

Chádia Gomes Sebba

**ANÁLISE MULTIOBJETIVO E MULTICRITÉRIO DE
PORTFÓLIOS DE CONTRATOS DE ENERGIA ELÉTRICA**

Dissertação submetida ao Programa de Pós- Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de mestre em Engenharia Elétrica
Orientador: Prof. Erlon Cristian Finardi, Dr. Eng.

Florianópolis
2012

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Sebba, Chádia Gomes

Análise Multiobjetivo e Multicritério de Portfólios de Contratos de Energia Elétrica [dissertação] / Chádia Gomes Sebba ; orientador, Erlon Cristian Finardi - Florianópolis, SC, 2012.

135 p. ; 21cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Inclui referências

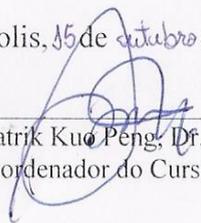
1. Engenharia Elétrica. 2. Algoritmos Genéticos Multiobjetivo. 3. PROMETHEE II. 4. Gerenciamento de Risco. 5. Teoria de Portfólios de Markowitz. I. Finardi, Erlon Cristian. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

Chádia Gomes Sebba

ANÁLISE MULTI OBJETIVO E MULTICRITÉRIO DE PORTFÓLIOS DE CONTRATOS DE ENERGIA ELÉTRICA

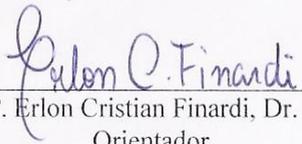
Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 15 de outubro de 2012.



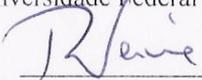
Prof. Patrik Kuo Peng, Dr. INPT
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

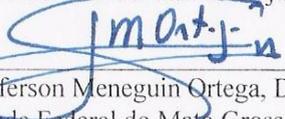


Prof. Erlon Cristian Finardi, Dr. Eng
Orientador

Universidade Federal de Santa Catarina



Prof. Raimundo Celeste Ghizoni Teive, Dr. Eng.
Universidade do Vale do Itajaí



Prof. Jeferson Meneguim Ortega, Dr. Eng.
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul



Profa. Fabiola Sena Vieira, Dra. Eng.
Tractebel Energia

Aos meus pais pelo apoio incondicional em todos os momentos da minha vida. Aos meus irmãos pela amizade e companheirismo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me fortalecer e me guiar em todos os momentos da minha vida.

Agradeço ao professor Raimundo C. Ghizoni Teive, pelo tempo dedicado e pelos conhecimentos transmitidos para que essa obra se tornasse realidade.

Agradeço ao professor Erlon Cristian Finardi por toda ajuda na realização deste trabalho.

Agradeço a todos os professores do Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia elétrica pelas atividades ministradas e ensinamentos durante esse período.

À banca examinadora, Fabiola Sena Vieira e Jeferson Meneguim Ortega pela colaboração em tornar o trabalho válido como fonte de conhecimento.

Aos meus colegas do LABPLAN que me ajudaram e passaram comigo por momentos de alegria e aflição durante esse momento de formação.

Aos professores da Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica pelos ensinamentos necessários para minha formação.

Ao professor Colemar Arruda, grande incentivador desta jornada acadêmica.

Aos colegas da Automatize Engenharia pelo apoio nesta fase final.

Aos amigos que sempre estão ao meu lado, me incentivando a superar os desafios da minha vida.

"A mente que se abre a uma nova ideia jamais
voltará ao seu tamanho original."
Albert Einstein

RESUMO

Palavras-chave: Algoritmos Genéticos Multiobjetivo, PROMETHEE II, Gerenciamento de Risco, Teoria de Portfólios de Markowitz, Var, CVaR, Derivativos.

Após a abertura do mercado de energia elétrica à competição, surgiu o Ambiente de Contratação Livre (ACL), cujos participantes passaram a lidar com as incertezas dadas pela volatilidade dos preços da energia. O uso de contratos bilaterais, opções do tipo *call* e *put* são usados como *hedging*, i.e., proteção contra os riscos associados à venda no mercado *spot*. A mensuração do risco tornou-se uma tarefa importante para evitar que os agentes desse mercado sofressem com a variação brusca dos preços. Como ferramentas de análise de riscos são usadas técnicas de portfólios de Markowitz, *Value-at-Risk* (VaR) e *Conditional-Value-at-Risk* (CVaR). Este trabalho trata de uma otimização multiobjetivo, em que um comercializador pretende vender uma quantidade específica de energia através de contratos bilaterais, venda de *call* e compra de *put*, além da venda no mercado *spot*. A otimização é resolvida através do algoritmo genético multiobjetivo (AGMO) *Nondominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II). As funções objetivo do problema são o retorno, a variância de Markowitz, o VaR e o CVaR, que são usadas como critérios para avaliar as soluções encontradas. O NSGA-II encontra um conjunto de soluções ótimas, chamadas soluções de compromisso ou não dominadas, que formam a chamada fronteira de Pareto. Dessa fronteira o comercializador precisa escolher uma solução para celebrar a venda de energia. O método de análise multicritério *Preference Ranking Method for Enrichment Evaluation II* (PROMETHEE II) é usado, então, para ordenar as alternativas encontradas pelo AGMO, de acordo com as preferências do comercializador.

ABSTRACT

Keywords: Multiobjective Genetic Algorithm, PROMETHEE II, Risk Management, Markowitz's Portfolio Selection, Var, CVaR, Derivatives.

After the electricity market was opened to competition, the Free Trading Environment (ACL) was created, whose members started to deal with the uncertainties given by the spot prices volatility. The use of bilateral contracts, options like call and put are used as hedging, to hedge against the risks associated with selling in the spot market. The measurement of risk has become an important task to prevent the agents of the market against sharp falls in prices. Some tools of risk analysis are used such as portfolios of Markowitz, Value-at-Risk (VaR) and Conditional-Value-at-Risk (CVaR). This dissertation deals with a multiobjective optimization problem, where a supplier wishes to sell a specific amount of energy through bilateral contracts, sale of call and put buying, and selling in the spot market. The optimization problem is solved by multiobjective genetic algorithm Nondominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA II). The objective functions of the problem are the return, the Markowitz variance, VaR and CVaR, which are used as criteria to evaluate solutions. The NSGA II finds a set of optimal solutions, called non dominated solutions, which compose called trade-off solutions, which form the so-called Pareto frontier. Within the frontier, the trader must choose a solution that best fits for his decision profile, involving his risk aversion level. The method of multicriteria analysis Preference Ranking Method for Enrichment Evaluation II (PROMETHEE II) is then used to rank the alternatives found by MOGA, according to the preferences of the decision maker.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - representação cromossomial.....	44
Figura 2 - cromossomo e seus pontos de corte.....	47
Figura 3 - Crossover de um ponto.....	47
Figura 4 - Grafo de sobreclassificação.....	72
Figura 1 - Fluxograma do algoritmo genético multiobjetivo.....	81
Figura 8 - Representação binária de um cromossomo.....	83
Figura 9 - Cálculo do <i>crawding distance</i> . Fonte: Deb et. al., 2002.....	87
Figura 8 - Seleção da nova população.....	89
Figura 9 - Resultados do problema 1.....	96
Figura 10 - Expectativa de Custo Marginal de Operação (Base Mensal).....	97
Figura 11 - Fronteira de Pareto com 300 indivíduos após 600 gerações.....	101
Figura 12 - Fronteira de Pareto para retorno e CVaR.....	102
Figura 13 - Gráfico do retorno pela variância da fronteira de Pareto...103	
Figura 14 - Fronteira sem usar distância de preenchimento.....	104
Figura 15 - Fronteira sem usar distância de preenchimento ampliada.105	
Figura 16 - Fronteira de Pareto para retorno e variância com 4 funções objetivos.....	106
Figura 17 - Fronteira de Pareto para retorno e CVaR com 4 funções objetivos.....	106
Figura 18 - Fronteira de Pareto para retorno e VaR com 4 funções objetivos.....	107
Figura 19 - Indivíduos não dominados ao longo das gerações.....	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Custo e potência dos carros.....	59
Tabela 2 - Exemplo de cálculo dos Valores Globais.....	60
Tabela 3- Escala Fundamental de Saaty.....	61
Tabela 4 - Índices de consistência randômicos.....	63
Tabela 5 - família PROMETHEE.....	66
Tabela 6 - Funções de preferências do PROMETHEE.....	69
Tabela 7 - população com seu valor aptidão e distância de preenchimento.....	90
Tabela 8 - Torneios e seleção de pais.....	90
Tabela 9 - cruzamento.....	91
Tabela 10 - Composição do contrato de compra de energia elétrica.....	96
Tabela 11 - Contratos considerados para venda de energia elétrica.....	97
Tabela 12 - Código binário da porcentagem equivalente a cada contrato de energia.....	98
Tabela 13 - Exemplo de quatro portfólios.....	99
Tabela 14 - Parâmetros do AGMO.....	102
Tabela 15 - Contratos da fronteira de Pareto.....	103
Tabela 16 - dados de entrada do método PROMETHEE II.....	109
Tabela 17 - as dez melhores soluções.....	109
Tabela 18 - Classificação das soluções para CVaR 70.....	110
Tabela 19 - Classificação das soluções para variância 70.....	111
Tabela 20 - Classificação das soluções para VaR 40.....	111
Tabela 21 - Classificação das soluções para VaR 60.....	112

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AE – Algoritmo Evolucionário
AG – Algoritmo Genético
AGMO – Algoritmo Genético Multiobjetivo
AHP – Analytic Hierarchy Process (ou Método de Análise Hierárquica)
AMD – Apoio Multicritério à Decisão (Multi Critéria Decison Making)
CFaR - Cash Flow at Risk (Fluxo de Caixa em Risco)
CVaR – Conditional Value-at-Risk (Valor em Risco Condicional)
DM – Decision Maker (Tomador de Decisão)
EaR - Earnings at Risk (Lucros em Risco)
Electre – Elimination and (et) Choice Translating
GAIA – Geometrical Analysis for Interactive Aid
GDSS – Group Decision Support System
KKT - Karush-Kuhn-Tucker
LCP – Linear Complementarity Problem
Macbeth – Measuring Attractiveness by a Categorical based Evaluation Technique
MAUT – Multiattribute Utility Theory
MCDA – Multi-Criteria Decision Aid
MOGA – Muli-Objective Genetic Algorithm
NPGA – Nighed Pareto Genetic Algorithm
NSGA – Nondominated Sorting Genetic Algorithm
NSGA-II – Nondominated Sorting Genetic Algorithm II
PROMETHEE – Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations
PSO – Particle Swarm Optimization (Otimização Nuvem de Partículas)
RAROC – Risk Adjusted Return on Capital (ou Retorno Ajustado ao Risco no Capital)
SMART – Simple Multi Attribute Rating Technique
Smarter – Simple Multiattribute Rating Technique Exploiting Ranks
SSM – Soft System Methodology
TODIM – Tomada de Decisão Interativa Multicritério
Utadis – Utilités Additives Discriminantes
VaR – Value-at-Risk (Valor em Risco)
VEGA – Vector Evaluated Genetic Algorithm

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	23
1.2	OBJETIVOS.....	24
1.2.1	Objetivo Geral.....	24
1.2.2	Objetivos Específicos.....	24
1.3	JUSTIFICATIVA.....	24
0	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	27
2.1	Introdução.....	27
2.2	COMERCIALIZAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA.....	27
2.3	Análise de risco.....	30
2.4	CONCLUSÃO.....	37
3	ALGORITMOS GENÉTICOS MULTI OBJETIVOS E MÉTODOS MULTICRITÉRIOS DE APOIO À DECISÃO.....	37
3.1	Introdução.....	39
3.2	OTIMIZAÇÃO MULTI OBJETIVO.....	39
3.2.1	Algoritmos Genéticos Multiobjetivo (AGMO).....	44
3.2.2	Exemplos AG Multiobjetivos.....	49
3.3	Métodos Multicritério de Apoio à Decisão.....	52
3.3.1	Escolas de Apoio à Decisão.....	56
3.3.1.1	Escola Americana.....	56
3.3.1.2	Escola Francesa.....	65
3.3.2	Pesos dos Critérios.....	75
3.4	COMENTÁRIOS FINAIS.....	77
4	DESENVOLVIMENTO.....	79
4.1	Introdução.....	79
4.2	Metodologia Proposta.....	79
4.2.1	Algoritmo Genético Multiobjetivo (AGMO).....	80
4.2.1.1	Funções Objetivo.....	82
4.2.1.2	Cromossomo proposto.....	83
4.2.1.3	População Inicial.....	83
4.2.1.4	Critério de Parada.....	84
4.2.1.5	Formação da população P.....	84
4.2.1.6	Cálculo da Aptidão.....	84
4.2.1.7	Cálculo da Distância de Preenchimento (\mathfrak{D}).....	74
4.2.1.8	Formação da população (N_{nova}).....	76
4.2.1.9	Seleção.....	90
4.2.1.10	Cruzamento.....	91
4.2.1.11	Mutação.....	91
4.2.1.12	Saída.....	91
4.2.2	Análise Multicritério.....	92

4.3	CONCLUSÃO.....	93
5	ANÁLISE DE RESULTADOS	95
5.1	Introdução.....	95
5.2	Análise nsga-ii.....	95
5.2.1	Problema 1.....	95
5.2.2	Problema 2.....	96
5.3	ANÁLISE PROMETHEE II.....	108
5.4	CONCLUSÃO.....	113
6	CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	115
6.1	CONCLUSÃO.....	115
6.2	RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	116
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	117
	APÊNDICE A- Resultados encontrados para retorno, variância, VaR e CVaR.....	125
	APÊNDICE B- Resultados encontrados para retorno, variância, VaR e CVaR.....	127
	APÊNDICE C – Resultados e simulação do PROMETHEE II.....	131

1. INTRODUÇÃO

1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA

O modelo do setor elétrico brasileiro tem como condição principal a desverticalização do sistema, ou seja, a geração, transmissão, distribuição e comercialização foram separadas em empresas distintas. Este sistema não permite competição na transmissão e na distribuição, pois são considerados monopólios naturais e proporciona a competição na geração e comercialização. A reestruturação do setor acaba com a remuneração garantida e com a nivelção tarifária, assim os agentes estão expostos à volatilidade do preço da energia. A reformulação também garantiu livre acesso ao sistema de transmissão, e criou o Ambiente de Contratação Livre (ACL) e o ambiente de Contratação Regulada (ACR).

No ACL surge a figura do comercializador, que serve como intermediário (*broker*) entre vendedores e compradores de energia. Para minimizar a exposição ao risco do preço da eletricidade, técnicas de mensuração e mitigação de riscos começaram a ser implementada neste setor pelos agentes. Contudo, não se pode esperar que todos os comercializadores tenham a mesma noção de risco, pois a aversão ao risco varia de acordo com cada agente. Com isso, vários tipos de contratações são estudados a fim de analisar aquele que forneça melhor custo benefício, ou seja, o que possui menor risco de perdas garantindo um retorno aceitável. Temos, então, um problema multiobjetivo, com funções conflitantes, na qual se torna difícil a escolha dos contratos a serem firmados.

A otimização dos problemas multiobjetivos fornecem uma vasta opção de contratos considerados “ótimos” no sentido de Pareto, sendo a escolha de um deles uma tarefa difícil, pois na maioria das vezes aquele que fornece o melhor resultado em um objetivo não possui um resultado favorável no outro.

Assim, torna-se importante o uso de ferramentas de análise multicritério para auxiliar na escolha de um pequeno conjunto de contratos, ou então de apenas um contrato que melhor se adapte às necessidades do decisor. Essa ferramenta modela o nível de aversão ao risco do tomador de decisão, inserindo-o ao problema.

O trabalho está organizado em seis capítulos. Neste primeiro capítulo são apresentados os objetivos gerais e específicos e a justificativa do trabalho. O Capítulo 2 contém a revisão bibliográfica sobre as técnicas multiobjetivo usadas e sobre os tipos de análises de riscos feitas. O Capítulo 3 aborda as várias técnicas de AGMO e de métodos clássicos usados para problemas multiobjetivos, e dos métodos usadas para análi-

se multicritério. O Capítulo 4 consiste na descrição da metodologia adotada para o desenvolvimento do trabalho, que explicita o método NSGA II utilizado para otimizar e o método PROMETHEE II implementado para classificar as soluções. O Capítulo 5 faz a análise dos resultados, comprovando a eficácia do método. E finalmente o capítulo 6 traz a conclusões.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. Objetivo Geral

Este trabalho visa desenvolver uma metodologia e um modelo computacional para definição de portfólios ótimos de contratos de energia, aplicando-se técnicas de otimização multiobjetivo e análise multicritério adequadas ao problema.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Modelar contratos derivativos como proteção à volatilidade do preço da energia elétrica.
- Mensurar o risco de cada carteira através de três técnicas: variância, VaR e CVaR.
- Encontrar um conjunto ótimo de Pareto das possíveis soluções da carteira de contratos de energia elétrica através do algoritmo genético multiobjetivo NSGA II.
- Implementar o método PROMETHEE II para classificar as soluções encontradas pelo AGMO, em ordem de importância para o decisor.

1.3. JUSTIFICATIVA

No ambiente de comercialização de eletricidade, os participantes, sujeitos aos riscos associados à volatilidade do preço da energia, foram forçados a adotar ferramentas financeiras para reduzir as suas exposições ao mercado de curto prazo. A instabilidade do preço da energia elétrica traz grandes consequências para os agentes comercializadores deste mercado. Um preço muito alto pode quebrar empresas compradoras, assim como preços muito baixos prejudicam as empresas vendedoras. Prever o preço da energia é uma tarefa difícil, mas necessária para os agentes deste mercado. As empresas irão definir suas estratégias de compra/venda de acordo com previsão encontrada.

Encontrar uma carteira que mitigue os riscos associados à volatilidade do preço da energia, sem que se percam os retornos financeiros favoráveis tornou-se uma tarefa difícil para os agentes do mercado livre. Devido à dificuldade em trabalhar com problemas multiobjetivos, o uso de algoritmos genéticos, proporciona uma busca paralela, em que se trabalha com várias soluções ao mesmo tempo e em diferentes espaços de soluções, evitando vastos recursos computacionais.

A aplicação deste método vem sendo usada, para manter um retorno aceitável e com baixos índices de risco. Portanto, este trabalho usa o algoritmo genético multiobjectivo Nondominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA II) para encontrar as melhores soluções de compromisso entre retorno e risco, usando vários tipos de contratos de venda de energia: venda por contrato bilateral, venda de opções do tipo call, compra de opções do tipo put e venda no mercado spot.

Como o método fornece um conjunto com várias soluções consideradas ótimas no sentido de Pareto, tem-se outro problema: escolher uma única solução ou um pequeno conjunto. Para tal fim, a técnica de análise multicritério Preference Ranking Method for Enrichment Evaluation II (PROMETHEE II) é usada, pois incorpora ao problema as preferências do decisor em relação aos critérios, buscando a modelagem do seu nível de aversão ao risco.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados alguns trabalhos desenvolvidos na área de comercialização no mercado de energia elétrica. Os estudos abordam as novas possibilidades que a competição trouxe aos agentes deste mercado, particularmente aos agentes ligados às atividades de geração e comercialização de energia elétrica. Este novo cenário trouxe para estes agentes e aos compradores possibilidades de grandes perdas, assim como possibilidade de altos lucros, em função do bom ou mau gerenciamento das incertezas e riscos intrínsecos a estas atividades.

2.2. COMERCIALIZAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA

A desregulamentação da indústria de energia elétrica introduziu a competitividade e passou a tratar a eletricidade como uma *commodity*. O objetivo esperado por essa reestruturação era atrair investimentos privados, aumentar a eficiência, melhorar a parte técnica, aumentar a satisfação dos clientes e diminuir o preço final da energia (Bajpai e Singh, 2004).

No início deste processo, controlar a geração e equilibrá-la com a demanda, para então despachá-la em tempo real e de forma otimizada, considerando as restrições do sistema de transmissão parecia não funcionar junto com a comercialização no mercado *spot* e por contratos. Contudo, países pioneiros como a Inglaterra e o País de Gales promoveram a reestruturação do mercado comprovando sua viabilidade (Stephenson e Paun, 2001).

A comercialização expandiu seus horizontes, por exemplo, as geradoras podem escolher vender sua produção por contratos derivativos a um preço acordado entre ele e o comprador ou pode vender no mercado *spot*. Seus compradores também mudaram, agora além dos distribuidores, existem os grandes consumidores e os comercializadores de energia. Em alguns mercados o comprador pode ofertar sua demanda de energia e o preço pelo qual quer pagar (Bajpai e Singh, 2004).

Esta liberdade na comercialização possibilitou o gerador de escolher vender energia da forma que lhe renda lucros aceitáveis, mitigando os riscos. No entanto, o gerador tem que resolver o despacho econômico minuto a minuto e planejar a agenda horária, considerando o lado financeiro, as restrições físicas e perdas na transmissão da unidade. Em Denton et al (2003) um gerador termelétrico tem que prever não só o preço

da venda de energia como também deve prever o preço do seu combustível. Em Cabero et al (2010), por exemplo, é proposto a um gerador otimizar seu lucro negociando a médio prazo contratos a termo e venda no spot, mas somente em um mercado. Já Liu e Wu (2006), estudam a venda de energia considerando esses dois tipos de contratos só que em submercados diferentes. Em Azevedo et al (2007) já são inclusos contratos a termo, spot e opções na carteira de contratos.

Arfux e Teive (2012) aplicam programação estocástica para representar a incerteza do preço da energia no mercado de curto prazo, chamada de preço da liquidação de diferenças (PLD). Seu problema é aplicado aos geradores interligados ao sistema elétrico brasileiro, que querem se proteger contra a variação brusca no preço da energia através de contratos bilaterais.

Já em Feng et al (2010) o problema do gerador em vender energia e se proteger dos riscos associados à sua variabilidade nos preços é resolvido por um algoritmo genético (AG). O trabalho propõe otimizar uma carteira de contratos usando a utilidade esperada como função a ser maximizada através do AG. Também é proposto usar a técnica monte carlo para simular o preço da energia.

Em relação aos tipos de comercialização, a compra/venda *spot* é aquele onde a comercialização é feita no mercado de curto prazo, cujo preço é definido pelo operador do mercado. Já o contrato a termo são contratos bilaterais, onde as duas partes decidem o preço, a quantidade de energia, o local de entrega e o período (Azevedo et al, 2007). O contrato de opção tem seu valor derivado do valor da energia no mercado spot. São quatro tipos existente: compra de *call*, venda de *call*, compra de *put* e venda de *put*. Quem compra um contrato é o titular e tem o direito de exercer ou não este contrato.

No entanto, para ter esse direito o vendedor do contrato (lançador) recebe um prêmio, por se expor ao risco. A *call* dá direito ao seu titular de comprar energia a um preço pré-definido no contrato, caso o preço spot seja maior que o preço de exercício. Já a *put* dá direito ao seu titular de vender energia ao preço acordado com seu lançador, caso o preço no spot seja menor do que o preço de exercício (Oliveira, 2006).

Este mesmo autor considera em seu estudo quatro tipos de contratações: bilateral, spot, call e put. O prêmio da opções é definido pelo método da árvore binomial recombinante.

Para que o sistema funcione e o despacho seja otimizado é necessário a figura do operador independente do sistema. Pois, segundo Sherstha et al (2005) o único interesse dos geradores é maximizar seu lucro, e se preocupar com as incertezas causadas pela flutuação dos pre-

ços, reserva de água (para hidrelétrica) ou preço do combustível (para termelétricas) e por possível falhas do seu sistema.

A transmissão é considerada um monopólio natural, portanto, neste novo cenário ela permanece como tal para evitar a duplicidade do sistema, evitar altos investimentos que seriam necessários para novas construções e para manter o sistema interconectado, melhorando sua eficiência, confiabilidade e desempenho. Além de que, é implementado o livre acesso ao sistema de transmissão para permitir que tanto os geradores escolham seus compradores como os compradores escolham seus fornecedores independente do lugar (Arfux, 2004).

No entanto, nos sistemas reais as limitações da capacidade do sistema de transmissão restringe a participação dos geradores nos submercados existentes. Surgem então outras incertezas relacionadas ao impacto das operações de mercado sobre fluxo físico, ao investimento em novas usinas e à necessidade de redes mais flexíveis e robustas para o ambiente competitivo. Nesse contexto Minoia et al (2006) propõe uma ferramenta para avaliação da rede de transmissão de referência nos termos econômicos usando a teoria de equilíbrio de Nash do subjogo perfeito, onde as estratégias adotadas tem que ser um equilíbrio de Nash em sua totalidade e para cada subjogo. O primeiro nível do jogo corresponde à escolha da topologia de rede ótima e o restante do jogo representa a interação entre os produtores de energia em um determinado horizonte de tempo.

Já os consumidores livres podem escolher de quem comprar energia e negociar o preço pago. Estudos como o de Villalva e Ramos (2003) propõem a consumidores industriais a criar um portfólio que contenha não só o tipo de contrato a negociar, mas também a própria geração. A cogeração também é abordada no trabalho de Street et al (2009), só que além de produzirem para consumo próprio, o excedente pode ser vendido no mercado.

Surge também a figura do comercializador que compra energia dos produtores e vendem aos seus consumidores. Segundo Gabriel et al (2006) os contratos com os geradores costumam ser bilaterais, para que possam garantir o fornecimento aos seus compradores. No entanto, alguns comercializadores usam de outros tipos de contratação para se protegerem contra os riscos. Ressalta-se também, que este agente deve se preocupar tanto com o preço com que se compra energia, como com o preço de venda da mesma, assim como com a quantidade de carga contratada e vendida. Um cálculo errado pode quebrar uma empresa. Oliveira (2006) e Guder (2009), também trabalham com a figura do comer-

cializador de energia, propondo técnicas para otimizar os contratos de venda, dado que a quantidade de energia comprada já está definida.

2.3. ANÁLISE DE RISCO

A competitividade, a impossibilidade de estocar energia em larga escala e as limitações físicas do sistema de distribuição aumentaram a volatilidade dos preços da energia, gerando um sério problema para os agentes do mercado. A forma de gerenciar esse risco pode trazer benefícios ou perdas para os geradores, comercializadores e compradores de eletricidade (Liu et al, 2006). A fim de minimizar os riscos, ferramentas, como contratos derivativos, são negociados no mercado financeiro. (Vehvilainen e Keppo, 2003).

No ambiente de comercialização as avaliações de riscos podem ser divididos segundo Dahlgren et al (2003) em sete tipos: conceitos gerais de avaliações de riscos, análise de decisão do fornecedor, previsão de preços no mercado competitivo, técnicas de proteção (*hedging*), planejamento de recursos, análise de mercado e experiências de operação de mercado. Este mesmo autor cita algumas técnicas de avaliações usadas, tal como o *VaR (Value-at-Risk)*, para medir a possível perda do valor presente de um fluxo de caixa futuro em um horizonte de tempo definido para um dado nível de confiança.

Outras derivações mais novas das técnica de gerenciamento de riscos são o *EaR (Earnings at Risk)* e o *CFaR (Cash Flow at Risk)*. O *EaR* mede as mudanças tanto nos contratos físicos como nos contratos financeiros em um dado período de tempo, para medir as mudanças ocorridas nos ganhos. O *CFaR* foca em um período de tempo específico e mede as mudanças no fluxo de caixa devido à liquidação tanto dos contratos financeiros como dos contratos físicos, dentro do período. O *CVaR (Conditional-Value-at-Risk)* também é usado como exemplo de avaliação de risco, sendo considerado melhor que o *VaR*, pois este método fornece a média da perda do fluxo de caixa que excede o *VaR*.

Guder (2009) usa as técnicas *VaR*, *CVaR* e variância de Markowitz para mensurar o risco das carteiras de contratos de energia, que juntamente com os retornos esperados de cada carteira formam as funções objetivos a serem otimizadas. O resultado da otimização fornece um conjunto ótimo no sentido de Pareto de portfólios. Dahlgren et al (2003) conseguem mostrar em seu trabalho a utilidade das ferramentas de avaliações de riscos, demonstrando que um agente de mercado pode lucrar mais ao gerenciar sua forma de compra e venda de energia. Des-

taca-se também que o uso do CVaR é mais recomendado para compor um portfólio, pois o expõe menos a riscos extremos.

Ainda assim, em alguns trabalhos como o de Villalva e Ramos (2003) é proposto um modelo de otimização de contratos de energia a médio prazo para consumidores industriais, sem considerar avaliações de riscos ou proteção contra riscos (*hedging*). O objetivo é minimizar o custo de fornecimento de energia, tendo como restrições a operação do sistema de cogeração e do boiler, o balanço de energia térmica e elétrica e os contratos de energia.

Neste trabalho, o consumidor pode escolher somente um tipo de contrato de energia elétrica para comprar energia da rede. Suas opções são contratos com preços que variam de acordo com o período em que estão, ou contratos com preço fixo anual para um dado consumo, ou contratos com um custo derivado do consumo anual a um preço final no mercado spot e por último, contratos que possuem um piso e teto para os preços spot de energia. O problema é formulado como um modelo de programação linear inteira mista. Apesar de não considerar os riscos, segundo os autores os resultados encontrados são satisfatórios.

O trabalho de Carrion et al (2007), considera um grande consumidor de energia, cujo objetivo também é minimizar seu custo. A diferença reside na mensuração do risco pela técnica do *Conditional-Value-at-Risk* (CVaR) na escolha do melhor portfólio de compra. O nível de contratação é feito mensalmente, com decisões a serem tomadas semanalmente sobre quais tipos de contratos utilizarem. O problema é modelado como uma programação inteira estocástica multiestágio, onde o preço é tratado como uma variável estocástica.

Desta forma, uma árvore de cenários é criada pela técnica ARIMA (*Auto Regressive Integrated Moving Average*) com várias possibilidades de preços. Para redução do número de cenários, a técnica de distância Kantorovich, é aplicada a árvore, para que o problema possa ser computacionalmente tratável e ser solucionado pelo método *branch-and-cut*. A modelagem de Carrion et al (2007) aplicada ao mercado espanhol mostra que a inserção da análise de risco, via CVaR, ao problema, promove a contratação bilateral de energia. Consequentemente o custo esperado da aquisição de energia é maior. No entanto, o risco associado a tais contratos são menores.

Cabero et al (2010) consideram em seu trabalho que as companhias geradoras de energia, por exemplo, estão expostas a riscos operacionais e riscos de mercados. Por riscos operacionais podem ser citados falhas em equipamentos das usinas, afluições abaixo do necessário em hidrelétricas, flutuação da demanda. Para risco de mercado tem se a va-

riação do preço de energia elétrica ou do combustível (para usinas termelétricas), variação na taxa de juros, dentre outros.

Ainda em Cabero et al (2010), é proposto um modelo para aumentar o lucro e gerenciar a exposição ao risco das geradoras a médio prazo. Seu objetivo de maximizar o lucro leva em consideração à venda de energia no mercado spot e venda por contratos a termo (*forward contracts*). O risco é mensurado pelo CVaR para um dado nível de confiança estipulado pelo gerador e usado como uma restrição do problema.

Para solucionar o problema foi proposto um modelo de complementaridade linear (*LCP – Linear Complementarity Problem*) formulado pelas condições de otimalidade Karush-Kuhn-Tucker (KKT) de primeira ordem. Por ser um problema de grande porte, são usadas técnicas de decomposição de Benders para resolver o LCP.

Liu e Wu (2006), também abordam a venda de energia elétrica de um gerador térmico, tanto no mercado spot, como por contratos. No entanto, há a distinção de mercados causados pelo congestionamento da rede de transmissão, gerando submercados com preços spot diferentes. A função a ser maximizada não é o retorno do gerador, e sim sua função utilidade, que modela a preferência de risco do decisor. Seus componentes, retorno esperado e preferência de risco (calculado aqui pelo VaR), geram um problema de programação quadrática. Os resultados encontrados no trabalho mostram que quanto mais avesso ao risco é um agente gerador, mais contratos a termo são firmados e quanto menos avesso ao risco, mais energia é comercializada no mercado spot.

