentes portes são usados para ilustrar o desempenho das estratégias propostas.

**Palavras-chave:** Soluções críticas, máximo carregamento, métodos diretos, coordenadas retangulares, métodos tensoriais, parametrização quadrática.



## ABSTRACT

This thesis proposes a direct method for obtaining the saddle-node bifurcation point corresponding to the maximum loadability of electric power systems. This method is formulated based on a static model optimization, which is solved by an extended version of Newton's method. The nonlinear equations which represent the power flow are formulated in rectangular coordinates permitting the use of the second-order Taylor series expansion of these equations to obtain a Tensor method relatively quick and easy to implement. Two forms of parameterization of the power flow equations are compared. The first is the conventional, where the loadability parameter is linear. The second, proposed in this thesis, is a quadratic parameterization, which is equivalent to imposing a non-negativity constraint to the parameter. Numerical results are obtained for three forms of initialization of Lagrange multipliers, one intuitive unit, the second existing form in the literature and the third form proposed in this thesis, which makes use of an auxiliary equation and Jacobian matrix of power flow. The influences of the initialization of Lagrange multipliers and the running of an initial power flow to estimate the variables are observed to find a more suitable initialization. Additional aspects of obtaining the maximum loadability are obtained, such as: sensitivity of the loadability parameter with respect to the power injected into bus, obtained as a byproduct of the optimization process, determination of critical areas in electrical systems with respect to voltage instability; prediction of reactive power generated at each iteration to facilitate convergence of the iterative process; decomposition of the systems equation for reduction of time processing; complete tracing of PV curves in direct methods similar to the continuation method. Numerical results obtained with simulations of test systems of different sizes are used to illustrate the performance of the proposed strategies.

**Keywords:** Critical solutions, maximum loadability, direct methods, rectangular coordinates, tensor methods, quadratic parameterization.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Representação de ponto de máximo.....	44
Figura 2	Representação de ponto de mínimo.....	45
Figura 3	Representação de ponto de sela.....	46
Figura 4	Interpretação geométrica do modelo tensorial.....	69
Figura 5	Sistema de 2 barras - Representação das tensões.....	102
Figura 6	Sistema de 57 barras - Trajetória de convergência.....	118
Figura 7	Sistema de 9 barras - Trajetória de convergência.....	119
Figura 8	Sistema de 24 barras - Minimização em $\alpha$ .....	132
Figura 9	Sistema de 57 barras - Região crítica.....	137
Figura 10	Sistema de 33 barras - Curvas PV obtidas com ANA-REDE.....	143
Figura 11	Sistema de 33 barras - Curvas PV obtidas com a metodologia apresentada.....	143
Figura 12	Sistema de 33 barras - Diagrama.....	144



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Exemplo numérico .....	67
Tabela 2	Porcentagens de carregamento obtidos com ANAREDE	106
Tabela 3	Porcentagens de carregamento obtidos com os métodos propostos .....	106
Tabela 4	Parametrização linear, $\lambda^0$ .....	109
Tabela 5	Parametrização linear, $\lambda^1$ .....	110
Tabela 6	Parametrização linear, $\lambda^2$ .....	111
Tabela 7	Parametrização quadrática, $\lambda^0$ .....	113
Tabela 8	Parametrização quadrática, $\lambda^1$ .....	114
Tabela 9	Parametrização quadrática, $\lambda^2$ .....	115
Tabela 10	Parametrização linear considerando os limites de potência reativa .....	116
Tabela 11	Parametrização quadrática considerando os limites de potência reativa .....	117
Tabela 12	Sistema de 24 barras - resultados com parametrização linear .....	121
Tabela 13	Sistema de 24 barras - resultados com parametrização quadrática .....	122
Tabela 14	Sistema de 24 barras - resultados obtidos com ANAREDE .....	123
Tabela 15	Sistema de 14 barras - iterações para diferentes condições iniciais de $\rho$ .....	125
Tabela 16	Sistema de 118 barras - iterações para diferentes condições iniciais de $\rho$ .....	126
Tabela 17	Tempos computacionais com parametrização linear ....	127
Tabela 18	Tempos computacionais com parametrização quadrática	127
Tabela 19	Tempos computacionais por iteração com parametrização linear .....	128
Tabela 20	Tempos computacionais por iteração com parametrização quadrática .....	129
Tabela 21	Número de iterações para convergência com otimização uni e bidimensional .....	130
Tabela 22	Uso de passo limitador de potência reativa gerada ....	134

Tabela 23 Sistema de 57 barras - multiplicadores de Lagrange relacionados às injeções de potência reativa e vetores tangente normalizados .....	136
Tabela 24 Estimativa do fator de carga devido à variação $\Delta P_i = 0,03P_{g_i}$ .....	139
Tabela 25 Estimativa do fator de carga devido à variação $\Delta Q_i = 0,10Q_{d_i}^0$ .....	141
Tabela 26 Sistema de 33 barras - tensão e multiplicadores de Lagrange .....	142

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	25
1.1 Fluxo de Potência Ótimo .....	25
1.1.1 O Problema de Máximo Carregamento .....	26
1.2 Uso de Coordenadas Retangulares .....	27
1.3 Trabalho Proposto .....	28
1.3.1 Resumo .....	28
1.3.2 Organização do Texto .....	29
<b>2 FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO</b> .....	31
2.1 Introdução .....	31
2.2 Revisão Bibliográfica .....	32
2.2.1 Programação Não Linear .....	33
2.2.2 Programação Quadrática .....	34
2.2.3 Newton .....	35
2.2.4 Programação Linear .....	36
2.2.5 Pontos Interiores .....	37
2.3 Problema de Otimização .....	38
2.3.1 Otimização Irrestrita .....	40
2.3.1.1 Condições para otimalidade .....	40
2.3.2 Otimização Restrita .....	41
2.3.2.1 Condições de Primeira Ordem .....	42
2.3.2.2 Condições de Segunda Ordem .....	43
2.3.3 Ilustração Gráfica .....	44
2.4 Solução Utilizando Método de Newton .....	45
2.5 Minimização no Subespaço Bidimensional .....	47
2.5.1 Algoritmo .....	49
2.6 Conclusão .....	50
<b>3 USO DE COMPONENTES TENSORIAIS</b> .....	51
3.1 Introdução .....	51
3.2 Equações do Fluxo de Potência .....	52
3.2.1 Equacionamento Básico .....	52
3.2.2 Uso de Coordenadas Retangulares .....	53

3.2.3	Formulação Matricial . . . . .	55
3.2.4	Expansão em Série de Taylor . . . . .	57
3.3	Método de Newton . . . . .	58
3.3.1	Algoritmo . . . . .	58
3.4	Métodos Tensoriais . . . . .	60
3.4.1	Modelo Tensorial I . . . . .	60
3.4.2	Modelo Tensorial II . . . . .	63
3.4.3	Critério de Escolha e Algoritmo . . . . .	64
3.5	Exemplo Numérico do Uso de Tensores . . . . .	66
3.6	Conclusão . . . . .	68
<b>4</b>	<b>O MÉTODO DIRETO PROPOSTO . . . . .</b>	<b>71</b>
4.1	Introdução . . . . .	71
4.1.1	Instabilidade de Tensão . . . . .	72
4.1.2	Breve Histórico . . . . .	72
4.2	O Problema de Máximo Carregamento . . . . .	74
4.2.1	Formulação Analítica . . . . .	74
4.2.2	Condições de Otimalidade . . . . .	76
4.3	Métodos de Solução . . . . .	78
4.3.1	Solução Utilizando o Método de Newton . . . . .	80
4.3.2	Solução Utilizando o Termo Tensorial . . . . .	82
4.3.2.1	Variação na Direção Tensorial . . . . .	83
4.4	Condições Iniciais . . . . .	84
4.5	Limites de Potência Reativa Gerada . . . . .	87
4.6	Parametrização Quadrática das Restrições . . . . .	90
4.7	Decomposição do Sistema Linear . . . . .	93
4.8	Relações de Sensibilidade . . . . .	96
4.9	Determinação das Curvas PV . . . . .	99
4.9.1	Ilustração da Curva PV . . . . .	101
4.10	Conclusão . . . . .	101
<b>5</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>105</b>
5.1	Introdução . . . . .	105
5.2	Influência Quanto à Modelagem e Condições Iniciais . . . . .	105
5.2.1	Modelagem Linear do Parâmetro de Carregamento . . . . .	108
5.2.2	Modelagem Quadrática do Parâmetro de Carregamento . . . . .	112
5.2.3	Considerando os Limites de Potência Reativa Gerada . . . . .	116

5.3	Inicialização do Termo de Segunda Ordem .....	117
5.4	Parametrização Quadrática das Restrições .....	119
5.4.1	Não Negatividade do Carregamento .....	120
5.4.2	Condição Inicial do Parâmetro de Carregamento .....	124
5.5	Tempos de Processamento .....	126
5.5.1	Decomposição na Parametrização Linear e Quadrática ....	126
5.5.2	Decomposição nos Métodos de Newton e Tensorial .....	128
5.6	Minimização Bidimensional .....	129
5.7	Limites de Potência Reativa Gerada .....	133
5.8	Análise de Sensibilidade .....	135
5.8.1	Determinação da Região Crítica .....	135
5.8.2	Variação do Parâmetro de Carregamento pela Alteração das Injeções de Potência .....	138
5.9	Determinação de Curvas PV .....	142
5.10	Conclusão .....	144
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	<b>145</b>
6.1	Principais Conclusões .....	145
6.2	Sugestões para Trabalhos Futuros .....	148
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>151</b>



## 1 INTRODUÇÃO

A otimização é uma importante ferramenta que auxilia na tomada de decisões científicas e na análise de sistemas físicos [1]. Para se otimizar um determinado processo, primeiramente deve ser definida uma função objetivo que possa ser corretamente quantificada com o uso de variáveis. A otimização seleciona as alternativas que respeitem a determinados critérios, impostos por meio de restrições e que limitem a quantidade de soluções possíveis. Para a implementação deste processo, necessita-se de conhecimentos de matemática, programação e da área de estudo. Na maioria dos problemas práticos há uma grande quantidade de variáveis e restrições, tornando o problema complexo e sendo necessário um processo sistemático de busca da solução ótima.

### 1.1 Fluxo de Potência Ótimo

Um problema de fluxo de potência convencional possibilita diversas soluções, tornando inviável a análise de todas essas soluções individualmente para seleção do melhor ponto de operação sob determinado foco. Levando-se em conta que a complexidade de um problema de fluxo de potência é proporcional, entre outros fatores, ao tamanho do sistema elétrico considerado e à quantidade de restrições a ele impostas, e que cada vez mais são realizadas interligações e expansões nas redes, faz-se necessário o uso de metodologias adequadas para determinar a melhor solução.

Técnicas de programação baseadas no uso do Fluxo de Potência Ótimo (FPO), buscam obter uma condição de operação para o sistema elétrico que otimize seu uso de acordo com o objetivo almejado. O termo *Fluxo de Potência Ótimo* foi apresentado pela primeira vez por Dommel e Tinney [2] em 1968 como uma abordagem mais geral do problema de minimização de custos, proposto alguns anos antes por Carpentier [3]. O problema de FPO consiste na maximização ou minimização de determinada função objetivo que pode estar sujeita à restrições, podendo ser tanto restrições de igualdade quanto de desigualdade. As restrições de igualdade são necessárias para garantir que a solução obtida satisfaça o balanço de potência ativa e reativa, enquanto que as restrições de desigualdade lidam com restrições físicas dos equipamentos e condições operacionais do sistema. Assim, busca-

se o estado da rede com melhor condição operativa para um sistema, respeitando-se as capacidades dos elementos que o compõem.

Os problemas de fluxo de potência ótimo podem ter uma ou mais funções objetivo, sendo muito variadas e envolvendo aspectos econômicos e operacionais. Algumas das principais funções objetivo são: minimização de custos de geração de potências ativa e reativa; minimização de custos de injeções de potências ativa e reativa; minimização de custos de instalação de potência reativa em série e em derivação; minimização de desvios de geração de potência ativa; minimização de desvios de controles e de intercâmbios; maximização de carregamentos do sistema e de transferências de potência ativa; minimização das perdas de potência ativa; minimização dos cortes de carga.

### 1.1.1 O Problema de Máximo Carregamento

O crescente aumento da demanda em conjunto com os altos custos de ampliação dos sistemas elétricos de potência criaram a necessidade de se operar estes sistemas cada vez mais próximos de seus limites físicos e operativos. Muitas vezes as unidades geradoras de energia elétrica encontram-se longe dos grandes centros de consumo, principalmente as mais novas, devido a condições geográficas e saturação do uso de recursos em algumas regiões. Além da transmissão de energia por longas distâncias, questões ambientais e sociais tornam o processo de expansão da rede elétrica ainda mais lento e dispendioso, fazendo com que a busca de uma forma mais eficiente de aproveitamento dos recursos existentes se torne uma importante linha de pesquisa.

A identificação do ponto de máximo carregamento de um sistema elétrico de potência permite conhecer antecipadamente a quantidade de carga que o mesmo pode suportar antes de entrar em colapso. O ponto de colapso, ou ponto crítico, caracteriza-se como uma sequência de eventos de instabilidade de tensão, eventualmente resultando em níveis de tensão inaceitáveis, tanto altos quanto baixos, levando o sistema ao colapso [4]. As variações bruscas nas magnitudes das tensões das barras, ocasionadas pela instabilidade de tensão em condições de carregamento elevado, podem provocar uma série de problemas em regimes dinâmico e estático, ocasionando cortes de demanda, danos à estrutura do sistema elétrico e, eventualmente, *blackouts*, causando enormes prejuízos.

Com o crescimento da demanda ao longo do tempo, buscam-se alternativas que permitam postergar o afastamento do ponto crítico de carregamento, evitando a necessidade de expansão do parque gera-

dor, aumento da malha elétrica existente e acréscimo de dispositivos de controle. Para tanto, análises de sensibilidade com relação a diversos elementos são realizadas e exaustivamente simuladas para garantir o correto funcionamento da rede de energia elétrica.

## 1.2 Uso de Coordenadas Retangulares

Segundo [5], a rapidez de convergência e a robustez do processo iterativo não são dependentes apenas do algoritmo de solução, como também do tipo de coordenadas utilizado para representar as equações da rede elétrica em regime permanente. Diferentemente das coordenadas polares, em que as tensões das barras são representadas por módulo e ângulo, as coordenadas retangulares ou cartesianas decompõem as tensões complexas em componentes reais e imaginárias. As equações que representam o fluxo de potência formuladas em coordenadas retangulares são encontradas na literatura há bastante tempo. Em 1978, [6] apresentou um trabalho pioneiro utilizando o termo de segunda ordem em coordenadas retangulares na solução do problema de fluxo de potência, demonstrando algumas vantagens em relação à formulação polar. Porém, um dos primeiros trabalhos publicados com o uso deste tipo de coordenadas nos problemas de fluxo de potência ótimo foi publicado apenas em 1996 [7].

Quando expressas em função das partes reais e imaginárias das tensões nodais, as equações que representam as injeções de potência nas barras podem ser escritas como uma forma quadrática, proporcionando maior facilidade no cálculo das matrizes Jacobiana e Hessiana do sistema, necessárias para a solução de problemas de fluxo de potência ótimo. Isso porque, sendo considerados os taps dos transformadores como constantes, a característica quadrática das equações de injeção de potência em coordenadas retangulares possuem representação exata quando expandidas até o termo de segunda ordem da série de Taylor. Dessa forma, as derivadas de ordem superior a dois são nulas, ao contrário dos infinitos termos obtidos com o uso de coordenadas polares. A representação de sistemas elétricos de potência em coordenadas retangulares permite, além da tradicional modelagem utilizando apenas o termo de primeira ordem, o uso de modelos tensoriais de forma relativamente simples, conforme apresentado em [8].

Os modelos tensoriais proporcionam maior estabilidade numérica aos métodos iterativos que utilizam matrizes mal condicionadas e dão maior confiabilidade aos indicadores de sensibilidade que podem ser ob-

tidas do processo [9]. Em problemas de maximização do carregamento, as matrizes de derivadas das equações do fluxo de potência estão muito próximas à condição de singularidade, onde programas em coordenadas polares podem não apresentar bom desempenho.

### 1.3 Trabalho Proposto

Neste trabalho são apresentadas formulações do problema de fluxo de potência ótimo em coordenadas retangulares para obtenção do ponto de máximo carregamento.

#### 1.3.1 Resumo

Inicialmente, apresenta-se a descrição do fluxo de potência em coordenadas retangulares, onde fica evidente a natureza quadrática de suas equações. A expansão em série de Taylor destas equações é finita, com elementos nulos após o termo de segunda ordem, permitindo resultados mais precisos e agregando uma maior quantidade de informação aos termos.

Nesta tese, as equações que formam o problema de máximo carregamento são solucionadas por meio dos métodos de Newton e Tensorial. São descritas as condições que devem ser satisfeitas para a caracterização de um ponto estacionário como sendo de mínimo, máximo ou ponto de sela. A escolha de implementação do método de Newton ou Tensorial, pode ser realizada no decorrer do programa por meio de uma análise comparativa direta do maior valor absoluto dos resíduos dos métodos a cada iteração. Em determinadas situações, há casos em que o incremento Tensorial implementado de forma plena não apresenta a melhor solução ao longo da trajetória. O termo de segunda ordem pode ser otimizado por meio de uma função de mérito previamente definida para otimização do passo a cada iteração.

As formulações descritas tiveram o parâmetro de carregamento modelado de duas formas distintas: a modelagem clássica linear e uma nova modelagem, proposta neste trabalho, onde o carregamento é parametrizado de forma quadrática. Mesmo mantendo-se a função objetivo linear, a parametrização quadrática evita casos de negatividade do parâmetro de carregamento que podem ocorrer na parametrização linear se as condições iniciais não forem adequadas. Apresentam-se três estimativas iniciais para os multiplicadores de Lagrange: uma condição

prefixada, uma existente na literatura e uma nova estimativa proposta, sendo que as duas últimas são obtidas a partir da solução de sistemas de equações baseadas em informações obtidas no início do processo iterativo. Devido ao número finito de termos não nulos na expansão em série de Taylor, as equações do problema de máximo carregamento podem ser utilizadas para calcular de forma exata os limites de potência reativa gerada a cada iteração e são tratadas à parte do problema principal, limitando o passo incremental para assegurar que apenas a barra mais sensível ao incremento atinja seu limite a cada iteração, o que pode favorecer a convergência.

Complementando o objetivo de se obter o ponto de carregamento crítico do sistema, apresenta-se uma forma de reordenação e decomposição dos sistemas de equações matriciais em qualquer dos métodos ou parametrizações utilizadas, de modo que o tempo computacional seja consideravelmente reduzido sem qualquer tipo de alteração na trajetória de convergência. Após a convergência do processo iterativo, podem ser obtidos alguns indicadores de sensibilidade do sistema. No ponto de máximo carregamento, os multiplicadores de Lagrange mostraram-se bons indicadores de sensibilidade para pequenas variações nas injeções de potências ativa e reativa e quadrado das tensões. De forma semelhante ao método da continuação, o conhecimento do ponto de máximo carregamento permite a implementação de uma estratégia simples, aplicável nos métodos diretos, para traçar a curvatura tensão  $\times$  carregamento para as barras de carga ou de passagem do sistema.

### 1.3.2 Organização do Texto

Este trabalho está organizado na seguinte forma:

- **Capítulo 2:** *Fluxo de Potência Ótimo* - São apresentados conceitos básicos de otimizações restrita e irrestrita, assim como suas condições de otimalidade de primeira e segunda ordem. Os problemas apresentados são gerais, não sendo especificadas a função objetivo ou equações de restrições.
- **Capítulo 3:** *Uso de Componentes Tensoriais* - Neste capítulo mostra-se a formulação básica para um problema de fluxo de potência, onde é enfatizada sua característica quadrática quando formulada em coordenadas cartesianas. A partir da expansão em série de Taylor das equações do fluxo de potência, são apresen-

tadas formas de solução utilizando o método de Newton e dois métodos Tensoriais.

- **Capítulo 4:** *O Método Direto Proposto* - A formulação em coordenadas retangulares do problema de maximização do carregamento é descrita neste capítulo. A solução do problema é realizada utilizando os métodos de Newton e Tensorial juntamente com a descrição de estimativas iniciais, existentes e proposta, para os multiplicadores de Lagrange. Os problemas são formulados apenas com as restrições de igualdade, sendo os limites de potência reativa tratados separadamente. Também é apresentada uma proposta de parametrização quadrática das equações a fim de evitar condições de corte de carga, além de decomposição dos sistemas de equações, relações de sensibilidade e traçado das curvas PV.
- **Capítulo 5:** *Resultados* - Neste capítulo são apresentados resultados comparando os carregamentos obtidos fazendo uso das metodologias apresentadas com um programa comercial para sistemas de potência de diferentes portes. Os demais itens apresentados no Capítulo 4 são exemplificados para pelo menos um dos sistemas teste e são comentadas as peculiaridades a respeito de cada item.
- **Capítulo 6:** *Conclusões* - Apresenta as principais conclusões obtidas por meio das simulações realizadas e sugere estudos futuros em linha de pesquisa relacionada a este trabalho.

## 2 FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO

### 2.1 Introdução

Em sistemas elétricos de potência, o elevado custo para a expansão da rede em qualquer etapa desde a geração até o consumo, tem exigido que os sistemas operem cada vez mais próximos aos seus limites operativos. A necessidade de otimizar uma ou mais funções que representem determinado objetivo, respeitando as condições operativas, fez com que surgissem diversos métodos de otimização do fluxo de potência.

Nos problemas de fluxo de potência obtém-se como solução as condições operativas do sistema, como valores de tensão complexa e gerações necessárias para satisfazer a demanda. No entanto, esta solução geralmente não é única, podendo existir em elevado número para sistemas de grande porte, sendo que cada solução pode apresentar valores de perdas, custos e fluxos de linhas distintos uns dos outros. A análise de todas as soluções individualmente é impossível, ou ao menos inviável, para a maioria dos sistemas práticos. O fluxo de potência ótimo ajusta as variáveis de controle que otimizam, maximizando ou minimizando, determinada função objetivo. Em geral, nos problemas de FPO, o grau de liberdade para a escolha dos parâmetros pode ser muito elevado, dependendo da função objetivo e da modelagem do sistema.

O fluxo de potência ótimo é uma ferramenta computacional que começou a ser desenvolvida na década de 60 por Carpentier [3] e Dommel e Tinney [2] e que continua sendo objeto de pesquisa e aprimoramento até os dias atuais. Existem diversas classes de métodos para se solucionar o problema de FPO, sendo algumas delas a Programação Linear Sequencial [10], Programação Quadrática Sucessiva [11], método de Newton [12], métodos de Pontos Interiores [13], Algoritmos Genéticos [14], dentre outras. As aplicações desta ferramenta são vastas, sendo por exemplo, minimização de custos de produção, redespacho preventivo e corretivo, minimização de perdas, alocação de fontes de potência reativa, avaliação de viabilidade composta de sistemas de geração e transmissão, planejamento da expansão, tarifação de serviços de transmissão, determinação de preços nodais de energia, maximização da demanda, minimização de perda de potência ativa, mínimo corte de carga, etc.

Na maioria das aplicações de técnicas de otimização em sistemas elétricos de potência tem-se problemas não lineares e restritos devido às características não lineares da rede elétrica e a necessidade de satisfazer o fluxo de potência convencional dentro do problema de otimização, juntamente com restrições de segurança e limites operativos. O fluxo de potência ótimo apresenta, em geral, elevado grau de não linearidade e grande número de variáveis e restrições tornando o problema complexo e de difícil solução.

Neste capítulo são apresentados conceitos básicos sobre FPO como uma modelagem geral, sem especificações de função objetivo ou definição explícita das equações que definem as restrições. Também são apresentadas as condições que caracterizam um ponto como solução ótima para o problema e sua solução utilizando o método de Newton.

## **2.2 Revisão Bibliográfica**

Comumente, os problemas de FPO são não lineares, embora sua solução possa ser obtida utilizando-se programação linear, desde que realizadas sucessivas linearizações. Uma das classificações possíveis para as técnicas de otimização pode dividi-las como clássicas e metaheurísticas. O primeiro grupo necessita de uma boa condição inicial e apresenta dificuldade no tratamento das restrições, em especial com relação às variáveis discretas, porém tem maior precisão e exige menor esforço computacional quando comparado com as técnicas metaheurísticas.

Diversas técnicas de otimização podem ser aplicadas ao problema de FPO. São apresentadas neste trabalho apenas as técnicas clássicas. Dentro de uma determinada classificação podem existir diversas subdivisões, dependendo do autor. Em [15], os métodos de fluxo de potência ótimo são classificados em grupos e foram utilizadas pelos autores, ainda em 1991, 163 referências sobre o assunto, porém sem uma descrição detalhada. A descrição de um grande número de métodos de solução para o problema de fluxo de potência ótimo é apresentada em [16] e [17], onde são divididos em seis categorias: métodos de Programação Não Linear, métodos de Programação Quadrática, métodos baseados no método de Newton, métodos de Programação Linear, métodos de Programação Inteira Mista e métodos de Pontos Interiores. Trata-se de uma gama bastante vasta de métodos e aplicações com muitas variações, sendo apresentadas nesta seção apenas alguns exemplos das cinco maiores categoria.

### 2.2.1 Programação Não Linear

Carpentier [3], em 1962, foi quem apresentou a primeira formulação de um problema de FPO, sendo não linear e generalizada para o problema de despacho econômico, incluindo restrições de balanço de potências ativa e reativa além das limitações físicas dos equipamentos. Anos mais tarde, com a consolidação do problema de FPO, o problema de minimização de custos proposto por Carpentier passou a ser considerado um caso particular do problema de FPO.

Em 1968, Dommel e Tinney [2] publicaram o método de Gradiente Reduzido de programação não linear para minimização de custos e perdas de potência ativa. O método é baseado na solução do fluxo de potência pelo método de Newton e funções de penalidade para tratamento das restrições de desigualdade. Nele é resolvido um problema de fluxo de potência com controle das variáveis como potências ativa e reativa e tap dos transformadores. A proposta demonstrou ser bastante eficaz, resolvendo problemas de até 500 barras, considerado de grande porte para a época. Os autores apresentam quatro formas para ajuste dos parâmetros de controle utilizando o gradiente, além de sugerirem como melhorias futuras o uso de termos de segunda ordem para tratamento dos parâmetros de controle ao longo do processo iterativo.

Diversos métodos seguiram a mesma linha da aproximação de Dommel-Tinney. Uma extensão deste método foi proposta em [18] por Alsac e Stott em 1974. Neste trabalho, a aproximação da programação não linear é baseada no método do Gradiente Reduzido utilizando os multiplicadores de Lagrange e funções de penalidade. O método incorpora restrições de segurança em regime permanente na solução do fluxo de potência ótimo usando uma formulação exata, permitindo que as restrições de potência reativa e de tensão sejam consideradas no caso de contingências. Para demonstração do método é utilizado o sistema IEEE 30 barras, com função objetivo do tipo minimização do custo de geração de potência ativa, sendo consideradas contingências em diversas linhas do sistema, levando em conta as potências ativas e magnitude de tensão dos geradores e taps dos transformadores como variáveis de controle.

A estratégia de decomposição do problema de FPO proposta por Shoults e Sun [19] em 1982 divide o problema principal em dois subproblemas: um de potência ativa e outro de potência reativa. O primeiro envolve a minimização dos custos de geração de potência ativa de hora em hora fazendo uso de controle de potência ativa gerada e taps dos transformadores. O segundo minimiza as perdas de potência ativa na

transmissão fazendo uso do controle de tensão, taps e elementos shunt. Os dois subproblemas são resolvidos de forma alternada e incluem restrições de segurança, como limite de tensão, capacidade da linha e geração de potência reativa. Os resultados apresentados utilizam sistemas teste de 5, 30 e 962 barras, o que não reflete a real capacidade do método devido à limitação de memória existente na época, conforme destacado pelos autores.

### 2.2.2 Programação Quadrática

Nos algoritmos de programação quadrática, as funções objetivo são quadráticas e as restrições são lineares. Reid e Hasdorf [20] em 1973 empregaram o algoritmo de Wolfe para solução do problema de despacho econômico com restrições de igualdade e desigualdade de potência ativa e reativa e tensão, sem a necessidade de fatores de penalidade ou determinação do passo do gradiente. O método de Wolfe exige o acréscimo de restrições de não negatividade para todas as variáveis do problema. O método proposto por Reid e Hasdorf utiliza a formulação em coordenadas retangulares para representação das equações do fluxo de potência, sendo considerados apenas até o termo com derivada de primeira ordem da expansão em série de Taylor para transformar essas equações quadráticas em lineares para resolver o problema pelo método simplex.

Em [21], Wollenberg e Stadlin apresentam um algoritmo de otimização do despacho econômico e propõem a inclusão de despacho de potência reativa e restrições de contingência. O método proposto é capaz de lidar com os componentes práticos de um sistema de potência e a rotina de otimização é utilizada no fluxo de potência sem intercâmbio de áreas. O método é conhecido como um trabalho pioneiro em algoritmo de decomposição em problemas de despacho econômico. Mostra-se também que não há diferenças de convergência e ponto de otimalidade quando são utilizadas diferentes barras como referência.

Uma técnica de otimização de fluxo de potência para sistemas de grande porte com uso de esparsidade é apresentada em [11]. A otimização é baseada na substituição do problema original por um sequência de subproblemas linearmente restritos usando uma função objetivo do tipo Lagrangeano aumentado. No algoritmo apresentado, a solução converge quadraticamente nas restrições não lineares do fluxo de potência, ao invés de serem forçadas a satisfazer as restrições por

meio do processo iterativo. O algoritmo é implementado e resultados para sistemas de 118 e 597 barras são apresentados.

Em 1989, a referência [22] apresentou resultados onde constata-se que o uso da matriz Hessiana nos problemas de FPO torna os métodos mais robustos quanto às diferentes condições iniciais e que os problemas desacoplados de FPO apresentam solução muito próxima ao problema sem desacoplamento. Também é demonstrado que a diferença de soluções entre o uso de variáveis discretas para os transformadores com comutação sob carga e o uso dessas variáveis como contínuas, e consequente aproximação para o valor discreto mais próximo, são mínimas e podem ser desprezadas. Os testes para demonstração das propostas dos autores foram realizados em um sistema de 1549 barras, sob várias condições de carregamento.

### 2.2.3 Newton

Em 1974, foi publicado em [23] um modelo de fluxo de potência ótimo utilizando multiplicadores de Lagrange no método de Newton, com a substituição da matriz Jacobiana pela matriz Hessiana. Foram considerados tanto as restrições de igualdade de balanço de potência quanto os limites de tensão, geração de potência ativa e reativa e fluxos nas linhas de transmissão por meio de alteração na função objetivo original, com a inclusão de fatores de penalidade associados às restrições de desigualdade. Também foi apresentado um fator de aceleração para as variáveis de controle e o algoritmo foi implementado minimizando-se custos e perdas, sendo apresentados resultados para um sistema teste de 5 barras.

Também em 1974, a referência [24] apresentou uma técnica de despacho econômico para alocação de geração em sistemas de potência por meio do uso da matriz Jacobiana, que foi utilizada para o cálculo das perdas incrementais. O autor destaca que seu método apresenta convergência mais simples e rápida em comparação com os anteriormente existentes, sendo adequado para execução em tempo real. Estudos de contingências são realizados e o método apresentado é comparado ao método da matriz B, sendo os resultados apresentados para sistemas de 9 e 118 barras.

Baseada no método de Newton, uma nova aproximação do problema de fluxo de potência ótimo é apresentada em [12]. O programa resolve uma aproximação quadrática dos multiplicadores de Lagrange a cada iteração e faz uso de técnicas de esparsidade. Além disso, a

convergência super linear para as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker tornam esse método adequado para grandes sistemas.

Um problema de despacho econômico com restrições de segurança é tratado em [25]. A inclusão dessas restrições visa evitar que um sistema se distancie de seu estado normal de operação durante a ocorrência de uma grande perturbação. Segundo os autores, as restrições de segurança usadas até então eram conservadoras, pois não consideravam a capacidade corretiva do sistema após a ocorrência de uma interrupção, tais como redespacho de geração e chaveamentos. As restrições de segurança representam ações de controle preventivo e uma forma automática de ajuste dos controles é utilizada. O modelo de fluxo de potência linearizado foi baseado na decomposição de Benders, além de técnica de detecção de inviabilidade. Resultados numéricos são apresentados para o sistema de 118 barras, em que são consideradas contingências em quatro circuitos do sistema.

#### 2.2.4 Programação Linear

Em 1968, foi publicado em [26] o desenvolvimento de uma programação linear para determinar o despacho econômico mais consistente com os requerimentos de segurança do sistema de potência. O autor lineariza a função objetivo e as restrições, possibilitando a solução do problema pelo método simplex para diminuir o tempo de processamento e necessidade de armazenamento dos métodos considerados convencionais até então. Apresenta-se uma forma de organizar o problema de modo que, mesmo com a inserção das restrições de segurança, o problema possa ser resolvido em computadores de médio porte para a época.

Um método aproximado de programação linear, usando uma modificação do método simplex revisado, para despacho seguro e cálculo de controle emergencial para sistemas de grande porte é apresentado em [10], por Stott e Marinho. São utilizados vários segmentos de curvas de custos de geradores, onde cada segmento dessa curvatura não linear é aproximado por uma reta, e são empregadas técnicas de esparsidade. Além das linearizações requeridas para a solução, duas funções objetivo são usadas nas curvas quadráticas de custo considerando uma aproximação de mínimos quadrados ponderados. Dentre as contribuições na área de programação linear publicadas por Stott, podem ser citadas [27, 28], publicadas juntamente com Hobson, que seguem a mesma linha de solução do método simplex e uma técnica para redespacho de

potência utilizando programação linear sucessiva [29], publicada com Alsac.

Em 1983, é apresentado em [30] o método de Quase-Newton para programação linear para solução do problema de fluxo de potência ótimo, onde foram empregadas técnicas de variáveis ponderadas e múltiplas funções objetivo. O método faz uso das não linearidades suaves do problema para alterar o peso das restrições para alívio da corrente de sobrecarga e evitar o surgimento de novas sobrecargas causadas pelas mudanças nas variáveis de controle. Neste trabalho são empregadas técnicas de esparsidade na matriz Hessiana e as funções linearizadas são tratadas como um conjunto de funções penalidade com coeficientes ponderados nas variáveis.

A referência [31] apresenta uma função penalidade baseada na programação linear para resolver o problema de despacho de potência reativa. As variáveis de tensão e injeção de potência reativa e o modelo de potência reativa do método desacoplado rápido são usados para derivar as sensibilidades lineares. A matriz esparsa de sensibilidade é usada para modelar um gráfico para definir uma estratégia eficiente de relaxação das restrições buscando resolver os problemas de despacho de potência reativa linearizados. Este método permite muitas violações de restrições e pode lidar com inviabilidades encontrando o ponto mais próximo do ponto viável. Para reduzir o esforço computacional do método, o gráfico de sensibilidade é utilizado para definir qual conjunto de restrições deve ser incluído na formulação do problema linear. As metodologias propostas são implementadas em um sistema de 256 barras.

### 2.2.5 Pontos Interiores

Em 1991, na referência [32], foi apresentada uma nova formulação para o problema de estimação de estados em sistemas de potência e uma nova técnica de solução, envolvendo restrições de desigualdade. Os autores transformam o problema de estimação de estados em um problema de otimização envolvendo mínimos quadrados com restrições de igualdade. As restrições de desigualdade inseridas referem-se aos limites de geração de potência reativa e taps de transformadores, sendo resolvidas com a técnica de Pontos Interiores, usando barreiras logarítmicas para o tratamento destas restrições. É ressaltada a importância das condições iniciais e a solução é obtida utilizando o método de Newton, sendo testado para sistemas de até 118 barras.

O problema de despacho hidrotérmico formulado com um método dual afim é apresentado em [33]. Este método mostra-se mais adequado quando o número de restrições é muito maior que o número de variáveis e é aplicável a problemas de otimização lineares e não lineares. É demonstrado que o algoritmo dual afim é adequado somente para problemas com restrições de desigualdade e também mostra a superioridade do método dual afim com relação ao método simplex, quando comparados os tempos de processamento.

Em 1993, foi apresentado em [34] uma comparação do método simplex e o método de Pontos Interiores, ambos aplicados a problemas de controle corretivo e preventivo em sistemas com grande número de variáveis e restrições. O método proposto emprega técnicas de programação linear para obter uma solução viável antes da aplicação do método de Pontos Interiores e o problema original é resolvido com o método primal de Pontos Interiores. A comparação realizada demonstra que, com o aumento do sistema, o método de Pontos Interiores apresenta um acréscimo menor de iterações e tempo de execução em relação ao método simplex. Este fato induz os autores a concluir que o método de Pontos Interiores mostra-se mais adequado a sistemas de potência do que o método comparado.

Um método de Pontos Interiores aplicado ao problema de alocação ótima de potência reativa e minimização das perdas é apresentado em [13], onde é ressaltada a eficácia da implementação primal-dual para problemas de otimização de grande porte em sistemas de potência. O autor destaca a importância da escolha adequada do parâmetro de barreira logarítmica, apresentando bons resultados quando aplicado a problemas de programação linear e quadrática. Os resultados são obtidos para sistemas de 1832 e 3467 barras.

### **2.3 Problema de Otimização**

Em qualquer problema de otimização, busca-se maximizar ou, de forma equivalente, minimizar as funções objetivo, podendo estar sujeitas a restrições. Essas restrições podem ser de igualdade ou desigualdade, sendo aplicadas diretamente sobre as variáveis, atuando de forma a limitá-las, ou sobre uma ou mais equações compostas por estas variáveis.

As formas mais elementares de se classificar um problema de otimização [1] se baseiam na existência ou inexistência de restrições e na natureza das equações que modelam o problema. Quando não existem

restrições a serem consideradas, tem-se um problema de otimização *ir-restrita*, do contrário, tem-se uma otimização *restrita*. Quando a função objetivo e as restrições forem equações lineares, o problema é definido como um problema de otimização *linear*. Se a função objetivo e/ou pelo menos uma das restrições não for linear, tem-se um problema de otimização *não linear*.

Os problemas de otimização também podem ser classificados com base nas variáveis a serem otimizadas. Se as variáveis do problema podem assumir apenas valores inteiros, qualquer valor real ou uma combinação dessas classificações, tem-se problemas de otimização *inteira*, *contínua* e *inteira mista*, respectivamente. As aplicações são vastas, principalmente para as programações contínua e inteira mista, as quais podem ser citadas como exemplos o valor ótimo dos taps dos transformadores, que são calculados como valores contínuos e aproximados para o valor discreto mais próximo, e a minimização de custos para alocação de novas unidades geradoras, respectivamente. Caso o algoritmo obtenha a melhor solução dentre todo conjunto de soluções possíveis, o ponto alcançado é denominado *ótimo global*, do contrário, será um *ótimo local*.

