

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

Omar Alberto Roldán García

ESTUDO DE FENÔMENOS EM ESPAÇOS CURVOS

Florianópolis

2012

Omar Alberto Roldán García

ESTUDO DE FENÔMENOS EM ESPAÇOS CURVOS

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física para a obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Jr.

Florianópolis

2012

Catálogo na fonte elaborada pela biblioteca da
Universidade Federal de Santa Catarina

A ficha catalográfica é confeccionada pela Biblioteca Central.

Tamanho: 7cm x 12 cm

Fonte: Times New Roman 9,5

Maiores informações em:

<http://www.bu.ufsc.br/design/Catalogacao.html>

Omar Alberto Roldán García

ESTUDO DE FENÔMENOS EM ESPAÇOS CURVOS

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Física”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.

Florianópolis, 26 de setembro 2012.

Prof. Chefe, Dr. Luis Guilherme de Carvalho Rego
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Jr.
Presidente

Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Jr.
Orientador

Prof. Dr. Sergio Jose Barbosa Duarte

Eu quero dedicar este trabalho a minha esposa
Lina Mariana Frórez e a meus filhos *Luisa*
Fernanda Roldán Frórez e *Mateo Roldán Frórez*.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer infinitamente a minha esposa *Mariana Flórez* pelo apoio que sempre me oferece, assim como pela paz e tranquilidade que sinto ao estar ao seu lado. É tudo isto, que permite me dedicar aos meus estudos. Sem dúvida, este trabalho é também fruto dos seus esforços.

Desejo expressar o meu sentido de gratidão ao meu orientador: o Professor *Celso de Camargo Barros Jr.* pela ajuda, pela liberdade na hora de realizar este trabalho, pela paciência e também pelo tratamento amistoso que de ele obtive.

Agradeço muito aos professores *Roberto Cid* e *Kahio Mazon* os quais mostraram sempre muito interesse em me ajudar. Em particular ao professor *Marcus Benghi* que foi tão diligente em tudo quanto eu precisei dele.

Agradeço grandemente ao secretário mais eficiente que jamais vi, o Antônio Machado, por sua amizade e ajuda. E a quem considero o meu amigo.

Sou também muito grato dos meus colegas e amigos (em ordem alfabético): Camilo Estrada, Camilo Macias, David Tamayo, David Velasco, Marcelo Salvador, Rodrigo Rocha e Thiago Luchese. Todos eles sempre me ofereceram o seu apoio.

Fico muito agradecido com a Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), o Programa de Pós-graduação em física e o *CNPq* os quais me proporcionaram os elementos necessários para a realização deste projecto.

Finalmente agradeço a comunidade do \LaTeX e do Linux por todas as ferramentas que eles nos oferecem as quais facilitam o nosso trabalho permitindo por sua vez manter uma grande qualidade.

We have seen that computer programming is an art, because it applies accumulated knowledge to the world, because it requires skill and ingenuity, and especially because it produces objects of beauty.

(KNUTH, 1974)

RESUMO

Neste trabalho procuramos compreender de forma geométrica a interação de uma partícula puntiforme carregada com um campo eletromagnético externo. Para isto introduzimos o conceito de espaço-tempo próprio (stp), o qual permite descrever esta interação de forma semelhante a teoria geral da relatividade. As equações de campo que permitem obter a geometria do stp são análogas às equações de Einstein, onde em geral, o tensor momento-energia tem informação tanto do campo externo quanto do campo da partícula. Neste formalismo, a trajetória da partícula é considerada como uma curva geodésica em um espaço-tempo curvo (o stp), e deste modo o conceito de força eletromagnética é compreendido como um efeito puramente geométrico.

Palavras-chave: Eletromagnetismo, Relatividade Geral, Espaço-tempo curvo, Interação eletromagnética, Equação de Dirac, Átomo de Hidrogênio.

ABSTRACT

In this work we look for a geometric description of the interaction between a punctual particle and an electromagnetic external field. For this purpose, we introduce the concept of proper space-time (stp), that allow us to describe this interaction in an analogous way to that of the general relativity. The field equations that define this geometry are similar to the Einstein's equations, where in general, the energy-momentum tensor have information of both, the external field and the particle field. In this formalism we consider the particle path as being a geodesic in a curved space-time (the stp), and so, the electromagnetic force is understood purely in a geometric way.

Keywords: Electromagnetism, General Relativity, Curved Space-Time, Electromagnetic interaction, Dirac equation, Hidrogen atom.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Campo próprio da partícula no stp.	43
Figura 2	Movimento das cargas a partir da posição de retorno em um campo elétrico constante.	69
Figura 3	Velocidade vs posição no stp de uma partícula em presença de um campo elétrico constante.	76
Figura 4	Curvas geodésicas para o stp de uma partícula em presença de um campo elétrico constante.	77

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SR	Relatividade Especial	28
GR	Relatividade Geral	28
s-t	Espaço-Tempo	28
stp	Espaço-Tempo Próprio	28

LISTA DE SÍMBOLOS

SUMÁRIO

Introdução	25
1 INTERAÇÃO E GEOMETRIA	29
1.1 EQUAÇÃO DA GEODÉSICA E FORÇA DE LORENTZ	31
1.2 TENSOR DE EINSTEIN E LIBERDADE GAUGE	36
1.2.1 Tensor de Riemann e liberdade gauge	36
1.2.2 Tensor de Einstein e equações de Maxwell	39
1.3 O TENSOR MOMENTO-ENERGIA	41
1.3.1 Tensor momento-energia na aproximação de campo fraco ...	45
2 CAMPO ELETROMAGNÉTICO EM UM ESPAÇO-TEMPO CURVO	47
2.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE O TENSOR MOMENTO-ENERGIA E O TENSOR ELETROMAGNÉTICO	47
2.1.1 Construção do tensor eletromagnético	47
2.1.2 Equações do stp	48
2.1.3 Considerações sobre \vec{E} e \vec{B}	49
2.1.4 Equação de movimento e força de Lorentz	50
2.2 ALGUNS EXEMPLOS: ESPAÇOS-TEMPOS PRÓPRIOS	51
2.2.1 Simetria esférica	51
2.2.2 Campo elétrico uniforme	55
2.2.3 Simetria axial e Teorema de Weyl	57
2.2.4 De volta à aproximação linear	59
3 ANÁLISE DAS SOLUÇÕES EXATAS E DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO	61
3.1 SOLUÇÃO ESFERICAMENTE SIMÉTRICA	62
3.2 CAMPO ELÉTRICO CONSTANTE	66
3.2.1 Compreendendo o sistema	67
3.2.2 Interpretação da métrica e estudo da dinâmica	68
3.2.3 Solução da equação de movimento	72
4 EQUAÇÃO DE DIRAC EM ESPAÇOS CURVOS	79
4.1 PARTÍCULA LIVRE EM UM ESPAÇO-TEMPO CURVO	79
4.1.1 Equação de Dirac-Fock-Weyl	80
4.2 SOLUCIONANDO A EQUAÇÃO DFW	82
5 EQUAÇÃO DE DIRAC PARA O STP	89
5.1 CAMPO ELÉTRICO CONSTANTE	89
5.1.1 Acoplamento mínimo e acoplamento escalar	90
5.1.2 Equação de Dirac unidimensional: acoplamento escalar ...	92
5.2 SIMETRIA ESFÉRICA	94

5.2.1 Solução das equações radiais	96
6 CONCLUSÕES, SUMÁRIO E PERSPECTIVAS	103
6.1 SUMÁRIO	103
6.2 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	104
APÊNDICE A – Tensores na relatividade geral	109
APÊNDICE B – Eletromagnetismo em notação covariante	115
APÊNDICE C – Tetradas ou bases não coordenadas	125
APÊNDICE D – Equação de Dirac	137
Referências Bibliográficas	143

INTRODUÇÃO

Desde os primeiros trabalhos na física, os cientistas vêm procurando por teorias que permitam unificar ou, pelo menos, relacionar conceitos físicos que em uma primeira visão pareciam diferentes.

Por exemplo, Newton, com suas três leis de movimento e sua teoria da gravitação universal, conseguiu mostrar que os movimentos dos corpos celestes e dos corpos terrestres seguem as mesmas leis de movimento, aliás, os corpos caíam à superfície da terra pela mesma razão que os planetas (e qualquer outro corpo celeste) se moviam ao redor do Sol ou a Lua ao redor da Terra.

Na ausência de teorias unificadoras, os cientistas teriam de procurar por uma teoria (tanto construir um conjunto de conceitos físicos, quanto de ferramentas matemáticas) para cada fenômeno observado na natureza. O poder de uma teoria unificadora reside neste fato: que basta um conjunto pequeno de ferramentas matemáticas e poucos conceitos físicos como base, para descrever um conjunto amplo de fenômenos.

Uma teoria unificadora pode, ou bem, i) mostrar que dois conceitos físicos são simplesmente manifestações diferentes da mesma entidade física; ii) ou mostrar que mesmo os conceitos sendo diferentes, eles estão relacionados ou podem ser descritos pelas mesmas ferramentas matemáticas.

Uma teoria unificadora do segundo tipo foi obtida por Maxwell (apoiando-se nos resultados de Ampère e Faraday). Na teoria de Maxwell, resumida nas famosas equações que recebem seu nome, ele mostra que os campos elétricos e magnéticos estão relacionados entre si, aliás, eles são descritos basicamente pelas mesmas ferramentas matemáticas (cálculo vetorial).

No entanto, a teoria de Maxwell considera os campos elétricos como entidades distintas dos campos magnéticos. É só quando a teoria da relatividade especial aparece, que a unificação total entre esses dois conceitos se dá (teoria tipo i)).

Porém, o eletromagnetismo é também uma teoria unificadora tipo i), a qual permite descrever a ótica como sendo um fenômeno completamente eletromagnético.

Uma outra teoria unificadora é a relatividade geral (GR) que permite descrever a gravitação universal de forma compatível com a teoria especial da relatividade (SR).

Contudo, não existe na atualidade, uma teoria de campo unificado para o eletromagnetismo e a gravitação. Albert Einstein foi um dos pioneiros na busca por esta teoria de campo unificado. Em palavras dele, "The

idea that there are two structures of space independent of each other, the metric-gravitational and the electromagnetic, is intolerable to the theoretical spirit” (tomado de (ASPDEN, 1980)-pag:1, citando ao livro (BARNETT, 1966)). Contudo, apesar dos seus esforços, ele não conseguiu incorporar o eletromagnetismo na GR (isto é, uma descrição geométrica).

Uma outra tentativa de descrever o eletromagnetismo de forma geométrica foi feita por Hermann Weyl ((PAULI, 1958)-seção:65), que pretendia descrever em termos geométricos os campos gravitacional e eletromagnético. Esta ideia era baseada em uma generalização da geometria de Riemann. - Mesmo sendo uma teoria bastante profunda e na qual ele obteve as equações de Maxwell somente usando geometria, esta teoria foi praticamente abandonada. Um dos principais problemas desta teoria é que o período de um relógio em um potencial eletrostático é dado por

$$\tau = \tau_0 e^{\alpha\phi t}, \quad (1)$$

com τ_0 e α constantes, e ϕ o potencial eletrostático. Deste modo, se dois relógios idênticos estão inicialmente à mesma posição (com potencial eletromagnético ϕ_1) e em seguida, um deles é levado para outra posição (a um potencial ϕ_2) durante um intervalo de t segundos, e depois é regressado à posição original; então, de acordo com a teoria de Weyl, um dos relógios estará adiantado (atrasado) em relação ao outro por uma relação

$$t_1/t_2 = e^{\alpha(\phi_1 - \phi_2)t}. \quad (2)$$

Este efeito poderia ser medido nas raias espectrais de alguma substância, mesmo α sendo pequeno (dado o caráter exponencial da Eq. (2)), e linhas espectrais de uma definida frequência não poderiam existir.

Ainda hoje, os cientistas se esforçam na procura por uma teoria unificadora do eletromagnetismo e a gravitação. No entanto, esta ainda não foi criada.

No presente trabalho, não procuramos por uma teoria que unifique o eletromagnetismo com a gravitação como sendo parte de uma mesma entidade física (teoria tipo i)¹ mas, procuramos por um formalismo que permita descrever em termos geométricos (do mesmo método que em GR) a interação entre uma partícula carregada e um campo eletromagnético (teoria tipo ii)). De certa forma, poderíamos dizer que nesta dissertação não procuramos por uma unificação dos campos (eletromagnético e gravitacional), mas por uma unificação "da força". Isto quer dizer, que do mesmo modo que a força gravitacional é descrita como devida a um efeito da curvatura do espaço-

¹Este é o objetivo de uma teoria de campo unificada.

tempo, neste documento procuramos entender a força eletromagnética sobre uma partícula carregada, como sendo devida à curvatura de um certo espaço-tempo, o qual será chamado de espaço-tempo próprio.

A ideia de espaço-tempo próprio será desenvolvida na primeira parte deste trabalho, ela surgiu com base no trabalho recente de (BARROS, 2005a, 2006, 2005b), onde foi feito um tratamento geométrico para a interação de uma partícula carregada com um campo eletrostático, e é usada a interação no átomo de hidrogênio (a interação elétron-próton) como exemplo para corroborar a teoria. Para isto a relação do momento é quantizada e a energia obtida a partir de uma métrica tipo Schwarzschild. A predição para o espectro de energia obtido com este procedimento está em bom acordo com as medidas experimentais.

Devemos salientar que o estudo exposto nesta dissertação possui um forte caráter exploratório. Com o objetivo de realizar progressos na teoria proposta em (BARROS, 2005a, 2006, 2005b), tanto no aspecto conceitual e interpretativo, como em termos de aplicações para novos sistemas, muitas vezes vamos nos permitir apresentar idéias e conclusões com relativa liberdade.

O presente trabalho está distribuído em duas partes: a parte I é dedicada ao tratamento clássico, e a parte II ao tratamento quântico.

No capítulo 1, começamos por usar uma aproximação na qual consideramos campos fracos, de modo que o espaço-tempo próprio possa ser considerado como devido a uma pequena perturbação do espaço-tempo plano (aquele no qual não tem interação). Neste caso usamos a conhecida aproximação linear, a qual é muito usada para estudar ondas gravitacionais; nesta aproximação conseguimos identificar os coeficientes métricos em termos do potencial eletromagnético.

Ao final desse capítulo, fazemos uma análise para obter uma equação de campo (tipo equação de Einstein da GR) para o espaço-tempo próprio, e com esta, no capítulo 2 deduzimos a métrica associada ao caso de uma partícula em presença de um campo eletrostático: 1) com simetria esférica, 2) constante.

Na segunda parte, se faz um tratamento quântico baseado nos conceitos construídos na primeira parte. A ideia básica é usar a equação de Dirac em um espaço-tempo curvo e aplicá-la aos espaços obtidos no capítulo 2. Em particular, no capítulo 5 se dá uma aplicação ao átomo de Hidrogênio e se deduz o espectro de energia, o qual tem bom acordo com os dados experimentais.

Por último, teremos quatro abreviações referentes às expressões muito

usadas no texto, estas são:

- SR : Relatividade especial.
- GR : Relatividade geral.
- s-t : Espaço-tempo.
- stp : Espaço-tempo próprio.

1 INTERAÇÃO E GEOMETRIA

A teoria da relatividade geral (ou GR) descreve a gravitação como um efeito geométrico. Deste modo na ausência de forças, toda partícula de teste¹ segue uma trajetória geodésica, ou seja, uma curva no espaço-tempo (ou s-t) que pode ser obtida pela equação

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0, \quad (1.1)$$

onde τ é o tempo próprio e $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ são os símbolos de Christoffel os quais não dependem da natureza das partículas de teste².

Assim, a evolução das partículas na ausência de forças não depende da natureza individual de cada uma delas, como carga, massa ou spin, sendo portanto a gravitação um efeito puramente geométrico no qual o s-t (a métrica) é o mesmo para todos estes sistemas. As partículas que seguem trajetórias geodésicas são chamadas *inerciais*.

A situação é diferente quando as partículas estão interagindo, tal é o caso de partículas carregadas em presença de campos eletromagnéticos externos. Dessa vez, a trajetória de cada uma delas é determinada por suas características: massa, carga e spin, de acordo com a equação

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = \frac{1}{m} f^\mu, \quad (1.2)$$

onde f^μ é o quadrivetor de força e m a massa da partícula. Logo, a dinâmica da partícula depende explicitamente da sua massa. Aliás, em geral, a força f^μ depende também das características da partícula; este é o caso da força de Lorentz a qual descreve o efeito que os campos eletromagnéticos exercem sobre uma carga q . Neste caso, f^μ é proporcional a q . Portanto, em presença de interação³ a dinâmica das partículas não é mais descrita (completamente) em termos geométricos.

No presente trabalho se apresenta o resultado das pesquisas que os autores fizeram na busca por uma teoria que permita entender a interação eletromagnética em termos geométricos de um modo análogo ao que foi feito

¹Uma partícula de teste é uma partícula que não afeta significativamente os campos com que interage.

²Neste trabalho estamos supondo que o leitor está familiarizado com os conceitos básicos da GR, aliás, no apêndice A todos estes conceitos são recordados. Para este capítulo, o leitor pouco familiarizado com GR pode apoiar-se nos capítulos 3 do (CARROLL, 2004) ou cap:4 e cap:6 do (WEINBERG, 1972).

³A gravitação é entendida como um efeito geométrico, portanto não contribui para força f^μ .

para a gravitação na GR. Logo, a ideia principal desta tese consiste em supor que a trajetória que cada partícula segue é uma geodésica em um certo espaço-tempo, o qual chamamos de espaço-tempo próprio (ou stp). Assim cada partícula é inercial no seu próprio s-t o qual é por sua vez determinado pela interação da partícula com o entorno.

Deste modo, ao descrever a evolução de partículas interagentes⁴, devemos diferenciar o s-t percebido pela partícula (o stp) do s-t percebido por um observador externo que não faz parte da interação⁵ (o s-t de fundo), o qual é o mesmo para os sistemas não interagentes (sistemas neutros). Esta ideia será parcialmente desenvolvida na próxima seção.

Em GR para conhecer a evolução de um sistema é preciso conhecer a métrica $g_{\mu\nu}$, a qual possui toda a informação sobre o s-t. Esta métrica pode ser obtida a partir do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ de todos os sistemas que contribuem à curvatura do s-t. Em princípio, todo sistema no Universo contribui para $T_{\mu\nu}$ ⁶.

Nesta teoria (da gravitação) a relação entre $g_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ é dada pela equação de Einstein

$$G_{\nu\sigma} = kT_{\nu\sigma}, \quad k = 8\pi G/c^4, \quad (1.3)$$

onde $G_{\nu\sigma}$ é o tensor de Einstein⁷, o qual está definido completamente em termo de $g_{\nu\sigma}$ e suas derivadas (de primeira e segunda ordem), G é a constante gravitação universal e c a velocidade da luz.

Por analogia com GR, neste trabalho procura-se obter uma equação tipo equação de Einstein que relacione a métrica do stp com o tensor momento-energia do campo eletromagnético externo. Isto será feito ao final do presente capítulo, mas de momento vamos começar considerando a equação de movimento no caso em que a interação é fraca, de modo que a métrica do stp possa ser considerada como uma pequena perturbação de um s-t plano (o s-t de fundo). Isto nos permitirá obter informação sobre a métrica do stp em termos do potencial eletromagnético do campo externo.

⁴No que resta desta tese, quando nos referimos à interação, estamos querendo dizer: interação eletromagnética entre uma carga puntual e um campo eletromagnético. Outros tipos de interação não serão considerados.

⁵Este observador pode ser uma partícula neutra (sem carga), a qual não se vê afetada pela presença do campo externo. Ou bem, pode ser a pessoa que está manipulando os campos eletromagnéticos.

⁶Isto contrasta com a ideia do espaço-tempo próprio que queremos introduzir, na qual só aqueles sistemas que interagem com a partícula contribuem para $T_{\mu\nu}$: sistemas neutros não contribuem.

⁷Ver apêndice A.

1.1 EQUAÇÃO DA GEODÉSICA E FORÇA DE LORENTZ

Vamos tentar entender de uma forma geométrica a interação de uma partícula carregada com um campo eletromagnético externo. Para isto vamos considerar que o s-t percebido pelo observador é descrito pela métrica plana $\eta_{\mu\nu}$, mas que a partícula carregada percebe o s-t como sendo curvo. É este s-t que chamaremos de espaço-tempo próprio e estará descrito pela métrica $g_{\mu\nu}$.

Para obter informação sobre $g_{\mu\nu}$, é conveniente estudar a situação em que a interação é fraca. A seguir, vamos considerar o método da aproximação linear, o qual é usado tipicamente em textos de GR⁸ para descrever ondas gravitacionais ou como um primeiro passo para obter as equações de Einstein a partir da lei de gravitação universal.

No caso da aproximação linear (interação fraca), assumimos que a métrica $g_{\mu\nu}$ do stp pode ser escrita como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (1.4)$$

onde h é considerado (percebido pela partícula) como uma perturbação na métrica de fundo η . A perturbação $h_{\mu\nu}$ se entende também como um campo tensorial presente no s-t plano, o qual é responsável pela força sobre a carga q (tal e como é percebido pelo observador).

A inversa da métrica g em primeira ordem em h é dada por

$$(g^{-1})^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

vamos agora obter $h^{\mu\nu}$. Para isto exigimos $\delta_{\sigma}^{\mu} = (g^{-1})^{\mu\nu} g_{\nu\sigma}$, onde δ_{σ}^{μ} é o tensor delta de Kronecker, assim

$$\begin{aligned} \delta_{\sigma}^{\mu} &= (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})(\eta_{\nu\sigma} + h_{\nu\sigma}) \\ &= \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\sigma} + \eta^{\mu\nu}h_{\nu\sigma} - h^{\mu\nu}\eta_{\nu\sigma} + \mathcal{O}(h^2), \end{aligned} \quad (1.6)$$

agora, desprezando termos quadráticos em h , e usando o fato que $\eta^{\mu\nu}$ é a inversa de $\eta_{\mu\nu}$ temos

$$\eta^{\mu\nu}h_{\nu\sigma} = h^{\mu\nu}\eta_{\nu\sigma} \quad \rightarrow \quad h^{\mu\lambda} = \eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\sigma}h_{\nu\sigma}, \quad (1.7)$$

isto é, os índices na perturbação h são levantados e abaixados pela métrica de fundo. Este fato será usado no que resta deste capítulo.

⁸Veja por exemplo. (CARROLL, 2004)-cap:7, (WALD, 1984)-cap:4.4.

Os sÃmbolos de Christoffel $\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}$ da mÃtrica g sÃo definidos pela equaÃÃo

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(-g_{\rho\sigma,\lambda} + g_{\lambda\rho,\sigma} + g_{\sigma\lambda,\rho}), \quad (1.8)$$

os quais se relacionam com os sÃmbolos de Christoffel $\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\mu}$ da mÃtrica η atravÃs de⁹

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} &= \frac{1}{2}(\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda}) \left[-(\eta_{\rho\sigma,\lambda} + h_{\rho\sigma,\lambda}) + \right. \\ &\quad \left. (\eta_{\lambda\rho,\sigma} + h_{\lambda\rho,\sigma}) + (\eta_{\sigma\lambda,\rho} + h_{\sigma\lambda,\rho}) \right] \\ &= \tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\mu} - A^{\mu}_{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

onde ao contrÃrio de $\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\mu}$, $A^{\mu}_{\rho\sigma}$ Ã um tensor, como serÃ verificado a seguir,

$$\begin{aligned} A^{\mu}_{\rho\sigma} &\equiv \frac{1}{2}h^{\mu\lambda} \left[-\eta_{\rho\sigma,\lambda} + \eta_{\lambda\rho,\sigma} + \eta_{\sigma\lambda,\rho} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda} \left[-h_{\rho\sigma,\lambda} + h_{\lambda\rho,\sigma} + h_{\sigma\lambda,\rho} \right]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Ã conveniente trabalhar com o tensor $A_{\mu\rho\sigma}$ ao invÃs de $A^{\mu}_{\rho\sigma}$,

$$\begin{aligned} A_{\mu\rho\sigma} &= -\frac{1}{2}(-h_{\rho\sigma,\mu} + h_{\mu\rho,\sigma} + h_{\sigma\mu,\rho}) + \tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\lambda}h_{\mu\lambda} \\ &= -\frac{1}{2}(-\nabla_{\mu}h_{\rho\sigma} + \nabla_{\sigma}h_{\mu\rho} + \nabla_{\rho}h_{\sigma\mu}), \end{aligned} \quad (1.11)$$

as derivadas covariantes (Eq. (A.17)) sÃo tomadas no s-t de fundo, isto Ã

$$\nabla_{\mu}h_{\rho\sigma} = \partial_{\mu}h_{\rho\sigma} - \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^{\lambda}h_{\lambda\sigma} - \tilde{\Gamma}_{\mu\sigma}^{\lambda}h_{\rho\lambda}. \quad (1.12)$$

Da Eq. (1.11) vemos explicitamente que $A_{\mu\rho\sigma}$ Ã um tensor, dado que as derivadas covariantes de um tensor qualquer sÃo tambÃm tensores.

Agora a ideia de stp consiste em supor que a partÃcula nÃo sente uma forÃa, mas que ela percebe o seu espaÃo-tempo como sendo curvo. Deste modo, como ela nÃo estÃ sendo forÃada (no stp), ela deve se mover como uma partÃcula livre, isto Ã, sua trajetÃria estÃ descrita pela equaÃÃo da geodÃsica

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} = 0, \quad (1.13)$$

⁹Em coordenadas cartesianas $\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\mu}$ Ã nulo, mas em outros sistemas coordenados como o esfÃrico $\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\mu} \neq 0$. A introduÃÃo dos sÃmbolos $\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\mu}$ permite estender o presente formalismo para o caso em que o s-t de fundo nÃo Ã plano, isto Ã, tem campo gravitacional.

ou em termos do s-t de fundo

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = A^\mu{}_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}. \quad (1.14)$$

Ao comparar com a Eq. (1.2) podemos dizer que de acordo com o observador, a partícula está sujeita a uma força f^μ ,

$$f^\mu = mA^\mu{}_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}, \quad (1.15)$$

deste modo $A^\mu{}_{\rho\sigma}$ contém toda a informação da força exercida pelo campo na partícula.

A seguir, tentaremos encontrar uma relação entre o tensor $A^\mu{}_{\rho\sigma}$ e o tensor de campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$. Para isso, consideremos o caso de baixas velocidades ($dx^i/d\tau \ll dx^0/d\tau \approx c$), de modo que termos quadráticos nas velocidades são desprezíveis. Identificando a Eq. (1.15) com a força de Lorentz¹⁰ Eq. (B.27) parece natural (em uma primeira visão) fazer as identificações

$$A_{i00} \rightarrow \frac{q}{mc} F_{i0}, \quad A_{ij0} \rightarrow \frac{q}{2mc} F_{ij}, \quad (1.16)$$

onde usamos o fato que $A^\mu{}_{\rho\sigma}$ é simétrico em $\rho\sigma$. Mas para fazer esta identificação de forma certa, é melhor achar essas quantidades de forma explícita.

Vamos primeiro definir os sistemas de coordenadas nos quais estamos interessados. Neste trabalho estamos considerando somente observadores inerciais em um s-t de fundo plano cuja métrica está dada em coordenadas cartesianas por

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (1.17)$$

Agora, qualquer um desses observadores pode escolher um outro sistema de coordenadas para descrever o espaço¹¹, mas sem modificar a coordenada temporal. Assim, neste novo sistema de coordenadas

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ 0 & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ 0 & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

¹⁰Para uma revisão do eletromagnetismo em notação tensorial veja o apêndice B, onde se apresenta o processo de passar as equações de Maxwell da forma vetorial para a forma tensorial, aliás se faz uma discussão sobre a força de Lorentz.

¹¹Por exemplo, coordenadas esféricas ou cilíndricas.

Logo, em geral teremos $\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\mu} \neq 0$. No entanto

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\sigma}^0 = \tilde{\Gamma}_{\mu 0}^{\lambda} = \tilde{\Gamma}_{0\sigma}^{\lambda} = 0, \quad (1.19)$$

como pode ser provado facilmente. Vamos mostrar a validade dessa expressão só para o primeiro caso, os outros casos podem ser feitos de forma análoga

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\mu\sigma}^0 &= \frac{1}{2} \eta^{0\lambda} (-\eta_{\mu\sigma,\lambda} + \eta_{\lambda\mu,\sigma} + \eta_{\sigma\lambda,\mu}) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{00} (-\eta_{\mu\sigma,0} + \eta_{0\mu,\sigma} + \eta_{\sigma 0,\mu}), \end{aligned} \quad (1.20)$$

mas cada um desses termos é nulo, já que $\eta_{\mu\sigma}$ não depende do tempo (só do espaço), e $\eta_{0\mu} = \delta_{0\mu} = \text{constante}$.

Tendo percebido isso, podemos verificar que as derivadas covariantes ficam bem mais simples

$$\begin{aligned} \nabla_0 h_{\rho\sigma} &= \partial_0 h_{\rho\sigma}, & \nabla_i h_{00} &= \partial_i h_{00}, \\ \nabla_i h_{0j} &= \partial_i h_{0j} - \tilde{\Gamma}_{ij}^k h_{0k}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

e desta maneira podemos facilmente calcular o tensor $A_{i\mu 0}$

$$A_{i00} = \partial_i \frac{h_{00}}{2} - \partial_0 h_{i0}, \quad A_{ij0} = \frac{1}{2} (\partial_i h_{j0} - \partial_j h_{i0}) - \frac{1}{2} \partial_0 h_{ij}. \quad (1.22)$$

Observando os resultados, parece natural identificar $h_{\mu 0}$ com o potencial eletromagnético Eq. (B.24) na forma

$$h_{00} = 2 \frac{q}{mc} A_0, \quad h_{0i} = \frac{q}{mc} A_i. \quad (1.23)$$

É conveniente introduzir o tensor $s_{\mu\nu}$ na forma

$$h_{\mu\nu} := \frac{q}{mc} s_{\mu\nu}, \quad (1.24)$$

logo, as equações (1.22) e (1.23) se simplificam:

$$A_{i00} = \frac{q}{mc} F_{i0}, \quad A_{ij0} = \frac{q}{2mc} F_{ij} - \frac{q}{2mc} \partial_0 s_{ij}, \quad (1.25)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad A_\mu = \left(\frac{s_{00}}{2}, s_{0i} \right) \quad (1.26)$$

Portanto, a identificação feita na equação (1.25), substitui a feita na Eq. (1.16).