Bjorgan et al (1999) também usa a função utilidade em seu trabalho, no entanto, de forma diferente de Liu e Wu (2006). Primeiro é encontrada a fronteira de Pareto, que fornece um conjunto ótimo de soluções considerando duas funções objetivo: o retorno e o risco. Em seguida, faz-se a otimização da utilidade esperada do decisor para encontrar a função que tangencia a fronteira de Pareto. O ponto de encontro da função utilidade com a fronteira é a solução do problema. Cada solução representa um conjunto de ações de um gerador que inclui o montante de energia a ser negociado em contratos futuros, o montante de energia ofertado no mercado spot e o planejamento da produção (em caso de usinas termelétricas).

Da mesma forma em Vehvilainen e Keppo (2003) é utilizado também como função objetivo a utilidade esperada do retorno do portfólio. O problema é inicialmente formulado como estocástico, mas é transformado em um problema de programação não-linear determinístico, usando a série de Taylor para isso. Em seguida, pelo método Monte Carlo são simulados os fatores estocásticos, tais como preço spot, custo

marginal e processo de consumo. O risco agregado ao problema é dado pelo VaR.

O problema é resolvido pelo método de projeção do gradiente de Rosen, que projeta a direção de busca das soluções no subespaço tangente das restrições ativas. Os autores chamam atenção para a previsão de preços de energia, como sendo uma tarefa que exige cuidados em sua elaboração para evitar especulações. A metodologia proposta por este trabalho pode ser aplicada tanto para consumidores quanto para geradores.

Pensando ainda nos geradores, Azevedo et al (2007) propõe uma abordagem diferente para encontrar um portfólio ótimo de contratos de energia a curto prazo, usando técnicas de inteligência artificial, a otimização por nuvem de partículas (PSO – Particle Swarm Optimization). Neste trabalho o risco é agregado ao problema como uma função utilidade da variância que capta o *tradeoff* entre o retorno esperado e sua variância. Segundo os autores este método é melhor do que o VaR, porque este último gera uma restrição difícil para a resolução do problema. A previsão do valor da energia é feita usando técnicas de redes neurais artificiais e *clustering*. Os geradores neste trabalho já contam com uma possibilidade de um portfólio mais variado, pois pode ser formado por contratos a termo, por spot ou por opções.

A avaliação do risco é abordada também para concessionárias de energia elétrica. Uma distribuidora de energia segundo Karandikar et al (2010) é um intermediário financeiro, que compra energia das geradoras e vende aos consumidores, com a garantia de um serviço com qualidade. A concessionária de energia precisa atender a uma carga previamente definida a uma tarifa determinada pelo órgão regulador. No entanto, a compra da energia, por parte da distribuidora, é feita em um mercado competitivo sujeito a variações bruscas do preço a curto prazo. Consequentemente, a volatilidade do preço torna-se um risco de perdas na receita.

Neste sentido, Xu et al (2006) apresentam um problema típico de uma concessionária de energia elétrica, que já possui sua demanda de carga fixa. O gerenciamento do risco é feito a médio prazo, sendo este, diferentemente de outros trabalhos, mensurado pela semi-variância das transações feitas no mercado spot. Como sua receita pela venda de energia elétrica é fixa, já que seu preço de venda é fixo, o problema então está em minimizar o custo da compra de eletricidade, para então aumentar seu lucro. As opções para aquisição de energia são: contratos de opções

call ou put, contratos *strips*¹, produção própria e compra no mercado spot.

Para melhorar o desempenho do algoritmo, a restrição de obrigação de atendimento de carga é adicionada ao problema em forma de penalidade quadrática. Para resolvê-lo, é usado a relaxação lagrangeana-surrogate, onde primeiramente é aplicada a relaxação surrogate, que substitui as restrições relaxadas por apenas uma. Depois, aplica-se a relaxação lagrangeana da restrição. Em seguida, o problema principal está em encontrar o conjunto ótimo de multiplicadores para maximizar a função dual surrogate.

A aplicação deste método em Xu et al (2006) mostrou que o uso da semi-variância para mensuração risco é mais eficaz para diminuir os custos da empresa do que não considerar os riscos ou usar a variância.

O trabalho de Karandikar et al (2010) faz um estudo à frente de Xu et al (2006) ao considerar uma distribuidora em dois ambientes: um competitivo e outro sem competição. No mercado sem competição há concorrência somente na esfera dos geradores. Já no mercado competitivo além de existir a concorrência entre geradores, ela existe entre os distribuidores, pois considera-se que cada concessionária tem uma parte dos consumidores fixos e outra parte maleável, que pode escolher seu fornecedor de acordo com as ofertas feitas por cada um. No entanto, são consideradas compras de energia somente no mercado spot ou por contratos bilaterais, o que diminui bastante a possibilidade de proteção das distribuidoras.

O risco é mensurado pelo retorno ajustado ao risco no capital (*RAROC – risk adjusted return on capital*), que é uma relação entre o retorno esperado e o capital econômico. Para um distribuidor avesso ao risco, deve-se maximizar a função RAROC, já para o tomador de risco deve-se maximizar o retorno esperado.

O trabalho de Hatami et al (2009) abrange estudos não só para geradores ou distribuidoras, mas sim para qualquer comercializador que possa produzir eletricidade ou então comprá-la e revendê-la aos consumidores. Assim, seu objetivo está em minimizar a compra de energia e maximizar seu lucro com a venda em um horizonte de médio prazo. Para adquirir energia, pode-se escolher entre quatro formas diferentes: por contrato bilateral ou call, no mercado spot ou por produção própria. Para

¹ Strips são contratos de compra/venda de energia a um preço fixo em um determinado período antes da data de operação. A compra/venda de eletricidade pode ser feita por exemplo somente no horário de pico de um dia útil no período acordado (Xu et al, 2006).

venda, assume-se que há competição entre os participantes, sendo assim, necessária a determinação do preço de venda. O problema é formulado como um modelo de programação estocástica inteiro misto resolvido em dois estágios por um algoritmo de programação dinâmica estocástica. A análise do risco é feita somente na compra de eletricidade usando o método CVaR, considerado o mais apropriado segundo os autores.

A modelagem do preço de energia no mercado spot é dado pelo método *generalized autoregressive conditional heteroskedasticity jump* (CARCH-jump) e a carga a ser atendida é modelada pelo método *generalized autoregressive conditional heteroskedasticity* (CARCH). Ambos métodos modelam o comportamento dinâmico de suas variáveis ao inserir em seu modelo com uma variável determinística e uma estocástica. Os resultados encontrados mostram que a diversificação da compra/produção de energia elétrica permite que o vendedor aumente seu lucro considerando um dado nível de confiança.

Diferentemente da maioria dos trabalhos anteriores, Yau et al (2001) não usa contratos bilaterais para gerenciar seu risco, mas sim contratos personalizados, que podem incluir características dos contratos por diferença, contratos de opções *swing*. O contrato por diferença possui um preço de exercício acordado entre vendedor e comprador. Caso o preço no mercado spot seja maior do que o preço de exercício, gerador deve pagar a diferença entre esses dois valores ao vendedor de energia, caso o preço spot seja menos, então o vendedor deve pagar a diferença ao gerador. Já a opção *swing* é um contrato que permite a compra/venda de energia, a um preço definido em dado período e com flexibilidade na quantidade entregada.

Yau et al (2001) têm em comum com vários autores o uso do CVaR como técnica de análise de risco, pois esta lhe dá a média das perdas para um certo nível de confiança. O problema a ser otimizado é formulado como um modelo de programação estocástica em dois estágios, cuja função objetivo é a minimização das perdas dada pelo CVaR. A solução é encontrada em dois estágios, o primeiro estágio determina qual tipo de contrato incluir no portfólio e em qual mercado e o segundo estágio determina a quantidade de energia vendida/comprada nos períodos futuros.

O modelo é aplicado para um decisor neutro ao risco, ou seja, que não considera a análise de risco e tem como objetivo minimizar o custo da geração de eletricidade, compra no mercado spot e bilateral e diminuir a venda spot. Depois o modelo é aplicado considerando o risco, como mencionado anteriormente, com o objetivo de minimizar as perdas. Os resultados comprovam que no primeiro caso, a otimização encontra so-

luções com menores custos, no entanto sujeitas a maiores riscos, ou seja, a maiores perdas. Já, ao levar em consideração a análise do risco, o custo dos contratos podem ser um pouco maiores, mas a confiança em não gerar perdas é maior.

Estudos mais recentes apresentam as fontes renováveis de energia tais como, energia solar, energia eólica, PCH (pequenas centrais hidrelétricas), cogeração de energia, como possibilidades de investimentos. A preocupação com o agravamento do efeito estufa está levando muito países a investirem nesses tipos de fontes. No entanto, a sazonalidade e a variação do tempo fazem desse tipo de produção ser mais caro e menos confiável para suprir a demanda necessária.

Pensando nisso Street et al (2009) utiliza uma combinação de contratos firmados com PCHs e cogeração de bagaço de cana para entregar o montante de energia vendido em contratos e maximizar suas receitas. Esta combinação é possível, pois o período seco coincide com a época de colheita da cana, que gera os resíduos para serem queimados na produção de eletricidade. Entre os geradores e os consumidores estão os comercializadores, cujo papel neste trabalho é comprar o direito de produção de energia das PCHs e dos cogeneradores e vender contratos de quantidade de energia firme. O comercializador agora terá que definir a quantidade de energia comprada de cada gerador para que ele possa suprir sua demanda. O problema também é modelado com base em um modelo de programação estocástica em dois estágios e resolvido por programação linear. O risco de produção e o risco de preço que o comercializador está sujeito o leva a usar o CVaR para mensurá-lo, sendo introduzido ao problema como uma restrição.

Mais uma vez, o uso do CVaR mostra que a receita esperada encontrada é menor do que a receita esperada para uma solução neutra ao risco. No entanto, a possibilidade de perdas é bem maior na solução neutra ao risco do que na solução avessa ao risco.

A maioria dos trabalhos mencionados anteriormente usa técnicas de otimização consideradas clássicas. No entanto, artigos como o de Ngatchou et al (2005) e Skolpadungket et al (2007) usam algoritmos genéticos multiobjectivos (AGMO) para encontrar o portfólio ótimo. Vários AG, tais como Vector Evaluated Genetic Algorithm (VEGA), Fuzzy VEGA, Multiobjective Optimization Genetic Algorithm (MOGA), Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2 (SPEA2) e Non-dominated Sorting Genetic Algorithm 2 (NSGA2), tem seus desempenhos comparados.

Diferente dos métodos clássicos, que transformam um problema multiobjetivo em um problema com um objetivo, os AGMO consideram

todas as funções objetivo em sua otimização dando igual importância a elas. A teoria de Fronteira de Pareto é utilizada pelos AG mencionados acima, com exceção do VEGA, para encontrar o conjunto ótimo de carteiras. Em WeChen et al (2006), Hang e Szeto (2002) também aplicam AG para encontrar portfólios ótimos considerando riscos associados. Os portfólios encontrados nestes trabalhos são do mercado financeiro, podendo ser aplicado a qualquer ativo.

A aplicação de AG a problemas de energia pode ser visto em Wang et al (2009) e Shrestha et al (2005). O primeiro tem um portfólio com possibilidades de compra no spot, por contratos a termo, por opções do tipo *call* e contratos de interrupção de carga. Assim, Wang et al (2009) precisa maximizar a receita esperada de acordo com o risco, dado pelo CVaR. Shrestha et al (2005), propõe estratégias para gerenciar o risco das geradoras calculado pela média-variância. Estratégias de ofertas baseada em previsões do preço da energia e de venda por contratos a termo são analisadas. Novamente, o estudo mostra que geradores avessos a risco lucram menos do que aqueles que não consideram risco, no entanto, correm menos riscos de no futuro terem grandes perdas.

2.4. CONCLUSÃO

Pelo exposto na seção anterior, percebe-se que a comercialização de energia elétrica é um problema complexo. Há estudos aplicados a comercializadores, grandes consumidores e geradores que fornecem soluções a curto e longo prazo que diminuem os riscos associados à volatilidade do preço da energia elétrica. Contratos a termo, futuros, de opções e spot são algumas ferramentas estudadas em conjunto para mitigar as perdas de renda no futuro.

A mensuração e avaliação do risco, seja pela variância, VaR, CVaR, CFaR ou qualquer outro método, tornaram-se uma ferramenta decisiva na escolha da carteira de contratos de compra/venda. Sendo assim, os agentes do setor tem em mãos um problema multiobjetivo, em que além de considerar o montante gasto ou o lucro obtido também considera o risco de perdas associado à carteira de contratos firmada.

Os métodos de otimização, tanto os clássicos como os heurísticos e os métodos de apoio à decisão, são aplicados aos problemas para encontrar o portfólio ótimo, que é aquele que fornece o melhor *tradeoff* entre o lucro e risco.

3. ALGORITMOS GENÉTICOS MULTI OBJETIVOS E MÉTODOS MULTICRITÉRIOS DE APOIO À DECISÃO

3.1. INTRODUÇÃO

Este capítulo aborda o AG como técnica de otimização multiobjetivo. Neste caso, o AG encontra várias soluções ótimas no sentido de Pareto, às quais são soluções de compromisso dadas as restrições e objetivos considerados. Para escolher somente uma alternativa, condizente com as preferências do tomador de decisão, são descritas técnicas de análise multicritério.

3.2. OTIMIZAÇÃO MULTI OBJETIVO

Os Algoritmos Genéticos (AG) fazem parte dos chamados Algoritmos Evolucionários (AE), que são heurísticas² baseados na teoria da evolução das espécies de Charles Darwin. Segundo esta teoria as plantas e animais de uma mesma espécie presentes em determinado ecossistema competem entre si pelos recursos disponíveis. Aqueles com maior capacidade para adquirirem recursos se sobressairão aos mais fracos, gerando uma população de descendentes com maioria formada pelos fortes e com maior probabilidade de gerarem descendentes mais adaptados ao ecossistema em que vivem. A adaptação dos seres ao ambiente em que se localizam pode ocorrer devido à mutação genética, recombinação genética, seleção natural e isolamentos (Sivanandam e Deepa, 2008).

Os AE são inspirados na teoria da evolução, traduzindo seus princípios de funcionamento em algoritmos para encontrar a solução ótima de um problema. Segundo Skolpadungket et al (2007), as várias técnicas usadas para solucionar o problema da otimização implica no uso de um amplo número de combinação de estados, que cresce exponencialmente com o tamanho do problema tornando-o computacionalmente intratável. O AE evita este problema, pois o trata de forma paralela e possui a capacidade de explorar as semelhanças das soluções por recombinações, aproximando-se do seu objetivo final em uma única iteração, ao invés de fazer várias execuções separadas.

² Heurísticas são algoritmos polinomiais ou métodos usados para encontrar soluções (ótimas ou aproximadas) de problemas, no entanto, não garantem a qualidade das soluções. Apesar do nome algoritmo, a exploração dos resultados ótimos é feita empiricamente, ou seja, não tem fundamentação matemática (Linden, 2008).

Como alternativa aos métodos clássicos de otimização, os algoritmos evolucionários começaram a ser estudados em meados dos anos 80, com várias formas de implementações. Entre os principais métodos dessa área estão: o AG, a estratégia evolutiva e a programação evolucionária ou programação genética (Coello et al, 2007). Dentre os algoritmos evolucionários, os AG foram os mais estudados segundo Van Veldhuizen e Lamont (2000). Em Zitzler et al (2002) são citados vários estudos dessa área ao longo dos anos, principalmente os que tratam de problemas multiobjetivo.

Os AGs têm como principais características (Linden, 2008):

- ❖ Tem natureza probabilística;
- ❖ São algoritmos simples, não necessitam de derivadas ou informações adicionais;
- ❖ Usam uma população grande no espaço de soluções;
- ❖ A aleatoriedade é quebrada na seleção dos indivíduos, pois usam informações dos problemas para favorecerem os indivíduos considerados mais aptos; ou seja, os AG fazem uma busca direcionada no espaço de soluções;
- ❖ Os parâmetros a serem otimizados são codificados;
- ❖ Fazem busca paralela;
- ❖ Busca uma otimização global;
- ❖ Conseguem trabalhar com funções discretas e contínuas;

É comum no dia-a-dia depararmos com problemas que possuem mais de um objetivo, em que precisa-se buscar uma solução que satisfaça todos os objetivos e não somente um. Isso é o que se chama de solução de compromisso, tendo como consequência a criação de várias soluções consideradas boas e não uma única solução.

Como definido em Coello et al (2007), o problema de otimização multiobjetivo tem como meta encontrar um vetor de variáveis de decisões, que satisfaçam as restrições e otimizem o vetor de funções, que representam as funções objetivo. As funções são descrições matemáticas do desempenho dos critérios, normalmente conflitantes. Ou seja, não existe necessariamente uma solução considerada melhor em todos os objetivos (Gen e Cheng, 2000). Otimizar, neste caso, significa encontrar uma solução, que forneça valores aceitáveis para o decisor.

O problema de otimização multiobjetivo (POM) geral é definido como a minimização (maximização) de $F(x) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k))$, onde k é o número de funções objetivo, sujeito a $g_i(x) \leq 0, i = \{1, \dots, m\}$ e $h_j(x) = 0, j = \{1, \dots, p\}$ $x \in \Omega$. As soluções de um POM mi-

nimizam (maximizam) os componentes do vetor $F(x)$, onde x é uma variável de decisão (ou vetor de decisão) ou controle n -dimensional, $x = (x_1, \dots, x_n)$, do universo Ω .

As restrições g_i e h_j devem ser respeitadas, já que representam a dependência entre as variáveis de decisões e os parâmetros dos problemas. As restrições de igualdades p devem ser menores do que n para não existir mais incógnitas do que equações. O grau de liberdade é dado por $n - p$. Já o conjunto Ω contém todas as possíveis soluções que podem ser usadas para avaliar $F(x)$ (Coello et al, 2007).

As funções objetivo são usadas para avaliar as soluções encontradas. Em grande parte dos problemas essas funções são conflitantes e podem ter unidades de medidas diferentes. Alguns autores diferenciam os termos atributos, critério, objetivos e metas (Coello et al, 2007). Neste trabalho todos terão o mesmo significado e representarão os objetivos a serem atingidos.

As soluções são chamadas não dominadas ou soluções ótimas de Pareto, quando nenhuma melhora em uma função objetivo da solução pode ser feita sem que se sacrifique pelo menos um dos outros objetivos (Gen e Cheng, 2000).

Uma solução $x^* \in \Omega$ é chamada de ótimo de Pareto, se e somente se, não existir nenhum outro $x \in \Omega$ tal que, em um problema de minimização (Gen e Cheng, 2000):

$$\begin{cases} f_l(x^*) < f_l(x) & \text{para algum } l \in \{1, 2, \dots, k\} \\ f_l(x^*) \leq f_l(x) & \text{para todo } p \neq l \end{cases} \quad (1)$$

Assumindo um problema de minimização, x^* é um ótimo de Pareto se não existir nenhum outro vetor viável x que diminua algum critério sem que, simultaneamente, aumente o valor de outro critério (Coello et al, 2007).

Neste sentido, um vetor a domina no sentido de Pareto o vetor b , indicado por $(a \preceq b)$, se e somente se, a for parcialmente menor do que b : $\forall i \in \{1, \dots, k\}, f_i(a) \leq f_i(b) \wedge \exists i \in \{1, \dots, k\}: f_i(a) < f_i(b)$. O conjunto de todas as soluções não dominadas são as soluções ótimas de Pareto, também chamadas de soluções eficientes, que constituem o conjunto ótimo de Pareto ou fronteira ótima de Pareto (Zitzler e Thiele, 1998).

Algumas técnicas de otimização multiobjetivo consideradas clássicas, serão descritas brevemente.

a) Método do critério global

Neste método, também chamado de programação de compromisso, um conjunto de soluções consideradas ótimas é usado como base de comparação para avaliar as soluções encontradas. O critério global é a função a ser minimizada, que é mede a distância da candidata a solução à solução ideal. Usando o L_p -métrics para medir a distância temos (Branke et al, 2008):

$$L_p(f) = \left[\sum_{i=1}^k |f_i^0 - f_i(x)|^p \right]^{1/2}, \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (2)$$

Onde k é o número de objetivos. Os valores mais usados de p são o 1 e o 2. Outros valores podem ser usados, sendo a escolha deste parâmetro uma tarefa complicada.

Algumas vezes são usados valores relativos dessa função, como na Equação (3):

$$L_p(f) = \left[\sum_{i=1}^k \left| \frac{f_i^0 - f_i(x)}{f_i^0} \right|^p \right]^{1/2}, \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (3)$$

Onde “ p ” indica o tipo de distância. Para $p = 1$, todos os desvios de f_i^* são considerados na mesma proporção de suas magnitudes, que corresponde à utilidade do grupo. Para $2 \leq p < \infty$, os maiores desvios tem mais peso em L_p . Para $p = \infty$ o maior desvio é o único considerado, que leva a uma utilidade individual pura (Coello et al, 2007)..

b) Programação de metas

A programação de metas (Goal Programming) precisa que o decisor especifique metas para cada objetivo, que são incorporadas ao problema como restrições. A função objetivo, então procura minimizar o desvio absoluto entre as metas e os objetivos. Simplicadamente o método é expresso como:

$$\min \sum_{i=1}^k |f_i(x) - T_i|, \quad \text{sujeito a } x \in \Omega \quad (4)$$

Em que T_i é a meta estabelecida pelo decisor para a i -ésima função objetivo $f_i(x)$, e Ω representa a região viável. O critério deve minimizar a soma dos valores absolutos das diferenças entre as metas e os valores atuais encontrados. Este formulação pode ser transformada na

programação por metas generalizada, cuja função objetivo é a soma ponderada da diferença (Coello et al, 2007).

Sendo $f_i(x)$ função não linear, estas devem ser transformadas em linear para que o método simplex possa ser aplicado. Novas variáveis surgem com essa transformação:

$$d_i^+ = \frac{1}{2}\{|f_i(x) - T_i| + [f_i(x) - T_i]\} \quad (5)$$

$$d_i^- = \frac{1}{2}\{|f_i(x) - T_i| - [f_i(x) - T_i]\} \quad (6)$$

Adicionando e subtraindo essas equações, encontra-se a formula linear equivalente de (4):

$$\min \quad Z_0 = \sum_{i=1}^k (d_i^+ + d_i^-) \quad (7)$$

Sujeito a

$$x \in \Omega \quad (8)$$

$$\begin{aligned} f_i(x) - d_i^+ + d_i^- &= T_i \\ d_i^+, d_i^- &\geq 0, \quad i = 1, \dots, k \\ d_i^+ \cdot d_i^- &= 0 \end{aligned}$$

A fim de expressar sua preferência em relação aos desvios, o decisor pode atribuir pesos relativos w_i^+ e w_i^- para desvios positivos e negativos, respectivamente, para cada meta T_i . A variável que possuir maior peso é menos desejada pelo decisor do que a variável com menor peso (Coello et al, 2007).

c) Combinação linear dos pesos

Este método propõe como função objetivo a soma ponderada das funções objetivo originais. Antes de soma-la, os objetivos originais são padronizados em uma única escala de valores, para somente então serem ponderadas.

$$\min \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) \quad (9)$$

Sujeito a:

$$x \in \Omega \quad (10)$$

Onde $w_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$ e $\sum_{i=1}^k w_i = 1$. Os pesos representam a importância relativa de cada critério para o decisor, além de definir a forma do contorno das soluções (Branke et al, 2008).

3.2.1. Algoritmos Genéticos Multiobjetivo (AGMO)

Como visto anteriormente, o AG baseia-se na evolução das espécies para otimizar uma função objetivo. Portanto, para um dado problema, cada solução possível é representada em forma de cromossomo, também chamado de indivíduo. Cada pedaço do cromossomo indivisível é chamado de gene. A representação deve ser feita de forma simples para que o problema possa ser tratado computacionalmente, sem deixar de inserir no AGMO um tratamento para as restrições e condições do problema.

Inicialmente é criada uma população finita de cromossomos, que é um conjunto de soluções para o sistema. Cada indivíduo deste conjunto recebe uma nota dada por uma função de avaliação, também chamada de função aptidão, função fitness ou função custo, que é a forma de determinação da qualidade da solução. Esta nota é usada como critério no processo de seleção dos pais, pois reflete a qualidade das soluções (Linden, 2008). Os indivíduos são selecionados para que façam o crossover e a mutação, gerando a nova população. A seguir são explicados alguns conceitos básicos sobre o AGMO.

➤ Cromossomo:

Segundo Linden (2008) a representação de um cromossomo em sequência de bits (forma binária) é a mais difundida, devido a sua facilidade de trabalhar com os operadores genéticos. A Figura 1 mostra o número 13 em sua forma binária.

1	1	0	1
---	---	---	---

Figura 1 - representação cromossomial

Duas informações são necessárias para a representação cromossomial: a faixa de operações das variáveis e a precisão desejada. Assim, se for usado um cromossomo de k bits para representar uma dada variável x_i , cuja faixa de operações está entre $[\lim_{\text{inf}}, \lim_{\text{sup}}]$, a precisão máxima da variável (P_{max}) será de: $P_{\text{max}} = (\lim_{\text{sup}} - \lim_{\text{inf}}) / (2^k - 1)$. Para que a precisão aumente, é preciso que o número de bits também aumente.

Caso haja mais de uma variável para a solução, estas devem ser colocadas lado a lado formando uma sequência de bits. É importante ressaltar que a quantidade de bits não precisa ser igual para cada variável.

Outras representações das soluções são aceitas, tais como representação por valores categóricos e representação numérica. O pesquisador deve escolher aquela que atenda melhor aos seus requisitos.

➤ **População Inicial**

A população inicial normalmente é feita aleatoriamente de forma independente para cada cromossomo. O resultado encontrado é uma população diversificada no espaço de busca (Linden, 2008).

➤ **Função Avaliação**

Para encontrar as melhores soluções, as funções de avaliações devem conter o máximo de conhecimento sobre o problema, o que inclui restrições e objetivos de qualidade.

Como dito anteriormente, a função avaliação fornece uma nota para cada solução encontrada. Esta nota é o valor numérico encontrado através do cálculo dos parâmetros que formam o cromossomo. É por este valor que os cromossomos serão avaliados quanto a sua qualidade.

Como em um AGMO há mais do que uma função objetivo, então é necessário utilizar outras funções fitness para avaliar as soluções. O Método da Combinação Linear dos Pesos é um desses métodos, que transforma as múltiplas funções de avaliações em uma única. A agregação é feita multiplicando-se cada uma das funções por um peso relativo à sua importância, para em seguida serem somados resultando em um único valor de avaliação. O problema dessa abordagem está na definição dos pesos das funções, pois um erro pode influenciar negativamente nos resultados. Além de que os pesos devem colocar todas as funções na mesma escala (Linden, 2008). Neste caso, a otimização multiobjetivo é transformada em uma otimização mono-objetivo.

Já o método chamado Otimização Não-Pareto ao invés de agregar as funções, trabalha com elas separadamente para encontrar as melhores soluções em cada uma das funções de avaliações. Depois o conjunto soluções encontrado é aplicado ao problema. Esta abordagem pode não ser a mais adequada, pois na maioria das vezes a melhora em um objetivo pode significar a piora em outro, não conseguindo um bom desempenho final (Linden, 2008).

As abordagens baseadas em Conjunto de Pareto trabalham com o *tradeoff* (soluções de compromisso), pois consideram todas os objetivos a serem otimizados para avaliar a qualidade das soluções. Uma nova função fitness é criada usando o conceito de dominação no sentido de Pareto.

Em um problema de maximização, uma solução “ a ” domina a solução “ b ” se, todos os valores das funções objetivo de “ a ” são iguais ou maiores do que “ b ” e, caso sejam iguais pelo menos uma função de “ a ” deve ser maior do que de “ b ”. Assim, quando uma solução não é dominada por nenhuma outra, diz-se que ela é não dominada. Neste método, a função de avaliação pode ser dada por um ranking calculado pelo número de soluções que dominam cada solução. A solução não dominada possui ranking igual a 1, a solução dominada somente por uma outra solução estará na posição 2 do ranking, e assim por diante. Apesar de não atingirem o ótimo global em todas as funções objetivo, as soluções com ranking igual a 1 são consideradas as melhores soluções de compromisso e fazem parte da chamada fronteira de Pareto (Linden, 2008).

➤ Seleção

O método da roleta viciada é o método de seleção mais usado segundo Linden (2008). Seu funcionamento segue os seguintes passos: cria-se uma roleta “virtual”; cada cromossomo do conjunto solução recebe um pedaço da roleta, que é proporcional à sua aptidão; cada pedaço é dado em porcentagem, cujo somatório dos pedaços de todos os indivíduos deve ser igual a 100. Em seguida a roleta é “girada” e sobre o número que esta parar é o indivíduo escolhido. O número de vezes que a roleta é girada é igual ao número de pais necessários para os próximos passos.

Já o método de torneio promove a competição dentro da população. Primeiro selecionam-se aleatoriamente “ n ” indivíduos dentre os existentes, sendo que n deve ser no mínimo igual a 2. Após esta seleção inicial, o indivíduo com maior valor aptidão será o escolhido para os próximos passos do AG. O número de torneios deve ser igual à quantidade necessária de pais para aplicação dos operadores genéticos. Este método não é sensível a escala das funções, nem a superindivíduos, que podem influenciar na seleção diminuindo a variabilidade genética. No entanto, um problema deste método é que o pior indivíduo só será selecionado para crossover e mutação caso somente ele seja escolhido para o torneio, que possui probabilidade baixa de ocorrer.

Outros métodos de seleção encontrados na literatura são a amostragem estocástica uniforme, ranking e seleção truncada. Cabe salientar que o operador seleção é usualmente o principal diferencial entre o AG e o AGMO, onde o mecanismo de seleção do AGMO é utilizado para definição da fronteira de Pareto.

➤ Operador Crossover

O operador crossover é muito importante para a evolução do AG. Seu objetivo é produzir descendentes melhores que os pais. Juntamente com o método de seleção, fazem com que os AG não sejam uma busca aleatória (Linden, 2008). Alguns métodos de cruzamento serão descritos abaixo.

Após a seleção em uma representação binária, os pais são colocados em pares para que possam trocar os genes, formando novos indivíduos. Cada cromossomo possui uma quantidade x de genes e $x - 1$ pontos de corte, como mostra a Figura 2, em que o cromossomo possui 6 genes e 5 pontos de corte (marcados pela linha grossa).



Figura 2 - cromossomo e seus pontos de corte

Um método simples de ser aplicado é o chamado crossover de um ponto, em que somente um ponto de corte é selecionado.

Na figura 3 estão dois pais selecionados para o crossover, cujo ponto de corte selecionado está marcado pela linha mais grossa. Dois descendentes serão formados, o primeiro Filho 1 possuirá material genético equivalente à parte esquerda ao ponto de corte do Pai 1 e a parte direita ao ponto de corte do Pai 2. O Filho 2 será formado primeiro pela parte esquerda ao ponto do Pai 2 e pela parte direita do Pai 1.

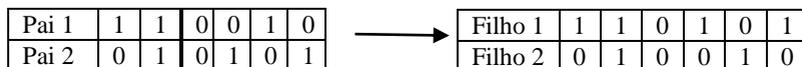


Figura 3 – Crossover de um ponto

Outro método é o chamado crossover de dois pontos, que como o próprio nome diz são dois os pontos escolhidos para a troca genética.