As condições de otimalidade fazem uso de definições de matrizes apresentadas aqui de forma simplificada. Segundo [35], uma matriz quadrada qualquer  $\mathbf{M}$  de dimensão  $n$  é classificada por meio de seus autovalores como:

- *definida positiva*: caso todos os autovalores possuam parte real positiva;
- *semidefinida positiva*: caso todos os autovalores possuam parte real não negativa;
- *definida negativa*: caso todos os autovalores possuam parte real negativa;
- *semidefinida negativa*: caso todos os autovalores possuam parte real não positiva;
- *indefinida*: caso o conjunto da parte real dos autovalores possua algum elemento positivo e algum outro elemento negativo.

Se a matriz for classificada como indefinida, outra análise é realizada, conforme apresentado nas próximas subseções.

### 2.3.1 Otimização Irrestrita

Problemas de otimização irrestrita são a classe mais simples desses problemas. Nela, busca-se otimizar o valor da função objetivo que depende de uma ou mais variáveis reais, sem nenhuma restrição a essas variáveis ou equações que necessitem ser satisfeitas [1]. Sendo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  um vetor de números reais com  $n \geq 1$  componentes e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função suave, ou seja, continuamente diferenciável, a minimização da função  $f(\mathbf{x})$  com relação ao vetor  $\mathbf{x}$ , pode ser matematicamente representada por

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{Minimize}} \quad f(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

A característica de suavidade da função objetivo nos problemas irrestritos e restritos, e também a suavidade das restrições nos problemas restritos, são importantes para garantirem um comportamento previsível destas equações, ao menos localmente.

Para representar a maximização de uma função  $f(\mathbf{x})$  há duas formulações possíveis

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{Maximize}} \quad f(\mathbf{x}) \quad \text{ou} \quad \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{Minimize}} \quad -f(\mathbf{x})$$

Para uniformização do texto ao longo deste trabalho, será utilizada a forma de minimização em todas as funções a serem otimizadas, sem que haja perda de generalidade.

As definições que regem a classificação de um problema de otimização quanto a sua solução é apresentada a seguir. Segundo [1], um ponto  $\mathbf{x}^*$  obtido como solução da Eq. (2.1) pode ser classificado como:

- *mínimo global*: se  $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$  para todo valor de  $\mathbf{x}$ ;
- *mínimo local fraco*: se  $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$  para todo valor de  $\mathbf{x}$  pertencente a uma vizinhança em torno de  $\mathbf{x}^*$ ;
- *mínimo local forte* ou *mínimo local estrito*: se  $f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x})$  para todo valor de  $\mathbf{x}$  pertencente a uma vizinhança em torno de  $\mathbf{x}^*$ , com  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ .

#### 2.3.1.1 Condições para otimalidade

Sendo a função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continuamente diferenciável com relação a  $\mathbf{x}$  e assumindo  $\mathbf{x}^*$  como uma solução de mínimo local desta

função, as condições *necessárias* para otimalidade do ponto são dadas por:

- *condição de otimalidade de primeira ordem*: para ser um ponto de mínimo local,  $\mathbf{x}^*$  deve ser um ponto estacionário, ou seja,  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$ , onde  $\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ ;
- *condição de otimalidade de segunda ordem*: se  $\mathbf{x}^*$  é um mínimo local de  $f(\mathbf{x})$  e  $\nabla^2 f(\mathbf{x})$  existe e é contínua na vizinhança de  $\mathbf{x}^*$ , então  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$  e  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$  é semidefinida positiva.

As condições necessárias apresentadas assumem que o ponto é um mínimo local. As condições *suficientes* de segunda ordem garantem que o ponto é um mínimo local de uma função irrestrita e são satisfeitas desde que  $\nabla^2 f(\mathbf{x})$  seja contínua na vizinhança de  $\mathbf{x}^*$ , que  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$  e  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$  seja definida positiva.

### 2.3.2 Otimização Restrita

São raros os problemas de otimização em sistemas de potência que podem ser corretamente modelados como irrestritos. Em geral, uma série de limitações físicas, operativas ou financeiras impedem que a função objetivo possa assumir livremente qualquer valor que a otimize. Neste caso, os problemas de otimização são restritos, podendo ser modelados de forma genérica como

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{Minimize}} && f(\mathbf{x}) \\ & \text{sujeito a} && \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & && \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.2}$$

com  $f(\mathbf{x})$  definido anteriormente e as restrições de igualdade e desigualdade sendo representadas respectivamente por  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ . Para todos os estudos adiante assume-se que estas restrições e a função objetivo são suaves.

O acréscimo de restrições pode facilitar a obtenção da solução global do problema de otimização, desde que o conjunto de soluções viáveis, delimitado pelas restrições, exclui muitos mínimos locais. Em outras situações, porém, a inserção de restrições ao problema pode acarretar dificuldades para obtenção da solução. O conjunto de soluções viáveis  $\Omega$  é definido como um conjunto de pontos de  $\mathbf{x}$  que satisfazem

as restrições de igualdade e desigualdade, quando existirem. Assim, a Eq. (2.2) pode ser reescrita de forma alternativa como

$$\underset{\mathbf{x} \in \Omega}{\text{Minimize}} \quad f(\mathbf{x})$$

Sendo  $\boldsymbol{\lambda}$  e  $\boldsymbol{\pi}$  os vetores dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente, a função Lagrangeana do problema geral expresso pela Eq. (2.2) se torna

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \sum_i^{n_E} \lambda_i c_i + \sum_i^{n_I} \pi_i h_i$$

com  $n_E$  e  $n_I$  definidos como o número de restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. A equação anterior pode ser reescrita na forma matricial como

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{c}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{h}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\pi} \quad (2.3)$$

### 2.3.2.1 Condições de Primeira Ordem

As condições necessárias de primeira ordem estão relacionadas aos gradientes da função objetivo e das restrições e são conhecidas também como condições de Karush-Kuhn-Tucker, ou condições de KKT. Uma descrição detalhada e comprovação das condições de otimalidade apresentadas podem ser obtidas em [36]. As derivadas de primeira ordem da função Lagrangeana devem ser nulas, ou seja

$$\nabla_x \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\pi}^*) = 0$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\pi}^*) = 0$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\pi}^*) = 0$$

Os multiplicadores de Lagrange relacionados às restrições de desigualdade são todos não negativos, enquanto que as restrições de igualdade não apresentam esta limitação, podendo assumir qualquer valor

real. De um modo mais explícito, as condições necessárias de primeira ordem, conhecidas como as condições de Karush-Kuhn-Tucker, são

$$\nabla_x f(\mathbf{x}^*) + \nabla_x \mathbf{c}(\mathbf{x}^*)^t \boldsymbol{\lambda} + \nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x}^*)^t \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0} \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (2.4b)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0} \quad (2.4c)$$

$$\boldsymbol{\pi}^* \geq \mathbf{0} \quad (2.4d)$$

$$\pi_i^* h_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \forall i \in n_I \quad (2.4e)$$

Os problemas de otimização também podem ser classificados quanto as suas restrições de desigualdade. Uma restrição de desigualdade é *fortemente ativa* quando  $h_i(\mathbf{x}^*) = 0$  e o multiplicador de Lagrange correspondente a esta restrição for  $\pi_i > 0$ . Se, no ponto de solução, obtém-se  $h_i(\mathbf{x}^*) = 0$  e  $\pi_i = 0$ , a restrição correspondente é classificada como *fracamente ativa*. No entanto, se  $h_i(\mathbf{x}^*) < 0$  e  $\pi_i = 0$ , a restrição é *inativa*. No caso particular em que todas as restrições de desigualdade são fortemente ativas, tem-se uma *complementaridade estrita*.

### 2.3.2.2 Condições de Segunda Ordem

As condições de otimalidade de primeira ordem garantem apenas que a solução encontrada é um ponto estacionário, ou seja, a derivada de primeira ordem não consegue determinar se a região em torno do ponto estacionário é côncava ou convexa. As condições de otimalidade de segunda ordem atuam no sentido de identificar se a solução encontrada é um ponto de máximo ou mínimo.

Sendo  $\mathcal{F}(\mathbf{x}^*)$  o conjunto de direções viáveis de primeira ordem em  $\mathbf{x}^*$ , e  $\mathbf{w}$  um vetor que indique uma direção viável pertencente a  $\mathcal{F}(\mathbf{x}^*)$  de tal forma que  $\mathbf{w}^t \nabla_x \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\pi}^*) = \mathbf{0}$ , defini-se como *cone crítico*  $C(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\pi}^*)$  a expressão que satisfaz os seguintes critérios

$$w \in C(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\pi}^*) \left\{ \begin{array}{l} \nabla \mathbf{c}(\mathbf{x}^*)^t \mathbf{w} = \mathbf{0} \\ \nabla h_i(\mathbf{x}^*) w_i = 0, \forall i \text{ com } \pi_i > 0 \\ \nabla h_i(\mathbf{x}^*) w_i \geq 0, \forall i \text{ com } \pi_i = 0 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

As condições de otimalidade necessárias de segunda ordem para um mínimo local fraco são dadas como  $\mathbf{w}^t \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\pi}^*) \mathbf{w} \geq \mathbf{0}$  para todo  $\mathbf{w} \in C(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\pi}^*)$ . As condições suficientes de segunda ordem asseguram um mínimo local forte e são dadas por  $\mathbf{w}^t \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\pi}^*) \mathbf{w} >$

$\mathbf{0}$  para todo  $\mathbf{w} \in C(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\pi}^*)$  e  $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ . Estas condições garantem a otimalidade local, mesmo em situações onde as matrizes não se caracterizam como definidas ou semidefinidas e seu detalhamento pode ser encontrado em [1, 35]

### 2.3.3 Ilustração Gráfica

Os pontos de máximo, mínimo e de sela podem ser exemplificados de forma simples utilizando funções de duas variáveis,  $x$  e  $y$ . A Figura 1 representa a expressão  $f_1(x, y) = -x^2 - y^2$ , sendo duas vezes continuamente diferenciável e cuja matriz Hessiana,  $\mathbf{H}_1$ , e o vetor de autovalores relacionados a esta matriz,  $\mathbf{a}_1$ , são

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Sendo  $\mathbf{a}_1$  um vetor composto apenas por elementos negativos, a matriz  $\mathbf{H}_1$  é classificada como definida negativa, conclui-se que a expressão  $f_1(x, y)$  possui um ponto de máximo local forte.

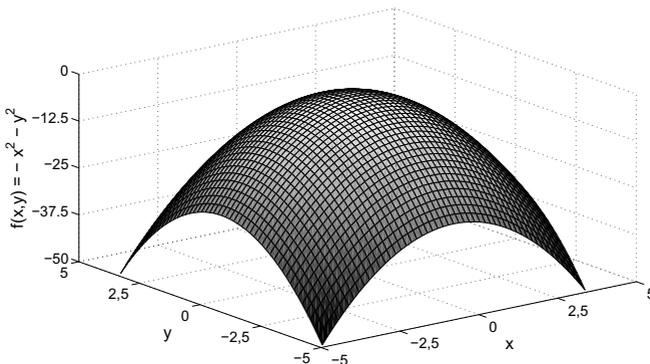


Figura 1 – Representação de ponto de máximo

Análise semelhante pode ser realizada para a expressão  $f_2(x, y) = x^2 + y^2$ , cuja matriz Hessiana  $\mathbf{H}_2$  é definida positiva, pois todos os autovalores relacionados a esta matriz são positivos e representados no

vetor  $\mathbf{a}_2$ . Assim,  $f_2(x, y)$  possui um ponto de mínimo local forte e é representada graficamente na Figura 2.

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

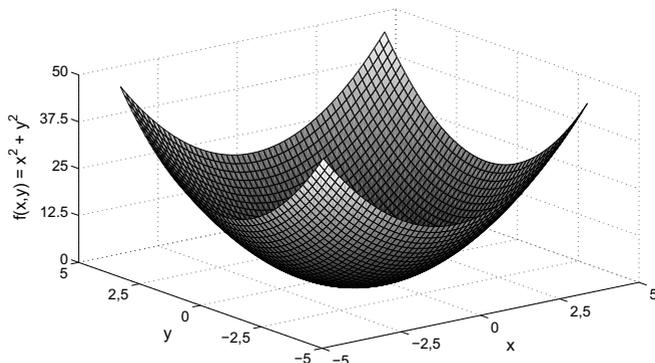


Figura 2 – Representação de ponto de mínimo

Caso os autovalores possuam sinais alternados, como no vetor  $\mathbf{a}_3$ , sendo referente à matriz  $\mathbf{H}_3$ , que representa a derivada de segunda ordem da expressão  $f_3(x, y) = x^2 - y^2$  com relação as suas variáveis, a matriz  $\mathbf{H}_3$  é classificada como indefinida. A ilustração gráfica de  $f_3(x, y)$  demonstra a caracterização de um ponto de sela desta função.

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

## 2.4 Solução Utilizando Método de Newton

Embora existam diversas formas de solução para o problema apresentado neste capítulo, como Programação Quadrática Sequencial, Pontos Interiores, Algoritmos Genéticos, etc, será apresentada uma solução via método de Newton. Nos capítulos subsequentes será demonstrada a forma de tratamento dada às restrições de desigualdade utilizadas neste trabalho, de modo que serão consideradas nesta etapa de solução apenas as restrições de igualdade.

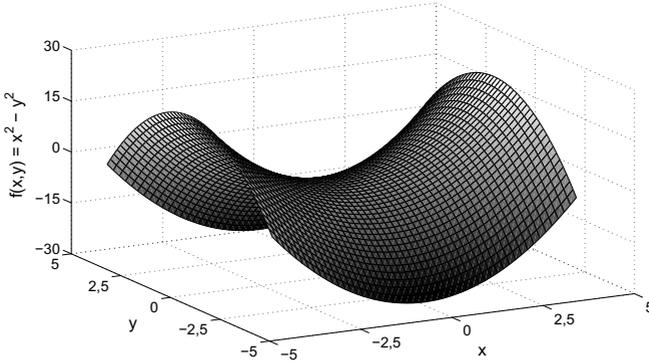


Figura 3 – Representação de ponto de sela

Por simplicidade de notação, será adotado  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  para representar a matriz Jacobiana das restrições de igualdade do problema de otimização, ou seja, a matriz de primeira derivada das restrições de igualdade em relação às variáveis  $\mathbf{x}$ . As condições de primeira ordem de KKT da Eq. (2.4), desconsiderando as condições relacionadas às inequações, permitem que o problema seja reescrito como um vetor  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$  de tal modo que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \nabla_x f(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{c}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  é a matriz de primeiras derivadas das restrições de igualdade.

O problema de otimização a ser resolvido se refere a Eq. (2.6). O método de Newton convencional para obtenção de uma direção de busca  $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}$  exige a expansão em série de Taylor até o termo de primeira ordem em cada iteração  $k$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \Delta \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) + \nabla_{x\lambda} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})^t \mathbf{d} \quad (2.7)$$

em que  $\nabla_{x\lambda} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$  representa a derivada da Eq. (2.6) com relação a  $\mathbf{x}$  e  $\boldsymbol{\lambda}$ , aplicadas no ponto  $(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$ , sendo matematicamente representada como

$$\nabla_{x\lambda} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) & \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^t \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Objetiva-se encontrar um novo ponto de solução, onde as condições de otimalidade sejam satisfeitas, implicando que o resultado da Eq. (2.7) deva ser nulo. O incremento a cada iteração é obtido resolvendo-se o sistema

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) & \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_x f(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{c}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

onde os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\boldsymbol{\lambda}$  são referentes à iteração  $k$ , cujo índice foi omitido da equação anterior por simplicidade. O termo  $\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$  é a matriz Hessiana da função Lagrangeana em relação às variáveis do vetor  $\mathbf{x}$  aplicadas no ponto  $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ . A atualização das variáveis é feita na forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(k+1)} \\ \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} \\ \boldsymbol{\lambda}^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Após a atualização das variáveis, o processo é feito até que o vetor de incrementos  $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}$  assumo valor abaixo de uma tolerância previamente especificada.

## 2.5 Minimização no Subespaço Bidimensional

O método de Newton é uma forma clássica de solução do problema de otimização e utiliza apenas o termo de primeira ordem. Nesta seção, apresenta-se um método que faz uso de modelos tensoriais e que será utilizado para comparação de resultados do método proposto neste trabalho.

Uma aproximação para o problema de Região de Confiança é apresentada em [37], onde não são considerados limites para as variáveis ou para restrições. A aproximação é aplicada para o método de Newton e para um modelo tensorial proposto pelos mesmos autores e descrito no Capítulo 3. No entanto, não há impedimentos para que esta aproximação seja aplicada a outro modelo tensorial. Esta seção apresenta a minimização em duas direções considerando um modelo tensorial qualquer.

Sejam  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{d}$  vetores coluna compostos por todas as variáveis necessárias para a solução de um problema de otimização e os incrementos dessas variáveis, respectivamente. Minimiza-se o quadrado da

norma da expansão em série de Taylor até o termo de segunda ordem em relação ao vetor de incrementos

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n}{\text{Minimize}} \quad \|\mathbf{F}(\mathbf{z}) + \nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{F}(\mathbf{z})\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^t\mathbf{H}(\mathbf{z})\mathbf{d}\|^2 \\ & \text{sujeito a} \quad \|\mathbf{d}\| \leq \Delta \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde  $\mathbf{H}(\mathbf{z})$  representa o arranjo tridimensional referente à segunda derivada de  $\mathbf{F}(\mathbf{z})$  com relação às variáveis  $\mathbf{z}$ .

Na estratégia proposta pelos autores de [37], o incremento  $\mathbf{d}$  deve pertencer ao conjunto  $\mathbf{d} \in [\mathbf{d}_t, \mathbf{t}_s]$ , onde  $\mathbf{d}_t$  e  $\mathbf{t}_s$  são o passo total obtido pela implementação do modelo tensorial e o melhor passo na direção descendente, respectivamente, e  $\Delta$  é o raio da região de confiança. Caso o termo quadrático seja omitido, o termo  $\mathbf{d}_t$  é substituído por  $\mathbf{d}_n$ , que representa apenas o passo de Newton. Segundo os autores, o valor do melhor passo na direção descendente é calculado na forma  $\mathbf{t}_s = -\nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{F}(\mathbf{z})^t\mathbf{F}(\mathbf{z})$ .

O método requer que o problema da Eq. (2.10) torne-se um problema irrestrito. Primeiramente, forma-se uma base ortonormal do subespaço bidimensional por meio da projeção

$$\hat{\mathbf{t}}_s = \mathbf{t}_s - \mathbf{d}_t \frac{\mathbf{t}_s^t \mathbf{d}_t}{\mathbf{d}_t^t \mathbf{d}_t} \quad (2.11)$$

e então normalizando-se os termos  $\hat{\mathbf{t}}_s$  e  $\mathbf{d}_t$ , de forma a se obter

$$\tilde{\mathbf{d}}_t = \frac{\mathbf{d}_t}{\|\mathbf{d}_t\|_2}, \quad \tilde{\mathbf{t}}_s = \frac{\hat{\mathbf{t}}_s}{\|\hat{\mathbf{t}}_s\|_2} \quad (2.12)$$

Como  $\mathbf{d}$  é um conjunto das combinações lineares de  $\tilde{\mathbf{d}}_t$  e  $\tilde{\mathbf{t}}_s$ , pode-se reescrever o vetor de direção composta na forma

$$\mathbf{d} = \alpha \tilde{\mathbf{d}}_t + \beta \tilde{\mathbf{t}}_s \quad (2.13)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são escalares a serem determinados. Manipulando-se a expressão de restrição da Região de Confiança, obtêm-se

$$\beta = \sqrt{\Delta^2 - \alpha^2} \quad (2.14)$$

Substituindo-se as Eqs. (2.14) e (2.13) na Eq. (2.10) tem-se o problema de minimização em função apenas da variável  $\alpha$

$$\begin{aligned} \text{Minimize}_{\alpha} \quad & \|\mathbf{F}(\mathbf{z}) + \alpha \nabla_z \mathbf{F}(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{d}}_t + \sqrt{\Delta^2 - \alpha^2} \nabla_z \mathbf{F}(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{t}}_s + \\ & + \frac{1}{2} \left[ (\alpha \tilde{\mathbf{d}}_t + \sqrt{\Delta^2 - \alpha^2} \tilde{\mathbf{t}}_s) \mathbf{H}(\mathbf{z}) (\alpha \tilde{\mathbf{d}}_t + \sqrt{\Delta^2 - \alpha^2} \tilde{\mathbf{t}}_s) \right] \|_2^2 \end{aligned}$$

que na forma expandida é representada como

$$\begin{aligned} \text{Minimize}_{\alpha} \quad & \|\mathbf{F}(\mathbf{z}) + \alpha \nabla_z \mathbf{F}(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{d}}_t + \sqrt{\Delta^2 - \alpha^2} \nabla_z \mathbf{F}(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{t}}_s + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \alpha^2 \tilde{\mathbf{d}}_t^t \mathbf{H}(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{d}}_t + \alpha \sqrt{\Delta^2 - \alpha^2} \tilde{\mathbf{d}}_t^t \mathbf{H}(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{t}}_s + \right. \\ & \left. + \alpha \sqrt{\Delta^2 - \alpha^2} \tilde{\mathbf{t}}_s^t \mathbf{H}(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{d}}_t + (\Delta^2 - \alpha^2) \tilde{\mathbf{t}}_s^t \mathbf{H}(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{t}}_s \right] \|_2^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

em que o valor do escalar  $\alpha$  é limitado pelo raio da região de confiança,  $-\Delta < \alpha < \Delta$ .

### 2.5.1 Algoritmo

O algoritmo a seguir descreve os passos para a minimização bi-dimensional apresentada:

1. obter os valores de  $\mathbf{z}^{(k)}$  e  $\mathbf{d}_t^{(k)}$  na iteração corrente  $k$ . Calcular o melhor passo na direção descendente,  $\mathbf{t}_s = -\nabla_z \mathbf{F}(\mathbf{z})^t \mathbf{F}(\mathbf{z})$ ;
2. especificar o raio da região de confiança,  $\Delta^{(k)}$ ; calcular  $\tilde{\mathbf{d}}_t$  e  $\tilde{\mathbf{t}}_s$  por meio da Eq. (2.12);
3. calcular o valor de  $\alpha$  que minimize a Eq. (2.15) para calcular o vetor de incrementos por meio da Eq. (2.13);
4. adotar  $\mathbf{z}^+ = \mathbf{z}^{(k)} + \mathbf{d}$  e verificar se o raio da região de confiança é adequado calculando a função de mérito  $\psi$

$$\psi = \frac{\frac{1}{2} \|\mathbf{F}(\mathbf{z}^+)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k)})\|_2^2}{\frac{1}{2} \|\mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k)}) + \nabla_z \mathbf{F}(\mathbf{z}) \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{H}(\mathbf{z}) \mathbf{d}\|_2^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k)})\|_2^2}$$

- se  $\psi \geq 10^{-4}$ , então o passo incremental  $\mathbf{d}$  é aceito e o processo é finalizado;

- se  $\psi < 10^{-4}$ , então o raio da região de confiança é reduzido e retorna-se ao passo 3.

O valor inicial para o raio da região de confiança não é especificado pelos autores do método apresentado. Já o critério para a redução do raio da região de confiança é o apresentado em [38]. Calcular o minimizador global da Eq. (2.15) é uma tarefa computacionalmente dispendiosa, sendo necessário um programa de otimização a cada iteração do programa de otimização principal.

## 2.6 Conclusão

Este capítulo apresentou os fundamentos básicos para formulação matemática de um problema de otimização, sendo o ponto de partida para o problema de fluxo de potência ótimo que será apresentado posteriormente neste trabalho. Os critérios para caracterização de uma solução como ótimo local e global destes problemas são apresentados tanto para problemas irrestritos, quanto para problemas restritos.

Dentre as soluções possíveis foram apresentadas as do método de Newton para problemas com restrição de igualdade e a minimização bidimensional para problemas irrestritos. A minimização bidimensional apresenta, segundo seus autores, resultados tão bons quanto os resultados obtidos com o uso de região de confiança.

### 3 USO DE COMPONENTES TENSORIAIS

#### 3.1 Introdução

O fluxo de potência, também chamado de fluxo de carga, é um dos problemas básicos na área de sistemas de potência e consiste na solução de um conjunto de equações algébricas não lineares para determinação do ângulo e da magnitude de tensão em todas as barras de um sistema. Os níveis de geração de potência ativa e tensão de unidades geradoras, quantidade de demanda e características da rede de transmissão são considerados. Com isso obtém-se o estado do sistema, a partir do qual todas as injeções nas barras e fluxos nas linhas de transmissão podem ser calculados.

Cálculos de fluxo de potência são realizados no planejamento, operação e controle do sistema elétrico de potência. Estes cálculos desempenham um papel muito importante na verificação da capacidade do sistema satisfazer os critérios estabelecidos para transferência de energia, níveis de tensões e carregamentos nas linhas de transmissão. Estes estudos também são úteis na análise da regulação de dispositivos de controle de potência reativa, sendo utilizados como ponto de partida para a análise de estabilidade transitória do sistema de potência. Estudos baseados na solução do fluxo de potência permitem ainda comparar alternativas de expansão, avaliação do impacto da entrada de novas unidades geradoras no sistema, saída de linhas e medidas corretivas, etc.

Devido à melhoria da capacidade de processamento e armazenamento dos computadores modernos, atualmente menos atenção é dedicada à rapidez dos métodos de solução. Por sua vez, a robustez dos métodos tornou-se requisito importante na obtenção de soluções, principalmente quando a operação do sistema é feita sob condições próximas aos limites operativos.

Quando expressas em função das partes real e imaginária da tensão nodal, as equações que representam as injeções de potência nas barras podem ser escritas como uma forma quadrática, caso não se considerem os taps variáveis nos transformadores. Com as equações do fluxo de potência formulada em coordenadas retangulares, a expansão em série de Taylor dessas equações torna-se exata, onde todas as derivadas de ordem superior a dois são nulas. O termo de segunda ordem resultante da expansão possui um arranjo tridimensional denominado tensor, obtido a partir da derivada da matriz Jacobiana. O

cálculo explícito deste arranjo tridimensional exige grande esforço computacional para sua formação, sendo utilizadas formas indiretas para obtenção de um valor aproximado. Em um processo iterativo, técnicas que fazem uso do termo de segunda ordem permitem um cálculo mais preciso dos incrementos a cada iteração, sendo particularmente adequados quando a matriz Jacobiana é singular ou numericamente mal condicionada [9, 39].

Este capítulo apresenta uma análise sucinta das equações do fluxo de potência, sua formulação em coordenadas retangulares e formas de solução. A primeira forma de solução abordada é o método de Newton, enquanto que as outras duas formas apresentadas são modelos tensoriais, ambos sendo uma extensão do método de Newton.

## 3.2 Equações do Fluxo de Potência

Esta seção apresenta o desenvolvimento das equações do fluxo de potência em coordenadas retangulares, sendo este equacionamento a base fundamental para a continuação deste trabalho. Todas as representações do problema de fluxo de potência apresentadas nesse capítulo referem-se à condição de regime permanente.

### 3.2.1 Equacionamento Básico

As equações básicas dos problemas de fluxo de potência são obtidas por meio da conservação de potências ativa e reativa para todo o sistema elétrico em estudo. Em outras palavras, as somas das potências ativa e reativa injetadas, geradas e consumidas em uma barra devem ser nulas.

Ao final do problema de fluxo de potência, obtêm-se as tensões complexas de todas as barras e as gerações de potências das barras com unidades geradoras. Com os valores das tensões é possível calcular os fluxos de potência ativa e reativa nas linhas. Para resolver o problema de fluxo de potência, primeiramente é necessário estabelecer as equações que modelam a rede elétrica.

O vetor de injeção de potência complexa pode ser representado por  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_g - \mathbf{S}_d$ , com os índices  $g$  e  $d$  denotando geração e demanda, respectivamente. Cada um dos elementos que compõem o vetor  $\mathbf{S}$  podem ser calculados como

$$S_i = V_i I_i^* \quad (3.1)$$

onde  $V_i$  e  $I_i$  representam a tensão complexa e a injeção de corrente da barra  $i$ , respectivamente. A notação \* denota a condição de complexo conjugado.

Sendo  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{B}$  as matrizes condutância e susceptância da rede elétrica, respectivamente, a matriz admitância de barra é dada por  $\mathbf{Y}_b = \mathbf{G} + j\mathbf{B}$ . A injeção líquida de corrente da barra  $i$  pode ser expressa por

$$I_i = \sum_{k=1}^n Y_{b_{ik}} V_k \quad (3.2)$$

em que  $n$  é o número de barras do sistema, ou na forma matricial  $\mathbf{I} = \mathbf{Y}_b \mathbf{V}$ .

A equação que representa a injeção de potência para cada uma das  $n$  barras do sistema, considerando apenas os parâmetros físicos da rede elétrica e suas tensões complexas, pode ser obtida realizando a substituição da Eq. (3.2) na Eq. (3.1), resultando em

$$S_i^* = V_i^* \sum_{k=1}^n Y_{b_{ik}} V_k \quad (3.3)$$

Até este ponto, o desenvolvimento das equações é o mesmo independentemente do tipo de coordenada utilizada para formular o problema de fluxo de potência. Este trabalho faz uso das coordenadas retangulares, não sendo apresentada a formulação em coordenadas polares.

### 3.2.2 Uso de Coordenadas Retangulares

Com a adoção de coordenadas retangulares, a tensão complexa da  $i$ -ésima barra passa a ser representada em termos de suas componentes real e imaginária  $e_i$  e  $f_i$ , respectivamente, de tal forma que

$$V_i = e_i + jf_i \quad (3.4)$$

Substituindo-se a Eq. (3.4) e os elementos da matriz admitância na Eq. (3.3), tem-se

$$S_i^* = (e_i - jf_i) \sum_{k=1}^n (G_{ik} + jB_{ik})(e_k + jf_k) \quad (3.5)$$

Da mesma forma que a tensão, as injeções de potência complexa também podem ser decompostas em suas componentes real e imaginária. Defina-se então  $\mathbf{S} = \mathbf{P} + j\mathbf{Q}$ , onde  $\mathbf{P}$  representa o vetor de potência ativa e  $\mathbf{Q}$  representa o vetor de potência reativa.

Separando a Eq. (3.5) em partes real e imaginária, obtém-se

$$\begin{aligned} P_i(\mathbf{e}, \mathbf{f}) &= \sum_{k=1}^n [e_i (G_{ik}e_k - B_{ik}f_k) + f_i (G_{ik}f_k + B_{ik}e_k)] \\ Q_i(\mathbf{e}, \mathbf{f}) &= \sum_{k=1}^n [f_i (G_{ik}e_k - B_{ik}f_k) - e_i (G_{ik}f_k + B_{ik}e_k)] \end{aligned} \quad (3.6)$$

que são as expressões das injeções de potência ativa e reativa em função das partes reais e imaginárias das tensões nodais e das características físicas da rede.

O processo de solução do fluxo de potência é realizado de maneira que as componentes das tensões complexas sejam determinadas para que as diferenças entre valores especificados e calculados de magnitude das tensões e os desbalanços de potência ativa e reativa sejam mantidas em valores inferiores a uma tolerância pré-especificada. Em termos analíticos, isto consiste em calcular as tensões nodais, de maneira a satisfazer  $2n - 2$  equações da forma

$$\begin{aligned} P_{g_i} - P_{d_i} - P_i(e, f) &= \Delta P_i && \text{(barras PV e PQ)} \\ Q_{g_i} - Q_{d_i} - Q_i(e, f) &= \Delta Q_i && \text{(barras PQ)} \\ V_i^2 - (e_i^2 + f_i^2) &= \Delta V_i && \text{(barras PV)} \end{aligned}$$

ou, na forma explícita,

$$\begin{aligned} \Delta P_i &= P_i^{esp} - e_i \sum_{k=1}^n (G_{ik}e_k - B_{ik}f_k) - f_i \sum_{k=1}^n (G_{ik}f_k + B_{ik}e_k) \\ \Delta Q_i &= Q_i^{esp} - f_i \sum_{k=1}^n (G_{ik}e_k - B_{ik}f_k) + e_i \sum_{k=1}^n (G_{ik}f_k + B_{ik}e_k) \\ \Delta V_i &= V_i^{esp^2} - (e_i^2 + f_i^2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde o sobrescrito *esp* refere-se ao valor especificado da grandeza. Os termos  $\Delta P_i$ ,  $\Delta Q_i$  e  $\Delta V_i$  são chamados desbalanços de potência ativa e reativa e desbalanço de tensão e seus módulos devem ser inferiores a uma tolerância pré-especificada.

### 3.2.3 Formulação Matricial

Na forma matricial, a injeção de potência complexa nas barras pode ser expressa em termos das componentes real e imaginária da tensão nodal complexa como

$$\mathbf{S}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{D}_v \mathbf{I}_b^* \quad (3.8)$$

onde  $\mathbf{D}_v = \mathbf{D}_e + j\mathbf{D}_f$  é uma matriz diagonal, cujos elementos não nulos são as tensões nodais complexas na forma cartesiana; e  $\mathbf{D}_e$  e  $\mathbf{D}_f$  são matrizes diagonais cujos elementos não nulos são as partes real e imaginária, respectivamente, das tensões complexas.

Explicitando a Eq. (3.2) em termos de suas componentes de tensão e admitância da rede, obtêm-se a expressão

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{YV} \\ &= (\mathbf{G} + j\mathbf{B})(\mathbf{e} + j\mathbf{f}) \\ &= (\mathbf{Ge} - \mathbf{Bf}) + j(\mathbf{Be} + \mathbf{Gf}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde se observa a natureza linear da relação entre as componentes real e imaginária das injeções nodais de corrente com as componentes das tensões nas barras. O vetor de injeção de corrente complexa pode ser decomposto em suas componentes real e imaginária  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_e + j\mathbf{I}_f$ , sendo que  $\mathbf{I}_e = (\mathbf{Ge} - \mathbf{Bf})$  e  $\mathbf{I}_f = (\mathbf{Be} + \mathbf{Gf})$  são vetores de ordem  $n \times 1$ .

Utilizando as definições apresentadas, a potência complexa injetada nas barras pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) &= (\mathbf{D}_e + j\mathbf{D}_f)(\mathbf{I}_e - j\mathbf{I}_f) \\ &= (\mathbf{D}_e \mathbf{I}_e + \mathbf{D}_f \mathbf{I}_f) + j(\mathbf{D}_f \mathbf{I}_e - \mathbf{D}_e \mathbf{I}_f) \end{aligned}$$

e, como  $\mathbf{S}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) + j\mathbf{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{f})$ , o sistema de equações representado pela Eq. (3.6) é reescrito na forma matricial como

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_e & \mathbf{D}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) &= \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_e & \mathbf{D}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G} & -\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde, considerando-se as definições de  $\mathbf{D}_e$  e  $\mathbf{D}_f$ , é possível observar a natureza quadrática das equações que expressam a potência complexa em função da tensão nodal na forma retangular.

Para solução de problemas de fluxo de potência, utiliza-se a matriz de primeiras derivadas das equações de tensão e de balanço de potência, correspondentes à Eq. (3.7), com relação às variáveis  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{f}$ , conhecida como matriz Jacobiana. As submatrizes que compõem a matriz Jacobiana dessas equações são

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_1 &= -\mathbf{D}_e \mathbf{G} - \mathbf{D}_f \mathbf{B} - \mathbf{D}_{I_e} \\
 \mathbf{J}_2 &= -\mathbf{D}_f \mathbf{G} + \mathbf{D}_e \mathbf{B} - \mathbf{D}_{I_f} \\
 \mathbf{J}_3 &= -\mathbf{D}_f \mathbf{G} + \mathbf{D}_e \mathbf{B} + \mathbf{D}_{I_f} \\
 \mathbf{J}_4 &= \mathbf{D}_e \mathbf{G} + \mathbf{D}_f \mathbf{B} - \mathbf{D}_{I_e} \\
 \mathbf{J}_5 &= -2\mathbf{D}_e \\
 \mathbf{J}_6 &= -2\mathbf{D}_f
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde  $\mathbf{J}_1$  e  $\mathbf{J}_2$  são as submatrizes de derivadas parciais das equações de balanço de potência ativa em relação às variáveis  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{f}$ ;  $\mathbf{J}_3$  e  $\mathbf{J}_4$  são as submatrizes de derivadas parciais das equações de balanço de potência reativa em relação às variáveis  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{f}$ ; e  $\mathbf{J}_5$  e  $\mathbf{J}_6$  são as submatrizes de derivadas parciais das equações de balanço de tensão ao quadrado em relação às variáveis  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{f}$ . As submatrizes  $\mathbf{D}_{I_e}$  e  $\mathbf{D}_{I_f}$  representam matrizes diagonais cujos elementos não nulos são as componentes real e imaginária das injeções de corrente.

Agrupando as submatrizes, têm-se duas possibilidades para formação da matriz Jacobiana. A primeira possibilidade, caso o número de barras PV seja diferente de zero, possui a forma

$$\mathbf{J}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 \\ \mathbf{J}_5 & \mathbf{J}_6 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

enquanto que a segunda possibilidade é formada caso o número de barras PV seja nulo

$$\mathbf{J}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

### 3.2.4 Expansão em Série de Taylor

Para simplificação de notação, define-se o vetor  $\mathbf{x} = [\mathbf{e}^t \ \mathbf{f}^t]^t$ . Assim, o conjunto de  $2n - 2$  equações não lineares de balanço de potência ativa e reativa e balanço do quadrado da tensão, representados pela Eq. (3.7), passa a ser escrito como

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_s - \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

onde  $\mathbf{g}_s = [\mathbf{P}^{esp^t} \ \mathbf{Q}^{esp^t} \ \mathbf{V}^{esp^t}]^t$  é um vetor constante de  $2n - 2$  elementos que representa os valores especificados de potências e tensão ao quadrado; o vetor  $\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = [\mathbf{P}(\mathbf{x})^t \ \mathbf{Q}(\mathbf{x})^t \ \mathbf{V}^2(\mathbf{x})^t]^t$  representa as equações de injeção de potência ativa e reativa e as equações de tensão ao quadrado.

A expansão em série de Taylor de  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  no ponto  $\mathbf{x}_e$  na direção de um vetor de incrementos  $\mathbf{d}$  é dada por

$$\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_e) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^t\mathbf{T}\mathbf{d} \quad (3.15)$$

onde  $\mathbf{T}$  é um arranjo tridimensional  $(2n - 2) \times (2n - 2) \times (2n - 2)$ , denominado *tensor*, que representa a derivada da matriz Jacobiana com relação às variáveis. A formulação matemática pode ser dada por

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{T}$$

Quando utilizadas as coordenadas retangulares para representação das equações do fluxo de potência, estas equações tornam-se quadráticas e sua expansão possui todos os termos nulos após a derivada de segunda ordem. Tal fato não ocorre na formulação em coordenadas polares, onde a expansão em série de Taylor das equações do fluxo de potência possui infinitos termos.