Usando a Eq. (1.25) na equação (1.15) podemos escrever a força como

$$\begin{aligned} f^i &= mA^i{}_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = \frac{q}{c} [c^2 F_0^i + c (F_j^i - \partial_0 s_j^i) v^j] \\ &= q \left[c \left(F_0^i - \frac{1}{c} \partial_0 s_j^i v^j \right) + (F_j^i - \partial_0 s_j^i) v^j \right], \end{aligned} \quad (1.27)$$

onde introduzimos a quantidade

$$\hat{s}_j^i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j, \\ s_j^i & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (1.28)$$

Vemos que a equação da força deduzida para o stp, apresenta além da força de Lorentz, um termo proporcional a $\partial_0 s_{ij}$. Sabemos no entanto, que um tratamento completo da dinâmica de uma partícula carregada deve conter além da força devida aos campos externos, o efeito do campo próprio da partícula e da reação de radiação¹². Deste modo, poderíamos esperar que o fator proporcional a $\partial_0 s_{ij}$ esteja relacionado com esses campos próprios.

Em qualquer caso, no presente limite (de campo fraco e baixas velocidades) este termo deve ser pequeno comparado com o efeito da força de Lorentz (igual ao efeito de reação de radiação); de outro modo nosso formalismo não estaria correto¹³.

Por outro lado, o potencial eletromagnético A_μ é um vetor no s-t, e por construção $s_{\mu\nu}$ um tensor. Assim, parece que a quantidade $(s_{00}/2, s_{0i})$ não poderia se identificar com um vetor (como foi feito em Eq. (1.23)). Contudo, se fixarmos um observador, e este resolver mudar de sistema de coordenadas para descrever o espaço¹⁴ (não mudando o tempo) teríamos

$$x^\mu = (x^0, x^k) \rightarrow x^{\mu'} = (x^0, x^{k'}), \quad (1.29)$$

e portanto A_μ transforma como

$$A_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} A_\mu = \left(A_0, \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} A_k \right). \quad (1.30)$$

¹²Ver discussão ao final do apêndice B

¹³Isto deve ser assim, pois a força de Lorentz já foi testada extensivamente nos experimentos.

¹⁴Por exemplo, podemos passar do sistema cartesiano (t, x, y, z) ao sistema de coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) . Nesse caso, temos somente transformação das coordenadas espaciais. A variável temporal mudará quando fizermos um boost, isto é, ao trocar de observador.

Aliás, a regra de transformação para $h_{0\mu}$ é

$$\begin{aligned} h_{0\mu'} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x^0} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} h_{\nu\mu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} h_{0\mu} \\ \rightarrow h_{0\mu'} &= \left(h_{00}, \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} h_{0k} \right), \end{aligned} \quad (1.31)$$

isto é, $h_{0\mu}$ tem a mesma regra de transformação de A_μ para este grupo restrito de transformações (espaciais)¹⁵. Porém, devemos notar que este não é o caso quando passamos de um observador para outro, isto é, se fizermos um boost. Discutiremos mais a respeito desse assunto no final do presente capítulo.

1.2 TENSOR DE EINSTEIN E LIBERDADE GAUGE

1.2.1 Tensor de Riemann e liberdade gauge

Na seção passada conseguimos fazer uma identificação das componentes $h_{0\mu}$ da perturbação métrica, com o potencial eletromagnético A_μ . Isto foi feito ao considerar as equações de movimento: equação geodésica e força de Lorentz. Porém, precisamos dar um outro passo para obter mais informação sobre $h_{\mu\nu}$. É este o objetivo desta seção ao calcular o tensor de Einstein.

Para achar o tensor de Einstein, precisamos primeiro obter o tensor de Riemann do stp

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = -\Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu,\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} + \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \Gamma^\mu_{\rho\lambda}, \quad (1.32)$$

o qual em termos do s-t de fundo se escreve como

$$\begin{aligned} R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} &= -(\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho,\sigma} - A^\mu_{\nu\rho,\sigma}) + (\tilde{\Gamma}^\mu_{\sigma\nu,\rho} - A^\mu_{\sigma\nu,\rho}) \\ &- \left(\tilde{\Gamma}^\lambda_{\nu\rho} - A^\lambda_{\nu\rho} \right) (\tilde{\Gamma}^\mu_{\sigma\lambda} - A^\mu_{\sigma\lambda}) + \left(\tilde{\Gamma}^\lambda_{\sigma\nu} - A^\lambda_{\sigma\nu} \right) (\tilde{\Gamma}^\mu_{\rho\lambda} - A^\mu_{\rho\lambda}). \end{aligned}$$

Em primeira ordem em h podemos fazer a separação $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = (R_0 + R_1)^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$, onde R_0 se refere ao s-t de fundo, de modo que $(R_0)^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ é nulo no

¹⁵Podemos notar que esta propriedade não se restringe somente à transformação como um vetor no sistema de coordenadas, mas também na hora de fazer uma derivada covariante. Isto é, de acordo com Eq. (1.21) a derivada de $h_{0\mu}$ é feita como se este fosse um vetor dado que só se precisa de um símbolo de Christoffel.

presente caso (caso plano). Assim,

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = (R_1)^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = A^\mu{}_{\nu\rho,\sigma} - A^\mu{}_{\sigma\nu,\rho} + \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\nu\rho} A^\mu{}_{\sigma\lambda} + A^\lambda{}_{\nu\rho} \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\sigma\lambda} - \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\sigma\nu} A^\mu{}_{\rho\lambda} - A^\lambda{}_{\sigma\nu} \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\rho\lambda}, \quad (1.33)$$

o qual se escreve de forma compacta como

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \nabla_\sigma A^\mu{}_{\nu\rho} - \nabla_\rho A^\mu{}_{\sigma\nu}. \quad (1.34)$$

Da Eq. (1.14) vemos que a quantidade que pode ser observada na prática é o tensor $A^\mu{}_{\rho\sigma}$, já que este está diretamente relacionado com a força f^μ a qual é medida no momento de observar a trajetória da partícula. Contudo, este não é o caso de $h_{\mu\sigma}$. Portanto, de acordo com a Eq. (1.11) podemos pensar $h_{\mu\sigma}$ como sendo um potencial de interação¹⁶. O resultado será uma liberdade de gauge para o tensor $h_{\mu\sigma}$ e portanto para a métrica $g_{\mu\sigma}$. É esta a razão pela qual o observador não percebe o stp da partícula, mas sim as suas consequências, como o tensor $A^\mu{}_{\sigma\nu}$.

Vamos agora procurar pelo "grupo" de transformações de gauge associado ao stp, isto é, qual é o conjunto de transformações sobre $h_{\mu\nu}$ que deixam a dinâmica da partícula invariante tal como percebido pelo observador. Para começar podemos nos perguntar pelo conjunto de transformações de gauge que deixa invariante o tensor de Riemann.¹⁷

O grupo mais amplo de transformações que deixam invariante o tensor de Riemann é dado por ((CARROLL, 2004)-cap:7)

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu, \quad (1.35)$$

sendo ξ_μ um vetor qualquer. Porém, em geral o tensor $A^\mu{}_{\rho\sigma}$ não é invariante sob esta transformação, o que teria como consequência uma modificação na equação de movimento (1.14) (força de Lorentz).

Vamos mostrar isto de forma explícita. Da Eq. (1.11) temos

$$A_{\mu\rho\sigma} \rightarrow -\frac{1}{2} \left\{ -\nabla_\mu (h_{\rho\sigma} + \nabla_\rho \xi_\sigma + \nabla_\sigma \xi_\rho) + \nabla_\sigma (h_{\mu\rho} + \nabla_\mu \xi_\rho + \nabla_\rho \xi_\mu) + \nabla_\rho (h_{\sigma\mu} + \nabla_\sigma \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\sigma) \right\},$$

¹⁶Isso era de se esperar desde o momento em que fizemos a identificação Eq. (1.23).

¹⁷Isso porque o tensor de Riemann contém toda a informação sobre a curvatura de um espaço-tempo.

o qual leva a regra de transformação

$$A_{\mu\rho\sigma} \rightarrow A_{\mu\rho\sigma} - \nabla_\rho \nabla_\sigma \xi_\mu, \quad (1.36)$$

onde usamos a relação $\nabla_\rho \nabla_\sigma = \nabla_\sigma \nabla_\rho$ que é válida somente se o espaço-tempo é plano (este é o caso do s-t de fundo).

Com este resultado, vamos provar que o tensor de Riemann é invariante sob este grupo de transformações. De fato, substituindo em Eq. (1.34) temos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &\rightarrow \nabla_\sigma (A_{\mu\nu\rho} - \nabla_\nu \nabla_\rho \xi_\mu) - \nabla_\rho (A_{\mu\sigma\nu} - \nabla_\sigma \nabla_\nu \xi_\mu) \\ &= R_{\mu\nu\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Embora o tensor $A_{\mu\rho\sigma}$ não seja invariante sob o grupo completo¹⁸ de transformações dado na Eq. (1.35), podemos fixar as três componentes espaciais de ξ para obter uma relação entre o tensor de Einstein do stp e as equações de Maxwell, como se indicará ao final da seção. Deste modo, uma vez fixado ξ_i , a liberdade de gauge fica restrita à componente temporal de ξ , e a transformação gauge se reduz a

$$h_{00} \rightarrow h_{00} + 2\nabla_0 \xi_0, \quad h_{0i} \rightarrow h_{0i} + \nabla_i \xi_0, \quad h_{ij} \rightarrow h_{ij}. \quad (1.38)$$

Definindo $\xi_0 = (q/mc) \phi$, temos (em termos de $s_{\mu\nu}$) a transformação de gauge

$$\left(\frac{s_{00}}{2}, s_{0i} \right) \rightarrow \left(\frac{s_{00}}{2} + \nabla_0 \phi, s_{0i} + \nabla_i \phi \right), \quad s_{ij} \rightarrow s_{ij}, \quad (1.39)$$

com a qual se obtém exatamente a transformação gauge do eletromagnetismo $A_\mu \rightarrow A_\mu + \nabla_\mu \phi$, com A_μ dado pela Eq. (1.26).

Uma vez fixados ξ_i e mantendo a liberdade de gauge em ξ_0 (ou ϕ) o tensor A transformará de acordo com (ver Eq. (1.36))

$$A_{0\rho\sigma} \rightarrow A_{0\rho\sigma} - \nabla_\rho \nabla_\sigma \xi_0, \quad A_{i\rho\sigma} \rightarrow A_{i\rho\sigma}. \quad (1.40)$$

dado que $A_{i\rho\sigma}$ é invariante sob este grupo restrito de transformações, então a força f_i sobre a partícula (ver Eq. (1.15))

$$f_i = mA_{i\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}, \quad (1.41)$$

será invariante. Isso é o que acontece no eletromagnetismo.

¹⁸Este fato (de A não ser invariante) tem como consequência uma modificação na equação de movimento (1.14).

Contudo, a componente temporal da força (Eq. (1.15)) não é invariante sob a este grupo de transformações enquanto a força de Lorentz ($f_\mu = qF_{\mu\nu}dx^\nu/d\tau$) é invariante.

Por outro lado, $p^0c = mcdx^0/d\tau$ representa a energia da partícula. Assim (usando coordenadas cartesianas, $\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^\mu = 0$),

$$f^0 = c \frac{dp^0}{d\tau} = mcA^0_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \quad (1.42)$$

representa a variação dessa energia.

Lembremos que a força de Lorentz não considera os efeitos de radiação da partícula, e portanto não leva em conta a variação da energia por causa da emissão de radiação. Porém, como veremos nas próximas seções, as componentes ij do tensor $s_{\mu\nu}$ possuem informação sobre o campo próprio da partícula. Desse modo, um tratamento que vise abarcar estes efeitos, deve conter à variação da energia como consequência da radiação emitida. Nesse sentido, se faz necessário fixar ξ_0 (fixar o gauge) a fim de obter a expressão certa para este tipo de fenômeno. No entanto, este processo não é feito no presente trabalho, deixamos assim esta questão aberta para pesquisa futuras.

1.2.2 Tensor de Einstein e equações de Maxwell

Agora calculamos o tensor de Ricci (e com este, o tensor de Einstein),

$$R_{\nu\sigma} = R^\mu{}_{\nu\mu\sigma} = \nabla_\sigma A^\mu{}_{\nu\mu} - \nabla_\mu A^\mu{}_{\nu\sigma}, \quad (1.43)$$

a partir do qual temos

$$R_{00} = \frac{q}{mc} \left[\nabla^i F_{0i} + \frac{1}{2} \nabla_0 \nabla^0 s^k{}_k \right], \quad (1.44)$$

$$R_{0j} = \frac{q}{mc} \left[\frac{1}{2} \nabla^i F_{ji} + \frac{1}{2} \nabla_0 \nabla^i s_{ij} - \frac{1}{2} \nabla_0 \nabla_j s^k{}_k \right], \quad (1.45)$$

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \frac{q}{mc} \nabla_0 (-\nabla^0 s_{ij} + \nabla_i s^0{}_j + \nabla_j s^0{}_i) \quad (1.46)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{q}{mc} \left[\nabla_k (-\nabla^k s_{ij} + \nabla_i s^k{}_j + \nabla_j s^k{}_i) - \nabla_i \nabla_j s^\mu{}_\mu \right].$$

Agora podemos calcular o escalar de curvatura R , e com este, o tensor

de Einstein:¹⁹

$$G_{\nu\sigma} = R_{\nu\sigma} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\sigma}R, \quad (1.47)$$

no entanto, ao perceber que $G_{0j} = R_{0j}$ podemos aproveitar para fazer escolha do gauge, e fixar ξ_i . Este é escolhido de modo que possamos recuperar as equações de Maxwell (B.19). Da Eq. (1.45) vemos que ao escolher o gauge

$$\nabla_i s^i_j = F_{0j} + \nabla_j s^k_k, \quad (1.48)$$

podemos identificar a componente T_{0i} do tensor momento-energia com a corrente J_i . Neste gauge, a componente 0ν do tensor de Einstein é

$$G_{0\nu} = R_{0\nu} = \frac{1}{2} \frac{q}{mc} \nabla^\mu F_{\nu\mu}, \quad (1.49)$$

a qual podemos associar com a corrente J_ν nas equações de Maxwell Eq. (B.19).

Fixar este gauge parece uma ideia plausível devido a forma de $G_{0\nu}$, contudo, o gauge Eq. (1.48), não é explicitamente covariante.

Desse modo, no que segue vamos fazer escolha de outro gauge, o gauge de Lorentz

$$\nabla_i s^i_j = F_{0j} + \frac{1}{2} \nabla_j s^k_k, \quad (1.50)$$

o qual pode se reescrever de forma explicitamente covariante

$$\nabla_\mu h^\mu_j = \frac{1}{2} \nabla_j h^\mu_\mu. \quad (1.51)$$

Neste caso, o tensor de Ricci é

$$R_{00} = \frac{q}{mc} \left[\nabla^i F_{0i} + \frac{1}{2} \nabla_0 \nabla^0 s^k_k \right], \quad (1.52)$$

$$R_{0j} = \frac{q}{mc} \left[\frac{1}{2} \nabla^\mu F_{j\mu} - \frac{1}{4} \nabla_0 \nabla_j s^k_k \right], \quad (1.53)$$

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{q}{mc} \nabla_\mu \nabla^\mu s_{ij}, \quad (1.54)$$

e o escalar de curvatura

$$R = -\frac{q}{mc} \left[\nabla^i F_{0i} + \nabla_0 \nabla^0 s^k_k + \frac{1}{2} \nabla^2 s^k_k \right], \quad (1.55)$$

¹⁹Nesta equação deveria aparecer o termo $g_{\nu\sigma}R$ em vez de $\eta_{\nu\sigma}R$, mas dado que R já é de ordem h , basta calcular $g_{\nu\sigma}R = (\eta_{\nu\sigma} + h_{\nu\sigma})R = \eta_{\nu\sigma}R$.

com $\nabla^2 = \nabla_i \nabla^i$ sendo o laplaciano.

O tensor de Einstein tem a seguinte forma

$$G_{00} = \frac{1}{2} \frac{q}{mc} \left[\nabla^i F_{0i} - \frac{1}{2} \nabla_i \nabla^i s^k_k \right], \quad (1.56)$$

$$G_{0j} = \frac{1}{2} \frac{q}{mc} \left[\nabla^\mu F_{j\mu} - \frac{1}{2} \nabla_0 \nabla_j s^k_k \right], \quad (1.57)$$

$$G_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{q}{mc} \nabla_\mu \nabla^\mu s_{ij} + \eta_{ij} \left(G_{00} + \frac{1}{2} \frac{q}{mc} \nabla_\mu \nabla^\mu s^k_k \right). \quad (1.58)$$

Ao olhar para G_{00} e G_{0j} podemos perceber que a quantidade $\frac{c}{2} \nabla_i s^k_k$ corresponde às características da componente i de um campo elétrico, ou de um modo mais preciso podemos definir

$$\tilde{F}_{0i} \equiv F_{0i} - \frac{1}{2} \nabla_i s^k_k, \quad \tilde{F}_{ji} \equiv F_{ji}. \quad (1.59)$$

Sabemos que na dinâmica de uma partícula carregada devemos considerar duas grandezas: o campo eletromagnético externo $F_{\mu\nu}$ e o campo produzido pela própria partícula $\tilde{F}_{\mu\nu}$, sendo sua soma o campo total. Assim, da Eq. (1.59) podemos imaginar o termo $-\frac{c}{2} \nabla_i s^k_k$ como sendo um campo elétrico (efetivo) devido à própria partícula. Isto apoia o aparecimento do termo $-\partial_0 s^i_j$ na Eq. (1.27).

1.3 O TENSOR MOMENTO-ENERGIA

De acordo com a seção anterior, na aproximação linear se obtém uma equação tipo equação de Einstein

$$G_{0\mu} = \frac{q}{2mc} \mu_0 J_\mu, \quad G_{ii} = \eta_{ii} G_{00}, \quad (1.60)$$

$$\hat{G}_{ij} = -\frac{q}{2mc} \nabla^\mu \nabla_\mu \hat{s}_{ij} \propto \hat{T}_{ij}, \quad (1.61)$$

onde as componentes \hat{T}_{ij} do tensor energia-momento são desconhecidas²⁰. J_μ é o quadrivetor de corrente o qual em geral pode ser separado em duas partes

$$J_\mu = J_\mu^{ext} + J_\mu^{(0)}, \quad (1.62)$$

²⁰Seguindo a mesma filosofia da notação \hat{s}_{ij} , da Eq. (1.28), o chapéu quer dizer que $i \neq j$.

J_{μ}^{ext} se refere à corrente que produz o campo externo, e $J_{\mu}^{(0)}$ é a corrente associada à própria partícula.

Se por hipótese as fontes externas e a partícula estão em lugares distintos do s-t de fundo, é claro que J_{μ}^{ext} é nulo onde $J_{\mu}^{(0)}$ não é, e vice-versa. Aliás, estamos interessados em resolver a equação da geodésica para achar a trajetória da carga q , portanto precisamos conhecer a métrica na região onde a partícula está. Logo, $J_{\mu}^{(0)} \neq 0$ e $J_{\mu}^{ext} = 0$.

Por outro lado, $J_{\mu}^{(0)}$ é função da trajetória da partícula a qual depende da interação com o campo externo, isto é, $J_{\mu}^{(0)} = J_{\mu}^{(0)}(F_{\rho\sigma})$. Parece portanto natural, considerarmos um tensor momento-energia $T_{\nu\mu}^{(1)}$ que seja linear nesses campos, de forma tal que possamos fazer a identificação

$$J_{\mu}^{(0)} = T_{0\mu}^{(1)}, \quad (1.63)$$

ou de forma mais geral, deveria se cumprir a relação

$$G_{\mu\nu} = \frac{q}{2mc} T_{\mu\nu}^{(1)}. \quad (1.64)$$

Por outro lado, no presente trabalho estamos interessados em situações nas quais os campos eletromagnéticos externos não são afetados pelo campo da partícula carregada, isto é, estamos supondo que o entorno tem uma inércia muito maior que o sistema²¹. Esta situação pode ser por exemplo o caso de uma partícula carregada na presença de um campo magnético produzido por um solenóide. Neste tipo de situações, as simetrias do problema (ou do stp) correspondem às simetrias do campo eletromagnético externo.

Nesse caso, o campo externo satisfaz (de forma independente aos campos da partícula) as equações de Maxwell

$$\nabla^{\mu} F_{\nu\mu} = \mu_0 J_{\nu}^{ext}, \quad (1.65)$$

mas como estamos interessados na região onde está a partícula, J_{ν}^{ext} será nulo.

²¹No entanto, isto é uma aproximação, e uma análise mais geral torna-se necessária, mas esta análise está fora dos objetivos do presente trabalho.

Substituindo nas equações (1.56-1.58) obtemos

$$G_{00} = -\frac{1}{4} \frac{q}{mc} \nabla_i \nabla^i s_k^k, \quad (1.66)$$

$$G_{0j} = -\frac{1}{4} \frac{q}{mc} \nabla_0 \nabla_j s_k^k, \quad (1.67)$$

$$\hat{G}_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{q}{mc} \nabla_\mu \nabla^\mu \hat{s}_{ij}, \quad G_{ii} = \eta_{ii} G_{00}. \quad (1.68)$$

Na seção anterior, afirmamos que o termo E^i ($\nabla^i s_k^k := 2c\tilde{E}^i$) apresenta uma semelhança com um campo elétrico, o qual identificamos como sendo produzido pela própria partícula. No entanto, o leitor poderá estar-se perguntando o porquê da ausência do campo magnético produzido pela mesma. Vamos dar uma justificativa para esta situação.

Consideremos a figura [3], os pontos a, b, c (separados infinitesimalmente) representam a posição da partícula nos tempos t_0, t_1 e t_2 respectivamente ($t_0 < t_1 < t_2$). Em b , a partícula sente tanto o efeito do campo externo, quanto o campo produzido por ela mesma quando estava na posição a (o que chamaremos sua "imagem" em a). Agora, quando ela se dirige para c , esta percebe sua imagem em a como se movendo no sentido oposto. Assim, se \vec{I} representa a corrente devida à partícula em b , sua imagem em a terá associada a corrente $-\vec{I}$, porém, a densidade de carga em a não muda de sinal²²



Figura 1 – Campo próprio da partícula no sp.

Aliás, de acordo com a lei de Biot-Savart ((GRIFFITHS, 1999)-cap:5)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{1}{r^3} d\vec{l} \times \vec{r} \quad (1.69)$$

podemos ver que o campo magnético em b (devido a imagem em a) é nulo. Isto devido a que \vec{r} e $d\vec{l}$ são paralelos²³.

Desta maneira, devemos somente calcular o campo elétrico produzido pela partícula. O leitor poderá estar pensando que o campo magnético nas outras regiões é diferente de zero. De fato este é o caso quando pensamos

²²Um livro excelente sobre relatividade, o qual considera efeitos sobre reação de radiação é (ANDERSON, 1967). O leitor pode se interessar nas seções 7.17-7.19 desse livro. Além disso, referências aí dadas são de muita ajuda, referências como: (DIRAC, 1938) e (FEYNMAN, 1945).

²³Aqui \vec{r} é o vetor posição, medido desde a fonte (em a) até o ponto onde se deseja calcular o campo (em b). E $d\vec{l}$ é um vetor que aponta na direção da corrente.

em termos do s-t de fundo, mas devemos lembrar que estamos falando do stp; deste modo, se nos perguntamos pelo valor da métrica $g_{\mu\nu}$ em um certo ponto, implicitamente estamos supondo que nesse lugar está localizada a partícula, de forma que aconteça a interação com o campo. Isto é, nos lugares onde a partícula não está, não há interação, e portanto carece de sentido falar do stp.

Vamos agora escrever as equações de Maxwell (B.2-B.3), associadas ao campo próprio da partícula (com $\vec{B} = 0$)

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad (1.70)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad -\frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{J}, \quad (1.71)$$

Podemos ver que estas equações são exatamente obtidas do tensor de Einstein (1.66-1.67) quando fazemos as identificações

$$\nabla_i s^k_k \equiv -2\tilde{F}_{0i} = 2c\tilde{E}_i, \quad (1.72)$$

$$J_\mu^{(0)} = (\tilde{J}_0, \tilde{J}_i) = (-\tilde{J}^0, \tilde{J}^i), \quad (1.73)$$

De fato, com estas definições a componente 0μ desse tensor (Eq. (1.64)) leva a:

$$\nabla^i \tilde{F}_{0i} = \mu_0 J_0, \quad \rightarrow \quad -\nabla^i \tilde{E}_i = -c\mu_0 (c\tilde{\rho}), \quad (1.74)$$

$$\nabla_0 \tilde{F}_{0i} = \mu_0 J_i, \quad \rightarrow \quad -\nabla_0 \frac{\tilde{E}_i}{c} = \mu_0 J_i, \quad (1.75)$$

com $J^0 = c\tilde{\rho}$. Usando a relação $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, podemos finalmente ver que as equações anteriores são idênticas as equações (1.71).

Finalmente,

$$\left(\nabla \times \vec{E} \right)^i = \tilde{\epsilon}^{ijk} \nabla_j \tilde{E}_k = \left(\frac{1}{2c} \right) \tilde{\epsilon}^{ijk} \nabla_j \nabla_k s^r_r = 0, \quad (1.76)$$

o qual é nulo devido ao fato que o símbolo de Levi-Civita é antissimétrico em jk enquanto as derivadas $\nabla_j \nabla_k$ são simétricas nesses índices, pelo que Eq. (1.70) se cumpre idênticamente.

Além do mais, temos a equação de continuidade

$$\begin{aligned} \nabla^\mu J_\mu &= \nabla^0 J_0 + \nabla^i J_i \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[\nabla^0 (\nabla^i \tilde{F}_{0i}) + \nabla^i (\nabla_0 \tilde{F}_{0i}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Notemos uma coisa; é claro que o campo próprio da partícula depende

de sua dinâmica: posição, velocidade, aceleração; assim, s^i_i deverá conter esta informação. Basicamente temos que, conhecer esta informação, se reduz a conhecer as condições iniciais da partícula, portanto s^i_i dependerá de tais valores iniciais.

Deste modo temos em forma geral que, a métrica $g_{\mu\nu}$ dependerá não somente das características intrínsecas da partícula (carga e massa), mas também das condições iniciais desta (dinâmica).

1.3.1 Tensor momento-energia na aproximação de campo fraco

O resultado da seção anterior é baseado na aproximação linear, mas na solução exata existem também termos quadráticos nos campos (e quadráticos na relação carga/massa). Portanto, tendo em conta esses outros termos, é natural impor como postulado a equação de campo

$$G_{\mu\nu} = \frac{q}{2mc} T_{\mu\nu}^{(1)} + k T_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (1.78)$$

onde $T_{\mu\nu}^{(1)}$ é linear nos campos como foi dito na subseção anterior. $T_{\mu\nu}^{(2)}$ é um tensor momento-energia quadrático em $F_{\mu\nu}$, e k , uma constante quadrática na relação carga/massa.

É bem conhecido da SR e do eletromagnetismo que, o tensor momento-energia associado ao campo $F_{\mu\nu}$ é dado por ((LIFSHITZ, 1987)-cap:4)

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left[-F_{\mu\lambda} F_{\nu}^{\lambda} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\beta\alpha} \right], \quad (1.79)$$

o qual é quadrático nos campos. Aliás, seu traço é nulo e

$$T_{00} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2, \quad (1.80)$$

sendo \vec{E} e \vec{B} o campo elétrico e magnético respectivamente.

Como já foi dito, nas experiências que envolvem campos não muito altos, os efeitos da reação de radiação e em geral dos campos próprios da partícula são pequenos em comparação aos efeitos devidos aos campos externos. Assim, dado que $T_{\mu\nu}^{(1)}$ é devido ao campo próprio da partícula e $T_{\mu\nu}^{ext}$ (dado pela Eq. (1.79)) é obtido diretamente dos campos externos, se tem $T_{\mu\nu}^{(1)} \ll T_{\mu\nu}^{ext}$.

Por outro lado, tanto $T_{\mu\nu}^{ext}$ quanto $T_{\mu\nu}^{(2)}$ são quadráticos nos campos externos. Mas $T^{(2)}$ é o tensor momento-energia total, que possui a informação

dos campos externos e do campo próprio. Deste modo, podemos pensar que $T_{\mu\nu}^{ext}$ seja uma aproximação ao tensor $T^{(2)}$ quando os campos são fracos.

Estas considerações, além da dificuldade para construir o tensor $T_{\mu\nu}^{(1)}$, motivam em primeira aproximação usar a equação simplificada

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}^{ext}, \quad k = 2\frac{\alpha^2}{\epsilon_0} = 2\mu_0(c\alpha)^2, \quad (1.81)$$

onde reescrevemos²⁴ a constante k motivados pela equação (1.80).

Porém, esta simplificação pode ter consequências importantes. Por exemplo, o fato de não considerar o campo próprio da partícula, implicará que o valor obtido para $\frac{1}{2c}\nabla_i s^k$ não corresponda ao campo elétrico efetivo \tilde{E}_i . Aliás, não podemos esperar que o gauge de Lorentz se satisfaça.

²⁴O valor de α será achado na próxima seção, o qual corresponde a q/m_0c^2 .