O crossover uniforme, ao invés de escolher pontos de corte, é criado um vetor binário aleatório, chamado de máscara de recombinação, do mesmo tamanho dos pais. Onde houver neste vetor o número 1, o Filho 1 receberá o gene do Pai 1 e o Filho 2 receberá o gene do Pai 2, ambos relativos à posição do gene do vetor. Onde houver o valor 0, o Filho 1 receberá o gene do Pai 2 e o Filho 2 receberá o gene do Pai 1.

➤ Operador Mutação

Este operador possui uma probabilidade “ p ” associada, normalmente muito baixa, que será a referência para que ocorra ou não a muta-

ção. Para cada gene dos cromossomos é sorteado um número “y” entre 0% e 100%, se “y” for maior do que a probabilidade, então não ocorrerá mutação no gene. Caso o número sorteado seja menor do que “p”, então o gene sofrerá mutação, ou seja, se o gene possui número 1, com a mutação seu número será 0 e se o gene possuir número 0, após a mutação seu número será 1.

Sua importância reside no fato de possibilitar novas combinações de cromossomos que não seriam possíveis somente com o cruzamento. Assim, a variabilidade genética aumenta na população possibilitando aumentar o desempenho do algoritmo.

➤ **Variação dos Operadores genéticos**

O funcionamento descrito anteriormente dos diversos operadores considera as probabilidades fixas durante todas as gerações, no entanto, não há uma probabilidade que seja considerada ótima durante todo o percurso do AG. Isto ocorre porque nas primeiras gerações, sendo a população bem diversificada, procura-se fazer bastante cruzamento para que o algoritmo explore o espaço de soluções. Com o passar das gerações, ocorre a convergência genética, então seria mais interessante que ocorresse mais mutações para diversificar a população.

A variação dos operadores pode ser feita de forma determinística, quando não depende dos resultados encontrados em cada geração, ou de forma adaptativa, quando usa dados de desempenho do AG para determinar os parâmetros, ou de forma auto-adaptativa, onde os parâmetros são incluídos nos cromossomos e evoluídos junto com a solução do problema.

Começa, então, a contagem das gerações, que durante cada uma delas são executados a seleção, o crossover e a mutação, gerando a nova população. Sua quantidade pode ser definida previamente, como forma de finalização do algoritmo.

Um operador genético, ou crossover ou mutação, é selecionado de acordo com sua probabilidade definida anteriormente. Normalmente, atribui-se no início processo, uma probabilidade para o operador crossover (p_{co}) superior a 80% e uma probabilidade de $(100\% - p_{co})$ para o operador de mutação. Para definir qual operador será aplicado, cria-se uma roleta viciada. Uma parte da roleta equivalente à porcentagem p_{co} é dada ao operador de crossover e o resto é dado ao operador de mutação. Sorteia-se aleatoriamente um número entre 0 e 100% para decidir qual operador aplicar. Se o número cair dentro da parte de crossover, este será aplicado, caso contrário a mutação será aplicada (Linden, 2008).

O próximo passo é importante, pois direciona o AG no espaço de busca, evitando-se que o algoritmo seja totalmente aleatório. O método de seleção do AG simula o que ocorre na vida real, ao compreender que qualquer indivíduo, bom ou ruim, pode gerar descendentes, também chamados de filhos. No entanto, os melhores ou mais aptos tem maior probabilidade de fazê-lo e em maior quantidade. Assim, a seleção dos pais que irão participar do crossover e da mutação para formação dos filhos privilegia os considerados melhores, segundo a função aptidão. Contudo, os piores indivíduos não devem ser eliminados do conjunto solução, pois estes podem conter características boas, além de evitar que as soluções possuam características similares, criando o que se chama de convergência genética. Caso o operador genético escolhido seja o crossover, então serão selecionados pares de pais para o cruzamento. Caso o operador escolhido seja a mutação, então somente um pai será escolhido.

Os novos cromossomos substituirão os pais, formando uma nova população. E esta nova população irá para a próxima geração realizando novamente o sorteio do operador, a seleção e o crossover/mutação, dando origem à nova população.

3.2.2. Exemplos de AG Multiobjetivos

Nesta seção, os principais AGs propostos para resolver um problema de otimização multiobjetivo são descritos.

O *Vector Evaluated Genetic Algorithm* (VEGA) criado por David Schaffer em 1984 é considerado o primeiro AE multiobjetivo (Gen e Chang, 2000). Em cada geração, este algoritmo divide aleatoriamente a população corrente em subpopulações, cada uma tendo uma função de avaliação correspondente. Cada indivíduo vai receber somente a avaliação da função ao qual está subordinado. Um operador de seleção proporcional é usado para criar os pais do cruzamento. Então os indivíduos são misturados novamente para a aplicação do crossover e mutação (Branke et al, 2008). No entanto, Ngatchou et al (2005) mostra que este algoritmo encontra soluções com ótimos locais, chamadas de especiação, deixando as outras funções com valores não desejáveis.

Já o *Multi-objective Genetic Algorithm* (MOGA) sugerido por Carlos M. Fonseca and Peter J. Fleming (Coello et al, 2007) considera todos os objetivos do problema para encontrar as melhores soluções de compromisso. A cada geração, calcula-se o *rank* dos indivíduos da população corrente, que é dado pelo número de soluções que domina a solução que está sendo analisada, acrescida do número 1. As soluções do-

minadas são penalizadas de acordo com a densidade da população da região correspondente da área de *tradeoff*. Para atribuir um valor de aptidão para cada solução, estas devem ser classificadas de acordo com o *rank*. O valor da função de avaliação é dado através da interpolação do melhor ($rank = 1$) ao pior de acordo com uma dada função, normalmente linear. No próximo passo, é calculada a média do desempenho das soluções com mesmo *rank*, de forma que todos sejam amostrados na mesma proporção. Este procedimento mantém a avaliação global constante, enquanto mantém uma pressão seletiva³ apropriada. Para evitar a convergência prematura, usa-se um método de formação de nichos, onde uma função *sharing*⁴ é calculada para determinar a proximidade das soluções, de acordo com um determinado parâmetro. As soluções consideradas muito próximas entre si são penalizadas na sua função de aptidão, contribuindo, assim, para distribuir a população sobre a fronteira ótima de Pareto (Coello et al, 2007).

O *Niched Pareto Genetic Algorithm* (NPGA) proposto por Jeffrey Horn e seus colegas (Coello et al, 2007), também se baseia na fronteira de Pareto para o processo de otimização. Seu diferencial está no método de seleção dos pais, que seleciona aleatoriamente dois indivíduos da população corrente. Ao invés de serem comparados uns com os outros, eles serão comparados com uma população também escolhida aleatoriamente da população corrente. Se uma das soluções é dominada por alguma solução do conjunto de comparação e a outra não, então esta última é escolhida para reprodução. Se as duas soluções são dominadas ou não dominadas pelo conjunto de comparação, então se usa a função *sharing* (fitness *sharing*) para desempatar-las. Assim como no MOGA, a função *sharing* calcula a densidade populacional na vizinhança da solução, onde aquelas mais populosas são penalizadas na função de avaliação (Horn et al, 1994). Este método promove uma pressão de dominação

³ Pressão seletiva é definida como o grau com o qual o melhor indivíduo é favorecido. Quanto maior a pressão seletiva, mais os melhores indivíduos são favorecidos. Assim, o AGMO melhora mais rápido a avaliação da sua população (Sivanandam e Deepa, 2008).

⁴ A função *sharing* é um método usado para a preservação da diversidade da população, que controla o tamanho da vizinhança ou do nicho através do parâmetro $\sigma_{sharing}$. A função contabiliza a quantidade de soluções em um mesmo nicho, diminuindo a função de avaliação das soluções proporcionalmente ao número de indivíduos que compartilham a mesma vizinhança. O objetivo é promover a geração de soluções nos nichos menos povoados (Coello et al, 2007).

maior ao fazer um torneio entre os indivíduos escolhidos e a população de comparação.

Outro AGMO baseado em Pareto é o *Nondominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II), que é uma versão melhorada do *Nondominated Sorting Genetic Algorithm – NSGA*, desenvolvidos por Kalyanmoy Deb, Amrit Pratap, Sameer Agarwal e T. Mayarivan (Coello et al, 2007). Diferentemente dos outros, este AG engloba a população corrente com a população anterior. Como nos outros algoritmos, os indivíduos recebem um *rank* de acordo com sua não dominação, que é a função de avaliação. Em seguida, são alocados em fronteiras de acordo com o *rank*, para que se possa escolher a nova população para a seleção dos cromossomos para o crossover e mutação. O método de seleção utilizado é o torneio. Quando dois indivíduos possuem o mesmo *rank*, usa-se a distância de preenchimento como critério de desempate. Esta distância é calculada pela soma das distâncias médias, encontradas para cada objetivo, entre dois cromossomos adjacentes ao cromossomo analisado (Deb et al, 2002). A distância de preenchimento é um mecanismo utilizado por este método para gerar uma fronteira de Pareto mais homogênea, evitando-se assim problemas com *middle points*. O NSGA II é o AGMO implementado neste trabalho.

O *Strength Pareto Genetic Algorithm* (SPEA), criado por Eckart Zitzler and Lothar Thiele em 1999 (Zitzler e Thiele, 1998), cria um arquivo externo com soluções não dominadas chamado de conjunto não dominado externo. A cada geração as soluções não dominadas são copiadas para este arquivo. Durante este processo, toda solução dominada ou repetida do conjunto externo é eliminada do mesmo. Todo indivíduo *i* do conjunto externo tem um valor *strength* representando sua função aptidão, que é calculado pelo número de soluções da população corrente *j*, que são dominadas pela solução *i*, dividido pelo tamanho da população mais uma unidade. Já na população corrente, a função aptidão de cada indivíduo *j* é dada pelo somatório dos valores *strength* de cada indivíduo *i* da população externa que domina *j*. A eficácia deste método reside na população externa, portanto para que a população não cresça rapidamente, desacelerando a busca, o conjunto externo não dominado é limitado (Zitzler et al, 2001).

Algumas fraquezas do SPEA foram eliminadas por seus autores ao criarem o SPEA2. As principais diferenças apresentadas por Zitzler et al (2001) são: cálculo de quantos indivíduos uma solução *i* domina e de quantos indivíduos dominam *i*; uso de uma técnica de estimativa da densidade da proximidade dos vizinhos; e a quantidade de soluções pre-

sentes no arquivo é sempre a mesma, podendo ser preenchida por indivíduos dominados.

3.3. MÉTODOS MULTICRITÉRIO DE APOIO À DECISÃO

O processo decisório requer métodos que identifiquem, analisem e forneçam soluções para os problemas existentes. Várias metodologias, tais como o desenvolvido por Auren Uris, o Soft System Methodology (SSM) desenvolvido por Checkland e Checkland e Scholes, dentre outras, abordam de formas diferentes os passos necessários para se conseguir um bom resultado no processo. Para exemplificar, o modelo de Auren Uris descrito em Gomes et al (2009) requer seis passos apresentados a seguir.

Primeiro: O problema é identificado de acordo com a situação e o ambiente onde está inserido e é analisado para não haver erros nem equívocos na hora da decisão.

Segundo: As pessoas envolvidas no processo devem fornecer possíveis alternativas para solucionar o problema.

Terceiro: As alternativas são comparadas, extraindo as vantagens e desvantagens de cada uma, assim como os custos envolvidos.

Quarto: Os riscos das alternativas são classificados de acordo com a incerteza, imprecisões e ambiguidades das alternativas.

Quinto: O decisor deve identificar a alternativa (ou alternativas) que resolva melhor o seu problema.

Sexto: A alternativa escolhida deve ser executada e seus resultados avaliados considerando as previsões anteriormente feitas, para que possíveis erros não sejam repetidos no futuro.

O responsável por decidir, o decisor, também chamado de tomador de decisão ou agente de decisão (Decision Maker – DM), pode ser uma pessoa, um grupo, um comitê, etc. A tomada de decisão pode ser feita considerando tanto parâmetros quantitativos quanto parâmetros qualitativos, sendo o primeiro de mais fácil mensuração. Os problemas envolvidos nos processos de decisão podem ser discretos, com número finito de alternativas, ou contínuos, com número infinito de alternativas, e são considerados complexos, pois possuem pelo menos uma das características abaixo, dentre outros que podem surgir em um problema real (Gomes et al, 2009):

- ❖ Possuem pelo menos dois critérios conflitantes;
- ❖ Possuem tanto critérios como alternativas indefinidas em alguma solução, resultando em soluções não compreendidas;

- ❖ Possuem critérios e alternativas interligados, podendo o sucesso de uma alternativa depender da escolha de outra;
- ❖ A existência de um conjunto de pessoas necessárias para solucionar o problema, com pontos de vistas diferentes, às vezes conflitantes;
- ❖ Má determinação das restrições dos problemas;
- ❖ Os critérios podem ser quantificáveis, enquanto outros precisam de uma escala ao qual serão julgados;
- ❖ As escalas dos critérios podem ser cardinal, verbal ou ordinal;

Até a primeira metade do século XX, os métodos de tomada de decisão usavam modelos puramente matemáticos considerados aleatórios e com limitações, sendo inapropriados em determinadas condições. Durante Segunda Guerra Mundial surge, então, a Pesquisa Operacional a qual foi desenvolvida por militares. Cientistas de varias áreas foram reunidos para estudar os problemas estratégicos e táticos de defesa, cujo objetivo era otimizar a utilização dos limitados recursos militares. Após a guerra, os estudos continuaram sendo implementados em várias áreas, como alocação de carga, otimização de estoque, dentre outros. Por volta da década de 60, apareceram os métodos probabilísticos, desenvolvidos até a década de 90, onde começaram a entrar em desuso devido à sua complexidade matemática (Gomes et al,2009).

Na década de 60 surgiram os primeiros métodos multicritério ou multiobjetivo de auxílio à decisão, sendo o método ELECTRE desenvolvido por B. Roy em 1967 (Roy e Vanderpooten, 1996) um deles. Outros métodos surgiram ao longo dos anos, dentre eles o Analytic Hierarchy Process (AHP) desenvolvido por Thomas L. Saaty em 1980 (Moreira, 2009), Teoria da Utilidade Multiatributo (MAUT –Multiattribute Utility Theory) em 1976 (Keeney e Raiffa, 1993), Preference Ranking Organisation Method for Enrichment Evaluations (PROMETHEE) em 1982 (Brans et al, 2005) e o Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique (MACBETH) em 1994 (Bana e Costa et al, 2005), cujo objetivo de cada um é auxiliar e apoiar os decisores na tomada de decisão.

Em Figueira et al (2005) o apoio à decisão pode ser definido como a atividade em que uma pessoa, através de um modelo explícito mas não necessariamente completamente formalizado, ajuda a obter elementos de respostas propostas pelas partes interessadas. O método procura esclarecer a decisão e normalmente recomendar, ou simplesmente favorecer, um comportamento que aumentará a consistência entre a evolução do processo e dos objetivos das partes interessadas e do sistema de valores.

O Apoio Multicritério à Decisão (AMD ou MCDA - Multi-Criteria Decision Aid) não pretende encontrar somente uma única solução e tomá-la como verdadeira aos olhos do decisor, assim como é feita na pesquisa operacional (Moreira, 2009). Diferentemente, pretende-se auxiliar o decisor fornecendo maior entendimento sobre o problema e recomendações de ações a serem tomadas, que representem o mais fielmente as preferências do decisor.

Segundo Bana e Costa (1993) o MCDA procura inserir a realidade preexistente no processo de decisão, com o objetivo de construir uma estrutura do problema que respeite a visão dos agentes envolvidos no processo, propondo, em seguida, um modelo de avaliação. Ressalta-se que a interatividade e o aprendizado estão presentes durante o processo. A consideração dos valores dos decisores nas avaliações, faz com que o AMD tenha uma subjetividade agregada. Estes valores estão ligados aos critérios existentes, para que as alternativas possam ser priorizadas após serem examinadas e avaliadas.

Sob a influência de vários critérios, o MCDA auxilia os agentes decisores a tomarem decisões, ao construir uma relação de preferência entre as alternativas factíveis. Para tanto, após definir a estrutura do problema, deve-se determinar o conjunto de critérios e/ou atributos a serem utilizados na classificação das alternativas, definir um método, ou discreto ou contínuo, determinar o sistema de preferências do decisor e escolher o procedimento de agregação (Gomes et al, 2009).

O problema multicritério pode ser formulado considerando um conjunto finito de n alternativas a ser avaliado $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$, e um conjunto de m critérios $\mathbf{G} = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m\}$. Cada alternativa a tem uma avaliação de acordo com seu desempenho relativo a cada critério g , assim, toda alternativa será representada por um vetor de avaliações $\mathbf{a}_i = \{\mathbf{g}_1(\mathbf{a}_i), \mathbf{g}_2(\mathbf{a}_i), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{a}_i)\}$, onde $g_k(\mathbf{a}_i)$ representa o valor da alternativa a_i no critério g_k . Segundo Stewart (1992) cada critério é uma ferramenta que permite a comparação das alternativas de acordo com um ponto de vista particular. Assim, após a avaliação das alternativas em cada um dos critérios, pode-se classificá-las em grupos, ou pode-se escolher somente uma considerada a melhor, ou um conjunto das melhores, ou ordenar da melhor a pior.

As principais formas de relacionar duas alternativas são: relação de preferência, relação de indiferença e relação de incomparabilidade. Considerando somente um determinado critério g_m , cuja intenção seja maximizar o seu valor, uma alternativa a_1 é considerada preferível a uma alternativa a_2 , quando o valor de a_1 no critério g_m , $g_m(a_1)$, for

maior do que o valor de a_2 neste mesmo critério. Esta relação é chamada de preferência estrita e denotada por $a_1 P a_2$. Caso o valor das duas alternativas no critério g_m sejam iguais, diz-se que a_1 é indiferente a a_2 . Esta é a relação de indiferença, denotada por $a_1 I a_2$. Caso as duas alternativas não possam ser comparadas, considera-se a relação de incomparabilidade, denotada por $a_1 R a_2$. Este último caso pode ocorrer quando o decisor não deseja ou não tem condições de fazer a comparação ou quando existem opiniões divergentes em relação às alternativas. Há também a relação de preferência fraca, denotada por Q , que ocorre quando o decisor tem certeza de que uma alternativa a_2 não tem preferência estrita à alternativa a_1 , mas não tem certeza se a_1 tem preferência estrita a a_2 , ou se a_1 é indiferente a a_2 .

Há dois tipos de informações de preferência necessárias no método multicritério, as informações: intracritérios e as informações intercritérios. A primeira é relativa a um critério específico, na construção de uma preferência parcial, ou seja, na classificação das alternativas dentro deste critério. A segunda é a relação de preferência entre os critérios, ou seja, a importância de cada um deles é expressa pelo peso associado a cada critério (Gomes et al, 2009).

Os métodos multicritério podem ser decompostos em quatro tipos de resultados alcançados, chamados de problemáticas (Ensslin et al, 2001):

- ❖ Problemática $P. \alpha$ - é a problemática da escolha, onde é encontrado um conjunto tão restrito quanto possível das melhores alternativas, na qual uma será escolhida.
- ❖ Problemática $P. \beta$ - é a problemática de classificação, onde as alternativas são alocadas em categorias definidas a priori.
- ❖ Problemática $P. \gamma$ - é a problemática de ordenação, onde as alternativas são ordenadas completamente ou parcialmente de acordo com as preferências.
- ❖ Problemática $P. \delta$ - é a problemática de descrição, onde as ações e consequências são descritas em uma linguagem apropriada, a fim de esclarecer as alternativas.

As problemáticas aqui descritas normalmente não atuam sozinhas, por exemplo, a ordenação das alternativas ($P. \gamma$) pode ser usada para resolver um problema de classificação ($P. \beta$).

Ao longo dos anos, surgiram vários métodos de apoio à decisão que tratam de problemas multicritérios, as quais podem ser divididas em: Escola Americana e Escola Francesa ou Europeia.

3.3.1. Escolas de Apoio à Decisão

A forma com que os métodos de MCDA são estruturados diferencia-se em duas principais escolas: a Americana e a Francesa (ou europeia), dentre outras menos difundidas como a Escola Holandesa, método PO SOFT, os Métodos Interativos ou de Programação Matemática Multiobjetivo e os métodos híbridos.

Segundo Geldermann et al (2000), a complexidade dos problemas e sua subjetividade fez a modelagem da preferência do decisor não ser padronizada, resultando nessa variedade de escolas. Outro fator que também contribuiu foi a cultura inerente a cada sociedade, que diferencia a forma com que a tomada de decisão é feita (Moreira, 2009).

3.3.1.1. Escola Americana

A escola americana, também conhecida pela abordagem de Critério Único de Síntese, usa a função utilidade, função de preferência ou modelagem de preferência, como representação da preferência dos decisores. O uso dessas funções serve para agregar os diferentes critérios em uma única função de síntese, na qual o critério considerado menos importante receberá um peso inferior em relação aos melhores. Percebe-se que a importância relativa de cada critério advém do conceito de taxa de substituição ou *tradeoff*, cujo valor deste parâmetro é dado pelo decisor (Gomes et al, 2009).

A origem dessa escolha remete o século XVIII com a noção da teoria da utilidade, cuja autoria é dada a Daniel Bernoulli. Na década de 1940, John Von Neumann e Oskar Morgenstern desenvolveram uma fundamentação formal da teoria da utilidade, sendo complementada por Peter Fishburn, Ralph Keeney e Howard Raiffa. Estes dois últimos implementaram a Teoria da Utilidade nos problemas decisórios (Meirelles e Gomes, 2009). Na teoria da utilidade o valor de uma alternativa ou ação, com somente um único critério, depende da sua utilidade para o decisor, que é calculada através de uma função utilidade. Esta função fornece um valor a cada alternativa, que são ordenadas em ordem decrescente, onde a que possuir maior nota é considerada melhor.

Para que as alternativas sejam comparadas em um problema multicritério, é necessário um procedimento de agregação multicritério, que englobe as informações intercritério e intracritérios. Nas escolas americanas o critério único de síntese faz essa agregação, levando em consideração o desempenho da alternativa em cada critério e os pesos dos critérios (ou as taxas de conversão – *tradeoffs*). Assim, é dada a preferên-

cia global de cada alternativa, que é usada para a comparação das mesmas. Quanto maior o valor da preferência global melhor a alternativa é considerada. Uma das funções de agregação mais utilizada é a função aditiva (Gomes et al 2009).

Esta escola permite que a comparação das alternativas possua somente relação de preferência e indiferença, não existindo a possibilidade de incomparabilidade. Outra característica está na existência de transitividade, já que, se a alternativa a_1 é preferível à alternativa a_2 e a alternativa a_2 é preferível à alternativa a_3 , conseqüentemente a_1 é preferível a a_3 .

Segundo Gomes et al (2009) a não existência da incomparabilidade pode restringir a manipulação e desenvolvimento de problemas reais, devido a qualidade ruim dos dados e a existência de vários decisores com diferentes visões do problema.

A escola americana de acordo com Gomes et al (2009) somente consegue ordenar as alternativas porque usa pressupostos rígidos, como a função utilidade e aditividade, para obter o valor global e exige uma grande quantidade de informações extras dos decisores. Conseqüentemente, as alternativas podem ser ordenadas mesmo que a quantidade de informações não seja suficiente para isso.

Os métodos mais conhecidos desta escola segundo Parreiras (2006) são o Analytic Hierarchy Process (AHP, também chamado de Método de Análise Hierárquica), Measuring Attractiveness by a Categorical based Evaluation Technique (MACBETH), Simple Multiattribute Rating Technique Exploiting Ranks (SMARTER), Tomada de Decisão Interativa Multicritério (TODIM), Utilités Additives Discriminantes (Utadis) e Multiattribute Utility Theory (MAUT).

A seguir alguns métodos são brevemente descritos:

a) MAUT

Um dos métodos bastante difundido é a Teoria da Utilidade Multiatributo (ou Multiattribute Utility Theory - MAUT), que segundo Meirelles e Gomes (2009) é a aplicação da Teoria da Utilidade em problemas decisórios, que possuem vários atributos (ou critérios). O decisor atribui a cada critério uma função utilidade, que quantifica a satisfação do decisor em relação ao resultado obtido pelas alternativas em cada um dos critérios. A função utilidade pode ser cardinal ou ordinal. A primeira fornece a intensidade da preferência (valor) de uma alternativa, enquanto que a segunda somente classifica as alternativas em ordem crescente de preferência.

Dyer (2005) sugere que esta teoria seja chamada de teoria da preferência multiatributo, pois engloba vários modelos de escolhas multiatributos. Segundo este mesmo autor, Keeney e Raiffa (1976 apud Dyer, 2005) dividem em duas categorias as funções que representam as preferências dos decisores relativas a cada critério. Uma categoria considera condições de certeza e a outra considera condições de incerteza, onde há riscos associados às alternativas. A primeira é chamada de *função valor* e a última de *função utilidade*.

A teoria da preferência multiatributo fornece fundamentos axiomáticos para decisões que envolvem múltiplos critérios em diferentes contextos. No entanto, deve-se salientar que os axiomas apropriados para escolhas sob risco não são apropriados para escolhas sob certeza (Dyer, 2005). Assim, os decisores podem analisar e julgar estes axiomas quanto à sua validade na representação do comportamento racional em análises multicritérios. Os axiomas expostos em Woitowicz (2009) são:

- ❖ Ordenabilidade: suponha duas alternativas a_1 e a_2 , ou a_1 é preferível a a_2 , ou a_1 é indiferente a a_2 , ou a_2 é preferível a a_1 .
- ❖ Transitividade: se a_1 é preferível a a_2 e a_2 é preferível a a_3 , então a_1 é preferível a a_3 . O mesmo vale para a indiferença.
- ❖ Continuidade: suponha que a_1 é preferível a a_2 e a_2 é preferível a a_3 , então existe alguma probabilidade p , $0 < p < 1$, de ocorrer a_1 e uma probabilidade $p - 1$ de ocorrer a_3 , que seja indiferente a a_2 .
- ❖ Substituibilidade: uma alternativa probabilística (incerta) pode ser substituída pelo decisor por uma alternativa complexa equivalente sem afetar suas preferências.
- ❖ Redutibilidade - uma alternativa complexa probabilística pode ser substituída pelo decisor por uma alternativa equivalente menos complexa sem afetar suas preferências.
- ❖ Monotonicidade: suponha a existência de duas alternativas equivalentes, aquela que possuir maior probabilidade de se conseguir o resultado desejável pelo decisor será a preferida.

Segundo Dyer (2005) a forma mais comum de avaliação e agregação das alternativas com múltiplos atributos é por representação aditiva, como pode ser visto na Equação (11).

$$v(a) = \sum_{i=1}^n w_i v_i(a) \quad (11)$$

Onde $v(a)$ é o valor global da alternativa a , $v_i(a)$ é o valor da alternativa a no critério i , para $i = 1, \dots, n$, e w_i é o peso do critério i .

Portanto, para a função utilidade aditiva fornecer uma pontuação para cada alternativa, precisa-se primeiro calcular a utilidade de uma dada alternativa em cada um dos critérios, separadamente. Em seguida, devem-se multiplicar os valores encontrados em cada critério pelo peso relativo dos critérios e só então, somar os valores finais fornecendo uma única pontuação.

O uso da função utilidade aditiva para ordenar as alternativas requer que a condição de independência da preferência exista para os critérios. Isso implica que qualquer relação de troca (*tradeoff*) entre quaisquer dois critérios não pode depender de qualquer outro critério (Woitowicz, 2009). Para Roy e Vincke (1981) essa condição não é facilmente interpretada na vida real, assim como encontrar os valores do *tradeoffs* entre os critérios, o que pode dificultar a aplicabilidade dessa teoria.

O exemplo em Ensslin (2001), que usa o MAUT, demonstra simplificadaamente seu funcionamento. Neste caso, a função utilidade é uma função de valores.

Suponha que os decisores queiram comprar um carro. Há quatro alternativas (Carros a, b, c e d) e dois critérios (potência e custo), conforme na Tabela 1. Os decisores definiram, então, o quanto de valor cada alternativa representa (função valor que neste caso, substitui a função utilidade) em potência e custo. O carro com maior potência recebeu valor 100, enquanto aquele de menor potência recebeu 0, pois para o decisor é preferível um carro mais potente, conforme coluna 3 da Tabela 1. Já o carro com maior custo recebeu valor 0 e o de menor recebeu 100, pois, nesse caso o decisor prefere o carro mais barato, veja coluna 5 da Tabela 1.

Tabela 1 - Custo e potência dos carros

Carro	Potência (c.c)	Valor Potência	Custo (\$)	Valor Custo
a	2.400	$v_p(a) = 100$	30.000	$v_c(a) = 0$
b	2.000	$v_p(b) = 80$	20.000	$v_c(b) = 30$
c	1.000	$v_p(c) = 0$	10.000	$v_c(c) = 100$
d	1.600	$v_p(d) = 40$	20.000	$v_c(d) = 30$

Fonte: Ensslin et. al (2001)

Os decisores também definem as taxas de substituição (pesos) w de cada um dos critérios. A potência recebeu peso de 70% ($w_p = 0,7$) e o custo recebeu 30% ($w_c = 0,3$). Com os pesos dos critérios e com a função valor, as alternativas são agregadas, resultando em um único valor global V . A função de agregação é dada por (12).

$$V(i) = w_p v_p(i) + w_c v_c(i) \quad (12)$$

Neste exemplo, $i = a, b, c$ e d , representam as alternativas. O resultado pode ser visto na Tabela 2.

Tabela 2 – Exemplo de cálculo dos Valores Globais

Valor Global V	Pontos
$V(a) = w_p v_p(a) + w_c v_c(a) = 0,7 \times 100 + 0,3 \times 0$	$V(a) = 70$
$V(b) = w_p v_p(b) + w_c v_c(b) = 0,7 \times 80 + 0,3 \times 30$	$V(b) = 65$
$V(c) = w_p v_p(c) + w_c v_c(c) = 0,7 \times 0 + 0,3 \times 100$	$V(c) = 30$
$V(d) = w_p v_p(d) + w_c v_c(d) = 0,7 \times 40 + 0,3 \times 30$	$V(d) = 37$

Fonte: Ensslin et. al (2001)

Com o valor global pode-se ordenar as alternativas em ordem decrescente de valor, sendo que a alternativa com maior valor V é preferível. Portanto, a alternativa *Carro a* é preferível ao *Carro b*, que é preferível ao *Carro c*, que é preferível ao *Carro d*: $a P b P d P c$.

Este exemplo retrata características da escola americana como a existência de transitividade na relação de preferência e na relação de indiferença, ou seja, se o Carro a é preferível ao Carro b e o Carro b é preferível ao Carro c, então o Carro a é preferível ao Carro c, e estabelece que todos os estados são comparáveis.

A Teoria da Utilidade Multiatributo tem como características:

- ❖ A necessidade de informação completa sobre as preferências intracritérios para que o valor global V possa ser definido para cada alternativa (Bana e Costa e Almeida, 1990 apud Gomes et al , 2009).
- ❖ Há duas formas de comparação: preferência e indiferença.
- ❖ Estabelecimento de hierarquias é facilitado.

b) AHP

O *Analytic Hierarchy Process* (AHP) é o método desenvolvido por Thomas L. Saaty, cujo modelo de avaliação é estruturado de forma hierárquica. Neste método a importância relativa dos critérios e a rentabilidade das alternativas são dadas pela comparação em pares dos mesmos. Em seguida é calculado um valor total, que irá determinar a importância relativa de cada critério, para então determinar a rentabilidade de cada alternativa (Gotze, 2008).

Inicialmente o problema é dividido de acordo com os N critérios e P subcritérios. Em seguida, as K alternativas serão comparadas em pares, v_{ic} , refletindo a importância que cada uma tem em relação à outra dentro de cada subcritério. Criando assim, P matrizes $K \times K$. Os subcritérios são comparados par a par, dando origem a N matrizes $P \times P$. Os critérios também são comparados par a par em uma única matriz $N \times N$. A diagonal de todas as matrizes tem valor igual a 1. A Tabela 3 mostra uma escala de 1 a 9 usada para determinar a importância que uma alternativa tem em relação a outra (Gotze, 2008).