Como os desbalanços devem ser nulos no ponto  $\mathbf{x} + \mathbf{d}$ , então  $\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{0}$ , fazendo com que a equação Eq. (3.15) se torne

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_e) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^t\mathbf{T}\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

Nas próximas seções serão apresentados três métodos para a solução do problema de fluxo de potência: o método clássico de Newton [40] e dois modelos tensoriais, o primeiro sendo detalhado em [39] e o

segundo foi apresentado primeiramente em [41] e mais detalhado em [8, 42]. Outros métodos de solução de fluxo de potência em coordenadas retangulares, sem a utilização de tensores, podem ser encontrados em [6, 43, 44].

### 3.3 Método de Newton

O método de Newton foi aplicado na solução do fluxo de potência pela primeira vez em 1967 por Tinney e Hart [40] para um sistema de 500 barras. Este método pode ser usado para resolver o sistema de equações algébricas não lineares  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  da Eq. (3.14). Trata-se de um método clássico, eficiente, suficientemente rápido e com pouca necessidade de armazenamento quando utilizadas técnicas de esparsidade e fatoração, porém com forte dependência dos valores iniciais adotados.

O método de Newton é iterativo e se baseia na solução da Eq. (3.15) a cada iteração  $k$ , excluindo-se o termo de segunda ordem. Assim, a equação assume a forma

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k)}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{d}^{(k)} \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{d}^{(k)}\end{aligned}$$

onde todos os termos foram definidos anteriormente. O método de Newton resume-se à solução de um sistema linear para determinação do vetor de incrementos  $\mathbf{d}$ , conforme indicado pela Eq. (3.17)

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{d}^{(k)} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (3.17)$$

Embora possam ser utilizadas estratégias para melhoria do passo, como o fator de amortecimento aplicado ao incremento para prevenção da divergência [45], neste capítulo é apresentada apenas o uso do passo pleno no método de Newton, onde todo incremento é aplicado na atualização das variáveis, na forma

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k)} \quad (3.18)$$

#### 3.3.1 Algoritmo

A solução do fluxo de potência em coordenadas retangulares via método de Newton consiste nos seguintes passos:

1. iniciar o contador de iterações  $k = 0$  e especificar um valor inicial para as variáveis:  $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{(0)} \\ \mathbf{f}^{(0)} \end{bmatrix}$
2. calcular os desbalanços de potência  $\Delta \mathbf{P}^{(k)}$  e  $\Delta \mathbf{Q}^{(k)}$  e o desbalanço de tensão  $\Delta \mathbf{V}^{(k)}$  utilizando a Eq. (3.7);
3. verificar a convergência do processo iterativo:

$$|\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})| \leq \varepsilon$$

- se a magnitude de todos os componentes de  $\Delta \mathbf{P}^{(k)}$ ,  $\Delta \mathbf{Q}^{(k)}$  e  $\Delta \mathbf{V}^{(k)}$  são menores do que a tolerância pré-especificada  $\varepsilon$ , finalizar o processo.
4. determinar a matriz Jacobiana das equações do fluxo de potência na estimativa corrente  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})$ ;
  5. resolver o sistema linear da Eq. (3.17)

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{d}^{(k)} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})$$

6. atualizar as variáveis de acordo com a Eq. (3.18)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k)}$$

7. incrementar o contador de iterações  $k = k + 1$  e retornar ao passo 2;

Caso os limites de geração de potência reativa sejam considerados, esses limites devem ser tratados no passo 2 do algoritmo apresentado. Antes do teste de convergência, as potências reativas das barras PV são analisadas. As barras cujas gerações estejam fora dos limites superior ou inferior, devem ser fixadas nos seus limites e convertidas para barras PQ, fato que ocasiona, em termos computacionais, perda do controle da tensão nestas barras. Geralmente esta metodologia não é aplicada desde a primeira iteração devido ao grande desbalanço de potência proveniente dos valores iniciais das tensões.

### 3.4 Métodos Tensoriais

Reescrevendo a Eq. (3.15)

$$\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_e) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^t\mathbf{T}\mathbf{d}$$

o arranjo tridimensional  $\mathbf{T}$  pode ser interpretado como uma sequência de  $2n - 2$  matrizes de dimensão  $(2n - 2) \times (2n - 2)$ , denotadas  $\mathbf{H}_i$ , para  $i = 1$  até  $i = 2n - 2$ , onde cada termo  $\mathbf{H}_{i,j,k} = \mathbf{T}_{i,j,k}$ , calculados no ponto  $\mathbf{x}$ . Se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores de dimensão  $2n - 2$ , o resultado do produto  $\mathbf{v}^t\mathbf{T}\mathbf{w}$  é um vetor coluna de dimensão  $(2n - 2) \times 1$  no qual o  $i$ -ésimo elemento é dado por

$$(\mathbf{v}^t\mathbf{T}\mathbf{w})_i = \mathbf{v}^t\mathbf{H}_i\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{2n-2} \sum_{k=1}^{2n-2} \mathbf{v}_j\mathbf{T}_{i,j,k}\mathbf{w}_k$$

A principal dificuldade de se utilizar o modelo tensorial apresentado na Eq. (3.15) é o cálculo do termo quadrático. A escolha intuitiva do tensor  $\mathbf{T}$  é o arranjo de segundas derivadas da função  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  calculadas no ponto  $\mathbf{x}_e$ . No entanto, o esforço computacional dispendido no cálculo das segundas derivadas parciais a cada iteração torna esta escolha inadequada, fazendo com que métodos aproximados sejam pesquisados.

#### 3.4.1 Modelo Tensorial I

Para utilizar a forma quadrática representada pelas equações de desbalanço, evitando as dificuldades mencionadas anteriormente, um tensor mais simples é estimado, o qual não requer nenhuma informação sobre a segunda derivada exata da função vetorial. O modelo quadrático correspondente a este tensor é definido de forma a interpolar pontos das funções não lineares de  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  computados nas iterações anteriores. Assim, tomando  $p$  pontos determinados previamente, tem-se os valores das variáveis denotados como  $\mathbf{x}^{(1)}$ ;  $\mathbf{x}^{(2)}$  ...  $\mathbf{x}^{(p)}$ , com correspondentes valores da função vetorial  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(1)})$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(2)})$  ...  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(p)})$ . O modelo quadrático deve satisfazer a condição

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}_k + \frac{1}{2}\mathbf{s}_k^t\mathbf{T}\mathbf{s}_k = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

onde  $\mathbf{s}_k = \mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}$ , para  $k = 1, \dots, p$  é o vetor previamente calculado de variação incremental e  $\mathbf{x}^{(k-1)}$  é o ponto calculado na iteração  $(k - 1)$ .

Segundo [39], o tensor  $\mathbf{T}$  é aproximado por

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^p \mathbf{s}_k \mathbf{a}_k \mathbf{s}_k^t \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{a}_k$  é a  $k$ -ésima coluna da matriz  $\mathbf{A}$ , definida por  $\mathbf{A} = \mathbf{Z}\mathbf{M}^{-1}$ ;  $\mathbf{M}$  é uma matriz definida positiva de dimensões  $p \times p$  com componentes  $M_{ij} = (\mathbf{s}_i^t \mathbf{s}_j)^2$ ; e  $\mathbf{Z}$  é uma matriz  $(2n - 2) \times p$ , cujas colunas são os vetores  $\mathbf{z}_k$  dados por

$$\mathbf{z}_k = 2 \left( \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_k) - \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}_k \right), \quad k = 1, \dots, p \quad (3.21)$$

A substituição da Eq. (3.20) na Eq. (3.15) fornece

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \left( \sum_{k=1}^p \mathbf{s}_k \mathbf{a}_k \mathbf{s}_k^t \right) \mathbf{d} \quad (3.22)$$

Alternativamente, a Eq. (3.22) pode ser expressa por um sistema de  $2n - 2$  equações quadráticas

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \{\mathbf{S}^t \mathbf{d}\}^2 = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

onde

$$\mathbf{A} \{\mathbf{S}^t \mathbf{d}\}^2 = \sum_{k=1}^p \mathbf{a}_k (\mathbf{d}^t \mathbf{s}_k)^2$$

sendo  $\mathbf{A}$  uma matriz de dimensão  $(2n - 2) \times p$  com suas colunas representadas por  $\mathbf{a}_k$ . A matriz  $\mathbf{S}$  possui dimensão  $(2n - 2) \times p$  com colunas  $\mathbf{s}_k$  e  $\{\mathbf{S}^t \mathbf{d}\}^2$  é um vetor de ordem  $p$  cujo  $i$ -ésimo elemento é  $\{\mathbf{S}^t \mathbf{d}\}_i^2 = (\mathbf{d}^t \mathbf{s}_i)^2$ .

A solução da Eq. (3.23) é obtida por meio da pré multiplicação desta equação por  $\mathbf{S}^t \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1}$ , ou seja

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^t \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{S}^t \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{S}^t \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \mathbf{A} \{\mathbf{S}^t \mathbf{d}\}^2 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^t \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{S}^t \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{S}^t \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \mathbf{A} \{\mathbf{S}^t \mathbf{d}\}^2 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Adotando, por simplicidade de notação, que  $\beta = \mathbf{S}^t \mathbf{d}$  seja um vetor com  $p$  componentes  $\beta_k = \mathbf{s}_k^t \mathbf{d}$  para  $k = 1, \dots, p$  e  $\beta^2$  é um vetor de ordem  $p$  calculado da mesma forma que  $\{\mathbf{S}^t \mathbf{d}\}^2$ , a equação anterior pode ser reescrita como

$$\mathbf{S}^t \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) + \beta + \frac{1}{2} \mathbf{S}^t \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \mathbf{A} \beta^2 = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

Para o cálculo da variação incremental  $\mathbf{d}$  é necessário resolver, a cada iteração, a Eq. (3.24) para determinar o vetor  $\beta$  e então estimar o termo quadrático

$$\frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{T} \mathbf{d} \approx \frac{1}{2} \mathbf{A} \beta^2 \quad (3.25)$$

Assim, a Eq. (3.23) pode ser reescrita como

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \beta^2 = \mathbf{0}, \quad (3.26)$$

requerendo a solução de dois sistemas lineares. O primeiro sistema é o mesmo do método de Newton apresentado na seção anterior, reescrito a seguir

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{d}_n = -\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (3.27)$$

onde o sub índice  $n$  acrescentado no valor do incremento  $\mathbf{d}$  passa a ser utilizado para identificar a parcela de incremento relativo ao método de Newton, diferenciando-a da parcela relacionada ao termo Tensorial. O segundo sistema linear é baseado em uma estimativa do termo quadrático do modelo tensorial, o qual é obtido por meio da interpolação de  $p$  direções previamente selecionadas, ou seja,

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{d}_t = -\frac{1}{2} \mathbf{A} \beta^2 \quad (3.28)$$

A variação incremental obtida utilizando o termo de segunda ordem é denotada como  $\mathbf{d}_t$ , e o incremento total por iteração é dada por

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t$$

De acordo com [46, 47], a interpolação de apenas dois pontos é suficiente para construir um modelo tensorial preciso com um baixo custo computacional. Desta forma, a interpolação dos pontos  $\mathbf{x}^{(k-1)}$  e

$\mathbf{x}^{(k)}$ , com direção de busca a  $\mathbf{s}_k = \mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}$ , requer a solução de uma equação de segunda ordem expressa por

$$c_0 + c_1\beta + c_2\beta^2 = 0 \quad (3.29)$$

onde, devido a interpolação de apenas dois pontos,  $\beta$  assume a forma de um escalar e

$$\begin{aligned} c_0 &= \mathbf{s}_k^t \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ c_1 &= 1 \\ c_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{s}_k^t \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \mathbf{a}_k \end{aligned} \quad (3.30)$$

Se a Eq. (3.29) possuir raízes reais, a direção  $\mathbf{d}_t$  é calculada utilizando-se a menor das raízes. No entanto, caso as raízes não sejam reais, apenas a direção  $\mathbf{d}_n$ , obtida pelo método de Newton, é adotada na iteração corrente.

### 3.4.2 Modelo Tensorial II

Esta subseção apresenta uma alternativa ao cálculo do termo tensorial necessário para a obtenção do termo de segunda ordem [8, 41]. Reescrevendo o sistema de equações do fluxo de potência na forma compacta expresso pela Eq. (3.14), temos

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_s - \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.31)$$

em que todos os termos foram definidos anteriormente.

Devido às suas características, o termo  $\mathbf{g}_0(\mathbf{x})$  pode ser representado por uma forma quadrática [6] como

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{T} \mathbf{x} \quad (3.32)$$

Comparando-se os termos quadráticos da Eq. (3.32) com o termo da expansão em série de Taylor dada pela Eq. (3.16), tem-se

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{d}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{T} \mathbf{d} \quad (3.33)$$

onde observa-se que, se a direção  $\mathbf{d}$  é conhecida, é possível estimar com precisão o termo de segunda ordem da expansão em série de Taylor de  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ . Além disso, verifica-se que a expressão  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{d} + \mathbf{g}_0(\mathbf{d})$  repre-

senta de forma exata a variação da função  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  ao longo da direção  $\mathbf{d}$ .

A determinação exata do termo quadrático da Eq. (3.33) requer o valor preciso da variação incremental  $\mathbf{d}$ , o que é possível apenas ao final da iteração. Entretanto, a variação incremental calculada em uma iteração é predominantemente composta por uma direção baseada no modelo linear de Newton representado pela Eq. (3.17). Esta direção pode ser utilizada para estimar com razoável precisão o termo quadrático e calcular a direção  $\mathbf{d}_t$ , dada pela solução de um segundo sistema linear

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{d}_t = \mathbf{g}_0(\mathbf{d}_n) \quad (3.34)$$

### 3.4.3 Critério de Escolha e Algoritmo

A escolha do incremento  $\mathbf{d}$  a ser adotado a cada iteração é baseada nas estimativas da função  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d})$ , calculada com e sem o termo de segunda ordem. O procedimento adotado para esta escolha pode ser sumarizado nos passos:

- cálculo de  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}_n)$  e  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)} + (\mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t))$ , e identificação dos componentes de maior magnitude destas funções, denotados por  $|g_{i_n}|$  e  $|g_{i_{nt}}|$ , respectivamente;
- comparação dos componentes  $|g_{i_n}|$  e  $|g_{i_{nt}}|$ :
  - se  $|g_{i_n}| \leq |g_{i_{nt}}|$  então apenas a direção fornecida pelo método de Newton é adotada, ou seja,  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_n$
  - se  $|g_{i_n}| > |g_{i_{nt}}|$  então a direção fornecida pelo modelo tensorial também é utilizada, ou seja,  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t$

As equações (3.25) e (3.33) fornecem diferentes formas de cálculo do termo quadrático do modelo tensorial, que é a principal diferença entre os dois modelos tensoriais apresentados. Em ambos os casos, o cálculo da direção tensorial requer poucos cálculos além dos realizados no método de Newton. A eficiência dos métodos tensoriais depende da forma com que o termo de segunda ordem é calculado. Resultados numéricos demonstram que a forma quadrática da função  $\mathbf{g}_0(\mathbf{x})$  apresentou melhor desempenho na estimação do termo de segunda ordem utilizando o método Tensorial II quando comparado que o método Tensorial I, apresentando, em geral, menor número de iterações e tempo de processamento, conforme demonstrado em [8].

A aplicação dos métodos tensoriais pode ser resumida nos passos descritos a seguir.

1. iniciar o contador de iterações  $k = 0$ , especificar o valor inicial para as variáveis  $\mathbf{x}^{(0)}$  e inicializar o valor dos incrementos com  $\mathbf{d}_n = \mathbf{d}_t = \mathbf{0}$ ;
2. calcular o vetor de desbalanços  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})$  por meio da Eq. (3.14);
3. verificar a convergência do processo iterativo:

$$|\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})| \leq \varepsilon$$

- se a magnitude de todos os componentes de  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})$  são menores do que a tolerância pré-especificada  $\varepsilon$ , finalizar o processo.
4. determinar a matriz Jacobiana das equações do fluxo de potência na estimativa corrente  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})$ ;
  5. determinar a direção  $\mathbf{d}_n$  resolvendo o sistema linear da Eq. (3.27)

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{d}_n = -\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k)})$$

6. escolher o modelo tensorial a ser utilizado:
  - Modelo Tensorial I: calcular as raízes da Eq. (3.29), estimar o termo quadrático utilizando a Eq. (3.25) e determinar a direção  $\mathbf{d}_t$  por meio da Eq. (3.28);
  - Modelo Tensorial II: estimar o termo quadrático utilizando a Eq. (3.33) e determinar a direção  $\mathbf{d}_t$  por meio da Eq. (3.34).
7. definir a variação incremental:  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_n$  ou  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t$ , conforme critério apresentado anteriormente;
8. atualizar as variáveis de acordo com a Eq. (3.18)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}$$

incrementar o contador de iterações  $k = k + 1$  e retornar ao passo 2;

Destaca-se o fato de que, como em todos os algoritmos para solução de equações não lineares, o uso de modelos tensoriais em todas as iterações pode ocasionar falha na convergência se a condição inicial localiza-se distante do ponto de solução.

### 3.5 Exemplo Numérico do Uso de Tensores

O uso dos métodos tensoriais pode ser exemplificado pela determinação das raízes de uma função escalar simples  $g(x) = 1 - x^2$ . A tabela 1 mostra a sequência de cálculos necessários para as duas primeiras iterações por meio dos métodos de Newton (MN) e método Tensorial I (MTI) e II (MTII). A estimativa inicial utilizada para a variável foi  $x^{(0)} = 2$ . A iteração (0) apresenta valores comuns a todos os métodos,  $g_0(x)$  and  $J(x)$  denotam respectivamente a função quadrática ( $x^2$ ) e a matriz Jacobiana ( $-2x$ ) da equação  $g(x)$ , respectivamente.

Tabela 1 – Exemplo numérico

Iter.	MN	MT1	MT2
(0)	$g(x) = 1 - x^2$ $x^{(0)} = 2, 0$	$g_0(x) = x^2$ $g(x^{(0)}) = -3, 0$	$J(x) = -2x$ $J(x^{(0)}) = -4, 0$
(1)	$d_n^{(0)} = -0, 75$ $x^{(1)} = 1, 25$ $g(x^{(1)}) = -0, 5625$	$d_n^{(0)} = -0, 75$ $x^{(1)} = 1, 25$ $g(x^{(1)}) = -0, 5625$	$d_n^{(0)} = -0, 75$ $g_0(d_n^{(0)}) = 0, 5625$ (Eq. (3.33)) $d_t^{(0)} = -0, 1406$ (Eq. (3.34)) $d^{(0)} = d_n^{(0)} + d_t^{(0)} = -0, 8906$ $x^{(1)} = 1, 1094$ $g(x^{(1)}) = -0, 2308$
(2)	$J(x^{(1)}) = -2, 5$ $d_n^{(1)} = -0, 225$ v $x^{(2)} = 1, 025$ $g(x^{(2)}) = -0, 0506$	$J(x^{(1)}) = -2, 5$ $d_n^{(1)} = -0, 225$ $s_1 = 0, 75$ $z_1 = -1, 125$ (Eq. (3.21)) $a_1 = -1, 125/(0, 75)^2 = -2, 0$ Equação quadrática: $a = 0, 1688, b = 1, 0$ e $c = 0, 300$ (Eq. (3.30)) $\beta = -0, 1783$ $d_t^{(1)} = -0, 0127$ (Eq. (3.28)) $d^{(1)} = d_n^{(1)} + d_t^{(1)} = -0, 2377$ $x^{(2)} = 1, 0123$ $g(x^{(2)}) = -0, 0247$	$J(x^{(1)}) = -2, 2188$ $d_n^{(1)} = -0, 1040$ $g_0(d_n^{(1)}) = 0, 0108$ (Eq. (3.33)) $d_t^{(1)} = -0, 0049$ (Eq. (3.34)) $d^{(1)} = d_n^{(1)} + d_t^{(1)} = -0, 1089$ $x^{(1)} = 1, 0005$ $g(x^{(1)}) = -0, 001$

Na primeira iteração, o método de Newton fornece  $x^{(1)} = 1,25$ , valor para o qual tem-se  $g(x^{(1)}) = -0,5625$ . Como não existem pontos suficientes para realizar a interpolação necessária para a aplicação do método Tensorial I, a direção de busca do método de Newton é utilizada nesta iteração. Com o cálculo adicional envolvendo  $g_0(d_n^{(0)})$  e a solução do sistema linear com a matriz Jacobiana calculada na primeira iteração, o método Tensorial II fornece  $x^{(1)} = 1,1094$  e  $g(x^{(1)}) = -0,2308$ , representando a solução mais próxima da raiz de  $g(x)$  dentre os métodos comparados.

Na segunda iteração, a aplicação dos métodos de Newton e Tensorial II fornecem respectivamente  $x^{(2)} = 1,025$  ( $g(x^{(2)}) = -0,0506$ ) e  $x^{(1)} = 1,0005$  ( $g(x^{(1)}) = -0,001$ ), enquanto que o método Tensorial I fornece  $x^{(2)} = 1,0123$  ( $g(x^{(2)}) = -0,0247$ ). Os resultados demonstram como os cálculos adicionais necessários aos modelos tensoriais podem melhorar o caminho para a convergência. O melhor desempenho do método Tensorial II pode ser atribuído ao cálculo mais preciso do termo tensorial e a característica quadrática da função utilizada. O incremento baseado no termo quadrático dos métodos tensoriais adicionado ao passo obtido pelo modelo linear permite a obtenção de pontos mais próximos às raízes, quando comparado ao incremento obtido apenas com o método de Newton.

A trajetória da primeira iteração, resultante da aplicação dos métodos de Newton e Tensorial II pode ser ilustrada graficamente com o auxílio da Figura 4. A aproximação linear da função  $g(x)$  em  $x^{(0)}$  é representada pela equação  $f = -4x + 5$ . A direção utilizada no modelo tensorial é a mesma adotada pelo método de Newton, ou seja, possui a mesma derivada da função  $g(x)$ , mas a modificação no seu módulo deixa o ponto mais próximo da raiz. Isto indica que o passo tensorial é o melhor para ser adotado na iteração corrente.

### 3.6 Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas as equações básicas do fluxo de potência, sendo elemento fundamental para a solução do problema de fluxo de potência ótimo. A formulação em coordenadas retangulares permite que as equações do fluxo de potência possam fazer uso do termo de segunda ordem de forma mais simples quando comparada à formulação em coordenadas polares. Além disso, são apresentadas três formas de solução para esse conjunto de equações: o método de Newton e dois métodos tensoriais.

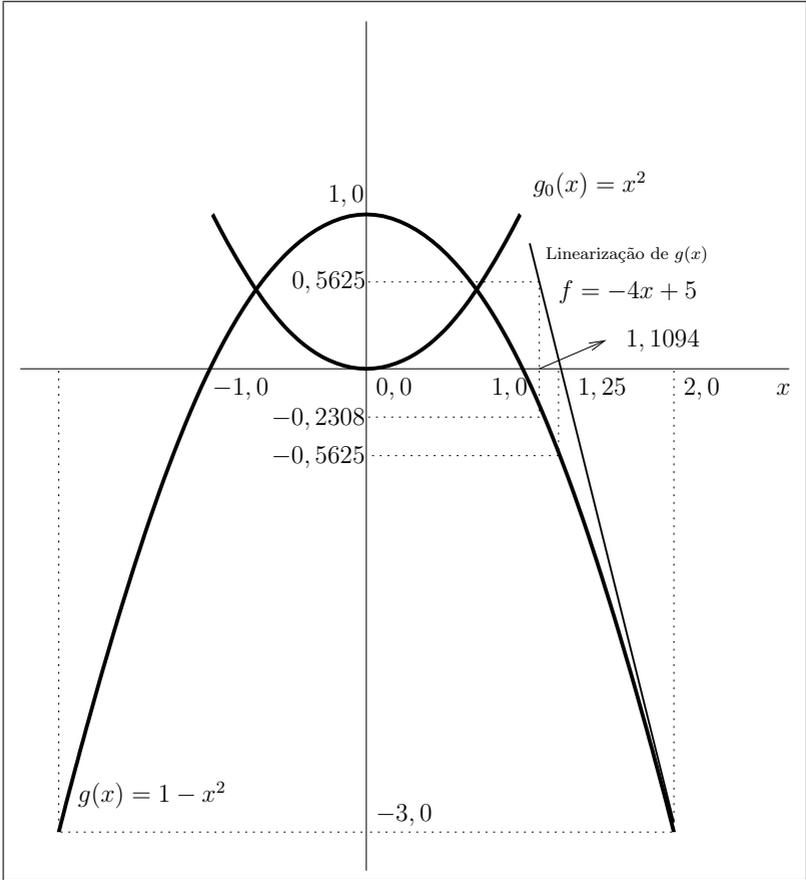


Figura 4 – Interpretação geométrica do modelo tensorial

O método Tensorial II apresenta cálculos mais simples e em menor quantidade quando comparado ao método Tensorial I, considerando-se a partir da segunda iteração. A eficácia dos modelos tensoriais é demonstrada com um exemplo simples, destacando-se o método Tensorial II. Embora essa vantagem possa não existir em todas as iterações ou para todas as funções, este modelo apresenta-se como uma alternativa relativamente simples e eficaz para ajudar a convergência do processo iterativo.



## 4 O MÉTODO DIRETO PROPOSTO

### 4.1 Introdução

A margem de carregamento de um sistema de potência é definida como a diferença entre os níveis de demanda corrente e máxima para o qual as equações do fluxo de potência possuem solução real. O conhecimento da margem de carregamento admissível para um determinado sistema permite que os operadores realizem procedimentos de modo a manter o sistema operando de forma segura. A obtenção do ponto de máximo carregamento por meio dos métodos diretos pode ser feita formulando-se um problema de otimização, no qual o parâmetro de carga e os multiplicadores de Lagrange são considerados em conjunto com as variáveis tradicionais do problema de fluxo de potência.

Este trabalho propõe uma metodologia para a determinação direta do ponto de carregamento crítico, o que significa a obtenção do máximo carregamento sem a necessidade de soluções do fluxo de potência em carregamentos intermediários entre o base e o crítico. A obtenção deste ponto é formulada como um problema de otimização estática, o qual é resolvido diretamente fazendo uso do método de Newton e por meio de uma extensão deste método, utilizando informações de segunda ordem descritas no capítulo anterior e consideradas de duas formas de parametrização, uma linear e outra quadrática. Propõe-se também uma nova forma de estimativa inicial para os multiplicadores de Lagrange e uma nova modelagem para o problema de otimização, com o intuito de reduzir casos de não convergência. As equações do fluxo de potência são expressas em coordenadas retangulares, visando um melhor aproveitamento das características quadráticas dessas equações.

Com essa fundamentação, são abordados também os seguintes temas: estimativas iniciais para os multiplicadores de Lagrange; previsão de potência reativa gerada a cada iteração; decomposição do sistema linear; obtenção do vetor tangente em métodos diretos; cálculo dos autovetores à direita e à esquerda e suas relações de sensibilidade e determinação da curva PV.

### 4.1.1 Instabilidade de Tensão

Durante a operação dos sistemas elétricos de potência, o crescimento demasiado da carga pode provocar problemas de instabilidade de tensão, condição na qual o nível da magnitude da tensão assume valores intoleráveis e de difícil controle, com risco de variações excessivamente bruscas, caracterizando o chamado colapso de tensão [4, 48]. A partir deste ponto, as equações do fluxo de potência não possuem mais solução real, razão pela qual é importante conhecer a distância do ponto de operação corrente às regiões limites de estabilidade de tensão, pois permite determinar as medidas preventivas ou corretivas adequadas para manter a rede elétrica no modo de operação seguro com relação à estabilidade de tensão.

Diversos aspectos da instabilidade de tensão tem sido explicados com base na Teoria da Bifurcação de sistemas não lineares. Três tipos de bifurcações locais estão associadas ao colapso de tensão [49]: a bifurcação sela-nó, bifurcação de Hopf e singularidade induzida. Na bifurcação sela-nó, a matriz Jacobiana das equações algébrica-diferenciais, que representam o sistema de equações, é singular [50]. Em [51] demonstra-se que o uso de um modelo estático para determinar os pontos de bifurcação sela-nó, não afeta a margem de carregamento do sistema. Este argumento é empregado para validar o uso das equações da rede em regime permanente em estudos de estabilidade de tensão. A bifurcação de Hopf caracteriza-se pela presença de um par de autovalores complexos da matriz Jacobiana cruzando o eixo imaginário em um ponto fora da origem, o que resulta em soluções oscilatórias em torno do ponto de equilíbrio [49]. A singularidade induzida é um tipo de bifurcação que ocorre quando um ponto de equilíbrio está sujeito à ocorrência simultânea de singularidade das equações algébricas e mudança da condição de estabilidade, por efeito de uma determinada variável do sistema atingir o seu limite. De uma forma geral, a bifurcação representa um estado específico no qual a qualidade da solução varia acentuadamente e, como aspecto mais crucial, a estabilidade do sistema é perdida.

### 4.1.2 Breve Histórico

Vários métodos básicos de determinação do ponto de demanda crítica podem ser encontrados na literatura, sendo os diferentes tipo dos

Métodos da Continuação e Diretos as classes de métodos mais utilizadas para esta finalidade.

No Método da Continuação [52–56] são realizadas sucessivas soluções do problema de fluxo de potência para valores crescentes de demanda, a partir de uma solução base, até uma condição de demanda crítica. Esta estratégia permite traçar a curva PV das barras do sistema, como um complemento da sequência de soluções. Adicionalmente, o vetor tangente de predição, que representa a sensibilidade das variáveis do fluxo de potência com relação ao parâmetro de carga, é obtido como um subproduto do processo computacional, cujo esforço é reduzido utilizando-se técnicas apresentadas em [57]. Uma formulação do Método da Continuação utilizando coordenadas retangulares, modelos tensoriais, redespacho de potência ativa e demanda variável com a tensão pode ser observada em [41, 58]. Em geral, o Método da Continuação apresenta dificuldade de obtenção de solução em pontos muito próximos da condição de carregamento crítico devido à singularidade da matriz Jacobiana e à necessidade de redução do tamanho do passo nas proximidades desta condição, comprometendo a precisão da solução.

Em [59, 60] são apresentados métodos diretos para a determinação da distância mínima de uma solução base ao ponto de carregamento crítico. Esses métodos são baseados no uso do vetor normal à superfície limite da região das soluções viáveis das equações do fluxo de potência e nas técnicas convencionais de determinação da margem de demanda. As soluções de carregamento crítico fornecidas por essas abordagens não adotam um padrão específico de variação incremental de carga, o que as diferem das abordagens onde o carregamento crítico é obtido segundo uma direção de variação da demanda considerada a priori, como é o caso da metodologia proposta no presente trabalho. A contribuição mais importante dessas abordagens está na interpretação teórica do problema de determinação da demanda crítica. Porém, são apresentados resultados numéricos apenas para sistemas de porte muito reduzido, sendo questionável a sua aplicação a sistemas reais.

A referência [61] propõe a determinação da margem de carregamento como solução das equações que representam as condições de transversalidade. Um esquema de decomposição na matriz de coeficientes do sistema linear resolvido a cada iteração do método de Newton é aplicado, o que aumenta a rapidez do processo computacional, constituindo a maior vantagem desta abordagem. Entretanto, o uso apenas de informações de primeira ordem de um modelo linearizado a cada iteração faz com que esta metodologia apresente os mesmos problemas das técnicas baseadas no método de Newton com relação à estimativa

inicial. As soluções de carregamento crítico obtidas com a utilização desta abordagem são semelhantes às aquelas determinadas por meio da estratégia apresentada neste trabalho.

Diversas estratégias baseadas em relações de sensibilidade têm sido propostas para estabelecer alternativas de controle visando maximizar a distância ao limite de estabilidade de tensão [62, 63]. Em [64], mostra-se uma derivação formal de fatores de sensibilidade da margem de carga em relação a uma variedade de parâmetros. A referência [65] propõe o uso de relações de sensibilidade para selecionar contingências, modeladas por meio de uma função homotopia. A referência [66] apresenta uma metodologia baseada no fluxo de potência ótimo, com restrições de desigualdade selecionadas, para maximizar a distância ao ponto de colapso de tensão. Em [67], uma técnica heurística baseada em relações de sensibilidade é usada para determinar as ações de controle efetivas para assegurar um aumento de demanda num intervalo de tempo pré-especificado. Em todas essas estratégias, as relações de sensibilidade são calculadas como um complemento do processo computacional e utilizadas para estabelecer soluções, tanto preventivas quanto corretivas.

## **4.2 O Problema de Máximo Carregamento**

Neste trabalho foi implementado um método direto para solução do problema de máximo carregamento, considerando um modelo estático de representação da demanda como potência constante e que a solução do fluxo de potência correspondente ao nível crítico de carregamento é caracterizada como um ponto de bifurcação sela-nó. Não foram considerados taps variáveis e as potências ativas geradas foram assumidas como constantes, com exceção da barra de folga, o que caracteriza um cenário pessimista de condições de máximo carregamento. As metodologias apresentadas são formuladas em coordenadas retangulares e utilizam os conceitos e definições apresentados nos Capítulos 2 e 3.

### **4.2.1 Formulação Analítica**

Para a formulação do problema de máximo carregamento, considera-se a maximização do parâmetro de carregamento  $\rho$  e que todas as demandas dos sistemas são aumentadas na mesma proporção. A

demanda de cada barra é parametrizada da maneira convencional [54], sendo que os termos relativos às demandas de potência ativa e reativa são descritos como

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_d &= \mathbf{P}_d^0 + \rho \Delta \mathbf{P}_d \\ \mathbf{Q}_d &= \mathbf{Q}_d^0 + \rho \Delta \mathbf{Q}_d \end{aligned} \quad (4.1)$$

em que  $\mathbf{P}_d^0$  e  $\mathbf{Q}_d^0$  são vetores que representam, respectivamente, as demandas de potência ativa e reativa correspondentes ao caso base;  $\Delta \mathbf{P}_d$  e  $\Delta \mathbf{Q}_d$  são vetores que representam as taxas de variação pré-especificadas das demandas de potência ativa e reativa. O parâmetro da carga foi adotado de forma única para o sistema, enquanto que a demanda de cada barra tem a sua taxa de variação individual, a qual pode inclusive ser nula. Assim, as equações de balanço de potência na  $i$ -ésima barra são dadas por

$$\begin{aligned} P_{gi} - (P_{di}^0 + \rho \Delta P_{di}) - P_i(e, f) &= 0 \\ Q_{gi} - (Q_{di}^0 + \rho \Delta Q_{di}) - Q_i(e, f) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

A determinação da máxima demanda a ser suprida pode ser formulada como um problema de otimização expresso pela Eq. (4.3)

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} && \rho \\ &\text{sujeito a} && P_{gi} - (P_{di}^0 + \rho \Delta P_{di}) - P_i(e, f) = 0 \quad (\text{barras PV e PQ}) \\ & && Q_{gi} - (Q_{di}^0 + \rho \Delta Q_{di}) - Q_i(e, f) = 0 \quad (\text{barras PQ}) \\ & && V_i^{esp^2} - e_i^2 - f_i^2 = 0 \quad (\text{barras PV}) \\ & && Q_{gi}^m \leq Q_{gi} \leq Q_{gi}^M \quad (\text{barras PV}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde os sobrescritos  $m$  e  $M$  caracterizam valores mínimos e máximos, respectivamente, das grandezas a que se referem e os demais termos foram definidos anteriormente.

Por simplicidade de notação, os termos da Eq. (3.14) são redefinidos, de modo que o termo  $\mathbf{g}_s$  se torna a diferença entre a geração de potência e a demanda parametrizada e valores especificados das tensões ao quadrado, caso existam barras PV. Assim,  $\mathbf{g}_s$  passa a ser dependente do parâmetro de carga e  $\mathbf{g}_0(\mathbf{x})$  permanece representando as equações de injeções de potência ativa e reativa e de tensão ao quadrado, ou seja

$$\mathbf{g}_s(\rho) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_g - (\mathbf{P}_d^0 + \rho \Delta \mathbf{P}_d) \\ \mathbf{Q}_g - (\mathbf{Q}_d^0 + \rho \Delta \mathbf{Q}_d) \\ \mathbf{V}^{esp^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(e, f) \\ \mathbf{Q}(e, f) \\ \mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

fazendo com que a expressão de desbalanço seja dependente também do parâmetro de carga, tornando-a  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \rho) = \mathbf{g}_s(\rho) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x})$ . Conforme será explicado em seção subsequente, a geração de potência reativa gerada em cada barra PV é dependente de  $\mathbf{x}$  e  $\rho$ , assim, a inequação presente na Eq. (4.3) pode ser representada na forma vetorial por  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \rho) \leq \mathbf{0}$ , sendo

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \rho) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_g^m - \mathbf{Q}_g \\ \mathbf{Q}_g - \mathbf{Q}_g^M \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

A maximização do carregamento pode ser definida como um problema de minimização do negativo do parâmetro  $\rho$  como função objetivo, fornecendo um problema na forma compacta como

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && -\rho \\ &\text{sujeito a} && \mathbf{g}(\mathbf{x}, \rho) = \mathbf{0} \\ &&& \mathbf{h}(\mathbf{x}, \rho) \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.6)$$

#### 4.2.2 Condições de Otimalidade

Na metodologia apresentada neste trabalho, os limites de potência reativa gerada relativos às restrições de desigualdade da Eq. (4.6) são tratados separadamente, conforme apresentada em subseção posterior. Assim, considerando apenas as restrições de igualdade do problema a ser otimizado, a função Lagrangeana do mesmo pode ser representada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \rho, \boldsymbol{\lambda}) &= -\rho + \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{g}(\mathbf{x}, \rho) \\ &= -\rho + \boldsymbol{\lambda}^t [\mathbf{g}_s(\rho) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x})] \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange correspondentes às restrições de igualdade  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \rho)$ . Para encontrar uma solução ótima, é necessário que as derivadas da função Lagrangeana em relação a cada uma das variáveis sejam nulas. Fazendo-se uso das definições da Eq. (4.4), forma-se o conjunto de equações não lineares

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \rho, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} = -\mathbf{J}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} \quad (4.8a)$$

$$\nabla_{\rho} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \rho, \boldsymbol{\lambda}) = 0 = -(1 + \mathbf{r}^t \boldsymbol{\lambda}) \quad (4.8b)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \rho, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} = [\mathbf{g}_s(\rho) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x})] \quad (4.8c)$$

Para simplificação do desenvolvimento das equações, apresentado adiante, os sinais do sistema de equações anterior é alterado, fornecendo

$$\nabla_x \mathcal{L}(\mathbf{x}, \rho, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} = \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} \quad (4.9a)$$

$$\nabla_\rho \mathcal{L}(\mathbf{x}, \rho, \boldsymbol{\lambda}) = 0 = (1 + \mathbf{r}^t \boldsymbol{\lambda}) \quad (4.9b)$$

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}(\mathbf{x}, \rho, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} = -[\mathbf{g}_s(\rho) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x})] \quad (4.9c)$$

onde  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  é a matriz Jacobiana das equações  $\mathbf{g}_0(\mathbf{x})$  com relação às variáveis do vetor  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{r}$  é um vetor que representa as taxas de variação de demanda, ou seja,

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P}_d \\ \Delta \mathbf{Q}_d \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P}_d \\ \Delta \mathbf{Q}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

sendo utilizada a primeira forma apresentada caso o sistema não possua barras PV e a segunda caso possua este tipo de barras.