2 CAMPO ELETROMAGNÉTICO EM UM ESPAÇO-TEMPO CURVO

No capítulo anterior, introduzimos o conceito de espaço-tempo próprio. Além disso, conseguimos identificar (parcialmente) a estrutura desse espaço por meio dos conceitos básicos de relatividade especial. De modo mais preciso, conseguimos identificar a métrica ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$) em termos do potencial eletromagnético, no regime de campo fraco. Para o caso geral obtivemos de forma eurística uma equação de campo, com o objetivo de estudar a geometria do stp em termos do tensor momento-energia dos campos externos (subseção 1.3.1).

Vamos agora fazer algumas considerações sobre o tensor eletromagnético e sobre a força de Lorentz, as quais nos permitirão achar a constante α na equação de campo (1.81) e com isto, determinar de forma relativamente simples o stp de uma partícula na presença de algum campo externo.

2.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE O TENSOR MOMENTO-ENERGIA E O TENSOR ELETROMAGNÉTICO

2.1.1 Construção do tensor eletromagnético

Na SR e em coordenadas cartesianas, o tensor de campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ é definido ((GRIFFITHS, 1999)-cap:12, (CARROLL, 2004)-cap:1) pelos campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B}

$$F^{0i} \equiv E^i/c, \quad F_{ij} \equiv \tilde{\epsilon}_{ijk} B^k, \quad (2.1)$$

onde $\tilde{\epsilon}_{ijk}$ é o símbolo de Levi-Civita, definido como sendo completamente antissimétrico, e $\tilde{\epsilon}_{123} = 1$. No entanto, em geral o tensor $F^{\mu\nu}$ não é completamente definido por \vec{E} e \vec{B} , pois para conhecer as componentes F_{0i} e F^{ij} é preciso conhecer a métrica, que neste caso é dada por $\eta_{\mu\nu}$.

Isto fica mais claro no caso em que o s-t é curvo, mas nesse caso, dado que o símbolo de Levi-Civita não é um tensor, temos que usar o tensor de Levi-Civita, que em quatro dimensões é definido por¹

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \sqrt{-g} \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad g = \det(g_{\mu\nu}), \quad (2.2)$$

sendo de novo $\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma}$ completamente antissimétrico, e $\tilde{\epsilon}_{0123} = 1$. Desse modo,

¹Estamos usando a definição apresentada por (CARROLL, 2004).

o tensor de Levi-Civita com índices acima é definido como

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \frac{\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{-g}}, \quad \tilde{\varepsilon}^{0123} = -1. \quad (2.3)$$

Portanto, o campo elétrico determina completamente as componentes F^{0i} do tensor eletromagnético, e o campo magnético determina (salvo pelo fator $\sqrt{-g}$) as componentes F_{ij} . Logo, em geral

$$F^{0i} \equiv E^i/c, \quad F_{ij} \equiv \varepsilon_{0ijk} B^k. \quad (2.4)$$

No entanto, um conhecimento completo do tensor só é possível com ajuda do tensor métrico. Assim, por exemplo, para conhecer $F_{0i} = g_{0\mu} g_{i\nu} F^{\mu\nu}$ é preciso conhecer tanto a métrica g quanto as componentes F^{ij} , as quais dependem das $F_{\mu\nu}$ via $F^{ij} = g^{i\mu} g^{j\nu} F_{\mu\nu}$. Esta situação parece um caminho sem saída, mas o tensor eletromagnético deve satisfazer as equações de Maxwell. Com estas equações, e impondo as simetrias do problema² o processo para achar $F_{\mu\nu}$ se torna mais simples. Exemplos deste procedimento são dados nas próximas seções.

2.1.2 Equações do stp

Uma vez que o tensor métrico é conhecido, o tensor eletromagnético estará completamente determinado, e poderá ser expresso em termos da métrica e dos campos elétrico e magnético. No entanto, no nosso caso, o tensor métrico associado ao stp de uma partícula é por sua vez uma quantidade dinâmica, a ser determinada por meio das equações de Einstein. Aliás, estas equações fazem uso do tensor energia-momento o qual é construído com ajuda do tensor eletromagnético, e este como vimos, só é possível conhecer uma vez que seja conhecido o tensor métrico.

De novo estamos nos enfrentando com o que parece um caminho sem saída. Contudo, a situação real é que temos que resolver, além das equações de Einstein para $g_{\mu\nu}$ em termos de $F_{\mu\nu}$, também as equações de Maxwell para $F_{\mu\nu}$ em termos de $g_{\mu\nu}$, isto se torna em um conjunto de equações diferenciais acopladas, nas quais as incógnitas são a métrica e o tensor eletromagnético. Daqui em diante este conjunto de equações serão chamadas: *equações do stp*.

Assim, o tensor métrico e o tensor eletromagnético dependem somente de duas coisas: 1) das simetrias do problema (do stp), e 2) das "condições de fronteira". No presente formalismo, entende-se por condições de fronteira

²Simetrias tais como: simetria esférica ou cilíndrica, e fazendo escolha de um sistema de coordenadas apropriado, tal que por exemplo a métrica seja diagonal.

o fato que, no limite em que o campo externo tende a zero, a métrica deve corresponder à métrica de Minkowski (em todo lugar), isto é, o stp coincide com o s-t de fundo. Porém, não é exigido que o stp seja assintoticamente plano como acontece na GR. Este é por exemplo o caso de uma partícula em um campo elétrico constante: dado que a interação nunca é nula³, o stp não pode ser plano em lugar nenhum.

2.1.3 Considerações sobre \vec{E} e \vec{B}

No capítulo anterior postulamos como primeira aproximação para resolver as equações do stp, a equação de campo (semelhante à equação de Einstein na GR)

$$G_{\mu\nu} = 2 \frac{\alpha^2}{\epsilon_0} T_{\mu\nu}^{ext}, \quad (2.5)$$

onde α é uma medida do acoplamento da partícula com o campo. Agora, dado que os campos elétrico e magnético externos são independentes das propriedades da partícula, \vec{E} e \vec{B} não podem depender de α . Isto é, em geral o tensor $F_{\mu\nu}$ (do mesmo modo que $g_{\mu\nu}$) dependerá de α , mas as quantidades

$$E^i = cF^{0i}, \quad \text{e} \quad B^i \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{0ijk} F_{jk}, \quad (2.6)$$

não. *Os campos \vec{E} e \vec{B} não são incógnitas do problema, mas são definidos pelas condições do sistema estudado.*

Por exemplo, vamos supor um observador que prepara um campo magnético, e com isso deseja observar como este campo determina a trajetória de uma certa carga. Então no que concerne à presente teoria, os dados conhecidos pelo observador são: o campo magnético \vec{B} e as condições iniciais da partícula. Com estas informações ele pode obter a relação carga/massa da partícula simplesmente determinando a trajetória desta, isto é, fazendo um estudo das geodésicas do stp. Assim, o observador não tem conhecimento a priori da métrica associada ao stp da partícula, e portanto não tem conhecimento completo do tensor eletromagnético (como foi expressado previamente).

Esta situação é diferente do caso das equações de Maxwell-Einstein, isto é, o conjunto de equações de Einstein e de Maxwell que aparecem em GR quando se tem sistemas carregados interagindo gravitacionalmente. Neste caso, os campos eletromagnéticos são devidos aos mesmos sistemas (não à agentes externos). Deste modo, os campos elétrico e magnético dependem

³Pois o campo elétrico tem sempre o mesmo valor no s-t todo, afetando portanto a dinâmica da partícula em todo lugar.

necessariamente das características de cada um dos sistemas.

2.1.4 Equação de movimento e força de Lorentz

Vamos supor uma partícula carregada se movendo em presença de um campo elétrico, isto é, $F^{0i} \neq 0$, $F_{ij} = 0$. De acordo com SR a equação de movimento dessa partícula será (em coordenadas cartesianas)

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{q}{m} F_\rho^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau}, \quad (2.7)$$

onde $F_\rho^\mu = \eta_{\rho\nu} F^{\mu\nu}$ não depende das características da partícula. Não obstante, como foi dito, na visão de stp somente o campo elétrico F^{0i} é independente das propriedades da partícula. Assim por exemplo, vamos escolher um sistema coordenado tal que a métrica do stp seja diagonal, logo $F^{ij} = g^{ii} g^{jj} F_{ij} = 0$. Portanto, as únicas componentes não nulas de F_ν^μ são $F_0^i = g_{00} F^{i0}$ e $F_i^0 = g_{ii} F^{0i}$, e deste modo o movimento na direção i será dado por⁴

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{q}{m} F_0^i \frac{dx^0}{d\tau}, \quad (2.8)$$

mas dessa vez a quantidade F_0^i depende da interação campo-partícula via g_{00} . Por outro lado, como será visto a seguir, a massa que aparece na Eq. (2.8) não corresponde à massa m_0 da SR, mas a uma massa modificada; esta modificação é devida à interação com o campo eletromagnético externo. No entanto, podemos entender esta massa como sendo a massa em repouso, mas em repouso em um campo eletromagnético, como se mostra no que segue.

Por definição, o momento p^μ da partícula satisfaz

$$p^\mu p_\mu = -m_0^2 c^2, \quad p^\mu := m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau} = (p^0, \vec{p}), \quad (2.9)$$

sendo m_0 a massa na ausência de campo eletromagnético. Vamos definir a massa de repouso m na presença do campo eletromagnético como

$$m := \frac{p^0}{c} \Big|_{\vec{p}=0} \quad (2.10)$$

⁴Claramente, a força de Lorentz Eq. (2.8) não corresponde completamente com a equação da geodésica a ser considerada em um stp, mas de momento é só por motivos de clareza.

deste modo, usando a relação $p^\mu p_\mu = -m_0^2 c^2$, obtemos

$$-m_0^2 c^2 = -p^0 p_0 = -g_{00}(p^0)^2 \quad \rightarrow \quad m = m_0/\sqrt{-g_{00}}. \quad (2.11)$$

Vejamos agora algumas soluções (exatas) da teoria previamente descrita, isto é, exemplos de espaços-tempos próprios.

2.2 ALGUNS EXEMPLOS: ESPAÇOS-TEMPOS PRÓPRIOS

2.2.1 Simetria esférica

Vamos achar o stp de uma carga q em presença de um campo elétrico externo com simetria esférica. Tomemos o elemento de linha como

$$ds^2 = -e^a (c^2 dt^2) + e^b dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.12)$$

com a e b sendo funções de r somente.

Agora temos de resolver as equações do stp, isto é, as equações de campo (semelhante às equações de Einstein) e as equações de Maxwell para o tensor métrico e para o tensor eletromagnético. As equações de campo são

$$G_{\mu\nu} = 2 \frac{\alpha^2}{\epsilon_0} T_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

onde procuramos determinar a constante α .

É conveniente trabalhar com o tensor G^μ_ν ao invés de $G_{\mu\nu}$, assim a partir da Eq. (2.12) temos⁵

$$G^0_0 = -\frac{e^{-b}}{4r} (2ra'' + 4a' - ra'b' + ra'^2), \quad (2.14)$$

$$G^r_r = -\frac{e^{-b}}{4r} (2ra'' - 4b' - ra'b' + ra'^2), \quad (2.15)$$

$$G^\theta_\theta = \frac{e^{-b}}{2r^2} (-ra' + rb' + 2e^b - 2), \quad (2.16)$$

e $G^\phi_\phi = G^\theta_\theta$, onde a' (b') se refere à derivada de a (b) com respeito a r . Por

⁵Devido a que o tensor eletromagnético tem traço nulo, o tensor de Einstein coincide com o tensor de Ricci.

outro lado, o campo magnético \vec{B} é nulo e o campo elétrico é $\vec{E} = E(r)\hat{r}$, logo

$$F^{0r} = \frac{E}{c}, \quad F^{0\theta} = F^{0\phi} = 0, \quad F_{ij} \equiv \varepsilon_{ijk} B^k = 0. \quad (2.17)$$

O tensor F_{ν}^{μ} pode ser determinado com ajuda da métrica Eq. (2.12), tendo assim como únicas componentes não nulas $F_r^0 = e^b \frac{E}{c}$, $F_0^r = e^a \frac{E}{c}$. O tensor momento-energia

$$T_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{\mu_0} \left[-F_{\lambda}^{\mu} F_{\nu}^{\lambda} + \frac{1}{4} \delta_{\nu}^{\mu} F_{\beta}^{\alpha} F_{\alpha}^{\beta} \right], \quad (2.18)$$

é diagonal (neste caso simples) e é dado por

$$T_0^0 = T_r^r = -T_{\theta}^{\theta} = -T_{\phi}^{\phi} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 e^{(a+b)}. \quad (2.19)$$

Logo $G_0^0 = G_r^r$, do qual se segue $a' + b' = 0$, ou $a = -b + \kappa$, onde κ é uma constante. A dependencia da métrica em a é dada por $e^a dt^2$, assim, a constante κ pode ser absorvida ao redefinir⁶ dt por $e^{\kappa} dt$. Desse modo podemos fazer $a = -b$, e portanto a Eq. (2.16) se reescreve como

$$G_{\theta}^{\theta} = \frac{1}{r^2} [1 - e^a (1 + ra')] = \frac{1}{r^2} [1 - (re^a)']. \quad (2.20)$$

Podemos encontrar a função a (ou b) ao usar a igualdade $G_0^0 = G_{\theta}^{\theta}$. No entanto, a fim de ilustrar o uso das equações de Maxwell, vamos tomar um outro caminho. As equações de Maxwell são

$$\nabla_{\mu} F^{\nu\mu} = \mu_0 J^{\nu} = 0, \quad (2.21)$$

das quais a única não trivial é

$$\nabla_{\mu} F^{0\mu} = \partial_r F^{0r} + \Gamma_{\mu r}^{\mu} F^{0r} = 0. \quad (2.22)$$

Da definição para os símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (-g_{\rho\sigma,\lambda} + g_{\lambda\rho,\sigma} + g_{\sigma\lambda,\rho}), \quad (2.23)$$

⁶Isto é possível dado que a métrica não depende da variável t . Mas no caso da variável r esta redefinição teria como consequência uma modificação nas funções de r que aparecem na métrica.

obtemos (no caso em que a métrica é diagonal)

$$\Gamma_{\mu r}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\mu} (g_{\mu\mu,r}) = \frac{1}{2} \partial_r \sum_{\mu} \ln |g_{\mu\mu}|. \quad (2.24)$$

Portanto, temos $\Gamma_{\mu r}^{\mu} = \frac{1}{2} \partial_r \ln(-g)$, e deste modo substituindo na Eq. (2.22) se tem

$$\partial_r \ln(-gE^2) = 0, \quad g = -e^{(a+b)} r^4 \sin^2 \theta. \quad (2.25)$$

Como $a = -b$, temos da Eq. (2.25)

$$E = \frac{\mathcal{E}}{r^2}, \quad \mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}, \quad (2.26)$$

onde \mathcal{E} (ou Q) é uma constante.

Usando esta última equação na Eq. (2.19) e Eq. (2.16), temos

$$1 - (re^a)' = \alpha^2 r^2 E^2, \quad (2.27)$$

cuja solução é

$$re^a = \gamma + r + \frac{\alpha^2 \mathcal{E}^2}{r}, \quad (2.28)$$

sendo γ uma constante de integração. Precisamos agora conhecer as constantes γ e α . Como primeiro insight, temos que γ deve depender de \mathcal{E} a fim que, no limite de campo nulo (não interação) o stp corresponda com o s-t de fundo ($e^a = 1$).

Utilizemos então, os resultados obtidos na aproximação linear (capítulo anterior). Nesse limite $g_{00} = \eta_{00} + h_{00}$ com $h_{00} = 2 \frac{q}{m_0 c} A_0$, sendo A_0 a componente zero do potencial eletromagnético. Por outro lado, na SR (que é o caso da aproximação linear) $\frac{E'}{c} = F_{r0} = \partial_r A_0$, logo

$$A_0 = \kappa - \frac{\mathcal{E}}{cr}, \quad (2.29)$$

sendo κ uma constante de integração que neste caso representa a invariância de gauge. Agora, da Eq. (2.28) se segue que $h_{00} = -\gamma/r$, pois o termo proporcional a \mathcal{E}^2 (quadrático no campo) está fora da aproximação linear. Assim temos necessariamente $\kappa = 0$, isto é, na solução exata não temos invariância de gauge, e $\gamma = 2 \frac{q}{m_0 c^2} \mathcal{E}$, portanto

$$e^a = 1 + 2 \frac{q\mathcal{E}}{m_0 c^2 r} + \frac{\alpha^2 \mathcal{E}^2}{r^2}. \quad (2.30)$$

Por outro lado, a equação de movimento da partícula na presença de uma força externa⁷ é

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = \tilde{f}^\mu, \quad (2.31)$$

onde \tilde{f}^μ é considerado como sendo um termo que caracteriza a força sobre a partícula. Agora vamos supor que \tilde{f}^μ é tal que a partícula permanece em repouso, assim

$$\frac{d^2 x^r}{d\tau^2} = -\Gamma_{00}^r \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} + \tilde{f}^r, \quad (2.32)$$

ou

$$\frac{d^2 x^r}{dt^2} = -c^2 \Gamma_{00}^r + f^r, \quad (2.33)$$

onde usamos $d\tau = \sqrt{-g_{00}} dt$, que é válido quando $dx^i = 0$. Adicionalmente, definimos a força por unidade de massa $f^\mu = -g_{00} \tilde{f}^\mu$.

Fazemos agora a exigência de que a força radial f^r necessária para manter a partícula em repouso seja precisamente igual em magnitude à força de Lorentz⁸, isto é $\frac{q}{mc} F_0^r = -\Gamma_{00}^r$, onde $m = m_0 / \sqrt{-g_{00}}$ é a massa em repouso no campo eletromagnético, logo

$$-\Gamma_{00}^r = \frac{1}{2} g^{rr} g'_{00} = \left(\frac{q}{m_0 c} \sqrt{-g_{00}} \right) g_{00} F^{r0}. \quad (2.34)$$

Definindo $\xi = -g_{00} = g^{rr}$, temos

$$\frac{1}{2} \frac{\xi'}{\sqrt{\xi}} = \frac{q}{m_0 c} F^{r0} = -\frac{q}{m_0 c^2} E, \quad (2.35)$$

e fazendo a escolha da constante de integração de modo que $\xi = 1$ quando $\mathcal{E} \rightarrow 0$ ("condições de fronteira"), obtemos

$$\sqrt{\xi} = 1 + \frac{q}{m_0 c^2} \frac{\mathcal{E}}{r}. \quad (2.36)$$

⁷Se entende aqui a força externa, como um agente qualquer sobre a partícula, quando este agente não aparece no tensor momento-energia. Esta força pode ser ou não de tipo eletromagnético. Por exemplo, se temos uma partícula em presença de um campo magnético e de um campo elétrico, mas só este último é considerado no tensor momento-energia, então, o efeito do campo elétrico é considerado no stp da partícula, mas o efeito do campo magnético deverá, portanto, ser considerado na equação de força.

⁸Isto deve ser assim mesmo na solução exata (onde o tensor momento-energia tem em conta o campo próprio da partícula) já que pelo fato da partícula estar em repouso o campo próprio da partícula não exerce efeito sobre ela.

Finalmente, ao comparar com a Eq. (2.30) temos

$$\alpha = \frac{q}{m_0 c^2}. \quad (2.37)$$

Este resultado foi primeiro obtido por (BARROS, 2005b).

Em resumo: sempre é possível fazer a identificação

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{q}{mc} F_{0i}^i, \quad (2.38)$$

a qual nos fornece um conjunto simples de equações para determinar a geometria do stp. A simplicidade reside no fato que Eq. (2.38) é uma equação diferencial de primeira ordem, linear nas derivadas, ao contrário das equações de Einstein, as quais em geral são de segunda ordem e contém termos quadráticos nas primeiras derivadas. No entanto as equações Eq. (2.38) não são independentes das equações do stp, mas são consequências das mesmas. Vamos usar este fato para achar a solução do problema da próxima seção.

2.2.2 Campo elétrico uniforme

No exemplo anterior pudemos notar que o tensor eletromagnético pode ser completamente obtido como uma das soluções do problema. Isto é, não é preciso um conhecimento a priori do campo elétrico (ou magnético) para encontrar a sua forma explícita. Assim, uma vez que se impõem as simetrias do problema, as equações do stp dizem quais são os campos permitidos por essas simetrias. Porém, como já foi dito, o observador pode conhecer a priori (antes de resolver as equações do stp) os campos eletromagnéticos envolvidos. Usar este fato fará o processo de solução definitivamente mais simples do que tentar achar o valor do campo a partir das equações.

Vamos supor que temos um campo elétrico no eixo z , o qual é independente de t, x, y . O elemento de linha será

$$ds^2 = -e^a (c^2 dt^2) + e^b (dx^2 + dy^2) + e^d dz^2, \quad (2.39)$$

onde a, b e c são funções de z somente. Por razões de simetria temos escolhido $g_{xx} = g_{yy}$.

As equações de Maxwell levam a

$$\nabla_{\mu} F^{0\mu} = \partial_z F^{0z} + \Gamma_{\mu z}^{\mu} F^{0z} = 0, \quad (2.40)$$

ou

$$\ln(e^a e^{2b} e^d E^2) = \text{constante}. \quad (2.41)$$

Agora, vamos fazer uso de nosso conhecimento sobre o campo elétrico $E = E_0 = \text{constante}$. Logo, $a + 2b + c = \text{constante}$, mas dado que a, b e d são nulos quando não se tem interação, temos⁹

$$d = -a - 2b. \quad (2.42)$$

Com esta informação podemos calcular facilmente o tensor de Einstein. Para simplificar definimos o tensor

$$\Sigma_{\nu}^{\mu} \equiv G_{\nu}^{\mu} - 2 \frac{\alpha^2}{\epsilon_0} T_{\nu}^{\mu}, \quad \alpha = \frac{q}{m_0 c^2}, \quad (2.43)$$

o qual deve ser nulo para todo $\mu \nu$. Das equações (2.39) e (2.42) obtemos

$$\Sigma_t^t = U - W (a'' + 2a'b' + a'^2) = 0, \quad (2.44)$$

$$\Sigma_z^z = U - W (a'' + 2a'b' + a'^2 + 2b'' + 3b'^2) = 0, \quad (2.45)$$

$$\Sigma_x^x = -U - W (b'' + a'b' + 2b'^2) = 0, \quad (2.46)$$

e $\Sigma_y^y = \Sigma_x^x$, todas as outras componentes são identicamente nulas. Uma linha sobre a ou b se refere à derivada com respeito a z . Por outro lado, U e W são definidos como

$$U = \left(\alpha E_0 e^{-b} \right)^2, \quad W = \frac{1}{2} e^{a+2b}. \quad (2.47)$$

De $\Sigma_t^t = 0$ e $\Sigma_z^z = 0$ se segue que $3b'^2 + 2b'' = 0$, logo

$$b' = \frac{2}{\kappa + 3z}, \quad b = \frac{2}{3} \ln \lambda (\kappa + 3z), \quad (2.48)$$

com κ e λ constantes. Podemos portanto reescrever $\lambda \kappa$ como $1 - 3\lambda z_R$, onde z_R é uma nova constante. Assim

$$e^b = [1 + 3\lambda (z - z_R)]^{\frac{2}{3}}. \quad (2.49)$$

Escrito na forma

$$e^b = (1 + \beta + 3\lambda z)^{\frac{2}{3}}, \quad \beta = -3\lambda z_R, \quad (2.50)$$

a constante β parece uma reminiscência da invariância de gauge, mas como podemos ver da Eq. (2.49), isto é só uma manifestação da invariância translacional da teoria a qual tem a ver com a liberdade na escolha da origem de coordenadas.

⁹Aliás, esta constante pode ser absorvida em dt^2 .

Agora, vamos usar a Eq. (2.38) para calcular F_0^z . Para tanto calculamos primeiro

$$\Gamma_{00}^z = -\frac{1}{2}g^{zz}g'_{00} = \frac{1}{2}e^{a+2b}(e^a)', \quad (2.51)$$

$$\frac{q}{mc}F_0^z = \left(\frac{q}{m_0c}\sqrt{-g_{00}}\right)g_{00}F^{z0} = \frac{q}{m_0c}e^{a/2}e^a\frac{E_0}{c}, \quad (2.52)$$

de onde vem

$$\frac{1}{2}\frac{(e^a)'}{e^{a/2}} = -\left(\frac{q}{m_0c^2}E_0\right)e^{-2b}. \quad (2.53)$$

Tomando o resultado da Eq. (2.49) chegamos a

$$e^a = \left(\frac{q}{m_0c^2}\frac{E_0}{\lambda}\right)^2 e^{-b}. \quad (2.54)$$

Considerando que $e^a = e^b = 1$ quando $\lambda \rightarrow 0$, temos necessariamente que $\lambda = \pm qE_0/m_0c^2$. Aliás, o sinal \pm pode ser absorvido no sinal da carga q . Como $a + d = -2b$, a solução final é dada por

$$e^a = e^d = e^{-b} = [1 + 3\lambda(z - z_R)]^{-\frac{2}{3}}, \quad \lambda = \frac{qE_0}{m_0c^2}. \quad (2.55)$$

Com isto terminamos a dedução da métrica para o stp de uma partícula em presença de um campo elétrico constante E_0 .

2.2.3 Simetria axial e Teorema de Weyl

Podemos perceber que o sistema estudado anteriormente tem simetria cilíndrica. Isto pode se expressar explicitamente ao reescrever

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2, \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \phi = y/x, \quad (2.56)$$

desse modo a métrica Eq. (2.39) se escreve como

$$ds^2 = e^a(-c^2 dt^2 + dz^2) + e^{-a}(d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2), \quad (2.57)$$

a qual tem a simetria cilíndrica de forma explícita.

Existe um famoso resultado (teorema de Weyl) que estabelece de forma geral a estrutura que deve ter a métrica associada a um s-t estacionário e com simetria axial. Isto é, um s-t no qual existe um eixo de simetria (qualquer rotação com respeito a esse eixo, deixa invariante a dinâmica), aliás, a estru-

tura do s-t é invariante sob translação temporal. Um caso especial deste tipo de s-t, é dado por um corpo rotante (como um buraco negro) cujo eixo de rotação aponta sempre na mesma direção (simetria axial), e cuja velocidade angular é constante (estacionário).

O teorema de (WEYL,) diz que para todo s-t estacionário com simetria axial, existe um certo sistema coordenado $\bar{x}^\mu = (ct, \rho, \phi, \bar{z})$ tal que a métrica tem a forma¹⁰

$$ds^2 = -e^a (cdt - wd\phi)^2 + e^{-a} [\rho^2 d\phi^2 + e^\alpha (d\rho^2 + d\bar{z}^2)], \quad (2.58)$$

onde a e α são funções somente de ρ e \bar{z} .

Podemos ver que, o stp estudado nesta seção é estacionário e tem simetria axial (Eq. (2.57)). Deste modo, a métrica descrita pela Eq. (2.57) deve satisfazer o teorema de Weyl.

De fato, da Eq. (2.58), no sistema coordenado \bar{x}^μ temos (com $w = \alpha = 0$)

$$ds^2 = -e^a (cdt)^2 + e^{-a} [\rho^2 d\phi^2 + d\rho^2 + d\bar{z}^2]. \quad (2.59)$$

Agora, fazemos a transformação de coordenadas

$$\bar{x}^\mu = (ct, \rho, \phi, \bar{z}) \rightarrow x^\mu = (ct, \rho, \phi, z), \quad e^{-a/2} d\bar{z} = e^{a/2} dz, \quad (2.60)$$

neste sistema coordenado, a equação (2.57) é recuperada. Deste modo, provamos que a métrica Eq. (2.57) satisfaz o teorema de Weyl, como era de esperar.

Só para terminar esta análise, calculemos a forma explícita da métrica Eq. (2.57) nas coordenadas de Weyl (sistema coordenado \bar{x}^μ). Da transformação Eq. (2.60) e da equação (2.55) temos

$$\bar{z} = \int e^a dz = \int [1 + 3\lambda (z - z_R)]^{-\frac{2}{3}} dz, \quad (2.61)$$

$$\bar{z} = \frac{1}{\lambda} [1 + 3\lambda (z - z_R)]^{\frac{1}{3}}, \quad \rightarrow \quad e^a = (\lambda \bar{z})^{-2}. \quad (2.62)$$

assim, em coordenadas de Weyl, a métrica do stp associada à interação de uma partícula carregada com um campo elétrico constante é

$$ds^2 = -(\lambda \bar{z})^{-2} (cdt)^2 + (\lambda \bar{z})^2 [\rho^2 d\phi^2 + d\rho^2 + d\bar{z}^2]. \quad (2.63)$$

¹⁰O teorema tem certas exigências sobre os vetores de Killing associadas às simetrias axial e temporal, no entanto o presente caso satisfaz todas essas propriedades de forma automática. Para ver os detalhes do teorema de Weyl, veja por exemplo: (WALD, 1984)-cap:7 & (FELICE, 1995)-cap:11.

2.2.4 De volta à aproximação linear

Agora que obtivemos duas soluções exatas para o stp de uma partícula, é apropriado comparar com as análises feitas na aproximação linear. Começemos pelo caso do stp, quando o campo externo é um campo elétrico constante.

Neste caso, na aproximação linear $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, temos (com $z_R = 0$)

$$h_{00} = h_{xx} = h_{yy} = -h_{zz} = 2\lambda z, \quad (2.64)$$

ou $h^\mu{}_\mu = 0$. Este fato mostra imediatamente que quando usamos o tensor $T_{\mu\nu}^{ext}$ nas equações de Einstein, o gauge de Lorentz

$$\nabla_\mu h^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \nabla_\nu h^\mu{}_\mu, \quad (2.65)$$

não é satisfeito na aproximação linear¹¹.

No entanto, podemos observar que neste caso se cumpre

$$\nabla_\mu h^\mu{}_\nu = -\nabla_\nu h_{00} = 2 \frac{q}{m_0 c} F_{0\nu}, \quad (2.66)$$

onde as derivadas covariantes são tomadas no s-t de fundo¹².