Tabela 3- Escala Fundamental de Saaty

Intensidade da importância	Definição	Explicação
1	Importância igual	As duas atividades contribuem igualmente para o objetivo.
3	Importância moderada	A experiência e o julgamento favorecem fracamente uma atividade em relação a outra.
5	Importância forte	A experiência e o julgamento favorecem fortemente uma atividade em relação a outra.
7	Importância muito forte ou Importância demonstrada	Uma atividade é muito fortemente favorecida em relação a outra; é a demonstração de dominação na prática.
9	Importância extrema	Não há dúvidas sobre o favorecimento de uma atividade em relação a outra.
2, 4, 6 e 8	Valores intermediários	Valores para quando se procura uma condição de compromisso entre as duas definições adjacentes.

A reciprocidade é mantida, por exemplo, se uma alternativa A recebe uma nota 9 em relação a B, então B vale 1/9 em relação a A, con-

forme(13). O conjunto A pode ser ou as alternativas ou os critérios. Essa tarefa exige que o decisor seja capaz de definir e expressar essa importância dentro de cada critério (Gotze, 2008).

$$v_{ic} = 1/v_{ci}, \text{ para todo } i, c \in A \quad (13)$$

O próximo passo fornece os vetores prioridades (W) ou fatores de ponderação, calculado pelo método autovetor para cada uma das matrizes mencionadas acima. Usando a matriz de comparação e assumindo que a importância relativa de cada elemento seja w_i , o peso relativo pode ser dado por:

$$v_{ic} = \frac{w_i}{w_c}, \text{ para todo } i \in A \quad (14)$$

Considerando a reciprocidade:

$$v_{ic} = \frac{1}{v_{ci}} = \frac{1}{\frac{w_c}{w_i}}, \text{ para todo } i, c \in A \quad (15)$$

Ou

$$v_{ic} \cdot \frac{w_c}{w_i} = 1, \text{ para todo } i, c \in A \quad (16)$$

Adicionalmente,

$$\sum_{c=1}^C v_{ic} \cdot \frac{w_c}{w_i} = \sum_{c=1}^C \frac{w_i}{w_c} \cdot \frac{w_c}{w_i} = C, \quad (17)$$

é válido para todo $i \in A$

E

$$\sum_{c=1}^C v_{ic} \cdot w_c = C \cdot w_i, \text{ para todo } i \in A \quad (18)$$

Esta relação aplica-se para todas as linhas i ($i=1,2,\dots,C$) da matriz de comparação. O sistema de equações de C é formulado por:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1C} \\ v_{12} & v_{22} & \dots & v_{2C} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{C1} & v_{C2} & \dots & v_{CC} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_C \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_C \end{pmatrix} \text{ ou } V \cdot W = C \quad (19)$$

Este sistema representa um problema de autovalor, onde C são valores reais chamados de autovalores da matriz de comparação e a matriz W é o autovetor. Para determinar o maior autovalor, o problema seguinte precisa ser resolvido (Gotze, 2008).

$$V \cdot W = C \cdot W \text{ ou } (V - C \cdot U) \cdot W = 0 \quad (20)$$

Onde U representa a matriz unitária de V. O determinante da matriz é:

$$\det|V - L \cdot U| = 0 \quad (21)$$

O máximo valor de C e dos pesos é dado pelo sistema:

$$(V - C_{m\acute{a}x} \cdot U) \cdot W = 0 \quad (22)$$

E

$$\sum_{c=1}^C w_c = 1 \quad (23)$$

O próximo passo examina a consistência da matriz de comparação, que verifica a consistência dos julgamentos do decisor. O valor da razão da consistência (RC) é calculado pela relação entre o índice de consistência (IC), dividido pelo índice de consistência randômico (IR):

$$RC = \frac{IC}{IR} \quad (24)$$

$$IC = \frac{L_{m\acute{a}x} - C}{(C-1)} \quad (25)$$

Onde C é a ordem da matriz de comparação.

O valor do índice de consistência randômico para ordem de cada matriz é dado na Tabela 4 (Gotze, 2008).

Tabela 4 – Índices de consistência randômicos

Dimensão da matriz	1	2	3	4	5	6	7	8	9
IR	0,00	0,00	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45

Valores da razão de consistência (RC) menores do que 0,1 são considerados consistentes e para RC maiores do que 0,1 são considerados inconsistentes, sendo necessário revisar a matriz de comparação.

Após o cálculo dos pesos e das consistências de todas as matrizes de comparação o valor global de cada alternativa é dado por:

$$U_{Ai} = \sum_{c=1}^C w_c \cdot u_{ic} \quad (26)$$

Onde c se refere ao critério, w_c indica a prioridade global relativo ao critério c e u_{ic} é a importância relativa da alternativa i relativo ao critério c . Consequentemente, a prioridade global é calculada pela soma ponderada das prioridades parciais. A alternativa com maior valor de prioridade global é então a preferida pelo decisor (Gotze, 2008).

c) *MACBETH*

O MACBETH (Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique) trabalha com o conceito de atratividade das soluções ou opções dado por um valor ordinal. O método reflete a preferência do decisor por uma dada alternativa x , possibilitando fazer um ranking das mesmas (Bana e Costa et al, 2005).

Para cada critério, o decisor J é questionado sobre a atratividade entre duas alternativas de um dado conjunto X , sendo ele ser capaz de decidir qual é mais atrativa, ou se são de igual importância. As opções devem ser colocadas em ordem decrescente de importância (Bana e Costa et al, 2005). As comparações em pares possuem três tipos de relações para $x, y \in X$ e $\mu: X \rightarrow \mathbb{R}$:

- $xPy \Rightarrow \mu(x) > \mu(y) \rightarrow x$ é mais atrativo do que y
- $xIy \Rightarrow \mu(x) > \mu(y) \rightarrow x$ não é mais atrativo do que y , nem y mais atrativo do que x
- $x?y \rightarrow x$ e y não são comparáveis em termos de atratividade

P é uma relação assimétrica, I é uma relação simétrica e reflexiva e $?$ é uma relação simétrica e irreflexiva.

A diferença de atratividade entre x e y pode ser medida em relação a outras duas opções z e w . $\forall x, y, z, w \in X$, com $[\mu(x) - \mu(y)] > [\mu(z) - \mu(w)]$, reflete a importância que x tem sobre y , tendo como referência z e w . Esta relação é representada por $(x, y)P^e(z, w)$ (Bana e Costa et al, 2005).

Caso uma alternativa seja mais atrativa do que outra, então o decisor também deve ser capaz de julgar qualitativamente a diferença de atratividade entre as alternativas. A diferença de atratividade é dividida em sete categorias: nenhuma (C0), muito fraca (C1), fraca (C2), moderada (C3), forte (C4), muito forte (C5) e extremamente forte (C6) (Bana e Costa et al, 2003). Estas seis categorias são representadas por intervalos encontrados através da resolução de um problema de programação linear.

Segundo Bana e Costa et al (2005), durante as definições de atratividade podem surgir dois tipos de inconsistências: tipo a e tipo b. Para $x, y, z \in X$ as inconsistências do tipo a surgem quando:

- $[xPy, yPz, xPz \text{ e } (y, z)P^e(x, z)]$
- Ou $[xPy, yPz, xPz \text{ e } (x, y)P^e(x, z)]$
- Ou $[xIy, yPz, xPz \text{ e } (x, z)P^e(y, z)]$
- Ou $[xIy, zPy, zPx \text{ e } (z, x)P^e(z, y)]$

A inconsistência do tipo b existe somente dentro das relações P^e . Um exemplo em Bana e Costa et al (2005) explícita este tipo de inconsistência. Suponha as seguintes relações de atratividade $xPy, xPw, yPz, wPz, xPz, yPw$ e os seguintes valores qualitativos das relações determinadas por um decisor J : $(x, y) \in C_1, (y, z) \in C_2, (x, w) \in C_3$ e $(w, z) \in C_2$. Nota-se $\mu(x) - \mu(w) > \mu(y) - \mu(z)$ e que $\mu(w) - \mu(z) > \mu(x) - \mu(y)$, o que é impossível existir.

3.3.1.2. Escola Francesa

A Escola Francesa também chamada de Escola Europeia ou Métodos de Subordinação (*outranking*⁵) de Síntese nasceu na França, em 1968, com o método Electre I (*Elimination and (et) Choice Translating Algorithm*). Esta escola adota o conceito de sobreclassificação, onde as alternativas de um dado conjunto são comparadas entre elas. Considerando duas alternativas a_1 e a_2 , se a_1 é considerada pelo menos tão boa quanto a_2 pelos decisores, então, pode-se dizer que a_1 sobreclassifica a_2 , denotado por $a_1 \mathbf{S} a_2$ (Ensslin, 2001). No entanto, o conceito de sobreclassificação não distingue se a alternativa a_1 tem preferência estrita, preferência fraca ou indiferença em relação à a_2 . Em seguida, as relações de subordinação são exploradas a fim de encontrar uma ordem de preferência das alternativas, ou uma classificação em categorias, ou a melhor alternativa.

Diferentemente da Escola Americana, não existe na Escola Francesa uma função utilidade ou de valor; contudo, as preferências dos decisores são preservadas. Outra diferença está no fato de não existir a transitividade da relação de preferência e de indiferença, e no fato de existir a possibilidade de incomparabilidade. Segundo Gomes et al (2009) as comparações das alternativas podem resultar em:

- ❖ Preferência forte (ou preferência sem hesitação) de uma alternativa em relação à outra.
- ❖ Preferência fraca (ou preferência com hesitação) de uma alternativa em relação à outra.
- ❖ Indiferença de uma alternativa em relação à outra;
- ❖ Incomparabilidade de uma alternativa em relação à outra.

O método de sobreclassificação permite que as alternativas sejam ordenadas, mesmo que parcialmente, com uma quantidade de informa-

⁵ Além dos termos subordinação e outranking (em inglês), pode-se usar os termos sobreclassificação e prevalência (Ensslin et al, 2001).

ção considerada baixa, comparando-a com a abordagem de critério único de síntese, sobre a preferência dos critérios (Bana e Costa e Almeida, 1990 apud Gomes et al 2009). A subordinação das alternativas é feita usando o conceito de limiar, ou seja, o decisor precisa decidir limiares de indiferença e preferência, que são faixas de valores, para determinar as relações de preferências das alternativas (Ensslin et al, 2001).

Segundo Stewart (1992), diferentemente da escola americana, os pesos dos critérios não são vistos como *tradeoffs* ou compensação entre os critérios, isto é, os pesos são somente votos relativos de pesos dados a cada critério. O somatório dos pesos de todos os critérios deve ser normalizado, resultando em um único número. No entanto, o próprio autor comenta que é difícil desvincular o conceito de *tradeoff* dos pesos dos critérios.

Os métodos mais conhecidos da escola europeia são os métodos da família Electre, da família Promethee (*Preference Ranking Organisation Method for Enrichment Evaluations*), os métodos Qualiflex, Oreste e Melchior (Gomes et al, 2009).

a) PROMETHEE

O PROMETHEE (Preference Ranking Organisation Method for Enrichment Evaluations) é um método de sobreclassificação para um conjunto finito de ações, que devem ser classificadas e selecionadas dentre os critérios normalmente conflitantes.

A família do método PROMETHEE foi desenvolvida originalmente por Jean-Pierre Brans e apresentado pela primeira vez em 1982. Dois métodos foram criados: o PROMETHEE I e o PROMETHEE II. Mais tarde, junto com Bertrand Mareschal foram desenvolvidos o PROMETHEE III e o PROMETHEE IV. Em 1988, ambos lançaram o módulo interativo visual GAIA (Geometrical Analysis for Interactive Aid). Em 1992 e 1994, Brans e Mareschal sugeriram mais duas novas extensões o PROMETHEE V e o PROMETHEE VI (Brans et al, 2005) e em 1998 foi criado o PROMETHEE GDSS (Group Decision Support System). A finalidade de cada método é descrita na Tabela 5.

Tabela 5 – família PROMETHEE

PROMETHEE I	Estabelece uma pré-ordem parcial das alternativas, admitindo relação de preferência, indiferença e incomparabilidade. Usado em problemas de escolha e ordenação.
PROMETHEE II	Estabelece uma pré-ordem completa das al-

	ternativas, admitindo somente relação de preferência e indiferença. Usado em problemas de escolha e ordenação.
PROMETHEE III	Estabelece uma pré-ordem completa das alternativas, com ampliação da noção de indiferença.
PROMETHEE IV	Estabelece uma pré-ordem completa ou parcial de um conjunto contínuo de soluções.
PROMETHEE V	Estabelece uma pré-ordem completa incluindo restrições do problema.
PROMETHEE VI	Estabelece uma pré-ordem completa ou parcial, usado em problemas em que o decisor tem uma incerteza sobre o peso de cada critério.
PROMETHEE GAIA	É uma extensão do PROMETHEE que usa procedimentos visuais e interativos.
PROMETHEE GDSS	Usado para auxiliar decisões em grupo.

Considere um problema multicritério:

$$\max\{g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), \dots, g_m(\mathbf{a}), \dots, g_k(\mathbf{a}) | \mathbf{a} \in A\} \quad (27)$$

Onde A é um conjunto finito de n possíveis alternativas $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e $\{g_1(\cdot), g_2(\cdot), \dots, g_k(\cdot)\}$ é o conjunto de k critérios de avaliação. Não há objeção se os critérios são maximizados ou minimizados (Brans et al, 2005).

Para ordenar as alternativas, o método PROMETHEE precisa de duas informações adicionais, que são as representações das preferências do decisor. A primeira é uma informação entre os critérios, que são os pesos. A estimação dos pesos não é uma tarefa simples, pois envolve as prioridades e percepções dos decisores. Cada critério g_j recebe um peso w_j , para $j = 1, 2, \dots, k$, representando sua importância relativa aos diferentes critérios. Os pesos são números positivos e independentes das unidades de medida dos critérios. Quanto maior o peso mais importante é o critério. Os pesos são considerados normalizados, ou seja, o somatório de todos os valores deve ser igual a um, veja (28):

$$\sum_{j=1}^k w_j = 1 \quad (28)$$

No entanto, o decisor também pode expressar a importância relativa dos critérios usando números arbitrários para os pesos, se assim o

achar mais fácil. Neste caso, cada um dos pesos será dividido pela soma de todos os pesos, fazendo-se a normalização.

A segunda representação da preferência do decisor é dada por uma informação dentro dos critérios. Como mencionado anteriormente sobre a escola europeia, o PROMETHEE não atribui uma utilidade absoluta intrínseca a cada alternativa, nem global, nem em cada critério. Neste método, o decisor atribui uma função de preferência para o desvio entre as avaliações de duas alternativas em dado critério. Portanto, a estrutura de preferência do PROMETHEE é baseada na comparação em pares. Para pequenos desvios, o decisor atribuirá uma pequena preferência para a melhor alternativa, ou até mesmo nenhuma preferência se ele considerar que o desvio é insignificante. Quanto maior o desvio maior a preferência. As preferências são números reais entre 0 e 1, cujo intuito, além de representar as preferências do decisor, é eliminar as diferenças de escalas relacionadas às unidades dos critérios (Moreira, 2009).

Suponha duas alternativas a e b pertencentes ao conjunto de alternativas A , cujos valores em um dado critério g_j são $g_j(a)$ e $g_j(b)$, respectivamente, sendo o valor de a maior do que b . No caso do critério ser maximizado, procura-se então definir o valor da preferência de a sobre b no critério g_j , dada pela função de preferência P_j :

$$P_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = F_j[d_j(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in A \quad (29)$$

Onde F_j representa a função de preferência escolhida pelo decisor que irá transformar a diferença entre duas alternativas em um valor entre 0 e 1 e d_j é o desvio entre as alternativas a e b em relação ao critério g_j :

$$d_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g_j(\mathbf{a}) - g_j(\mathbf{b}) \quad (30)$$

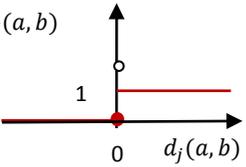
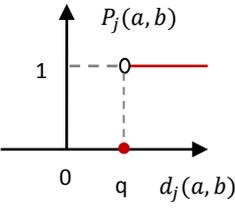
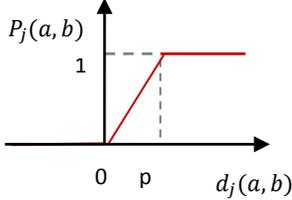
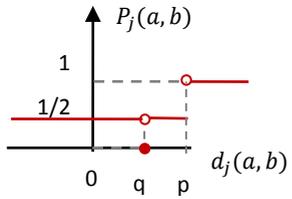
$$e: \quad 0 \leq P_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq 1 \quad (31)$$

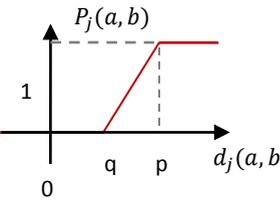
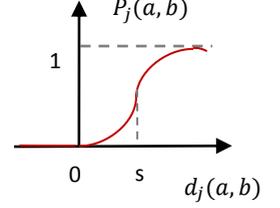
Caso o critério seja minimizado, deve-se inverter a função de preferência ou então fazer:

$$P_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = F_j[-d_j(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \quad (32)$$

Brans et al (2005) chama o par $\{g_j, P_j(\mathbf{a}, \mathbf{b})\}$ de critério generalizado associado ao critério g_j . Tal generalização do critério deve ser definida para cada um dos critérios. O PROMETHEE propõe seis tipos de funções de preferência, como mostra a Tabela 6.

Tabela 6 - Funções de preferências do PROMETHEE

CRITÉRIO GENERALIZADO	DEFINIÇÃO	PARÂMETROS
Tipo 1: Critério Usual $P_j(a, b)$ 	$P(a, b) = \begin{cases} 0 & d_j(a, b) \leq 0 \\ 1 & d_j(a, b) > 0 \end{cases}$	-
Tipo 2: Critério U-shape $P_j(a, b)$ 	$P(a, b) = \begin{cases} 0 & d_j(a, b) \leq q \\ 1 & d_j(a, b) > q \end{cases}$	q
Tipo 3: Critério V-shape $P_j(a, b)$ 	$P(a, b) = \begin{cases} 0 & d_j(a, b) \leq 0 \\ \frac{d_j(a, b)}{p} & 0 \leq d_j(a, b) \leq p \\ 1 & d_j(a, b) > p \end{cases}$	p
Tipo 4: Critério de nível $P_j(a, b)$ 	$P(a, b) = \begin{cases} 0 & d_j(a, b) \leq q \\ \frac{1}{2} & q \leq d_j(a, b) \leq p \\ 1 & d_j(a, b) > p \end{cases}$	p, q

<p>Tipo 5: Critério V-shape com indiferença</p> 	$P(a, b) = \begin{cases} 0 & d_j(a, b) \leq q \\ \frac{d_j(a, b) - q}{p - q} & q \leq d_j(a, b) \leq p \\ 1 & d_j(a, b) > p \end{cases}$	p, q
<p>Tipo 6: Critério Gaussiano</p> 	$P(a, b) = \begin{cases} 0 & d_j(a, b) \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{d_j(a, b)^2}{2s^2}} & d_j(a, b) > 0 \end{cases}$	s

Fonte: Brans et al, 2005.

Dependendo da função escolhida, um ou dois parâmetros deverão ser definidos pelo decisor. São três os parâmetros existentes (Brans et al, 2005):

- ❖ q – chamado de limiar de indiferença: é o maior desvio d considerado desprezível pelo agente de decisão. Valores de desvio menores do que q são considerados indiferentes. Se $g_j(a) > g_j(b)$ e $d_j(a, b) < q$, então a é indiferente a b .
- ❖ p - chamado de limiar de preferência estrita: é o menor desvio d considerado suficiente pelo decisor, para que uma alternativa tenha preferência forte em relação a outra. Se $g_j(a) > g_j(b)$ e $d_j(a, b) > p$, então a tem preferência forte em relação a b .
- ❖ s - é um valor intermediário entre q e p .

A função de preferência Tipo 1 não tem parâmetros a serem definidos. Considerando ainda o exemplo com duas alternativas a e b , com seus valores no critério g_j iguais a $g_j(a)$ e $g_j(b)$, caso o desvio $d_j(a, b)$ seja menor ou igual a zero, então as alternativas são indiferentes, rece-

bendo o valor zero na função de preferência, $P_j(a, b) = 0$. Caso $g_j(a)$ seja maior a $g_j(b)$, independente do valor d_j , então a alternativa a tem preferência forte sobre a alternativa b , recebendo um valor $P_j(a, b) = 1$.

Já para a função Tipo 2, precisa-se escolher o parâmetro q . Se $g_j(a)$ for menor do que $g_j(b)$ ou $g_j(a)$ for maior do que $g_j(b)$, mas $d_j(a, b)$ for menor do que o valor q , então a e b são tes, $P_j(a, b) = 0$. Caso contrário, a tem preferência forte em relação a b , $P_j(a, b) = 1$.

Para a função do Tipo 3 é preciso definir o parâmetro p . A alternativa a só é indiferente à alternativa b , caso $g_j(a)$ seja menor do que $g_j(b)$. Se $g_j(a)$ for maior do que $g_j(b)$, mas o seu desvio $d_j(a, b)$ for menor do que p , então o valor da sua função de preferência será dado por $P_j(a, b) = d_j(a, b)/p$, caso contrário, se $d_j(a, b)$ for maior do que p , então $P_j(a, b) = 1$.

A função Tipo 4 precisa que os dois parâmetros p e q sejam definidos. Assim como explicado anteriormente, se o desvio calculado entre a e b for menor do que q , as alternativas serão indiferentes, $P_j(a, b) = 0$. Se o desvio d_j for maior do que q , mas menor do que p , a função preferência receberá valor igual $1/2$. Em último caso, se o desvio for maior do que p , então a tem preferência forte sobre b , $P_j(a, b) = 1$.

A função 5 é similar à função 4, a única diferença está no valor atribuído à preferência, caso o desvio $d_j(a, b)$ for maior do que q e menor do que p . Nesse caso, o valor calculado da preferência será $P_j(a, b) = d_j(a, b)/p$.

O critério Gaussiano, função Tipo 6 da Tabela 6, tem um parâmetro a ser definido s , que define o ponto de inflexão da função. Esta função de preferência é crescente para todos os desvios e não tem descontinuidades na sua forma. Para definir o s Brans et al (2005) recomenda que o decisor defina primeiro os parâmetros p e q , para em seguida definir o valor de s , que esteja entre estes dois parâmetros. Se s estiver perto de q as preferências serão reforçadas para pequenos desvios, ao passo que se estiver perto de p elas serão suaves.

Após definir os pesos para os critérios, w_j para $j = 1, 2, \dots, k$, suas funções de preferências e o critério generalizado para todas os pares de alternativas, calcula-se os índices de preferência agregada (π) para cada par de alternativas.

❖ Índice de Preferência Agregada

Em Brans et al (2005) o índice de preferência agregada (π) é o somatório ponderado das preferências de cada critério de uma alternativa em relação a outra. Considere as alternativas a e $b \in A$, o índice de preferência agregada de a em relação a b é dado por $\pi(a, b)$ e o contrário é dado por $\pi(b, a)$, veja em (33):

$$\begin{cases} \pi(a, b) = \sum_{j=1}^k P_j(a, b)w_j \\ \pi(b, a) = \sum_{j=1}^k P_j(b, a)w_j \end{cases} \quad (33)$$

O índice $\pi(a, b)$ representa o quanto a alternativa a é preferível a b considerando todos os critérios, e $\pi(b, a)$ representa o quanto a alternativa b é preferível a a . $\pi(a, b)$ e $\pi(b, a)$ costumam ser positivos, pois é comum ocorrer valores mais altos para a em alguns critérios, enquanto que em outros critérios ocorrem valores mais altos em b .

Se $\pi(b, a) \sim 0$, pode-se dizer que a tem uma *preferência global fraca* sobre b . Da mesma forma, pode-se concluir que se $\pi(b, a) \sim 1$, a tem uma *preferência global forte* sobre b .

Para todos os pares de alternativas pertencentes do conjunto A , aplicam-se as propriedades:

- ❖ $\pi(a, a) = 0$
- ❖ $0 \leq \pi(a, b) \leq 1$
- ❖ $0 \leq \pi(b, a) \leq 1$
- ❖ $0 \leq \pi(a, b) + \pi(b, a) \leq 1$

Após a conclusão dos índices de preferências de todos os pares de alternativas, pode-se construir um grafo de sobreclassificação completo. No grafo, cada alternativa corresponde a um nó, com dois arcos entre cada par de nós, veja na figura 4:

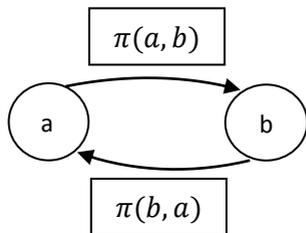


Figura 4 – Grafo de sobreclassificação

❖ Fluxo de sobreclassificação

Segundo Brans et al (2005), considere que o conjunto A possua n alternativas, então cada alternativa a é comparada a $n - 1$ alternativas. A média simples dos índices de preferência agregada de uma alternativa a em relação as outras resulta no fluxo de sobreclassificação, que é dividido em dois tipos (Brans et al, 2005):

❖ Fluxo de sobreclassificação positivo (ou fluxo de saída):

$$\phi^+(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \pi(a, x) \quad (34)$$

➤ Fluxo de sobreclassificação negativo (ou fluxo de entrada):

$$\phi^-(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \pi(x, a) \quad (35)$$

Onde x representa todas as alternativas do conjunto A , $x = 1, 2, 3, \dots, n$. Como $\pi(a, a) = 0$, os fluxos são divididos por $n - 1$, resultando em uma média simples dos somatórios dos índices de preferência agregada.

O fluxo de saída expressa a intensidade com a qual a alternativa a sobreclassifica as outras $n - 1$ alternativas do conjunto A . É a sua força em relação as outras alternativas. Quanto maior o $\phi^+(a)$ melhor é a alternativa.

Já o fluxo de entrada expressa a intensidade com a qual as alternativas a é sobreclassificada pelas outras alternativas. É a sua fraqueza em relação às outras alternativas. Quanto menor $\phi^-(a)$ melhor é a alternativa.

❖ PROMETHEE I

O PROMETHEE I faz uma classificação parcial das alternativas usando os fluxos positivos e negativos de sobreclassificação (Brans et al, 2005). A classificação é feita comparando as alternativas em pares e usando três relações de comparação: a preferência (P^I), indiferença (I^I) e incomparabilidade (R^I). Suponha a e $b \in A$:

➤ a é preferível a b , se:

$$aP^I b \text{ se } \begin{cases} \phi^+(a) > \phi^+(b) \text{ e } \phi^-(a) < \phi^-(b), \text{ ou} \\ \phi^+(a) = \phi^+(b) \text{ e } \phi^-(a) < \phi^-(b), \text{ ou} \\ \phi^+(a) > \phi^+(b) \text{ e } \phi^-(a) = \phi^-(b) \end{cases} \quad (36)$$

➤ a é indiferente a b , se:

$$aI^I b \text{ se } \phi^+(a) = \phi^+(b) \text{ e } \phi^-(a) = \phi^-(b) \quad (37)$$

➤ a é incomparável a b , se:

$$aR^I b \text{ se } \begin{cases} \phi^+(a) > \phi^+(b) \text{ e } \phi^-(a) > \phi^-(b), \text{ ou} \\ \phi^+(a) < \phi^+(b) \text{ e } \phi^-(a) < \phi^-(b) \end{cases} \quad (38)$$

Segundo Brans et al (2005), quando $aP^I b$ pode-se dizer que uma força maior de a está associada a uma baixa fraqueza de a , no que diz respeito a b . Os fluxos são consistentes, portanto são considerados como verdadeiros.

A indiferença acontece quando ambos os fluxos das duas alternativas possuem valores iguais.

Quando acontece do fluxo de saída e do fluxo de entrada da alternativa a serem maiores do que o de b ou dos fluxos de a serem menores do que de b , as alternativas são incomparáveis, $aR^I b$. Isto ocorre quando a é bom em alguns critérios, enquanto b é bom em outros critérios, nos quais a é fraco. Portanto, as informações fornecidas pelos fluxos são inconsistentes, sendo mais prudente que o decisor decida qual alternativa é a melhor.

❖ PROMETHEE II

O método PROMETHEE II faz a ordenação completa das alternativas de um dado conjunto, portanto todas as alternativas são comparáveis. Somente duas relações de preferência são usadas: a preferência (P^{II}) e a indiferença (I^{II}).

Após calcular os fluxos de saída e de entrada das alternativas, como visto no PROMETHEE I, calcula-se o fluxo líquido de sobreclassificação (ϕ):

$$\phi(a) = \phi^+(a) - \phi^-(a) \quad (39)$$

Quanto maior ϕ melhor é a alternativa. As relações de preferência são dadas pelo fluxo líquido (Brans et al, 2005):

➤ Preferência:

$$aP''b \quad \text{se} \quad \phi(a) > \phi(b) \quad (40)$$

➤ Indiferença:

$$aI''b \quad \text{se} \quad \phi(a) = \phi(b) \quad (41)$$

As propriedades do PROMETHEE II são:

- $-1 \leq \phi(a) \leq 1$
- $\sum_{x \in A} \phi(a) = 0$

Segundo Brans et al (2005) $\phi(\cdot)$ pode ser comparado à função utilidade. A sua vantagem está no fato de seu cálculo depender de informações de preferências simples e claras, como os pesos e funções de preferência, e de apoiar-se em declarações comparativas ao invés de declarações absolutas.

3.3.2. Pesos dos Critérios

Os pesos dados aos critérios, chamados de informações intercritérios como mencionado anteriormente, expressam a importância relativa do critério para o decisor. Quanto mais importante um dado critério j , maior é o seu peso, w_j . Portanto, quando se atribui pesos para n critérios, cria-se um vetor de pesos. Para os métodos de MCDA, este é mais uma forma de inserir as preferências do agente de decisão no problema.

Entretanto, uma relação dos pesos w_i/w_j , pode atuar como uma taxa de substituição ou *tradeoff* entre critérios, quando o cálculo da função utilidade global for feito por uma soma ponderada. Nesse caso, a taxa de substituição expressa o quanto se deve adicionar à performance de uma alternativa no critério j , dado a perda de uma unidade na performance da mesma alternativa no critério i (Gomes et al, 2009).

Como os pesos são uma influência relevante nos resultados encontrados no processo MCDA, a escolha do método de atribuição de pesos deve ser feita cuidadosamente. Alguns principais métodos de atribuição de pesos são (Gomes et al, 2009):

- ❖ Simple Multi Attribute Rating Technique (SMART) – esta metodologia possui duas etapas: na primeira o decisor ordena os

critérios de acordo com sua importância; na segunda etapa, o decisor começa a atribuir os pesos pelo critério menos importante, normalmente começa-se com valor 10, em seguida atribui aos mais importantes com valores superiores a 10.

- ❖ Ranking Methods (Ordinal) – este método utiliza fórmulas matemáticas para atribuir pesos aos critérios, ou seja, o decisor não decide o valor dos pesos. Normalmente, é aplicado a critérios classificados em escala ordinal e verbal. Algumas fórmulas usadas são:

$$\text{➤ } w_j = \frac{1/r_j}{\sum_{k=1}^n 1/r_k}$$

$$\text{➤ } w_j = \frac{n - r_j + 1}{\sum_{k=1}^n (n - r_k + 1)}$$

$$\text{➤ } w_j = \frac{1}{n} \times \sum_{k=j}^n \frac{1}{k}$$

Onde n é o número de critérios, que são classificados com valores de 1 até n , sendo 1 o critério de maior importância e n o de menor importância. O termo r_j é a classificação do critério j e possui valor igual ao número j , o mesmo vale para r_k , e w_j é o peso do critério j .