A Eq. (4.9) pode ser vista como uma forma alternativa de representar as condições de transversalidade e, portanto, a solução de máximo carregamento pode ser interpretada como um ponto de bifurcação ou de reversão [68]. Ainda com relação a Eq. (4.9), as seguintes considerações podem ser feitas:

- dado que a variação da demanda  $\mathbf{r}$  é um vetor não nulo, a equação  $(1 + \mathbf{r}^t \boldsymbol{\lambda}) = 0$  garante que o vetor dos multiplicadores de Lagrange também não será nulo no ponto de máximo carregamento;
- garantida a não nulidade do vetor  $\boldsymbol{\lambda}$ , a equação  $\mathbf{J}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$  indica que o transposto da matriz Jacobiana do fluxo de carga é singular no ponto de carregamento crítico;
- a equação  $-\mathbf{g}_s(\rho) + \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  garante que as equações do fluxo de potência são satisfeitas no ponto de máximo carregamento do sistema.

A não nulidade dos multiplicadores de Lagrange pode, alternativamente, ser representada pela equação  $\boldsymbol{\lambda}^t \boldsymbol{\lambda} = 1$  [69, 70], a qual resulta numa solução com os multiplicadores de Lagrange normalizados e pode aumentar a estabilidade numérica do processo iterativo [68].

### 4.3 Métodos de Solução

Formulado o problema de máximo carregamento e as condições a serem satisfeitas, esta seção apresenta duas alternativas de solução. A primeira se baseia na abordagem clássica do método de Newton, enquanto que a segunda abordagem faz uso de informações de segunda ordem das equações.

Nesta seção, faz-se uso das definições utilizadas no capítulo anterior sobre a modelagem do termo de segunda ordem. As funções  $\mathbf{g}_0(\mathbf{x})$ , que representam as equações de injeção de potência, podem ser representadas por uma função quadrática [45]

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{T} \mathbf{x} \quad (4.10)$$

e, conforme definido anteriormente, suas derivadas de primeira e segunda ordem são dadas por

$$\frac{\partial \mathbf{g}_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{T} \mathbf{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{g}_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{T} \quad (4.11)$$

Para solucionar as equações de otimalidade é necessária a expansão em série de Taylor da Eq. (4.9) no ponto  $(\mathbf{x}_e^t, \rho_e, \boldsymbol{\lambda}_e^t)$ , na direção  $(\Delta \mathbf{x}^t, \Delta \rho, \Delta \boldsymbol{\lambda}^t)$ . Para facilitar o desenvolvimento, cada equação representada por meio da Eq. (4.9) é expandida individualmente. Os termos nulos da expansão em série de Taylor foram omitidos das expressões a seguir.

A Eq.(4.9a) é expandida na forma

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L} = \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t \boldsymbol{\lambda}_e + & \left[ \frac{\partial(\nabla_x \mathcal{L})}{\partial \mathbf{x}} \quad \frac{\partial(\nabla_x \mathcal{L})}{\partial \rho} \quad \frac{\partial(\nabla_x \mathcal{L})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \rho \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^t & \Delta \rho & \Delta \boldsymbol{\lambda}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2(\nabla_x \mathcal{L})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2(\nabla_x \mathcal{L})}{\partial \mathbf{x} \partial \rho} & \frac{\partial^2(\nabla_x \mathcal{L})}{\partial \mathbf{x} \partial \boldsymbol{\lambda}} \\ \frac{\partial^2(\nabla_x \mathcal{L})}{\partial \rho \partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2(\nabla_x \mathcal{L})}{\partial \rho \partial \rho} & \frac{\partial^2(\nabla_x \mathcal{L})}{\partial \rho \partial \boldsymbol{\lambda}} \\ \frac{\partial^2(\nabla_x \mathcal{L})}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2(\nabla_x \mathcal{L})}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial \rho} & \frac{\partial^2(\nabla_x \mathcal{L})}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial \boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \rho \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Como a expressão a ser derivada é independente do parâmetro de carregamento, todas as derivadas da Eq. (4.12) com relação a  $\rho$  são nulas.

Devido ao uso de coordenadas retangulares, a matriz Jacobiana é linear em relação à  $\mathbf{x}$  e sua derivada fornece um tensor constante

$$\frac{\partial(\nabla_x \mathcal{L})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\mathbf{J}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{T}$$

fazendo com que a expressão  $\frac{\partial(\mathbf{J}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}}$  possa ser reescrita como  $\boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{T} = \mathbf{G}_0(\boldsymbol{\lambda})$ , sendo que  $\mathbf{G}_0(\boldsymbol{\lambda}_e)$  é uma matriz simétrica que representa a segunda derivada de  $\mathbf{g}_0(\mathbf{x})$  calculada no ponto onde é feita a expansão.

Como a expressão  $\mathbf{J}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda}$  é linear em relação a  $\mathbf{x}$  e também linear em relação à  $\boldsymbol{\lambda}$ , a matriz do último elemento da Eq. (4.12) torna-se

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta x}^t & \Delta \rho & \boldsymbol{\Delta \lambda}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta x} \\ \Delta \rho \\ \boldsymbol{\Delta \lambda} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Assim, a Eq. (4.12) pode ser reescrita como

$$\nabla_x \mathcal{L} = \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t \boldsymbol{\lambda}_e + \mathbf{G}_0(\boldsymbol{\lambda}) \boldsymbol{\Delta x} + \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\Delta \lambda} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Delta x}^t \mathbf{T} \boldsymbol{\Delta \lambda} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Delta \lambda}^t \mathbf{T} \boldsymbol{\Delta x} \quad (4.14)$$

onde  $\boldsymbol{\Delta \lambda}^t \mathbf{T} \boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{\Delta x}^t \mathbf{T} \boldsymbol{\Delta \lambda} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\Delta x})^t \boldsymbol{\Delta \lambda}$ , fazendo com que a equação anterior possa ser representada por uma expressão mais compacta

$$\nabla_x \mathcal{L} = \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t \boldsymbol{\lambda}_e + \mathbf{G}_0(\boldsymbol{\lambda}) \boldsymbol{\Delta x} + \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\Delta \lambda} + \mathbf{J}(\boldsymbol{\Delta x})^t \boldsymbol{\Delta \lambda} \quad (4.15)$$

A expansão da Eq. (4.9b) possui apenas termos de primeira ordem, sendo omitido o termo de segunda ordem da expressão

$$\begin{aligned} \nabla_\rho \mathcal{L} &= (1 + \mathbf{r}^t \boldsymbol{\lambda}_e) \begin{bmatrix} \frac{\partial(\nabla_\rho \mathcal{L})}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial(\nabla_\rho \mathcal{L})}{\partial \rho} & \frac{\partial(\nabla_\rho \mathcal{L})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta x} \\ \Delta \rho \\ \boldsymbol{\Delta \lambda} \end{bmatrix} \\ &= (1 + \mathbf{r}^t \boldsymbol{\lambda}_e) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{r}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta x} \\ \Delta \rho \\ \boldsymbol{\Delta \lambda} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.16)$$

o que resulta em

$$\nabla_\rho \mathcal{L} = (1 + \mathbf{r}^t \boldsymbol{\lambda}_e) \mathbf{r}^t \boldsymbol{\Delta x} \quad (4.17)$$

A expansão da Eq. (4.9c) resulta em

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda}\mathcal{L} = & -[\mathbf{g}_s(\rho_e) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_e)] + \begin{bmatrix} \frac{\partial(\nabla_{\lambda}\mathcal{L})}{\partial\mathbf{x}} & \frac{\partial(\nabla_{\lambda}\mathcal{L})}{\partial\rho} & \frac{\partial(\nabla_{\lambda}\mathcal{L})}{\partial\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \Delta\rho \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x}^t & \Delta\rho & \Delta\lambda^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2(\nabla_{\lambda}\mathcal{L})}{\partial\mathbf{x}\partial\mathbf{x}} & \frac{\partial^2(\nabla_{\lambda}\mathcal{L})}{\partial\mathbf{x}\partial\rho} & \frac{\partial^2(\nabla_{\lambda}\mathcal{L})}{\partial\mathbf{x}\partial\lambda} \\ \frac{\partial^2(\nabla_{\lambda}\mathcal{L})}{\partial\rho\partial\mathbf{x}} & \frac{\partial^2(\nabla_{\lambda}\mathcal{L})}{\partial\rho\partial\rho} & \frac{\partial^2(\nabla_{\lambda}\mathcal{L})}{\partial\rho\partial\lambda} \\ \frac{\partial^2(\nabla_{\lambda}\mathcal{L})}{\partial\lambda\partial\mathbf{x}} & \frac{\partial^2(\nabla_{\lambda}\mathcal{L})}{\partial\lambda\partial\rho} & \frac{\partial^2(\nabla_{\lambda}\mathcal{L})}{\partial\lambda\partial\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \Delta\rho \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Com relação ao último termo da Eq. (4.18), apenas o elemento  $\frac{\partial^2(\nabla_{\lambda}\mathcal{L})}{\partial\mathbf{x}\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial^2[-(\mathbf{g}_s(\rho_e) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_e))]}{\partial\mathbf{x}\partial\mathbf{x}} = \mathbf{T}$  é não nulo, de forma que a equação se torna

$$\nabla_{\lambda}\mathcal{L} = -[\mathbf{g}_s(\rho_e) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_e)] + \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{r}\Delta\rho + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^t\mathbf{T}\Delta\mathbf{x} \quad (4.19)$$

Assim, a expansão em série de Taylor da Eq. (4.9) no ponto  $(\mathbf{x}_e + \Delta\mathbf{x}, \rho_e + \Delta\rho, \lambda_e + \Delta\lambda)$  resulta em

$$\begin{aligned} \nabla_x\mathcal{L} &= \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t\lambda_e + \mathbf{G}_0(\lambda_e)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t\Delta\lambda + \mathbf{J}(\Delta\mathbf{x})^t\Delta\lambda \\ \nabla_{\rho}\mathcal{L} &= 1 + \mathbf{r}^t\lambda_e + \mathbf{r}^t\Delta\lambda \\ \nabla_{\lambda}\mathcal{L} &= -\mathbf{g}(\mathbf{x}_e, \rho_e) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{r}\Delta\rho + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^t\mathbf{T}\Delta\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.20)$$

### 4.3.1 Solução Utilizando o Método de Newton

Para que o conjunto de equações representado pela Eq. (4.20) seja resolvido pelo método de Newton, é necessário o truncamento de sua expansão em série de Taylor no termo de primeira ordem [71], tornando o sistema a ser solucionado como

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t\lambda_e + \mathbf{G}_0(\lambda_e)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t\Delta\lambda &= \mathbf{0} \\ 1 + \mathbf{r}^t\lambda_e + \mathbf{r}^t\Delta\lambda &= 0 \\ -[\mathbf{g}_s(\rho_e) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_e)] + \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{r}\Delta\rho &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.21)$$

podendo ser representado por  $\mathbf{F}(\mathbf{z}_e + \mathbf{d}) = \mathbf{0}$ , onde  $\mathbf{z}_e^t = [\mathbf{x}_e^t \quad \rho_e \quad \lambda_e^t]$  é o vetor das variáveis com correspondente vetor de incrementos  $\mathbf{d}^t =$

$[\Delta \mathbf{x}^t \quad \Delta \rho \quad \Delta \boldsymbol{\lambda}^t]$ . A expansão de  $\mathbf{F}(\mathbf{z}_e + \mathbf{d})$  até o termo de primeira ordem pode ser representada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_e + \mathbf{d}) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_e) + \mathbf{W}(\mathbf{z}_e)\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (4.22)$$

Em conformidade de notação com o capítulo anterior, os incrementos obtidos por meio do método de Newton são denotados por  $\mathbf{d}_n$ , para distinção de notação com relação ao incremento tensorial. Assim, a Eq. (4.22) torna-se

$$\mathbf{W}(\mathbf{z}_e)\mathbf{d}_n = -\mathbf{F}(\mathbf{z}_e) \quad (4.23)$$

onde

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t \boldsymbol{\lambda}_e \\ 1 + \mathbf{r}^t \boldsymbol{\lambda}_e \\ -[\mathbf{g}_s(\rho_e) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_e)] \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{z}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0(\boldsymbol{\lambda}_e) & \mathbf{0} & \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{r}^t \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}_e) & \mathbf{r} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

De forma explícita, a cada iteração do método de Newton busca-se a solução de um sistema linear dado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_0(\boldsymbol{\lambda}_e) & \mathbf{0} & \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{r}^t \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}_e) & \mathbf{r} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \rho \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t \boldsymbol{\lambda}_e \\ 1 + \mathbf{r}^t \boldsymbol{\lambda}_e \\ -[\mathbf{g}_s(\rho_e) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_e)] \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Para realizar o processo iterativo de solução da Eq. (4.25) por meio do método de Newton é necessário estimar os valores iniciais para as componentes real e imaginária da tensão, multiplicadores de Lagrange e parâmetro de carga. Durante o processo iterativo, calculam-se as matrizes  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_e)$  e  $\mathbf{G}_0(\boldsymbol{\lambda}_e)$ , obtém-se o vetor dos incrementos como solução do sistema linear representado pela Eq. (4.25) e atualizam-se as variáveis do problema de otimização. A verificação da convergência é realizada com base no vetor do lado direito da Eq. (4.25), de modo que todas as componentes desse vetor sejam inferiores a uma tolerância especificada para que as condições de otimalidade sejam satisfeitas.

### 4.3.2 Solução Utilizando o Termo Tensorial

Uma das condições de otimalidade no problema de determinação do máximo carregamento, indicada pela Eq. (4.9a), impõe a singularidade da matriz Jacobiana do fluxo de potência na solução ótima. Nesta situação, o desempenho dos métodos geralmente é comprometido, resultando em uma convergência local mais lenta, ou os multiplicadores de Lagrange tendem a valores demasiadamente elevados em magnitude, o que dificulta a convergência de qualquer método de otimização [9].

O uso da componente tensorial na direção de busca visa melhorar as características de convergência dos métodos de programação baseados no método de Newton nos casos onde a matriz Jacobiana das restrições é singular ou numericamente mal condicionada. O modelo tensorial utilizado nesta seção faz uso da estratégia baseada em [8], descrita no Capítulo 3 como modelo Tensorial II, e é baseada em parte nas estratégias apresentadas em [9, 39].

Quando considerados todos os termos da Eq. (4.20), a mesma pode ser reescrita de forma compacta como a seguir

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_e + \mathbf{d}) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_e) + \mathbf{W}(\mathbf{z}_e)\mathbf{d} + \mathbf{g}_1(\mathbf{d}) \quad (4.26)$$

onde

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{d}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\Delta\mathbf{x})^t \Delta\lambda \\ 0 \\ \mathbf{g}_0(\Delta\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

representa os elementos de segunda ordem da expansão em série de Taylor apresentada na Eq. (4.20) e  $\mathbf{g}_0(\Delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^t \mathbf{T}_0 \Delta\mathbf{x}$ . Os termos restantes foram definidos na formulação do método de Newton.

Admitindo-se que o ponto atual seja uma solução do problema com  $\mathbf{F}(\mathbf{z}_e) = \mathbf{0}$  e que o próximo ponto também é solução  $\mathbf{F}(\mathbf{z}_e + \mathbf{d}) = \mathbf{0}$ , obtêm-se uma equação da forma  $\mathbf{W}(\mathbf{z}_e)\mathbf{d} + \mathbf{g}_1(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ . Para utilizar a componente de segunda ordem na direção de busca, denominado termo tensorial [39], seria necessário o conhecimento prévio do valor do incremento  $\mathbf{d}$ , o que é possível apenas no final da iteração. Como a base da direção de busca é a componente obtida via método de Newton, uma aproximação razoável para o termo de segunda ordem pode ser obtida como solução do sistema linear

$$\mathbf{W}(\mathbf{z})\mathbf{d}_t = -\mathbf{g}_1(\mathbf{d}_n) \quad (4.28)$$

com

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{d}_n) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\Delta \mathbf{x}_n)^t \Delta \lambda_n \\ 0 \\ \mathbf{g}_0(\Delta \mathbf{x}_n) \end{bmatrix}$$

onde o subscrito  $t$  denota a componente da direção de busca obtida com o termo tensorial.

A direção de busca composta total dos incrementos relativos ao passo de Newton e ao modelo tensorial é definida como

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t \quad (4.29)$$

#### 4.3.2.1 Variação na Direção Tensorial

Com a suposição de que a parcela obtida pelo método de Newton é o valor dominante do vetor de incrementos, mantendo-se o passo de Newton e variando-se o valor da parcela tensorial, pode-se obter uma melhor solução na iteração, estando o incremento final contido entre a direção de Newton e a direção composta apresentada em Eq. (4.29).

Para isso, a Eq. (4.29), que representa a direção de busca composta, pode ser reescrita como

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_n + \beta \mathbf{d}_t \quad (4.30)$$

onde  $\beta$  é um escalar ( $0 \leq \beta \leq 1$ ) a ser otimizado e as direções  $\mathbf{d}_n$  e  $\mathbf{d}_t$  são obtidas resolvendo-se os sistemas lineares das Eqs. (4.23) e (4.28), respectivamente. O valor correspondente das funções que representam as condições de otimalidade é dado por

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_e + \mathbf{d}) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_e) + \mathbf{W}(\mathbf{z}_e)(\mathbf{d}_n + \beta \mathbf{d}_t) + \mathbf{g}_1(\mathbf{d}_n + \beta \mathbf{d}_t) \quad (4.31)$$

tal que, manipulando algebricamente a equação anterior e reagrupando adequadamente seus termos obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{z}_e + \mathbf{d}) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_e) + \mathbf{W}(\mathbf{z}_e)\mathbf{d}_n + \mathbf{g}_1(\mathbf{d}_n) + \beta [\mathbf{W}(\mathbf{z}_e)\mathbf{d}_t + \mathbf{g}_2(\mathbf{d}_n, \mathbf{d}_t)] + \\ + \beta^2 \mathbf{g}_1(\mathbf{d}_t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{d}_n, \mathbf{d}_t) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\Delta \mathbf{x}_n)^t \Delta \lambda_t + \mathbf{J}(\Delta \mathbf{x}_t)^t \Delta \lambda_n \\ 0 \\ 2\mathbf{g}_0(\Delta \mathbf{x}_n, \Delta \mathbf{x}_t) \end{bmatrix}$$

De forma mais compacta, a Eq. (4.32) pode ser reescrita como

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_e + \mathbf{d}) = \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \beta^2 \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (4.33)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{g}_1(\mathbf{d}_n) \\ \mathbf{b} &= -\mathbf{g}_1(\mathbf{d}_n) + \mathbf{g}_2(\mathbf{d}_n, \mathbf{d}_t) \\ \mathbf{c} &= \mathbf{g}_1(\mathbf{d}_t) \end{aligned} \quad (4.34)$$

O termo correspondente a  $\mathbf{F}(\mathbf{z}_e) + \mathbf{W}(\mathbf{z}_e)\mathbf{d}_n$  é omitido dos termos apresentados na Eq. (4.34) pois, segundo a Eq. (4.23),  $\mathbf{W}(\mathbf{z}_e)\mathbf{d}_n = -\mathbf{F}(\mathbf{z}_e)$ .

Para a solução da Eq. (4.33), utiliza-se a direção de busca correspondente ao valor de  $\beta$  que resulta no menor valor absoluto da norma quadrática das equações que representam as condições de otimalidade. O valor ótimo deste fator [45, 72] é obtido por meio da minimização da Eq. (4.35):

$$\Psi(\beta) = \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{z}_e + \mathbf{d})^t \mathbf{F}(\mathbf{z}_e + \mathbf{d}) \quad (4.35)$$

A minimização de  $\Psi(\beta)$  requer a determinação das raízes de uma equação cúbica, que pode ser representada na forma

$$d_0 + \beta d_1 + \beta^2 d_2 + \beta^3 d_3 = 0 \quad (4.36)$$

em que os termos constantes desta equação na iteração corrente são todos escalares e calculados como

$$\begin{aligned} d_0 &= \mathbf{a}^t \mathbf{b} \\ d_1 &= \mathbf{b}^t \mathbf{b} + 2\mathbf{a}^t \mathbf{c} \\ d_2 &= \frac{3}{2} \mathbf{c}^t \mathbf{b} + \frac{3}{2} \mathbf{b}^t \mathbf{c} \\ d_3 &= 2\mathbf{c}^t \mathbf{c} \end{aligned}$$

cujas soluções e interpretação são descritas em [73].

#### 4.4 Condições Iniciais

Uma característica do método de Newton é sua dependência com relação às condições iniciais. Nos casos de problemas de maximização do parâmetro de carregamento, uma condição inicial eficiente para as variáveis de tensão complexas das barras PQ é obtida com a execução

de um fluxo de potência inicial, mesmo que distante da solução de carregamento crítico.

A maior dificuldade dos métodos diretos com estratégias de solução baseadas no método de Newton é uma estimativa adequada dos valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange. Para alguns sistemas, em geral os de maior porte, a escolha arbitrária desses valores é inviável. Dependendo das condições iniciais, o método direto pode não convergir, convergir para solução correta ou para um ponto que satisfaça matematicamente as condições apresentadas, porém inviável. São apresentadas duas estratégias baseadas nas condições de otimalidade apresentadas na Eq. (4.9) para estimar os valores iniciais dos multiplicadores duais.

Um artifício simples, e sem custo computacional, é atribuir a cada multiplicador de Lagrange o valor unitário, embora não sejam esperados resultados muito promissores nesta alternativa. Uma estratégia presente na literatura [1] sugere que a estimativa inicial dos multiplicadores seja obtida como solução de um sistema linear sobre-determinado baseado nas condições de otimalidade, conforme a Eq. (4.37)

$$\mathbf{J}_0(\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b} \quad (4.37)$$

onde

$$\mathbf{J}_0(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \\ \mathbf{r}^t \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

e sua solução, obtida por mínimos quadrados, é dada por

$$\boldsymbol{\lambda} = [\mathbf{J}_0(\mathbf{x})^t \mathbf{J}_0(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{J}_0(\mathbf{x})^t \mathbf{b} \quad (4.39)$$

Apesar da simplicidade analítica observada na Eq. (4.39), há dificuldades computacionais inerentes a esta equação, particularmente pelo cálculo do termo envolvendo a inversa do produto  $[\mathbf{J}_0(\mathbf{x})^t \mathbf{J}_0(\mathbf{x})]$ , tornando seu cálculo lento e requerendo grande quantidade de memória, caso a inversa seja realizada explicitamente. Metodologias alternativas para evitar o cálculo explícito deste termo podem ser aplicadas, porém não são descritas neste trabalho.

Outra estratégia quadrática é baseada numa variação da técnica apresentada em [74], e consiste na solução de um problema de otimização na forma:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \frac{1}{2} \mathbf{s}^t \mathbf{s} \\ & \text{sujeito a } -\mathbf{J}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{s} = \mathbf{0} \\ & \quad \quad \quad 1 + \mathbf{r}^t \boldsymbol{\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde  $\mathbf{s}$  indica o erro cometido. A solução da equação anterior é obtida resolvendo-se o sistema linear

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{J}(\mathbf{x}) & -\mathbf{r} \\ \mathbf{J}(\mathbf{x})^t & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{r}^t & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\pi}_1 \\ \boldsymbol{\pi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

onde  $\boldsymbol{\pi}_1$  e  $\boldsymbol{\pi}_2$  são os multiplicadores de Lagrange correspondentes às restrições de igualdade da (4.40) e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de dimensões adequadas. Esta estratégia apresenta resultados muito semelhantes aos obtidos com o uso da estratégia anterior.

Neste trabalho, propõe-se uma nova forma de estimar o valor inicial dos multiplicadores de Lagrange também baseada nas condições de otimalidade representadas pela Eq. (4.9), a qual consiste em resolver o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)})^t & \mathbf{r} \\ \mathbf{r}^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

onde  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)})$  é a matriz Jacobiana das equações do fluxo de potência na primeira iteração, independentemente do uso do fluxo de potência inicial. A variável  $\mu$  é arbitrária, podendo assumir qualquer valor e utilizada para relaxar a restrição  $\mathbf{J}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ , que representa a primeira condição de otimalidade, e garantir que o número de incógnitas seja igual ao número de equações.

Se a matriz Jacobiana é singular, a solução deste sistema linear fornece  $\mu = 0$ , e os multiplicadores duais correspondem ao autovetor à direita, associados com o autovalor nulo da matriz Jacobiana transposta. Se a matriz  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)})^t$  não é singular, então  $\mu \neq 0$  e os valores iniciais obtidos para os multiplicadores de Lagrange são apenas aproximados. Ressalta-se que, da mesma forma que na Eq. (4.39), a estimativa de  $\boldsymbol{\lambda}$  por meio da Eq. (4.42) é dependente do ponto onde a matriz Jacobiana é calculada.

As soluções das equações do fluxo de potência para condições iniciais em diferentes pontos de operação geralmente encontram-se a uma considerável distância da solução crítica, o que dificulta a aplicação do método de Newton. O uso do termo de segunda ordem da expansão em série de Taylor das equações que representam as condições de otimalidade reduz o nível de dificuldade da convergência porque acrescenta informações sobre a curvatura da superfície definida pelas referidas equações. Apesar disto, uma boa estimativa inicial dos multiplicadores de Lagrange é necessária para melhorar a robustez do processo iterativo.

#### **4.5 Limites de Potência Reativa Gerada**

A falta de suporte adequado de geração de potência reativa em sistemas de potência é reconhecida como o fator que mais contribui para o processo de colapso de tensão [75]. Formas precisas para cálculo da capacidade de geração de potência reativa no sistema [76, 77] podem ser obtidas considerando limitações de corrente no estator e rotor e ângulo de rotor de cada gerador. No entanto, neste trabalho será utilizada a aproximação mais usual da curva de capacidade, onde os limites de geração de potência reativa são obtidos do modelo estático dos geradores.

O procedimento normalmente adotado para o tratamento deste tipo de restrição consiste em verificar, durante o processo iterativo, se o limite de potência reativa gerada de alguma barra foi violado. Em caso afirmativo, a barra correspondente é convertida em barra de carga, ou seja, a quantidade de potência reativa gerada é fixada no limite violado e a magnitude da tensão desta barra deixa de ser controlada, passando a ser uma variável calculada ao longo das iterações com a conversão do tipo desta barra para PQ. Uma vez convertida para PQ, a barra não retorna à condição de barra PV durante o processo iterativo.

Na forma usual de tratamento de limites de geração de potência reativa, podem ocorrer violações de limites de mais de uma barra de geração simultaneamente para um dado incremento do processo iterativo. A perda do controle de tensão de diversas barras em uma mesma iteração pode dificultar a convergência deste processo.

De acordo com a segunda restrição de igualdade da Eq. (4.3), tem-se  $\mathbf{Q}_g(\mathbf{x}, \rho) = (\mathbf{Q}_d^0 + \rho \Delta \mathbf{Q}_d) + \mathbf{Q}(\mathbf{x})$ , sendo que a geração de potência reativa deve obedecer à restrição de desigualdade

$$\mathbf{Q}_g^m \leq \mathbf{Q}_g(\mathbf{x}, \rho) \leq \mathbf{Q}_g^M$$

Assim, tem-se

$$\mathbf{Q}_g^m \leq \mathbf{Q}_g(\mathbf{x}, \rho) = \mathbf{Q}_d^0 + \rho \Delta \mathbf{Q}_d + \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{Q}_g^M$$

onde os termos já foram definidos.

Decompondo a inequação anterior, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{g_{pv}}^m - \mathbf{Q}_{g_{pv}}(\mathbf{x}, \rho) &\leq \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q}_{g_{pv}}^M + \mathbf{Q}_{g_{pv}}(\mathbf{x}, \rho) &\leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Evidentemente os limites de potência reativa gerada devem ser verificados apenas para barras PV, razão pela qual foi adotado o sub índice *pv* para especificação dessas barras nos vetores.

Da mesma maneira que na Eq. (3.32), o vetor de equações não lineares de injeção de potência reativa é uma forma quadrática, tal que pode ser escrito como

$$\mathbf{Q}_{pv}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{T}_{pv} \mathbf{x}$$

onde  $\mathbf{T}_{pv}$  é um arranjo tridimensional.

Admitindo-se que na condição inicial do processo iterativo todas as gerações de potência reativa encontram-se dentro dos seus limites operativos, objetiva-se limitar o valor dos incrementos das variáveis por um escalar  $\gamma$ , com  $0 < \gamma \leq 1$ , de forma que apenas uma, ou nenhuma, barra atinja seu limite de geração de potência reativa em cada iteração. A expansão em série de Taylor até o termo de segunda ordem de  $\mathbf{Q}_{g_{pv}}(\mathbf{x}, \rho)$  na direção  $(\gamma \Delta \mathbf{x}, \gamma \Delta \rho)$  é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{g_{pv}}(\mathbf{x} + \gamma \Delta \mathbf{x}, \rho + \gamma \Delta \rho) &= \mathbf{Q}_{g_{pv}}(\mathbf{x}, \rho) + \gamma [\mathbf{J}_{pv}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \Delta \rho \mathbf{r}_{pv}] + \\ &\quad + \gamma^2 \mathbf{Q}_{pv}(\Delta \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde o termo  $\mathbf{J}_{pv}$  é uma matriz cujas linhas são as linhas da matriz Jacobiana relativas às barras PV e  $\mathbf{r}_{pv}$  é um vetor composto pelas variações incrementais de potência reativa das barras PV. Portanto, é

necessário apenas o cálculo do termo  $\mathbf{Q}_{pv}(\Delta \mathbf{x})$ , pois todos os demais termos já são automaticamente obtidos durante o processo iterativo, o que implica em um reduzido custo computacional para sua implementação.

A combinação das Eqs. (4.43) e (4.44) fornece

$$\mathbf{a}_q + \gamma \mathbf{b}_q + \gamma^2 \mathbf{c}_q \leq \mathbf{0} \quad (4.45)$$

onde,

$$\mathbf{a}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{g_{pv}}^m - \mathbf{Q}_{g_{pv}}(\mathbf{x}, \rho) \\ -\mathbf{Q}_{g_{pv}}^M + \mathbf{Q}_{g_{pv}}(\mathbf{x}, \rho) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_q = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_{pv}(\mathbf{x})\Delta \mathbf{x} - \Delta \rho \mathbf{r}_{pv} \\ \mathbf{J}_{pv}(\mathbf{x})\Delta \mathbf{x} + \Delta \rho \mathbf{r}_{pv} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_q = \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_{pv}(\Delta \mathbf{x}) \\ \mathbf{Q}_{pv}(\Delta \mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Portanto, após ter sido obtido o vetor de incrementos nos métodos iterativos, o conjunto de inequações de segundo grau representadas na Eq. (4.45) é resolvido, selecionando-se o mínimo valor positivo de  $\gamma$ , tal que  $0 < \gamma \leq 1$  para o ajuste dos incrementos. Valores de  $\gamma$  superiores à unidade indicam que todo o incremento obtido no processo iterativo pode ser admitido sem que nenhum limite de potência reativa gerada seja violado, então adota-se  $\gamma = 1$ . Sem esta limitação, embora seja possível utilizar um incremento ainda maior para as variáveis, podem ocorrer grandes dificuldade de convergência no processo iterativo, principalmente nas primeiras iterações onde os limites podem estar localizados em pontos distantes dos pontos de operação atual. Caso  $\gamma$  seja inferior à unidade, a aplicação do menor valor de  $\gamma$  na Eq. (4.44) garante que apenas uma barra de cada vez terá seu limite de geração de potência reativa atingido, melhorando a estabilidade do processo. Todas as atualizações das variáveis passam a ser limitadas pelo escalar  $\gamma$  na forma  $\mathbf{d} = \gamma \mathbf{d}$ .

A estimativa das variações de potência reativa gerada resultantes das variações incrementais nas tensões nodais complexas e no parâmetro de carga é exata apenas se as equações do fluxo de potência são formuladas em coordenadas retangulares. Isto constitui a principal vantagem da estratégia proposta para o tratamento dos limites de potência reativa em relação às apresentadas em outras abordagens.

#### 4.6 Parametrização Quadrática das Restrições

A modelagem das restrições e da função objetivo exerce influência acentuada em alguns sistemas. Em alguns casos, os métodos baseados no método de Newton podem apresentar problemas na obtenção do ponto de máximo carregamento quando as restrições relativas ao balanço de potência são consideradas como

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_g - (\mathbf{P}_d^0 + \rho \Delta \mathbf{P}_d) - \mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_g - (\mathbf{Q}_d^0 + \rho \Delta \mathbf{Q}_d) - \mathbf{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Dependendo da condição inicial adotada, mesmo partindo do carregamento base, a solução pode ser obtida para um valor de parâmetro de carga negativo, satisfazendo matematicamente todas as condições de otimalidade utilizadas como critérios de convergência. Esta solução representa, na prática, um corte de carga com relação ao carregamento base e não o máximo carregamento do sistema. No entanto, não há nenhuma restrição com relação à negatividade do parâmetro de carga no problema de otimização representado pela Eq. (4.6).

A convergência para  $\rho$  negativo pode satisfazer matematicamente o conjunto de equações, embora não seja o ponto de máximo carregamento. Uma alternativa para contornar este problema, considerando que as restrições de desigualdade sejam tratadas à parte desta etapa, pode ser obtida com a alteração da modelagem da função objetivo e restrições de balanço de carga para

$$\begin{aligned} \underset{\rho \in \mathbb{R}}{\text{Minimize}} \quad & -\rho^2 \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{P}_g - (\mathbf{P}_d^0 + \rho^2 \Delta \mathbf{P}_d) - \mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{Q}_g - (\mathbf{Q}_d^0 + \rho^2 \Delta \mathbf{Q}_d) - \mathbf{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{V}^{esp^2} - \mathbf{e}^2 - \mathbf{f}^2 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.47)$$

garantindo que a demanda total do sistema não será reduzida pois, mesmo para valores negativos de  $\rho$ , o carregamento do sistema será sempre não negativo.

Analisando a Eq. (4.47) com relação às condições de otimalidade, tem-se

$$\nabla_x \mathcal{L}(\mathbf{x}, \rho, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} = \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} \quad (4.48a)$$

$$\nabla_\rho \mathcal{L}(\mathbf{x}, \rho, \boldsymbol{\lambda}) = 0 = 2\rho (1 + \mathbf{r}^t \boldsymbol{\lambda}) \quad (4.48b)$$

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}(\mathbf{x}, \rho, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} = -[\mathbf{g}_{s_2}(\rho) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x})] \quad (4.48c)$$

onde o termo  $\mathbf{g}_{s_2}(\rho)$  é semelhante a  $\mathbf{g}_s$ , alterando-se apenas o aspecto quadrático do parâmetro de carregamento, tornando-se

$$\mathbf{g}_{s_2}(\rho) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_g - (\mathbf{P}_d^0 + \rho^2 \Delta \mathbf{P}_d) \\ \mathbf{Q}_g - (\mathbf{Q}_d^0 + \rho^2 \Delta \mathbf{Q}_d) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

se possuir barras PV, em caso contrário, o último termo do vetor é retirado.

Supondo que o programa se inicie a partir de uma solução do caso base, então a condição da Eq. (4.48c) é satisfeita. A Eq. (4.48b) também é satisfeita no caso base, onde  $\rho = 0$ , para qualquer valor de  $\boldsymbol{\lambda}$ , inclusive  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ , que satisfaz a Eq. (4.48a). Mesmo para diferentes condições iniciais para o valor de  $\boldsymbol{\lambda}$ , o algoritmo pode alcançar a solução  $\rho = 0$  como solução ótima por satisfazer todas as condições de otimalidade.

Uma forma mais adequada de se modelar o problema para contornar a possibilidade de redução e de nulidade do carregamento pode ser obtida utilizando a função objetivo linear e o parâmetro de carregamento das restrições na forma quadrática, sendo o problema representado como

$$\begin{aligned} & \underset{\rho \in \mathbb{R}}{\text{Minimize}} && -\rho \\ & \text{sujeito a} && \mathbf{P}_g - (\mathbf{P}_d^0 + \rho^2 \Delta \mathbf{P}_d) - \mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{0} \\ & && \mathbf{Q}_g - (\mathbf{Q}_d^0 + \rho^2 \Delta \mathbf{Q}_d) - \mathbf{Q}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{0} \\ & && \mathbf{V}^{esp^2} - \mathbf{e}^2 - \mathbf{f}^2 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.50)$$

que fornece as condições de otimalidade

$$\nabla_x \mathcal{L}(\mathbf{x}, \rho, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} = \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \boldsymbol{\lambda} \quad (4.51a)$$

$$\nabla_\rho \mathcal{L}(\mathbf{x}, \rho, \boldsymbol{\lambda}) = 0 = 1 + 2\rho \mathbf{r}^t \boldsymbol{\lambda} \quad (4.51b)$$

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}(\mathbf{x}, \rho, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} = -[\mathbf{g}_{s_2}(\rho) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x})] \quad (4.51c)$$

onde o termo  $\mathbf{g}_{s_2}(\rho)$  é o representado pela Eq. (4.49).

Da mesma forma que a situação anterior, uma solução do caso base faz com que a Eq. (4.51c) seja respeitada. Porém, com a função objetivo linear, a condição da Eq. (4.51b) exige que  $\lambda$  seja não nulo, fazendo com que a Eq. (4.51a) seja satisfeita no ponto de singularidade da matriz Jacobiana do fluxo de carga. Isso permite alcançar um ponto estacionário do sistema fora do carregamento base e que cause incremento da demanda total.