Esta mesma situação acontece no caso de simetria esférica, neste caso

$$g_{00} = -g^{rr} = -\left(1 + \frac{q}{m_0 c^2} \frac{E_0}{r}\right)^2, \quad (2.67)$$

$$h_{\theta\theta} = h_{\phi\phi} = 0, \quad h_{00} = h_{rr} = -2 \frac{q}{m_0 c^2} \frac{E_0}{r}. \quad (2.68)$$

Novamente obtemos $h^\mu{}_\mu = 0$, e

$$\nabla_\mu h^\mu{}_\nu = \partial_r h^r{}_\nu + \frac{2}{r} h^r{}_\nu = -\nabla_\nu h_{00}, \quad (2.69)$$

ou de forma geral

$$\nabla_\mu h^\mu{}_\nu = -\nabla_\nu h_{00} = 2 \frac{q}{m_0 c} F_{0\nu}. \quad (2.70)$$

Este comportamento foi previsto no final da subseção 1.3.1, como uma consequência do fato que usamos o tensor momento-energia somente do campo externo, e não tivemos em conta a contribuição do campo próprio

¹¹Isto foi previsto no final do capítulo anterior.

¹²Neste caso de coordenadas cartesianas, os símbolos de Christoffel do s-t de fundo são nulos, de modo que $\nabla_\mu = \partial_\mu$.

da partícula.

3 ANÁLISE DAS SOLUÇÕES EXATAS E DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Neste capítulo examinaremos as equações da geodésica e suas consequências na dinâmica da partícula.

Porém, no momento de resolver as equações de movimento, será de bastante ajuda conhecer as quantidades conservadas. Vamos portanto mostrar um método direto para achar estas constantes de movimento¹ ((CARROLL, 2004)-cap:3.8). Como primeiro passo, notemos que de acordo com a regra da cadeia temos

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \partial_\mu, \quad (3.1)$$

desse modo a equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0. \quad (3.2)$$

se escreve como

$$\frac{dx^p}{d\tau} \partial_p \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) + \frac{dx^p}{d\tau} \left(\Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right) = 0. \quad (3.3)$$

De forma compacta temos

$$U^\rho \nabla_\rho U^\mu = 0, \quad U^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (3.4)$$

Lembremos que a derivada covariante para U^μ (e para U_μ) é

$$\nabla_\rho U^\mu = \partial_\rho U^\mu + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu U^\sigma, \quad (3.5)$$

$$\nabla_\rho U_\mu = \partial_\rho U_\mu - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda U_\lambda, \quad (3.6)$$

e ainda, $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$. Deste modo da Eq. (3.4) temos

$$0 = g_{\mu\sigma} (U^\rho \nabla_\rho U^\mu) = U^\rho \nabla_\rho U_\sigma = U^\rho \partial_\rho U_\sigma - \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda U^\rho U_\lambda. \quad (3.7)$$

¹O procedimento geral para achar estas constantes é utilizar os vetores de Killing ((CARROLL, 2004)-cap:3.8), mas o tratamento dado nesta seção é suficiente para o que se requer neste trabalho.

Calculemos explicitamente o último termo nesta expressão

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda} U^{\rho} U_{\lambda} &= \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (-g_{\rho\sigma,\mu} + g_{\mu\rho,\sigma} + g_{\sigma\mu,\rho}) U^{\rho} U_{\lambda} \\
 &= \frac{1}{2} (-g_{\rho\sigma,\mu} + g_{\mu\rho,\sigma} + g_{\sigma\mu,\rho}) U^{\rho} U^{\mu} \\
 &= \frac{1}{2} g_{\mu\rho,\sigma} U^{\rho} U^{\mu}, \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $(-g_{\rho\sigma,\mu} + g_{\sigma\mu,\rho})$ é antissimétrico nos índices $\rho\mu$ em quanto que $U^{\rho} U^{\mu}$ é simétrico, e deste modo o seu produto é nulo. Agora ao substituir este último resultado na Eq. (3.7) obtém-se

$$U^{\rho} \partial_{\rho} U_{\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_{\sigma} g_{\mu\rho}) U^{\rho} U^{\mu}. \tag{3.9}$$

Portanto, se existe alguma variável x^{σ} que não aparece na métrica ($\partial_{\sigma} g_{\mu\rho} = 0$) então

$$U^{\rho} \partial_{\rho} U_{\sigma} = \frac{U_{\sigma}}{d\tau} = 0, \tag{3.10}$$

isto é, $U_{\sigma} = \text{constante}$, ou em termos do momento $p^{\mu} = m_0 U_{\mu}$, podemos dizer que o momento p_{σ} é conservado.

Vamos agora estudar a dinâmica da partícula carregada, primeiro para o caso de simetria esférica e em seguida, com mais detalhe, o caso do campo elétrico constante.

3.1 SOLUÇÃO ESFERICAMENTE SIMÉTRICA

A métrica que descreve este s-t é dada por

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -\xi (c^2 dt^2) + \xi^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \\
 \sqrt{\xi} &= 1 + \frac{\lambda}{rc^2}, \quad \lambda = \text{constante}. \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Os símbolos de Christoffel não nulos são

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{0r}^0 &= -\Gamma_{rr}^r = \frac{\xi'}{2\xi}, & \Gamma_{00}^r &= \frac{1}{2} \xi \xi', \\
 \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r\xi \sin^2 \theta, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r\xi, \\
 \Gamma_{\theta r}^{\theta} &= \Gamma_{\phi r}^{\phi} = \frac{1}{r}, \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

com $\xi' = d\xi/dr$. A partir deles podemos escrever explicitamente a equação da geodésica para cada um dos índices μ

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0. \quad (3.13)$$

Assim por exemplo, para $\mu = \theta$ temos

$$\ddot{\theta} + 2\Gamma_{\theta r}^\theta \dot{\theta} \dot{r} = 0, \quad (3.14)$$

onde um ponto sobre as coordenadas se refere a diferenciação com respeito ao tempo próprio τ , o qual depende da trajetória da partícula na forma: $ds^2 = -c^2 d\tau^2$.

Da Eq. (3.14) podemos perceber que se escolhemos como condição inicial $\dot{\theta} = 0$, então $\ddot{\theta}$ será nulo para todo valor de τ , isto é, $\theta = \text{constante}$. Logo, de modo análogo ao que acontece no eletromagnetismo, a partícula se move em um plano, isto é basicamente uma consequência da conservação do momento angular.

Podemos fixar o plano de movimento como sendo o plano $\theta = \pi/2$. Neste caso as outras equações geodésicas se reduzem a

$$\ddot{t} + \frac{\xi'}{\xi} \dot{t} \dot{r} = 0, \quad (3.15)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{\phi} \dot{r} = 0, \quad (3.16)$$

$$\ddot{r} + \frac{1}{2} \xi \xi' (ct)^2 - \frac{\xi'}{2\xi} (\dot{r})^2 - r\xi (\dot{\phi})^2 = 0. \quad (3.17)$$

Antes de tentar resolver estas equações, podemos no entanto olhar para as quantidades conservadas. Para isto, devemos determinar quais as coordenadas que não aparecem na métrica, isto é, as coordenadas x^μ tais que $\partial_\mu g_{\sigma\nu} = 0$. Desse modo, uma constante de movimento corresponde ao momento

$$p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu, \quad p^\nu = m_0 \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (3.18)$$

No nosso caso, $g_{\mu\nu}$ não depende de t nem de ϕ , portanto p_t e p_ϕ são constantes de movimento,

$$E = \xi c^2 \dot{t} = \text{constante}, \quad (3.19)$$

$$L = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = r^2 \dot{\phi} = \text{constante}, \quad (3.20)$$

com² $E = -p_t c/m_0$, e $L = p_\phi/m_0$.

Agora podemos notar que as equações (3.15) e (3.16) são equivalentes a Eq. (3.19) e a Eq. (3.20) respectivamente. Assim Eq. (3.15) corresponde a $\dot{E} = 0$, e Eq. (3.16) a $\dot{L} = 0$. Por outro lado, além das equações da geodésica, a partícula também está sujeita ao vínculo (equação (3.11))

$$c^2 d\tau^2 = \xi c^2 dt^2 - \xi^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.21)$$

que no nosso caso ($\theta = \pi/2$) pode se reescrever como

$$c^2 \xi \left(1 + \frac{L^2}{c^2 r^2} \right) = \frac{E^2}{c^2} - \dot{r}^2, \quad (3.22)$$

onde foram usadas as definições de E e de L . Finalmente, observemos que a Eq. (3.22) é equivalente à Eq. (3.17). Para ver isto, consideremos

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \ddot{r} - \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr} \\ &= \ddot{r} + \frac{d}{dr} \left(\frac{E^2}{2c^2} - \frac{\dot{r}^2}{2} \right) = \ddot{r} + \frac{c^2}{2} \frac{d}{dr} \left[\xi \left(1 + \frac{L^2}{c^2 r^2} \right) \right] \\ &= \ddot{r} + \frac{c^2 \xi'}{2} \left(1 + \frac{L^2}{c^2 r^2} \right) - \frac{\xi}{r^3} L^2 \\ &= \ddot{r} + \frac{\xi'}{2\xi} \frac{E^2}{c^2} - \frac{\xi'}{2\xi} \dot{r}^2 - \frac{\xi}{r^3} L^2, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde fizemos uso da regra da cadeia, do fato que E é uma constante, e da Eq. (3.22) respectivamente. A última expressão na Eq. (3.23) corresponde exatamente à Eq. (3.17).

Vemos assim que a dinâmica da partícula está completamente contida na Eq. (3.22) (junto com as equações que definem as constantes E e L), que é bem mais simples que as equações da geodésica. No que resta desta subseção, vamos nos concentrar somente na busca de órbitas circulares. Para isto vamos seguir o método usado por ((CARROLL, 2004)-cap:5.4). Este consiste em colocar a Eq. (3.22) na forma

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + c^2 \frac{\xi}{2} \left(1 + \frac{L^2}{c^2 r^2} \right) = \frac{E^2}{2c^2}, \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + V(r) = \mathcal{E}. \quad (3.25)$$

²Podemos interpretar E (e L) como energia total (momento angular) por unidade de massa.

Esta última expressão é equivalente à equação de uma partícula se movendo em uma direção só (eixo r), com energia total \mathcal{E} e energia potencial V (e massa unitária). No entanto temos que lembrar que para o nosso caso, o movimento se faz em um plano, portanto V é um potencial efetivo. O movimento será em uma dimensão só quando L for nulo, e nesse caso a partícula se move radialmente.

Para achar as órbitas circulares resta somente impor $\dot{r} = 0$. No entanto, é bem mais simples tomar um outro caminho. Notemos que nas órbitas circulares $V'(r) = 0$, aliás, as órbitas serão estáveis se $V''(r) > 0$ ou instáveis se $V''(r) < 0$. Com

$$V = c^2 \frac{\xi}{2} \left(1 + \frac{L^2}{r^2 c^2} \right), \quad \mathcal{E} = \frac{E^2}{2c^2}, \quad (3.26)$$

$$\sqrt{\xi} = 1 + \frac{\lambda}{rc^2}, \quad \lambda = \frac{q}{m_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}, \quad (3.27)$$

temos para V'

$$V' = -\frac{1}{r^2} \lambda - \frac{2}{r^3} \left(\frac{L^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2c^2} \right) - \frac{3}{r^4} \frac{\lambda L^2}{c^2} - \frac{4}{r^5} \frac{\lambda^2 L^2}{2c^4}. \quad (3.28)$$

Há portanto três tipos de orbitas circulares associadas à condição $V' = 0$, as quais correspondem às expressões

$$r_1 = -\frac{\lambda}{c^2}, \quad r_- = -\frac{1}{2\lambda} (L^2 - \beta^2), \quad r_+ = -\frac{1}{2\lambda} (L^2 + \beta^2),$$

$$\beta^2 = \sqrt{L^4 - 8L^2 \lambda^2 / c^2}. \quad (3.29)$$

De cada uma dessas expressões (para r_1 , r_- e r_+) se segue que $\lambda < 0$. Isto é uma lembrança de que o produto das cargas qQ é negativo, isto é, as cargas se atraem. A órbita em r_1 coincide com o horizonte de eventos ($\xi(r_1) = 0$), aliás, r_1 corresponde a uma órbita estável já que $V''(r_1) > 0$. Por outro lado, o valor mínimo de L necessário para se mover em uma órbita circular é tal que $\beta = 0$, neste caso, com $L = -\sqrt{8}\lambda/c$ os raios r_+ e r_- coincidem, tendo como resultado

$$r_0 = r_{\pm} \Big|_{\beta=0} = -4 \frac{\lambda}{c^2}. \quad (3.30)$$

Para esta órbita $V'' = 0$, isto é, temos uma mudança de concavidade. Para $\beta \neq 0$ se tem $r_+ > r_0 > r_-$. Nesse caso, todas as órbitas associadas a r_+ são estáveis e as correspondentes a r_- instáveis, como pode comprovar-se

facilmente.

3.2 CAMPO ELÉTRICO CONSTANTE

Vamos agora considerar o stp de uma partícula na presença de um campo elétrico constante. Como veremos, o estudo da dinâmica da partícula, nos permitirá compreender melhor este s-t.

Na presença de um campo elétrico constante $E_0 > 0$ temos³

$$\begin{aligned} ds^2 &= \xi (-c^2 dt^2 + dz^2) + \xi^{-1} (dx^2 + dy^2), \\ \xi &= [1 + 3\lambda (z - z_R)]^{-2/3}, \quad \lambda = \frac{qE_0}{m_0 c^2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Consideremos agora as quantidades conservadas, $E = -p_t c / m_0$, $P = p_x / m_0$ e p_y . Por simplicidade tomaremos $p_y = 0$, deste modo

$$E = \xi i c^2, \quad P = \frac{\dot{x}}{\xi}, \quad (3.32)$$

onde E (e P) representa a energia (e o momento na direção x) por unidade de massa.

Novamente temos que estas constantes de movimento e a equação para o tempo próprio $d\tau$ são equivalentes às equações geodésicas.

A equação da geodésica leva a

$$\dot{z}^2 = \frac{E^2}{c^2 \xi^2} - P^2 - \frac{c^2}{\xi}, \quad (3.33)$$

e usando a relação $E \frac{d}{dt} = c^2 \xi \frac{d}{d\tau}$ válida por Eq. (3.32), obtemos

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = c^2 - \frac{P^2}{E^2} c^4 \xi^2 - \frac{\xi}{E^2} c^6, \quad (3.34)$$

ou em termos da velocidade no eixo x temos

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = c^2 - \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{\xi}{E^2} c^6, \quad (3.35)$$

$$P = \frac{\dot{x}}{\xi} = \frac{E}{\xi^2 c^2} \frac{dx}{dt}. \quad (3.36)$$

³Sem perder a generalidade fixamos o campo elétrico apontando para o lado positivo do eixo z .

Da Eq. (3.32) podemos perceber um efeito diferente do que acontece no tratamento usual na SR. De acordo com Eq. (3.32) a velocidade \dot{x} em geral não é conservada embora o campo elétrico nesta direção seja nulo.

Para ter uma ideia da ordem de magnitude associada a este fenômeno consideremos por exemplo a situação apresentada em (BOUDA; BELABBAS, 2010)-pág:8. Tomamos uma partícula de pó com massa da ordem $m_0 \approx 10^{-14}kg$, com uma carga de saturação⁴ $q \approx 10^{-18}C$, e $c^2 = 9 \times 10^{16}m^2/s^2$, logo

$$\lambda \approx 10^{-21}E_0. \quad (3.37)$$

Campos elétricos da ordem de $E_0 \approx 10^8V/m$ são raramente alcançados na prática ((BOUDA; BELABBAS, 2010)), aliás, se espera que para estes campos intensos os efeitos de reação de radiação comecem a ser importantes ((AL., 2009)). Portanto, considerando a ordem de magnitude dos campos que atualmente são manipulados experimentalmente, temos em boa aproximação

$$\dot{x}/P = \xi \approx (1 - 2\lambda z). \quad (3.38)$$

Por exemplo, para ter uma estimativa, temos que para valores de λ dados pela Eq. (3.37), $\dot{x} \approx P$ mesmo para partículas se movendo dentro de uma região $|\Delta z|$ da ordem de alguns quilômetros.

3.2.1 Compreendendo o sistema

Vamos agora entender o significado da métrica dada na Eq. (3.31). Para isto tomaremos $z_R = 0$ por simplicidade. Vamos em uma primeira visão supor que o domínio da função $\xi(z)$ são todos os reais. Neste caso podemos notar que a métrica tem um comportamento estranho; a presença de uma singularidade⁵ em $3\lambda z = -1$. Esta propriedade é contrária à invariância translacional que o problema requer. Em particular, se uma carga $+q$ é localizada em repouso nesta posição, ela permanecerá fixa aí para sempre. Isto é contrário ao fato de que a partícula está sendo forçada o tempo todo para a direita.

Consideremos agora a situação em que $P = 0$. Nesse caso, da Eq. (3.34) podemos obter a energia (por unidade de massa) E em função da velocidade

⁴Notemos que não estamos no limite quântico.

⁵Esta seria uma singularidade no sistema de coordenada, tal como um horizonte de eventos. Mas, não poderia representar uma singularidade física, tal como acontece nos buracos negros. Discutiremos mais sobre esta questão nas próximas seções.

v_0 da partícula na origem. Assim temos (com $\xi = 1$ em $z = 0$)

$$v_0^2 = c^2 - \frac{1}{E^2} c^6, \quad \rightarrow \quad E = \frac{c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \quad (3.39)$$

Além do mais, da Eq. (3.34) vemos que para cada valor da energia E , existe uma única posição \bar{z} no espaço tal que $\dot{z} = 0$. Neste mesmo caso ($P = 0$) temos que \bar{z} está caracterizada pelo vínculo

$$c^2 - \frac{\xi}{E^2} c^6 = 0, \quad \rightarrow \quad E = \sqrt{\xi} c^2 = \frac{c^2}{\sqrt[3]{1 + 3\lambda\bar{z}}}. \quad (3.40)$$

Encontramos aqui um novo problema; de acordo com Eq. (3.39) a energia E satisfaz $E \geq c^2$, mas segundo Eq. (3.40) a energia pode ser maior que ou menor que c^2 , aliás, se $3\lambda\bar{z} < -1$ a energia será negativa. Todo este comportamento é inaceitável.

Uma possível saída ao problema seria restringir z à região na qual $-1 < 3\lambda\bar{z} \leq 0$, mas então isto levaria a outro conjunto de problemas. Em particular, se a carga é positiva (negativa) ela poderia estar em repouso só em posições $\bar{z} < 0$ ($\bar{z} > 0$) impedindo ao experimentador eleger as condições iniciais.

Na próxima subseção daremos uma solução para este conjunto de problemas baseada em uma interpretação da variável z_R e redefinição do domínio da função ξ .

3.2.2 Interpretação da métrica e estudo da dinâmica

Vamos fazer o seguinte postulado: o valor z_R na função ξ se refere à posição da partícula quando a componente z da velocidade é nula.

Deste modo, de acordo com a figura [2] vemos que uma carga positiva ($\lambda > 0$) se moverá para a direita de z_R devido à ação do campo elétrico, e uma carga negativa se moverá para a esquerda. Portanto, temos em geral que

$$\lambda(z - z_R) \geq 0. \quad (3.41)$$

Se por exemplo uma carga começa a se mover desde uma posição z_1 e atinge a posição z_R , neste ponto a componente z da velocidade mudará de sinal, obrigando à partícula a voltar para a região onde estava inicialmente. Por esta razão, poderíamos chamar o ponto z_R como posição de retorno.

Com estas considerações, a métrica estará livre de singularidades, e deste modo se respeita a invariância translacional. De fato, se redefinirmos

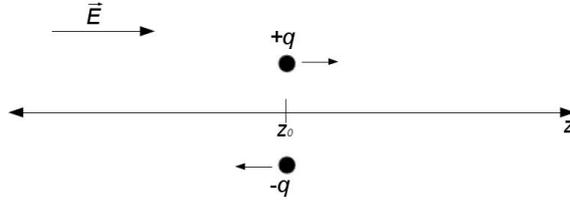


Figura 2 – Movimento das partículas, a partir da posição de retorno.

$z \rightarrow z' = z - w$, então do mesmo modo $z_R \rightarrow z'_R = z_R - w$; e conseqüentemente $z' - z'_R = z - z_R$, permanecendo a métrica invariante.

É importante ressaltar que, definida desta forma, a métrica contém não somente informação das características intrínsecas da partícula, como a carga ou massa (por meio de λ); mas também sobre sua dinâmica, por meio das condições iniciais desta (isto é, mediante z_R). Este comportamento foi predito ao final da seção 1.3.

Escrevendo $\lambda(z - z_R)$ de forma explícita

$$-\lambda(z - z_R) = -\frac{qE_0}{m_0c^2}(z - z_R), \quad (3.42)$$

vemos que este representa a quociente entre a energia potencial $-qE_0(z - z_R)$ e a energia "livre" em repouso⁶ de uma partícula m_0c^2 . Esta consideração nos leva a perceber que z_R é precisamente a posição de zero de potencial, de forma tal que uma partícula de energia (por unidade de massa) $E = c^2$ tenha velocidade nula nessa posição. Portanto nesta posição a métrica se reduz a métrica do s-t de fundo.

De fato, da Eq. (3.34) temos que se $\vec{v} = 0$, e a energia potencial é nula ($z - z_R$) então $E = c^2$. Este comportamento não é só para o campo elétrico constante, mas também para o caso de simetria esférica. Nesse caso temos da Eq. (3.22)

$$c^2\xi \left(1 + \frac{L^2}{c^2r^2} \right) = \frac{E^2}{c^2} - \dot{r}^2, \quad (3.43)$$

assim, fazendo $\vec{v} = 0$ ($L = \dot{r} = 0$) e $E = c^2$, temos que o zero de potencial será onde se cumpra $\xi = 1$, isto é, no infinito.

Voltando para nossa análise do campo elétrico constante, temos da

⁶Isto é, na ausência de interação (livre), a energia de uma partícula com velocidade nula é m_0c^2 .

Eq. (3.34) para $z = z_R$

$$0 = c^2 - \left(\frac{dx}{dt} \Big|_{z_R} \right)^2 - \frac{c^6}{E^2}, \quad \rightarrow \quad E = \frac{c^2}{\sqrt{1 - v_R^2/c^2}}, \quad (3.44)$$

onde agora

$$v_R = v \Big|_{z=z_R} = \frac{dx}{dt} \Big|_{z_R}. \quad (3.45)$$

Esta equação é geral, ao contrário da obtida em Eq. (3.39) que era para $P = 0$ sob a suposição que fizemos inicialmente, na qual v_0 era a velocidade dz/dt em $z = 0$ (e $z_R = 0$).

Por outro lado, $P = \text{constante} = P(z = z_R)$, assim da Eq. (3.36) temos

$$P = \left(\frac{E}{\xi^2 c^2} \frac{dx}{dt} \right) \Big|_{z_R} = \frac{v_R}{\sqrt{1 - v_R^2/c^2}}. \quad (3.46)$$

Com estes resultados podemos reescrever Eq. (3.34) na forma

$$\frac{P^2}{c^2} \xi^2 + \xi = \left(1 - \frac{v_z^2}{c^2} \right) \gamma_R^2, \quad \gamma_R = \frac{1}{\sqrt{1 - v_R^2/c^2}}, \quad (3.47)$$

que é uma equação quadrática para ξ e que permite obter a posição z em função da componente z da velocidade.

Vamos agora nos concentrar no caso unidimensional ($P = v_R = 0$), deste modo temos

$$\xi = 1 - \frac{v^2}{c^2}, \quad \rightarrow \quad 1 + 3\lambda (z - z_R) = (1 - v^2/c^2)^{-3/2}. \quad (3.48)$$

Consideremos o limite de baixas velocidades $v \ll c$, assim da Eq. (3.48) temos

$$\frac{v^2}{c^2} = 2\lambda (z - z_R) + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} m_0 v^2 = qE_0 (z - z_R) + \mathcal{O}(c^{-2}), \quad (3.49)$$

deste modo, se nas posições z_1 e z_2 a partícula tem velocidades v_1 e v_2 respetivamente, então se satisfaz a conservação da energia ($\Delta E_{\text{cinética}} = -\Delta E_{\text{potencial}}$)

$$\frac{1}{2} m_0 (v_2^2 - v_1^2) = qE_0 (z_2 - z_1) + \mathcal{O}(c^{-2}). \quad (3.50)$$

O leitor pode mostrar que o limite de "campo fraco" $\lambda (z - z_R) \ll 1$

leva exatamente aos mesmos resultados (isto é, à Eq. (3.50)).

Agora, vamos pôr a Eq. (3.34) em uma forma fácil de comparar o movimento acelerado com o caso Newtoniano. Da Eq. (3.34) obtemos

$$2 \left(\frac{dz}{dt} \right) \frac{d^2z}{dt^2} = \left(-2 \frac{P^2}{E^2} c^4 \xi \xi' - \frac{\xi'}{E^2} c^6 \right) \frac{dz}{dt},$$

onde $\xi' = d\xi/dz$. Assim, se tem

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{qE_0 c^4}{E^2} \left[2 \frac{P^2}{c^2} \xi + 1 \right] [1 + 3\lambda (z - z_R)]^{-5/3} \\ &= qE_0 [2\beta_R^2 \xi + 1 - \beta_R^2] [1 + 3\lambda (z - z_R)]^{-5/3}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

com $\beta_R = v_R/c$. Esta expressão coincide com a força elétrica qE_0 quando consideramos termos só até ordem $\mathcal{O}(c^0)$. Além do mais, observe-se que no caso em que era permitido $\lambda (z - z_R) < 0$, se teria uma força nula na singularidade como foi dito ao começo da subseção passada.

Da Eq. (3.34) se tem que $v_z \rightarrow c$ (e da Eq. (3.36), $v_x \rightarrow 0$) quando $\xi \rightarrow 0$, isto é, quando $\lambda z \rightarrow \infty$. Aliás, quando a velocidade da partícula está atingindo o valor de c , a aceleração dela se aproxima de zero (como se observa na Eq. (3.51)).

Na SR, a dinâmica de uma partícula carregada em presença do campo elétrico E_0 é dada pela equação

$$\frac{dp}{dt} = F = qE_0, \quad (3.52)$$

sendo p o momento relativístico definido por

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.53)$$

Neste caso também se satisfaz uma equação tipo conservação da energia $\Delta E_{cinetica} = -\Delta E_{potencial}$ na forma (com $v_0 = v(z_0)$)

$$\lambda (z - z_0) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad (3.54)$$

onde a energia cinética é definida pela expressão

$$E_{cinetica} = mc^2 - m_0 c^2, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.55)$$

A Eq. (3.54) pode ser obtida ao considerar:

$$\int_{t_0}^t F v dt = \int_{p_0}^p v dp,$$

$$qE_0(z - z_0) = v p \Big|_{v_0}^v - \int_{v_0}^v p dv,$$

ou

$$\begin{aligned} qE_0(z - z_0) &= v \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Big|_{v_0}^v - \int_{v_0}^v \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dv \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Big|_{v_0}^v, \end{aligned} \quad (3.56)$$

que é o resultado da equação (3.54).

Agora, para comparar as previsões do presente trabalho com as feitas pela teoria da relatividade especial, temos de comparar as equações (3.54) e (3.48). Por facilidade tomemos $z_R = 0$, $z_0 = 0$, $v_0 = 0$, logo

$$\text{stp: } \rightarrow \quad (1 + 3\lambda z)^{1/3} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.57)$$

$$\text{SR: } \rightarrow \quad (1 + \lambda z) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.58)$$

Nas figuras [3] se faz esta comparação, linhas contínuas representam a solução de acordo com SR, linhas ponteadas representam a solução de acordo ao formalismo do stp.

Para valores pequenos de λz , como por exemplo $\lambda z < 0.2$ as duas teorias tem bom acordo, pois nesse caso, $(1 + 3\lambda z)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}(3\lambda z) + \mathcal{O}(\lambda^2 z^2)$.

As duas teorias apresentam diferenças para valores grandes de λz , que é o caso de campos extremos, por exemplo. Como se pode notar das figuras, a partícula atinge a velocidade limite ($v = c$) para valores menores de λz no caso da SR, do que no formalismo do stp. Espera-se que este tipo de comportamento (do último caso) aconteça em teorias que considerem os efeitos de reação de radiação ((AL., 2009)) já que para grandes valores de λz esses efeitos são comparáveis aos do campo externo.

3.2.3 Solução da equação de movimento

Nas subseções anteriores, se estudou o stp de uma partícula em um campo elétrico constante de forma qualitativa. Vamos agora, encontrar a solução exata para o caso unidimensional ($P = 0$).

Para o caso unidimensional obteve-se (Eq. (3.48))

$$\xi = 1 - \frac{v^2}{c^2}, \quad \rightarrow \quad cdt = \pm \frac{dz}{\sqrt{1-\xi}}, \quad (3.59)$$

com

$$\xi = u^{-2/3}, \quad u = 1 + 3\lambda(z - z_R). \quad (3.60)$$

Deste modo, em termos de u , a equação (3.59) se torna

$$cdt = \pm \frac{du/3\lambda}{1-u^{-2/3}}, \quad \rightarrow \quad 3\lambda cdt = \pm \frac{u^{1/3} du}{u^{2/3} - 1}, \quad (3.61)$$

a qual podemos integrar facilmente e obter

$$3\lambda c(t - t_0) = \pm \left(2 + u^{2/3} \right) \sqrt{u^{2/3} - 1} \Bigg|_{u_0}^u, \quad (3.62)$$

onde u_0 é o valor de u em $t = t_0$.