- ❖ Atribuição Direta de Pesos (Direct Rating) – neste método, o decisor atribui diretamente os pesos para cada critério de acordo com uma escala pré-definida, em seguida são normalizados.
- ❖ Swing Weighting – Diferente da atribuição direta de pesos, neste método, o decisor precisa dos critérios e alternativas para dar valores aos critérios. Primeiro deve-se criar uma alternativa com os piores valores encontrados em todos os critérios, que será a base de comparação para priorização dos critérios. Em seguida, para priorizar os critérios em ordem de importância, propõe-se ao decisor que na possibilidade de melhorar a alternativa ruim em somente um critério, deve-se definir qual critério deveria ser melhorado. Este será o critério de maior importância, que sai dessa etapa de priorização. Com os critérios restantes, pergunta-se novamente ao decisor qual é o critério que deve ser melhorado, sendo este o segundo critério mais importante. E assim, deve-se prosseguir até encontrar a ordem de preferências do decisor. O critério mais importante recebe valor 100. O segundo mais importante, recebe um valor de acordo com sua importância em relação ao critério de maior valor. O terceiro também receberá valor de acordo com sua importância em relação ao critério mais importante, assim como todos os outros crité-

rios que se seguem. Depois de todos os critérios serem pontuados, os seus valores são normalizados (Saramago, 2010).

3.4. COMENTÁRIOS FINAIS

Este capítulo apresenta o método de otimização multiobjetivo usando AGs. Apesar de serem heurísticos, suas várias vertentes existentes na literatura ganharam espaço entre os pesquisadores, como alternativas para resolução de problemas muito complexos, onde métodos convencionais são de difícil aplicação.

Como a técnica usada neste trabalho, o Nondominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA II), usa o conceito de fronteira de Pareto como função avaliação, então ao final da execução do AGMO um conjunto solução é encontrado e nele estão as chamadas melhores soluções de compromisso. Contudo, muitas vezes o número de soluções encontradas é ainda muito grande, havendo a necessidade de uma análise multicritério para auxílio do decisor.

Em seguida, é descrito a teoria de análise multicritério, cuja função para o trabalho é escolher uma única solução para o problema dada algumas preferências do decisor. Estas metodologias ajudam o decisor a explicitar suas preferências e introduzi-las no problema, ou seja, incorporando no modelo, o perfil do decisor. São muitas as técnicas de análise multicritério existentes na literatura, onde a escolha de qual delas implementar vai depender do problema e do decisor. O método proposto neste trabalho implementa o PROMETHEE II para sobreclassificar as soluções encontradas pelo NSGA II.

4. DESENVOLVIMENTO

4.1. INTRODUÇÃO

No mercado atual de eletricidade vários tipos de contratos podem ser negociados, tais como bilateral e de opções, formando um portfólio de contratos de energia. A composição do portfólio visa aumentar os lucros do seu detentor e reduzir sua exposição ao mercado de curto prazo. Os agentes do setor tem que lidar com o risco de mercado associado à volatilidade do preço de energia no mercado de curto prazo. O gerenciamento desse risco também passa a influenciar nas decisões a serem tomadas.

Este capítulo descreve a metodologia usada para encontrar um portfólio de contratos de energia elétrica que satisfaça os objetivos do comercializador, levando em consideração vários critérios. Primeiro é encontrado um conjunto de portfólios no sentido de Pareto usando o NSGA II. Em seguida, é feita uma análise multicritério, usando o PROMETHEE II, para classificar os portfólios ótimos do melhor ao pior, respeitando as preferências do tomador de decisão.

4.2. METODOLOGIA PROPOSTA

A otimização de um portfólio segundo Skolpadungket et. al. (2007), envolve a aplicação de investimentos em vários ativos, com a finalidade de produzir lucros e minimizar os riscos em um dado período de tempo. O gerenciador da carteira de contratos tem dois objetivos a realizar: conseguir o maior retorno e reduzir o risco, tornando-se este um problema multiobjetivo.

A metodologia proposta neste trabalho usa-se a metodologia AG para trabalhar com a otimização multiobjetivo de contratos de energia elétrica, para um comercializador de eletricidade. Como funções objetivo foram usados o lucro do portfólio, a variância, o VaR (*Value-at-Risk*) e o CVaR (*Conditional Value-at-Risk*) (Guder, 2009 e Oliveira, 2006).

A otimização multiobjetivo abordada fornece um conjunto de soluções ótimas de Pareto, também chamado de fronteira de Pareto. Essa fronteira é encontrada neste trabalho através do AG *Nondominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II). A escolha deste algoritmo se deve à sua capacidade de assegurar o elitismo e a diversidade da população. Alguns estudos, como em Mishra et. al. (2009) e em Deb et. al. (2002) mostraram a superioridade do NSGA-II sobre outros AG multiobjetivos.

Usando o conjunto de soluções encontradas, é feita uma análise multicritério, através da metodologia PROMETHEE II, descrita no Capítulo 3, para modelar o decisor (nível de aversão ao risco). A escolha do método de escola francesa pode ser motivada segundo Azondekon e Martel (1999) pela dificuldade em encontrar explicitamente uma função utilidade ou até mesmo por não possuir essa função. Assim, os métodos são compreendidos com mais facilidade pelos usuários.

Apesar do PROMETHEE II não exigir uma comparação paritária entre os critérios, o decisor deve ser capaz de expressar a magnitude da sua preferência entre duas alternativas em um mesmo critério (Keyser e Peeters, 1996). Outra preferência do decisor inserida ao problema é a atribuição de pesos aos critérios, aplicada na maior parte dos problemas. A construção de funções de preferência coloca todos os critérios na mesma escala, facilitando a comparação entre eles. Tanto o NSGA II como o PROMETHEE II foram implementados no MATrix LABoratory (MATLAB).

4.2.1. Algoritmo Genético Multiobjetivo (AGMO)

O AGMO desenvolvido neste trabalho tem a finalidade de encontrar um conjunto de portfólios de contratos de energia elétrica, levando em consideração quatro funções objetivo: lucro do portfólio, variância, VaR e CVaR. No entanto, o algoritmo pode ser adaptado para outros tipos de portfólios e para maior ou menor número de funções.

Por ser uma otimização multiobjetivo, é feita uma abordagem baseada no conjunto de Pareto para lidar com valores incomparáveis (em termos de magnitude, por exemplo, lucros da ordem de milhares e risco em porcentagens), além de objetivos conflitantes. Assim, todas as funções têm a mesma importância, encontrando não só uma solução ótima, mas um conjunto ótimo de soluções. Para tais soluções, nenhuma melhora poderá ser feita em uma função objetivo sem que outra função seja sacrificada. A teoria de Pareto diz que uma solução i domina outra solução j , quando os valores das funções objetivo de i são iguais ou melhores que de j , sendo que, no caso de soluções iguais, i tem que ter pelo menos uma função melhor do que j . Neste trabalho, serão considerados somente os casos em que todos os valores das funções objetivo de uma solução são melhores que a outra.

O AGMO NSGA-II assegura o elitismo e a diversidade antes de definir a população para o cruzamento e mutação. A escolha leva em consideração se o indivíduo é dominado ou não, e se existem vários outros com desempenho similar. O algoritmo apresenta uma nova forma de

calcular a diversidade da população, através do cálculo das distâncias normalizadas das soluções. Para melhor entendimento do algoritmo genético proposto, é apresentado o fluxograma da Figura 5.

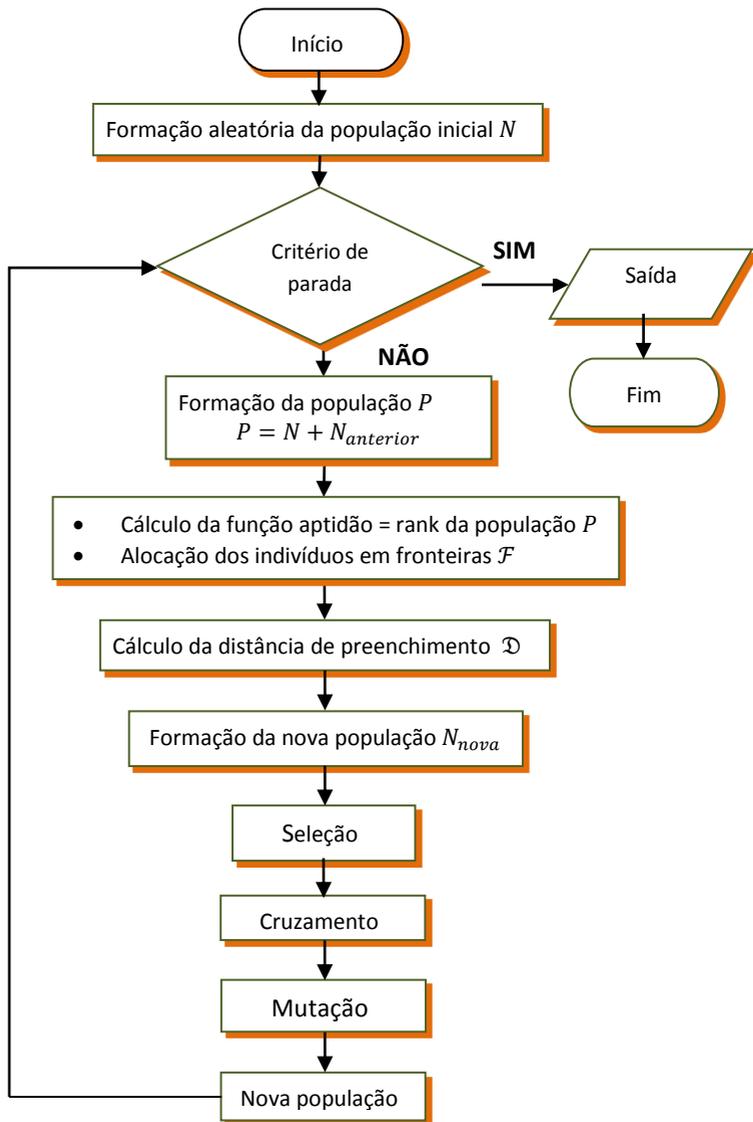


Figura 5 - Fluxograma do algoritmo genético multiobjetivo

4.2.1.1. Funções Objetivo

As funções objetivo do problema foram definidas de acordo com o trabalho de Guder (2009), que pretendem maximizar o lucro da venda de energia elétrica, dado pelo retorno esperado, com menores riscos.

Os dados de entrada são os retornos esperados para cada tipo de contrato, considerando a contratação de 100% de cada um em um dado horizonte de tempo. Para encontrar o verdadeiro retorno da carteira, cada um dos contratos recebe um peso, que é o percentual de cada contrato destinado à venda de energia, cuja soma é igual a um. O peso de cada contrato resulta no indivíduo ou solução. Assim, cada cromossomo é formado pelos pesos de cada um dos contratos: bilateral, spot, opções do tipo call e opções do tipo put, formando um portfólio.

Cada portfólio terá um valor de retorno e de medidas de riscos: média-variância, Var e CVaR, que são as quatro funções objetivo do problema. Assim, o AG busca maximizar o retorno e minimizar as outras três funções.

O retorno é calculado de acordo com os pesos atribuídos a cada contrato:

$$Ret = p_{bil}Bil + p_{spot}Spot + p_{call}Call + p_{put}Put \quad (42)$$

Onde:

Ret é o retorno total de acordo com a porcentagem de cada tipo de contrato.

p_{bil} , p_{spot} , p_{call} e p_{put} são os pesos dos contratos bilaterais, spot, call e put, respectivamente.

Bil é o retorno esperado caso a energia elétrica fosse vendida somente com contrato bilateral.

Spot é o retorno esperado caso a energia elétrica fosse vendida sem contrato, ou seja, ao preço spot.

Call é o retorno esperado caso a energia elétrica fosse vendida somente com contrato do tipo call.

Put é o retorno esperado caso a energia elétrica fosse vendida somente com contrato do tipo put.

A média-variância é a medida de risco proposta por Harry Markowitz (1952), calculada por:

$$V(p) = \sum_j^n \sum_i^n p_i p_j cov_{ij} \quad (43)$$

Onde p_i e p_j são os pesos do contrato i e do contrato j , respectivamente.

cov_{ij} é a covariância entre os contratos i e j , também é dado de entrada do problema.

O Valor sob Risco ou VaR (Value-at-risk) é outra medida de risco, que avalia a máxima perda que um portfólio pode ter em um determinado intervalo de tempo, considerando um determinado nível de confiança. O VaR é uma variável discreta, definida como o menor retorno ao longo do tempo, dado um nível de confiança c .

Outra medida de risco é o Valor Esperado sob Risco ou Condicional Value-at-Risk (CVaR) derivada do VaR. Diferentemente do VaR, o CVaR é a média das máximas perdas esperadas acima um determinado nível de confiança e ao longo de um horizonte de tempo (Oliveira, 2006).

Enquanto o VaR somente mostra o mínimo retorno que o comercializador de energia elétrica pode ter a um dado nível de confiança, o CVaR calcula a média das piores receitas além do nível de confiança. Neste trabalho, tanto o VaR como o CVaR são calculados *ex-post*.

4.2.1.2. Cromossomo proposto

Os indivíduos do AG proposto têm representação binária, cada contrato de energia possui 10 bits, totalizando 40 bits para cada cromossomo (Guder, 2009). No entanto, caso o AG seja aplicado a outros problemas de análise de portfólios de contratos com mais de quatro tipos de contratos, o tamanho de cada indivíduo aumentará 10 bits para cada contrato introduzido no portfólio.

A Figura 6 mostra um cromossomo completo que representa quatro contratos de energia, sendo os 10 primeiros bits o contrato spot, os próximos 10 bits o contrato bilateral, os próximos 10 bits o contrato de opção tipo call e os 10 últimos bits o contrato de opção tipo put.

Spot	Bilateral	Call	Put
0011000100	0110010111	1000011000	0101010111

Figura 6 - Representação binária de um cromossomo

4.2.1.3. População Inicial

A população inicial N_0 é formada por n indivíduos escolhidos aleatoriamente, permitindo assim, a diversificação da população.

4.2.1.4. Critério de Parada

O critério de parada do algoritmo genético usado é o número máximo de gerações. O AGMO continua calculando a aptidão, seleção, cruzamento e mutação enquanto o valor escolhido para o critério de parada não é atingido. Quando o critério for satisfeito o algoritmo fornecerá a população final encontrada.

4.2.1.5. Formação da população P

A primeira geração do AG usa somente os “n” indivíduos encontrados inicialmente, para aplicar os operadores genéticos. A partir da segunda geração, o AG cria uma população P , que é formada pela soma da população atual N com a população da geração anterior $N_{anterior}$, tornando-se uma população duas vezes ($2n$) maior do que a população N .

$$P = N + N_{anterior}$$

O somatório é necessário para que se possa calcular o *rank* e a distância de preenchimento. Ao somar as duas populações (N e $N_{anterior}$) o elitismo é assegurado, pois as soluções dominadas da solução anterior, que poderiam ter sido descartadas no cruzamento ou na mutação, agora terão novas chances de continuar na população atual (Deb et. al, 2002).

4.2.1.6. Cálculo da Aptidão

A função aptidão de cada indivíduo é dada pelo *rank*, assim o objetivo principal do AG é minimizar o valor do *rank* para cada solução. A aptidão (*rank*) é calculada da seguinte forma:

Cálculo do *rank*

```

Para  $i = 1$  até  $P$ 
   $rank(i) = 1$ 
  Para  $j = 1$  até  $P$ 
    Se  $retorno(i) < retorno(j)$ 
      Se  $variância(i) > variância(j)$ 
        Se  $Var(i) > Var(j)$ 
          Se  $CVar(i) > CVar(j)$ 
             $rank(i) = rank(i) + 1$ 
          Fim se
        Fim se
      Fim se
    Fim para
  Fim para

```

Figura 7- Algoritmo para cálculo do *rank*

O *rank* de cada indivíduo é calculado de acordo com a não-dominância de Pareto. Cada solução i , pertencente à população P , é comparada com todas as outras soluções de P . Para cada solução j (qualquer) que possua necessariamente o retorno maior do que o retorno de i , a variância, o VaR e o CVaR menores do que os respectivos valores de i , pode-se dizer que a solução j domina solução i . Assim, o *rank* de i é acrescido de uma unidade.

Se o *rank* de um indivíduo for igual a 1, significa que nenhum indivíduo o domina (não dominado), sendo tal indivíduo alocado na primeira fronteira (\mathcal{F}_1), que é a chamada fronteira de Pareto. Se o *rank* do indivíduo for igual a 2, então este indivíduo é dominado somente por um outro indivíduo e ele será alocado na segunda fronteira (\mathcal{F}_2). Se o *rank* do indivíduo for igual a 3, significa que somente outros dois indivíduos o dominam e este será alocado na terceira fronteira (\mathcal{F}_3), e assim por diante. Portanto, para saber quantos indivíduos dominam uma solução, basta diminuir uma unidade do valor do *rank*. Por exemplo, um indivíduo cujo *rank* seja 4, significa que ele é dominado por outros 3 indivíduos.

O objetivo da alocação dos indivíduos em fronteiras é permitir que o cálculo da distância de preenchimento (\mathfrak{D}) seja feito somente entre indivíduos da mesma fronteira. Pois a distância \mathfrak{D} será usada como um segundo critério para formação da nova população e para a seleção, ambos descritos posteriormente.

4.2.1.7. Cálculo da Distância de Preenchimento (\mathfrak{D})

Segundo Linden (2008) a preservação da diversidade da população é importante, pois evita a convergência genética do conjunto de soluções, ou seja, evita que um esquema considerado mais apto domine a população (elitismo). O método proposto para formação de uma fronteira de Pareto homogênea baseia-se em uma abordagem chamada *crowded-comparison* (Deb et. al., 2002), que mede a densidade de um indivíduo na fronteira em que se está situado. A densidade é, portanto, uma medida da proximidade das soluções. Quanto mais densas, mais próximas estão as soluções. Em contrapartida, quanto menos densas mais distantes as soluções estão.

A estimação da densidade de uma solução é medida pela distância de preenchimento (\mathfrak{D}) e calculada somente por soluções pertencentes à mesma fronteira \mathcal{F}_n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Isto se deve ao fato de \mathfrak{D} ser um segundo critério na escolha das soluções que irão pertencer à nova população (N_{nova}) e na seleção dos pais que irão para o cruzamento e mutação, quando as aptidões das soluções forem iguais.

A Figura 8 mostra um conjunto de soluções com duas funções objetivo, f_1 e f_2 , onde os pontos em círculos azuis pertencem à fronteira de Pareto e os pontos verdes quadrados são as soluções dominadas. Para calcular \mathfrak{D} da solução i , deve-se primeiro classificar as soluções da fronteira de Pareto em ordem ascendente de acordo com a função objetivo f_1 . Em seguida, calcula-se a distância normalizada entre as duas soluções adjacentes, $(i + 1)$ e $(i - 1)$, havendo necessidade de ter no mínimo três pontos na fronteira. Faz-se o mesmo para a função f_2 e seu resultado é somado à distância encontrada em f_1 , resultando na distância de preenchimento de i .

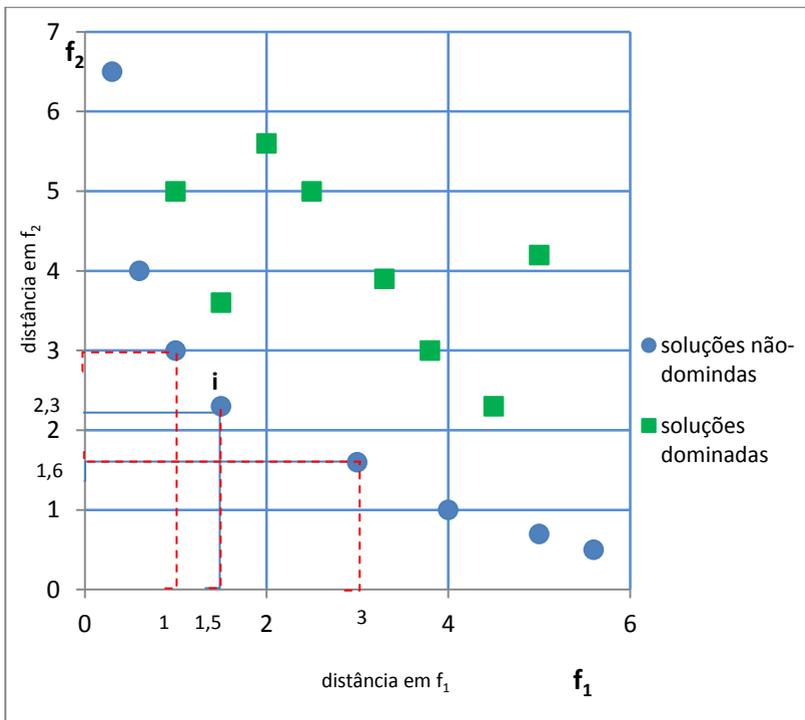


Figura 8- Cálculo do *crowding distance*. Fonte: Deb et. al., 2002

O algoritmo abaixo mostra os passos realizados no cálculo da distância de preenchimento (\mathcal{D}). Neste algoritmo, $\mathcal{V}[i]_m$ é o valor da função objetivo m do indivíduo i , pertencente à fronteira \mathcal{F}_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), que é a fronteira em que se encontra o indivíduo i , e f_m^{max} e f_m^{min} são os valores máximos e mínimos (valores das extremidades) da função objetivo m .

Cálculo da Distância de Preenchimento (\mathcal{D})

Para $n = 1$ até P

P é o número de possíveis

fronteiras \mathcal{F}

$l = |\mathcal{F}_n|$

$l =$ número de soluções

em \mathcal{F}_n

faça $\mathcal{D} = 0$

inicializa distância da popu-

lação em \mathcal{F}_n

Para cada função objetivo m

$\mathcal{V} = \text{classificação}(\mathcal{V}, m)$	classificação das soluções
em ordem ascen-	cente de acordo com objeti-
vo m	
$\mathfrak{D}[1] = \mathfrak{D}[l] = \infty$	cálculo das distâncias
Para $i = 2$ até $(l - 1)$	
$\mathfrak{D}[i] = \mathfrak{D}[i] + \frac{(\mathcal{V}[i + 1]_{,m} - \mathcal{V}[i - 1]_{,m})}{f_m^{max} - f_m^{min}}$	
Fim para	
Fim para	
Fim para	

Figura 9- Algoritmo para calcular distância de preenchimento

Primeiramente, antes de calcular a distância de preenchimento, a população é classificada em ordem ascendente de acordo com o valor de cada função objetivo m pertencente a uma dada fronteira \mathcal{F}_n . Em seguida, para cada objetivo m , atribui-se para o primeiro e para o último indivíduo ($\mathfrak{D}[1]$ e $\mathfrak{D}[l]$, respectivamente) o valor infinito para suas distâncias.

O valor da distância atribuído aos indivíduos intermediários é igual à diferença normalizada absoluta do valor da função das duas soluções adjacentes, ou seja, considerando a solução i , se pega o valor da primeira solução acima dele ($i + 1$), subtrai-se da primeira solução abaixo ($i - 1$), em seguida normaliza-se este valor dividindo-o pela diferença da solução de maior valor (f_m^{max}) pela solução de menor valor (f_m^{min}) da função. Este cálculo é feito para cada uma das funções objetivo m e a distância de preenchimento de cada solução é a soma das distâncias calculadas em cada uma das funções m .

Uma comparação entre duas soluções “ a ” e “ b ” pertencentes à mesma fronteira \mathcal{F}_n , pode ser feita após o cálculo de suas distâncias \mathfrak{D} . Supondo que o valor \mathfrak{D} de “ a ” seja menor que de “ b ”, então se pode dizer que “ a ” é mais denso do que “ b ”, pois os vizinhos adjacentes de “ a ” estão mais próximos a ele. Portanto, a distância de preenchimento é usada como ferramenta para manter a homogeneidade das soluções, evitando concentrações de soluções em um único ponto.

4.2.1.8. Formação da população (N_{nova})

A população que deverá ir para seleção, cruzamento e mutação deve ter o mesmo número de indivíduos que a população N , ou seja, de-

ve ter metade da população P . A nova população será chamada de N_{nova} . Sua formação é feita a partir da população P , cujo tamanho é duas vezes maior do que N . Então, as N melhores soluções de P formarão N_{nova} .

A escolha é feita primeiro percorrendo a fronteira \mathcal{F}_1 , onde estão os indivíduos não dominados de rank igual a 1. Se o número de soluções em \mathcal{F}_1 for igual a N , então a nova população será formada por todas as soluções de \mathcal{F}_1 . Se o número de soluções de \mathcal{F}_1 for maior do que N , então os indivíduos serão classificados de acordo com a distância de preenchimento e os N indivíduos com maior valor \mathcal{D} formarão a N_{nova} . No entanto, se a primeira fronteira possuir menos de N soluções, os indivíduos da próxima fronteira (\mathcal{F}_2) completarão o restante. Se ainda assim N_{nova} não estiver completa, os indivíduos de \mathcal{F}_3 completarão a nova população, e assim por diante, até completar as N soluções.

Quando a última fronteira a formar N_{nova} ultrapassar o número de soluções requerido deve-se classificar os indivíduos de acordo com a distância de preenchimento e escolher aqueles com maior valor, para completar a nova população (N_{nova}). A Figura 10 demonstra este processo, onde os indivíduos rejeitados são aqueles com maiores índices de dominação ou os indivíduos com maiores distância de preenchimento pertencentes à última fronteira que formou a nova população.

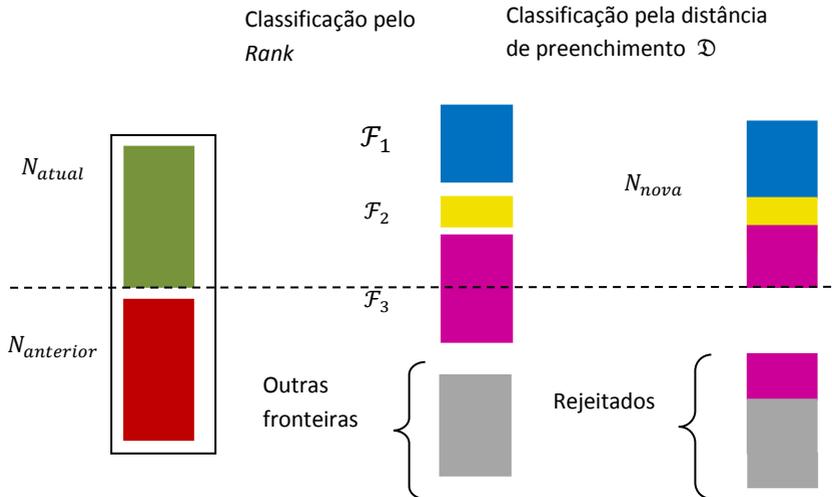


Figura 10 - Seleção da nova população

4.2.1.9. Seleção

O método de seleção implementado no trabalho é o torneio. Dentre os indivíduos da população N_{nova} , são escolhidos n indivíduos para o torneio. O que possuir melhor aptidão ganha, tornando-se um pai que irá para o cruzamento e mutação. Caso a aptidão dos indivíduos seja igual, a escolha será feita considerando a distância de preenchimento \mathfrak{D} , onde aquele com maior valor \mathfrak{D} será o escolhido. Este método proposto por Deb et. al. (2002), chamado de *crowded-comparison operator*, serve para manter a diversidade da população, além de homogeneidade na fronteira.

A Tabela 7, por exemplo, contém uma população formada por quatro indivíduos, cada um possui um valor correspondente à função aptidão e a distância de preenchimento.

Tabela 7 - população com seu valor aptidão e distância de preenchimento

Indivíduos	Aptidão (rank)	Distância de preenchimento (\mathfrak{D})
A1	1	10
A2	2	6
A3	1	13
A4	3	4

O torneio é feito com dois indivíduos sorteados na população com igual probabilidade de escolha. A quantidade de torneios feita é de acordo com o número de pais necessários para o cruzamento e mutação. Supondo que são necessários quatro pais, então são feitos quatro torneios. A Tabela 8 mostra os indivíduos escolhidos para os torneios. Considerando este um problema de minimização, neste exemplo são escolhidos os indivíduos com menor valor de aptidão. Como nos três primeiros torneios os indivíduos possuem valores diferentes, vence aquele com menor valor. Já no quarto torneio, os indivíduos possuem mesmo valor de aptidão, então, a distância de preenchimento é usada como segundo critério para escolher o pai, nesse caso, como A3 possui maior valor em \mathfrak{D} , este será selecionado.

Tabela 8 – Torneios e seleção de pais

Torneio	Pais selecionados
A1 X A4	A1

A3 X A2	A3
A4 X A2	A2
A3 X A1	A3

4.2.1.10. Cruzamento

O operador de cruzamento (crossover) usado no problema proposto foi o cruzamento uniforme. Este método sorteia um vetor binário, chamado de máscara de recombinação, com a mesma quantidade de números de bits dos pais. Os genes do pai 1 são selecionados para o primeiro filho, quando for número 1 no vetor, e os genes do pai 2 são selecionados, quando for zero no vetor. Para o segundo filho será o contrário.

Suponha que dois pais foram selecionados para o cruzamento, pai1 e pai2 e uma máscara de recombinação foi sorteada, como mostra Tabela 9. Onde houver número 1 na máscara de recombinação, o gene do pai1, correspondente a esta posição, irá para o filho1 e onde houver número zero, o gene do pai2 irá para o filho1. Para o filho2 são alocados os genes contrários.

Tabela 9 - Cruzamento

Máscara de recombinação	1 1 0 0 1 1 0 0 1
pai1	1 1 0 1 0 0 0 1 0
pai2	0 1 1 0 0 1 0 1 1
Filhos gerados	
filho1	1 1 1 0 0 0 0 1 0
filho2	0 1 0 1 0 1 0 1 1

4.2.1.11. Mutação

A mutação é feita da seguinte forma: um número aleatório, entre 0 e 1, é sorteado para cada bit do indivíduo, caso seja menor do que a taxa escolhida, por exemplo 0,02, o bit participará da mutação, caso contrário não. Os bits participantes da mutação são alterados aleatoriamente.

4.2.1.12. Saída

Quando o número máximo de gerações é atingido a execução do algoritmo é interrompida e a população final é fornecida.

4.2.2. Análise Multicritério

Após encontrar a fronteira de Pareto, usando o algoritmo genético NSGA-II descrito anteriormente, os portfólios precisam ser ordenados para que o decisor possa escolher a alternativa que seja mais aderente ao seu nível de aversão ao risco. A análise multicritério desenvolvida neste trabalho usa o método Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations II (PROMETHEE II), que é um método de sobre-classificação pertencente à Escola Europeia.

Segundo Brans et al (1986) as principais características do PROMETHEE são a simplicidade, clareza e estabilidade. As informações requeridas dos decisores para sua construção e execução são somente duas: uma função de preferência e um peso para cada um dos critérios.

O que antes era chamado de função objetivo na otimização, na análise multicritério será chamado de critério. Assim, os valores do retorno, da variância, do VaR e do CVaR serão usados para encontrar a melhor alternativa, segundo as preferências do decisor.

A atribuição de pesos (w) utilizada no trabalho foi o *swing weighting*, pois segundo Saramago (2010), este método respeita a importância relativa dos critérios. Primeiro, o decisor precisa considerar uma alternativa muito ruim, podendo ser verdadeira ou não. Em seguida, o decisor deve ser questionado se na possibilidade de poder melhorar somente um critério nesta alternativa, qual ele escolheria. O critério escolhido será considerado o melhor, ou seja, aquele com maior importância, comparado aos outros critérios. Depois, o decisor precisa escolher dentre os critérios que sobraram, qual ele escolheria para ser melhorado. Sendo este segundo melhor. Este procedimento deve ser feito até que todos os critérios sejam ordenados do melhor ao pior.