A expansão completa em série de Taylor do problema de maximização do carregamento representado pela Eq. (4.50) também resulta em  $\mathbf{F}(\mathbf{z}_e + \mathbf{d}) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_e) + \mathbf{W}(\mathbf{z}_e)\mathbf{d} + \mathbf{g}_1(\mathbf{d})$ , da mesma forma que a Eq. (4.26). Para sua solução utilizando o método de Newton, o último termo é omitido. A diferença entre as duas parametrizações encontra-se na forma com que os termos que as compõem são expressos. Na parametrização quadrática os termos assumem a forma

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{z}_e) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t \lambda_e \\ 1 + 2\rho_e \mathbf{r}^t \lambda_e \\ -\mathbf{g}(\mathbf{x}_e, \rho_e) \end{bmatrix} \\ \mathbf{W}(\mathbf{z}_e) &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0(\lambda_e) & \mathbf{0} & \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{r}^t \lambda_e & 2\rho_e \mathbf{r}^t \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}_e) & 2\rho_e \mathbf{r} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{g}_1(\mathbf{d}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\Delta \mathbf{x})^t \Delta \lambda \\ 2\Delta \rho \mathbf{r}^t \Delta \lambda \\ \mathbf{g}_0(\Delta \mathbf{x}) + \Delta \rho^2 \mathbf{r} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.52)$$

No caso da representação linear do parâmetro de carregamento, o termo de segunda ordem relacionado à segunda condição de otimalidade é nulo, de modo que o termo  $\mathbf{g}_2(\mathbf{d}_n, \mathbf{d}_t)$  da Eq. (4.32) possui subscritos  $n$  e  $t$  apenas nos incrementos das variáveis de tensão e multiplicadores de Lagrange. Com a formulação das restrições utilizando uma representação quadrática para o parâmetro de carregamento, os incrementos relacionados a esta variável também são divididos em suas componentes obtidas via método de Newton e modelagem tensorial. Assim, tem-se

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{d}_n, \mathbf{d}_t) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\Delta \mathbf{x}_n)^t \Delta \lambda_t + \mathbf{J}(\Delta \mathbf{x}_t)^t \Delta \lambda_n \\ 2\Delta \rho_n \mathbf{r}^t \Delta \lambda_t + 2\Delta \rho_t \mathbf{r}^t \Delta \lambda_n \\ 2\mathbf{g}_0(\Delta \mathbf{x}_n, \Delta \mathbf{x}_t) + 2\Delta \rho_n \Delta \rho_t \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Além disso, a Eq. (4.44), que representa as gerações de potência reativa em todas as barras de geração, é alterada para incorporar o termo quadrático das restrições de desigualdade, tornando-se

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{g_{pv}}(\mathbf{x} + \gamma \Delta \mathbf{x}, \rho + \gamma \Delta \rho) &= \mathbf{Q}_{g_{pv}}(\mathbf{x}, \rho) + \gamma [\mathbf{J}_{pv}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + 2\rho \Delta \rho \mathbf{r}_{pv}] + \\ &+ \gamma^2 [\mathbf{Q}_{pv}(\Delta \mathbf{x}) + \Delta \rho^2 \mathbf{r}_{qg}] \end{aligned} \quad (4.54)$$

mantendo-se a estimativa exata da potência reativa devido ao incremento calculado a cada iteração. Desenvolvendo a equação anterior, os termos componentes da Eq. (4.45) tornam-se

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_q &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{g_{pv}}^n - \mathbf{Q}_{g_{pv}}(\mathbf{x}, \rho) \\ -\mathbf{Q}_{g_{pv}}^M + \mathbf{Q}_{g_{pv}}(\mathbf{x}, \rho) \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}_q &= \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_{pv}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - 2\rho \Delta \rho \mathbf{r}_{pv} \\ \mathbf{J}_{pv}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + 2\rho \Delta \rho \mathbf{r}_{pv} \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_q &= \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_{pv}(\Delta \mathbf{x}) - \Delta \rho^2 \mathbf{r}_{pv} \\ \mathbf{Q}_{pv}(\Delta \mathbf{x}) + \Delta \rho^2 \mathbf{r}_{pv} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.55)$$

#### 4.7 Decomposição do Sistema Linear

Como pode ser observado a partir de (4.25), para um sistema de  $n$  barras, a matriz de coeficientes  $\mathbf{W}(\mathbf{z})$  possui dimensão  $4n - 3$ . Para sistemas de grande porte, a fatoração explícita desta matriz a cada iteração dos métodos baseados no método de Newton é requerida uma grande quantidade de memória e tempo de processamento. Baseada na estratégia de decomposição da matriz de coeficiente proposta em [61], apresenta-se a seguir a decomposição apresentada em [78].

A decomposição consiste na inclusão da equação auxiliar

$$\mathbf{r}^t \Delta \mathbf{x} + \mu = 0$$

Reordenando os termos da Eq. (4.25), e acrescentando a equação auxiliar apresentada, obtém-se o sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{x}) & \mathbf{r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{r}^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_0(\lambda) & \mathbf{0} & \mathbf{J}(\mathbf{x})^t & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{r}^t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \rho \\ \Delta \lambda \\ \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mu = - \begin{bmatrix} -[\mathbf{g}_s(\rho) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x})] \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \lambda \\ \mathbf{1} + \mathbf{r}^t \lambda \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

ou na forma compacta,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \Theta \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{z}_1 \\ \Delta \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \mu = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

onde as submatrizes e vetores correspondentes são

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{x}) & \mathbf{r} \\ \mathbf{r}^t & \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}^t(\mathbf{x}) & \mathbf{r} \\ \mathbf{r}^t & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \Theta &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \mathbf{G}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0(\lambda) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \Delta \mathbf{z}_1 &= \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \rho \end{bmatrix}, & \Delta \mathbf{z}_2 &= \begin{bmatrix} \Delta \lambda \\ \mu \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{b}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_1 &= \begin{bmatrix} -[\mathbf{g}_s(\rho) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x})] \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{F}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{x})^t \lambda \\ 1 + \mathbf{r}^t \lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dessa forma, a Eq. (4.57) pode ser dividida em duas equações matriciais formando o sistema de equações

$$\mathbf{A}_1 \Delta \mathbf{z}_1 + \mathbf{b}_1 \mu = -\mathbf{F}_1 \quad (4.58a)$$

$$\mathbf{G}_1 \Delta \mathbf{z}_1 + \mathbf{A}_2 \Delta \mathbf{z}_2 + \mathbf{b}_2 \mu = -\mathbf{F}_2 \quad (4.58b)$$

Partindo-se da Eq. (4.58a) onde apenas um dos termos possui o vetor de variáveis, este vetor pode ser decomposto em duas parcelas obtidas de forma independente por meio da solução de um sistema linear de porte reduzido

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \mathbf{s}_{\mathbf{z}_1} &= -\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{r}_{\mathbf{z}_1} &= -\mathbf{F}_1 \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde  $\mathbf{s}_{\mathbf{z}_1}$  e  $\mathbf{r}_{\mathbf{z}_1}$  são componentes correspondentes a cada um dos termos independentes e formam o vetor

$$\Delta \mathbf{z}_1 = \mathbf{s}_{\mathbf{z}_1} \mu + \mathbf{r}_{\mathbf{z}_1} \quad (4.60)$$

Uma vez obtidos os valores dos termos que compõem o vetor  $\Delta \mathbf{z}_1$ , a substituição da Eq. (4.60) na Eq. (4.58b) fornece

$$\mathbf{G}_1 (\mathbf{s}_{\mathbf{z}_1} \mu + \mathbf{r}_{\mathbf{z}_1}) + \mathbf{A}_2 \Delta \mathbf{z}_2 + \mathbf{b}_2 \mu = -\mathbf{F}_2 \quad (4.61)$$

onde novamente apenas um dos termos possui o vetor de variáveis, pois  $\mathbf{s}_{z_1}$  e  $\mathbf{r}_{z_1}$  foram calculados anteriormente. Dessa forma, a nova equação a ser calculada se torna

$$\mathbf{A}_2 \Delta \mathbf{z}_2 = -(\mathbf{G}_1 \mathbf{s}_{z_1} + \mathbf{b}_2) \mu - (\mathbf{G}_1 \mathbf{s}_{z_1} + \mathbf{F}_2) \quad (4.62)$$

que, de forma semelhante a apresentada anteriormente, pode ser dividida em duas componentes

$$\Delta \mathbf{z}_2 = \mathbf{s}_{z_2} \mu + \mathbf{r}_{z_2} \quad (4.63)$$

onde  $\mathbf{s}_{z_2}$  e  $\mathbf{r}_{z_2}$  são obtidos resolvendo-se as equações matriciais lineares e independentes

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 \mathbf{s}_{z_2} &= -(\mathbf{G}_1 \mathbf{s}_{z_1} + \mathbf{b}_2) \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{r}_{z_2} &= -(\mathbf{G}_1 \mathbf{s}_{z_1}) + \mathbf{F}_2 \end{aligned} \quad (4.64)$$

Considerando a definição do vetor  $\Delta \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \Delta \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$  e a Eq. (4.63), a última linha desta equação fornece a expressão para o cálculo de  $\mu$ , isto é,

$$\mu = \frac{r_{\mu_2}}{(1 - s_{\mu_2})} \quad (4.65)$$

onde  $s_{\mu_2}$  e  $r_{\mu_2}$  são os últimos componentes dos vetores  $\mathbf{s}_{z_2}$  e  $\mathbf{r}_{z_2}$ , respectivamente.

Obtido o valor de  $\mu$  e os vetores  $\mathbf{s}_{z_1}$ ,  $\mathbf{r}_{z_1}$ ,  $\mathbf{s}_{z_2}$  e  $\mathbf{r}_{z_2}$ , os incrementos da iteração corrente são obtidos por substituição direta nas Eqs. (4.60) e (4.63).

No caso da forma quadrática do parâmetro de carregamento nas restrições de igualdade proposta neste capítulo, a Eq. (4.57) é mantida para a estratégia de decomposição, porém com alterações em algumas submatrizes que a compõem. A equação auxiliar deixa de ser  $\mathbf{r}^t \Delta \mathbf{x} + \mu = 0$  para assumir a forma

$$2\rho \mathbf{r}^t \Delta \mathbf{x} + \mu = 0$$

Os termos  $\Theta$ ,  $\Delta \mathbf{z}_1$ ,  $\Delta \mathbf{z}_2$  e  $\mathbf{b}_1$  são os mesmos definidos anteriormente, enquanto que os demais são calculados conforme apresentado a seguir

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{x}) & 2\rho\mathbf{r} \\ 2\rho\mathbf{r}^t & \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}^t(\mathbf{x}) & 2\rho\mathbf{r} \\ 2\rho\mathbf{r}^t & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0(\lambda) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{r}^t\lambda \end{bmatrix}, & \mathbf{b}_2 &= \begin{bmatrix} 2\rho\mathbf{r} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_1 &= \begin{bmatrix} -[\mathbf{g}_{s_2}(\rho) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x})] \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{F}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{x})^t\lambda \\ 1 + 2\rho\mathbf{r}^t\lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A decomposição constitui uma estratégia de solução do sistema linear que evita o tratamento com matrizes de porte elevado, como a matriz de coeficientes original dos problemas de otimização a cada iteração do método de Newton ou do método Tensorial. A solução do sistema linear obtida com ou sem o uso da decomposição fornece os mesmos resultados a cada iteração, porém o esforço computacional tende a ser acentuadamente reduzido quanto maior for a dimensão do sistema.

#### 4.8 Relações de Sensibilidade

No ponto de bifurcação sela-nó, correspondente à solução de carregamento crítico, a matriz Jacobiana das equações do fluxo de potência é singular e possui um autovalor tendendo a zero com autovetores à direita e à esquerda sendo representados por  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  [68] respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{x}^*)^t \mathbf{w} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}^*) \mathbf{v} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.66}$$

onde o sobrescrito \* indica o ponto obtido na solução correspondente à demanda crítica do sistema.

A comparação entre a primeira condição de otimalidade da Eq. (4.9) e a primeira expressão da Eq. (4.66) mostra que os vetores  $\mathbf{w}$  e  $\lambda$  são colineares. O vetor dos multiplicadores de Lagrange relacionado às restrições de igualdade, obtido como um subproduto do processo iterativo, indica a relação de sensibilidade instantânea do parâmetro de carga com relação às injeções de potências ativa e reativa e às magnitudes quadráticas das tensões nas barras. O vetor dos multiplicadores

de Lagrange pode ser utilizado para identificar as áreas mais críticas com relação à estabilidade de tensão.

O vetor tangente  $\mathbf{t}$  representa a sensibilidade das variáveis do fluxo de potência em relação ao parâmetro de carga [54, 55]. Este vetor é obtido substituindo o vetor das variáveis da Eq. (4.25) por  $\Delta\rho = \rho - \rho_e$  e  $\Delta\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_e$ , de forma que o novo sistema matricial se torna

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_0(\boldsymbol{\lambda}_e) & \mathbf{0} & \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{r}^t \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}_e) & \mathbf{r} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \rho - \rho_e \\ \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_e \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t \boldsymbol{\lambda}_e \\ 1 + \mathbf{r}^t \boldsymbol{\lambda}_e \\ -[\mathbf{g}_s(\rho_e) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_e)] \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

O desenvolvimento da equação anterior fornece

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_0(\boldsymbol{\lambda}_e)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t\boldsymbol{\lambda}_e &= -\mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t\boldsymbol{\lambda}_e \\ \mathbf{r}^t\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{r}^t\boldsymbol{\lambda}_e &= -1 - \mathbf{r}^t\boldsymbol{\lambda}_e \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{r}\rho - \mathbf{r}\rho_e &= \mathbf{g}_s(\rho_e) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_e) \end{aligned}$$

onde podem ser feitas simplificações, formando o conjunto de equações

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_0(\boldsymbol{\lambda}_e)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{r}^t\boldsymbol{\lambda} &= -1 \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{r}\rho &= \mathbf{g}_s(\rho_e) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_e) + \mathbf{r}\rho_e \end{aligned}$$

No ponto de demanda crítica, as equações correspondentes ao fluxo de potência são satisfeitas, ou seja,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^*, \rho^*) = \mathbf{0}$ . Assim, os incrementos  $\Delta\mathbf{x}$  são obtidos resolvendo-se o sistema linear

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_0(\boldsymbol{\lambda}^*) & \mathbf{0} & \mathbf{J}(\mathbf{x}^*)^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{r}^t \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}^*) & \mathbf{r} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \rho^* \\ \boldsymbol{\lambda}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -1 \\ \rho^*\mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Resolvendo-se a Eq. (4.68), uma das equações obtidas indica que  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , e a segunda linha da Eq. (4.66), onde  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , verifica-se que os vetores  $\mathbf{v}$  e  $\Delta\mathbf{x}$  são colineares. Portanto, considerando a natureza dos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ , os mesmos podem ser usados para identificar áreas críticas e definir medidas corretivas adequadas a partir do ponto de carregamento máximo, tais como redespacho da geração, corte de carga e eventual compensação de potência reativa.

Em coordenadas retangulares, as componentes do vetor tangente representam as sensibilidades das partes real e imaginária das tensões complexas com relação ao parâmetro de carregamento,

$$\mathbf{t} = \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta \rho} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta \mathbf{e}}{\Delta \rho} \\ \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta \rho} \end{bmatrix}$$

enquanto que o vetor dos multiplicadores de Lagrange relativos à potência ativa e reativa e à tensão são únicos para cada barra. Portanto, para utilizar efetivamente estas componentes na análise de regiões críticas de um sistema, é necessário convertê-las em variações de magnitude da tensão nas barras. Isto pode ser feito a partir da equação

$$\begin{aligned} (V_i^* + \Delta V_i)^2 &= (e_i^* + \Delta e_i)^2 + (f_i^* + \Delta f_i)^2 \\ V_i^{*2} + 2V_i^* \Delta V_i + \Delta V_i^2 &= e_i^{*2} + 2e_i^* \Delta e_i + \Delta e_i^2 + f_i^{*2} + 2f_i^* \Delta f_i + \Delta f_i^2 \end{aligned} \quad (4.69)$$

onde  $V_i^*$ ,  $e_i^*$  e  $f_i^*$  representam o ponto crítico, e  $\Delta V_i$ ,  $\Delta e_i$  e  $\Delta f_i$  são os correspondentes incrementos. Como  $V_i^{*2} = e_i^{*2} + f_i^{*2}$ , a equação anterior se reduz a

$$2V_i^* \Delta V_i + \Delta V_i^2 = 2(e_i^* \Delta e_i + f_i^* \Delta f_i) + (\Delta e_i^2 + \Delta f_i^2) \quad (4.70)$$

Assumindo que  $\Delta V_i$ ,  $\Delta e_i$  e  $\Delta f_i$  possuem valores muito pequenos no ponto de solução do fluxo de potência, então  $\Delta V_i^2$ ,  $\Delta e_i^2$  e  $\Delta f_i^2$  podem ser considerados desprezíveis, fazendo com que a equação anterior se torne

$$\Delta V_i = \frac{e_i^* \Delta e_i + f_i^* \Delta f_i}{V_i^*} \quad (4.71)$$

Com base na interpretação dos multiplicadores de Lagrange  $\lambda_{p_i}$  e  $\lambda_{q_i}$ , a variação incremental  $\Delta \rho$  no parâmetro da carga devido às variações incrementais nas injeções de potência ativa  $\Delta P_i$  e reativa  $\Delta Q_i$  da barra  $i$  pode ser estimada por

$$\Delta \rho^{est} = \lambda_{p_i} \Delta P_i + \lambda_{q_i} \Delta Q_i \quad (4.72)$$

onde o sobre índice *est* indica que o valor é estimado e a Eq. (4.72) pode auxiliar na determinação de medidas corretivas ou preventivas para o sistema.

Embora apresentadas apenas para o caso da parametrização linear, as relações de sensibilidade também são válidas para os casos onde a parametrização quadrática é empregada.

#### 4.9 Determinação das Curvas PV

Conhecidas as soluções do fluxo de potência no caso base e no ponto de máximo carregamento do sistema, é possível estimar as magnitudes mínimas e máximas das tensões para cada valor do parâmetro de carga  $e$ , assim, traçar a curva PV [79]. Para isso, faz-se uso da natureza quadrática destas curvas [80]. A suposição de que a relação entre a magnitude de tensão e o parâmetro de carga para cada barra  $i$  seja representada por uma função quadrática, permite que o parâmetro de carga seja escrito como

$$\rho = a_i V_i^2 + b_i V_i + c_i \quad (4.73)$$

A primeira derivada da Eq. (4.73) com relação à magnitude da tensão da barra  $i$  e ao parâmetro de carregamento fornece, respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dV_i} &= 2a_i V_i + b_i \\ 1 &= 2a_i V_i \frac{dV_i}{d\rho} + b_i \frac{dV_i}{d\rho} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Isolando o termo  $\frac{dV_i}{d\rho}$  da segunda linha da equação anterior, tem-se a equação

$$\frac{dV_i}{d\rho} = \frac{1}{2a_i V_i + b_i} \quad (4.75)$$

Sendo conhecida a solução do fluxo de potência no caso base, com  $\rho = 0$  e  $V_i = V_i^0$ , a substituição destes termos na Eq. (4.73) resulta em

$$a_i V_i^{02} + b_i V_i^0 + c_i = 0 \quad (4.76)$$

e, no ponto de carregamento crítico, onde  $\rho = \rho^*$ ,  $V_i = V_i^*$  e  $\frac{dV_i}{d\rho} = \infty$ , pois este último termo refere-se ao ponto extremo da curvatura, marcando a divisão entre os traçados inferior e superior. Aplicando os

conceitos relacionados ao caso de máximo carregamento, as Eqs. (4.73) e (4.75) tornam-se

$$\begin{aligned} a_i V_i^{*2} + b_i V_i^* + c_i &= \rho^* \\ 2a_i V_i^* + b_i &= 0 \end{aligned} \quad (4.77)$$

A combinação das Eqs. (4.76) e (4.77) resulta num conjunto de equações que permite que cada termo seja isolado para seu cálculo na forma

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\rho^*}{-V_i^{*2} + 2V_i^* V_i^0 - V_i^{02}} \\ b_i &= -2a_i V_i^* \\ c_i &= a_i \left( 2V_i^* V_i^0 - V_i^{02} \right) \end{aligned} \quad (4.78)$$

em que todos os termos constantes na equações foram previamente definidos.

Desde que conhecidas as tensões complexas do caso base e no ponto de máximo carregamento, para cada barra que se deseja obter as curvas PV são calculados os coeficientes da Eq. (4.78), que substituídos na Eq. (4.73) fornecem valores aproximados para as magnitudes das tensões das partes inferior e superior da curva PV para cada condição de carregamento. Estes valores aproximados são utilizados como estimativa inicial para o cálculo do valor exato dessas tensões, tanto da parte superior quanto da parte inferior, obtidos pelas soluções de dois problemas de fluxo de potência para cada condição de carregamento, um para cada parte da curva, sendo o valor do parâmetro de carregamento especificado. Assim, para cada condição de carregamento diferente, duas novas soluções para o fluxo de potência são necessárias.

A curva PV de cada barra pode ser traçada a partir do ponto de carregamento crítico e gradualmente reduzindo-se o valor do parâmetro de carregamento. A adoção deste procedimento justifica-se pela dificuldade de se estimar valores iniciais para os ângulos das tensões das barras referentes às tensões da parte inferior da curva PV. Na metodologia apresentada, os ângulos iniciais estimados são aqueles obtidos do nível de carregamento anterior, ou seja, carregamento superior ao atual. O processo é feito recursivamente, do ponto de máximo carregamento, onde as tensões complexas já são conhecidas pela solução do problema de otimização, até o caso base. A dificuldade de convergência do processo iterativo do fluxo de potência da parte inferior da curva, quando o processo se inicia do caso base em direção ao ponto de máximo car-

regamento, deve-se à dificuldade de se obter boas condições iniciais de tensões complexas para esta parte da curva PV, justificando a metodologia de se iniciar do ponto de carregamento crítico em direção ao de carregamento base. Como a solução no exato ponto de máximo carregamento já é conhecida devido ao programa de otimização, evita-se o cálculo do fluxo de potência neste ponto, onde a matriz Jacobiana é singular.

#### 4.9.1 Ilustração da Curva PV

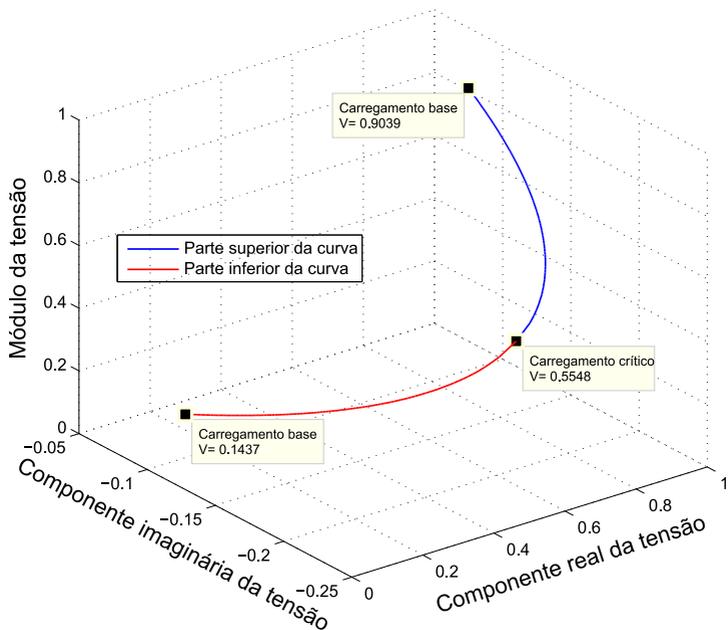
Embora neste trabalho o problema de máximo carregamento seja implementado em coordenadas cartesianas, algumas informações são convertidas para a formulação polar com o intuito de se obter uma interpretação mais imediata. É o caso, por exemplo, da análise do vetor tangente e do traçado das tensões, indicado na Figura (5), que variam de acordo com o nível de carregamento.

Para um sistema de 2 barras, sendo uma barra de geração e uma barra com carregamento base de  $(100 + j80)$  MVA, com impedância de linha de  $(0 + j0,1)$  pu, o aumento do carregamento admitido pelo sistema, sem considerar o limite de potência reativa, é de 140,312%. A curva tridimensional da magnitude da tensão na barra sem geração em função de suas componentes real e imaginária é apresentada na Figura 5(a), onde são destacados os níveis de tensão das partes superior e inferior da curva no carregamento base e o nível da tensão no ponto crítico.

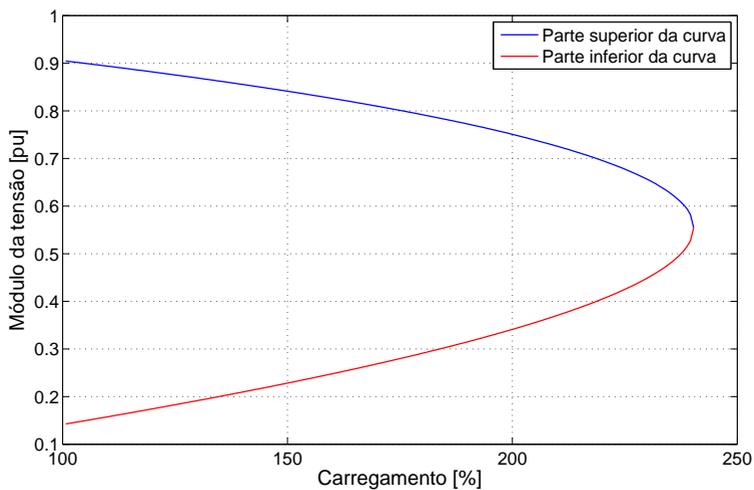
A Figura 5(b) representa a mesma informação contida na Figura 5(a), porém representada em coordenadas polares, onde apenas o módulo da tensão é apresentado em função do carregamento do sistema. Embora a implementação em coordenadas retangulares possua certas vantagens computacionais, como as apresentadas neste capítulo, fica nítida a facilidade de analisar a tensão do ponto de vista de coordenadas polares como resultado. Lidar com o módulo da tensão é mais intuitivo do que ajustar as componentes real e imaginária para ajustes de tensão, análises de sensibilidade, dentre outros.

#### 4.10 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados os conteúdos desenvolvidos referentes ao problema de máximo carregamento. A formulação apre-



(a) Representação na forma retangular



(b) Representação na forma polar

Figura 5 – Sistema de 2 barras - Representação das tensões

sentada em coordenadas retangulares mostra-se adequada ao trabalho realizado devido às características quadráticas das equações que compõem o fluxo de potência. Essas características permitem o uso de modelos tensoriais, fornecendo correções mais eficientes a cada iteração. Também permitem uma previsão eficiente das potências reativas geradas em cada barra, limitando o carregamento a cada iteração de modo a permitir que apenas uma barra atinja o limite de cada vez, facilitando a convergência do processo. O traçado das curvas PV, em especial referente à dificuldade da parte inferior da curva, também é melhorado quando considerada a formulação em coordenadas retangulares.

Conforme apresentado, a dificuldade em se trabalhar com matrizes inteiras para sistemas de grande porte pode ser contornada com a decomposição do sistema linear, reduzindo a necessidade de melhores processadores e de maior quantidade de memória, além de aumentar a velocidade de convergência sem afetar a trajetória de solução. Após a convergência, a obtenção convencional dos autovetores referentes à matriz Jacobiana é demasiadamente lenta devido à sua singularidade. O uso dos multiplicadores de Lagrange e do vetor tangente, obtidos de forma simples como um subproduto do processo iterativo, fornece valores colineares aos autovetores, podendo ser utilizados para a análise de sensibilidade. Os resultados obtidos para sistemas de diversos portes são apresentados no capítulo subsequente.



## 5 RESULTADOS

### 5.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados resultados numéricos para exemplificação das metodologias descritas no capítulo anterior. São exemplificadas as características vantajosas de se utilizar a formulação em coordenadas cartesianas para o problema de fluxo de potência ótimo, bem como uma comparação entre a utilização de uma formulação linear e quadrática para o parâmetro de carregamento nas restrições de balanço de potência no problema de máximo carregamento. A influência das condições iniciais e do método utilizado no problema é exemplificada numericamente.

A análise do problema de otimização, cuja função objetivo visa o ponto de máximo carregamento do sistema, pode fornecer mais informações do que a simples obtenção do ponto de demanda crítica. Mostra-se neste trabalho que as relações de sensibilidade podem ser utilizadas para definição de áreas críticas e auxiliar na manutenção do sistema, assim como podem ser traçadas as curvas PV, tanto na parte superior, quanto inferior.

As metodologias do capítulo anterior foram implementadas em ambiente MatLab<sup>®</sup>, versão R2009a. Para todas as simulações realizadas foi utilizada a tolerância de  $1,0 \times 10^{-8}$  para as condições de otimalidade de primeira ordem. Para validação dos resultados foi utilizado o programa ANAREDE. As simulações foram realizadas para 13 sistemas de portes variados, desde 6 até 1916 barras. Os dados do sistema de 6 barras são os apresentados em [81]; os do sistema de 9 barras podem ser obtidos em [82]; os sistemas de 14, 57, 118 e 300 barras estão disponíveis em [83]; o sistema de 24 barras é equivalente à primeira área descrita em [84]; os dados dos sistemas de 33, 65 e 107 barras são fornecidos em [85]; já os sistemas de 749 e 1916 barras são equivalentes brasileiros.

### 5.2 Influência Quanto à Modelagem e Condições Iniciais

O número de iterações e o caminho para convergência em problemas de otimização são influenciados pelo método escolhido para sua implementação, tipo de coordenadas utilizadas e condições iniciais, dentre outros fatores. Esta seção apresenta os valores obtidos por meio

de simulações realizadas com as formulações apresentadas no capítulo anterior, comparando-se os níveis de carregamento aos obtidos com o ANAREDE. Com o intuito de ressaltar apenas os aspectos relacionados à modelagem e às condições iniciais, os limites de potência reativa gerada não foram considerados em nenhuma das simulações dessa seção.

O programa ANAREDE faz uso do método da Continuação, sendo que foram adotados passos incrementais de demanda de 1% ou 2%, com a finalidade de se obter convergência para todos os sistemas. Os valores percentuais de máximo incremento no carregamento para cada sistema utilizando este programa são apresentados na Tabela 2.

sist.	6	9	14	24	30	33	
$\rho$	65,312	145,095	300,447	87,009	195,042	10,013	
sist.	57	65	107	118	300	750	1916
$\rho$	81,986	10,761	7,677	92,317	3,658	109,031	4,126

Tabela 2 – Porcertagens de carregamento obtidos com ANAREDE

Na Tabela 3 são apresentados os valores percentuais de máximo incremento no carregamento obtidos de forma sistemática pelos métodos apresentados neste trabalho.

sist.	6	9	14	24	30	33	
$\rho$	65,312	145,107	300,450	87,011 e 87,303	195,047	10,014	
sist.	57	65	107	118	300	750	1916
$\rho$	81,986 e 82,834	10,763	7,677	92,319	3,648	109,073	4,157

Tabela 3 – Porcertagens de carregamento obtidos com os métodos propostos

Na comparação entre as duas tabelas, nota-se a grande proximidade entre os resultados obtidos por meio de simulações utilizando a metodologia proposta e os valores obtidos com o software comercial, confirmando a eficiência dos programas apresentados em se obter o ponto de máximo carregamento do sistema.

Analisando a solução de cada um dos sistemas da tabela anterior, observou-se que as matrizes Hessianas projetadas eram positivas definidas para os sistemas de 6 a 300 barras. Isso caracteriza os resultados como pontos de mínimo local estrito, ou forte, da função objetivo. Como o objetivo é minimizar o negativo de  $\rho$  ou  $\rho^2$ , tem-se pontos de máximo local estrito para o carregamento. As situações dos sistemas

de 24 e 57 barras, com duas soluções de mínimo local estrito próximas uma da outra, demonstra a dificuldade de obtenção de uma solução global para o problema. O menor valor de demanda crítica para os sistemas de 24 e 57 barras foi obtido sem o fluxo de potência inicial, enquanto que o maior valor foi obtido quando o fluxo de potência inicial foi executado. Outros casos de valores distintos dos apresentados na Tabela 3 e que não obedecem um padrão definido, são descritos no texto. Nos sistemas de 750 e 1916 barras, estas matrizes possuem autovalores negativos no ponto de estacionaridade, porém respeitam a condição  $\mathbf{w}^t \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\pi}^*) \mathbf{w} > \mathbf{0}$  para um vetor  $\mathbf{w}$  que satisfaz  $\mathbf{J}(\mathbf{x})^t \mathbf{w} = \mathbf{0}$ .

Nas tabelas que seguem esta seção, são apresentados os resultado de uma série de simulações realizadas utilizando os sistemas apresentados. Com relação à primeira linha destas tabelas, a letra  $N$  indica o método de Newton ( $\mathbf{d} = \mathbf{d}_n$ ), enquanto que as letras  $T$  e  $P$  indicam a utilização do passo tensorial completo ( $\mathbf{d} = \mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t$ ) e com otimização da parte tensorial em cada iteração ( $\mathbf{d} = \mathbf{d}_n + \beta \mathbf{d}_t$ ), respectivamente. Os sobrescritos 0, 1 e 2 referem-se ao uso de diferentes multiplicadores de Lagrange iniciais, sendo 0 referente ao uso de multiplicadores unitários para todo  $\boldsymbol{\lambda}$ , 1 referente aos multiplicadores obtidos com a solução da Eq. (4.42), proposto neste trabalho, e 2 refere-se aos multiplicadores obtidos com o uso da Eq. (4.39). Os subscritos numéricos 0, 1 e 2 indicam se o termo de segunda ordem é inserido desde a iteração inicial, a partir da primeira ou a partir da segunda iteração enquanto que o subscrito  $f$  indicam o uso de fluxo de potência inicial. A ausência do subscrito  $f$  representa simulações realizadas com partida plana, sem fluxo de potência inicial.

O subscrito no número de iterações apresentado nas tabelas indica o número de vezes em que o termo de segunda ordem foi utilizado. Ressaltando-se que, nas simulações envolvendo otimização da componente tensorial, a otimização deste termo é realizada com base na norma 2 e então utilizado o valor do escalar  $\beta$  nas equações para definição do menor valor absoluto das restrições, o que não necessariamente implica que o uso desta estratégia ocorra em toda iteração, podendo ser obtidos valores melhores sem esta estratégia em determinadas iterações. A nomenclatura  $nc$  presente nas tabelas indica casos de não convergência do processo iterativo dentro do limite máximo estipulado de 100 iterações. A presença do sinal negativo ao invés do número de iterações indica que a solução encontrada pelo programa é um parâmetro de carregamento negativo, ou seja, uma redução de carga que atende às condições de otimalidade de primeira ordem. Os casos onde os valores obtidos nas

simulações diferem dos apresentados na tabela são descritos ao longo do texto.

### 5.2.1 Modelagem Linear do Parâmetro de Carregamento

Nesta subseção são apresentados os casos onde as equações do fluxo de potência foram implementadas considerando a modelagem linear do parâmetro de carregamento para os multiplicadores de Lagrange apresentados.

Analisando-se a Tabela 4, onde os valores iniciais para multiplicadores de Lagrange são considerados unitários, representados por  $\lambda^0$ , verifica-se que, sem o uso do fluxo de potência inicial, há um grande número de casos onde a convergência não foi alcançada.

Com a execução de fluxos de potência nas condições de carregamento base para inicialização das variáveis, há uma redução no número de casos de não convergência. Nos casos onde houve convergência, o fluxo de potência inicial provoca uma redução no número de iterações, exceto pelo sistema de 300 barras, que obteve situações de ligeiro aumento no número de iterações. Destacam-se os sistemas de 118 e 750 barras, onde não se obteve convergência em nenhum método para esta inicialização do multiplicador, independentemente da execução ou não do fluxo de potência inicial. O sistema de 1916 barras obteve um carregamento máximo de 3,914% para a condição  $N^0$  e 4,157% para os demais casos.