Tomamos por simplicidade $z_R = 0$, e a condição inicial $t_0 = 0$, logo, voltando à variável z temos

$$(3\lambda)(ct) = \pm (f(z) - f(z_0)), \quad (3.63)$$

$$f(z) = \left(2 + (1 + 3\lambda z)^{2/3} \right) \sqrt{(1 + 3\lambda z)^{2/3} - 1}. \quad (3.64)$$

Esta expressão nos dá o tempo como função da posição. No entanto, podemos também obter a posição como função do tempo. Para tanto reescrevemos a Eq. (3.63) como

$$f(z) = \pm(3\lambda)(ct) + f(z_0), \quad (3.65)$$

assim, elevando ao quadrado em ambos os lados se tem (da Eq. (3.63))

$$(2 + v)^2 (v - 1) = s^2, \quad (3.66)$$

$$v = (1 + 3\lambda z)^{2/3}, \quad s = \pm(3\lambda)(ct) + f(z_0). \quad (3.67)$$

Portanto, a fim de obter v , temos que resolver a equação cúbica

$$v^3 - 3v^2 - (4 + s^2) = 0, \quad (3.68)$$

a qual tem três raízes: uma solução real, e as outras duas, complexas conjugadas uma da outra.

A solução real é dada por

$$v = -1 + a + \frac{1}{a}, \quad a = \frac{2^{2/3}}{2 + s^2 + s\sqrt{4 + s^2}}, \quad (3.69)$$

ou, de uma forma mais explícita

$$1 + 3\lambda z = \left[-1 + \frac{2^{2/3}}{2 + s^2 + s\sqrt{4 + s^2}} + \frac{2 + s^2 + s\sqrt{4 + s^2}}{2^{2/3}} \right]^{3/2} \quad (3.70)$$

com s dado por Eq. (3.67). Esta equação permite obter facilmente a posição z em termos de t .

Na figura 4 se apresenta um conjunto de curvas geodésicas para diferentes condições iniciais. As curvas que cortam o eixo z em $3\lambda z = 3$ e $3\lambda z = 1.5$, representam partículas que se aproximam à posição de retorno (neste caso a origem), atingem uma velocidade nula, e logo voltam à região em que se encontravam. As outras duas soluções, $3\lambda z = 3$ e $3\lambda z = 0$ (em $t = 0$), representam partículas (cuja velocidade inicial era tal) que sempre se afastaram da origem.

As velocidades iniciais (para cada caso), podem ser obtidas a partir da equação (3.48)

$$\xi = 1 - \frac{v^2}{c^2}, \quad \rightarrow \quad \frac{v}{c} = \pm \sqrt{1 - (1 + 3\lambda z)^{-2/3}}, \quad (3.71)$$

desse modo, obtemos

$$3\lambda z = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{v}{c} \approx 0.608, \quad (3.72)$$

$$3\lambda z = 1.5 \quad \rightarrow \quad \frac{v}{c} \approx 0.676, \quad (3.73)$$

$$3\lambda z = 3 \quad \rightarrow \quad \frac{v}{c} \approx 0.776, \quad (3.74)$$

e $z = 0 \rightarrow v = 0$. Com esta análise terminamos a discussão sobre o stp de uma partícula em um campo elétrico constante.

Neste gráfico vemos explicitamente o comportamento da partícula ao se mover no stp dado pela Eq. (3.31). Deste modo podemos ver que devido à posição de retorno (neste caso $z_R = 0$) as partículas nunca cruzam à região $\lambda(z - z_R) < 0$, isto, certamente deixa o stp livre da singularidade $\lambda(z - z_R) = -1$.

No próximo capítulo (segunda parte do texto), começaremos estudar a equação de Dirac em espaços curvos, para logo depois aplicar aos casos já

discutidos de stp.

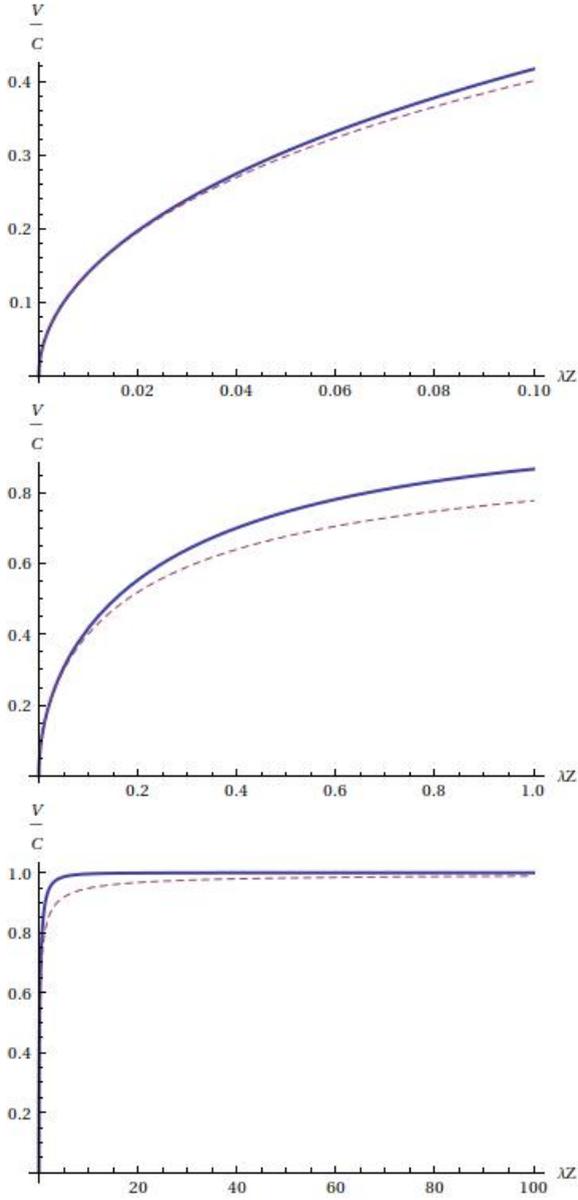


Figura 3 – Linha pontuada corresponde à predição da equação Eq. (3.57) e linha contínua com a predição de SR Eq. (3.58).

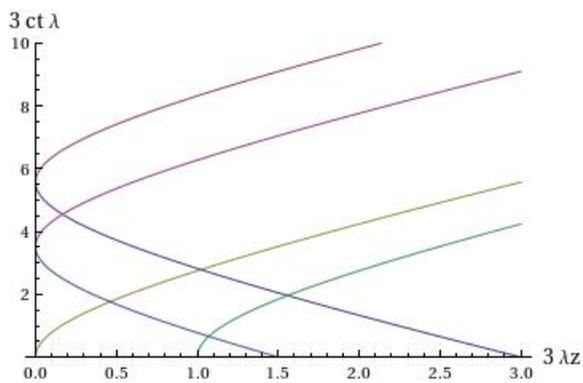


Figura 4 – Curvas geodésicas para o caso unidimensional. Obtidas a partir da Eq. (3.63).

4 EQUAÇÃO DE DIRAC EM ESPAÇOS CURVOS

Nesta segunda parte da dissertação, buscamos dar uma descrição quântica da interação entre uma partícula e um campo eletromagnético externo, mantendo a visão geométrica que implica no conceito de stp (desenvolvido na primeira parte deste documento).

Para cumprir este objetivo, estamos interessados em estudar a equação de Dirac em espaços curvos. E deste modo, postular que a dinâmica de uma partícula carregada, é descrita por uma equação tipo Dirac no stp da partícula.

Dado que toda partícula é livre (sem interação) no seu stp, então esta equação, será portanto uma equação de Dirac para partícula livre.

4.1 PARTÍCULA LIVRE EM UM ESPAÇO-TEMPO CURVO

Para estudar a equação de Dirac em um s-t curvo, é conveniente estudar em primeiro lugar a equação de Dirac em um s-t plano. Os conceitos básicos desta equação são dados no apêndice D. Além do mais, nesta seção usaremos o conceito de tetradas, que nos oferece a ferramenta natural para passar de "índices planos" (a, b, c, \dots) a "índices curvos" (σ, μ, ν, \dots). A teoria básica sobre tetradas é dada no apêndice C.

A equação de Dirac no espaço de Minkowski é

$$\left(\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \psi(x) = 0. \quad (4.1)$$

Esta equação tem a covariância da SR, isto é, é invariante sob transformações de Lorentz. No entanto, não tem covariância geral em um s-t curvo.

Dado que as tetradas permitem descrever objetos de espaços curvos, como se fossem objetos em espaços planos, então, no momento de generalizar a Eq. (4.1) para qualquer geometria, devemos identificar as matrizes de Dirac nessa equação com as matrizes "planas" γ^a em uma base de tetradas e^a . Deste modo, em um sistema coordenado x^μ , essas matrizes estarão dadas por

$$\gamma^\mu(x) = e^\mu_a(x) \gamma^a, \quad (4.2)$$

onde e^μ_a são as matrizes mudança de base, que permitem expressar dx^μ em termos de e^a ($dx^\mu = e^\mu_a e^a$). Assim, as matrizes $\gamma^\mu(x)$ variam ponto a ponto no s-t, enquanto que cada matriz γ^a é constante.

As matrizes planas satisfazem a relação de anticomutação (Eq. (D.11))

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}, \quad (4.3)$$

sendo η^{ab} a métrica de Minkowski. Deste modo, as matrizes "curvas" cumprem a propriedade

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = e^\mu_a e^\nu_b \{\gamma^a, \gamma^b\} = 2e^\mu_a e^\nu_b \eta^{ab} = 2g^{\mu\nu}, \quad (4.4)$$

onde usamos a Eq. (C.33), que relaciona a métrica plana e a métrica curva por meio das tetradas e^μ_a .

Por outro lado, é usual no formalismo da GR, introduzir uma conexão Γ_μ a qual tenha em conta o caráter espinorial de ψ . Deste modo, devemos substituir a derivada parcial ∂_μ por uma derivada covariante ∇_μ que garanta a covariância geral da equação de Dirac ((COHEN, 1966), (WHEELER, 1957))

$$\left(\gamma^\mu(x) \nabla_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \psi(x) = 0, \quad \nabla_\mu \psi = [\partial_\mu - \Gamma_\mu(x)] \psi. \quad (4.5)$$

No que segue, apresentamos o método padrão para obter a equação de Dirac em um s-t curvo que leva à equação de Dirac-Fock-Weyl ou DFW (ver Eq. (4.17)). Esta equação foi obtida de forma independente por (WEYL, 1929) e (FOCK, 1929). Porém, existem outras extensões da equação de Dirac (veja por exemplo (ARMINJON, 2008) e (REIFLER, 2010)).

4.1.1 Equação de Dirac-Fock-Weyl

Na ideia de Fock e Weyl, se faz a seguinte consideração: dada a natureza espinorial da função de onda ψ , as quantidades Γ_μ são em geral matrizes (do mesmo modo que γ^a); aliás, se desejarmos derivar uma matriz A no espaço espinorial, a derivada se torna

$$\nabla_\mu A(x) = \partial_\mu A(x) - [\Gamma_\mu(x), A(x)]. \quad (4.6)$$

Consideremos o objeto $A^{a\mu}$ que é: 1) matriz no espaço espinorial, 2) vetor (com índice a) no espaço de tetradas e 3) vetor (com índice μ) no espaço de coordenadas; deste modo em geral a derivada covariante de $A^{a\mu}$ será

$$\nabla_\mu A^{a\nu} = \partial_\mu A^{a\nu} + \omega^a_{b\mu} A^{b\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu A^{a\alpha} - [\Gamma_\mu, A^{a\nu}]. \quad (4.7)$$

Lembremos (ver seção C.2) que a conexão afim (símbolo de Chris-

toffel) pode ser obtida em termos de $g_{\mu\nu}$ e sua inversa $g^{\mu\nu}$ ao exigir que a derivada covariante de g seja nula. Igualmente se obtém a conexão de spin $\omega_{b\mu}^a$ impondo que a derivada covariante das tetradas e_{μ}^a seja zero (*postulado tetrada*).

Da mesma maneira, a equação DFW é obtida ao exigir que a derivada covariante das matrizes de Dirac seja nula

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\mu} \gamma^{\nu}(x) \\ &= \frac{\partial \gamma^{\nu}(x)}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu} \gamma^{\rho}(x) - [\Gamma_{\mu}(x), \gamma^{\nu}(x)], \end{aligned} \quad (4.8)$$

ou com índices latinos

$$\nabla_{\mu} \gamma^a = \omega_{b\mu}^a \gamma^b - [\Gamma_{\mu}(x), \gamma^a] = 0, \quad (4.9)$$

note-se que γ^a são as matrizes "planas" de Dirac, assim $\partial_{\mu} \gamma^a = 0$. As equações Eq. (4.8) ou Eq. (4.9) nos permitem obter a conexão Γ_{μ} .

Vamos obter uma solução da Eq. (4.9). Para isso lembremos que a conexão $\omega_{ab\mu}$ é antissimétrica nos índices ab , portanto

$$\begin{aligned} \omega_{b\mu}^a \gamma^b &= \omega_{cb\mu} \eta^{ac} \gamma^b = \frac{1}{2} \omega_{cb\mu} (\eta^{ac} \gamma^b - \gamma^c \eta^{ab}) \\ &= \frac{1}{4} \omega_{cb\mu} (\{\gamma^c, \gamma^a\} \gamma^b - \gamma^c \{\gamma^b, \gamma^a\}), \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde na última equação, usamos a relação de anticomutação das matrizes de Dirac. Agora, se usarmos a propriedade

$$[AB, C] = A \{B, C\} - \{A, C\} B, \quad (4.11)$$

podemos finalmente obter

$$\omega_{b\mu}^a \gamma^b = -\frac{1}{4} \omega_{cb\mu} [\gamma^c \gamma^b, \gamma^a],$$

ou

$$\omega_{b\mu}^a \gamma^b - \left[\left(-\frac{1}{4} \omega_{cb\mu} \gamma^c \gamma^b \right), \gamma^a \right] = 0. \quad (4.12)$$

Logo, a solução mais geral para a conexão Γ_{μ} (Eq. (4.9)) será

$$\Gamma_{\mu} = -\frac{1}{4} \omega_{cb\mu} \gamma^c \gamma^b + A_{\mu}, \quad (4.13)$$

onde A_{μ} é uma matriz que comuta com γ^a . Aliás, dado que A_{μ} não pode

depende explicitamente do índice a , esta deve comutar com todo o conjunto de matrizes γ^a ; mas este conjunto forma uma base para o espaço de matrizes 4×4 , portanto, A_μ deve comutar com qualquer matriz deste espaço, isto é, A_μ é um múltiplo da matriz identidade, $A_\mu = -ia_\mu(x)1_{4 \times 4}$, onde em cada ponto do s-t a_μ é um número real.

Reescrevendo $\gamma^a \gamma^b$ em termos do comutador e o anticomutador

$$\gamma^a \gamma^b = \frac{1}{2} \{ \gamma^a, \gamma^b \} + \frac{1}{2} [\gamma^a, \gamma^b], \quad (4.14)$$

$$\{ \gamma^a, \gamma^b \} = \gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a, \quad [\gamma^a, \gamma^b] = \gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a, \quad (4.15)$$

e usando $\omega_{ab\mu} \{ \gamma^a, \gamma^b \} = 0$ (já que $\omega_{ab\mu} = -\omega_{ba\mu}$) temos

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{4} \omega_{ab\mu} S^{ab} - ia_\mu(x), \quad S^{ab} = \frac{1}{2} [\gamma^a, \gamma^b]. \quad (4.16)$$

Deste modo, a equação DFW em sua forma mais geral é

$$\left[\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_{ab\mu} S^{ab} + ia_\mu \right) + \frac{m_0 c}{\hbar} \right] \psi = 0. \quad (4.17)$$

A quantidade a_μ se associa ao potencial eletromagnético, que é usualmente introduzido através do acoplamento mínimo¹ Porém, em nosso caso estamos interessados em introduzir a interação eletromagnética completamente na métrica, e assim podemos fazer $a_\mu = 0$.

4.2 SOLUCIONANDO A EQUAÇÃO DFW

Vamos agora aplicar a teoria apresentada na seção anterior sobre a equação DFW ao stp de uma partícula em presença de um campo elétrico constante. Veremos que esta equação não fornece um resultado satisfatório para este exemplo, o que nos levará a propor uma outra equação quântica de movimento ao final do capítulo.

Nesse caso, a métrica é diagonal e vamos escolher as tetradas também com esta forma, assim da Eq. (C.38) temos

$$\omega_{ab\mu} = e_b^\lambda \left(-\partial_\mu e_{a\lambda} + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu e_{a\nu} \right). \quad (4.18)$$

Sabemos que $\omega_{ab\mu}$ é antissimétrico nos índices ab , portanto, só é pre-

¹Neste caso é feita a identificação $a_\mu = \frac{q}{\hbar c} A_\mu$, sendo A_μ o potencial eletromagnético (ver apêndice D.3).

ciso achar $\omega_{ab\mu}$ para a distinto de b . Aliás, temos que

$$e_b^\lambda \partial_\mu e_{a\lambda} = 0, \quad (4.19)$$

para $a \neq b$ (equação válida só quando as tetradas são diagonais). Logo, no presente caso

$$\omega_{ab\mu} = e_{av} e_b^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^v. \quad (4.20)$$

De acordo com a seção 2.2.2 a métrica do stp associada a este problema é

$$ds^2 = \xi (-c^2 dt^2 + dz^2) + \xi^{-1} (dx^2 + dy^2), \quad (4.21)$$

$$\xi = (1 + 3\lambda z)^{-2/3}, \quad \lambda = \frac{qE_0}{m_0 c^2}, \quad \lambda z \geq 0.$$

Escolhemos de forma natural a seguinte base de tetradas

$$e_\mu^a = \text{diag} \left(\sqrt{\xi}, \frac{1}{\sqrt{\xi}}, \frac{1}{\sqrt{\xi}}, \sqrt{\xi} \right), \quad (4.22)$$

$$e_a^\mu = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}, \sqrt{\xi}, \sqrt{\xi}, \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right). \quad (4.23)$$

Vamos agora achar a conexão de spin $\omega_{ab\mu}$, com $a \neq b$

$$\omega_{01\mu} = e_{0t} e_1^x \Gamma_{\mu x}^t, \quad \omega_{02\mu} = e_{0t} e_2^y \Gamma_{\mu y}^t, \quad (4.24)$$

$$\omega_{03\mu} = e_{0t} e_3^z \Gamma_{\mu z}^t, \quad \omega_{12\mu} = e_{1x} e_2^y \Gamma_{\mu y}^x, \quad (4.25)$$

$$\omega_{13\mu} = e_{1x} e_3^z \Gamma_{\mu z}^x, \quad \omega_{23\mu} = e_{2y} e_3^z \Gamma_{\mu z}^y. \quad (4.26)$$

É imediato ver que desses símbolos de Christoffel os únicos não nulos são

$$\Gamma_{tz}^t = -\Gamma_{xz}^x = -\Gamma_{yz}^y = \frac{1}{2} \frac{\xi'}{\xi}, \quad (4.27)$$

assim, temos

$$\omega_{03t} = -\frac{1}{2} \frac{\xi'}{\xi}, \quad \omega_{13x} = \omega_{23y} = -\frac{1}{2} \frac{\xi'}{\xi^2}, \quad (4.28)$$

e todas as outras componentes da conexão de spin são nulas.

O termo espinorial $\gamma^\mu \Gamma_\mu$, com

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{4} \omega_{ab\mu} S^{ab}, \quad (4.29)$$

se reduz a

$$\begin{aligned}
 \gamma^\mu \Gamma_\mu &= e_a^\mu \gamma^a \Gamma_\mu = \gamma^0 e_0^t \Gamma_t + \gamma^1 e_1^x \Gamma_x + \gamma^2 e_2^y \Gamma_y + 0 \\
 &= \gamma^0 \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} \right) \left(-\frac{1}{2} \omega_{03t} S^{03} \right) + \gamma^1 \left(\sqrt{\xi} \right) \left(-\frac{1}{2} \omega_{13x} S^{13} \right) \\
 &\quad + \gamma^2 \left(\sqrt{\xi} \right) \left(-\frac{1}{2} \omega_{23y} S^{23} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\xi'}{\xi \sqrt{\xi}} (\gamma^0 S^{03} + \gamma^1 S^{13} + \gamma^2 S^{23}). \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

Agora, temos para $a \neq b$:

$$\begin{aligned}
 \gamma^a S^{ab} &= \frac{1}{2} \gamma^a (\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a) \\
 &= \frac{1}{2} \left((\gamma^a)^2 \gamma^b + \gamma^b (\gamma^a)^2 \right) = \eta^{aa} \gamma^b, \tag{4.31}
 \end{aligned}$$

onde usamos o fato que γ^a e γ^b anticomutam. Deste modo, substituindo na Eq. (4.30) se tem

$$\gamma^\mu \Gamma_\mu = \frac{1}{4} \frac{\xi'}{\xi \sqrt{\xi}} \gamma^3. \tag{4.32}$$

Por outro lado, com $\gamma^\mu = \gamma^a e_a^\mu$, obtemos (usando a Eq. (4.23))

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \frac{\gamma^0}{\sqrt{\xi}} \partial_0 + \sqrt{\xi} (\gamma^1 \partial_x + \gamma^2 \partial_y) + \frac{\gamma^3}{\sqrt{\xi}} \partial_z. \tag{4.33}$$

Portanto, a equação de Dirac-Fock-Weyl

$$\gamma^\mu(x) [\partial_\mu - \Gamma_\mu(x)] \psi + \frac{m_0 c}{\hbar} \psi = 0, \tag{4.34}$$

para este s-t tem a forma final

$$\begin{aligned}
 &\left[\frac{\gamma^0}{\sqrt{\xi}} \partial_0 + \sqrt{\xi} (\gamma^1 \partial_x + \gamma^2 \partial_y) + \frac{\gamma^3}{\sqrt{\xi}} \left(\partial_z - \frac{\xi'}{4\xi} \right) + \frac{m_0 c}{\hbar} \right] \psi \\
 &= \left[-i \frac{E}{c\hbar} \frac{\gamma^0}{\sqrt{\xi}} + i \frac{\sqrt{\xi}}{\hbar} (\gamma^1 p_x + \gamma^2 p_y) + \frac{\gamma^3}{\sqrt{\xi}} \partial_z + \frac{m_0 c}{\hbar} \right] \Phi = 0, \tag{4.35}
 \end{aligned}$$

onde Φ está relacionado com ψ pela equação

$$\psi(t, x, y, z) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}} e^{i\frac{p_x x}{\hbar}} e^{i\frac{p_y y}{\hbar}} \xi^{1/4} \Phi(z). \quad (4.36)$$

Por simplicidade, vamos considerar só o caso unidimensional ($p_x = 0$ e $p_y = 0$). Precisamos agora fazer escolha de uma representação das matrizes de Dirac. No apêndice D fizemos

$$\gamma^0 = i \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

mas desta vez é apropriado fazer uma rotação cíclica nos γ^i , isto é,

$$\gamma^1 \rightarrow \gamma^2, \quad \gamma^2 \rightarrow \gamma^3, \quad \gamma^3 \rightarrow \gamma^1, \quad (4.38)$$

logo, para o presente caso tomaremos

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Além do mais, é conveniente fazer $c = \hbar = 1$, e se desejarmos retornar aos valores de c e \hbar , é suficiente trocar m_0 por $m_0 c / \hbar$, e E por $E / c \hbar$.

Assim, a equação de movimento se torna

$$\left[\begin{pmatrix} -E + m_0 \sqrt{\xi} & 0 \\ 0 & E + m_0 \sqrt{\xi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_z \right] \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (4.40)$$

ou equivalentemente

$$(-E + m_0 \sqrt{\xi}) \Phi_1 + \partial_z \Phi_2 = 0, \quad (4.41)$$

$$(E + m_0 \sqrt{\xi}) \Phi_2 + \partial_z \Phi_1 = 0. \quad (4.42)$$

A partir daqui podemos obter as funções Φ_1 e Φ_2 no limite $z \rightarrow \infty$ (ou $\sqrt{\xi} \rightarrow 0$). Neste caso temos,

$$\partial_z \Phi_2 = E \Phi_1, \quad \partial_z \Phi_1 = -E \Phi_2, \quad (4.43)$$

$$\partial_z^2 \Phi_1 = -E^2 \Phi_1, \quad \partial_z^2 \Phi_2 = -E^2 \Phi_2, \quad (4.44)$$

que tem como solução

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e^{iEz} \\ -ie^{iEz} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} -ie^{-iEz} \\ e^{-iEz} \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Isto é, no limite $z \rightarrow \infty$ temos uma partícula que se move no eixo z com momento $|p_z| = E = p_0$, de modo tal que

$$p^\mu p_\mu = g^{00} (p_0)^2 + g^{zz} (p_z)^2 = 0, \quad (4.46)$$

já que a partícula se move à velocidade da luz.

Este comportamento faz completo sentido (de acordo com o estudado na seção 3.2), já que uma partícula em um campo elétrico se acelera continuamente, até que (no limite $z \rightarrow \infty$) sua velocidade se aproxima à da luz.

Porém, embora este resultado pareça plausível, temos que ter cuidado e perceber que realmente a função solução da equação de Dirac não é Φ , mas a função ψ dada pela equação (4.36). Observemos que $\psi \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow \infty$ (pois $\xi^{1/4} \rightarrow 0$).

Esta solução não pode ser aceitável, já que no infinito a partícula deve comportar-se como uma onda livre que se propaga à velocidade da luz. A função de onda seria nula se tivéssemos um potencial limitante que proibisse à partícula atingir o infinito. Mas pelo contrário, o potencial que temos (devido ao campo elétrico constante) tende a levar à partícula para o infinito (para um tempo suficientemente longo).

Podemos perceber que este termo adicional ($\xi^{1/4}$), é devido à presença de $\xi'/(4\xi)$ na primeira linha da Eq. (4.35), o qual provém do termo espinorial $\gamma^\mu \Gamma_\mu$ em Eq. (4.32).

Isto nos leva a concluir que, a introdução do termo espinorial $\gamma^\mu \Gamma_\mu$ é contrária² ao formalismo do stp, e vimos que na ausência dele a equação de movimento (tipo equação de Dirac, mas sem conexão)

$$\left[\gamma^\mu(x) \partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar} \right] \psi = 0, \quad (4.47)$$

tem melhores resultados. Tentemos compreender por que este é o caso.

Em geral a derivada covariante ∇_μ possui três termos:

- O primeiro é ∂_μ , que está encarregado de nos dar a informação de como variam as funções (ponto a ponto no s-t). Exemplos destas funções são: a função de onda $\psi(x)$, e as componentes $v^\alpha(x)$ do vetor $v = v^\alpha \partial_\alpha$.
- Segundo, os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, que nos dão informação da

²Pelo menos, quando fazemos uso do Γ_μ dado pela equação Eq. (4.16).

variação dos vetores ∂_ν da base.

- E terceiro, o termo espinorial Γ_μ , o qual teria em conta a variação do spin (estrutura interna da partícula) quando a partícula evolui no stp.

Os símbolos de Christoffel não aparecem na equação de Dirac já que a função de onda é por definição um escalar sob transformações de coordenadas (isto na forma externa, pois ψ não é combinação linear de base nenhuma). Agora, a presença de Γ_μ reflete o fato de como transforma a "parte interna" de $\psi(x)$ quando se faz uma transformação de coordenadas. Esta é a grande incógnita na hora de fazer uma extensão da equação de Dirac para um s-t curvo. Na seção 4.1.1, esta generalização foi obtida em termos da conexão de spin $\omega_{ab\mu}$ ao fazer a suposição que as matrizes de Dirac são covariante-mente constantes (Eq. (4.8)) (isto levou à equação DFW). No entanto, nos exemplos passados, vimos que esta condição não se cumpre para o caso do stp. Assim, é preciso obter uma outra expressão para Γ_μ que seja consistente com o formalismo do stp.

Pelo obtido no presente capítulo, a opção $\Gamma_\mu = 0$ é uma escolha (em um primeiro passo) conveniente. Esta consiste em supor que a estrutura interna da partícula não é modificada quando esta evolui no s-t (não é modificada pelo campo externo). Podemos entender esta situação com o exemplo de simetria esférica: A equação de Schrödinger para o átomo de Hidrogênio possui informação sobre a interação do campo eletromagnético externo (produzido pelo núcleo) com a carga do elétron, mas não tem informação sobre a interação desse campo com o spin daquela partícula, nem do acoplamento spin-órbita. Assim, nesse formalismo, tanto o spin quanto o momento angular orbital são conservados.

Na equação de Dirac usual (no s-t de Minkowski e na qual usa o acoplamento mínimo), o spin da partícula interage com o campo eletromagnético determinando deste modo o acoplamento spin-órbita. Este fato leva a que nem o spin \vec{S} nem o momento angular orbital \vec{L} sejam conservados devido à interação entre eles³. Deste modo, dado que \vec{S} e \vec{L} entram na dinâmica da partícula, a energia desta dependerá dessa interação. Esta dependência se faz explícita por meio do número quântico j associado ao momento angular total $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$ o qual é conservado.

No formalismo do stp, a partícula carregada é considerada como sendo livre, mas se movendo em um s-t curvo. Este s-t tem informação sobre a interação da carga q com o campo eletromagnético externo, mas não sobre a interação do spin. Pelo menos, não de forma explícita nos níveis de energia,

³Isto devido a que o momento angular orbital gera um momento dipolar, que por sua vez gera um campo magnético. É este campo, o que interage com o spin da partícula.

embora a função de onda depende sim do momento angular⁴.

Deste modo ao considerar a evolução da partícula o seu spin não é modificado pela presença dos campos eletromagnéticos externos, o qual torna o spin uma quantidade independente da geometria do stp. Assim, no que concerne ao spin, é como se a partícula estivesse em um s-t plano, aliás, sem interação.

⁴Isto deve ser assim, já que a partícula deve possuir um certo momento angular total j (número quântico), o qual pode ser obtido ao aplicar o operador \vec{J} ao estado da partícula ψ . Isto é consequência de que os estados dependem dos números quânticos. Assim, para cada j teremos diferentes estados $\psi = \psi_j$.