O melhor critério deve receber nota 100. O segundo deve receber um valor relativo à sua importância comparado ao melhor critério. O terceiro melhor critério também recebe uma nota relativa ao melhor critério, sendo assim feito com todos os critérios. Em seguida os pesos são normalizados.

Todas as funções de preferências (Tabela 6 – capítulo 3) estão implementadas neste trabalho, deixando a cargo do decisor escolher qual função de preferência a ser usar em cada critério. Conforme descrito no Capítulo 3, são seis tipos de funções de preferência e dependendo da função o decisor precisa decidir os valores dos limiares de indiferença (q), de preferência estrita (p) e do parâmetro gaussiano (s).

Para a função retorno, que é maximizada, o valor da preferência de uma alternativa sobre outra é dada pela função de preferência $P_{re}(a, b) = F_{re}[d_{re}(a, b)]$, onde a diferença entre as alternativas a e b neste critério é $d_{re}(a, b) = g_{re}(a) - g_{re}(b)$ e a $0 \leq P_{re}(a, b) \leq 1$. Como a variância, VaR e CVaR são funções de minimização, a função de preferência deve ser invertida $P_j(a, b) = F_j[-d_j(a, b)]$.

O próximo passo executado é o cálculo do índice de preferência agregada (π), que é o somatório das funções de preferências ponderadas de uma alternativa em relação à outra $\pi(a, b) = \sum_{j=1}^k P_j(a, b)w_j$.

Com o índice de preferência agregada, calcula-se o fluxo positivo para cada alternativa, $\phi^+(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \pi(a, x)$, que é o somatório dos índices de preferência agregada de uma alternativa em relação a todas as outras. Também é calculado o fluxo negativo $\phi^-(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \pi(x, a)$, que é o somatório dos índices de preferência agregada de todas as outras alternativas em relação à alternativa avaliada.

Para que as alternativas possam ser ordenadas completamente é preciso calcular o fluxo líquido de sobreclassificação $\phi(a) = \phi^+(a) - \phi^-(a)$. Se $\phi(a) > \phi(b)$ então a é preferível a b e vice-versa. Se $\phi(a) = \phi(b)$ então a é indiferente a b . As alternativas são, então, ordenadas de acordo com o fluxo líquido, sendo aquela com maior valor considerada melhor.

4.3. CONCLUSÃO

O modelo proposto neste capítulo apoia-se em heurísticas para a otimização de uma carteira de contratos de energia elétrica para um comercializador de energia. AG implementado, NSGA-II, baseia-se na fronteira de Pareto como função de avaliação. Como método de preservação da diversidade este algoritmo implementa uma função que calcula a densidade de uma solução, tendo esta função como um critério de desempate para soluções que se encontram em uma mesma fronteira. Como consequência da teoria de Pareto, o AGMO encontra várias soluções ao invés de somente uma, que representam as melhores soluções de compromisso.

Ao final desta etapa o comercializador possuirá ainda em suas mãos muitos portfólios para tomar a decisão e escolher um de sua preferência. Apesar de todos serem considerados bons, ainda fica complicada a tarefa da escolha de uma mais adequada. Para resolver este problema é implementado um método multicritério de apoio à decisão. No PRO-

METHEE II as funções objetivo são chamadas de critérios e as soluções de alternativas. As avaliações das alternativas junto com a inserção das preferências do decisor ao problema encontrarão a melhor solução. Na verdade, o método implementado faz uma ordenação completa das alternativas, da melhor a pior.

É preciso deixar claro que as funções objetivo implementadas no trabalho foram baseadas em trabalhos anteriores, portanto outras funções podem ser acrescentadas ao modelo, assim como estas funções podem ser reduzidas.

5. ANÁLISE DE RESULTADOS

5.1. INTRODUÇÃO

Este capítulo aplica o AG NSGA-II a dois problemas. O primeiro aplica o AG em um problema de otimização de carteiras de ativos, usado como referência. O segundo problema é uma análise de portfólios com contratos de venda de energia elétrica. Posteriormente, uma análise multicritério usando o PROMETHEE II é aplicada ao conjunto de soluções ótimas no sentido de Pareto, encontradas somente pelo segundo problema. Assim, as soluções serão ordenadas das melhores as piores de acordo com as preferências do decisor.

5.2. ANÁLISE NSGA-II

5.2.1. Problema 1

O problema teste aplicado ao NSGA II é um problema de otimização, cujo objetivo é encontrar a melhor carteira formada por 31 ativos. São fornecidos como dados de entrada o retorno médio, o desvio padrão e a correlação dos 31 ativos da carteira a ser otimizada. Para comparar os resultados encontrados podem ser retirados do site as soluções ótimas da fronteira de Pareto. Os dados usados são os mesmos que Chang et. al. (2000), Skolpadungket e Dahal *et al.* (2007) e Guder (2009) usaram para analisar os resultados fornecidos por seus programas.

Na execução do NSGA-II, a proporção de cada tipo de ativo, que compõe a carteira foi representada por um número binário de 10 bits. As simulações apresentaram um bom resultado com taxa de crossover de 0,9 e taxa de mutação de 0,07. A taxa de crossover utilizada está dentro dos valores especificados por Linden (2008). Já a taxa de mutação, que normalmente usa-se um valor de $1/l$, onde l é o comprimento do cromossomo binário (Deb et al, 2002), aqui foi aumentada para 0,07 resultando em melhores soluções. Os melhores resultados encontrados exigiram grande número de gerações.

A Figura 11 mostra o resultado encontrado para uma população de 250 indivíduos após 1200 gerações. A curva azul é a fronteira encontrada por Chang et. al. (2000) e os pontos vermelhos fazem parte da fronteira encontrada pelo NSGA II. Pode-se notar que para valores muito baixos de retorno e variância não há uma boa distribuição da fronteira de Pareto. No entanto, grande parte da solução encontrada é bem distribuída e possui valores muito próximos da fronteira de referência.

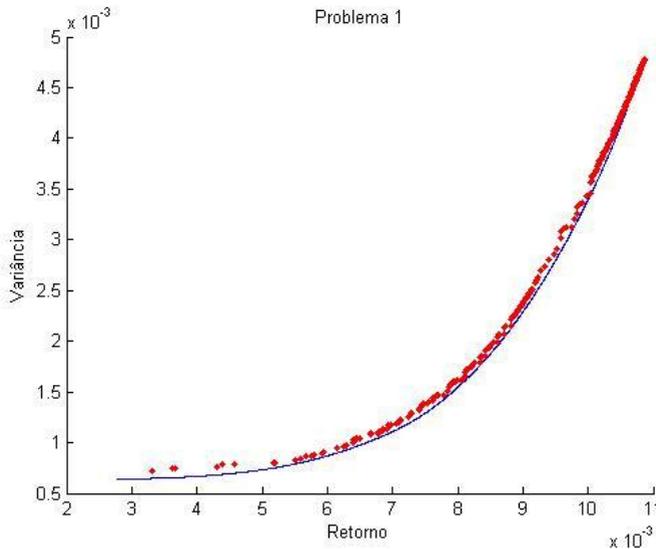


Figura 11 - Resultados do problema 1

5.2.2. Problema 2

O Problema 2, baseado nos trabalhos do Arfux (2004) e Guder (2009) tem como objetivo principal a maximização do lucro de uma empresa comercializadora de energia elétrica, cujo contrato de compra já está fixado em 1000MWh. Deste montante de energia, 500MWh são comprados por um contrato bilateral no valor de 25,00 R\$/MWh e a outra metade é comprada por um contrato flexível com preço fixo de 20,00 R\$/MWh acrescido 50% do custo marginal de operação (preço Spot), como pode ser observado na Tabela 10.

Tabela 10- Composição do contrato de compra de energia elétrica

Contrato de Compra de Energia Elétrica	
Energia (MWh)	Preço R\$/MWh
500	25,00
500	$20,00 + (P_{spot}/2)$

Com o contrato de compra definido, o objetivo agora, é encontrar o melhor portfólio de contratos de venda de energia elétrica, que possibilite maior retorno com riscos aceitáveis para o decisor. Os tipos de

vendas considerados neste exemplo são por contratos bilaterais, venda no spot e através dos contratos derivativos call e put. O preço do contrato bilateral é de 40,00 R\$/MWh, o preço de exercício da put e da call também é de 40,00 R\$/MWh.

Tabela 11 - Contratos considerados para venda de energia elétrica

Contratos de Vendas de Energia ELétrica				
	Spot	Bilateral	Call	Put
Preço (R\$/MWh)	P_{spot}	40,00	40,00+prêmio	40,00-prêmio

Os dados usados no trabalho são referentes ao Submercado Sul do Brasil. Arfux (2004) simulou uma previsão do custo marginal de operação de 70 cenários num horizonte de 60 meses e calculou a expectativa do custo marginal de operação, como mostra a Figura 12 - Expectativa de Custo Marginal de Operação (Base Mensal).

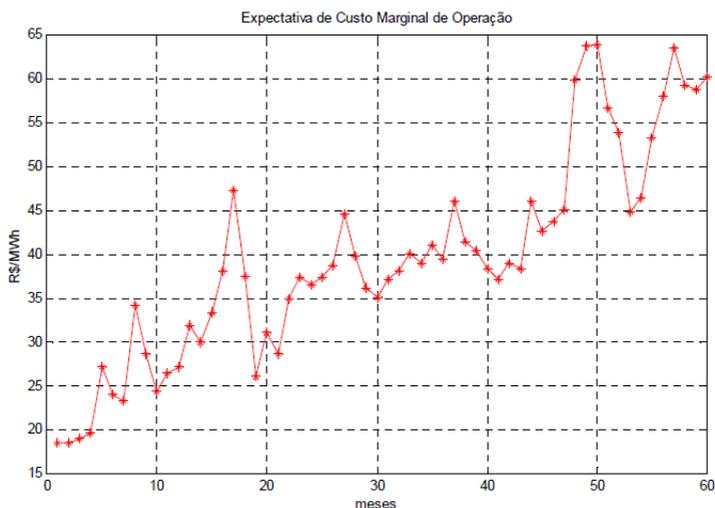


Figura 12 - Expectativa de Custo Marginal de Operação (Base Mensal)

Fonte: Arfux (2004)

❖ Caso I: análise de retorno e variância

Esta primeira simulação irá considerar somente dois objetivos, o retorno e a variância, como análise de risco, do portfólio. O cromossomo do AG representa a porcentagem de cada contrato usado para a ven-

da de eletricidade. Sua representação é binária e cada contrato é formado por 10 bits, assim cada indivíduo possui 40 bits. A escolha de 10 bits foi para representar a parcela de cada contrato com quatro casas decimais, variando de 0 a 1. Como o somatório do valor decimal encontrado para cada contrato pode ser maior ou menor do que 1, esses valores são então normalizados, ou seja, cada contrato é dividido pela soma de todos os contratos da mesma carteira. Alguns exemplos de composição de uma carteira podem ser vista na Tabela 12.

Tabela 12 - Código binário da porcentagem equivalente a cada contrato de energia

Spot											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Valor decimal	Valor Normalizado
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	212	0,12687 = 12,687%
Bilateral											
11	12	13	14	15	16	17	18	18	20	Valor decimal	Valor Normalizado
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	785	0,46978 = 46,978%
Call											
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	Valor decimal	Valor Normalizado
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	56	0,03351 = 3,351%
Put											
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	Valor decimal	Valor Normalizado
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	618	0,36984 = 36,984%
Representação Binária do portfólio											
001101010011000100010001110001001101010											

Esta tabela representa um cromossomo, também chamado de indivíduo, solução ou portfólio. São quarenta bits representando um portfólio de quatro contratos, sendo cada contrato representado por 10 bits. Esses 10 bits representam um número decimal, por exemplo, o contrato spot tem o valor de 212. Como o problema requer esse valor em porcentagem e o somatório dos quatro contratos tem que ser igual a 100%, então os valores dos contratos são somados ($212+785+56+618=1671$) para em seguida serem normalizados ($(212/1671) = 0,12687$), e assim por diante.

O número de gerações usado no NSGA-II foi de 600 e 300 indivíduos na população. Várias taxas de crossover foram simuladas e a que apresentou melhor resultado foi uma taxa de 0,9. A taxa da mutação uniforme usada foi 0,025, que é o valor definido por $1/l$, onde l é o comprimento do cromossomo binário (Deb et al, 2002).

Com exceção da primeira geração, em todas as outras gerações a população atual é misturada com a população anterior, formando uma nova população P . Esta técnica é usada para manter os melhores indivíduos na população. Assim, todos os indivíduos da população P têm seu retorno (lucro) e o risco associados. Como em um AGMO procura-se melhorar todas as funções objetivos, a função fitness usada não pode ser somente um dos objetivos, portanto o NSGA-II usa o *rank* como função de desempenho. O *rank* é calculado através da não dominância de Pareto encontrado para cada indivíduo, ou seja, aqueles que não são dominados por nenhum outro indivíduo, recebem *rank* igual a 1, pertencendo à fronteira 1, os indivíduos dominados por somente um outro indivíduo, recebe *rank* igual a 2, pertencendo à fronteira 2, e assim por diante. A população é dividida em fronteiras. Portanto, o objetivo do AGMO é encontrar uma população com *rank* igual a 1. Essa é considerada a população ótima, ou seja, a fronteira ótima de Pareto, que fornece o melhor *tradeoff* entre a função retorno e a função risco.

Após encontrar o *rank* dos 600 indivíduos, calcula-se a distância de preenchimento (\mathfrak{D}) para cada um deles. A distância de preenchimento é uma função objetivo secundária, que serve para desempate na seleção dos indivíduos. Esta operação é chamada de *crowded comparison operator*. Considere quatro cromossomos de uma população, conforme apresentado na Tabela 13.

Tabela 13 - Exemplo de quatro portfólios

	Spot %	Bilateral %	Call %	Put %	Risco %	Retorno %	\mathfrak{D}	Rank
1	0	0,99	0	0,01	5,03	18,34	∞	1
2	0	64,15	0	35,85	0,7	18,18	0,013547	1
3	0	39,5	13,57	46,93	0,10	15,09	0,011341	1
4	9,28	51,47	0,08	39,17	0,14	16,02	0,016498	1

O método de seleção de crossover do NSGA-II é o torneio entre dois cromossomos. Por exemplo, se os cromossomos 2 e 3 (Tabela 13) forem escolhidos para o torneio, aquele que tiver menor *rank* seria selecionado. Como neste caso, ambos tem o mesmo *rank*, o cromossomo 2 será escolhido, pois possui

maior distância de preenchimento. Isso significa que os cromossomos vizinhos do 2 estão mais afastados dele do que os vizinhos do cromossomo 3. Pode-se notar que a distância de preenchimento do indivíduo 1 é infinita, isso se deve ao fato de que ele está localizado na extremidade das funções objetivo, possui o maior valor de retorno e de risco. O mesmo acontece com o indivíduo que possui os menores valores. Assim, quando 1 participar de um torneio com outro indivíduo de mesmo *rank*, o 1 sempre será escolhido. A distância de preenchimento é o método implementado pelo NSGA-II para promover diversidade das soluções ao longo da fronteira de Pareto.

Antes de se fazer o crossover, é preciso voltar a população à sua quantidade inicial de 300 indivíduos. A seleção também é usada na formação desta nova população que irá participar do crossover e da mutação. Da população P , que possui 600 indivíduos, somente 300 farão parte da nova população. Como demonstrado no capítulo 4, população corrente é misturada à população anterior, formando um conjunto de 600 indivíduos. Este conjunto é avaliado pela função fitness e cada cromossomo tem seu \mathcal{D} calculado. Somente então serão escolhidos os 300 melhores indivíduos para participar do crossover e da mutação. Os indivíduos são colocados em ordem decrescente do rank, primeiro são os indivíduos de rank 1, que estão na fronteira 1, depois vem o 2 e assim por diante. Para preencher a nova população são escolhidos primeiro os indivíduos da fronteira 1, em seguida da fronteira 2 depois da 3 e assim até preencher os 300 lugares. Quando a última fronteira escolhida para formar o conjunto ultrapassa o número necessário de indivíduos, os quais serão selecionados de acordo com o \mathcal{D} . A mistura dessas duas populações é a técnica do NSGA-II de manter os melhores indivíduos durante as gerações e o uso da distância de preenchimento serve para manter a diversidade da população.

O crossover usado no trabalho foi o crossover uniforme, pois este tem uma capacidade maior de combinar bits diferentes. Dois indivíduos são selecionados, como descritos anteriormente, em seguida um vetor de recombinação é criado para que seja decidido qual dos genes dos pais vão para os filhos.

O resultado da otimização dos portfólios de contratos de energia elétrica encontrado pode ser visto na Figura 13, onde no eixo horizontal encontra-se o risco associado à carteira e no eixo vertical encontra-se o retorno esperado da carteira, os pontos em vermelho são a fronteira de Pareto.

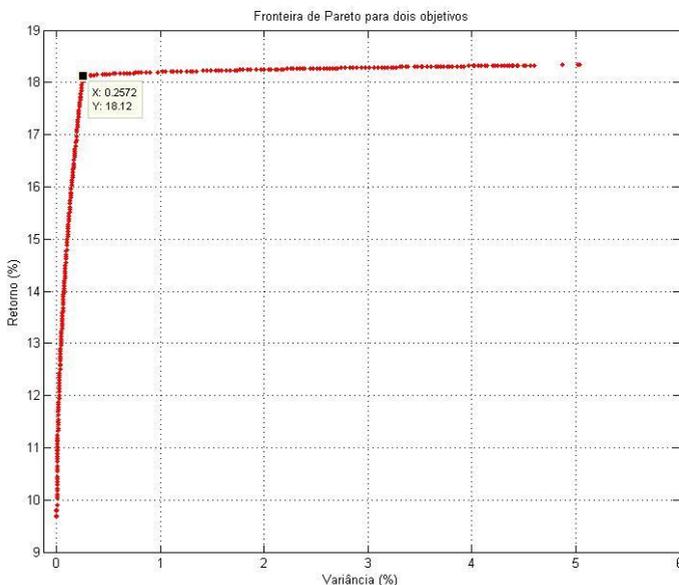


Figura 13 – Fronteira de Pareto com 300 indivíduos após 600 gerações

Percebe-se neste gráfico que o retorno cresce rapidamente até os 18% enquanto que a variância cresce pouco. Em seguida este cenário muda e a variância começa a crescer muito mais do que o retorno. Na população final encontrada, a maior parte das carteiras possui 0% de compras no mercado spot e venda de call, como pode ser visto no apêndice A. Isto acontece devido ao maior risco associado ao mercado spot e porque a venda de call provavelmente deve reduzir o retorno do comercializador.

❖ Caso II: análise de retorno e CVaR

Neste caso II são considerados dois objetivos: o retorno e o CVaR. A mensuração do risco pelo CVaR é usado por Dahlgren et al (2003), Carrion et al (2007), Cabero et al (2010), pois para estes autores o CVaR quantifica melhor o risco ao fornecer a média das piores perdas para um dado nível de confiança. Aqui o nível de confiança é de 95%

O NSGA-II aplicado este problema possui as mesmas características do caso anterior. São considerados quatro tipos de contratos: venda no spot, realização de contratação bilateral, venda de opção call e com-

pra de opção put. O cromossomo binário representa a porcentagem relativa a cada contrato. O valor de cada contrato é o mesmo das Tabela 10 e Tabela 11.

Os valores de taxa de crossover e mutação usados aqui são os mesmos do Caso I. No entanto, o número de gerações e de indivíduos foram menores, como se vê na tabela abaixo.

Tabela 14 - Parâmetros do AGMO

População	100
Quantidade de gerações	200
Taxa de crossover	0,9
Taxa de mutação	0,025

A Figura 14 mostra a fronteira de Pareto encontrada. Já a Figura 15 mostra os valores da variância do conjunto de soluções encontradas.

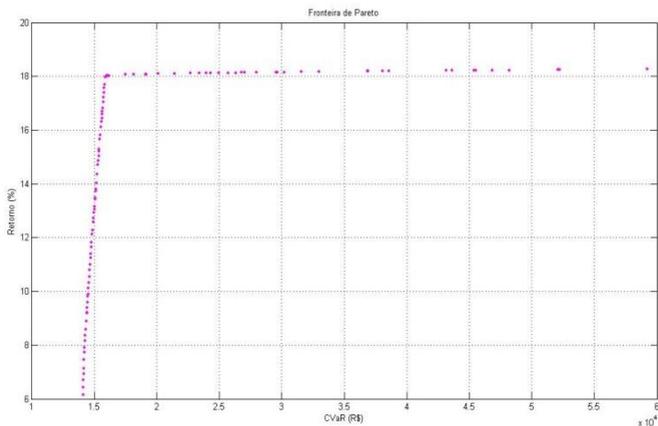


Figura 14- Fronteira de Pareto para retorno e CVaR

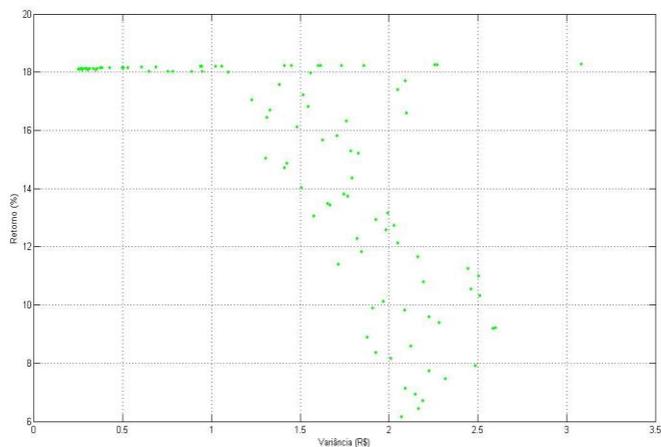


Figura 15 - Gráfico do retorno pela variância da fronteira de Pareto

Comparando as duas figuras, percebe-se que a variância e o CVaR não crescem linearmente iguais, onde se vê que o baixo valor de uma não implica no baixo valor da outra. Assim, a fronteira de Pareto para os casos I e II possuem características diferentes. Em ambos os casos prevalece maior contratação de opções do tipo put. Já os contratos de call e spot possuem um crescimento maior no caso 2, mas ainda assim não é tão alto quanto à put. Os contratos bilaterais, também difere ente o problema 2 e o problema 1, sendo menor no primeiro.

Na Tabela 15 são representadas quatro soluções da fronteira de Pareto encontradas pelo NSGA-II, de um total de 100 soluções.

Tabela 15 - Contratos da fronteira de Pareto

Spot	Bilateral	Call	Put	Retorno	Risco	CVaR	rank	\mathfrak{D}
20,24	2	27	50,76	7,46	2,31	14179	1	0,11
0	87,95	0	12,05	18,28	3,02	59203	1	∞
0	42,85	0	57,15	0,30	18,02	18142	1	0,0716
0	63,89	0	36,11	18,18	0,68	32977	1	0,288

Para mostrar importância da distância de preenchimento sobre a preservação da diversidade da população, a Figura 16 mostra a simulação do NSGA-II com e sem o uso do \mathfrak{D} como uma função fitness secundária. O torneio é feito usando somente o rank.

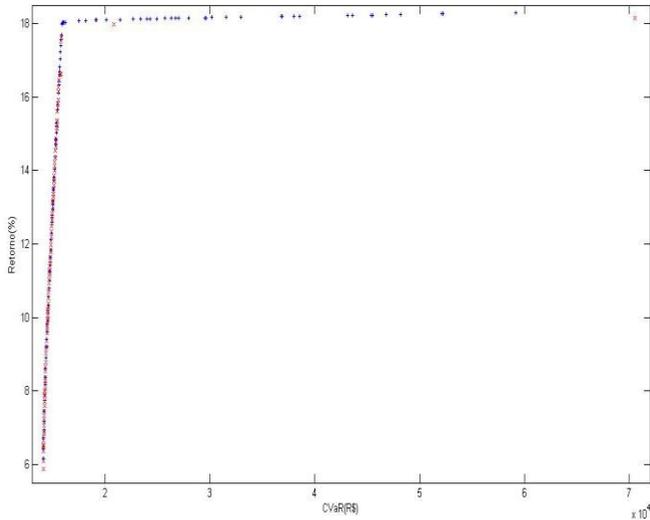


Figura 16- Fronteira sem usar distância de preenchimento

A Figura 17 representa uma ampliação da Figura 16 ampliada. Os pontos em azul fazem parte da fronteira de Pareto encontrada com o uso da distância de preenchimento, enquanto que, em vermelho está representada a fronteira sem a distância de preenchimento. Pode-se notar que os pontos azuis são melhores distribuídos ao longo da fronteira, comprovando a eficácia da distância de preenchimento, sendo que os pontos em vermelho não são bem distribuídos na fronteira.

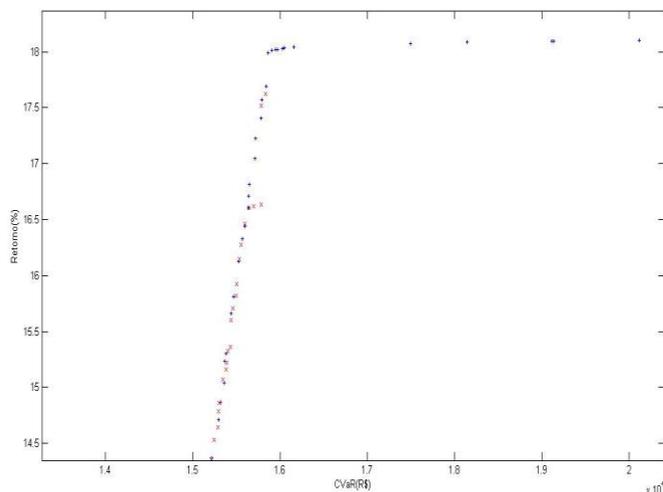


Figura 17-Fronteira sem usar distância de preenchimento ampliada

❖ Caso III: análise de retorno, CVaR, variância e VaR

As simulações anteriores mostraram que o algoritmo fornece bons resultados para o tipo de problema abordado neste trabalho: encontrar a fronteira eficiente de Pareto formada por portfólios de contratos de energia elétrica.

O caso III aplica o NSGA-II ao problema considerando quatro funções objetivo: retorno, variância, VaR e CVaR. Como nos casos 1 e 2, são considerados os mesmos tipos de contratos e os mesmos valores de energia pagos conforme Tabela 11.

Para o problema foram considerados 200 indivíduos, 400 gerações, uma taxa de crossover de 0,9 e taxa de mutação de 0,025. A Figura 18 mostra o resultado do retorno e variância dos 200 portfólios encontrados.

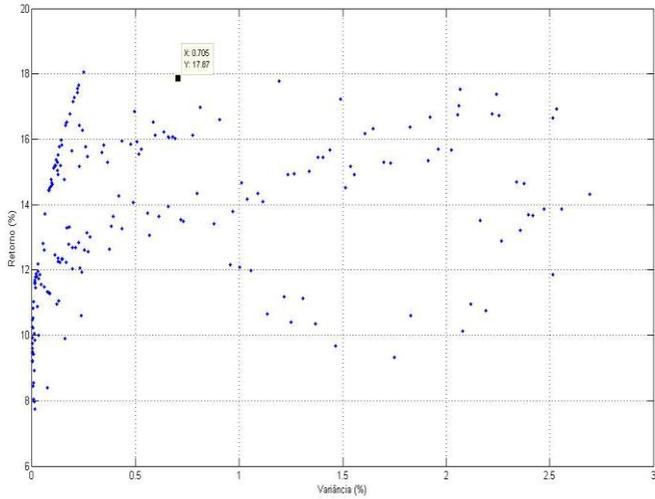


Figura 18 - Fronteira de Pareto para retorno e variância com 4 funções objetivos

A relação do retorno em relação ao CVaR pode ser visto na Figura 19.

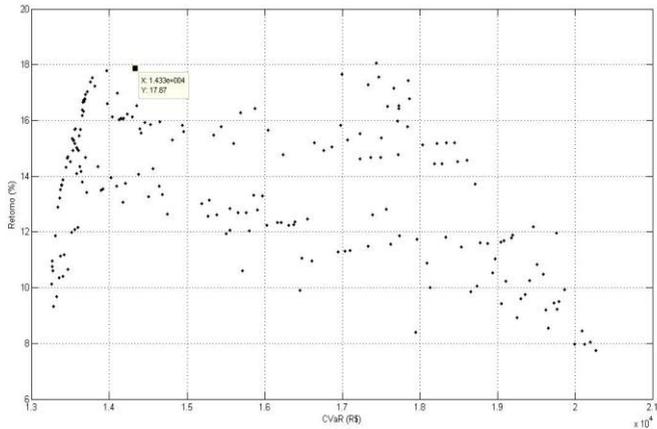


Figura 19 - Fronteira de Pareto para retorno e CVaR com 4 funções objetivos

E a relação do retorno com o Var está na Figura 20.

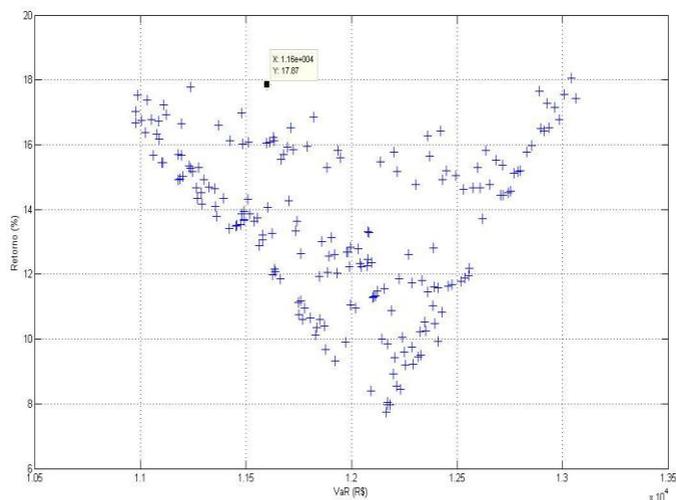


Figura 20 - Fronteira de Pareto para retorno e VaR com 4 funções objetivos

A tabela abaixo mostra alguns resultados da fronteira de Pareto de um total de 200 portfólios obtidos (vide apêndice B).

Spot	Bilate- ral	Call	Put	Re- torno	Ris- co	VaR	CVaR	\mathfrak{D}
0,64	37,62	0,13	61,61	17,89	0,45	15750	16666	∞
38,65	29,30	7,48	24,57	7,73	1,38	13696	14540	0,0225
20,00	42,11	11,88	26,01	11,00	0,06	16493	23313	0,0269
1,9	38,76	13,63	45,71	14,65	0,09	16974	22934	0,0284

Com quatro funções a serem otimizadas, a fronteira de Pareto fornece as soluções com melhores *tradeoffs*. A distância de preenchimento, como explicado anteriormente, permite uma distribuição melhor das carteiras ao longo da fronteira. Comparando com os problemas anteriores, este portfólio é mais conservador, do que quando se considera somente uma única função de avaliação de risco. Os valores da variância, do VaR e do CVaR são menores para o caso III, assim como os retornos esperados. Outra diferença pode ser vista claramente na fronteira encontrada na Figura 18, não há mais uniformidade da fronteira ao se considerar o retorno e a variância e o retorno e o CVaR, como visto na Figura 13 e Figura 14, respectivamente.

A Figura 21 mostra a quantidade de soluções não dominadas ao longo das gerações para a população formada pelas soluções atuais somadas às soluções de uma geração anterior, totalizando 400 indivíduos. Percebe-se que na maior parte das gerações o número de soluções não dominadas está acima de 200, visto que a população considerada possui 200 soluções.