Alterando-se os multiplicadores de Lagrange iniciais para o obtido por meio da Eq. (4.42),  $\lambda^1$ , na condição sem fluxo inicial tem-se a maior quantidade de resultados negativos para o parâmetro de carregamento, especialmente para o sistema de 24 barras, conforme apresentado na Tabela 5. Quando utilizado o fluxo de potência inicial, há redução dos casos de não convergência, e nenhum caso de valor negativo. Com o fluxo de potência inicial, a convergência não foi alcançada apenas para os sistemas de 107 e 118 barras, ressaltando-se que este último sistema não obteve convergência para nenhuma condição representada nesta tabela. Nos sistemas de 30 e 33 barras nota-se um expressiva redução do número de iterações ao se utilizar o fluxo de potência inicial em comparação à partida plana. Com relação aos carregamentos críticos obtidos, o sistema de 57 barras, na condição  $P_{0f}^1$ , obteve 58,117% e o sistema de 1916 barras obteve um carregamento máximo de 3,914% para a condição  $T_0^1$  e 4,157% para os demais casos.

sistema	$N^0$	$T_0^0$	$T_1^0$	$T_2^0$	$P_0^0$	$P_1^0$	$P_2^0$
6	11	8 <sub>7</sub>	8 <sub>7</sub>	8 <sub>5</sub>	8 <sub>8</sub>	8 <sub>7</sub>	8 <sub>5</sub>
9	10	7 <sub>6</sub>	7 <sub>6</sub>	8 <sub>5</sub>	7 <sub>7</sub>	7 <sub>6</sub>	8 <sub>5</sub>
14	12	9 <sub>7</sub>	9 <sub>7</sub>	9 <sub>7</sub>	8 <sub>8</sub>	9 <sub>7</sub>	9 <sub>7</sub>
24	11	9 <sub>6</sub>	9 <sub>6</sub>	9 <sub>6</sub>	6 <sub>6</sub>	9 <sub>7</sub>	9 <sub>7</sub>
30	17	11 <sub>7</sub>	11 <sub>7</sub>	11 <sub>7</sub>	10 <sub>9</sub>	12 <sub>8</sub>	12 <sub>7</sub>
33	11	8 <sub>5</sub>	8 <sub>5</sub>	8 <sub>5</sub>	7 <sub>6</sub>	7 <sub>6</sub>	8 <sub>6</sub>
57	12	10 <sub>7</sub>	10 <sub>7</sub>	11 <sub>6</sub>	11 <sub>9</sub>	11 <sub>8</sub>	11 <sub>7</sub>
65	17	nc	nc	nc	nc	10 <sub>6</sub>	nc
107	nc	nc	nc	nc	nc	15 <sub>13</sub>	nc
118	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc
300	nc	5 <sub>5</sub>	8 <sub>7</sub>	nc	5 <sub>5</sub>	7 <sub>6</sub>	nc
749	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc
1916	22	nc	nc	-	nc	nc	17 <sub>12</sub>

sistema	$N_f^0$	$T_{0f}^0$	$T_{1f}^0$	$T_{2f}^0$	$P_{0f}^0$	$P_{1f}^0$	$P_{2f}^0$
6	11	8 <sub>6</sub>	8 <sub>6</sub>	8 <sub>5</sub>	8 <sub>8</sub>	8 <sub>7</sub>	8 <sub>5</sub>
9	10	7 <sub>6</sub>	7 <sub>6</sub>	7 <sub>5</sub>	7 <sub>6</sub>	7 <sub>6</sub>	8 <sub>6</sub>
14	11	8 <sub>6</sub>	8 <sub>6</sub>	8 <sub>6</sub>	8 <sub>8</sub>	8 <sub>7</sub>	8 <sub>6</sub>
24	10	7 <sub>5</sub>	7 <sub>5</sub>	7 <sub>5</sub>	5 <sub>5</sub>	6 <sub>5</sub>	7 <sub>5</sub>
30	14	11 <sub>6</sub>	11 <sub>6</sub>	10 <sub>6</sub>	9 <sub>8</sub>	11 <sub>8</sub>	11 <sub>6</sub>
33	5	4 <sub>4</sub>	4 <sub>3</sub>	4 <sub>2</sub>	4 <sub>4</sub>	4 <sub>3</sub>	4 <sub>2</sub>
57	12	10 <sub>5</sub>	10 <sub>5</sub>	10 <sub>5</sub>	10 <sub>7</sub>	10 <sub>6</sub>	10 <sub>7</sub>
65	7	4 <sub>4</sub>	5 <sub>3</sub>	5 <sub>3</sub>	4 <sub>4</sub>	5 <sub>4</sub>	5 <sub>3</sub>
107	10	8 <sub>6</sub>	8 <sub>5</sub>	8 <sub>5</sub>	6 <sub>6</sub>	7 <sub>5</sub>	8 <sub>6</sub>
118	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc
300	9	7 <sub>4</sub>	7 <sub>4</sub>	7 <sub>4</sub>	7 <sub>5</sub>	7 <sub>5</sub>	7 <sub>5</sub>
749	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc
1916	9	32 <sub>17</sub>	8 <sub>3</sub>	8 <sub>3</sub>	16 <sub>12</sub>	60 <sub>37</sub>	-

Tabela 4 – Parametrização linear,  $\lambda^0$

sistema	$N^1$	$T_0^1$	$T_1^1$	$T_2^1$	$P_0^1$	$P_1^1$	$P_2^1$
6	8	4 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>	4 <sub>4</sub>	6 <sub>5</sub>	6 <sub>4</sub>
9	14	5 <sub>5</sub>	10 <sub>7</sub>	10 <sub>7</sub>	5 <sub>5</sub>	9 <sub>7</sub>	9 <sub>7</sub>
14	nc	13 <sub>8</sub>	nc	nc	15 <sub>11</sub>	nc	nc
24	-	-	-	-	9 <sub>7</sub>	-	-
30	77	-	63 <sub>26</sub>	63 <sub>26</sub>	-	48 <sub>31</sub>	48 <sub>31</sub>
33	33	35 <sub>15</sub>	35 <sub>15</sub>	35 <sub>15</sub>	6 <sub>6</sub>	14 <sub>10</sub>	-
57	nc	10 <sub>6</sub>	nc	nc	10 <sub>7</sub>	nc	nc
65	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc
107	nc	nc	nc	nc	7 <sub>6</sub>	nc	nc
118	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc
300	nc	7 <sub>6</sub>	nc	nc	6 <sub>5</sub>	nc	nc
749	nc	11 <sub>8</sub>	nc	nc	nc	nc	nc
1916	nc	13 <sub>7</sub>	nc	nc	6 <sub>6</sub>	nc	-

sistema	$N_f^1$	$T_{0f}^1$	$T_{1f}^1$	$T_{2f}^1$	$P_{0f}^1$	$P_{1f}^1$	$P_{2f}^1$
6	6	4 <sub>4</sub>	4 <sub>3</sub>	5 <sub>3</sub>	4 <sub>4</sub>	4 <sub>3</sub>	5 <sub>3</sub>
9	8	6 <sub>5</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>	5 <sub>5</sub>	6 <sub>5</sub>	6 <sub>4</sub>
14	14	7 <sub>5</sub>	10 <sub>7</sub>	10 <sub>7</sub>	7 <sub>6</sub>	10 <sub>7</sub>	10 <sub>7</sub>
24	12	7 <sub>5</sub>	9 <sub>4</sub>	9 <sub>4</sub>	7 <sub>6</sub>	9 <sub>7</sub>	9 <sub>7</sub>
30	16	8 <sub>5</sub>	13 <sub>5</sub>	13 <sub>5</sub>	7 <sub>6</sub>	12 <sub>7</sub>	12 <sub>7</sub>
33	5	4 <sub>3</sub>	4 <sub>3</sub>	4 <sub>2</sub>	4 <sub>4</sub>	4 <sub>3</sub>	4 <sub>2</sub>
57	12	9 <sub>5</sub>	9 <sub>5</sub>	9 <sub>5</sub>	30 <sub>22</sub>	8 <sub>5</sub>	8 <sub>5</sub>
65	7	5 <sub>3</sub>	5 <sub>3</sub>	5 <sub>3</sub>	4 <sub>3</sub>	4 <sub>3</sub>	5 <sub>3</sub>
107	nc	nc	nc	nc	7 <sub>6</sub>	7 <sub>6</sub>	nc
118	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc
300	8	6 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>5</sub>	6 <sub>5</sub>	6 <sub>4</sub>
749	13	10 <sub>7</sub>	10 <sub>7</sub>	10 <sub>7</sub>	9 <sub>6</sub>	9 <sub>6</sub>	9 <sub>6</sub>
1916	9	10 <sub>5</sub>	10 <sub>5</sub>	10 <sub>5</sub>	5 <sub>4</sub>	5 <sub>4</sub>	8 <sub>6</sub>

Tabela 5 – Parametrização linear,  $\lambda^1$ 

A inicialização dos multiplicadores de acordo com o obtido pela Eq. (4.39),  $\lambda^2$ , apresentou a maior quantidade de casos convergidos quando comparado aos multiplicadores anteriores na parametrização linear, embora com elevado número de iterações. Esta afirmação se verifica com e sem o fluxo de potência inicial, conforme apresentado na Tabela 6. Em geral houve um aumento no número de iterações necessárias para convergência, porém com condições de simulação onde há

convergência para todos os sistemas, inclusive o de 118 barras que não obteve convergência com os multiplicadores utilizados anteriormente. O sistema de 1916 barras obteve um carregamento máximo de 3,914% para as condições  $T_{0f}^2$ ,  $T_{1f}^2$  e  $T_{2f}^2$  e 4,157% para os demais casos.

sistema	$N^2$	$T_0^2$	$T_1^2$	$T_2^2$	$P_0^2$	$P_1^2$	$P_2^2$
6	21	15 <sub>13</sub>	15 <sub>13</sub>	15 <sub>11</sub>	15 <sub>14</sub>	15 <sub>14</sub>	15 <sub>13</sub>
9	22	15 <sub>13</sub>	15 <sub>13</sub>	15 <sub>12</sub>	15 <sub>14</sub>	15 <sub>14</sub>	15 <sub>13</sub>
14	29	20 <sub>16</sub>	20 <sub>16</sub>	20 <sub>16</sub>	20 <sub>18</sub>	20 <sub>18</sub>	21 <sub>18</sub>
24	23	17 <sub>11</sub>	17 <sub>11</sub>	16 <sub>11</sub>	17 <sub>13</sub>	17 <sub>13</sub>	19 <sub>15</sub>
30	32	23 <sub>15</sub>	23 <sub>15</sub>	23 <sub>14</sub>	-	-	22 <sub>16</sub>
33	18	13 <sub>11</sub>	13 <sub>11</sub>	13 <sub>10</sub>	13 <sub>11</sub>	13 <sub>11</sub>	13 <sub>10</sub>
57	25	21 <sub>14</sub>	21 <sub>14</sub>	19 <sub>12</sub>	22 <sub>18</sub>	22 <sub>18</sub>	19 <sub>14</sub>
65	16	14 <sub>10</sub>	14 <sub>10</sub>	13 <sub>9</sub>	14 <sub>10</sub>	14 <sub>10</sub>	-
107	60	31 <sub>16</sub>	31 <sub>16</sub>	nc	nc	nc	51 <sub>31</sub>
118	17	12 <sub>10</sub>	12 <sub>10</sub>	12 <sub>9</sub>	11 <sub>10</sub>	11 <sub>10</sub>	12 <sub>9</sub>
300	15	nc	nc	12 <sub>7</sub>	-	-	9 <sub>5</sub>
749	17	12 <sub>10</sub>	12 <sub>10</sub>	14 <sub>9</sub>	nc	nc	13 <sub>9</sub>
1916	nc	nc	nc	nc	nc	nc	70 <sub>38</sub>

sistema	$N_f^2$	$T_{0f}^2$	$T_{1f}^2$	$T_{2f}^2$	$P_{0f}^2$	$P_{1f}^2$	$P_{2f}^2$
6	21	15 <sub>11</sub>	15 <sub>11</sub>	14 <sub>11</sub>	14 <sub>13</sub>	14 <sub>13</sub>	15 <sub>12</sub>
9	21	15 <sub>13</sub>	15 <sub>13</sub>	16 <sub>13</sub>	15 <sub>13</sub>	15 <sub>13</sub>	16 <sub>13</sub>
14	29	20 <sub>17</sub>	20 <sub>17</sub>	20 <sub>16</sub>	21 <sub>18</sub>	21 <sub>18</sub>	21 <sub>18</sub>
24	22	17 <sub>15</sub>	17 <sub>15</sub>	16 <sub>11</sub>	17 <sub>15</sub>	17 <sub>15</sub>	20 <sub>15</sub>
30	37	25 <sub>15</sub>	25 <sub>15</sub>	20 <sub>14</sub>	25 <sub>20</sub>	25 <sub>20</sub>	20 <sub>16</sub>
33	13	10 <sub>9</sub>	10 <sub>9</sub>	10 <sub>7</sub>	-	10 <sub>9</sub>	10 <sub>7</sub>
57	29	19 <sub>13</sub>	19 <sub>13</sub>	20 <sub>10</sub>	20 <sub>16</sub>	20 <sub>16</sub>	-
65	10	8 <sub>7</sub>	8 <sub>7</sub>	8 <sub>6</sub>	8 <sub>7</sub>	8 <sub>7</sub>	8 <sub>6</sub>
107	10	7 <sub>6</sub>	7 <sub>6</sub>	8 <sub>6</sub>	nc	7 <sub>6</sub>	8 <sub>6</sub>
118	16	12 <sub>10</sub>	12 <sub>10</sub>	12 <sub>8</sub>	12 <sub>10</sub>	12 <sub>10</sub>	13 <sub>11</sub>
300	8	6 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>	5 <sub>4</sub>	5 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>
749	14	10 <sub>7</sub>	10 <sub>7</sub>	10 <sub>7</sub>	11 <sub>8</sub>	11 <sub>8</sub>	10 <sub>7</sub>
1916	11	17 <sub>5</sub>	17 <sub>5</sub>	15 <sub>7</sub>	13 <sub>9</sub>	nc	nc

Tabela 6 – Parametrização linear,  $\lambda^2$

### 5.2.2 Modelagem Quadrática do Parâmetro de Carregamento

Nesta subseção são apresentados os casos onde as equações do fluxo de potência foram implementadas considerando a modelagem quadrática do parâmetro de carregamento e os multiplicadores de Lagrange foram utilizados de acordo com as formulações apresentadas. Novamente, todos os casos de convergência para os sistemas de 24 e 57 barras passaram de 87,011% e 81,986% para 87,303% e 82,834%, respectivamente, quando executado o fluxo de potência inicial, sendo omitidos dos comentários. Destaca-se o fato de nenhum valor negativo ser obtido com o uso da modelagem  $\rho^2$  nas restrições.

O uso dos multiplicadores de Lagrange iniciais unitários mostra-se uma estratégia inadequada para alguns sistemas nas condições descritas, como pode ser observado na Tabela 7. Sem o fluxo de potência inicial, o sistema de 14 barras, de pequeno porte e de convergência relativamente fácil, não obteve convergência quando utilizados os métodos de Newton e o passo tensorial pleno. Com o uso do fator de passo no termo de segunda ordem, a convergência foi alcançada, porém com grande número de iterações. A inserção do fluxo de potência inicial, embora tenha melhorado significativamente a convergência de alguns sistemas, como o de 14 barras, não obteve convergência para o sistema de 118 barras. O máximo carregamento obtido para o sistema de 107 barras nas condições  $T_0^0$  e  $T_1^0$  foi de 1,041%, onde algumas barras apresentaram magnitudes de suas tensões bastante baixas, sendo a menor com 0,4675 pu [V]. Os casos  $N_f^0$ ,  $T_{1f}^0$  e  $T_{2f}^0$  obtiveram carregamento máximo de 7,189% para o sistema de 107 barras, com a menor magnitude de tensão sendo 0,549 pu [V]. Nos demais casos do sistema de 107 barras, onde o carregamento máximo é de 7,677%, a menor magnitude de tensão é de 0,831 pu [V]. O sistema de 1916 barras, na condição  $T_{2f}^0$  obteve incremento no carregamento de 3,913%.

Os multiplicadores iniciais  $\lambda^1$  calculados por meio da Eq. (4.42), na estratégia quadrática do parâmetro de carregamento e sem fluxo de potência inicial, apresentaram maior quantidade de casos com valores diferentes dos obtidos via ANAREDE: a condição  $T_2^1$  foi a única a não obter convergência para o sistema de 6 barras; a condição  $P_2^1$  foi a única dentre todas as tabelas apresentadas a obter valor de 36,159% no carregamento do sistema de 9 barras; o sistema de 14 barras apresentou valor de 200,957% nas condições  $T_0^1$ ,  $P_0^1$  e  $P_1^1$ ; o sistema de 30 barras obteve 142,047% na condição  $N^1$  e 41,142% na condição  $T_1^1$ ; o sistema de 107 barras apresentou 5,528% de carregamento na condição  $N_f^1$  e 7,189% nas condições  $T_0^1$ ,  $T_1^1$ ,  $T_2^1$  e  $P_{0f}^1$ ; o sistema de 300 barras obteve

3,411% nas condições  $P_1^1$  e  $P_2^1$ . A condição  $N^0$  obteve  $\rho = 3,913\%$  e a condição  $T_0^0$  obteve 3,857%. O número de iterações necessárias para se obter a convergência é apresentado na Tabela 8.

sistema	$N^0$	$T_0^0$	$T_1^0$	$T_2^0$	$P_0^0$	$P_1^0$	$P_2^0$
6	8	7 <sub>4</sub>	7 <sub>4</sub>	7 <sub>4</sub>	9 <sub>8</sub>	7 <sub>6</sub>	7 <sub>5</sub>
9	16	11 <sub>7</sub>	11 <sub>7</sub>	11 <sub>7</sub>	16 <sub>14</sub>	10 <sub>8</sub>	10 <sub>8</sub>
14	nc	nc	nc	nc	74 <sub>37</sub>	74 <sub>37</sub>	74 <sub>37</sub>
24	9	9 <sub>8</sub>	7 <sub>5</sub>	7 <sub>5</sub>	8 <sub>6</sub>	7 <sub>5</sub>	7 <sub>5</sub>
30	19	18 <sub>7</sub>	18 <sub>7</sub>	18 <sub>7</sub>	15 <sub>10</sub>	15 <sub>10</sub>	15 <sub>10</sub>
33	19	nc	nc	15 <sub>8</sub>	7 <sub>7</sub>	11 <sub>9</sub>	17 <sub>10</sub>
57	32	12 <sub>8</sub>	13 <sub>7</sub>	13 <sub>7</sub>	7 <sub>7</sub>	18 <sub>10</sub>	18 <sub>10</sub>
65	10	8 <sub>6</sub>	8 <sub>6</sub>	8 <sub>5</sub>	27 <sub>12</sub>	8 <sub>6</sub>	8 <sub>5</sub>
107	10	22 <sub>10</sub>	22 <sub>10</sub>	nc	14 <sub>12</sub>	13 <sub>9</sub>	8 <sub>6</sub>
118	18	nc	nc	14 <sub>9</sub>	nc	25 <sub>17</sub>	14 <sub>9</sub>
300	9	10 <sub>6</sub>	8 <sub>5</sub>	7 <sub>5</sub>	7 <sub>7</sub>	7 <sub>4</sub>	7 <sub>5</sub>
749	16	9 <sub>7</sub>	15 <sub>7</sub>	12 <sub>9</sub>	11 <sub>10</sub>	15 <sub>9</sub>	12 <sub>10</sub>
1916	11	10 <sub>6</sub>	10 <sub>6</sub>	9 <sub>4</sub>	nc	9 <sub>6</sub>	8 <sub>6</sub>

sistema	$N_f^0$	$T_{0f}^0$	$T_{1f}^0$	$T_{2f}^0$	$P_{0f}^0$	$T_{1f}^0$	$T_{2f}^0$
6	8	6 <sub>5</sub>	6 <sub>5</sub>	6 <sub>3</sub>	5 <sub>5</sub>	5 <sub>4</sub>	6 <sub>3</sub>
9	13	14 <sub>6</sub>	14 <sub>6</sub>	14 <sub>6</sub>	8 <sub>6</sub>	8 <sub>6</sub>	8 <sub>6</sub>
14	15	12 <sub>6</sub>	12 <sub>6</sub>	12 <sub>6</sub>	11 <sub>6</sub>	11 <sub>6</sub>	11 <sub>6</sub>
24	16	11 <sub>6</sub>	11 <sub>6</sub>	11 <sub>6</sub>	10 <sub>5</sub>	10 <sub>5</sub>	10 <sub>5</sub>
30	14	18 <sub>9</sub>	18 <sub>9</sub>	18 <sub>9</sub>	16 <sub>10</sub>	16 <sub>10</sub>	16 <sub>10</sub>
33	7	6 <sub>5</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>6</sub>	5 <sub>3</sub>	5 <sub>3</sub>
57	15	13 <sub>5</sub>	13 <sub>5</sub>	13 <sub>5</sub>	12 <sub>9</sub>	12 <sub>9</sub>	12 <sub>9</sub>
65	9	6 <sub>5</sub>	7 <sub>4</sub>	7 <sub>4</sub>	6 <sub>5</sub>	10 <sub>5</sub>	7 <sub>5</sub>
107	13	7 <sub>5</sub>	9 <sub>5</sub>	9 <sub>5</sub>	6 <sub>4</sub>	nc	nc
118	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc
300	10	8 <sub>6</sub>	8 <sub>5</sub>	8 <sub>5</sub>	8 <sub>7</sub>	8 <sub>5</sub>	8 <sub>5</sub>
749	nc	nc	25 <sub>14</sub>	25 <sub>14</sub>	nc	19 <sub>12</sub>	19 <sub>12</sub>
1916	13	11 <sub>5</sub>	nc	10 <sub>5</sub>	7 <sub>6</sub>	12 <sub>10</sub>	nc

Tabela 7 – Parametrização quadrática,  $\lambda^0$

sistema	$N^1$	$T_0^1$	$T_1^1$	$T_2^1$	$P_0^1$	$P_1^1$	$P_2^1$
6	20	7 <sub>4</sub>	20 <sub>11</sub>	nc	7 <sub>5</sub>	18 <sub>13</sub>	15 <sub>10</sub>
9	56	7 <sub>4</sub>	33 <sub>15</sub>	33 <sub>15</sub>	7 <sub>6</sub>	29 <sub>17</sub>	92 <sub>51</sub>
14	nc	13 <sub>7</sub>	28 <sub>16</sub>	56 <sub>27</sub>	30 <sub>15</sub>	30 <sub>22</sub>	45 <sub>22</sub>
24	nc	10 <sub>8</sub>	nc	nc	29 <sub>17</sub>	nc	nc
30	75	11 <sub>6</sub>	41 <sub>17</sub>	78 <sub>33</sub>	14 <sub>11</sub>	nc	nc
33	24	nc	nc	12 <sub>9</sub>	7 <sub>7</sub>	14 <sub>10</sub>	11 <sub>9</sub>
57	nc	14 <sub>7</sub>	nc	nc	12 <sub>9</sub>	nc	nc
65	18	nc	nc	10 <sub>6</sub>	nc	11 <sub>8</sub>	10 <sub>7</sub>
107	19	11 <sub>6</sub>	11 <sub>6</sub>	11 <sub>6</sub>	30 <sub>19</sub>	10 <sub>6</sub>	10 <sub>6</sub>
118	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc
300	16	7 <sub>5</sub>	nc	nc	6 <sub>4</sub>	31 <sub>21</sub>	31 <sub>21</sub>
749	17	8 <sub>6</sub>	17 <sub>10</sub>	19 <sub>9</sub>	8 <sub>6</sub>	17 <sub>12</sub>	nc
1916	nc	6 <sub>5</sub>	nc	nc	nc	nc	nc

sistema	$N_f^1$	$T_{0f}^1$	$T_{1f}^1$	$T_{2f}^1$	$P_{0f}^1$	$P_{1f}^1$	$P_{2f}^1$
6	9	6 <sub>5</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>6</sub>	6 <sub>5</sub>	6 <sub>4</sub>
9	13	9 <sub>6</sub>	9 <sub>6</sub>	9 <sub>6</sub>	nc	9 <sub>6</sub>	9 <sub>6</sub>
14	34	22 <sub>12</sub>	30 <sub>11</sub>	30 <sub>11</sub>	14 <sub>9</sub>	22 <sub>13</sub>	22 <sub>13</sub>
24	15	14 <sub>9</sub>	11 <sub>6</sub>	11 <sub>6</sub>	13 <sub>9</sub>	10 <sub>7</sub>	10 <sub>7</sub>
30	19	nc	19 <sub>8</sub>	19 <sub>8</sub>	16 <sub>8</sub>	20 <sub>9</sub>	20 <sub>9</sub>
33	8	6 <sub>5</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>	5 <sub>5</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>
57	21	nc	19 <sub>8</sub>	19 <sub>8</sub>	16 <sub>9</sub>	19 <sub>12</sub>	19 <sub>12</sub>
65	8	6 <sub>5</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>5</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>
107	9	nc	7 <sub>4</sub>	7 <sub>4</sub>	9 <sub>6</sub>	7 <sub>4</sub>	7 <sub>4</sub>
118	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc
300	9	7 <sub>4</sub>	7 <sub>4</sub>	7 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>
749	nc	nc	nc	nc	40 <sub>19</sub>	40 <sub>19</sub>	40 <sub>19</sub>
1916	21	34 <sub>12</sub>	11 <sub>4</sub>	11 <sub>4</sub>	12 <sub>10</sub>	nc	nc

Tabela 8 – Parametrização quadrática,  $\lambda^1$

A inicialização dos multiplicadores de Lagrange como  $\lambda^2$  mostrou-se, no geral, a pior condição inicialização para os multiplicadores de Lagrange nas condições apresentadas nesta subseção. Isso pode ser observado na Tabela 9, onde nota-se um grande número de casos sem convergência, em especial quando não é realizado o fluxo de potência inicial. Nas condições  $N_{f}^2$ ,  $T_{0f}^2$ ,  $T_{1f}^2$  e  $T_{2f}^2$ , os resultados obtidos para o sistema de 107 barras foram 7,189%.

sistema	$N^2$	$T_0^2$	$T_1^2$	$T_2^2$	$P_0^2$	$P_1^2$	$P_2^2$
6	16	17 <sub>13</sub>	17 <sub>13</sub>	11 <sub>9</sub>	12 <sub>10</sub>	17 <sub>14</sub>	11 <sub>9</sub>
9	15	10 <sub>9</sub>	10 <sub>9</sub>	10 <sub>8</sub>	11 <sub>11</sub>	9 <sub>8</sub>	10 <sub>8</sub>
14	19	nc	nc	27 <sub>15</sub>	12 <sub>10</sub>	12 <sub>10</sub>	16 <sub>12</sub>
24	16	11 <sub>7</sub>	11 <sub>7</sub>	11 <sub>7</sub>	12 <sub>9</sub>	12 <sub>9</sub>	12 <sub>9</sub>
30	37	16 <sub>9</sub>	16 <sub>9</sub>	nc	17 <sub>12</sub>	17 <sub>12</sub>	16 <sub>9</sub>
33	15	nc	nc	nc	9 <sub>8</sub>	9 <sub>8</sub>	11 <sub>8</sub>
57	19	22 <sub>9</sub>	22 <sub>9</sub>	22 <sub>9</sub>	17 <sub>10</sub>	17 <sub>10</sub>	16 <sub>10</sub>
65	nc	nc	nc	nc	12 <sub>9</sub>	nc	nc
107	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc
118	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc
300	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc
749	nc	nc	14 <sub>9</sub>	14 <sub>9</sub>	nc	13 <sub>9</sub>	13 <sub>9</sub>
1916	nc	nc	54 <sub>26</sub>	54 <sub>26</sub>	11 <sub>9</sub>	nc	nc

sistema	$N_f^2$	$T_{0f}^2$	$T_{1f}^2$	$T_{2f}^2$	$P_{0f}^2$	$P_{1f}^2$	$P_{2f}^2$
6	14	11 <sub>8</sub>	11 <sub>8</sub>	10 <sub>8</sub>	10 <sub>10</sub>	11 <sub>10</sub>	10 <sub>8</sub>
9	15	10 <sub>8</sub>	10 <sub>8</sub>	10 <sub>8</sub>	11 <sub>10</sub>	10 <sub>8</sub>	10 <sub>8</sub>
14	17	19 <sub>11</sub>	19 <sub>11</sub>	65 <sub>29</sub>	12 <sub>11</sub>	12 <sub>11</sub>	nc
24	14	11 <sub>7</sub>	11 <sub>7</sub>	11 <sub>7</sub>	10 <sub>7</sub>	10 <sub>7</sub>	9 <sub>6</sub>
30	18	16 <sub>11</sub>	16 <sub>11</sub>	15 <sub>8</sub>	16 <sub>11</sub>	16 <sub>11</sub>	15 <sub>11</sub>
33	10	7 <sub>6</sub>	7 <sub>6</sub>	7 <sub>5</sub>	7 <sub>7</sub>	7 <sub>6</sub>	7 <sub>5</sub>
57	28	22 <sub>13</sub>	22 <sub>13</sub>	22 <sub>13</sub>	nc	nc	nc
65	9	7 <sub>5</sub>	7 <sub>5</sub>	7 <sub>5</sub>	nc	nc	7 <sub>5</sub>
107	11	10 <sub>6</sub>	10 <sub>6</sub>	10 <sub>6</sub>	8 <sub>7</sub>	8 <sub>7</sub>	9 <sub>6</sub>
118	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc
300	9	7 <sub>5</sub>	7 <sub>5</sub>	7 <sub>5</sub>	7 <sub>6</sub>	7 <sub>6</sub>	7 <sub>5</sub>
749	nc	nc	nc	nc	nc	nc	nc
1916	12	48 <sub>18</sub>	48 <sub>18</sub>	48 <sub>18</sub>	nc	nc	nc

Tabela 9 – Parametrização quadrática,  $\lambda^2$

### 5.2.3 Considerando os Limites de Potência Reativa Gerada

Para uma análise dos sistemas em situações mais práticas, devem ser considerados os limites de potência reativa gerada nas barras PV. A Tabela 10 apresenta o número de iterações para convergência utilizando a parametrização linear no processo iterativo, enquanto que a Tabela 11 utiliza a parametrização quadrática, ambos considerando os limites de potência reativa gerada e com o termo Tensorial sendo calculado no processo iterativo apenas após a terceira iteração.

Os multiplicadores de Lagrange iniciais utilizados para obtenção dos dados da Tabela 10 foram obtidos da forma apresentada anteriormente. Percebe-se que a parametrização linear necessita de uma menor quantidade de iterações para convergência de sistemas de pequeno porte quando os multiplicadores são inicializados com a metodologia proposta,  $\lambda^1$ . No caso da inicialização conforme  $\lambda^2$ , o sistema de 750 barras apresenta os únicos casos de obtenção de valores negativos para o parâmetro de carregamento na solução final.

Sistema	$\lambda^0$			$\lambda^1$			$\lambda^2$		
	$N_f^0$	$T_{3f}^0$	$P_{3f}^0$	$N_f^1$	$T_{3f}^1$	$P_{3f}^1$	$N_f^2$	$T_{3f}^2$	$P_{3f}^2$
14	14	12 <sub>6</sub>	12 <sub>6</sub>	10	8 <sub>5</sub>	8 <sub>5</sub>	26	19 <sub>12</sub>	19 <sub>12</sub>
24	12	11 <sub>3</sub>	10 <sub>2</sub>	14	12 <sub>3</sub>	11 <sub>3</sub>	15	13 <sub>3</sub>	12 <sub>3</sub>
30	15	12 <sub>5</sub>	12 <sub>5</sub>	11	9 <sub>6</sub>	9 <sub>6</sub>	25	19 <sub>11</sub>	19 <sub>11</sub>
57	14	12 <sub>5</sub>	13 <sub>4</sub>	13	11 <sub>8</sub>	11 <sub>8</sub>	21	16 <sub>8</sub>	16 <sub>8</sub>
118	38	37 <sub>10</sub>	37 <sub>10</sub>	39	39 <sub>4</sub>	37 <sub>4</sub>	52	46 <sub>7</sub>	43 <sub>3</sub>
300	37	33 <sub>28</sub>	34 <sub>28</sub>	39	33 <sub>26</sub>	33 <sub>24</sub>	36	33 <sub>28</sub>	34 <sub>28</sub>
750	37	33 <sub>16</sub>	33 <sub>16</sub>	35	33 <sub>24</sub>	33 <sub>24</sub>	-	-	-
1916	51	38 <sub>27</sub>	30 <sub>25</sub>	44	30 <sub>18</sub>	31 <sub>20</sub>	61	41 <sub>6</sub>	28 <sub>4</sub>

Tabela 10 – Parametrização linear considerando os limites de potência reativa

Para a obtenção dos resultados Tabela 11 foram considerados os multiplicadores de Lagrange apresentados neste trabalho, porém de forma normalizada. Experimentalmente, notou-se que a normalização dos multiplicadores na parametrização quadrática fornece melhores resultados. O valor inicial do parâmetro de carregamento, que influi de forma mais relevante neste tipo de parametrização, foi de 0,5. Sob estas condições, os sistemas teste apresentaram uma quantidade pequena de casos de não convergência e a inicialização dos multiplicadores de

Lagrange com  $\lambda^0$  possui resultados equivalentes aos inicializados por  $\lambda^1$ , sendo inclusive melhor em alguns sistemas.

Sistema	$\lambda^0$			$\lambda^1$			$\lambda^2$		
	$N_f^0$	$T_{3f}^0$	$P_{3f}^0$	$N_f^1$	$T_{3f}^1$	$P_{3f}^1$	$N_f^2$	$T_{3f}^2$	$P_{3f}^2$
14	12	10 <sub>5</sub>	10 <sub>5</sub>	12	10 <sub>5</sub>	nc	15	11 <sub>5</sub>	11 <sub>5</sub>
24	16	14 <sub>4</sub>	11 <sub>3</sub>	13	11 <sub>5</sub>	10 <sub>5</sub>	17	14 <sub>7</sub>	14 <sub>8</sub>
30	14	12 <sub>6</sub>	12 <sub>6</sub>	13	12 <sub>5</sub>	12 <sub>4</sub>	16	12 <sub>5</sub>	12 <sub>5</sub>
57	14	nc	13 <sub>5</sub>	13	12 <sub>7</sub>	12 <sub>7</sub>	15	13 <sub>6</sub>	nc
118	37	35 <sub>16</sub>	35 <sub>17</sub>	38	48 <sub>8</sub>	36 <sub>4</sub>	56	49 <sub>8</sub>	49 <sub>8</sub>
300	33	28 <sub>13</sub>	26 <sub>10</sub>	34	30 <sub>9</sub>	27 <sub>7</sub>	35	32 <sub>6</sub>	26 <sub>2</sub>
750	19	17 <sub>7</sub>	17 <sub>7</sub>	17	16 <sub>13</sub>	16 <sub>13</sub>	nc	24 <sub>12</sub>	23 <sub>9</sub>
1916	29	25 <sub>8</sub>	23 <sub>8</sub>	32	32 <sub>4</sub>	22 <sub>3</sub>	35	28 <sub>4</sub>	27 <sub>3</sub>

Tabela 11 – Parametrização quadrática considerando os limites de potência reativa

Em ambas as parametrizações, o uso de modelos Tensoriais tende a reduzir o número de iterações em relação ao método de Newton, independentemente da escolha inicial dos multiplicadores. Na modelagem linear do parâmetro de carregamento, considerando o número de iterações para convergência, tem-se uma vantagem da inicialização com a metodologia proposta  $\lambda^1$  em relação às demais. Já na modelagem quadrática do parâmetro de carregamento, onde os multiplicadores iniciais foram normalizados, a inicialização unitária dos multiplicadores,  $\lambda^0$ , fornece melhores resultados, indicando uma ligeira redução da necessidade de cálculos adicionais para a estimação destes multiplicadores.

### 5.3 Inicialização do Termo de Segunda Ordem

Conforme apresentado, as equações que representam o fluxo de potência possuem natureza quadrática quando formuladas em coordenadas cartesianas. O uso do termo de segunda ordem possui forte influência no número de iterações, como demonstrado nas Tabelas 4 à 11. Nas primeiras iterações, em especial a primeira, o ponto corrente pode encontrar-se muito longe da solução do problema, o que pode tornar inadequada a utilização do termo tensorial nessa iteração [37].

O fator  $\beta$  tem a função de limitar o termo de segunda ordem, obtendo a melhor solução dentro do intervalo  $0 \leq \beta \leq 1$ . O processo

se repete na iteração seguinte, a partir de um novo ponto, e não há garantias de que haja convergência global com o uso desta otimização a cada iteração. Ao se alterar a trajetória de solução em qualquer ponto do processo iterativo surge um novo problema e a ausência de dados recursivos pode ocasionar divergência do processo.

Esta situação pode ser exemplificada com o sistema de 57 barras com formulação convencional linear do parâmetro de carregamento. A condição  $P_{0f}^1$  necessitou de 30 iterações para convergência, onde em 22 destas iterações o termo tensorial foi utilizado e o resultado obtido foi um carregamento máximo de 58,117%. Na condição  $P_{1f}^1$ , onde apenas o incremento obtido pelo método de Newton é utilizado na iteração inicial, o sistema converge em 8 iterações, onde em 5 delas o termo tensorial é utilizado e o resultado obtido é de  $\rho = 82,934\%$ .

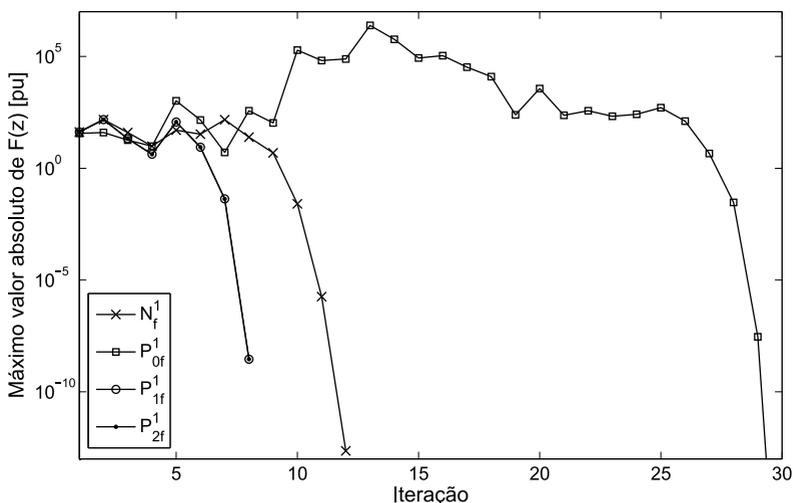


Figura 6 – Sistema de 57 barras - Trajetória de convergência

A Figura 6 ilustra a trajetória de convergência para o sistema de 57 barras com parametrização linear. O desbalanço inicial é de 42,1419 pu para o método de Newton e 36,0769 pu quando o termo tensorial com otimização do passo é utilizado desde a primeira iteração. Embora a diferença seja pequena em termos de valor absoluto, a trajetória de convergência é completamente alterada. As trajetórias quando o termo tensorial é iniciado na segunda e terceira iterações são idênticas, pois na segunda iteração o desbalanço do método de Newton fornece valor inferior ao do desbalanço obtido com o uso do termo tensorial, forne-

cendo  $\beta = 0$ . A trigésima iteração da condição  $P_{0f}^1$  foi omitida para melhor adequação do gráfico, sendo seu valor de  $6,8850 \times 10^{-24}$ .

Em outras situações, o uso do termo tensorial desde a primeira iteração pode favorecer o processo iterativo, como ilustrado na Figura 7. Nesta figura é representada a trajetória de convergência do sistema de 9 barras com multiplicadores de Lagrange iniciais  $\lambda^1$ , obtidos com a Eq. (4.42), sem fluxo de potência inicial e com modelagem linear do parâmetro de carregamento. O desbalanço inicial do método de Newton é 137,8972 pu enquanto que o uso do passo tensorial na primeira iteração obtém 59,5563 pu de desbalanço. O uso do termo tensorial desde a primeira iteração reduz significativamente o número de iterações necessárias para a convergência, sendo inferior até o mesmo aos casos onde o uso deste termo se inicia na segunda e terceira iterações.

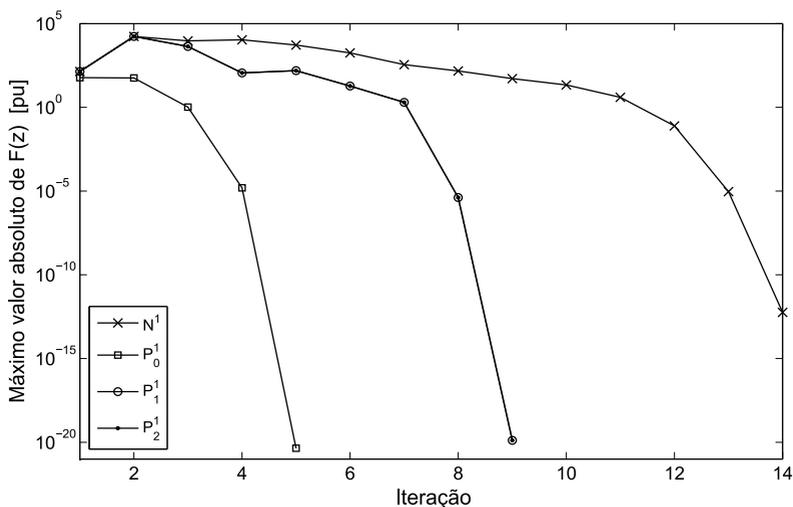


Figura 7 – Sistema de 9 barras - Trajetória de convergência

### 5.4 Parametrização Quadrática das Restrições

O uso de  $\rho^2$  nas restrições de balanço de potência do problema de máximo carregamento evita casos de resposta negativa pelo programa, o que pode ocorrer nos casos onde este termo é utilizado de forma linear. Na parametrização linear, a solução negativa equivaleria a um corte no

carregamento do sistema, enquanto que no caso quadrático há sempre um aumento de carregamento. Entretanto, surge a necessidade de se computar o valor inicial do parâmetro  $\rho$ , o que pode provocar grande variação na trajetória de convergência.