5 EQUAÇÃO DE DIRAC PARA O STP

De acordo com as análises do capítulo anterior, tomamos como hipótese que a equação

$$\left[\gamma^\mu(x) \partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar} \right] \psi = 0, \quad (5.1)$$

descreve a dinâmica quântica de uma partícula carregada de acordo ao formalismo do stp. Deste modo, nos referimos a esta, como *equação de Dirac para o stp*.

Em uma primeira visão, a Eq. (5.1) parece não ter covariância geral devido à presença de ∂_μ em vez da derivada covariante ∇_μ . No entanto, de acordo com as considerações feitas no capítulo anterior, $\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi$ já que ψ se comporta como um escalar (tanto no espaço interno como externo). Portanto, a Eq. (5.1) é perfeitamente covariante.

Vamos agora, com certo detalhe, discutir a equação de Dirac para o stp de uma partícula carregada na presença de um campo elétrico constante. E logo, na última seção consideramos o caso de um stp com simetria esférica, que posteriormente será aplicado ao átomo de Hidrogênio.

5.1 CAMPO ELÉTRICO CONSTANTE

Da Eq. (4.33), se obtém (com $c = \hbar = 1$)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\gamma^0}{\sqrt{\xi}} \partial_0 + \sqrt{\xi} (\gamma^1 \partial_x + \gamma^2 \partial_y) + \frac{\gamma^3}{\sqrt{\xi}} \partial_z + m_0 \right] \psi \\ & = \left[-iE \frac{\gamma^0}{\sqrt{\xi}} + i\sqrt{\xi} (\gamma^1 p_x + \gamma^2 p_y) + \frac{\gamma^3}{\sqrt{\xi}} \partial_z + m_0 \right] \Phi = 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde Φ está relacionado com ψ pela equação

$$\psi(t, x, y, z) = e^{-iEt} e^{ip_x x} e^{ip_y y} \Phi(z). \quad (5.3)$$

Consideremos somente o caso unidimensional $p_x = 0$ e $p_y = 0$, e a representação (ver Eq. (4.39))

$$\gamma^0 = i \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

deste modo temos

$$\left(-E + m_0\sqrt{\xi}\right)\Phi_1 + \partial_z\Phi_2 = 0, \quad (5.5)$$

$$\left(E + m_0\sqrt{\xi}\right)\Phi_2 + \partial_z\Phi_1 = 0. \quad (5.6)$$

Este sistema pode ser separado na forma

$$\frac{1}{E + m_0\sqrt{\xi}}\partial_z\left(\frac{1}{-E + m_0\sqrt{\xi}}\partial_z\right)\Phi_2 = \Phi_2, \quad (5.7)$$

$$\frac{1}{-E + m_0\sqrt{\xi}}\partial_z\left(\frac{1}{E + m_0\sqrt{\xi}}\partial_z\right)\Phi_1 = \Phi_1. \quad (5.8)$$

Vemos assim, que se conseguirmos achar uma solução $\Phi(z, m_0, E)$ para esse conjunto de equações, a outra solução será dada por $\tilde{\Phi}(z, m_0, E) = \gamma^3\Phi(z, m_0, -E)$, isto é¹

$$\Phi(z, m_0, E) = \begin{pmatrix} \Phi_1(z, m_0, E) \\ \Phi_2(z, m_0, E) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi}(z, m_0, E) = \begin{pmatrix} \Phi_2(z, m_0, -E) \\ \Phi_1(z, m_0, -E) \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Deste modo, estas soluções poderiam ser interpretadas como sendo uma de energia positiva e a outra de energia negativa (partícula e antipartícula).

Antes de tentar resolver este sistema de equações vamos descrever duas formas de introduzir a interação na equação de Dirac usual.

5.1.1 Acoplamento mínimo e acoplamento escalar

Está bem estabelecido que a equação de Dirac para uma partícula livre no espaço-tempo de Minkowski é

$$\left(\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{m_0c}{\hbar}\right)\psi = 0, \quad (5.10)$$

a qual pode ser obtida da densidade Lagrangiana ((GRIFFITHS, 2008)-cap:10.3)

$$\mathcal{L}_{livre} = \bar{\psi}\left(\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{m_0c}{\hbar}\right)\psi, \quad (5.11)$$

¹Aqui γ^3 corresponde a definição dada na Eq. (4.39), que coincide com a matriz σ^1 de Pauli. O efeito de γ^3 se reduz a permutar Φ_1 com Φ_2 .

por meio das equações de Euler-Lagrange ao fazer uma variação com respeito a $\bar{\psi}$ ((GRIFFITHS, 2008)).

Agora, quando o campo ψ (que descreve a partícula) está interagindo, é necessário introduzir termos adicionais na Lagrangiana. A forma explícita desses termos depende do tipo de interação a considerar. Existem dois casos de especial interesse: a interação com um campo escalar, e o acoplamento com uma corrente vetorial. Isto se faz da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\psi} \left(\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \psi + \frac{g c}{\hbar} \phi(x) \bar{\psi} \psi + \frac{i q}{\hbar c} q A_\mu(x) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (5.12)$$

onde g representa a constante do acoplamento de ψ com o campo escalar ϕ . A_μ é o potencial eletromagnético que interage com a corrente $q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, sendo q a carga da partícula.

Sendo mais precisos, teríamos que introduzir termos adicionais (na Lagrangiana da Eq. (5.12)) que deem informação sobre a dinâmica² dos campos A_μ e ϕ . No entanto, como no presente trabalho estamos supondo que os campos externos não são afetados pelo campo da partícula é suficiente ficar só com a Lagrangiana dada na equação (5.12).

Deste modo, tomando as equações de Euler-Lagrange para a Lagrangiana de interação se obtém a equação de Dirac

$$\left(\gamma^\mu \partial_\mu + i \frac{q}{\hbar c} A_\mu \right) \psi + \left(\frac{m_0 c}{\hbar} + \phi(x) \right) \psi = 0, \quad (5.13)$$

que é precisamente a equação que se obtém a partir da seção D.3 ao usar o acoplamento com o campo eletromagnético e com o campo escalar.

Assim, temos

- No *acoplamento eletromagnético (mínimo)*. A interação pode entender-se como sendo devida à variação ponto a ponto do momento p_μ , ao mudar ∂_μ por $\partial_\mu + i q A_\mu / (\hbar c)$.
- O *acoplamento escalar*, adiciona um potencial no termo de massa, $m_0 \rightarrow m_0 + g \phi(x)$. Deste modo, a interação pode ser entendida como devida à variação ponto a ponto da massa efetiva $m(x) = m_0 + g \phi(x)$.

Da Eq. (5.2) como $p_x = p_y = 0$, vemos que a equação de Dirac para o stp devido à interação com um campo elétrico constante é

$$\left(\gamma^0 \partial_0 + \gamma^3 \partial_z + m_0 \sqrt{\xi} \right) \psi = 0, \quad (5.14)$$

²Isto é, introduzir os termos cinéticos associados a essas quantidades. Por exemplo, no caso do campo eletromagnético, seria preciso introduzir o termo $-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ na Lagrangiana de interação ((GRIFFITHS, 2008)).

a qual basicamente representa um acoplamento escalar, com massa variável $m = m_0 \sqrt{\xi}$.

Vamos agora comparar o nosso resultado com a equação de Dirac usual com acoplamento escalar.

5.1.2 Equação de Dirac unidimensional: acoplamento escalar

A solução estacionária para o acoplamento escalar satisfaz

$$(-iE\gamma^0 + \gamma^3 \partial_z + m(x)) \Phi = 0. \quad (5.15)$$

Esta massa variável para o caso de um potencial linear $V(z) = kz$, é dada por

$$m = m_0 + kz, \quad k = -qE_0. \quad (5.16)$$

Temos assim, que a massa m diverge no limite $z \rightarrow \infty$. Podemos portanto imaginar esta situação como um certo tipo de "poço de potencial", no sentido que uma partícula com energia E e momento p_z finitos não pode atingir esta barreira, e portanto a fim de garantir a Eq. (5.15), Φ deve ser nulo para $z \rightarrow \infty$. Este fato nos permite obter estados ligados, isto é, um espectro discreto de energia (SHUI-JIE, ; YUHONG, 1984).

Como já vimos, esta situação é diferente para o caso do stp, para o qual a massa $m = m_0 \sqrt{\xi} \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow \infty$.

Vamos mostrar uma técnica de solução³ para a equação (5.15). Para isto a reescrevemos como

$$\gamma^3 \partial_z \Phi = (iE\gamma^0 - m) \Phi, \quad (5.17)$$

e aplicamos $\gamma^3 \partial_z$ em ambos os lados para obter

$$\partial_z^2 \Phi = (-E^2 + m^2 - \gamma^3 m') \Phi, \quad m' = \partial_z m. \quad (5.18)$$

Agora com $\gamma^3 = \sigma^1$ (ver Eq. (5.4)) temos

$$\begin{pmatrix} \Phi''_1 \\ \Phi''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-E^2 + m^2) \Phi_1 - m' \Phi_2 \\ (-E^2 + m^2) \Phi_2 + m' \Phi_1 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Esta equação pode ser desacoplada ao definir Φ_+ e Φ_- na forma

$$\Phi_{\pm} = \Phi_1 \pm \Phi_2, \quad (5.20)$$

³Veja por exemplo: (SHUI-JIE,), (YUHONG, 1984).

com os quais obtemos

$$\Phi''_{\pm} = [(-E^2 + m^2) \mp m'] \Phi_{\pm}. \quad (5.21)$$

Até aqui, esse tratamento é geral. Vamos agora resolver para o caso usual de potencial linear $V(z) = kz$. Neste caso temos,

$$m^2 = (m_0 + kz)^2 = k^2 r^2, \quad r = z + \frac{m_0}{k}. \quad (5.22)$$

Em termos desta nova variável r , a Eq. (5.21) se reescreve como

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{2} k^2 r^2 \right) \Phi_{\pm} = \frac{1}{2} (E^2 \pm k) \Phi_{\pm}, \quad (5.23)$$

que é idêntica à equação de Schrödinger do oscilador harmônico. Sabemos portanto que a solução para essa equação exige

$$\frac{1}{2} (E^2 \pm k) = |k| \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (5.24)$$

Para analisar mais facilmente esta equação, consideremos o caso $k > 0$ (o outro caso se trata de forma análoga). Desse modo, temos que as energias para os estados Φ_{\pm} estão determinadas por

$$\frac{E^2}{2} = k \left(n + \frac{1}{2} \right) \mp \frac{k}{2}, \quad (5.25)$$

ou

$$\begin{pmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_- \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E_+^2 \\ E_-^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2kn \\ 2k(n+1) \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Porém, como a energia E deve ser a mesma para cada um dos estados Φ_+ e Φ_- , temos da Eq. (5.26) que, $n = 1, 2, \dots$ para E_+ , e $n = 0, 1, \dots$ para E_- . Assim, finalmente o espectro de energia para este sistema é

$$E = \pm \sqrt{2(n+1)k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.27)$$

e as funções Φ_{\pm} são dadas por

$$\Phi_+ = H_{n+1}(\rho) e^{-\frac{\rho^2}{2}}, \quad \Phi_- = H_n(\rho) e^{-\frac{\rho^2}{2}}, \quad (5.28)$$

onde $\rho = \sqrt{k}r$, e H_n são os polinômios de Hermite. Estas funções são solução da equação de segunda ordem Eq. (5.21), mas não necessariamente da Eq. (5.17). No entanto podemos achar a solução desta última fazendo as combinações li-

neares apropriadas de Φ_+ e Φ_- ((SHUI-JIE,)).

Deste modo terminamos a análise devida ao acoplamento escalar quando se tem um potencial linear. Notamos portanto, que embora o potencial seja linear, este não pode corresponder a um campo elétrico constante; já que se este for o caso não poderíamos ter estados ligados como foram obtidos na presente seção. Aliás, devemos exigir que no limite $z \rightarrow \infty$ a função de onda corresponda a uma partícula se propagando à velocidade da luz.

Este comportamento é obtido ao usar o acoplamento mínimo na equação usual de Dirac. Neste caso, é também usado um potencial linear, mas desta vez o potencial é devido sim a um campo elétrico constante ((YUHONG, 1984)).

Portanto, mesmo que a predição da equação de Dirac para o stp de uma partícula em um campo elétrico constante, tem a estrutura de um acoplamento escalar; a predição desta tem o mesmo comportamento que se obtém ao usar o a teoria de Dirac usual para o acoplamento mínimo (pelo menos, no sentido de não ter estados ligados, e o mesmo comportamento assintótico).

Vamos agora estudar o caso de simetria esférica, que é o caso particular do átomo de Hidrogênio. Na próxima seção resolveremos a equação de Dirac para este stp, e encontraremos o espectro de energia, que como veremos tem bom acordo com os valores experimentais.

5.2 SIMETRIA ESFÉRICA

Para um espaço-tempo com simetria esférica temos

$$ds^2 = -\xi (c^2 dt^2) + \xi^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (5.29)$$

onde $\xi = \xi(r)$. Para esta métrica diagonal, definimos de forma natural as tetradas

$$e^a{}_\mu = \text{diag} \left(\sqrt{\xi}, \frac{1}{\sqrt{\xi}}, r, r \sin \theta \right), \quad (5.30)$$

$$e_a{}^\mu = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}, \sqrt{\xi}, \frac{1}{r}, \frac{1}{r \sin \theta} \right), \quad (5.31)$$

a partir das quais obtemos (com $\gamma^\mu = \gamma^a e_a{}^\mu$)

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \frac{\gamma^0}{\sqrt{\xi}} \partial_0 + \gamma^1 \sqrt{\xi} \partial_r + \frac{\gamma^2}{r} \partial_\theta + \frac{\gamma^3}{r \sin \theta} \partial_\phi. \quad (5.32)$$

A fim de separar a parte radial da parte angular, introduzimos o operador K através de

$$\left(\gamma^2 \partial_\theta + \frac{\gamma^3}{\sin \theta} \partial_\phi \right) = -i\gamma^0 \gamma^1 K, \quad (5.33)$$

o qual tem autovalores $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ como é bem conhecido ((SCHRÖDINGER, 1938), (VILLALBA, 1994)), aliás, k está relacionado com o momento angular total j do elétron na forma ((VILLALBA, 1994)-pag:6)

$$|k| = j + \frac{1}{2}, \quad (5.34)$$

sendo j os autovalores do operador momento angular total

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \quad (5.35)$$

onde \vec{L} é o operador momento angular orbital, e \vec{S} é o operador de spin ((DRELL, 1964), (ROSE, 1961), (GREINER, 2000)).

Com esta definição para o operador K se obtém (na Eq. (5.32))

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = \left[\left(\frac{\gamma^0}{\sqrt{\xi}} \partial_0 + \gamma^1 \sqrt{\xi} \partial_r \right) - i\gamma^0 \gamma^1 \frac{K}{r} \right] \psi, \quad (5.36)$$

e deste modo, a equação de Dirac para este stp é

$$\left[\frac{\gamma^0}{\sqrt{\xi}} \partial_0 + \gamma^1 \sqrt{\xi} \partial_r - i\gamma^0 \gamma^1 \frac{K}{r} + \frac{m_0 c}{\hbar} \right] \psi = 0. \quad (5.37)$$

Fazendo agora separação de variáveis

$$\psi(r, t, \theta, \phi) = R(r) \Phi(\theta, \phi) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}, \quad (5.38)$$

obtemos a equação radial dos estados estacionários

$$\left[i\frac{E}{\hbar c \sqrt{\xi}} + \gamma^0 \gamma^1 \sqrt{\xi} \partial_r + i\frac{\gamma^1}{r} k + \frac{m_0 c}{\hbar} \gamma^0 \right] R = 0, \quad (5.39)$$

onde k é o autovalor do operador K , e E , a energia da partícula.

Podemos perceber que nesta última equação aparecem só duas matrizes, desse modo, não é preciso usar matrizes 4×4 . Simplesmente γ^0 e γ^1 podem ser substituídas por matrizes 2×2 . Para isso tomamos a representação

feita no apêndice D, logo temos

$$\gamma^0 = i \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -F \\ G \end{pmatrix}, \quad (5.40)$$

onde também aproveitamos para definir o espinor $R = R_{4 \times 1}$, em termos de dos spinores $F = F_{2 \times 1}$ e $G = G_{2 \times 1}$.

Além do mais, é conveniente fazer $c = \hbar = 1$. Para retornar os valores de c e \hbar , é suficiente trocar m_0 por $m_0 c / \hbar$, e E por $E / c \hbar$.

Com esta representação das matrizes de Dirac e do spinor R , a equação radial se torna

$$\left(\frac{E}{\sqrt{\xi}} - m_0 \right) F + \left(\sqrt{\xi} \partial_r - \frac{k}{r} \right) G = 0, \quad (5.41)$$

$$\left(\frac{E}{\sqrt{\xi}} + m_0 \right) G - \left(\sqrt{\xi} \partial_r + \frac{k}{r} \right) F = 0. \quad (5.42)$$

Na próxima subseção, resolveremos este conjunto de duas equações diferenciais acopladas. Vamos procurar por uma solução em forma de uma série de potências.

5.2.1 Solução das equações radiais

Para resolver as equações (5.41) e (5.42) usaremos o método de Frobenius. Mas, vamos primeiro obter as soluções F e G no limite $r \rightarrow \infty$, isto facilitará propor as soluções em séries de potências. Assim, usando $\sqrt{\xi} = 1 + \lambda/r$ temos (da Eq. (5.42))

$$\left(1 + \frac{\lambda}{r} \right)^2 \frac{dF}{dr} + k \left(1 + \frac{\lambda}{r} \right) \frac{F}{r} = \left[E + m_0 \left(1 + \frac{\lambda}{r} \right) \right] G, \quad (5.43)$$

a outra equação se obtém simplesmente com a substituição

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k \\ E \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -k \\ -E \end{pmatrix}. \quad (5.44)$$

No limite $r \rightarrow \infty$ as quantidades $1/r$ e $1/r^2$ podem ser desprezadas

com respeito a m_0 e E , assim $\xi = 1$ e as equações radiais se reduzem a

$$\frac{dF}{dr} = [E + m_0] G, \quad \frac{dG}{dr} = [-E + m_0] F, \quad (5.45)$$

ou

$$\frac{d^2 F}{dr^2} = (m_0^2 - E^2) F, \quad \frac{d^2 G}{dr^2} = (m_0^2 - E^2) G, \quad (5.46)$$

deste modo, nesse limite as duas funções F e G tem o comportamento

$$e^{\pm\beta r}, \quad \beta = \sqrt{m_0^2 - E^2}. \quad (5.47)$$

É claro que devemos escolher o sinal negativo a fim de evitar um comportamento divergente das funções. Por outro lado, exigimos $E < m_0 c^2$ (neste caso, $c = 1$ por simplicidade) a fim de β ser real; isto é claro dado que a partícula livre tem energia $E_0 = m_0$, mas na presença de interação, a "energia potencial" será negativa tendo portanto uma energia total $E < E_0 = m_0$.

No que segue, é conveniente definir a variável adimensional⁴ $\rho = \beta r$. Com esta redefinição de variável, as equações radiais podem ser rescritas como

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\lambda\beta}{\rho}\right)^2 \frac{dF}{d\rho} + k \left(1 + \frac{\lambda\beta}{\rho}\right) \frac{F}{\rho} \\ = \left[\frac{E}{\beta} + \frac{m_0}{\beta} \left(1 + \frac{\lambda\beta}{\rho}\right)\right] G, \end{aligned} \quad (5.48)$$

a outra equação se obtém simplesmente usando a Eq. (5.44).

Conhecendo estes comportamentos das funções F e G , podemos propor as seguintes soluções em tipo de série

$$F = \sum_{n=0}^N a_n \rho^{n+s} e^{-\rho}, \quad G = \sum_{n=0}^N b_n \rho^{n+s} e^{-\rho}, \quad (5.49)$$

⁴ β tem unidades de $1/\text{comprimento}$, já que estas são as unidades de $m_0 c / \hbar$ e $E / (\hbar c)$.

e substituindo na Eq. (5.48) se obtém

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N (\lambda\beta)^2 a_n [n+s] \rho^{n-3} - \sum_{n=0}^N \left[a_n + \frac{E+m_0}{\beta} b_n \right] \rho^n \\ & + \sum_{n=0}^N \lambda\beta a_n [2(n+s) - \lambda\beta + k] \rho^{n-2} \\ & + \sum_{n=0}^N \left[a_n (n+s - 2\lambda\beta + k) - \lambda m_0 b_n \right] \rho^{n-1} = 0. \end{aligned} \quad (5.50)$$

A partir desta expressão podemos portanto deduzir que $s = 0$, e obter a relação de recorrência para os coeficientes a_n

$$\begin{aligned} & a_{n+3} (\lambda\beta)^2 [n+3] + a_{n+2} (\lambda\beta) [2n+4+k-\lambda\beta] \\ & a_{n+1} [n+1+k-2\lambda\beta] - a_n - \lambda m_0 b_{n+1} - b_n \frac{E+m_0}{\beta} = 0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Do mesmo jeito se obtém a relação de recorrência para b_n ,

$$\begin{aligned} & b_{n+3} (\lambda\beta)^2 [n+3] + b_{n+2} (\lambda\beta) [2n+4-k-\lambda\beta] \\ & b_{n+1} [n+1-k-2\lambda\beta] - b_n - \lambda m_0 a_{n+1} - a_n \frac{-E+m_0}{\beta} = 0. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Por hipótese, nas funções F e G (Eq. (5.49)), o índice n vai desde $n = 0$ até $n = N$, logo, os coeficiente a_n e b_n com $n > N$ são nulos. Tomemos $n = N$ em Eq. (5.51), daí obtemos

$$-a_N - b_N \frac{E+m_0}{\beta} = 0, \quad (5.53)$$

e do mesmo modo, da Eq. (5.52) se tem

$$-b_N - a_N \frac{-E+m_0}{\beta} = 0. \quad (5.54)$$

Desses dois resultados pode obter-se novamente a equação (5.47). Consideremos agora, $n = N - 1$ nas equações (5.51) e (5.52), assim chegamos

às expressões

$$\begin{aligned} a_N(p+k) - \lambda m_0 b_N &= a_{N-1} + \frac{E+m_0}{\beta} b_{N-1}, \\ b_N(p-k) - \lambda m_0 a_N &= b_{N-1} + \frac{-E+m_0}{\beta} a_{N-1}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

com $p = N - 2\lambda\beta$.

Multiplicando por $(E+m_0)/\beta$ na segunda equação e usando a relação $\sqrt{m_0^2 - E^2}/\beta = 1$, temos

$$\frac{E+m_0}{\beta} \left\{ (p-k)b_N - \lambda m_0 a_N \right\} = \frac{E+m_0}{\beta} b_{N-1} + a_{N-1}, \quad (5.56)$$

assim, substituindo na primeira equação em (5.55) se tem

$$\frac{E+m_0}{\beta} (p-k)b_N - \frac{E+m_0}{\beta} \lambda m_0 a_N = a_N(p+k) - \lambda m_0 b_N. \quad (5.57)$$

Expressamos b_N em termos de a_N por meio da Eq. (5.54), logo substituindo em Eq. (5.57) obtemos

$$\left(p + \lambda \frac{m_0^2}{\beta} \right) b_N = 0. \quad (5.58)$$

Assim na equação anterior teremos, com $b_N \neq 0$ e $p = N - 2\lambda\beta$,

$$-2\lambda\beta^2 + N\beta + \lambda m_0^2 = 0, \quad (5.59)$$

ou

$$\beta = \frac{n}{4\lambda} \pm \frac{n}{4\lambda} \sqrt{1 + 8 \left(\frac{\lambda m_0}{n} \right)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.60)$$

a qual contém a informação sobre o espectro de energia, e a que vemos, não depende do número quântico k , isto é, não depende do momento angular j (como foi predito ao final do capítulo anterior).

Dado que λ é negativo, e β positivo, temos de tomar o sinal negativo (dentro das duas opções \pm). Agora, tendo em conta que $\beta = \sqrt{m_0^2 - E^2}$ obtemos a expressão para os níveis de energia

$$E_n^2 = \frac{m_0^2}{2} - \frac{1}{8} \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \left[1 - \sqrt{1 + 8 \left(\frac{\lambda m_0}{n} \right)^2} \right]. \quad (5.61)$$

É apropriado neste momento retornar aos valores de c e \hbar , e tomar a expressão explícita de λ

$$\left(\frac{m_0}{E}\right) \rightarrow \left(\frac{\frac{m_0 c^2}{\hbar c}}{\frac{E}{\hbar c}}\right), \quad \lambda = \frac{q_e q_p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m c^2}, \quad (5.62)$$

onde $q_e = -e$ ($q_p = +e$) é a carga do elétron (do próton), logo temos que fazer a substituição

$$\lambda m_0 \rightarrow \left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m_0 c^2}\right] \frac{m_0 c^2}{\hbar c} = -\alpha, \quad (5.63)$$

onde α é a constante de estrutura fina ((SAKURAI, 1994)-cap:5.3, (JOACHAIN, 1990)-pag:33), o cujo valor é

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137.03599976}. \quad (5.64)$$

Feitas essas substituições obtemos o espectro energético para o átomo de Hidrogênio

$$E_n = m_0 c^2 \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \frac{n^2}{\alpha^2} \left[1 - \sqrt{1 + 8 \frac{\alpha^2}{n^2}}\right]}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.65)$$

Se a Eq. (5.65) representa a solução do átomo de Hidrogênio, esta deve-se reduzir ao espectro obtido pela equação de Schrödinger ((JOACHAIN, 1990)-cap:3)

$$\epsilon_n = -\frac{m_0 c^2}{2} \frac{\alpha^2}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.66)$$

A fim de comparar, usaremos o fato que $\alpha \ll 1$, assim

$$\left[1 - \sqrt{1 + 8 \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2}\right] = -\frac{1}{2} \left(8 \frac{\alpha^2}{n^2}\right) + \frac{1}{8} \left(8 \frac{\alpha^2}{n^2}\right)^2, \quad (5.67)$$

onde usamos a relação

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots \quad (5.68)$$

Assim para os níveis de energia se tem

$$E_n \approx m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n^2}} \approx m_0 c^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2}\right), \quad (5.69)$$

no entanto, esta energia é a energia total relativista do elétron no átomo de Hidrogênio (incluída a energia em repouso). Para obter a energia de ligação, subtraímos a energia de repouso⁵

$$E_n - m_0 c^2 = -m_0 c^2 \frac{\alpha^2}{2n^2}, \quad (5.70)$$

que é exatamente o resultado predito pela equação de Schrödinger.

Este resultado (Eq. (5.65)) foi primeiramente obtido por (BARROS, 2005a), e foi esta a principal motivação para realizarmos esta tese.

Com esta análise sobre o átomo de Hidrogênio, terminamos o estudo da equação de Dirac para o stp, e com isto, cumprimos o propósito do presente trabalho, que consiste em introduzir o conceito de stp, para descrever tanto classicamente (Parte I) quanto quanticamente (Parte II) a interação entre uma partícula carregada e um campo eletromagnético externo.

⁵O simplesmente, como estamos interessados em achar o espectro energético medido nas transições eletrônicas entre diferentes níveis de energia, basta com tomar: $\Delta E = E_n - E_{\tilde{n}}$. Logo, a equação (5.70) se obtém ao tomar $\tilde{n} = \infty$ em Eq. (5.69).

6 CONCLUSÕES, SUMÁRIO E PERSPECTIVAS

6.1 SUMÁRIO

Ao longo desta dissertação procuramos uma compreensão em termos geométricos, da interação entre uma partícula puntual carregada e um campo eletromagnético externo. Neste sentido fizemos uma descrição daquela interação com as mesmas ferramentas matemáticas usadas na teoria da relatividade geral. Isto nos levou a introduzir no capítulo 1 o conceito de stp. Nesse capítulo no limite de baixas velocidades e campos fracos, o conceito de stp leva à famosa força de Lorentz; aliás, termos extras aparecem neste formalismo, os quais foram interpretados como sendo devidos ao campo próprio da partícula.

Isto nos levou (na aproximação linear) na seção 1.2 a interpretar o tensor de Einstein como sendo determinado por um tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$, onde $T_{\mu\nu}$ é devido tanto ao campo externo quanto ao campo próprio da partícula.

Além do mais, no presente trabalho estivemos interessados no caso em que a partícula não está na mesma posição das fontes, uma interpretação possível é dizer que no formalismo do stp "não existem" fontes (estas estão no s-t de fundo). Deste modo, no tensor momento-energia só entram de forma explícita os campos (avaliados na posição da partícula).

Dado que as fontes não entram de maneira direta no stp, isto tem como consequência que a posições das fontes representam singularidades no stp. Este é o caso do campo com simetria esférica, cuja métrica tem uma singularidade na origem. No caso do campo elétrico constante, a singularidade se encontra no infinito.

Devido ao desconhecimento do campo próprio da partícula, e aproveitando o fato de que em muitas situações esse campo é fraco, fizemos uma aproximação na qual o tensor momento-energia é completamente descrito pelo campo externo. A partir desta aproximação obtivemos dois exemplos de stp; o primeiro devido à interação de uma partícula carregada um campo elétrico com simetria esférica, o segundo, devido à interação com um campo elétrico constante. Estes dois tipos de stp são analisados com detalhe no capítulo 3.

A segunda parte deste trabalho teve por objetivo aplicar o conceito de stp (elaborado na Parte I da tese) à descrição quântica da dinâmica de uma partícula carregada. Isto nos levou no capítulo 5 a propor uma equação quântica semelhante à equação de Dirac, que permitisse descrever a dinâmica

da partícula como se esta fosse livre, mas em um s-t curvo (no stp). Assim, em particular, estudamos a solução quântica do stp com simetria esférica, e aplicamos esta solução ao átomo de Hidrogênio. Neste processo fizemos uma predição para o espectro de energia deste átomo, o qual está em bom acordo com as medidas experimentais.