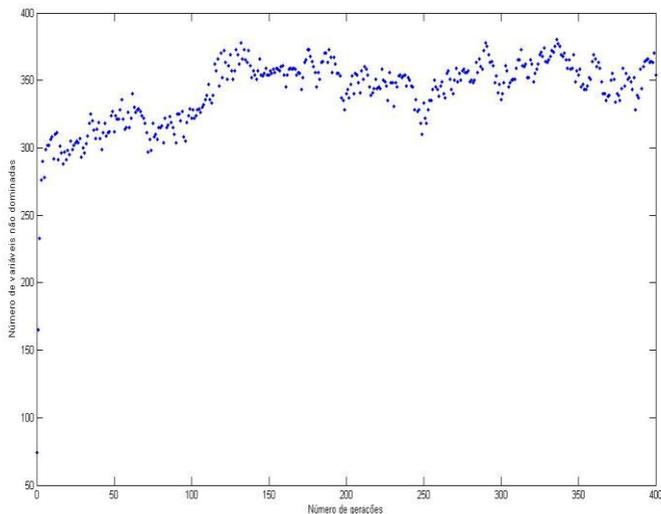


Figura 21 - Indivíduos não dominados ao longo das gerações

5.3. ANÁLISE PROMETHEE II

Com os resultados encontrados na simulação do algoritmo NSGA-II com quatro objetivos serão feitas as análises multicritério com a aplicação do método PROMETHEE II. Foram utilizadas nessa simulação as 200 soluções encontradas para o Caso 3.

Supondo que um decisor escolha como função de preferência e limites de preferência e indiferença os parâmetros da Tabela 16. O retorno é considerado o objetivo mais importante recebendo pontuação máxima, 100. O segundo mais importante é o CVaR, pois este fornece uma média das perdas que o comercializador pode ter, considerando um determinado nível de confiança, de 95% neste trabalho. Em seguida a variância na terceira posição e o VaR na quarta.

Tabela 16 – dados de entrada do método PROMETHEE II

PROMETHEE II				
	retorno	CVaR	variância	VaR
Função de preferência	v-com indiferença	v-com indiferença	v-com indiferença	v-com indiferença
limite de preferência	4	1,5	5000	2000
limite de indiferença	0,1	0,005	200	200
PESO	100	80	60	40

As 10 primeiras soluções encontradas de acordo com as preferências são mostradas na Tabela 17. A classificação completa pode ser vista no apêndice C.

Tabela 17 – As dez melhores soluções

	pot	Bilateral	Call	Put	Variância	Retorno	VaR	CVaR	Fluxo líquido
1	0,0008	0,1508	0,0192	0,8292	0,0207	17,5181	10985,8721	13779,4902	0,5312
2	0,0043	0,2502	0,0060	0,7395	0,0119	17,7745	11235,3581	13961,9962	0,5212
3	0,0055	0,1364	0,0203	0,8378	0,0224	17,3822	11030,3704	13755,8809	0,5161
4	0,0107	0,2049	0,0229	0,7615	0,0149	17,2393	11109,3866	13810,7440	0,4942
5	0,0295	0,1632	0,0130	0,7943	0,0206	17,0169	10976,5255	13712,5423	0,4919
6	0,0027	0,3201	0,0048	0,6724	0,0071	17,8674	11598,3952	14332,5028	0,4746
7	0,0401	0,1326	0,0062	0,8212	0,0253	16,9169	11122,5164	13693,1880	0,4693
8	0,0276	0,1528	0,0268	0,7927	0,0206	16,7530	11002,7239	13678,0903	0,4683
9	0,0279	0,1404	0,0246	0,8071	0,0222	16,7880	11053,2739	13677,8851	0,4662
10	0,0000	0,1339	0,0583	0,8077	0,0192	16,6707	10976,0457	13674,3464	0,4642

O melhor contrato de acordo com o fluxo líquido possui 17,5181% de retorno, o CVaR de R\$ 13.779,4902 de perdas médias esperadas. As soluções com maiores retornos, neste caso, são consideradas

as melhores, já que este é o critério mais importante. Percebe-se que os contratos selecionados possuem alta contratação de put (82,92%), um percentual menor de contratos bilaterais (15,08%) e de Spot e call um percentual inferior a 2%.

Este comportamento é justificado porque a inserção de três tipos de análises do risco ao problema privilegia o tipo de contrato que mais o protege contra os preços baixos da eletricidade, reduzindo assim a exposição ao mercado de curto prazo. Neste caso, caso a compra de put, apesar de se pagar um prêmio, é o que melhor faz este papel. Caso o preço da energia elétrica fique abaixo do preço de exercício, o vendedor da put é obrigado a comprar energia de acordo com o preço especificado. Outro motivo pelo qual a compra de put é favorecida é que ela não limita os ganhos da comercializadora quando o preço no mercado spot está alto. Assim a comercializadora está protegida contra os preços muito baixos da energia, sem perder a possibilidade de lucrar com os altos preços.

Variando os pesos dos critérios, pode-se analisar a sensibilidade do método. Assim, modificando o peso do CVaR para 70 e mantendo os outros com os mesmos valores, verifica-se que não há mudança na classificação das soluções. O mesmo vale para o peso elevado ao valor de 90, ou seja, com o peso do CVaR variando na faixa de 70 a 90, a solução do portfólio ótimo se mantém.

Tabela 18 - Classificação das soluções para CVaR 70

Spot	Bilateral	Call	Put	Variância	Retorno	VaR	CVaR	Fluxo líquido
0,00 08	0,150 8	0,01 92	0,82 92	0,0207	17,51 81	10985,8 721	13779,4 902	0,5312
0,00 43	0,250 2	0,00 60	0,73 95	0,0119	17,77 45	11235,3 581	13961,9 962	0,5212
0,00 55	0,136 4	0,02 03	0,83 78	0,0224	17,38 22	11030,3 704	13755,8 809	0,5161
0,01 07	0,204 9	0,02 29	0,76 15	0,0149	17,23 93	11109,3 866	13810,7 440	0,4942
0,02 95	0,163 2	0,01 30	0,79 43	0,0206	17,01 69	10976,5 255	13712,5 423	0,4919
0,00 27	0,320 1	0,00 48	0,67 24	0,0071	17,86 74	11598,3 952	14332,5 028	0,4746
0,04 01	0,132 6	0,00 62	0,82 12	0,0253	16,91 69	11122,5 164	13693,1 880	0,4693
0,02 76	0,152 8	0,02 68	0,79 27	0,0206	16,75 30	11002,7 239	13678,0 903	0,4683

0,02 79	0,140 4	0,02 46	0,80 71	0,0222	16,78 80	11053,2 739	13677,8 851	0,4662
0,00 00	0,133 9	0,05 83	0,80 77	0,0192	16,67 07	10976,0 457	13674,3 464	0,4642

Variando agora o peso da Variância para 70, nota-se que não há variação da classificação, apesar do fluxo líquido ter sofrido alterações. O mesmo vale para peso da variância igual a 50, ou seja, com peso da variância de 50 a 70, mantem-se também a solução.

Tabela 19- Classificação das soluções para variância 70

Spot	Bilateral	Call	Put	Variância	Retorno	VaR	CVaR	Fluxo líquido
0,00 08	0,150 8	0,01 92	0,82 92	0,0207	17,51 81	10985,8 721	13779,4 902	0,5132
0,00 43	0,250 2	0,00 60	0,73 95	0,0119	17,77 45	11235,3 581	13961,9 962	0,5037
0,00 55	0,136 4	0,02 03	0,83 78	0,0224	17,38 22	11030,3 704	13755,8 809	0,4985
0,01 07	0,204 9	0,02 29	0,76 15	0,0149	17,23 93	11109,3 866	13810,7 440	0,4776
0,02 95	0,163 2	0,01 30	0,79 43	0,0206	17,01 69	10976,5 255	13712,5 423	0,4752
0,00 27	0,320 1	0,00 48	0,67 24	0,0071	17,86 74	11598,3 952	14332,5 028	0,4588
0,04 01	0,132 6	0,00 62	0,82 12	0,0253	16,91 69	11122,5 164	13693,1 880	0,4532
0,02 76	0,152 8	0,02 68	0,79 27	0,0206	16,75 30	11002,7 239	13678,0 903	0,4524
0,02 79	0,140 4	0,02 46	0,80 71	0,0222	16,78 80	11053,2 739	13677,8 851	0,4503
0,00 00	0,133 9	0,05 83	0,80 77	0,0192	16,67 07	10976,0 457	13674,3 464	0,4485

Variando-se o peso do VaR de 40 para 55 o resultado encontrado continua o mesmo.

Tabela 20 - Classificação das soluções para VaR 40

Spot	Bilateral	Call	Put	Risco	Retorno	VaR	CVaR	Fluxo líquido
0,00	0,1508	0,01	0,82	0,02	17,51	10985,87	13779,49	0,5353

08		92	92	07	81	21	02	
0,00 43	0,2502	0,00 60	0,73 95	0,01 19	17,77 45	11235,35 81	13961,99 62	0,5299
0,00 55	0,1364	0,02 03	0,83 78	0,02 24	17,38 22	11030,37 04	13755,88 09	0,5205
0,01 07	0,2049	0,02 29	0,76 15	0,01 49	17,23 93	11109,38 66	13810,74 40	0,4995
0,02 95	0,1632	0,01 30	0,79 43	0,02 06	17,01 69	10976,52 55	13712,54 23	0,4944
0,00 27	0,3201	0,00 48	0,67 24	0,00 71	17,86 74	11598,39 52	14332,50 28	0,4889
0,04 01	0,1326	0,00 62	0,82 12	0,02 53	16,91 69	11122,51 64	13693,18 80	0,4740
0,02 76	0,1528	0,02 68	0,79 27	0,02 06	16,75 30	11002,72 39	13678,09 03	0,4705
0,02 79	0,1404	0,02 46	0,80 71	0,02 22	16,78 80	11053,27 39	13677,88 51	0,4693
0,00 00	0,1339	0,05 83	0,80 77	0,01 92	16,67 07	10976,04 57	13674,34 64	0,4658

No entanto, ao ser aumentado para 60 a classificação sofre modificações, veja a Tabela 21. A partir da quarta posição começam as alterações da classificação.

Tabela 21 - Classificação das soluções para VaR 60

Spot	Bilateral	Call	Put	Risco	Retorno	VaR	CVaR	Fluxo líquido
0,00 08	0,1508	0,01 92	0,82 92	0,02 07	17,51 81	10985,87 21	13779,49 02	0,5274
0,00 43	0,2502	0,00 60	0,73 95	0,01 19	17,77 45	11235,35 81	13961,99 62	0,5130
0,00 55	0,1364	0,02 03	0,83 78	0,02 24	17,38 22	11030,37 04	13755,88 09	0,5119
0,02 95	0,1632	0,01 30	0,79 43	0,02 06	17,01 69	10976,52 55	13712,54 23	0,4896
0,01 07	0,2049	0,02 29	0,76 15	0,01 49	17,23 93	11109,38 66	13810,74 40	0,4893
0,02 76	0,1528	0,02 68	0,79 27	0,02 06	16,75 30	11002,72 39	13678,09 03	0,4663
0,04 01	0,1326	0,00 62	0,82 12	0,02 53	16,91 69	11122,51 64	13693,18 80	0,4650

0,02 79	0,1404	0,02 46	0,80 71	0,02 22	16,78 80	11053,27 39	13677,88 51	0,4633
0,00 00	0,1339	0,05 83	0,80 77	0,01 92	16,67 07	10976,04 57	13674,34 64	0,4628
0,00 27	0,3201	0,00 48	0,67 24	0,00 71	17,86 74	11598,39 52	14332,50 28	0,4613

Estes resultados mostram que o PROMETHEE II é um método robusto, onde uma pequena variação nos pesos dos critérios não afeta a classificação das soluções. O peso do critério retorno não é modificado, pois o método usado para atribuir pesos aos critérios, determina que o critério mais importante sempre receba valor 100.

5.4. CONCLUSÃO

Encontrar um portfólio de contratos de energia elétrica não é uma tarefa trivial, quando se há mais de uma função objetivo a atender. As simulações mostraram que o algoritmo NSGA-II é uma ferramenta eficiente para problemas de otimização multiobjetivo. Os resultados encontrados para os três problemas avaliados foram satisfatórios. A distância de preenchimento \mathcal{D} mostrou ser um mecanismo muito eficiente para encontrar um conjunto de soluções mais diversificadas, mantendo a homogeneidade da fronteira. O Caso III por considerar três tipos de avaliações de risco, permitiu encontrar soluções com bons retornos, comparado aos casos 1 e 2, mas com valores mais baixos para todos os tipos de riscos.

Como o AGMO encontra uma fronteira de Pareto, contendo muitas soluções, é preciso encontrar uma ou pelo menos diminuir este conjunto para auxiliar a escolha do decisor. O método multicritério de apoio à decisão PROMETHEE II mostrou-se um método bastante robusto e qualificado para classificar as alternativas de acordo com as preferências do decisor. O método é fácil de ser implementado e compreendido pelo usuário.

6. CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

6.1. CONCLUSÃO

A desverticalização e a introdução da competição no setor elétrico tinham como principal objetivo atrair investimentos privados, aumentar a eficiência, melhorar a parte técnica, aumentar a satisfação dos clientes e diminuir o preço final da energia, sendo esta última tratada como commodity. No entanto, o fato da energia não poder ser estocada, em grande escala, e por existir limitações físicas e de confiabilidade na transmissão e geração de fontes renováveis, o seu preço tornou-se muito volátil.

Para investidores deste mercado, a volatilidade traz riscos ao seu negócio, sendo de extrema importância mensurar e minimizar estes riscos. Os agentes que vendem energia elétrica precisam se proteger contra as quedas dos preços e aqueles que compram eletricidade precisam se proteger contra a alta dos valores da energia.

Este trabalho, portanto, propõe uma metodologia que busca encontrar a melhor carteira de contratos de energia elétrica para o comercializador, dado uma quantidade previamente determinada de energia comprada. Busca-se então o portfólio ótimo de contratos, sendo este ótimo uma solução de compromisso no sentido de Pareto.

Neste sentido, Capítulo 2 faz uma abordagem de estudos sobre a comercialização mostrando as técnicas de análise de risco e otimização usadas para maximizar o lucro e mitigar os riscos com a venda ou a compra de energia pelos agentes do setor. Em alguns casos, quando possível inclui a geração própria. O Capítulo 3 traz vários exemplos de técnicas tradicionais e de algoritmos genéticos aplicáveis a problemas multiobjetivo. Como este estudo propõe o algoritmo genético NSGA II como técnica de otimização, a solução final é um conjunto de soluções consideradas ótimas no sentido de Pareto.

Surge então outro problema: como escolher uma ou um pequeno número de soluções dentre as várias soluções encontradas? A resposta a esta pergunta está no uso de métodos multicritérios de apoio à decisão, que proporciona ao agente decisor agregar sua preferência a cada um dos objetivos para então encontrar a solução final. Neste Capítulo 3 são apresentadas as escolas e os principais métodos multicritério encontrados na literatura, particularmente o método PROMETHEE II.

O método de otimização escolhido para encontrar a fronteira de Pareto, NSGA II, e o método multicritério PROMETHEE II usados nes-

te estudo são descritos no Capítulo 4. Já no Capítulo 5 são feitas simulações com dados adquiridos de outro trabalho, permitindo verificar a eficácia do método proposto.

O NSGA II demonstrou ser uma ferramenta eficiente para otimizar problemas multiobjetivo. Sua implementação nos casos apresentados no Capítulo 5, evidencia sua capacidade de distribuir as soluções ao longo da fronteira de Pareto. Tal distribuição é resultado da implementação da distância de preenchimento, que proporciona uma distribuição mais uniforme da fronteira. A convergência para encontrar as melhores soluções é aprimorada ao permitir que a população anterior, sendo assim os melhores indivíduos, tenham mais uma chance de continuar na população corrente, caso eles tenham sido substituídos nos processos de mutação e/ou cruzamento.

Ao implementar as preferências do decisor no problema, o PROMETHEE II, classifica em ordem decrescente de importância as soluções pertencentes a fronteira de Pareto. A primeira inclusão das preferências do decisor está na distribuição dos pesos a cada um dos critérios de acordo com sua importância para o mesmo. A segunda inclusão está na escolha da função de preferência aplicada ao desvio entre as avaliações de duas alternativas dentro do mesmo critério. Assim, o decisor não precisa desprender tempo analisando as inúmeras soluções uma a uma.

A consideração de três tipos de riscos, variância, VaR e CVaR, demonstrou ser um método mais conservador em relação ao risco, dando valores menores de perdas, conseqüentemente, com valores menores de retorno. O modelo proposto demonstrou ser uma boa ferramenta em encontrar portfólios com bons retornos a níveis aceitáveis de exposição ao risco.

6.2. RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Outras técnicas de algoritmos genéticos multiobjetivo podem ser usadas para solucionar o problema.
- Outras técnicas de análise multicritério também podem ser aplicadas ao problema e comparadas a deste trabalho quanto a sua eficiência, como por exemplo o TOPSIS e o AHP.
- Novos tipos de contratação podem ser implementados, tais como *swaps*, para proteger os comercializadores, ou mesmo contratos flexíveis.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARFUX, G. A. B. *Gerenciamento de Riscos na Comercialização de Energia Elétrica com Uso de Instrumentos Derivativos: Uma Abordagem Via Teoria de Portfólios de Markowitz*. Florianópolis, 2004. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina.

ARFUX, G.A.B.; TEIVE, R.C.G. Risk Aversion Approach for Energy Trading Based on Multistage Stochastic Programming. In: *9th International Conference on the European Energy Market (EEM)*, 2012.

AZEVEDO, F.; VALE, Z.A.; OLIVEIRA, P.B.M. A Decision-Support System Based on Particle Swarm Optimization for Multiperiod Hedging in Electricity Markets. In: *IEEE Transactions on Power Systems*. v.22, n.3, 2007.

AZONDEKON, S.H.; MARTEL, J.M. "Value" of additional information in multicriterion analysis under uncertainty. In: *European Journal of Operational Research*. 1999.

BAJPAI, P.; SINGH, S.N. Electricity Trading in Competitive Power Market: Na Overview and Key Issues. In: *International Conference on Power Systems*. 2004.

BANA e COSTA, C.A. *Processo de Apoio à Decisão: Actores e Acções; Estruturação e Avaliação*, 1993.

BANA e COSTA, C.A.; CORTE, J.M. DE; VANSNICK, J.C. MACBETH. In.: *Operational Research working papers*, 2003.

BANA e COSTA, C.A.; CORTE, J.M. DE; VANSNICK, J.C. On The Mathematical Foundations of MACBETH. In.: *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Survey*. v.78, 2005.

BEHZADIAN, M.; KAZEMZADEH, R. B.; ALBADVI, A.; AGHDASI, M. PROMETHEE: A comprehensive literature review on methodologies and applications. *European Journal of Operational Research*., 2010. p.198-215.

BJORGAN, R.; LIU, C. C.; LAWARRÉE. Financial Risk Management in a Competitive Electricity Market. In: *IEEE Transactions on Power Systems*. v.14, n.4, 1999.

BRANKE, J.; DEB, K.; MIETTINEN, K.; SLOWINSKI, R. *Multiobjective Optimization: Interactive and Evolutionary Approaches* 1 ed. Alemanha: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

BRANS, J. P.; MARESCHAL, B. Promethee Methods. In: FIGUEIRA, J.; GRECO, S.; EHRGOTT, M. *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. Boston: Springer Science, 2005. p. 163-195.

BRANS, J. P.; VINCKE, Ph.; MARESCHAL, B. How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method. *European Journal of Operational Research*. v. 24, n.2, Fev., 1986. , p. 228-238.

CARRION, M.; PHILPOTT, A. B.; CONEJO, A. J.; ARROYO, J. M. A Stochastic Programming Approach to Electric Energy Procurement for Large Consumers. In: *IEEE Transactions on Power Systems*. v.22, n.2, 2007.

CABERO, J.; VENTOSA, J. M.; CERISOLA, S.; BAÍLLO, A. Modeling Risk Management in Oligopolistic Electricity Markets: A Benders Decomposition Approach. In: *IEEE Transactions on Power Systems*, v.25. no.1, fevereiro de 2010. p.263-271.

CHANG, T. J., N. MEADE, J. E. BEASLEY e Y. M. SHARAIHA. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers and Operations Research* v.27. n.13, 2000. p.1271-1302.

COELLO, C. A. C.; LAMONT, G. B.; VELDHUIZEN, D. A. V. *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. 2ed. Springer, 2007.

COSTA, C. A. B.; CORTE, J. M. de; Vansnick, J. C. Guia do Utilizador. M-MACBETH versão 1.1. jul., 2005.

DAHLGREN, R.; LIU, C. C.; LAWARRÉE, J. Risk Assessment in Energy Trading. In: *IEEE Transactions on Power Systems*. v.18. n.2, 2003.

- DEB, K.; PPRATAP, A.; AGARWAL, S.; MEYARIVAN, T. A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II. In *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. v.6. no.2., abr., 2002. p. 182-197.
- DENTON, M.; PALMER, A.; MASIELLO, R.; SKANTZE, P. Managing Market Risk in Energy. In: *IEEE Transactions on Power System*. v.18. n.2, 2003.
- DYER, J. S.. MAUT – Multiattribute Utility Theory. In: FIGUEIRA, J.; GRECO, S.; EHRGOTT, M. *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. Boston: Springer Science, 2005. p. 265-295.
- ENSSLIN, L.; NETO, G.M.; NORONHA, S.M. *Apoio à Decisão: metodologias para estruturação de problemas e avaliação multicritério de alternativas*. 1 ed. Florianópolis: Insular, 2001.
- FENG, D.; YAN, Z.; OSTERGAARD, J.; XU, Z.; GAN, D.; ZHONG, J.; ZHANG, N.; DAI, T. Simulation Embedded Artificial Intelligence Search Method for Supplier Trading Portfolio Decision. In: *IET Generation, Transmission and Distribution, I* v.4.n.2, 2010.
- FIGUEIRA, J.; GRECO, S.; EHRGOTT, M. *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. Boston: Springer Science, 2005.
- GABRIEL, S. A.; CONEJO, A.J.; PLAZAS, M.A.; NALAKRISHNAM, S. Optimal Price and Quantity Determination for Retail Electric Power Contracts. In: *IEEE Transactions on Power Systems*. v.21. n.1, 2006.
- GELDERMANN, J.; SPENGLER, T.; RENTZ, O. Fuzzy Outranking for Environmental Assessment, Case Study: Iron and Steel Making Industry. *Fuzzy Sets and Systems - Special Issue on Soft Decision Analysis*. v. 115, 2000. p. 45-65.
- GEN, M.; CHENG, R. *Genetic Algorithm & Engineering Optimization*. 1 ed. Canada: John Wiley & Sons, 2000.
- GOMES, L.F.A.M.; GOMES, C.F.S.; ALMEIDA, A.T. de. *Tomada de Decisão Gerencial: enfoque multicritério*. 3 ed. São Paulo: Atlas, 2009.
- GÖTZE, U.; NORTHCOTT, D.; SCHUSTER, P. Multi-criteria Methods. In: *Investment Appraisal: Methods and Models*, 2008.

GUDER, R. Otimização de Portfólios de Contratos de Energia Elétrica Utilizando Algoritmos Genéticos Multiobjetivos. Florianópolis, 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina.

HATAMI, A.R.; SEIFI, H.; SHEIKH-EL-ESLAMI. Optimal Selling Price and Energy Procurement Strategies for a Retailer in a Electricity Market. In: *Electric Power System Research*, 2009.

HANG, R.; SZETO, K.Y. Discovering Investment Strategies in Portfolio Management: a Genetic Algorithm Approach. In: *Proceedings of the 9th International Conference on Neural Information Processing*. v.3, 2002.

HORN, J.; NAFPLIOTIS, N.; GOLDBERG, E. D. A Niched Pareto Genetic Algorithm for Multiobjective Optimization. In: *IEEE World Congress on Computational Intelligence*. v.1, 1994. p. 82-87.

KARANDIKAR, R.G.; KHAPARDE, S.V.; KULKARNI, S.V. Strategic Evaluation of Bilateral Contract for Electricity Retailer in Restructured Power Market. In: *Electrical Power and Energy System*. 2010.

KEENEY, R.L.; RAIFFA, H. *Decision with Multiple Objectives: preferences and value tradeoffs*. United States of America: Cambridge University Press, 1993.

KEYSER, W. DE; PEETERS, P. A note on the use of PROMETHEE multicriteria methods. In: *European Journal of Operational Research*, v.89, 1996. p.457-461.

LINDEN, R. *Algoritmos Genéticos*. 2. ed. Rio de Janeiro: Brasport, 2008.

LIU, M.; WU, F.F. Managing Price Risk in a Multimarket Environment. In: *IEEE Transactions on Power Systems*. V.21,n.4, 2006.

LIU, M.; WU, F.F.; NI, Y. A survey on risk management in electricity markets. In: *IEEE Power Engineering Society General Meeting*, 2006.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. In: *The Journal of Finance*, v.7, n. 1, 1952. p. 77-91.

MEIRELLES, C.L. de A.; GOMES, L.F.A.M.. Apoio Multicritério à Decisão Como Instrument de Gestão do Conhecimento: Uma Aplicação à Industria de Refino de Petróleo. In *Pesquisa Operacional*. v.29, n.2, Maio a Agosto de 2009. p.451-470.

MISHRA, S.K.; MEHER, S.; PANDA, G.; A. Comparative Performance Evaluation of Multiobjective Optimization Algorithms for Portfolio Management. In: *World Congress on Nature & Biologically Inspired Computing*. Coimbatore, 2009. p. 1338 – 1342.

MINOIA, A.; ERNST, D.; DICORATO, M.; TROVATO, M.; ILIC, M. Reference Transmission Network: A Game Theory Approach. In: *IEEE Transactions on Power Systems*. v.21, n.1, 2006.

MOREIRA, M.P. Priorização dos Modos de Falha de Equipamentos Utilizando os Métodos de Análise Multicritério PROMETHEE e Fuzzy PROMETHEE. Rio de Janeiro, 2009. Dissertação (Mestrado em engenharia elétrica) – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

NGATCHOU, P.; ZAREI, A.; EL-SHARKAWI, M. A. Pareto Multi Objective Optimization. In: *Intelligent Systems Application to Power Systems*, 2005. p.84-91.

OLIVEIRA, M. F. de. *Contribuições ao Gerenciamento de Risco no Problema de Comercialização de Energia Elétrica*. Florianópolis, 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina.

PARREIRAS, R.O. Algoritmos Evolucionários e Técnicas de Tomada de Decisão em Análise Multicritério. Belo Horizonte, 2006. Tese (Doutorado em engenharia elétrica) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais.

RIVAS-DAVALOS, F.; MORENO-GOYTIA, E.; GUTIERREZ-ALACARAZ, G.; TOVAR-HERNANDEZ, J.; Evolutionary Multi-

Objective Optimization in Power Systems: State-of-the-Art. In *IEEE Power Tech.* Lausanne, 2007. p. 2093-2098.

ROY, B.; VINCKE, P. Multicriteria Analysis: survey and new directions. In *European Journal of Operational Research.* v.8, n.3, 1981. p. 207-218.

ROY, B.; VANDERPOOTEN, D. The European School of MCDA: Emergence, Basic Features and Current Works. In: *Journal of Multicriteria Decision Analysis.* v.5., 1996.

SARAMAGO, L.F.M. *Priorização de Proposições Preliminares de Projetos de Pesquisa e Desenvolvimento na Petrobrás: Uma Análise Comparativa entre os Métodos Direct Rating e Swing Weighting.* Rio de Janeiro, 2010. Dissertação (Mestrado profissionalizante em administração) – Faculdade de Economia e Finanças, Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais.

SHRESTHA, G.B.; POKHAREL, B.K.; LIE, T.T.; FLETEN, S.E. Medium Term Power Planning With Bilateral Contracts. In: *IEEE Transactions on Power Systems.* v.20,n.2, 2005.

SIVANANDAM, S.N.; DEEPA, S.N. *Introduction to Genetic Algorithms.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

SKOLPADUNGKET, P.; DAHAL, K. HARNPORNCHAI, N. Portfolio Optimization Using Multi-Objective Genetic Algorithms. In *IEEE Congress on Evolutionary Computation.* Singapura, 2007. p. 516 – 523

STEPHENSON, P. PAUN, M. Electricity Market Trading. In: *Power Engineering Journal.* v.15, n.6, 2001.

STEWART, T.J. *A Critical Survey on the Status of Multiple Criteria Decision Making Theory and Practice.* OMEGA. v. 20, 1992. p. 569 - 586.

STREET, A.; BARROSO, L.A; FLACH, B.; PEREIRA, M.V; GRANVILLE, S. Risk Constrained Portfolio Selection of Renewable Sources in Hydrothermal Electricity Markets. In: *IEEE Transactions on Power Systems.* v.24,n.3, 2009.

URIS, A. O Livro de Mesa do Executivo. São Paulo: Pioneira, 1989.

VAN VELDHUIZEN, D. A.; LAMONT, G. B. Multiobjective Evolutionary Algorithms: Analyzing the State-of-the-Art. In: *Evolutionary Computation*. v.8, n.2, 2000. p. 125-147.

VEHVILAINEN, I.; KEPPO, J. Managing Electricity Market Price Risk. In: *Europea Journal of Operational Research*, 2003.

VILLALVA, E. G.; RAMOS, A.; Optimal Energy Management of an Industrial Consumer in Liberalized Markets. In: *IEEE Transactions on Power Systems*. v.18, n.2, 2003.

WANG, R.; XIAO, X.; DONG, W. Optimal Purchasing Portfolio for Power Supplier with Options and Interruptible Load Based on Conditional Value-at-risk. In: *International Conference on Information Engineering*. 2009.

WECHEN, W.; ZHANG, R.; ZHANG, W.G. Management of Stochastic Portfolio Using Improved Genetic Algorithm. In: *Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation.*, 2006.

WOITOWICZ, B.B.C. Uma Abordagem Multicriterio para Seleção de Ferramenta de Business Intelligence. Dissertação (Mestrado profissionalizante em administração) – Faculdade de Economia e Finanças, Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais, Rio de Janeiro, 2009.

XU, J.; LUH, B. P.; WHITE, F.B.; NI, E.; KASIVISWANATHAN, K. Power Portfolio Optimization in Deregulated Electricity Markets with Risk Management. In: *IEEE Transactions on Power System*. v.1,n.4, 2006.

YAU, S.; KOWN, R.H; ROGERS, J.S; WU, D. Financial and Operational Decisions in the Electricity Sector: Contract Portfolio Optimization with the Conditional Value-at-Risk Criterion. In: *International Journal of Production Economics*, 2001.

ZITZLER, E.; DEB, K.; THIELE, L. Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Empirical Results. In *Evolutionary Computation*. vol.8, n.2, 2002. p.173-195.

ZITZLER, E.; LAUMANN, M.; THIELE, L. *SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm*. TIK-Report. n.103, 2001.

ZITZLER, E.; THIELE, L. *An Evolutionary Algorithm for Multiobjective Optimization: The Strength Pareto Approach*. TIK-Report. n.43, 1998.