#### 5.4.1 Não Negatividade do Carregamento

Como demonstrado no capítulo anterior, com a utilização de modelagens lineares para as restrições e função objetivo, algumas condições iniciais podem conduzir o resultado do problema de fluxo de potência ótimo para uma condição de parâmetro de carregamento negativo, caso nenhuma restrição a isso seja adicionada ao problema.

Para exemplificação, foram simulados os problemas de fluxo de potência ótimo utilizando a modelagem linear e quadrática com relação ao parâmetro de carregamento nas restrições que representam o problema de fluxo de potência. Em ambas as simulações foram utilizadas apenas as formulações baseadas no método de Newton, sem o uso dos termos de segunda ordem das funções Lagrangeanas. Para exemplificação foi escolhido o sistema de 24 barras, e os multiplicadores de Lagrange iniciais foram adotados como  $\lambda_p = \lambda_q = \lambda_v = -1, 0$ . A inicialização do problema de otimização foi feita considerando partida plana de tensão para as barras PQ, ou seja, as magnitudes das tensões em valores por unidade é unitária e os ângulos iniciais nulos para estas barras. A escolha por este sistema e a inicialização dos multiplicadores utilizados foi realizada apenas como exemplificação por se tratar de um sistema de pequeno porte e de fácil demonstração de seus resultados. Os mesmos conceitos se aplicam a outros exemplos de maior porte e que também apresentam valores negativos como solução, conforme apresentados na Seção 5.2.

Nas condições apresentadas, o uso do método de Newton utilizando a parametrização linear das restrições fornece como resultado  $\rho = -172,942\%$ . Este resultado é inviável, pois sugere como solução ótima um corte de mais de 100% da demanda do sistema no caso base, embora seja obtido como solução para o problema formulado na Seção 4.3.1. A Tabela 12 apresenta o resultado obtido na convergência do problema para  $\rho = -172,942\%$ .

barra	tipo	V [pu]	ang.	Pg [MW]	Qg [Mvar]	Pd [MW]	Qd [Mvar]
1	PV	1,100	111,57	172,00	212,38	-78,78	-16,05
2	PV	1,100	111,35	172,00	190,70	-70,75	-14,59
3	PQ	0,920	111,72	0,00	0,00	-131,29	-26,99
4	PQ	0,874	104,39	0,00	0,00	-53,98	-10,94
5	PQ	0,929	104,35	0,00	0,00	-51,79	-10,21
6	PQ	0,947	98,31	0,00	0,00	-99,20	-20,42
7	PV	1,050	130,58	240,00	205,00	-91,18	-18,24
8	PQ	0,884	120,26	0,00	0,00	-124,73	-25,53
9	PQ	0,684	90,07	0,00	0,00	-127,65	-26,26
10	PQ	0,760	89,97	0,00	0,00	-142,24	-29,18
11	PQ	0,726	59,26	0,00	0,00	0,00	0,00
12	PQ	0,711	47,94	0,00	0,00	0,00	0,00
13	folga	1,100	0,00	-3601,20	4516,72	-193,30	-39,39
14	PV	1,050	84,91	0,00	1134,62	-141,51	-28,45
15	PV	1,000	118,93	215,00	-47,88	-231,22	-46,68
16	PV	1,020	110,14	155,00	599,78	-72,94	-14,59
17	PQ	0,996	121,82	0,00	0,00	0,00	0,00
18	PV	1,000	126,88	400,00	-89,08	-242,90	-49,60
19	PQ	1,015	96,11	0,00	0,00	-132,02	-26,99
20	PQ	1,056	82,99	0,00	0,00	-93,37	-18,96
21	PV	1,000	126,74	400,00	-26,72	0,00	0,00
22	PV	1,000	131,99	300,00	-32,82	0,00	0,00
23	PV	1,095	75,82	660,00	1939,52	0,00	0,00
24	PQ	0,961	116,47	0,00	0,00	0,00	0,00
Total				-887,20	4207,60	-2078,83	-423,06

Tabela 12 – Sistema de 24 barras - resultados com parametrização linear

Os resultados demonstram que os níveis de tensão, embora não se encaixando dentro dos padrões normativos, não se apresentam excessivamente baixos, sendo que a menor tensão possui magnitude de 0,684 pu [V]. No entanto, as demandas negativas sugerem uma geração de potências nas barras PQ do sistema.

Conforme citado na Seção 4.6, uma estratégia simples pode ser implementada para contornar o problema do corte de carga obtido como resultado do problema de máximo carregamento. Com a parametrização quadrática do carregamento nas restrições de balanço de potência, mesmo valores negativos de  $\rho$  fornecem um incremento de demanda no sistema.

A Tabela 13 apresenta o resultado de convergência para o programa utilizando a formulação quadrática para o parâmetro de carregamento. O valor obtido foi de  $\rho = -9,3280$  como resultado final da função objetivo. Embora o valor também seja negativo, a alteração na formulação do problema possibilita a obtenção do máximo carregamento do sistema com  $\rho^2 = (-9,3280)^2$ , indicando um aumento de 87,0110% com relação à demanda base. Os valores das tensões nas barras PQ apresentam-se mais elevados que no caso da modelagem anterior, sendo a tensão mínima obtida de 0,812 pu [V].

barra	tipo	V [pu]	ang.	Pg [MW]	Qg [Mvar]	Pd [MW]	Qd [Mvar]
1	PV	1,100	-77,01	172,00	356,89	201,97	41,14
2	PV	1,100	-77,09	172,00	283,16	181,40	37,40
3	PQ	0,843	-67,61	0,00	0,00	336,62	69,19
4	PQ	0,884	-73,03	0,00	0,00	138,39	28,05
5	PQ	0,946	-74,15	0,00	0,00	132,78	26,18
6	PQ	0,947	-75,48	0,00	0,00	254,34	52,36
7	PV	1,050	-88,81	240,00	366,44	233,76	46,75
8	PQ	0,864	-85,81	0,00	0,00	319,79	65,45
9	PQ	0,812	-57,40	0,00	0,00	327,27	67,32
10	PQ	0,862	-62,44	0,00	0,00	364,67	74,80
11	PQ	0,884	-32,17	0,00	0,00	0,00	0,00
12	PQ	0,854	-24,93	0,00	0,00	0,00	0,00
13	folga	1,100	0,00	3018,62	1396,72	495,58	100,99
14	PV	1,050	-40,09	0,00	596,14	362,80	72,93
15	PV	1,000	-39,13	215,00	267,35	592,83	119,69
16	PV	1,020	-36,30	155,00	166,00	187,01	37,40
17	PQ	1,007	-34,89	0,00	0,00	0,00	0,00
18	PV	1,000	-35,13	400,00	100,93	622,75	127,17
19	PQ	1,024	-31,65	0,00	0,00	338,49	69,19
20	PQ	1,059	-24,24	0,00	0,00	239,38	48,62
21	PV	1,000	-33,72	400,00	-38,32	0,00	0,00
22	PV	1,000	-27,00	300,00	-45,26	0,00	0,00
23	PV	1,095	-19,16	660,00	624,60	0,00	0,00
24	PQ	0,899	-48,44	0,00	0,00	0,00	0,00
Total				5732,62	4074,66	5329,83	1084,67

Tabela 13 – Sistema de 24 barras - resultados com parametrização quadrática

A título de comparação da solução obtida, o problema de máximo carregamento do sistema de 24 barras foi simulado no software comercial ANAREDE, que faz uso do método da continuação para obtenção do ponto de carregamento crítico do sistema. Para que a comparação seja adequada, nesta simulação também foram desconsiderados os limites das potências reativas geradas e o mínimo valor incremental para obtenção da solução foi reduzido para 0,0001. O resultado obtido é apresentado na Tabela 14, cujo valor obtido para o máximo carregamento do sistema foi de 87,011%.

barra	tipo	V [pu]	ang.	Pg [MW]	Qg [Mvar]	Pd [MW]	Qd [Mvar]
1	PV	1,100	-77,0	172,0	356,5	202,0	41,1
2	PV	1,100	-77,0	172,0	282,8	181,4	37,4
3	PQ	0,843	-67,6	0,0	0,0	336,6	69,2
4	PQ	0,884	-73,0	0,0	0,0	138,4	28,1
5	PQ	0,947	-74,1	0,0	0,0	132,8	26,2
6	PQ	0,947	-75,4	0,0	0,0	254,3	52,4
7	PV	1,050	-88,7	240,0	366,1	233,8	46,8
8	PQ	0,864	-85,7	0,0	0,0	319,8	65,5
9	PQ	0,812	-57,4	0,0	0,0	327,3	67,3
10	PQ	0,862	-62,4	0,0	0,0	364,7	74,8
11	PQ	0,884	-32,2	0,0	0,0	0,0	0,0
12	PQ	0,854	-24,9	0,0	0,0	0,0	0,0
13	folga	1,100	0,0	3018,2	1395,6	495,6	101,0
14	PV	1,050	-40,1	0,0	595,7	362,8	72,9
15	PV	1,000	-39,1	215,0	267,1	592,8	119,7
16	PV	1,020	-36,3	155,0	166,0	187,0	37,4
17	PQ	1,007	-34,9	0,0	0,0	0,0	0,0
18	PV	1,000	-35,1	400,0	100,9	622,7	127,2
19	PQ	1,024	-31,6	0,0	0,0	338,5	69,2
20	PQ	1,059	-24,2	0,0	0,0	239,4	48,6
21	PV	1,000	-33,7	400,0	-38,3	0,0	0,0
22	PV	1,000	-27,0	300,0	-45,3	0,0	0,0
23	PV	1,095	-19,2	660,0	624,2	0,0	0,0
24	PQ	0,899	-48,4	0,0	0,0	0,0	0,0
Total				5732,2	4071,3	5329,9	1084,8

Tabela 14 – Sistema de 24 barras - resultados obtidos com ANAREDE

Como pode ser observado, a diferença entre os resultados obtidos via ANAREDE e com a metodologia apresentada é praticamente desprezível.

#### 5.4.2 Condição Inicial do Parâmetro de Carregamento

Na modelagem quadrática do parâmetro de carregamento, as matrizes que compõem o sistema a ser solucionado, tanto no método de Newton quanto no método Tensorial, apresentam explicitamente o parâmetro  $\rho$ , conforme apresentado na Eq. (4.52) e reescrito a seguir

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t \boldsymbol{\lambda}_e \\ 1 + 2\rho_e \mathbf{r}^t \boldsymbol{\lambda}_e \\ -\mathbf{g}(\mathbf{x}_e, \rho_e) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{z}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0(\boldsymbol{\lambda}_e) & \mathbf{0} & \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)^t \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{r}^t \boldsymbol{\lambda}_e & 2\rho_e \mathbf{r}^t \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}_e) & 2\rho_e \mathbf{r} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{d}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\Delta \mathbf{x})^t \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ 2\Delta \rho \mathbf{r}^t \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{g}_0(\Delta \mathbf{x}) + \Delta \rho^2 \mathbf{r} \end{bmatrix}$$

Faz-se necessário um ajuste para melhor inicialização do valor de  $\rho$  para cada sistema. Esta dependência inicial de  $\rho$  não existe na parametrização linear do carregamento, em que a escolha do valor inicial não altera a trajetória de convergência.

Nas tabelas apresentadas na Seção 5.2, todas as simulações foram realizadas com valor unitário para o parâmetro de carregamento, justificando, ao menos parcialmente, a quantidade expressiva de casos de não convergência e o elevado número de iterações para alcançar a convergência em alguns casos.

Para ilustração da dependência da condição inicial de  $\rho$  na parametrização quadrática serão utilizados os sistemas de 14 e 118 barras, embora os conceitos possam ser extrapolados aos demais sistemas e diferentes condições. Por simplificação foram simulados apenas os métodos definidos como  $N$ ,  $T_0$  e  $P_0$ , representando os métodos de Newton, Tensorial com passo completo e Tensorial com passo otimizado, respectivamente.

O número de iterações necessárias para a convergência do sistema de 14 barras para diferentes valores iniciais de  $\rho$  é apresentado na Tabela 15, onde foram considerados valores iniciais unitários para

os multiplicadores de Lagrange. O pior caso apresentado é a simulação com valor inicial unitário para  $\rho$ , obtendo convergência apenas para o método  $P_0^0$ , e com elevado número de iterações. Com exceção do caso onde o valor inicial do parâmetro de carregamento é 2, a condição  $P_0^0$  mostrou-se tão ou mais estável e com menor quantidade de iterações necessárias para a convergência quando comparada às demais. Sendo  $\rho$  o percentual de carregamento do sistema, a escolha do valor inicial 300 deve-se a proximidade com o valor obtido como solução do processo de otimização. Valores inferiores à unidade apresentaram grande número de casos de não convergência e foram omitidos.

	$\rho$ inicial						
	1	2	3	4	5	6	7
$N_0^0$	nc	89	22	19	15	17	18
$T_0^0$	nc	55 <sub>27</sub>	19 <sub>15</sub>	19 <sub>11</sub>	53 <sub>26</sub>	16 <sub>12</sub>	10 <sub>7</sub>
$P_0^0$	74 <sub>37</sub>	69 <sub>43</sub>	19 <sub>15</sub>	19 <sub>12</sub>	13 <sub>9</sub>	7 <sub>6</sub>	6 <sub>5</sub>

	$\rho$ inicial						
	8	9	10	15	20	100	300
$N_0^0$	14	15	16	13	15	91	75
$T_0^0$	11 <sub>7</sub>	11 <sub>7</sub>	12 <sub>7</sub>	12 <sub>7</sub>	13 <sub>9</sub>	10 <sub>6</sub>	13 <sub>8</sub>
$P_0^0$	6 <sub>5</sub>	6 <sub>6</sub>	6 <sub>6</sub>	6 <sub>5</sub>	6 <sub>5</sub>	8 <sub>7</sub>	11 <sub>7</sub>

Tabela 15 – Sistema de 14 barras - iterações para diferentes condições iniciais de  $\rho$

Para o sistema de 118 barras foram considerados os multiplicadores de Lagrange iniciais obtidos com o uso da Eq. (4.42),  $\lambda^1$ , e a quantidade de iterações necessárias para convergência para diferentes inicializações de  $\rho$  são apresentados na Tabela 16. No caso de valor 1 para  $\rho$ , não houve convergência para nenhum dos métodos, deixando nítida a forte sensibilidade dos valores iniciais do parâmetro de carregamento, pois ocorre convergência no método  $T_0^1$  quando  $\rho = 0,9999$ , sendo uma variação muito pequena. Para os valores inteiros maiores que 1, o método de Newton apresentou dificuldades, obtendo convergência apenas para situações específicas, como 139 e 140, e 150, 151 e 152, enquanto que os demais valores próximos a estes não obtiveram convergência. Os métodos tensoriais, de modo geral, apresentaram melhores resultados para diferentes valores de inicialização do parâmetro de carregamento.

	$\rho$ inicial					
	0,01	0,04	0,05	0,5	0,9	0,99
$N^0$	nc	20	17	60	nc	28
$T_0^0$	18 <sub>15</sub>	17 <sub>12</sub>	16 <sub>11</sub>	12 <sub>10</sub>	nc	64 <sub>31</sub>
$P_0^0$	17 <sub>13</sub>	11 <sub>10</sub>	10 <sub>9</sub>	nc	45 <sub>28</sub>	nc

	$\rho$ inicial					
	0,9999	3	20	40	92	100
$N^0$	nc	nc	nc	nc	nc	nc
$T_0^0$	33 <sub>22</sub>	20 <sub>10</sub>	62 <sub>33</sub>	15 <sub>13</sub>	12 <sub>9</sub>	nc
$P_0^0$	nc	12 <sub>8</sub>	46 <sub>22</sub>	15 <sub>13</sub>	12 <sub>9</sub>	12 <sub>10</sub>

Tabela 16 – Sistema de 118 barras - iterações para diferentes condições iniciais de  $\rho$

## 5.5 Tempos de Processamento

Atualmente, com o avanço constante da capacidade de processamento dos computadores, tem-se dado um pouco menos de atenção ao quesito tempo computacional e maior ênfase à robustez e qualidade da solução. Entretanto, com o surgimento de novos métodos cada vez mais complexos, esforços são realizados na tentativa de tornar os programas mais adequados ao processamento em tempo real. Para demonstração dos tempos computacionais foram selecionados apenas os sistemas de maior porte, de 300, 749 e 1916 barras devido à dificuldade de medição dos tempos muito baixos encontrados em sistemas menores.

### 5.5.1 Decomposição na Parametrização Linear e Quadrática

O uso da estratégia de decomposição apresentada na Seção 4.7 não altera a trajetória de convergência do problema. Trata-se apenas de dividir o problema em parcelas menores, com operações matriciais mais rápidas, com mesmo número de iterações e valores de incrementos e desbalanços a cada iteração.

Para exemplificar essa situação, utilizando a parametrização linear do parâmetro de carregamento, foi considerado apenas o método de Newton com multiplicadores de Lagrange iniciais dados pela Eq. (4.42),  $\lambda^1$ , com fluxo de potência inicial. Os tempos computacionais,

em segundos, referentes a esta condição com e sem o uso de decomposição são apresentados na Tabela 17. Estes tempos referem-se apenas ao processo iterativo para obtenção do ponto de máximo carregamento dos sistemas, não sendo computados os fluxos de potência iniciais.

Parametrização linear			
Sistema	tempo sem decomposição [s]	tempo com decomposição [s]	redução %
300	0,6217	0,5748	8,16
750	6,1451	5,5983	9,77
1916	30,674	24,183	26,84

Tabela 17 – Tempos computacionais com parametrização linear

Para simular os tempos computacionais utilizando a parametrização quadrática, foi utilizado o método de Newton com multiplicadores de Lagrange iniciais unitários e sem fluxo de potência inicial. Os tempos computacionais destas simulações são apresentados na Tabela 18.

Parametrização quadrática			
Sistema	tempo sem decomposição [s]	tempo com decomposição [s]	redução %
300	0,5992	0,5702	5,06
750	6,7874	6,4095	5,90
1916	30,476	27,533	10,69

Tabela 18 – Tempos computacionais com parametrização quadrática

Não é adequada uma comparação direta entre os tempos computacionais das Tabelas 17 e 18, pois possuem número de iterações e condições iniciais distintas. Porém, em ambos os casos, nota-se que o ganho de tempo utilizando a estratégia de decomposição é maior quanto maior a dimensão do sistema, e consequentemente maior a quantidade de equações.

### 5.5.2 Decomposição nos Métodos de Newton e Tensorial

Para uma comparação do tempo de processamento para cada iteração do método de Newton ou Tensorial, nas parametrizações linear e quadrática, foi utilizada a decomposição. Os tempos relacionados ao modelo Tensorial referem-se ao caso onde o termo de segunda ordem é calculado em todas as iterações, incluindo o subproblema de otimização do incremento relativo ao termo de segunda ordem.

Na Tabela 19 são apresentados os tempos computacionais, por iteração, dos métodos de Newton e Tensorial, bem como a relação entre eles. A relação entre os tempos por iteração dos métodos Tensorial e Newton é maior quanto maior a dimensão do problema. Todos o tempos desta tabela foram obtidos com os multiplicadores de Lagrange iniciados como  $\lambda^1$  e com fluxo inicial, não sendo incluído o tempo para execução do fluxo inicial.

Parametrização linear			
Sistema	Newton [s]	Tensor [s]	Tensor/Newton
300	0,0718	0,1573	2,191
750	0,4306	1,0165	2,261
1916	2,6870	6,5678	2,444

Tabela 19 – Tempos computacionais por iteração com parametrização linear

O tempo computacional por iteração para o caso de parametrização quadrática é apresentado na Tabela 20. Para a obtenção de casos convergentes para o método de Newton e Tensorial nas mesmas condições, os multiplicadores de Lagrange foram iniciados com valores unitários. No entanto, para se obter convergência, no sistema de 1916 barras foi realizado o fluxo de potência inicial, o que não ocorreu nos sistemas de 300 e 750 barras. Como o tempo para execução do fluxo de potência inicial não foi incluído na tabela e os tempos computacionais são apresentados por iteração, a execução do fluxo de potência inicial para o sistema de 1916 barras não afeta de forma significativa os resultados apresentados.

Ao contrário da parametrização linear, a relação entre os tempos computacionais por iteração para os métodos de Newton e Tensorial não segue uma lógica crescente ou decrescente, embora os valores rela-

cionados ao método de Newton sejam sempre inferiores devido a menor quantidade de cálculos necessários.

Parametrização quadrática			
Sistema	Newton [s]	Tensor [s]	Tensor/Newton
300	0,0634	0,1103	1,919
750	0,4006	0,6104	1,524
1916	2,7733	5,3216	1,740

Tabela 20 – Tempos computacionais por iteração com parametrização quadrática

## 5.6 Minimização Bidimensional

A metodologia de minimização bidimensional apresentada na Seção 2.5 não apresentou bons resultados considerando o problema de obtenção do ponto crítico do sistema, sendo que a implementação do algoritmo originalmente proposto em [39] não obteve convergência para os sistemas teste utilizados.

Nesta tese, até o momento, assumiu-se que o incremento obtido utilizando o método de Newton é predominante e o termo tensorial é inserido integralmente ou de forma otimizada representada pela Eq. (4.30). Para otimização simultânea dos incrementos referentes aos métodos de Newton e Tensorial, utiliza-se uma estratégia semelhante à apresentada na Seção 2.5.

Ao invés da ortonormalização de subespaços bidimensionais, realizou-se uma minimização entre as componentes do Newton ( $\mathbf{d}_n$ ) e Tensorial ( $\mathbf{d}_t$ ), sem normalização desses termos. A atualização dos termos passa a ser definida como  $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{d}_n + \beta\mathbf{d}_t$ , onde  $\beta = \sqrt{\Delta^2 - \alpha^2}$ . O valor inicial do raio da região de confiança foi adotado como  $\Delta = \sqrt{2}$  demonstrando bons resultados nas simulações. Como o valor do raio da região de confiança aparece elevado sempre a um expoente par no subproblema de otimização de  $\alpha$ , sua determinação como positivo ou negativo não interfere diretamente no problema. No entanto, como  $\alpha$  está limitado entre  $-\Delta < \alpha < \Delta$  ocasionou resultados negativos para o parâmetro de carregamento, sendo que a adoção do limite  $0 < \alpha < \Delta$  contornou esta situação e foi empregada nas simulações. O processo de redução da região de confiança foi pré fixado, reduzindo o raio a 95% do

valor simulado na iteração anterior e limitado a 50 iterações. Embora a minimização utilize a norma da função, o critério de aceitação de  $\alpha$  faz a comparação entre os máximos valores absolutos das funções com a minimização bidimensional ( $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{d}_n + \beta \mathbf{d}_t$ ), os valores anteriormente calculados do método de Newton ( $\mathbf{d} = \mathbf{d}_n$ ) e do método Tensorial sem otimização de passo ( $\mathbf{d} = \mathbf{d}_n + \mathbf{d}_t$ ). Como a aceitação do termo tensorial, conforme apresentado anteriormente, depende de uma comparação direta com o passo de Newton, estes métodos passam a ser considerados um único método.

Resultados numéricos comparativos entre estas formas são apresentadas na Tabela 21, indicando o número de iterações para convergência para os sistemas teste utilizados. A condição simulada para comparação utilizou multiplicador de Lagrange inicial  $\lambda^1$ , com execução de fluxo de potência inicial e sem considerar os limites de potência reativa gerada. Em ambos os casos, as otimizações dos incrementos foram realizadas a partir da segunda iteração.

Sistema	$\mathbf{d} = \mathbf{d}_a + \beta \mathbf{d}_b$	$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{d}_a + \beta \mathbf{d}_b$
6	4	4
9	6	6
14	10	9
24	9	9
30	12	8
33	4	4
57	8	9
65	4	5
107	7	-
118	nc	nc
300	6	6
750	9	10
1916	5	5

Tabela 21 – Número de iterações para convergência com otimização uni e bidimensional

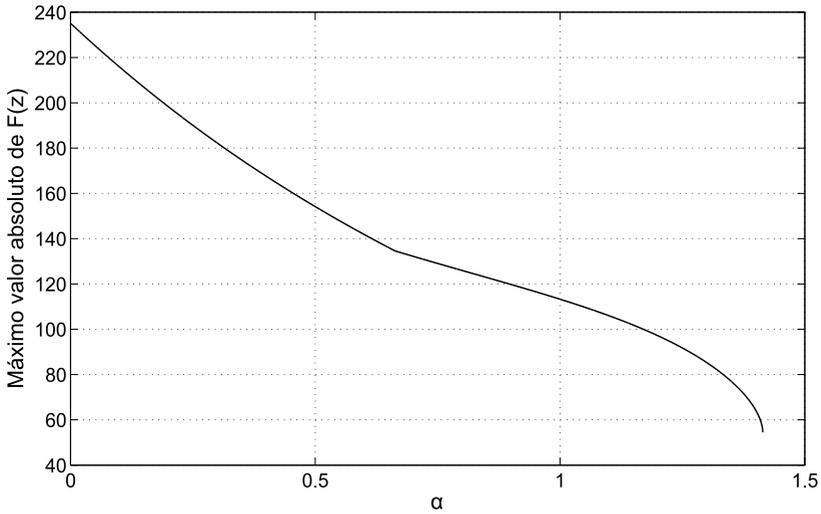
De um modo geral, a comparação entre as metodologias, de minimização apenas do termo Tensorial e minimização dos termos obtidos pelos métodos de Newton e Tensorial, nas condições iniciais adotadas, demonstra que a primeira metodologia possui resultados melhores ou iguais à segunda para os seis sistemas de maior porte. Tendo em vista

que objetiva-se uma maior robustez do processo, as pequenas variações no número de iterações para convergência não são relevantes. No caso do sistema de 118 barras, onde a minimização apenas em  $\beta$  não alcançou convergência, a minimização bidimensional também não obteve sucesso.

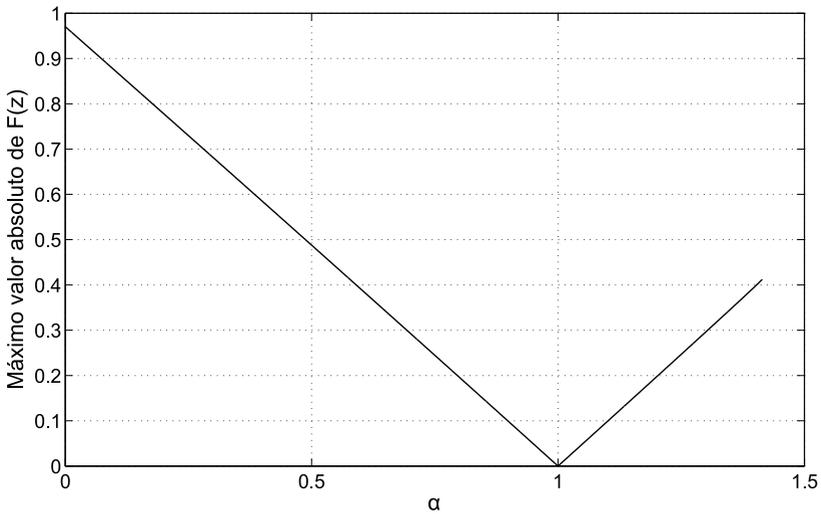
Além disso, para o sistema de 107 barras, quando utilizada a minimização bidimensional, o resultado obtido para o máximo carregamento do sistema foi negativo. A limitação do raio da região de confiança no subproblema de otimização do passo impede a negatividade de  $\rho$  neste subproblema, mas não impede que o parâmetro de carregamento torne-se negativo no problema principal.

Os gráficos da Figura 8 representam duas situações diferentes com relação aos valores de  $\alpha$  simulados para o sistema de 24 barras. A Figura 8(a) mostra a trajetória dos resíduos em função da variável  $\alpha$  que representa a segunda iteração, onde é observado que o menor valor da função é alcançado em  $\alpha = \sqrt{2}$ . Nesse caso, não houve necessidade de redução da região de confiança, pois  $\alpha = \sqrt{2}$ , e conseqüente  $\beta = \sqrt{\Delta^2 - \alpha^2} = 0$ , fornece menor valor absoluto para o sistema de equações em relação às outras metodologias comparadas.

A Figura 8(b) representa a oitava iteração do processo. Nesta iteração, a região de confiança também não foi reduzida, pois o valor inicial de  $\Delta$  foi adequado para redução do máximo valor absoluto dos resíduos. O valor que otimiza esta iteração é  $\alpha = 1$ , que resulta em  $\beta = 1$ , fornecendo nesta iteração o mesmo resultado que seria obtido com a metodologia de implementação integral dos incrementos de Newton e Tensorial descrita anteriormente.



(a) Sistema de 24 barras - iteração 2



(b) Sistema de 24 barras - iteração 8

Figura 8 – Sistema de 24 barras - Minimização em  $\alpha$

## 5.7 Limites de Potência Reativa Gerada

Com a formulação das equações do fluxo de potência expressas em coordenadas retangulares, é possível prever com exatidão a quantidade de potência reativa que será gerada a cada iteração, caso todo o incremento seja implementado na atualização das variáveis. Conforme apresentado na Seção 4.5, pode-se limitar o valor do incremento calculado a cada iteração de modo que apenas uma barra atinja o limite de potência reativa gerada, sendo convertida de PV para PQ. Com isso, objetiva-se melhorar a convergência dos métodos iterativos, embora a conversão de uma barra por vez possa elevar o número de iterações.

Para exemplificação da metodologia proposta, utilizou-se o sistema de 24 barras e os resultados são apresentados na Tabela 22. Os multiplicadores de Lagrange iniciais foram adotados como unitários no método Tensorial com otimização de passo. A parte numérica da tabela refere-se a um fator  $\gamma$  que, multiplicado ao incremento da iteração corrente, faz com que seja atingido um limite, superior ou inferior, de potência reativa gerada na barra correspondente. As células da tabela marcadas com \*\*\*\*\* indicam as iterações em que o valor do limitador de passo  $\gamma$  calculado na Eq. (4.45) para esta barra não possui raiz real. Em outras palavras, não há um valor real que, multiplicado ao vetor de incrementos, faça com que a geração de potência reativa desta barra atinja um de seus limites. As células com *limite* representam as barras que já atingiram seus limites e foram convertidas para PQ. As células sombreadas indicam qual a barra que primeiro atingiria o limite a cada iteração.

O menor fator de passo obtido na primeira iteração refere-se à barra 16, onde  $\gamma = 0,1466$ , passando esta a ser a única barra convertida na iteração. Qualquer fator de passo maior que 0,1466 resultaria na violação do limite de potência reativa gerada pela barra 16. Nota-se que, caso o fator de passo fosse unitário, apenas as barras 21 e 22 não atingiriam seus limites de potência reativa gerada na primeira iteração. Ao longo das iterações, o valor do limitador pode ser bastante pequeno, como no caso da quinta iteração, onde  $\gamma = 0,0032$ .

A barra 18 destaca a relevância de se converter uma barra de cada vez e de identificação da barra que primeiro violaria os limites com a atualização das variáveis. Caso múltiplas conversões fossem realizadas, a barra 18 poderia ter sido convertida para PQ, perdendo computacionalmente o controle de tensão e alterando a trajetória de convergência. Isso porque, nas três primeiras iterações, os incrementos calculados fariam com que esta barra violasse um de seus limites, o que

não ocorre ao final do processo iterativo. A conversão de apenas uma barra a cada iteração permitiu que o controle de tensão desta barra fosse mantido em todas as iterações ao longo do processo, fornecendo maior estabilidade.

barra	iteração				
	1	2	3	4	5
1	0,1982	0,0774	0,0623	0,0406	0,0032
2	0,2012	0,0735	0,0572	0,0343	limite
7	0,2414	0,1784	0,2025	0,2192	0,2194
14	0,1752	0,0303	limite	limite	limite
15	0,2140	0,1864	0,1118	0,0685	0,0391
16	0,1466	limite	limite	limite	limite
18	0,3199	0,7977	0,9804	1,0099	1,2420
21	*****	*****	*****	*****	*****
22	*****	*****	*****	*****	*****
23	0,2216	0,0511	0,0289	limite	limite

barra	iteração				
	6	7	8	9	10
1	limite	limite	limite	limite	limite
2	limite	limite	limite	limite	limite
7	0,2692	0,2647	limite	limite	limite
14	limite	limite	limite	limite	limite
15	0,0513	limite	limite	limite	limite
16	limite	limite	limite	limite	limite
18	1,7468	1,0652	1,7328	11,716	39921
21	*****	1,2191	3,6347	18,816	87223
22	*****	14,580	*****	*****	*****
23	limite	limite	limite	limite	limite

Tabela 22 – Uso de passo limitador de potência reativa gerada

## 5.8 Análise de Sensibilidade

A solução do problema de máximo carregamento pode fornecer mais do que apenas o carregamento crítico do sistema. A análise dos multiplicadores de Lagrange pode fornecer informações sobre regiões críticas e sensibilidade das barras do sistema, sendo utilizadas para melhorar a margem de segurança do sistema ou auxiliar na decisão de medidas corretivas. Do ponto de vista da estabilidade de tensão, tanto os efeitos das variações do parâmetro de carregamento nas magnitudes das tensões das barras quanto a influência das variações das injeções de potências ativa e reativa no parâmetro de carregamento podem ser úteis na identificação de barras ou regiões críticas.

O sistema de 57 barras foi utilizado para ilustrar essa análise, onde foram considerados os limites de potência reativa gerada. Este sistema possui 7 unidades geradoras, 80 circuitos ligando as 57 barras e um carregamento base de 12.508 MW e 3.364 MVar. O valor obtido como carregamento crítico para este sistema foi de  $\rho = 44,107\%$  para a modelagem linear deste parâmetro e no software ANAREDE e de  $\rho = -6,641\%$  ( $\rho^2 = 44,107\%$ ) para o caso da modelagem quadrática do parâmetro de carregamento nas restrições.

### 5.8.1 Determinação da Região Crítica

A Tabela 23 apresenta as 15 primeiras barras PQ e seus respectivos valores absolutos normalizados para os multiplicadores de Lagrange relacionados à injeção de potência reativa ( $\lambda_q$ , colunas 1 e 2), do vetor tangente calculado a partir da decomposição da matriz Jacobiana em autovetores à direita e à esquerda (VT, colunas 3 e 4) e o vetor tangente obtido por meio do ANAREDE (ANAREDE, colunas 5 e 6). Todas as barras foram ordenadas de forma decrescente de seus respectivos valores.

Pode-se notar que a ordenação obtida pelo vetor tangente calculado no programa apresentado é a mesma obtida pelo ANAREDE, apresentando uma diferença bastante pequena quanto à magnitude. Comparando-se esta ordenação com a obtida utilizando  $\lambda_q$ , tem-se uma ligeira alteração. Nos três casos nota-se um salto considerável nas magnitudes entre a quinta e sexta barras ordenadas, demonstrando uma sensibilidade significativamente maior das cinco primeiras quanto à variação do parâmetro de carregamento.

$\lambda_q$		VT		ANAREDE	
barra	valor	barra	valor	barra	valor
31	1,0000	31	1,0000	31	1,0000
33	0,8537	30	0,8894	30	0,8899
32	0,8426	33	0,8744	33	0,8750
30	0,8260	32	0,8653	32	0,8659
25	0,7163	25	0,8062	25	0,8071
34	0,4159	34	0,5211	34	0,5232
35	0,3713	24	0,4847	24	0,4868
24	0,3453	35	0,4786	35	0,4809
40	0,3358	26	0,4502	26	0,4523
36	0,3349	36	0,4420	36	0,4444
26	0,3297	40	0,4416	40	0,4441
57	0,3239	57	0,4363	57	0,4393
39	0,3116	56	0,4190	56	0,4219
37	0,3101	39	0,4187	39	0,4211
56	0,3100	37	0,4174	37	0,4198

Tabela 23 – Sistema de 57 barras - multiplicadores de Lagrange relacionados às injeções de potência reativa e vetores tangente normalizados

Neste aspecto, levando-se em conta apenas as cinco primeiras barras, as três estratégias para determinação de uma região crítica identificam as mesmas barras. A Figura 9 ilustra a região crítica composta por este conjunto de barras, representada pela área sombreada.

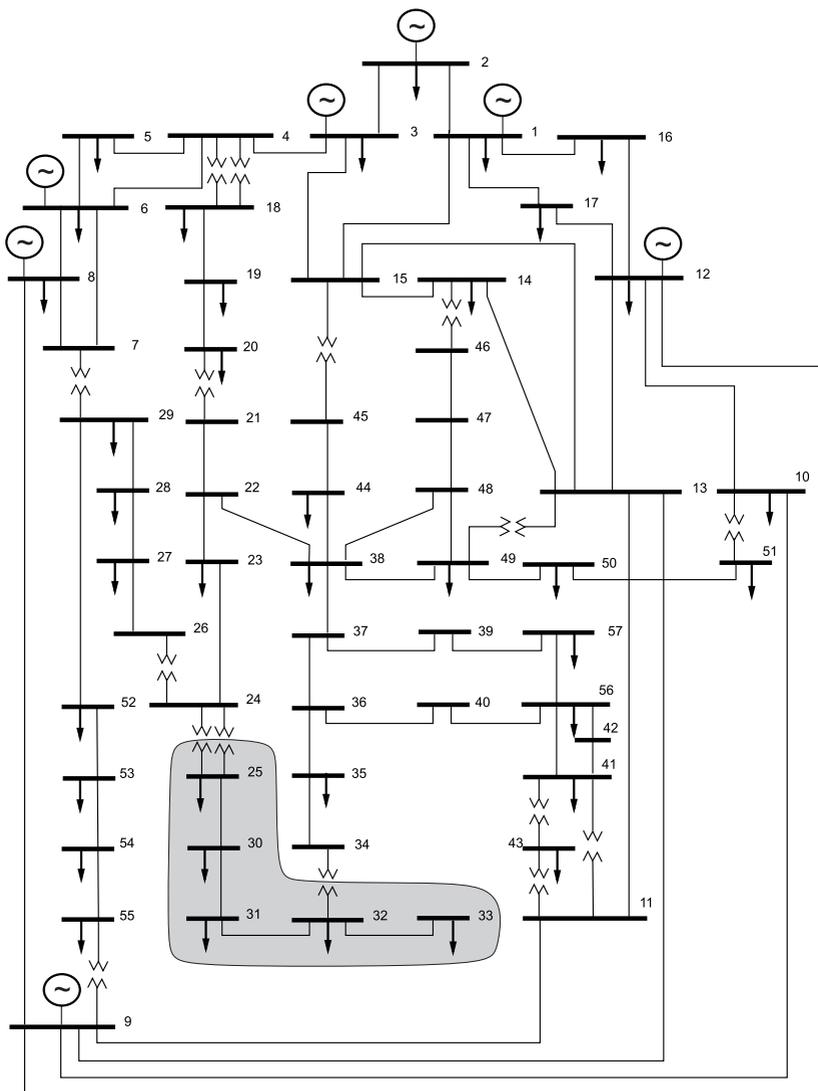


Figura 9 – Sistema de 57 barras - Região crítica

### 5.8.2 Variação do Parâmetro de Carregamento pela Alteração das Injeções de Potência

Os multiplicadores de Lagrange relativos às injeções de potências ativa e reativa podem fornecer informações para auxiliar na determinação da variação do parâmetro de carregamento por meio da Eq. (4.72), reescrita a seguir

$$\Delta\rho^{est} = \lambda_{p_i} \Delta P_i + \lambda_{q_i} \Delta Q_i$$

onde se pode obter uma estimativa do parâmetro de carregamento a partir de pequenas variações nas injeções de potências em torno do ponto onde os multiplicadores foram calculados. Para uma análise mais detalhada, primeiramente serão realizadas simulações envolvendo as injeções de potências ativa e reativa separadamente. Ressalta-se o fato de que, no caso específico do sistema de 57 barras, todas as barras de geração, com exceção da barra de folga, atingem o limite superior de geração de potência reativa no ponto de máximo carregamento. Isso permite analisar as variações incrementais em  $\rho$  sem a preocupação de que novos limites sejam atingidos, o que mudaria a estrutura numérica do sistema e prejudicaria a estimativa da variação do parâmetro de carregamento.