6.2 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

A teoria apresentada, como já dissemos possui forte tendência exploratória, e diversas hipóteses e idéias foram propostas. Ao finalizar essa dissertação, onde as consequências das hipóteses apresentadas foram estudadas, um dos pontos mais interessantes que podemos observar é que apesar desse caráter, em todos os sistemas estudados, os resultados obtidos foram bastante razoáveis.

Pelo descrito ao longo deste trabalho podemos ver que no limite de baixas velocidades e de campos fracos, o formalismo do stp leva as mesmas consequências que o tratamento padrão da interação campo-partícula ao usar a força de Lorentz. Deste modo, nesse limite, podemos dizer que o conceito de stp descreve de forma apropriada esta interação.

Ao comparar os resultados obtidos com os dados experimentais do átomo de Hidrogênio, também observamos excelente acordo. Esses resultados fornecem suporte mais que suficiente para que seja dada continuidade a estudos baseados na teoria proposta.

Para testar a validade geral deste formalismo teríamos que verificar as predições para o caso de campos intensos e altas velocidades. Com o progresso da tecnologia, na atualidade estão sendo manipulados campos cada vez mais altos, e desse modo, acreditamos ser possível encontrar efeitos onde as correções propostas possam ser estimadas.

Neste caso, mesmo que os resultados obtidos sobre a dinâmica em cada um dos stp deduzidos no capítulo 3 parecem razoáveis, estes espaços foram deduzidos usando a equação de campo aproximada, na qual foi desconsiderado o campo próprio da partícula (no tensor momento-energia). A fim de fazer o formalismo do stp mais completo, uma possibilidade é levar em conta este campo próprio.

Por outro lado, na dinâmica quântica é preciso construir uma equação que tenha em conta a interação do campo com o spin da partícula, e o acoplamento spin-órbita (por exemplo, no caso de simetria esférica).

Finalmente, o conceito do stp faz referência somente à interação de uma partícula puntiforme com um campo eletromagnético. No entanto, os experimentos usuais são feitos com correntes e sistemas macroscópicos (não

pontuais). Portanto, se faz necessário que este formalismo seja ampliado a fim de considerar tais situações.

APÊNDICE A – Tensores na relatividade geral

O objetivo deste apêndice é mencionar a modo de revisão, a notação e os conceitos básicos do cálculo tensorial, assim como o seu uso na teoria da relatividade geral.

Alguns livros sobre GR que podem ser úteis ao leitor são: (CARROLL, 2004), (ANDERSON, 1967), (WEINBERG, 1972), (FELICE, 1995). Estes livros contém os conceitos básicos sobre tensores e GR a serem usados neste texto.

A.1 NOTAÇÃO E CONVENÇÕES

Nesta dissertação estamos supondo que o leitor está familiarizado com os fundamentos básicos da GR, do eletromagnetismo e da notação tensorial. No que segue, faremos só um resumo da notação e de alguns conceitos básicos da relatividade geral.

Lembramos o uso padrão da notação x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) para descrever as coordenadas espaço-temporais. No caso especial em que essas coordenadas podem ser separadas em uma parte temporal e uma parte espacial temos que¹

$$x^\mu = (x^0, x^i), \quad x^0 = ct, \quad (x^i) = (x^1, x^2, x^3) = \vec{r}. \quad (\text{A.1})$$

Deste modo no presente trabalho índices latinos ($i, j, k, \dots = 1, 2, 3$) correspondem a coordenadas espaciais enquanto que as coordenadas espaço-temporais se associam aos índices gregos ($\mu, \nu, \rho, \dots = 0, 1, 2, 3$).

Em \mathfrak{R}^3 os vetores base em coordenadas cartesianas são $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ou $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Esses vetores podem ser facilmente identificados com $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ onde $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ ou mais geralmente

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (\text{A.2})$$

Assim, um vetor $\vec{v} = v^x \hat{x} + v^y \hat{y} + v^z \hat{z}$ facilmente se escreve como $v = v^x \partial_x + v^y \partial_y + v^z \partial_z$. Levando esta notação para um espaço-tempo geral temos

$$v = v^0 \partial_0 + v^1 \partial_1 + v^2 \partial_2 + v^3 \partial_3 = v^\mu \partial_\mu, \quad (\text{A.3})$$

onde usamos a convenção de Einstein que será usada ao longo do presente documento. Esta convenção é definida para índices repetidos: sub-índices e super-índices com a mesma letra representam uma somatória. Assim, por

¹Aqui c é a velocidade da luz, t a coordenada temporal e \vec{r} é o vetor posição.

exemplo, $v_\mu v^\mu$ e $v_i v^i$ representam a mesma coisa que

$$\sum_{\mu=0}^3 v_\mu v^\mu, \quad \sum_{i=1}^3 v_i v^i, \quad (\text{A.4})$$

respetivamente.

Associado ao espaço de vetores $v = v^\mu \partial_\mu$ existe o espaço de co-vetores ou 1-formas $\omega = \omega_\mu dx^\mu$, onde por definição, uma 1-forma é uma função do espaço de vetores no conjunto de números reais² na forma

$$\omega(v) = \omega_\mu dx^\mu (v^\alpha \partial_\alpha) = \omega_\mu v^\alpha dx^\mu (\partial_\alpha), \quad (\text{A.5})$$

com

$$dx^\mu (\partial_\nu) := \frac{\partial}{\partial x^\nu} x^\mu = \delta_\mu^\nu, \quad (\text{A.6})$$

onde δ_μ^ν é conhecido como o tensor de Kronecker definido por

$$\delta_\mu^\nu = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu \neq \nu, \\ 1 & \text{se } \mu = \nu. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Deste modo

$$\omega(v) = \omega_\mu v^\alpha \delta_\alpha^\mu = \omega_\mu v^\mu. \quad (\text{A.8})$$

Os vetores v e os co-vetores ω são chamados também tensor uma vez contravariante e tensor uma vez covariante (ou quando não há lugar a confusão simplesmente tensores de ordem um). É possível definir tensores de ordem superior, os quais tem dois ou mais índices tais como: um tensor duas vezes covariante $A = A_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$, um tensor três vezes contravariante $B = B^{\mu\nu\sigma} \partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes \partial_\sigma$. Também é possível construir tensores de caráter misto com componentes covariantes e contravariantes como o tensor

$$T = T^{\mu\nu}{}_\sigma \partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes dx^\sigma, \quad (\text{A.9})$$

o qual é uma vez covariante e duas vezes contravariante.

Em um espaço-tempo métrico (que é o caso de nosso interesse), existe um tensor 2-vezes covariante $g_{\mu\nu}$ que³ por definição permite construir co-vetores por meio de vetores. Isto é, dado o vetor v^μ se define o co-vetor v_μ

²Identificando o espaço-tempo com uma variedade \mathcal{M} , é usual chamar o espaço de vetores e de co-vetores de espaço-tangente e espaço-cotangente respetivamente.

³É usual se referir indistintamente a um tensor e a suas componentes, sem ter que fazer referência explícita à base.

por meio da relação

$$v_\mu = g_{\mu\rho} v^\rho. \quad (\text{A.10})$$

O mapa inverso que permite passar de co-vetores para vetores é definido pela inversa $g^{\mu\nu}$ da métrica, a qual satisfaz a propriedade

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\sigma, \quad (\text{A.11})$$

desse modo temos

$$v^\mu = g^{\mu\rho} v_\rho. \quad (\text{A.12})$$

Assim podemos dizer que os índices são levantados e abaixados pela métrica (e sua inversa). No entanto a métrica só levanta (abaixa) índices em tensores. Lembramos que existem objetos com índices (tais como os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$) os quais não são tensores e por esta razão seus índices não podem ser modificados pela métrica.

Existe uma regra para saber se um objeto T (com índices covariantes ou contravariantes) é ou não um tensor. Primeiro notemos que ao fazer uma transformação de coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'}, \quad (\text{A.13})$$

os vetores base do espaço-tangente ∂_μ transformam de acordo com a regra da cadeia como

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (\text{A.14})$$

Aliás, os co-vetores base dx^μ transformam como

$$dx^\mu \rightarrow dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu. \quad (\text{A.15})$$

Segundo, devemos exigir que o tensor T seja invariante sob quaisquer transformação de coordenadas (ou mudança de base),

$$\begin{aligned} T &= T^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots} (\partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes \dots) \otimes (dx^\rho \otimes dx^\sigma \otimes \dots) \\ &= T^{\mu'\nu'\dots}_{\rho'\sigma'\dots} (\partial_{\mu'} \otimes \partial_{\nu'} \otimes \dots) \otimes (dx^{\rho'} \otimes dx^{\sigma'} \otimes \dots) \\ &= T^{\mu'\nu'\dots}_{\rho'\sigma'\dots} \times \\ &\quad \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \dots \partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes \dots \right) \otimes \left(\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\sigma} \dots dx^\rho \otimes dx^\sigma \otimes \dots \right) \end{aligned}$$

deste modo é preciso que as componentes do tensor T se transformem de

acordo a regra

$$T^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots} = T^{\mu'\nu'\dots}_{\rho'\sigma'\dots} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \dots \right) \left(\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\sigma} \dots \right). \quad (\text{A.16})$$

Um caso especial de tensor é um campo escalar, que é um tensor de ordem zero; isto é, um tensor sem componentes. Este é o caso de uma função ϕ a qual associa um único número real $\phi(p)$ cada ponto p do s-t. Esta função, do mesmo modo que qualquer tensor, permanece invariante sob transformações de coordenadas.

Também será usada a notação da vírgula para nos referir as derivadas parciais de um objeto. Portanto as notações $g_{\rho\sigma,\mu}$ e $\partial_\mu g_{\rho\sigma}$ representam a mesma coisa.

Lembramos que a derivada covariante ∇_μ de um tensor se define em termos dos símbolos de Christoffel na forma seguinte

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots} = & \partial_\alpha T^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots} + \left(\Gamma_{\alpha\lambda}^\mu T^{\lambda\nu\dots}_{\rho\sigma\dots} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu T^{\mu\lambda\dots}_{\rho\sigma\dots} + \dots \right) \\ & - \left(\Gamma_{\alpha\rho}^\lambda T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots} + \Gamma_{\alpha\sigma}^\lambda T^{\mu\nu\dots}_{\rho\lambda\dots} + \dots \right). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

APÊNDICE B – Eletromagnetismo em notação covariante

Neste apêndice faremos um breve resumo do eletromagnetismo em notação tensorial. Na primeira seção vamos mostrar como passar das equações de Maxwell em forma vetorial para sua forma covariante. Em seguida na última seção, consideramos a equação de Lorentz que descreve o movimento de partículas carregadas em presença de campos eletromagnéticos. Por último vamos mencionar alguns trabalhos que tentam adicionar a esta equação de força, o efeito do campo próprio da partícula e os efeitos de reação de radiação.

Alguns livros sobre eletromagnetismo que podem ser úteis ao leitor são: (GRIFFITHS, 1999), (JACKSON, 1998) e (LIFSHITZ, 1987).

B.1 INTERAÇÃO ELETROMAGNÉTICA

No presente trabalho vamos desconsiderar os efeitos da gravitação, isto é, vamos supor que as massas dos sistemas de nosso interesse são pequenas o suficiente para não afetar a dinâmica das partículas de teste. De acordo com a relatividade especial o s-t no qual esses sistemas "moram" é plano, e sua geometria é descrita pela métrica de Minkowski, que em coordenadas cartesianas é

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

É bem conhecido que as equações de Maxwell que descrevem a dinâmica dos campos elétricos e magnéticos podem se escrever em forma tensorial, ou como usualmente se diz: *em forma covariante*. No que segue vamos relembrar como é feito este processo o qual será de muita ajuda no próximo capítulo.

As equações de Maxwell podem ser separadas em uma parte homogênea ((GRIFFITHS, 1999)-cap:7)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0, \quad (\text{B.2})$$

e uma parte não homogênea

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{J}, \quad (\text{B.3})$$

onde ρ é a densidade de carga e \vec{J} o vetor densidade de corrente. As constantes μ_0 e ϵ_0 são a permeabilidade e a permissividade do vácuo respectivamente, as

quais estão relaciona por

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}, \quad (\text{B.4})$$

com c , a velocidade da luz.

Essas equações são válidas em qualquer sistema coordenado. Porém, vamos escolher o sistema de coordenadas cartesianas para reescrevê-las em uma forma sugestiva e análoga à notação tensorial (em forma covariante). Para isto, primeiramente notemos que as componentes cartesianas do rotacional de um vetor qualquer \vec{A} são dadas por

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{A})^x &= \partial_y A_z - \partial_z A_y, \\ (\nabla \times \vec{A})^y &= \partial_z A_x - \partial_x A_z, \\ (\nabla \times \vec{A})^z &= \partial_x A_y - \partial_y A_x, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

ou em forma abreviada

$$(\nabla \times \vec{A})^i = \tilde{\epsilon}^{ijk} \partial_j A_k, \quad (\text{B.6})$$

onde introduzimos o símbolo de Levi-Civita $\tilde{\epsilon}^{ijk}$ o qual é completamente antissimétrico, isto é, ao trocar dois índices contíguos o seu valor se vê modificado por um sinal negativo

$$\tilde{\epsilon}^{ijk} = -\tilde{\epsilon}^{jik} = \tilde{\epsilon}^{jki}. \quad (\text{B.7})$$

Assim, para índices repetidos o símbolo de Levi-Civita é nulo. Além do mais, se tem por definição

$$\tilde{\epsilon}^{123} = 1. \quad (\text{B.8})$$

Agora podemos escrever as equações de Maxwell em forma reduzida

$$\partial_i B^i = 0, \quad \tilde{\epsilon}^{ijk} \partial_j E_k + \partial_t B^i = 0, \quad (\text{B.9})$$

$$\partial_i E^i = \mu_0 c^2 \rho, \quad \tilde{\epsilon}^{ijk} \partial_j B_k - \frac{\partial}{c \partial t} E^i = \mu_0 J^i. \quad (\text{B.10})$$

Podemos perceber que ao considerar as quantidades \vec{B} e \vec{E} como sendo vetores em um espaço euclidiano, os seus índices são levantados e abaixados pela métrica desse espaço, a qual em coordenadas cartesianas é simplesmente o delta de kronecker ($g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} := \delta_V^\mu$). Deste modo temos $B^i = B_i$ e $E^i = E_i$.

A última das equações em Eq. (B.9) sugere definir a quantidade

$$F^{ij} = \tilde{\varepsilon}^{ijk} B_k, \quad \rightarrow \quad B_i = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{ijk} F_{jk}, \quad (\text{B.11})$$

que por construção é antissimétrica nos índices (i, j) e

$$F_{ij} = g_{ir} g_{js} F^{rs} = \delta_{ir} \delta_{js} F^{rs} = F^{ij}. \quad (\text{B.12})$$

Com esta nova notação temos para as equações (B.9)

$$\tilde{\varepsilon}^{ijk} \partial_i F_{jk} = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^{ijk} \left(\partial_j \frac{E_k}{c} + \frac{1}{2} \partial_0 F_{jk} \right) = 0, \quad (\text{B.13})$$

$$\partial_i \frac{E^i}{c} = \mu_0 (c\rho), \quad \partial_j F^{ij} - \partial_0 \frac{E^i}{c} = \mu_0 J^i. \quad (\text{B.14})$$

O termo $\partial_j F^{ij}$ corresponde a um divergente no espaço, no entanto desejamos expressões que sejam covariantes no espaço-tempo. Parece portanto natural definir $\frac{E^i}{c} = -F^{i0}$ e estender o caráter antissimétrico para todos os índices de $F^{\mu\nu}$. Dado que agora estamos incluindo a variável temporal (índice $\mu = 0$) devemos usar a métrica do espaço-tempo $\eta_{\mu\nu}$ em vez de δ_{ij} . Desse modo temos

$$\frac{E_i}{c} = \eta_{ij} E^j = \eta_{ij} F^{0j} = F_i^0 = \eta^{0\mu} F_{\mu i} = -F_{0i}. \quad (\text{B.15})$$

Assim, as equações em (B.13) se tornam

$$\tilde{\varepsilon}^{ijk} \partial_i F_{jk} = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^{ijk} \left(\partial_j F_{k0} + \frac{1}{2} \partial_0 F_{jk} \right) = 0, \quad (\text{B.16})$$

$$\partial_i F^{0i} = \mu_0 (c\rho), \quad \partial_\mu F^{i\mu} = \mu_0 J^i. \quad (\text{B.17})$$

Se definirmos $c\rho$ como a componente temporal de um quadrivetor de corrente

$$c\rho = J^0, \quad \rightarrow \quad J^\mu = (c\rho, J^i), \quad (\text{B.18})$$

as equações não homogêneas de Maxwell podem se escrever juntamente como uma única equação (um divergente no s-t)

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\nu. \quad (\text{B.19})$$

Agora, a primeira e segunda equações homogêneas de Maxwell po-

dem se escrever respetivamente como

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}^{ijk} \partial_i F_{jk} &= 2\tilde{\varepsilon}^{123} \partial_1 F_{23} + 2\tilde{\varepsilon}^{231} \partial_2 F_{31} + 2\tilde{\varepsilon}^{312} \partial_3 F_{12} \\ &= 0 = \partial_1 F_{23} + \partial_3 F_{12} + \partial_2 F_{31},\end{aligned}\quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned}0 &= \partial_j F_{k0} - \partial_k F_{j0} + \partial_0 F_{jk}, \\ &= \partial_j F_{k0} + \partial_0 F_{jk} + \partial_k F_{0j}, \quad j \neq k.\end{aligned}\quad (\text{B.21})$$

Notemos o caráter cíclico dessas equações. Podemos assim escrevê-las em forma compacta

$$\partial_\rho F_{\mu\sigma} + \partial_\sigma F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\sigma\rho} = 0. \quad (\text{B.22})$$

A Eq. (B.22) foi obtida a partir das equações (B.20) e (B.21) sob a suposição que os índices ρ , μ e σ são diferentes. No entanto podemos facilmente ver que Eq. (B.22) é válida em geral. Por exemplo, quando dois índices são iguais (digamos $\rho = \mu$) temos

$$\partial_\mu F_{\mu\sigma} + \partial_\sigma F_{\mu\mu} + \partial_\mu F_{\sigma\mu} = \partial_\mu F_{\mu\sigma} + 0 - \partial_\mu F_{\mu\sigma} = 0, \quad (\text{B.23})$$

portanto podemos concluir que as equações homogêneas de Maxwell são completamente descritas pela Eq. (B.22). Deste modo terminamos de escrever as equações do eletromagnetismo em forma covariante.

A condição de anti-simetria do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ se cumpre automaticamente quando este é definido em termos de um potencial vetorial A^μ a partir da relação

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (\text{B.24})$$

Esta definição para o tensor de campo eletromagnético tem duas consequências imediatas: primeiro, as equações homogêneas de Maxwell se satisfazem automaticamente (devido ao fato que as derivadas comutam)

$$\begin{aligned}&\partial_\rho F_{\mu\sigma} + \partial_\sigma F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\sigma\rho} \\ &= \partial_\rho (\partial_\mu A_\sigma - \partial_\sigma A_\mu) + \partial_\sigma (\partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho) + \partial_\mu (\partial_\sigma A_\rho - \partial_\rho A_\sigma) \\ &= (\partial_\rho \partial_\mu - \partial_\mu \partial_\rho) A_\sigma + (\partial_\sigma \partial_\rho - \partial_\rho \partial_\sigma) A_\mu + (\partial_\mu \partial_\sigma - \partial_\sigma \partial_\mu) A_\rho \\ &= 0,\end{aligned}$$

e segundo, se tem invariância de gauge, isto é, o conjunto de transformações da forma

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \phi, \quad (\text{B.25})$$

deixa invariante o tensor F e portanto as equações de campo (B.19), com ϕ um campo escalar.

B.1.1 Interação de partículas carregadas com o campo eletromagnético

A dinâmica que rege a evolução de uma partícula de teste com carga q (no s-t de Minkowski) é determinada por sua interação com o campo eletromagnético (externo) presente no seu entorno¹.

Sabemos que a força exercida pelos campos elétrico e magnético sobre uma partícula carregada que se move a baixas velocidades ($v \ll c$) é dada pela força de Lorentz ((GRIFFITHS, 1999)-cap:5),

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q \left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right], \quad \rightarrow \quad f^i = q \left[E^i + (\vec{v} \times \vec{B})^i \right], \quad (\text{B.26})$$

ou em termos do tensor eletromagnético

$$f^i = q (cF^{0i} + F^{ij}v_j) = q (cF_0^i + F_j^i v^j). \quad (\text{B.27})$$

Esta equação sugere definir a força sobre uma partícula de uma forma covariante

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu = qF_\rho^\mu U^\rho, \quad U^\rho = \frac{dx^\rho}{d\tau}, \quad (\text{B.28})$$

onde U^ρ é o quadrivetor velocidade, $p^\mu = mU^\mu$ é o quadrimomento linear, τ o tempo próprio da partícula carregada e t o tempo medido pelo observador. Estas duas últimas quantidades estão relacionadas através de

$$(cd\tau)^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \rightarrow \quad 1 = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{r}}{d\tau} \right)^2. \quad (\text{B.29})$$

Usualmente se considera que as equações de Maxwell são um conjunto consistente de equações que descrevem de maneira completa os campos eletromagnéticos. Contudo, a força de Lorentz não conta com esta sorte. Embora esta equação seja consistente matematicamente falando, ela tem só informação sobre os campos externos e não sobre o próprio campo da partícula². Não obstante, é bem conhecido que as cargas aceleradas emitem radiação e assim sua energia não é mais conservada. Isto leva à ideia de que essa radiação emitida deve provocar algum tipo de efeito (força) sobre a própria

¹Vamos desconsiderar forças mecânicas e qualquer outro tipo de força cuja origem não é eletromagnética.

²Isto é precisamente o caso de nosso interesse (pelo menos em uma primeira visão), isto é, não vamos considerar a deformação do stp devido à própria partícula.

partícula. Este efeito é conhecido como *reação de radiação*.

Basicamente todos os trabalhos sobre reação de radiação fazem referência à *Fórmula de Larmor* ((GRIFFITHS, 1999)-cap:11)

$$P = k \frac{q^2}{c^3} \vec{a}^2, \quad k = \frac{1}{6\pi\epsilon_0}, \quad (\text{B.30})$$

onde q é a carga da partícula que está em presença do campo externo, \vec{a} sua aceleração e P representa a potência total (instantânea) radiada pela partícula³. Devido ao fator c^3 no denominador, espera-se portanto que a força de radiação seja pequena nos experimentos usuais, tanto assim que em muitas aplicações práticas ela é desprezível em comparação à força de Lorentz. De fato, uma análise baseada em considerações sobre conservação da energia permite inferir que a força de reação da radiação deve ser da ordem de ((JACKSON, 1998)-cap:16, (GRIFFITHS, 1999)-cap:11)

$$\vec{F}_{rad} = q\vec{E}_{eff}, \quad \vec{E}_{eff} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{q}{c^3} \frac{d}{dt} \vec{a}, \quad (\text{B.31})$$

onde \vec{E}_{eff} representa um campo elétrico efetivo produzido pela partícula acelerada no ponto em que ela se encontra.

Supõe-se que as equações anteriores são válidas só para o limite de baixas velocidades. Existem muitos trabalhos que procuram por uma equação que descreva completa e consistentemente a dinâmica de uma partícula carregada. Entre os mais famosos resultados dessas pesquisas pode-se mencionar: a equação de *Abraham-Lorentz-Dirac* (DIRAC, 1938) e a equação de *Landau-Lifshitz* (LIFSHITZ, 1987). Contudo, elas ainda são consideradas incompletas, aliás, algumas das soluções dessas equações apresentam comportamentos que são vistos como não tendo sentido físico. Referências complementares neste tópico são: (ANDERSON, 1967)-cap:7.17, (FEYNMAN, 1945), (DIRAC, 1938), (ROHRLICH, 1997a, 1997b), (AL., 2009), (AL., 2009) e referências apresentadas nesses artigos.

Porém, a força de Lorentz Eq. (B.28) tem um ampla faixa de validade desde que os campos não sejam muito intensos (ou acelerações muito altas).

Neste trabalho procuramos por um outro tratamento teórico para a interação campo-partícula (uma visão geométrica); deste modo, um teste para esta nova aproximação é que no limite de campo fraco e baixas velocidades as equações de movimento devem corresponder às obtidas com a força de

³Esta equação pode diferir de um texto para outro só na constante k . Esta diferença é devida ao uso de sistemas de unidades distintos. No presente trabalho estamos usando o sistema SI, como por exemplo é feito no Griffiths. Mas em outros textos, como o Jackson, que usa sistema de unidades gaussiano, o fator k é diferente ((JACKSON, 1998)-cap:14).

Lorentz.

APÊNDICE C – Tetradas ou bases não coordenadas

No capítulo 4 estudamos a equação de Dirac em espaços curvos. Para este estudo é de muita ajuda o conceito de tetrada que introduziremos na próxima seção.

C.1 FORMALISMO DE TETRADAS

Seja um s-t equipado de uma métrica g . Deste modo, dado um sistema de coordenadas x^μ o elemento de linha será dado pelo tensor g nessa base

$$g := ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (\text{C.1})$$

onde \otimes é o produto tensorial.

O produto interno entre qualquer par de vetores $u = u^\alpha \partial_\alpha$ e $v = v^\alpha \partial_\alpha$ será determinado pelo tensor métrico na forma

$$\begin{aligned} g(u, v) &= ds^2(u, v) = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \left(u^\alpha \partial_\alpha, v^\beta \partial_\beta \right) \\ &= g_{\mu\nu} u^\alpha v^\beta dx^\mu (\partial_\alpha) dx^\nu (\partial_\beta) \\ &= g_{\mu\nu} u^\alpha v^\beta \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \\ &= g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

onde por definição se tem

$$dx^\mu (\partial_\alpha) := \frac{\partial}{\partial x^\alpha} x^\mu = \delta_\alpha^\mu. \quad (\text{C.3})$$

Seja p um ponto (arbitrário) do s-t, por definição (de variedade)¹ é sempre possível achar um sistema de coordenadas tal que nas proximidades de p o tensor métrico se reduz à métrica de um s-t plano, isto é,

$$g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu}, \quad \partial_\alpha g_{\mu\nu}(p) = 0, \quad (\text{C.4})$$

no entanto, não é possível fazer todas as segundas derivadas se anularem.

Este s-t plano é precisamente o s-t de fundo que utilizamos nos capítulos anteriores (em ausência de gravidade). Se o s-t de fundo é euclidiano sua métrica será dada pelo tensor δ_α^μ , se a métrica é lorentziana a métrica terá alguns termos negativos na sua diagonal, este é o caso da métrica de Minkowski

¹Na visão da GR, um s-t é uma variedade. Um estudo detalhado dos conceitos de variedade e de s-t curvo é dado em (CARROLL, 2004) e (FELICE, 1995).

na qual estamos interessados

$$\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (\text{C.5})$$

Porém, a Eq. (C.4) se satisfaz só nas proximidades de p . Em geral temos $g_{\mu\nu} := g(\partial_\mu, \partial_\nu) \neq \eta_{\mu\nu}$ em qualquer outro ponto. Contudo, é sempre possível achar uma base de vetores e_a e seus duais² e^a tal que

$$ds^2 = \eta_{ab} e^a \otimes e^b. \quad (\text{C.6})$$

Esta é uma base ortonormal no sentido que $g(e_a, e_b) = 0$ se $a \neq b$, e normalizada de acordo com $g(e_a, e_b) = \eta_{ab}$. De fato,

$$\begin{aligned} g(e_a, e_b) &= \eta_{cd} e^c \otimes e^d (e_a, e_b) = \eta_{cd} e^c(e_a) e^d(e_b) \\ &= \eta_{cd} \delta_a^c \delta_b^d = \eta_{ab}, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

em todo o espaço-tempo.

O conjunto de vetores $\{e^a\}$ é uma base para o espaço cotangente (por escolha), assim, cada vetor dx^μ pode ser escrito como uma combinação linear dessa base. Definimos as quantidades e_a^μ (matriz de mudança de base) de forma tal que

$$dx^\mu = e_a^\mu e^a. \quad (\text{C.8})$$

Igualmente, os vetores e^a podem ser escritos em termos da base $\{dx^\mu\}$ pela equação

$$e^a = e^a_\mu dx^\mu. \quad (\text{C.9})$$

É portanto imediato que a matriz $\{e^a_\mu\}$ é a inversa da matriz $\{e_a^\mu\}$, isso pode se expressar por meio das equações

$$e_a^\mu e^a_\nu = \delta_\nu^\mu, \quad e_a^\mu e^b_\mu = \delta_b^a. \quad (\text{C.10})$$

Da mesma maneira, existe uma relação entre as bases $\{e_a\}$ e $\{\partial_\mu\}$. Seja f a matriz mudança de base correspondente, então

$$e_a = f_a^\mu \partial_\mu, \quad \partial_\mu = f^a_\mu e_a, \quad (\text{C.11})$$

²Isto é, a base e^a satisfaz a propriedade: $e^a(e_b) = \delta_b^a$.

mas devido ao fato que e^a são os duais de e_b temos

$$\begin{aligned}\delta_b^a &= e^a(e_b) = e^a_\mu dx^\mu (f_b^\nu \partial_\nu) \\ &= e^a_\mu f_b^\nu dx^\mu (\partial_\nu) = (e^a_\mu f_b^\nu) \delta_\nu^\mu \\ &= e^a_\mu f_b^\mu,\end{aligned}\tag{C.12}$$

logo, f_a^μ é a matriz inversa de e^a_μ . Assim da Eq. (C.10) se segue que $f_a^\mu = e_a^\mu$, e da mesma maneira $f^a_\mu = e^a_\mu$.

O conjunto de vetores e_a são chamados de *tetradas*, do grego *tetradas* "grupo de quatro", ou também *vierbein*, pelo alemão "quatro pernas", ou simplesmente bases ortogonais de acordo com Eq. (C.7).