A primeira coluna da Tabela 24 apresenta a numeração das barras PV, enquanto que a coluna 2 representa os valores dos multiplicadores de Lagrange sem normalização. A variação de potência ativa, que neste exemplo foi adotada como um acréscimo de 3% na geração de potência ativa original, é apresentada na colunas 3. Na quarta coluna, mostra-se a estimativa de variação do parâmetro de carregamento causada por cada barra PV e calculada pela Eq. (4.72), sem a variação na injeção de potência reativa.

Executando novamente o programa de otimização do carregamento, considerando o aumento de 3% na geração de potência ativa das barras PV, o resultado obtido é  $\rho = 45,464$ . Sendo o valor do parâmetro de carregamento obtido com a geração de potência ativa original igual a 44,107, a variação real deste parâmetro é  $\Delta\rho = 45,464 - 44,107 = 1,357$ . Ou seja, um aumento de 3% nas gerações de potência ativa das barras PV eleva o carregamento máximo do sistema de 44,107% para 45,464%.

O valor estimado,  $\Delta\rho^{est} = 1,3699$ , possui um erro de

$$\varepsilon(\%) = \frac{|1,3699 - 1,357|}{1,3699} \cdot 100 = 0,9417\%$$

demonstrando que o uso dos multiplicadores de Lagrange pode estimar com grande precisão a variação no parâmetro de carregamento.

barra	$\lambda_{p_i}$	$\Delta P_i$	$\Delta\rho^{est} = \lambda_{p_i} \Delta P_i$
		[pu]	[pu]
2	0,1705	0,0405	0,0069
3	1,9380	0,0408	0,0791
6	4,7959	0,0315	0,1511
8	5,5958	0,0810	0,4533
9	6,0050	0,0630	0,3783
12	6,6931	0,0450	0,3012
Total = 1,3699			

Tabela 24 – Estimativa do fator de carga devido à variação  $\Delta P_i = 0,03P_{g_i}$

As variações incrementais do parâmetro de carregamento causadas por alterações nas injeções de potência reativa são apresentadas na Tabela 25. A primeira coluna da tabela apresenta as barras PQ do sistema que possuem carga associada. Os multiplicadores de Lagrange relacionados às injeções de potência reativa dessas barras são apresentados na coluna 2. Para a determinação das variações de injeção de potência reativa, na coluna 3, foram considerados 10% de compensação na demanda de potência reativa de cada barra no caso base. A estimativa de variação do parâmetro de carregamento para cada barra, dada pela expressão  $\Delta\rho^{est} = \lambda_{q_i} \Delta Q_i$ , são apresentadas na coluna 4.

A partir da Tabela 25 pode-se observar que as barras 31, 47, 25, 50 e 53 são as que mais influenciam o carregamento do sistema por meio da variação da injeção de potência reativa. Com a compensação realizada nos dados de entrada do sistema, o parâmetro de carregamento foi alterado para  $\rho = 45,498$ , fornecendo uma variação de  $\Delta\rho = 45,498 - 44,107 = 1,391$ . Comparando-se este valor com o estimado,  $\Delta\rho^{est} = 1,4257$ , o que equivale a um erro percentual  $\varepsilon(\%)$  de

$$\varepsilon(\%) = \frac{|1,4257 - 1,391|}{1,4257} \cdot 100 = 2,434\%$$

o que representa um erro bastante pequeno.

Analisando as duas situações apresentadas, com alteração nas injeções de potência ativa e reativa, nota-se que uma alteração de apenas 3% nas gerações de potência ativa das 6 barras PV do sistema possui um efeito praticamente equivalente ao de uma compensação de 10% da demanda reativa das 35 barras PQ no caso base. No entanto, isso não caracteriza-se como regra, valendo apenas para a condição e sistemas simulados. O sistema de 57 barras possui suas maiores demandas associadas às barras de geração, que não entraram nos cálculos da Tabela 25, o que pode ter conduzido a esta situação. Conclui-se apenas que os multiplicadores de Lagrange podem ser utilizados para estimar, com pequenas margens de erro, a variação do parâmetro de carregamento quando submetidos a pequenas variações nas injeções de potência.

barra	$\lambda_{q_i}$	$\Delta Q_{d_i}$	$\Delta \rho^{est} = \lambda_{q_i} \Delta Q_i$
		[pu]	[pu]
5	5,4948	0,0040	0,0220
10	6,5411	0,0020	0,0131
13	6,5087	0,0023	0,0150
14	6,6449	0,0053	0,0352
15	5,1563	0,0050	0,0258
16	4,5947	0,0030	0,0138
17	2,5989	0,0080	0,0208
18	6,3289	0,0098	0,0620
19	8,3965	0,0006	0,0050
20	9,5420	0,0010	0,0095
23	11,2063	0,0021	0,0235
25	30,7902	0,0032	0,0985
27	9,9553	0,0005	0,0050
28	8,5278	0,0023	0,0196
29	7,6003	0,0026	0,0198
30	35,5029	0,0018	0,0639
31	42,9827	0,0029	0,1246
32	36,2191	0,0008	0,0290
33	36,6932	0,0019	0,0697
35	15,9614	0,0030	0,0479
38	10,5529	0,0070	0,0739
41	10,7073	0,0030	0,0321
42	12,9573	0,0044	0,0570
43	8,0623	0,0010	0,0081
44	9,5979	0,0018	0,0173
47	9,2479	0,0116	0,1073
49	9,0282	0,0085	0,0767
50	8,8557	0,0105	0,0930
51	7,0609	0,0053	0,0374
52	8,5362	0,0022	0,0188
53	8,8608	0,0100	0,0886
54	7,9647	0,0014	0,0112
55	6,9007	0,0034	0,0235
56	13,3225	0,0022	0,0293
57	13,9203	0,0020	0,0278
		Total = 1,4257	

Tabela 25 – Estimativa do fator de carga devido à variação  $\Delta Q_i = 0,10Q_{d_i}^0$

## 5.9 Determinação de Curvas PV

Para ilustrar a estratégia proposta para traçado completo das curvas PV apresentada na Seção 4.9, utilizou-se o sistema de 33 barras, equivalente da região sul brasileira. Este sistema apresenta 33 barras, sendo 7 barras como unidades geradoras suprimindo uma demanda base de 5.605,70 MW e 1.433,40 MVar, com carregamento máximo em 6.167,04 MW e 1.576,94 MVar, indicado por  $\rho = 10, 013$ .

A Tabela 26 apresenta as cinco barras de maior valor absoluto para os multiplicadores de Lagrange, com seus respectivos valores normalizados, e as de menor valor de tensão em módulo, onde destaca-se a igualdade dos dois grupos de barras.

barra	$\lambda_{q_i}$	barra	V [pu]
24	1,0000	24	0,7903
4	0,9064	4	0,8064
21	0,8880	23	0,8117
23	0,8629	10	0,8156
10	0,8616	21	0,8196

Tabela 26 – Sistema de 33 barras - tensão e multiplicadores de Lagrange

Para análise da metodologia proposta para a determinação das curvas PV, foram destacadas as cinco barras de menor tensão no ponto de máximo carregamento, conforme apresentado na Tabela anterior. As curvas obtidas com o uso do programa ANAREDE são representadas na Figura 10, enquanto que as curvas obtidas com a metodologia proposta neste trabalho são representadas na Figura 11.

Para facilitar a identificação visual, as cores utilizadas no traçado das curvas PV com o uso da metodologia proposta foram as mesmas fornecidas pelo ANAREDE. Nota-se a grande semelhança entre as duas figuras, demonstrando a eficiência do traçado proposto quando comparado ao método da continuação.

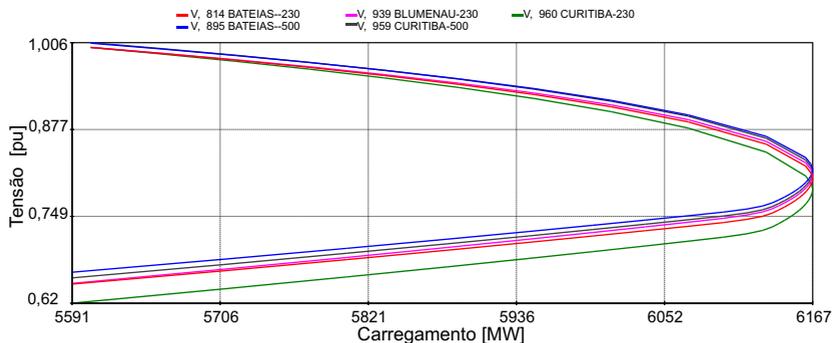


Figura 10 – Sistema de 33 barras - Curvas PV obtidas com ANAREDE

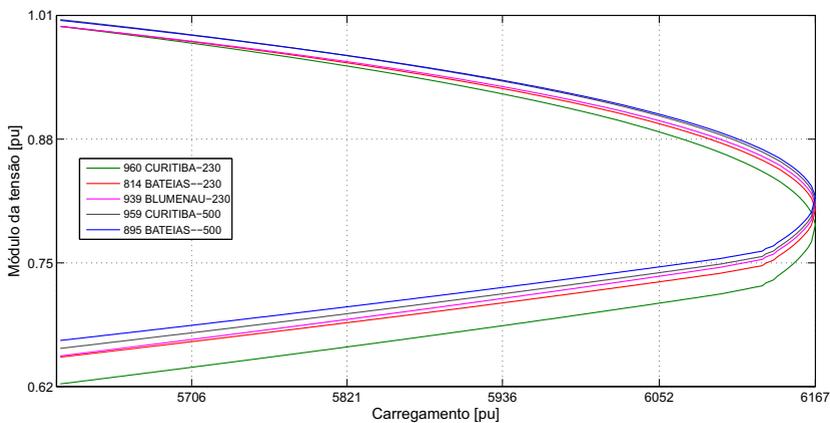


Figura 11 – Sistema de 33 barras - Curvas PV obtidas com a metodologia apresentada

O esquemático representativo do sistema de 33 barras utilizado como exemplo é representado pela Figura 12. A região que compreende as barras identificadas na Tabela 26 são destacadas por meio da área sombreada na figura, onde nota-se a interligação das barras indicadas, caracterizando uma região crítica deste sistema.

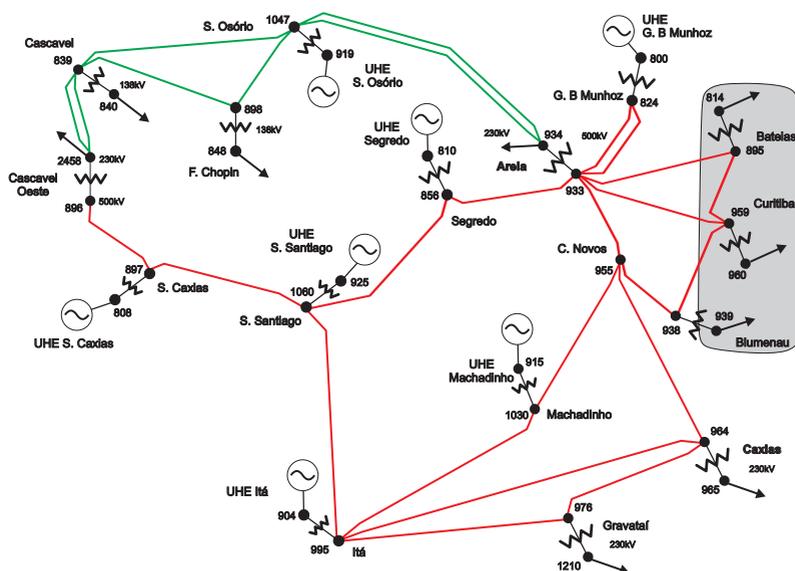


Figura 12 – Sistema de 33 barras - Diagrama

## 5.10 Conclusão

Este capítulo apresentou, numérica e graficamente, os principais aspectos abordados neste trabalho. O foco principal está na apresentação de um problema de fluxo de potência ótimo, formulado em coordenadas retangulares e fazendo uso de um modelo tensorial, com o objetivo de obter o ponto de máximo carregamento de sistemas elétricos de potência. Uma nova forma de parametrização é proposta para aumentar a robustez do processo iterativo, evitando casos onde a resposta corresponderia ao corte de carga.

De forma complementar, os resultados evidenciam a dependência das condições iniciais, tanto dos multiplicadores de Lagrange quanto do fluxo de potência inicial, além do valor inicial para o parâmetro de carregamento no caso de parametrização quadrática. A estratégia de decomposição apresentada, inédita para modelagem tensorial, apresentou redução significativa do tempo computacional e a estimativa de potência reativa gerada demonstrou tendência a aumentar a estabilidade do sistema. Os resultados indicam que a análise de sensibilidade no ponto de máximo carregamento possui estimativa razoável, podendo ser utilizadas para determinar regiões críticas e tomar medidas para elevar o ponto de máximo carregamento.

## 6 CONCLUSÕES

### 6.1 Principais Conclusões

Este trabalho apresentou a formulação analítica do problema de fluxo de potência ótimo para a obtenção do ponto de máximo carregamento. A dificuldade deste problema encontra-se principalmente no tratamento de grandes matrizes mal condicionadas, sensibilidade quanto à inicialização e existência de diversos pontos estacionários, alguns muito próximos uns dos outros, como pode ser comprovado nos resultados. Não se almeja a solução definitiva para os problemas de otimização, mas apresentar aspectos que colaborem para redução da dependência de determinadas condições e propiciar redução de casos de não convergência. Algumas metodologias já consolidadas dão suporte para as novas ideias apresentadas, sempre objetivando uma maior robustez, facilidade de implementação e redução de esforço computacional. Os resultados obtidos foram validados com um programa comercial bastante conceituado na área de sistemas de potência.

- **Quanto ao uso de coordenadas retangulares**

A formulação das equações do fluxo de potência em coordenadas retangulares é vantajosa devido à característica quadrática destas equações, o que faz com que todos os termos de ordem superior a dois sejam nulos quando as equações são expandidas em série de Taylor. Este tipo de coordenadas permite a implementação mais fácil de modelos tensoriais, estimativa de potência reativa gerada, fatores de passo, etc.

- **Quanto ao uso de modelos tensoriais**

Os métodos tensoriais mostram-se bastante eficientes por agregarem maior quantidade de informação aos incrementos do que os métodos que utilizam apenas o termo de primeira ordem. Durante o processo iterativo nos problemas de fluxo de potência, os métodos tensoriais apresentam bons resultados. A estimativa do termo tensorial utilizada neste trabalho mostrou-se eficiente e de fácil aplicação aos problemas de fluxo de potência convencional e fluxo de potência ótimo para obtenção do máximo carregamento, principalmente quando as matrizes associadas ao problema são singulares ou mal condicionadas.

De um modo geral, quando simulados sob as mesmas condições, os programas implementados com o uso da metodologia tensorial apresentaram menor quantidade de iterações para a convergência e menor quantidade de casos de não convergência quando comparados ao método de Newton. Independentemente de se implementar o incremento tensorial de forma plena ou otimizado, as diversas situações apresentadas para sistemas de diferentes portes confirmam a vantagem do uso do método Tensorial apresentado. A iteração na qual o termo tensorial passa a ser utilizado tem influência decisiva em muitos sistemas, não sendo possível descrever uma iteração fixa como critério válido para todos os sistemas e condições iniciais.

- **Quanto à parametrização**

No problema de maximização do carregamento é necessária a parametrização das restrições. Como demonstrado, a escolha do tipo de parametrização, a linear convencional ou a quadrática proposta neste trabalho, afeta a trajetória de convergência para uma mesma função objetivo. A parametrização quadrática oferece vantagens frente a linear, como a impossibilidade de obtenção de valores negativos para o carregamento. A parametrização proposta também apresenta menor sensibilidade com relação aos valores iniciais dos multiplicadores, obtendo melhores resultados com a inicialização unitária para todos os multiplicadores de Lagrange do que com as metodologias apresentadas para estimativa desses multiplicadores. A presença explícita do parâmetro de carregamento nas equações que definem os incrementos a cada iteração torna a parametrização quadrática dependente desta variável, surgindo a necessidade de se especificar uma condição inicial adequada para  $\rho$ .

- **Quanto à inicialização das variáveis**

A inicialização dos multiplicadores de Lagrange mostra-se como um dos principais pontos que afetam a convergência dos métodos diretos. Iniciar estes multiplicadores de forma aleatória, sem alguma informação prévia, pode causar problemas para a obtenção da solução. Mesmo o conhecimento do valor em um ponto de carregamento próximo ao ponto crítico pode não garantir a convergência, pois altera toda a trajetória de convergência. São necessárias metodologias que estimem os multiplicadores na primeira iteração de forma a adequá-los ao valores das demais variáveis. A estimativa proposta neste trabalho utiliza informações da matriz Jacobiana das equações obtida no início do processo iterativo e não necessita da inversão de matrizes de grande porte,

como a metodologia baseada na formulação de um problema de mínimos quadrados. Com a aplicação da metodologia proposta, os resultados mostraram-se satisfatórios para a maioria dos sistemas simulados.

Outra opção é a normalização dos multiplicadores na iteração inicial, que reduz o número de casos de não convergência em muitas condições simuladas, embora com elevação no número de iterações necessárias para convergência em muitas situações da parametrização linear. No caso da parametrização quadrática, não se tem um perfil de aumento ou redução do número de iterações se utilizada a normalização. A inicialização das tensões complexas e das potências reativas geradas obtidas com a execução do fluxo de potência inicial melhora significativamente a convergência em comparação com a partida plana, quando comparadas para uma mesma condição inicial dos multiplicadores de Lagrange.

- **Quanto à minimização bidimensional**

A minimização bidimensional apresentada pelos autores de [37] não apresentou bons resultados quanto à convergência para o problema de máximo carregamento, quando utilizado o método Tensorial proposto nesta tese. Uma minimização bidimensional alternativa proposta, envolvendo as direções de Newton e Tensor separadamente e sem ortonormalização dos termos, apresentou resultados semelhantes, em relação ao número de iterações, quando comparada à minimização apenas do termo tensorial. No entanto, o tempo computacional da minimização bidimensional foi consideravelmente maior do que a metodologia proposta neste trabalho. A variação simultânea em duas direções pode dificultar a trajetória de convergência em alguns sistemas, indicando que a manutenção da direção de Newton como base do passo incremental, variando apenas o incremento Tensorial, é uma estratégia mais adequada para muitos sistemas.

- **Quanto aos aspectos complementares**

A forma apresentada para lidar com os limites de potência reativa permite que apenas uma barra viole algum destes limites a cada iteração, sendo convertida para barra PQ. Isso é possível porque a estimativa da potência reativa gerada obtida na formulação em coordenadas retangulares é exata. A alteração da ordem de conversão das barras que violem seus limites durante o processo iterativo pode afetar a solução final, pois a perda do controle de tensão altera a trajetória da iteração subsequente.

A estratégia de decomposição das matrizes que compõem o problema de otimização reduz o tempo necessário para convergência sem alterar o número de iterações, resultado ou desbalanços por iteração. Sua vantagem com relação ao tempo computacional é maior quanto maior o tamanho do sistema, tanto para parametrização linear quanto quadrática.

O vetor tangente pode ser obtido nos métodos diretos, conforme apresentado, sendo necessária a solução de uma equação linear adicional. Os multiplicadores de Lagrange relativos às equações de balanço de potência reativa no ponto crítico podem ser utilizados para indicar a mesma área crítica que o vetor tangente. Os multiplicadores de Lagrange relativos às equações de potências ativa e reativa também podem ser utilizados como coeficientes de sensibilidade para tomada de medidas corretivas ou preventivas do sistema, indicando quais os pontos que mais afetam o parâmetro de carregamento.

O traçado das curvas PV é normalmente obtido por métodos baseados no método da continuação. Este traçado pode ser realizado também em combinação com os métodos diretos, tirando proveito, inclusive, da maior precisão do ponto extremo da curva PV. O resultado do método direto fornece o ponto crítico do sistema, então o carregamento é gradativamente reduzido considerando os dados de tensão complexa do ponto extremo, sendo o traçado realizado de forma contrária ao do método da continuação.

## 6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Os problemas de otimização, especialmente os de maximização da demanda apresentado neste trabalho, podem ter seus estudos aprofundados para melhora de desempenho e obtenção de informações mais complexas. Os seguintes temas para trabalhos futuros são sugeridos:

- Estudo de possíveis índices para determinar a melhor inicialização para os multiplicadores de Lagrange, permitindo que, dentro de um conjunto de inicializações previamente definidas, a opção de melhor índice para um determinado sistema e condição seja adotado;
- Estudo de diferentes modelagens de carga, mais condizente com os valores práticos, com parcelas de potência constante e impedância constante para análise da eficiência dos problemas de otimização com modelagem tensorial sob estas condições;

- Estudo considerando o redespacho de potência ativa nas unidades geradoras, levando em conta a capacidade das linhas de transmissão do sistema elétrico;
- Estudo dos aspectos dinâmicos relacionados à instabilidade transitória, levando em conta aspectos construtivos das máquinas e dispositivos de controle sob diferentes condições de carregamento e considerando aspectos de segurança, como a saída de linhas ou unidades geradoras, utilizando as metodologias propostas.



## REFERÊNCIAS

- [1] NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical Optimization*. 2. ed. New York, NY, USA: Springer, 2006.
- [2] DOMMEL, H. W.; TINNEY, W. F. Optimal power flow solutions. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-87, p. 1866–1876, Outubro 1968.
- [3] CARPENTIER, J. Contribution à l'étude du dispatching Économique. *Bulletin de la Société Française des Electriciens*, v. 3, p. 431–447, Agosto 1962.
- [4] ALTHOWIBI, F.; MUSTAFA, M. Maximum power systems loadability to detect voltage collapse. In: *Power Engineering and Optimization Conference, 2010 4th International*. Shah Alam, Selangor, Malásia: [s.n.], 2010. p. 49–52.
- [5] TATE, J. E.; OVERBYE, T. J. A Comparison of the Optimal Multiplier in Polar and Rectangular Coordinates. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 20, n. 4, p. 1667–1674, Novembro 2005.
- [6] IWAMOTO, S.; TAMURA, Y. A Fast Load Flow Method Retaining Nonlinearity. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 97, n. 5, p. 1586–1599, Setembro/Outubro 1978.
- [7] TORRES, G. L.; QUINTANA, V. H.; LAMBERT-TORRES, G. Optimal power flow in rectangular form via an interior point method. *Proc. of 1996 IEEE North American Power Symposium*, 1996.
- [8] SALGADO, R. de S.; ZEITUNE, A. F. Power flow solution through tensor methods. *IET Generation, Transmission and Distribution*, v. 3, n. 5, p. 413–424, maio 2009.
- [9] FENG, D.; SCHNABEL, R. Tensor methods for equality constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, v. 6, n. 3, p. 653–673, Agosto 1996.
- [10] STOTT, B.; MARINHO, J. L. Linear programming for power-system network security applications. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-98, n. 3, p. 837–848, 1979.

- [11] BURCHETT, R. C.; HAPP, H. H.; WIRGAU, K. A. Large scale optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-101, n. 10, p. 3722–3732, Outubro 1982.
- [12] SUN, D. I.; ASHLEY, B.; BREWER, B.; HUGHES, A.; TINNEY, W. F. Optimal power flow by newton approach. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-103, n. 10, p. 2864–2880, Outubro 1984.
- [13] GRANVILLE, S. Optimal reactive dispatch through interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, n. 1, p. 136–146, Fevereiro 1994.
- [14] LAI, L.; MA, J.; YOKOYAMA, R.; ZHAO, M. Improved genetic algorithms for optimal power flow under both normal and contingent operation states. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, v. 19, n. 5, p. 287–292, Junho 1997.
- [15] HUNEAULT, M.; GALIANA, F. D. A survey of the optimal power flow literature. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 6, n. 2, p. 762–770, Maio 1991.
- [16] MOMOH, J. A.; EL-HAWARY, M. E.; ADAPA, R. A review of selected optimal power flow literature to 1993. Part I: Nonlinear and quadratic programming approaches. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n. 1, p. 96–104, Fevereiro 1999.
- [17] MOMOH, J. A.; EL-HAWARY, M. E.; ADAPA, R. A review of selected optimal power flow literature to 1993. Part II: Newton, linear programming and interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n. 1, p. 105–111, Fevereiro 1999.
- [18] ALSAC, O.; STOTT, B. Optimal load flow with steady-state security. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-93, n. 3, p. 745–754, Maio 1974.
- [19] SHOULTS, R. R.; SUN, D. T. Optimal power flow based upon p-q decomposition. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-101, n. 2, p. 397–405, Fevereiro 1982.
- [20] REID, G. F.; HASDORFF, L. Economic dispatch using quadratic programming. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-92, n. 6, p. 2015–2023, Novembro 1973.

- [21] WOLLENBERG, B. F.; STADLIN, W. O. A real time optimizer for security dispatch. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-93, n. 5, p. 1640–1649, 1974.
- [22] PAPALEXOPOULOS, A. D.; IMPARATO, C. F.; WU, F. F. Large-scale optimal power flow: Effects of initialization, decoupling and discretization. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 4, n. 2, p. 748–759, Maio 1989.
- [23] RASHED, A. M. H.; KELLY, D. H. Optimal load flow solution using lagrangian multipliers and the hessian matrix. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-93, n. 5, p. 1292–1297, 1974.
- [24] HAPP, H. H. Optimal power dispatch. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-93, n. 3, p. 820–830, 1974.
- [25] MONTICELLI, A.; PEREIRA, M. V. F.; GRANVILLE, S. Security-constrained optimal power flow with post-contingency corrective rescheduling. *IEEE Transactions on Power Systems*, PWRS-2, n. 1, p. 175–180, Fevereiro 1987.
- [26] WELLS, D. W. Method for economic secure loading of a power system. *Proceedings of the IEEE*, v. 115, n. 8, p. 1190–1194, 1968.
- [27] STOTT, B.; HOBSON, E. Power system security control calculations using linear programming, Part I. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-97, n. 5, p. 1713–1720, Setembro 1978.
- [28] STOTT, B.; HOBSON, E. Power system security control calculations using linear programming, Part II. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-97, n. 5, p. 1721–1731, Setembro 1978.
- [29] STOTT, B.; ALSAC, O. Experience with linear programming for optimal rescheduling of active and reactive power. In: *CIGRE-IFAC Symposium on Control Applications to Power System Security*. Florença, Itália: [s.n.], 1983. paper 104-01.
- [30] HOUSOS, E.; IRISARRI, G. Real and reactive power-system security dispatch using a variable weights optimization method. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-102, n. 5, p. 1260–1268, Maio 1983.

- [31] MOTA-PALOMIRO, R.; QUINTANA, V. H. Sparse reactive power scheduling by a penalty function - linear programming technique. *IEEE Transactions on Power Systems*, PWRS-1, n. 3, p. 31–39, Agosto 1986.
- [32] CLEMENTS, K. A.; DAVIS, P. W.; FREY, K. D. Power system state estimation with inequality constraints. *Proceedings of the IEEE/PES Winter Meeting*, p. 990–993, 1991.
- [33] PONNAMBALAM, K.; QUINTANA, V. H.; VANNELLI, A. A fast algorithm for power system optimization problems using an interior point method. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 7, n. 2, p. 892–899, Maio 1992.
- [34] LU, C. N.; UNUM, M. R. Network constrained security control using an interior point algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 8, n. 3, p. 1068–1076, Agosto 1993.
- [35] ARORA, J. S. *Introduction to Optimum Design*. New York: McGraw-Hill, 1989.
- [36] LUENBERGER, D. G.; YE, Y. *Linear and Nonlinear Programming*. 3. ed. New York: Springer, 2008. ISBN 0387745025.
- [37] BOUARICHA, A.; SCHNABEL, R. B. Algorithm 768: Tensolve: A software package for solving systems of nonlinear equations and nonlinear least-squares problems using tensor methods. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 23, n. 2, p. 174–195, Junho 1997.
- [38] MORÉ, J. J.; GARBOW, B. S.; HILLSTROM, K. E. Testing unconstrained optimization software. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 7, n. 1, p. 17–41, março 1981.
- [39] SCHNABEL, R. B.; FRANK, P. D. Tensor Methods For Nonlinear Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 21, n. 5, p. 815–843, 1984.
- [40] TINNEY, W. F.; HART, C. E. Power Flow Solution by Newton's Method. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 86, n. 11, p. 1449–1457, Novembro 1967.
- [41] ZEITUNE, A. F. *Estudo de Soluções do Fluxo de Potência em Coordenadas Cartesianas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Maio 2008.

- [42] SALGADO, R. de S.; ZEITUNE, A. F. Solução do fluxo de potência através de métodos tensoriais. *Congresso Brasileiro de Automação*, 2008.
- [43] XU, W.; LIU, Y.; SALMON, J. C.; LE, T.; CHANG, G. W. K. Series Load Flow: A Novel Non-Iterative Load Flow Method. *IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, v. 145, n. 3, p. 251–256, Maio 1998.
- [44] EXPÓSITO, A. G.; RAMOS, E. R. Augmentd Rectangular Load Flow Model. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 2, n. 17, p. 271–276, Maio 2002.
- [45] IWAMOTO, S.; TAMURA, Y. A Load Flow Calculation Method for Ill-Conditioned Power Systems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 100, n. 4, p. 1736–1743, Abril 1981.
- [46] BOUARICHA, A.; SCHNABEL, R. B. Tensor Methods For Large Sparse Systems of Nonlinear Equations. *Mathematical Programming*, v. 82, n. 3, p. 377–400, Agosto 1998.
- [47] BOUARICHA, A.; SCHNABEL, R. B. Tensor methods for large, sparse nonlinear least squares problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 21, n. 4, p. 1199–1221, 1999.
- [48] CHIANG, H.-D.; DOBSON, I.; THOMAS, R. J.; THORP, J. S.; FEKIH-AHMED, L. On voltage collapse in electric power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 5, n. 2, p. 601–6011, Maio 1990.
- [49] AYASUN, S.; NWANKPA, C.; KWATNY, H. Computation of singular and singularity induced bifurcation points of differential-algebraic power system model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, v. 51, n. 8, p. 1525–1538, Agosto 2004.
- [50] DEUFHARD, P. Newton Methods for Nonlinear Problems. *Springer - Verlag Berlin Heidelberg*, 2005.
- [51] DOBSON, I. The irrelevance of load dynamics for the loading margin to voltage collapse and its sensitivities. In: *Bulk Power System Voltage Phenomena- III: Voltage Stability, Security and Control*. Davos, Switzerland: [s.n.], 1994. p. 174–178.

- [52] SEYDEL, R. *Practical Bifurcation and Stability Analysis - From Equilibrium to Chaos*. [S.l.]: Elsevier Science Ltd, 1988.
- [53] IBA, K.; SUZUKI, H.; EGAWA, M.; WATANABE, T. Calculation of Critical Loading Condition whit Nose Curve Using Homotopy Continuation Method. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 6, n. 2, p. 584–593, Maio 1991.
- [54] AJJARAPU, V.; CHRISTY, C. The Continuation Power Flow: A Tool for Steady State Voltage Stability Analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 7, n. 1, p. 416–423, Fevereiro 1992.
- [55] CAÑIZARES, C.; ALVARADO, F.; DEMARCO, C.; DOBSON, I.; LONG, W. Point of collapse methods applied to ac/dc power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 7, n. 2, p. 673–683, Maio 1992.
- [56] CAÑIZARES, C. A.; ALVARADO, F. L. Point of Collapse and Continuation Methods for Large AC/DC Systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 8, n. 1, p. 1–8, Fevereiro 1993.
- [57] SOUZA, A. C. Z. de; CAÑIZARES, C. A.; QUINTANA, V. H. New Techniques to Speed Up Voltage Collapse Computations Using Tangent Vectors. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 12, n. 3, p. 1380–1387, Agosto 1997.
- [58] SALGADO, R. de S.; ZEITUNE, A. F. Um estudo do método da continuação formulado em coordenadas cartesianas. *Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos*, 2008.
- [59] DOBSON, I.; LU, L.; HU, Y. A direct method for computing a closest saddle node bifurcation in the load power parameter space of an electric power system. In: *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. [S.l.: s.n.], 1991. v. 5, p. 3019–3022.
- [60] DOBSON, I.; LU, L. New methods for computing a closest saddle node bifurcation and worst case load power margin for voltage collapse. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 8, n. 3, p. 905–913, Agosto 1993.
- [61] YAN, Z.; WU, F.; NI, Y. Method for direct calculation of quadratic turning points. v. 151, n. 1, p. 83–89, Janeiro 2004.

- [62] DOBSON, I.; LU, L. Computing an optimum direction in control space to avoid saddle node bifurcation and voltage collapse in electric power systems. v. 37, n. 10, p. 1616–1620, Outubro 1992.
- [63] WANG, R.; LASSETER, R. H. Re-dispatching generation to increase power system security margin and support low voltage bus. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 15, n. 2, p. 496–501, Maio 2000.
- [64] GREENE, S.; DOBSON, I.; ALVARADO, F. L. Sensitivity of transfer capability margins with a fast formula. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 17, n. 1, p. 34–40, Fevereiro 2002.
- [65] FLUECK, A. J.; GONELLA, R.; DONDETI, R. A new power sensitivity method of ranking branch outage contingencies for voltage collapse. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 17, n. 2, p. 265–270, Maio 2002.
- [66] MARCOLINI, A. M.; RAMOS, J. L. M.; TRIGO, A. L. A new technique to compute control actions to prevent voltage collapse using optimization techniques and sensitivity analysis. In: *IEEE Power Engineering Society General Meeting*. Montreal - Canadá: [s.n.], 2006.
- [67] MARCOLINI, A. M.; TRIGO, A. L.; RAMOS, J. L. M.; MAURICIO, J. M. Preventive control actions to enlarge the load margin using vscopf and sensitivity techniques. In: *Proceedings of the IEEE Powertech*. Lausanne - Suíça: [s.n.], 2007. p. 1468–1473.
- [68] CAÑIZARES, C. Applications of optimization to voltage collapse analysis. *Proceedings of the IEEE/PES Summer Meeting*, p. 1–8, 1998.
- [69] MOORE, G.; SPENCE, A. The Calculation of Turning Points of Nonlinear Equations. *SIAM J. Num. Anal.*, v. 17, n. 4, p. 567–576, Agosto 1980.
- [70] GRIEWANK, A.; REDDIEN, W. Characterization and Computation of Generalized Turning Points. *SIAM J. Num. Anal.*, v. 21, n. 1, p. 176–185, Fevereiro 1984.
- [71] ZEITUNE, A. F.; SALGADO, R. de S.; SOARES, V. L. C. Soluções críticas de carregamento via métodos diretos. *8th LATIN-AMERICAN CONGRESS ON ELECTRICITY GENERATION AND TRANSMISSION*, 2009.

- [72] MOYANO, C. F.; SALGADO, R. S.; BARBOZA, L. V. On the determination of adjusted opf solutions. *Proceedings of the IEEE International Conference on Circuits and Systems*, p. 1695–1698, 2006.
- [73] IBA, K.; SUZUKI, H.; EGAWA, M.; WATANABE, T. A Method for Finding a Pair of Multiple Load Flow Solutions in Bulk Power Systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 5, n. 2, p. 582–591, Maio 1990.
- [74] ECHAVARREN, F. M.; LOBATO, E.; ROUCO, L. A power flow solvability identification and calculation algorithm. *Electric Power System Research*, v. 76, n. 4, p. 242–250, Janeiro 2006.
- [75] CHEN, K.; HUSSEIN, A.; BRADLEY, M. E.; WAN, H. A Performance-Index Guided Continuation Method for Fast Computation of Saddle-Node Bifurcation in Power Systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 18, n. 2, p. 753–760, Maio 2003.
- [76] LÖF, P.-A.; ANDERSSON, G.; HILL, D. Voltage Dependent Reactive Power Limits for Voltage Stability Studies. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 10, n. 1, p. 220–228, Fevereiro 1995.
- [77] GAO, B.; MORISON, G. K.; KUNDUR, P. Voltage Stability Evaluation Using Modal Analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 7, n. 4, p. 1529–1542, Novembro 1992.
- [78] SALGADO, R. de S.; ZEITUNE, A. F. A framework to study critical loadability solutions. In: *Proceedings of the IEEE Power Tech Conference*. Trondheim - Noruega: [s.n.], 2011. p. 1–7.
- [79] ZEITUNE, A. F.; SALGADO, R. de S. A direct method to determine the maximum loadability bifurcation point in electric power systems. *2nd International Conference on Engineering Optimization*, Setembro 2010.
- [80] PAMA, A.; RADMAN, G. A new approach for estimating voltage collapse point based on quadratic approximation of pv curves. *Electric Power System Research*, v. 79, n. 4, p. 653–659, Abril 2009.
- [81] PAI, M. *Computer Techniques in Power System Analysis*. [S.l.]: Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, 1979.

- 
- [82] ANDERSON, P.; FOUAD, A. *Power System Control and Stability*. Iowa: Wiley-IEEE Press, 2002.
- [83] WASHINGTON, U. of. *Power Systems Test Case Archive*. 2012. WEB. Disponível em: <[www.ee.washington.edu/research/pstca/](http://www.ee.washington.edu/research/pstca/)>. Acesso em: 01 de Junho de 2012.
- [84] IEEE Reliability Test System Task Force of the Application of Probability Methods Subcommittee. The IEEE reliability test system-1996. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n. 3, p. 1010–1020, Agosto 1999.
- [85] ALVES, W. F. *Proposição de Sistemas-Teste para Análise Computacional de Sistemas de Potência*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Fluminense - UFF, Agosto 2007.