Também é costume chamar de tetradas ou vierbeins às componentes e_a^μ de e_a , do mesmo modo que costumamos dizer "o vetor v^μ " sabendo que na realidade estas são as componentes do vetor $v = v^\mu \partial_\mu$.

Agora, seja u^a e v^a as componentes dos vetores u e v na base de tetradas e_a , assim, o produto interno entre esses vetores é

$$\begin{aligned}g(u, v) &= \eta_{cd} e^c \otimes e^d (u^a e_a, v^b e_b) \\ &= \eta_{ab} u^a v^b = u_b v^b = u^a v_a,\end{aligned}\tag{C.13}$$

isto é, nesta base os índices são levantados e abaixados com ajuda da métrica plana η .

C.1.1 tetradas vs bases não coordenadas

Devemos observar que em um s-t curvo um conjunto de tetradas será uma base não coordenada. Isto é, em geral os vetores e_a não correspondem a derivadas parciais ∂_a de um sistema coordenado x^a , ou equivalentemente, os vetores duais e^a não correspondem em geral a diferenciais totais dx^a . Esta é uma boa razão de usar índices latinos a, b, \dots para descrever os tetradas (bases não coordenadas) e índices gregos μ, ν, \dots para as bases coordenadas.

Consideremos um s-t \mathcal{M} com simetria esférica

$$ds^2 = -\xi dt^2 + \xi^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,\tag{C.14}$$

com $\xi = \xi(r)$. O conjunto de covetores $\{e^a\}$

$$\begin{aligned} e^0 &= \sqrt{\xi} dt, & e^1 &= \frac{1}{\sqrt{\xi}} dr, \\ e^2 &= r d\theta, & e^3 &= r \sin \theta d\phi, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

forma uma base para o espaço cotangente de \mathcal{M} , aliás, pode-se expressar o tensor métrico nessa base como

$$ds^2 = -e^0 \otimes e^0 + e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3 = \eta_{ab} e^a e^b. \quad (\text{C.16})$$

Desse modo, o conjunto de vetores $\{e^a\}$ é uma base ortonormal ou base de tetradas. De acordo com Eq. (C.15) temos

$$e^a{}_\mu = \text{diag} \left(\sqrt{\xi}, \frac{1}{\sqrt{\xi}}, r, r \sin \theta \right), \quad (\text{C.17})$$

e

$$e_a{}^\mu = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}, \sqrt{\xi}, \frac{1}{r}, \frac{1}{r \sin \theta} \right). \quad (\text{C.18})$$

Consequentemente, as tetradas base do espaço tangente ($e_a = e_a{}^\mu \partial_\mu$) são dadas por

$$\begin{aligned} e_0 &= \frac{1}{\sqrt{\xi}} dt, & e_1 &= \sqrt{\xi} dr, \\ e_2 &= \frac{1}{r} d\theta, & e_3 &= \frac{1}{r \sin \theta} d\phi. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Vejam agora que esta base de tetradas não é uma base coordenada. Se este for o caso, deveria existir um sistema coordenado y^a tal que cada covetor e^a correspondesse ao diferencial total dessas variáveis, isto é,

$$e^a = dy^a. \quad (\text{C.20})$$

Assim por exemplo, $e^2 = r d\theta$ seria um diferencial total, e sabemos pela teoria de formas diferenciais ((CARROLL, 2004)-cap:2.9) que o diferencial de um diferencial total é nulo

$$0 = d(dy^2) = d(e^2) = d(rd\theta) = rd(d\theta) + dr \wedge d\theta. \quad (\text{C.21})$$

onde \wedge é o produto cunha entre formas diferenciais ((CARROLL, 2004)-cap:2.9).

Porém, $d(d\theta) = 0$, e $dr \wedge d\theta \neq 0$, deste modo e^2 não corresponde a um diferencial total, e portanto o conjunto de tetradas e^a não pode ser uma base coordenada.

Consideremos uma rotação da base $e^a \rightarrow \bar{e}^a$, como por exemplo: $e^0 \rightarrow \bar{e}^0$, $e^1 \rightarrow \bar{e}^1$, e

$$\begin{pmatrix} \bar{e}^2 \\ \bar{e}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2 \\ e^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.22})$$

onde em geral o ângulo α pode depender da posição no s-t, isto é: $\alpha = \alpha(x^\mu)$. Podemos perceber que a métrica nesses dois conjuntos de tetradas permanece invariante

$$ds^2 = \eta_{ab} e^a e^b = \eta_{ab} \bar{e}^a \bar{e}^b, \quad (\text{C.23})$$

isto é, a nova base \bar{e}^a é uma base de tetradas.

Notemos que a transformação Eq. (C.22) foi feita sem modificar a base coordenada. Do mesmo jeito pode ser feita uma transformação de coordenadas sem alterar as tetradas e^a , embora é claro que as componentes e^a_μ mudarão.

Assim, é claro que as tetradas e os sistemas coordenados possuem transformações independentes. Em geral (em cada ponto do s-t) podemos fazer qualquer transformação de um conjunto de tetradas e^a para outro $e^{a'} = \Lambda^{a'}_b(x) e^b$; a única condição a se respeitar é que a nova base seja ortonormal no sentido que $g(e_{a'}, e_{b'}) = \eta_{a'b'}$, ou em outras palavras

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{ab} e^a e^b = \eta_{a'b'} e^{a'} e^{b'} \\ &= \eta_{a'b'} \left(\Lambda^{a'}_a e^a \right) \left(\Lambda^{b'}_b e^b \right), \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

do qual se segue que

$$\Lambda^{a'}_a \eta_{a'b'} \Lambda^{b'}_b = \eta_{ab}. \quad (\text{C.25})$$

Sabemos da SR que o conjunto mais geral de transformações que deixa invariante à métrica de Minkowski são as transformações de Lorentz; e devido ao fato que em geral as transformações $\Lambda^{a'}_a(x)$ dependem ponto a ponto do espaço-tempo, nos referimos a estas como *transformações locais de Lorentz*.

Lembramos que sob uma transformação de coordenadas as componentes do vetor $v = v^\mu \partial_\mu$ transformam como

$$v^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} v^\mu, \quad (\text{C.26})$$

igualmente, sob uma transformação local de Lorentz (ou mudança de tetra-

das) as componentes v^a deste vetor³ transformam como

$$v^{a'} = \Lambda^{a'}_a v^a. \quad (\text{C.27})$$

Portanto temos como regra geral: a transformação dos índices latinos é feita com ajuda das transformações de Lorentz, e dos índices gregos com ajuda da matriz jacobiana $\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}$. Assim por exemplo, temos

$$T^{a'\mu'}_{b'\nu'} = \left(\Lambda^{a'}_a \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right) \left(\Lambda^{b'}_{b'} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \right) T^{a\mu}_{b\nu}. \quad (\text{C.28})$$

Por outro lado, consideremos o tensor

$$\begin{aligned} T &= T^{ab} e_a \otimes e_b = T^{a\nu} e_a \otimes \partial_\nu \\ &= T^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu \\ &= T^{\mu b} \partial_\mu \otimes e_b, \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

a relação entre essas componentes $T^{ab}, T^{\mu b}, \dots$ é feita através das matrizes de mudança de base e^a_μ e e^μ_a ,

$$T^{ab} = e^a_\mu T^{\mu b} = e^a_\mu e^b_\nu T^{\mu\nu}, \quad (\text{C.30})$$

ou, para vetores

$$v^a = e^a_\mu v^\mu, \quad v^\mu = e^\mu_a v^a. \quad (\text{C.31})$$

O caso mais importante é o do tensor métrico g

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu &= \eta_{ab} e^a \otimes e^b \\ &= \eta_{ab} (e^a_\mu dx^\mu) \otimes (e^b_\nu dx^\nu) \\ &= \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu (dx^\mu \otimes dx^\nu), \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

logo temos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu. \quad (\text{C.33})$$

Do mesmo jeito pode-se obter

$$\eta_{ab} = e^\mu_a e^\nu_b g_{\mu\nu}. \quad (\text{C.34})$$

³O mesmo vetor $v = v^\mu \partial_\mu$ em uma base não coordenada se escreve como $v = v^a e_a$.

C.2 DERIVADAS E CONEXÃO DE SPIN

A derivada de um vetor $v = v^\mu \partial_\mu$ é dada por

$$\nabla v = \left(\partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu v^\lambda \right) dx^\mu \otimes \partial_\nu, \quad (\text{C.35})$$

onde o símbolo de Christoffel é chamado também de *conexão afim*. Em termos das componentes v^a (em uma base não coordenada) a derivada covariante de v tem a forma

$$\nabla v = \left(\partial_\mu v^a + \omega_{b\mu}^a v^b \right) dx^\mu \otimes e_a, \quad (\text{C.36})$$

onde introduzimos o símbolo $\omega_{b\mu}^a$ chamado *conexão de spin*.

Agora, dado que um vetor não depende da representação em uma base, é claro que Eq. (C.35) e Eq. (C.36) devem coincidir; esta identificação nos permitirá obter uma relação entre as conexões Γ e ω . Da Eq. (C.36) se segue

$$\begin{aligned} \nabla v &= \left[\partial_\mu (e^a_\sigma v^\sigma) + \omega_{b\mu}^a (e^b_\lambda v^\lambda) \right] dx^\mu \otimes (e_a^\nu \partial_\nu) \\ &= e_a^\nu \left[e^a_\sigma (\partial_\mu v^\sigma) + v^\sigma (\partial_\mu e^a_\sigma) + (e^b_\lambda \omega_{b\mu}^a) v^\lambda \right] dx^\mu \otimes \partial_\nu \\ &= \left[\delta^a_\sigma (\partial_\mu v^\sigma) + e_a^\nu (\partial_\mu e^a_\nu + e^b_\lambda \omega_{b\mu}^a) v^\lambda \right] dx^\mu \otimes \partial_\nu, \end{aligned}$$

e ao comparar com Eq. (C.35) temos

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = e_a^\nu \left(\partial_\mu e^a_\lambda + \omega_{b\mu}^a e^b_\lambda \right), \quad (\text{C.37})$$

ou equivalentemente

$$\omega_{b\mu}^a = e_b^\lambda \left(-\partial_\mu e^a_\lambda + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu e^a_\nu \right). \quad (\text{C.38})$$

Deste modo, com ajuda de $\omega_{b\mu}^a$ e $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ é possível definir a derivada covariante de qualquer tensor, em qualquer base (coordenada ou não). Assim por exemplo,

$$\nabla_\mu T_c^a = \partial_\mu T_c^a + \omega_{b\mu}^a T_c^b - \omega_{c\mu}^b T_b^a, \quad (\text{C.39})$$

ou

$$\nabla_\mu T_v^a = \partial_\mu T_v^a + \omega_{b\mu}^a T_v^b - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda T_\lambda^a. \quad (\text{C.40})$$

Observe-se que da Eq. (C.38)

$$\omega_{b\mu}^a e^b_\nu = -\partial_\mu e^a_\nu + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda e^a_\lambda, \quad (\text{C.41})$$

consequentemente a derivada covariante da própria tetrada é nula, isto é

$$\nabla_{\mu} e^a_{\nu} = \partial_{\mu} e^a_{\nu} + \omega^a_{b\mu} e^b_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} e^a_{\lambda} = 0. \quad (\text{C.42})$$

Este resultado é chamado: o *postulado das tetradas*.

É possível fazer o processo inverso ao feito nesta subsecção, no qual se aceita o postulado das tetradas e a partir dele, se obtém a conexão de spin. Exatamente o mesmo ocorre com a conexão afim: se postulamos que a derivada covariante da métrica é nula, isto leva consequentemente a forma explícita dos sÃmbolos de Christoffel ((CARROLL, 2004)-cap:3).

C.2.1 Propriedade antisimétrica da conexão de spin

Nesta subsecção vamos provar uma propriedade importante da conexão $\omega_{ab\mu}$: a propriedade antissimétrica nos índices ab .

Para esta prova, basta portanto mostrar que $\omega_{ab\mu} + \omega_{ba\mu}$ é nulo. De fato, da Eq. (C.38) temos

$$\begin{aligned} \omega_{ab\mu} + \omega_{ba\mu} &= \left(-e_b^{\lambda} \partial_{\mu} e_{a\lambda} + e_b^{\lambda} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} e_{a\nu} \right) \\ &\quad + \left(-e_a^{\lambda} \partial_{\mu} e_{b\lambda} + e_a^{\lambda} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} e_{b\nu} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

Vemos facilmente que

$$e_b^{\lambda} \partial_{\mu} e_{a\lambda} = \partial_{\mu} \left(e_b^{\lambda} e_{a\lambda} \right) - e_{a\lambda} \partial_{\mu} e_b^{\lambda} \quad (\text{C.44})$$

$$= \partial_{\mu} (\eta_{ba}) - e_a^{\lambda} \partial_{\mu} e_{b\lambda}, \quad (\text{C.45})$$

logo,

$$e_b^{\lambda} \partial_{\mu} e_{a\lambda} + e_a^{\lambda} \partial_{\mu} e_{b\lambda} = 0. \quad (\text{C.46})$$

Assim, da Eq. (C.43) se segue que

$$\begin{aligned} \omega_{ab\mu} + \omega_{ba\mu} &= \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \left(e_b^{\lambda} e_{a\nu} + e_a^{\lambda} e_{b\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-g_{\kappa\lambda,\mu} + g_{\mu\kappa,\lambda} + g_{\lambda\mu,\kappa} \right) \left(e_b^{\lambda} e_a^{\kappa} + e_a^{\lambda} e_b^{\kappa} \right) \\ &= \frac{1}{2} g_{\mu\kappa,\lambda} \left(e_b^{\lambda} e_a^{\kappa} + e_a^{\lambda} e_b^{\kappa} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

onde usamos a definição dos sÃmbolos de Christoffel e na última equação eliminamos o termo $(-g_{\kappa\lambda,\mu} + g_{\lambda\mu,\kappa})$ por ser antissimétrico nos índices (λ, κ)

enquanto que $(e_b^\lambda e_a^\kappa + e_a^\lambda e_b^\kappa)$ é simétrico nesses índices.

Agora, considerando a propriedade das tetradas: $g_{\kappa\lambda} = e^c_\kappa e^d_\lambda \eta_{cd}$ obtemos

$$\begin{aligned}
 & (e_b^\lambda e_a^\kappa + e_a^\lambda e_b^\kappa) g_{\mu\kappa,\lambda} & (C.48) \\
 & = (e_b^\lambda e_a^\kappa + e_a^\lambda e_b^\kappa) (e^c_{\kappa,\mu} e^d_\lambda + e^c_\kappa e^d_{\lambda,\mu}) \eta_{cd} \\
 & = e_a^\kappa e^c_{\kappa,\mu} \eta_{cb} + e_b^\kappa e^d_{\kappa,\mu} \eta_{ad} + e_b^\kappa e^c_{\kappa,\mu} \eta_{ac} + e_a^\kappa e^d_{\kappa,\mu} \eta_{bd} \\
 & = 2 (e_a^\kappa e_{b\kappa,\mu} + e_b^\kappa e_{a\kappa,\mu}),
 \end{aligned}$$

assim, Eq. (C.47) se reduz a

$$\omega_{ab\mu} + \omega_{ba\mu} = e_a^\kappa e_{b\kappa,\mu} + e_b^\kappa e_{a\kappa,\mu} = 0, \quad (C.49)$$

onde novamente fizemos uso da equação (C.46). Está portanto provada a propriedade antissimétrica de $\omega_{ab\mu}$.

APÊNDICE D – Equação de Dirac

Vamos fazer um breve resumo de como obter a equação de Dirac. Com esta finalidade vamos estudar primeiramente o caso mais simples, a equação que descreve uma partícula livre em um s-t plano e em coordenadas cartesianas. Algumas referências complementares ao tratamento dado neste apêndice são: (DRELL, 1964), (ROSE, 1961) e (GREINER, 2000).

D.1 PARTÍCULA LIVRE EM UM ESPAÇO-TEMPO PLANO

De acordo com a GR, toda partícula deve satisfazer a relação

$$p^\mu p_\mu = -m_0^2 c^2, \quad p^\mu := m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau} := \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right). \quad (\text{D.1})$$

No caso da SR ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$), esta relação se reduz à famosa equação

$$p^\mu p_\mu = -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 = -m_0^2 c^2, \quad \rightarrow \quad E^2 = (\vec{p}c)^2 + (m_0 c^2)^2. \quad (\text{D.2})$$

Com o objetivo de obter uma equação quântica, se faz a identificação padrão

$$p_\mu = -i\hbar\partial_\mu, \quad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad (\text{D.3})$$

da qual se segue $p^\mu p_\mu = -\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu$, sendo \hbar a constante de Planck.

Logo, de acordo com Eq. (D.1), a função de onda $\psi = \psi(x)$ que descreve o estado quântico de uma partícula deve satisfazer a relação

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0, \quad (\text{D.4})$$

que é conhecida como *equação de Klein-Gordon*. Aplicações desta equação, como também os seus limites podem ser encontradas em livros de mecânica quântica relativística tais como: (DRELL, 1964)-cap:1, (ROSE, 1961)-cap:2 e (GREINER, 2000)-cap:1.

No entanto, em 1928 (DIRAC, 1928) procurou por uma equação que fosse relativisticamente invariante, mas que fosse de primeira ordem nas derivadas (ou no quadrimomento); isto o levou a obter famosa equação que apresentamos a seguir.

A hipótese de Dirac consistiu em supor que a dinâmica de uma partícula livre pode ser descrita por uma equação análoga a Eq. (D.4), mas de primeira ordem nas derivadas

$$\left(\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \psi = 0, \quad (\text{D.5})$$

onde γ^μ são quantidades a se determinar posteriormente. Esta equação deve conter como caso particular a Eq. (D.4) a fim de se cumprir a exigência relativística Eq. (D.2). Vejamos como esta exigência pode ser imposta.

Ao multiplicar à esquerda da Eq. (D.5) pelo termo $(\gamma^\mu \partial_\mu - m_0 c / \hbar)$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \left(\gamma^\nu \partial_\nu + \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \psi \\ &= \left(\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi, \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

onde fizemos a suposição de que cada uma das quantidades γ^μ não depende das variáveis espaço-temporais de modo que comutam com as derivadas. Dirac faz a identificação

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \partial^\mu \partial_\mu, \quad (\text{D.7})$$

e deste modo a equação de Klein-Gordon é recuperada.

Agora a tarefa consiste em achar as quantidades γ^μ que satisfazem a Eq. (D.7). Facilmente observamos que esses objetos não podem ser simplesmente números; assim, o passo seguinte será procurar por um conjunto de 4 matrizes γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) que satisfaçam a equação (D.7).

Já que em geral, as matrizes são objetos que não comutam entre si, usamos a relação

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu}{2} + \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu}{2}, \quad (\text{D.8})$$

para escrever Eq. (D.7) na forma

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} \partial_\mu \partial_\nu, \quad \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu, \quad (\text{D.9})$$

onde $(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \partial_\mu \partial_\nu = 0$ devido à antissimetria do primeiro termo enquanto que $\partial_\mu \partial_\nu$ é simétrico (em $\mu \nu$).

Assim, ao comparar a Eq. (D.6) com a Eq. (D.4) podemos concluir que o anti-comutador das matrizes de Dirac γ^μ deve satisfazer a equação

$$\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (\text{D.10})$$

Na próxima seção, será apresentado um conjunto de matrizes que satisfazem esta propriedade. Aliás, como se verá logo, este conjunto não é único, no entanto, qualquer par de conjuntos de matrizes de Dirac está relacionado por uma transformação de similaridade.

D.2 MATRIZES DE DIRAC

As matrizes "planas" de Dirac são qualquer conjunto de matrizes que satisfaçam a relação de comutação

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}, \quad \eta^{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (\text{D.11})$$

Portanto, $(\gamma^a)^2 = 1$ para cada $a = 1, 2, 3$. Seja λ^a um autovalor da matriz γ^a e X um autovetor associado a esse autovalor, desse modo se tem

$$\gamma^a X = \lambda^a X, \quad 1 \cdot X = (\gamma^a)^2 X = (\lambda^a)^2 X. \quad (\text{D.12})$$

Assim, necessariamente $(\lambda^a)^2 = 1$, ou $\lambda^a = \pm 1$. Logo, a matriz diagonalizada¹ de γ^a terá somente os números ± 1 na sua diagonal. O mesmo tratamento pode ser feito para γ^0 e obteremos que seus autovalores são $\lambda^a = \pm i$.

Outra das propriedades dessas matrizes é que elas todas têm traço nulo. Para ver isto, lembremos que

$$\text{Tr}[AB] = \text{Tr}[BA]. \quad (\text{D.13})$$

Vamos calcular o traço de γ^a ($a = 0, 1, 2, 3$). Para isso consideremos outra matriz qualquer γ^b ($b \neq a$ e $b = 1, 2, 3$) de forma que $(\gamma^b)^2 = 1$ e $\gamma^a \gamma^b = -\gamma^b \gamma^a$; deste modo se tem

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^a] &= \text{Tr}\left[\gamma^a (\gamma^b)^2\right] = \text{Tr}\left[(\gamma^a \gamma^b) \gamma^b\right] \\ &= \text{Tr}\left[\gamma^b (\gamma^a \gamma^b)\right] = -\text{Tr}\left[\gamma^b (\gamma^b \gamma^a)\right] = -\text{Tr}[\gamma^a], \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

logo, dado que $\text{Tr}[\gamma^a] = -\text{Tr}[\gamma^a]$, é necessário que $\text{Tr}[\gamma^a] = 0$. Aliás, como o traço de uma matriz é igual ao traço de sua matriz diagonalizada, teremos

$$\text{Tr}[\gamma^a] = \text{Tr}[\text{diag}(\pm 1, \pm 1, \dots)] = 0, \quad a = 1, 2, 3. \quad (\text{D.15})$$

$$\text{Tr}[\gamma^0] = \text{Tr}[\text{diag}(\pm i, \pm i, \dots)] = 0, \quad (\text{D.16})$$

isto leva a que a dimensão n das matrizes tem que ser par ($n = 2, 4, \dots$) No entanto, não existem 4 matrizes 2×2 que satisfaçam as relações de anticomutação. Deste modo podemos procurar para o caso 4×4 . Dessa vez, um

¹De álgebra linear sabemos que, para qualquer matriz A existe uma matriz inversível S tal que a matriz $D = S^{-1}AS$ é diagonal, aliás, os coeficientes da diagonal em D , são os autovalores de A . É a esta matriz diagonal a que fazemos referência nesta seção.

conjunto de matrizes de Dirac é

$$\gamma^0 = i \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.17})$$

onde σ^j são as famosas matrizes 2×2 de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.18})$$

O conjunto de matrizes Eq. (D.17) não é único, porém, ele é único no sentido em que qualquer outro conjunto de matrizes 4×4 que satisfaça a relação de anticomutação Eq. (D.11) está relacionado com as matrizes Eq. (D.17) através de uma transformação unitária; isto é, dados dois conjuntos de matrizes $\{\gamma^a\}$ e $\{\tilde{\gamma}^a\}$ existe uma matriz unitária U tal que ((AL, 1983))

$$\tilde{\gamma}^a = U^{-1} \gamma^a U. \quad (\text{D.19})$$

Agora que obtivemos uma representação das matrizes de Dirac, podemos voltar para Eq. (D.5).

D.3 INTERAÇÃO NA EQUAÇÃO DE DIRAC

A equação de Dirac

$$\left(\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \psi = 0, \quad (\text{D.20})$$

descreve a dinâmica de uma partícula livre de spin $\frac{1}{2}$. Agora, quando a partícula está interagindo com um campo eletromagnético, é usual introduzir o potencial da interação por meio do acoplamento mínimo, o qual se descreve a seguir.

Consideremos uma partícula livre, descrita pelas variáveis generalizadas x^μ e momento canônico \tilde{p}^μ . Então, é um resultado da mecânica clássica ((GOLDSTEIN, 1980)-ch:2.6) que na presença de um campo eletromagnético (descrito pelo potencial A^μ), o momento conjugado p^μ associado à variável x^μ , é dado por

$$p_\mu = \tilde{p}_\mu + q \frac{A_\mu}{c}, \quad (\text{D.21})$$

sendo q a carga da partícula. Deste modo, o acoplamento mínimo consiste em passar do momento $\tilde{p}_\mu = -i\hbar\partial_\mu$ para o momento $p_\mu = -i\hbar\partial_\mu + \frac{q}{c}A_\mu$, ou

equivalentemente, temos que fazer a substituição

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + i \frac{q}{\hbar c} A_\mu. \quad (\text{D.22})$$

Em alguns casos, se introduz a interação na equação de Dirac por meio de um acoplamento escalar. Nesse caso, o que se faz é definir uma massa efetiva

$$m = m(x) = m_0 + V(x), \quad (\text{D.23})$$

sendo $V(x^\mu)$ um potencial (o potencial escalar) de interação. Uma aplicação deste método é feita no capítulo 5.

Porém, o nosso trabalho consiste em procurar um outro caminho no qual a interação possa ser incluída como um efeito geométrico, isto é como uma deformação da geometria do *stp*. Logo, ao invés de usar o acoplamento mínimo ou o acoplamento escalar, devemos procurar uma equação tipo Dirac que descreva a dinâmica de uma partícula livre, mas em um *s-t* curvo. Isto é feito nos capítulos 4 e 5.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AL., J. R. et. Horizons of strong field physics.arXiv:0911.5556, 2009.
- AL, P. S. et. The dirac equation in orthogonal coordinate systems?:local representation. J. Phys. A: Math. Gen., v. 16, p. 1999–2016, 1983.
- AL., S. G. et. Phys. Rev. D, v. 80, p. 024031, 2009.
- ANDERSON, J. Principles of Relativistic Physics. [S.l.]: Academic Press Inc., 1967.
- ARMINJON, M. Dirac-type equations in a gravitational field, with vector wave function. Found. Phys., v. 38, p. 1020–1045, 2008.
- ASPDEN, H. Physics Unified. [S.l.]: Sabberton Publications, 1980.
- BARNETT, L. The Universe and Dr. Einstein, Physics Unified. New York: William Morrow, 1966.
- BARROS, C. Eur. Phys. J. C, v. 42, p. 119–126, 2005.
- BARROS, C. arXiv e-print: physics/0509011, 2005.
- BARROS, C. Eur. Phys. J. C, v. 45, p. 421–425, 2006.
- BOUDA, A.; BELABBAS, A. A possible reinterpretation of einstein's equations. Int. J. Theor. Phys., v. 49, p. 2630–2639, 2010.
- CARROLL, S. An Introduction to General Relativity, Spacetime and Geometry. [S.l.]: Addison Wesley, 2004.
- COHEN, D. B. . J.J. Math. Phys., v. 7, p. 238, 1966.
- DIRAC, P. The quantum theory of the electron. Proc. R. Soc. Lond. A, p. 610–624, 1928.
- DIRAC, P. Classical theory of radiating eletrons. Proc. R. Soc. Lond. A, v. 167, p. 148–169, 1938.
- DRELL, J. B. . S. d. Relativistic Quantum Mechanics. [S.l.]: McGraw-Hill, Inc., 1964.
- FELICE, F. de. Relativity on Curved Manifolds. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, 1995.
- FEYNMAN, J. W. . R. Rev. Mod. Phy., v. 17, p. 157–181, 1945.
- FOCK, V. A. Geometrisierung der diracschen theorie des elektrons. Z. Phys., v. 57, p. 261–277, 1929.
- GOLDSTEIN, H. Classical Mechanics. Second Ed. [S.l.]: Addison Wesley, 1980.

- GREINER, W. Relativistic Quantum Mechanics: wave equations, Third Ed. [S.l.]: Springer-Verlag, 2000.
- GRIFFITHS, D. Introduction to Electrodynamics. Third Ed. [S.l.]: Pearson Addison Wesley, 1999.
- GRIFFITHS, D. Introduction to Elementary Particles. 2nd revised Ed. [S.l.]: Wiley VHC Verlag GmbH & co., 2008.
- JACKSON, J. Classical Electrodynamics. Third Ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1998.
- JOACHAIN, B. B. . C. Physics of Atoms and Molecules. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1990.
- KNUTH, D. Computer programming as an art. Communications of the ACM, 17, v. 17, n. 12, p. 667–673, 1974.
- LIFSHITZ, L. D. L. . E. M. The Classical Theory of the Fields, Fourth Ed. Oxford: Pergamon Press Ltd, 1987.
- PAULI, W. Theory of Relativity. New York: Pergamon Press Ltd, 1958.
- REIFLER, M. A. . F. Basic quantum mechanics for three dirac equations in a curved spacetime. Arxiv:0807.0570v3, 2010.
- ROHRLICH, F. Am. J. Phys., v. 65, p. 1051, 1997.
- ROHRLICH, F. Classical self-force. Phys. Rev. D, v. 60, p. 084017, 1997.
- ROSE, M. Relativistic Electron Theory. [S.l.]: John Willey & Sons, 1961.
- SAKURAI, J. Modern Quantum Mechanics (Revised Ed.). [S.l.]: Addison Wesley, 1994.
- SCHRÖDINGER, E. Commentationes Pontf. Acad. Sci., v. 2, p. 321, 1938.
- SHUI-JIE, L. C.-Y. . Q. Exact solution to the one-dimensional dirac equation of linear potential. Chin. Phys. Soc., v. 16, n. 4.
- VILLALBA, V. The angular momentum operator in the dirac equation. Arxiv:hep-th/9405.0333., 1994.
- WALD, R. General Relativity. [S.l.]: The University of Chicago Press, 1984.
- WEINBERG, S. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1972.
- WEYL, H. Ann. der Phys.
- WEYL, H. Elektron und gravitation. Z. Phys., v. 56, p. 330–352, 1929.
- WHEELER, D. B. . J. Interaction of neutrinos and gravitational fields. Rev. Mod. Phys., v. 29, p. 465, 1957.

YUHONG, S. R.-K. . Z. Exact solution of the dirac equation with a linear scalar confining potential in a uniform electric field. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 17, p. 851–858, 1984.