APÊNDICE A - Resultados encontrados para retorno e variância

Foram colocados somente 50 resultados para ilustração.

spot	bilateral	call	put	Variância	Retorno
0,0000	0,9986	0,0000	0,0014	5,03956346	18,3410
0,3315	0,5666	0,0482	0,0538	0,00002782	9,6765
0,0000	0,9893	0,0000	0,0107	4,86906524	18,3368
0,0000	0,9746	0,0000	0,0254	0,60398125	18,3302
0,0000	0,9974	0,0000	0,0026	5,01753045	18,3405
0,2353	0,4777	0,1346	0,1524	0,00032469	9,8933
0,0000	0,6829	0,0000	0,3171	0,96994488	18,1980
0,0000	0,6727	0,0000	0,3273	0,89822903	18,1933
0,0000	0,7371	0,0000	0,2629	1,41286030	18,2225
0,0000	0,7290	0,0000	0,2710	1,34052479	18,2189
0,1928	0,4348	0,1709	0,2015	0,00093047	10,0285
0,0433	0,4989	0,0085	0,4493	0,18740645	16,9599
0,0000	0,7125	0,0000	0,2875	1,19857077	18,2114
0,0000	0,7876	0,0000	0,2124	1,92137213	18,2454
0,1130	0,3755	0,2268	0,2846	0,00326478	10,5604
0,3394	0,5905	0,0061	0,0641	0,00325739	10,4323
0,1022	0,3927	0,1891	0,3161	0,01457270	11,6382
0,0000	0,9042	0,0000	0,0958	3,44662872	18,2983
0,0000	0,7598	0,0000	0,2402	1,63070097	18,2328
0,0000	0,7190	0,0000	0,2810	1,25346550	18,2143
0,0000	0,8745	0,0000	0,1255	3,01120965	18,2848
0,2934	0,5808	0,0023	0,1235	0,01322336	11,5383
0,0000	0,9725	0,0000	0,0275	4,56702426	18,3292
0,0000	0,6249	0,0000	0,3751	0,61242135	18,1716
0,0000	0,5706	0,0000	0,4294	0,38776480	18,1470
0,0000	0,9001	0,0000	0,0999	3,38449524	18,2964
0,1572	0,4375	0,1519	0,2534	0,00942646	11,2424
0,0000	0,9122	0,0000	0,0878	3,56966131	18,3019

0,0000	0,8778	0,0000	0,1222	3,05826905	18,2863
0,0000	0,7827	0,0000	0,2173	1,86843203	18,2432
0,0000	0,8656	0,0000	0,1344	2,88756360	18,2808
0,2477	0,5707	0,0050	0,1766	0,02946748	12,4976
0,0000	0,7641	0,0000	0,2359	1,67333570	18,2347
0,0000	0,6676	0,0000	0,3324	0,86353136	18,1910
0,0000	0,5036	0,0000	0,4964	0,25718016	18,1167
0,0000	0,8316	0,0000	0,1684	2,43984314	18,2654
0,0508	0,4703	0,0461	0,4328	0,13938787	15,9558
0,0000	0,7798	0,0000	0,2202	1,83659191	18,2418
0,0000	0,9304	0,0000	0,0696	3,85672679	18,3101
0,0000	0,8576	0,0000	0,1424	2,77868453	18,2771
0,0000	0,7940	0,0000	0,2060	1,99279453	18,2483
0,0928	0,5147	0,0008	0,3917	0,14254205	16,0275
0,0699	0,5167	0,0019	0,4115	0,16693746	16,5183
0,1437	0,5354	0,0017	0,3193	0,09646099	14,8811
0,0000	0,8689	0,0000	0,1311	2,93255111	18,2822
0,0558	0,4969	0,0044	0,4429	0,17749859	16,7702
0,0000	0,5864	0,0000	0,4136	0,44210446	18,1542
0,0000	0,7448	0,0000	0,2552	1,48448709	18,2260
0,3019	0,5908	0,0029	0,1044	0,01091037	11,3396

APÊNDICE B - Resultados encontrados para retorno, variância, VaR e CVaR

São mostrados somente 50 resultados.

spot	bilateral	call	put	varian- cia	retorno	var	cvar
0,07863 4	0,24861	0,38840 3	0,28435 3	0,01311 1	7,73134 2	12163,7 4	20273,3 2
0	0,49305 2	0,00308 8	0,50386	0,24814 0	18,0442 2	13041,4	17441,0 1
0,30120 5	0,21467 7	0,05147 9	0,43264	2,07885 4	10,1208 8	11827,8 3	13254,3 8
0,03831	0,26817 3	0,34872 3	0,34479 4	0,00003 1	9,51159 9	12328,1 8	19796,0 5
0,01866 1	0,50164 7	0,01262 3	0,46706 9	0,21797 4	17,4218	13063,8 5	17849,5 2
0	0,13393 6	0,05834	0,80772 4	1,92201 1	16,6707	10976,0 5	13674,3 5
0,03388 1	0,02977 4	0,12936 3	0,80698 2	2,69283 5	14,3093 9	11509,8 5	13441,8 7
0,06170 9	0,25474 7	0,35126 6	0,33227 8	0,00915 9	8,92646	12197,2 4	19250,7
0,11585 8	0,10716 9	0,06806 7	0,70890 7	2,55743 6	13,8541 4	11477,8 4	13402,7 7
0,00112 2	0,18967 5	0,42873 2	0,38047 1	0,00723 7	8,55455 2	12213,0 2	19660,8 9
0,03814 1	0,21096 5	0,41835 5	0,33253 9	0,01183 5	7,96362 7	12182,3 1	19996,7 3
0,15671	0,33766 2	0,29610 4	0,20952 4	0,00895 9	8,04799 4	12170,4 5	20201,2 2
0,00828 4	0,47455 6	0,03550 3	0,48165 7	0,19832 2	17,1402 5	12962,8 8	17665,2 1
0,0375	0,17386 4	0,39886 4	0,38977 3	0,07418 0	8,38825 2	12091,0 8	17946,7
0,00426 4	0,46695 1	0,01599 1	0,51279 3	0,22474 8	17,6542 6	12889,4 1	16999,1 6
0,00844 4	0,48371 5	0,01688 8	0,49095 3	0,21903 8	17,5487 4	13007,1 5	17469,1 1
0,11588	0,11373 4	0,06795 4	0,70243 2	2,47139 2	13,8591	11518,1 6	13399,9
0	0,42346 9	0,09591 8	0,48061 2	0,14048 5	15,9785 1	12854,7 9	17712,9 9
0,14323	0,12633	0,08452	0,64590	2,26567	12,8899	11564,2	13336,3

8	5		7	2	1		2
0,01221 6	0,22513 1	0,38918	0,37347 3	0,00179 1	9,18918 8	12256,2 8	19623,9 8
0,00691 7	0,25494 1	0,36166	0,37648 2	0,00090 2	9,92426 1	12409,1 1	19869,4 2
0,11174 5	0,47206 4	0,02508 6	0,39110 6	0,12337 9	15,0533 9	12495,5 8	16868,7 5
0,07494 3	0,10976 5	0,07115 8	0,74413 3	2,33936 4	14,7026 8	11325,4 6	13460
0	0,45894	0,06026 5	0,48079 5	0,18145 9	16,7758 5	12985,7 8	17869,7 8
0,02001 1	0,24871 4	0,35563 2	0,37564 3	0,00167 7	9,76066 4	12284,5	19356,8 8
0,03191 5	0,22667 8	0,40261 9	0,33878 9	0,00483 5	8,45482 7	12232,3 4	20096,5 2
0,26860 5	0,20404 1	0,04632 8	0,48102 5	2,11777 1	10,9580 5	11778,1 1	13264,7 2
0,02782	0,30977 4	0,07067 7	0,59172 9	0,47496 0	15,8578 7	11722,7 5	14529,6 8
0,00553	0,13640 6	0,02027 6	0,83778 8	2,24233 6	17,3822 2	11030,3 7	13755,8 8
0,03363	0,43026 7	0,12561 8	0,41048 5	0,09085 3	14,5786 1	12755,6 1	18606,4 1
0,01667 4	0,43631 3	0,08846 7	0,45854 6	0,13195 7	15,7746 7	12829,2 5	17840,7 3
0,05279 5	0,27018 6	0,14596 3	0,53105 6	0,39109 0	13,6315 9	11740,9 1	14644,2 2
0,03232 1	0,42213 5	0,08423 1	0,46131 2	0,12621 3	15,5111	12683,5 8	17226,4
0,07265	0,33547	0,27136 8	0,32051 3	0,00296 4	10,4691 5	12393,2 5	19596,0 2
0,03448 3	0,39249 5	0,09533 5	0,47768 8	0,13847 2	15,2060 1	12450,4 1	16641
0,19411 8	0,17764 7	0,14941 2	0,47882 4	1,36979 3	10,3532 3	11833,8 9	13346,7 9
0,19318 2	0,11679 3	0,13068 2	0,55934 3	2,19049 3	10,757	11749,0 5	13262,4 8
0,02791 5	0,14039 4	0,02463 1	0,80706 1	2,22274 1	16,7879 6	11053,2 7	13677,8 9
0,00273 6	0,32010 9	0,00478 8	0,67236 7	0,70504 5	17,8673 8	11598,4	14332,5
0,02018 5	0,24798 2	0,20184 5	0,52998 8	0,26386 4	13,1263 5	11905,2 1	15283,5 2

0,07086 6	0,26574 8	0,25	0,41338 6	0,11875 7	10,9456 5	12018,3 5	16608,0 9
0,02898 6	0,38107 4	0,08013 6	0,50980 4	0,19201 1	15,6568 2	12369,7	16043,7 6
0,18412	0,20138 1	0,14614 5	0,46835 4	1,13425 2	10,6591 9	11805,0 9	13462,5
0,01989 8	0,24047 8	0,36327 5	0,37635	0,00283 8	9,592	12248,1 8	19300,1 7
0,03071	0,18042 2	0,33685 2	0,45201 5	0,15827 8	9,90193 1	11970,3 7	16459,3 5
0,08240 5	0,36971	0,21158 1	0,33630 3	0,01389 2	11,5765 5	12409,0 4	18875,9
0,05015 2	0,23708 2	0,19300 9	0,51975 7	0,37403 9	12,6447 8	11758,5	14748,6 4
0,04261	0,25166 4	0,16910 8	0,53661 8	0,38269 6	13,3438 2	11734,4 8	14681,8 9
0,02522 3	0,31899 1	0,06973 3	0,58605 3	0,43317 9	15,9408 1	11790,4 3	14651,7 4

**APÊNDICE C - Resultados da simulação do PROMETHEE
II**

Nº	Spot	Bilate- ral	Call	Put	Risco	Re- torno	VaR	CVaR	Fluxo lí- quido
1	0,00 08	0,150 8	0,01 92	0,82 92	0,02 07	17,51 81	10985,87 21	13779,49 02	0,5312
2	0,00 43	0,250 2	0,00 60	0,73 95	0,01 19	17,77 45	11235,35 81	13961,99 62	0,5212
3	0,00 55	0,136 4	0,02 03	0,83 78	0,02 24	17,38 22	11030,37 04	13755,88 09	0,5161
4	0,01 07	0,204 9	0,02 29	0,76 15	0,01 49	17,23 93	11109,38 66	13810,74 40	0,4942
5	0,02 95	0,163 2	0,01 30	0,79 43	0,02 06	17,01 69	10976,52 55	13712,54 23	0,4919
6	0,00 27	0,320 1	0,00 48	0,67 24	0,00 71	17,86 74	11598,39 52	14332,50 28	0,4746
7	0,04 01	0,132 6	0,00 62	0,82 12	0,02 53	16,91 69	11122,51 64	13693,18 80	0,4693
8	0,02 76	0,152 8	0,02 68	0,79 27	0,02 06	16,75 30	11002,72 39	13678,09 03	0,4683
9	0,02 79	0,140 4	0,02 46	0,80 71	0,02 22	16,78 80	11053,27 39	13677,88 51	0,4662
10	0,00 00	0,133 9	0,05 83	0,80 77	0,01 92	16,67 07	10976,04 57	13674,34 64	0,4642
11	0,03 11	0,138 5	0,02 46	0,80 57	0,02 26	16,71 57	11085,25 02	13668,55 37	0,4573
12	0,03 27	0,117 4	0,02 60	0,82 40	0,02 51	16,64 10	11194,03 35	13659,67 04	0,4404
13	0,00 35	0,136 3	0,06 82	0,79 21	0,01 82	16,37 94	11020,25 25	13646,17 76	0,4365
14	0,00 00	0,147 5	0,07 41	0,77 84	0,01 65	16,33 08	11075,40 14	13663,47 03	0,4263
15	0,02 52	0,291 6	0,02 23	0,66 09	0,00 81	16,96 79	11477,58 16	14097,37 33	0,4202
16	0,00 08	0,147 2	0,07 99	0,77 21	0,01 61	16,18 55	11086,70 35	13652,23 92	0,4133
17	0,04 23	0,282 2	0,02 15	0,65 40	0,00 90	16,60 01	11369,71 53	13971,68 96	0,4055
18	0,00 00	0,145 9	0,10 41	0,75 00	0,01 44	15,67 34	11059,61 82	13625,38 08	0,3737
19	0,02 68	0,125 2	0,07 48	0,77 32	0,01 96	15,70 72	11179,72 00	13558,58 59	0,3678

20	0,02 77	0,119 6	0,07 52	0,77 75	0,02 03	15,67 45	11194,91 02	13553,33 34	0,3638
21	0,02 32	0,264 1	0,06 22	0,65 06	0,00 78	16,12 68	11425,33 48	14036,91 51	0,3557
22	0,02 89	0,170 9	0,08 50	0,71 52	0,01 41	15,45 63	11106,26 67	13608,44 48	0,3515
23	0,04 10	0,185 0	0,07 38	0,70 02	0,01 38	15,43 91	11099,60 05	13612,58 58	0,3505
24	0,02 83	0,344 7	0,02 58	0,60 12	0,00 49	16,84 59	11820,35 28	14586,06 89	0,3498
25	0,00 21	0,288 3	0,06 65	0,64 31	0,00 58	16,51 54	11710,16 63	14350,25 81	0,3448
26	0,02 42	0,274 6	0,06 57	0,63 55	0,00 69	16,03 18	11483,88 14	14124,89 19	0,3372
27	0,02 22	0,276 3	0,06 58	0,63 57	0,00 68	16,07 64	11512,87 10	14149,00 03	0,3369
28	0,02 06	0,287 5	0,06 05	0,63 15	0,00 64	16,23 38	11628,27 78	14231,73 09	0,3348
29	0,02 65	0,116 8	0,09 19	0,76 48	0,01 91	15,33 53	11230,18 96	13522,32 24	0,3331
30	0,02 52	0,129 7	0,09 61	0,74 90	0,01 73	15,27 81	11237,17 97	13533,11 38	0,3272
31	0,02 41	0,279 7	0,06 53	0,63 09	0,00 66	16,04 64	11595,54 64	14170,77 36	0,3252
32	0,02 34	0,280 7	0,06 48	0,63 10	0,00 66	16,07 06	11612,33 05	14179,83 25	0,3252
33	0,02 51	0,133 0	0,09 57	0,74 62	0,01 70	15,28 98	11276,74 79	13538,36 99	0,3242
34	0,02 24	0,292 0	0,06 37	0,62 20	0,00 60	16,12 52	11631,38 12	14290,33 59	0,3220
35	0,02 61	0,145 0	0,10 06	0,72 82	0,01 54	15,16 41	11246,25 62	13550,91 09	0,3161
36	0,03 38	0,167 7	0,10 02	0,69 83	0,01 34	15,01 35	11201,12 14	13577,34 59	0,3063
37	0,03 85	0,177 9	0,09 89	0,68 47	0,01 26	14,94 17	11187,12 28	13591,39 72	0,3008
38	0,00 22	0,143 9	0,13 64	0,71 75	0,01 24	14,91 71	11180,32 02	13599,34 40	0,2990
39	0,03 57	0,145 0	0,10 17	0,71 75	0,01 56	14,92 61	11298,93 65	13525,08 83	0,2919
40	0,02 44	0,302 4	0,07 16	0,60 17	0,00 51	15,91 16	11694,79 88	14458,78 01	0,2882
41	0,00 00	0,493 1	0,00 31	0,50 39	0,00 25	18,04 42	13041,40 42	17441,01 23	0,2831

42	0,02 78	0,309 8	0,07 07	0,59 17	0,00 47	15,85 79	11722,74 92	14529,68 41	0,2770
43	0,02 24	0,288 4	0,08 32	0,60 59	0,00 53	15,69 47	11679,27 12	14391,46 26	0,2748
44	0,00 43	0,467 0	0,01 60	0,51 28	0,00 22	17,65 43	12889,40 58	16999,16 37	0,2732
45	0,07 49	0,109 8	0,07 12	0,74 41	0,02 34	14,70 27	11325,46 37	13459,99 61	0,2722
46	0,02 52	0,319 0	0,06 97	0,58 61	0,00 43	15,94 08	11790,42 85	14651,73 78	0,2709
47	0,07 69	0,107 3	0,07 15	0,74 43	0,02 37	14,65 03	11352,13 04	13456,31 36	0,2653
48	0,03 54	0,194 2	0,11 52	0,65 52	0,01 01	14,65 95	11262,81 08	13690,69 93	0,2641
49	0,02 39	0,286 4	0,08 87	0,60 10	0,00 51	15,54 01	11665,58 15	14406,16 83	0,2621
50	0,03 24	0,132 4	0,12 35	0,71 18	0,01 51	14,51 79	11287,74 84	13494,26 74	0,2595
51	0,03 71	0,176 4	0,12 73	0,65 93	0,01 09	14,35 06	11268,14 53	13613,06 65	0,2411
52	0,00 84	0,483 7	0,01 69	0,49 10	0,00 22	17,54 87	13007,15 40	17469,11 07	0,2379
53	0,02 71	0,336 4	0,07 36	0,56 28	0,00 35	15,82 03	11934,70 04	14939,30 91	0,2307
54	0,01 97	0,393 6	0,05 45	0,53 22	0,00 23	16,43 19	12421,45 29	15871,95 18	0,2291
55	0,00 08	0,361 6	0,07 99	0,55 76	0,00 24	16,28 27	12361,88 47	15686,44 71	0,2264
56	0,04 38	0,183 3	0,12 86	0,64 43	0,01 04	14,17 46	11290,95 31	13631,29 40	0,2226
57	0,00 42	0,465 1	0,03 28	0,49 79	0,00 20	17,28 66	12927,20 59	17337,71 72	0,2223
58	0,03 39	0,029 8	0,12 94	0,80 70	0,02 69	14,30 94	11509,85 29	13441,87 38	0,2209
59	0,04 20	0,217 8	0,12 34	0,61 68	0,00 80	14,34 47	11394,78 78	13851,50 95	0,2156
60	0,03 63	0,164 1	0,13 99	0,65 97	0,01 11	14,08 50	11354,28 40	13577,91 27	0,2115
61	0,03 10	0,333 9	0,07 97	0,55 54	0,00 34	15,59 91	11948,07 35	14957,27 81	0,2095
62	0,01 87	0,501 6	0,01 26	0,46 71	0,00 22	17,42 18	13063,85 11	17849,51 64	0,2057
63	0,02 59	0,309 6	0,09 87	0,56 58	0,00 36	15,28 65	11882,38 35	14811,13 67	0,1970

64	0,02 68	0,358 0	0,07 71	0,53 81	0,00 26	15,76 19	12201,85 18	15437,16 55	0,1954
65	0,00 83	0,474 6	0,03 55	0,48 17	0,00 20	17,14 03	12962,87 68	17665,20 72	0,1913
66	0,11 59	0,107 2	0,06 81	0,70 89	0,02 56	13,85 41	11477,83 92	13402,76 98	0,1866
67	0,11 59	0,113 7	0,06 80	0,70 24	0,02 47	13,85 91	11518,15 82	13399,90 37	0,1834
68	0,04 12	0,176 5	0,14 82	0,63 41	0,00 97	13,79 92	11360,38 70	13652,45 19	0,1820
69	0,01 09	0,327 7	0,10 56	0,55 57	0,00 27	15,47 89	12137,14 28	15344,42 69	0,1762
70	0,12 12	0,119 0	0,07 08	0,68 90	0,02 40	13,67 97	11491,43 38	13385,79 99	0,1714
71	0,12 22	0,117 6	0,07 09	0,68 93	0,02 42	13,65 58	11490,42 36	13384,86 21	0,1695
72	0,11 24	0,123 4	0,08 69	0,67 72	0,02 16	13,52 59	11457,06 07	13369,74 74	0,1628
73	0,04 76	0,229 1	0,13 69	0,58 65	0,00 66	13,92 91	11491,35 81	14022,68 07	0,1607
74	0,02 90	0,381 1	0,08 01	0,50 98	0,00 19	15,65 68	12369,70 07	16043,75 53	0,1528
75	0,00 00	0,458 9	0,06 03	0,48 08	0,00 18	16,77 59	12985,77 93	17869,78 16	0,1481
76	0,04 81	0,262 4	0,13 05	0,55 91	0,00 49	14,07 25	11600,84 02	14371,21 66	0,1436
77	0,02 16	0,255 8	0,14 84	0,57 42	0,00 42	14,26 99	11702,72 36	14563,28 49	0,1404
78	0,03 81	0,477 0	0,03 47	0,45 02	0,00 16	16,49 24	12896,22 16	17584,21 36	0,1394
79	0,04 20	0,175 9	0,16 54	0,61 68	0,00 88	13,40 55	11420,12 60	13705,83 35	0,1394
80	0,02 94	0,346 1	0,10 10	0,52 35	0,00 23	15,17 30	12216,59 62	15604,26 02	0,1357
81	0,04 06	0,200 5	0,16 12	0,59 77	0,00 72	13,53 94	11474,89 42	13914,32 30	0,1345
82	0,01 99	0,464 9	0,05 14	0,46 38	0,00 17	16,52 81	12934,58 66	17729,19 05	0,1345
83	0,04 42	0,201 0	0,15 93	0,59 54	0,00 73	13,49 93	11452,00 48	13894,00 06	0,1343
84	0,03 92	0,230 1	0,15 42	0,57 65	0,00 56	13,73 72	11552,89 57	14205,89 35	0,1280
85	0,03 98	0,218 6	0,15 78	0,58 39	0,00 61	13,64 14	11538,32 10	14094,16 18	0,1273

86	0,01 52	0,456 4	0,06 05	0,46 78	0,00 16	16,42 85	12911,14 79	17727,93 47	0,1259
87	0,12 00	0,105 9	0,09 33	0,68 07	0,02 36	13,20 73	11576,77 55	13356,01 83	0,1239
88	0,03 96	0,433 2	0,06 23	0,46 49	0,00 14	15,83 44	12637,69 64	16978,86 91	0,1162
89	0,14 32	0,126 3	0,08 45	0,64 59	0,02 27	12,88 99	11564,19 54	13336,31 84	0,0986
90	0,00 00	0,423 5	0,09 59	0,48 06	0,00 14	15,97 85	12854,79 47	17712,99 31	0,0879
91	0,03 45	0,392 5	0,09 53	0,47 77	0,00 14	15,20 60	12450,40 98	16640,99 53	0,0811
92	0,05 28	0,270 2	0,14 60	0,53 11	0,00 39	13,63 16	11740,90 66	14644,22 22	0,0767
93	0,03 23	0,422 1	0,08 42	0,46 13	0,00 13	15,51 11	12683,58 32	17226,40 04	0,0747
94	0,04 49	0,212 1	0,17 84	0,56 46	0,00 57	13,07 07	11578,14 85	14171,08 92	0,0697
95	0,03 31	0,359 7	0,11 59	0,49 13	0,00 16	14,77 07	12302,69 88	16236,75 47	0,0659
96	0,03 36	0,409 7	0,09 28	0,46 40	0,00 12	15,29 00	12597,59 36	17068,15 06	0,0645
97	0,04 55	0,242 0	0,16 98	0,54 28	0,00 43	13,26 09	11624,15 21	14502,75 31	0,0635
98	0,01 67	0,436 3	0,08 85	0,45 85	0,00 13	15,77 47	12829,25 03	17840,73 12	0,0633
99	0,11 17	0,472 1	0,02 51	0,39 11	0,00 12	15,05 34	12495,57 55	16868,75 05	0,0554
10 0	0,02 88	0,380 7	0,11 34	0,47 70	0,00 13	14,93 16	12429,71 40	16759,71 33	0,0509
10 1	0,04 26	0,251 7	0,16 91	0,53 66	0,00 38	13,34 38	11734,47 61	14681,89 34	0,0502
10 2	0,03 35	0,426 8	0,09 00	0,44 98	0,00 12	15,36 16	12714,25 78	17506,68 05	0,0463
10 3	0,02 20	0,105 8	0,24 12	0,63 09	0,00 96	12,15 83	11634,76 04	13592,95 31	0,0164
10 4	0,02 29	0,099 2	0,24 34	0,63 45	0,01 00	12,08 77	11637,50 13	13553,20 52	0,0121
10 5	0,02 15	0,088 1	0,24 93	0,64 10	0,01 06	11,98 27	11626,24 26	13512,54 14	0,0063
10 6	0,19 11	0,123 4	0,08 27	0,60 28	0,02 51	11,85 80	11663,56 15	13304,06 17	0,0010
10 7	0,03 38	0,390 0	0,12 26	0,45 37	0,00 10	14,62 33	12531,61 86	17231,44 45	-0,0019

108	0,0350	0,4354	0,0996	0,4301	0,0011	15,1219	12769,5829	18034,2219	-0,0033
109	0,0335	0,3962	0,1206	0,4498	0,0010	14,6768	12577,4257	17369,0005	-0,0049
110	0,0335	0,4419	0,0984	0,4262	0,0011	15,1824	12787,0754	18219,4693	-0,0084
111	0,0342	0,4011	0,1198	0,4449	0,0009	14,6803	12608,9400	17498,4157	-0,0118
112	0,0342	0,4466	0,0974	0,4218	0,0011	15,1915	12800,9262	18342,7532	-0,0145
113	0,0502	0,2371	0,1930	0,5198	0,0037	12,6448	11758,4991	14748,6381	-0,0167
114	0,0318	0,4088	0,1188	0,4406	0,0009	14,7590	12656,2409	17724,7873	-0,0176
115	0,0202	0,2480	0,2018	0,5300	0,0026	13,1263	11905,2117	15283,5243	-0,0184
116	0,0190	0,2386	0,2082	0,5342	0,0028	13,0099	11858,0967	15189,1761	-0,0189
117	0,0349	0,4507	0,0965	0,4179	0,0011	15,1972	12799,6727	18447,9389	-0,0199
118	0,0545	0,3118	0,1601	0,4736	0,0018	13,3014	12077,0730	15858,3323	-0,0406
119	0,0556	0,3165	0,1599	0,4680	0,0017	13,2847	12082,2105	15970,0468	-0,0483
120	0,0197	0,2473	0,2158	0,5172	0,0022	12,8313	11995,7493	15549,9050	-0,0646
121	0,1385	0,3446	0,1091	0,4078	0,0027	12,5558	11893,5922	15270,2582	-0,0663
122	0,1708	0,1953	0,1355	0,4984	0,0122	11,1877	11758,4118	13411,5164	-0,0701
123	0,0332	0,4123	0,1319	0,4226	0,0008	14,4422	12719,5498	18192,7956	-0,0708
124	0,1375	0,3497	0,1082	0,4046	0,0025	12,6005	11918,3492	15380,2751	-0,0709
125	0,1743	0,1872	0,1348	0,5037	0,0131	11,1212	11748,4919	13368,9106	-0,0727
126	0,0341	0,4159	0,1311	0,4190	0,0008	14,4433	12706,3492	18285,0769	-0,0758
127	0,0327	0,4239	0,1287	0,4147	0,0009	14,5292	12743,3153	18487,5632	-0,0796
128	0,0336	0,4303	0,1256	0,4105	0,0009	14,5786	12755,6103	18606,4136	-0,0819
129	0,1543	0,3807	0,0879	0,3770	0,0021	12,6819	11978,5204	15661,2861	-0,0838

130	0,2686	0,2040	0,0463	0,4810	0,0212	10,9580	11778,1078	13264,7183	-0,0854
131	0,1520	0,3922	0,0855	0,3703	0,0018	12,7932	12032,9437	15909,4271	-0,0879
132	0,1354	0,3659	0,1068	0,3919	0,0020	12,6851	11984,5785	15762,0033	-0,0891
133	0,1932	0,1168	0,1307	0,5593	0,0219	10,7570	11749,0515	13262,4815	-0,1002
134	0,2700	0,2185	0,0617	0,4498	0,0183	10,5966	11769,8696	13267,9136	-0,1159
135	0,0609	0,2599	0,2089	0,4704	0,0023	12,0679	11885,6122	15550,4048	-0,1233
136	0,1841	0,2014	0,1461	0,4684	0,0113	10,6592	11805,0939	13462,4968	-0,1234
137	0,0625	0,2551	0,2128	0,4696	0,0024	11,9423	11846,1719	15506,4452	-0,1280
138	0,1630	0,3957	0,0951	0,3462	0,0015	12,3383	12041,6089	16165,6152	-0,1416
139	0,0683	0,2919	0,1946	0,4451	0,0016	12,2280	11990,2461	16030,4258	-0,1436
140	0,0657	0,2998	0,1930	0,4415	0,0014	12,3251	12040,1723	16215,0998	-0,1455
141	0,0732	0,2803	0,1987	0,4477	0,0020	12,0227	11933,3099	15800,6506	-0,1457
142	0,1941	0,1776	0,1494	0,4788	0,0137	10,3532	11833,8874	13346,7870	-0,1468
143	0,0867	0,0840	0,2547	0,5745	0,0125	10,4047	11870,6293	13400,0085	-0,1486
144	0,0643	0,3153	0,1888	0,4317	0,0011	12,4580	12076,5711	16554,0891	-0,1527
145	0,0684	0,3099	0,1891	0,4326	0,0012	12,3543	12093,9955	16391,8517	-0,1527
146	0,0663	0,3002	0,1967	0,4369	0,0013	12,2327	12046,4531	16309,6575	-0,1587
147	0,0680	0,3052	0,1938	0,4330	0,0013	12,2579	12073,2729	16372,7863	-0,1600
148	0,0061	0,3727	0,1914	0,4297	0,0006	13,7256	12621,3185	18710,3749	-0,1619
149	0,3012	0,2147	0,0515	0,4326	0,0208	10,1209	11827,8280	13254,3776	-0,1627
150	0,0605	0,3573	0,1777	0,4045	0,0005	12,8036	12387,8604	17567,8233	-0,1788
151	0,0705	0,3544	0,1763	0,3989	0,0006	12,6100	12271,1491	17390,3915	-0,1857

15 2	0,30 35	0,257 2	0,07 07	0,36 86	0,01 47	9,668 4	11878,56 42	13322,53 45	-0,2099
15 3	0,31 59	0,233 6	0,07 31	0,37 74	0,01 75	9,328 0	11922,61 63	13274,65 52	-0,2418
15 4	0,04 63	0,196 5	0,28 95	0,46 78	0,00 24	10,60 00	11850,84 86	15717,57 53	-0,2569
15 5	0,05 69	0,322 1	0,22 42	0,39 68	0,00 04	11,84 80	12225,34 30	17740,30 19	-0,2711
15 6	0,06 88	0,263 3	0,24 75	0,42 04	0,00 13	11,04 54	11994,06 81	16482,00 62	-0,2712
15 7	0,06 32	0,281 6	0,24 33	0,41 19	0,00 09	11,27 08	12101,65 45	16947,79 03	-0,2773
15 8	0,06 02	0,298 9	0,23 68	0,40 41	0,00 06	11,48 87	12122,44 87	17330,89 07	-0,2795
15 9	0,06 45	0,290 3	0,23 91	0,40 61	0,00 07	11,33 79	12112,72 26	17101,70 11	-0,2800
16 0	0,06 45	0,286 5	0,24 10	0,40 80	0,00 08	11,29 46	12104,81 63	17033,70 22	-0,2800
16 1	0,07 09	0,265 7	0,25 00	0,41 34	0,00 12	10,94 57	12018,34 87	16608,09 50	-0,2869
16 2	0,05 93	0,309 3	0,23 52	0,39 63	0,00 04	11,54 96	12155,09 64	17622,40 82	-0,2904
16 3	0,06 09	0,328 0	0,22 58	0,38 53	0,00 03	11,72 62	12286,74 24	17959,86 81	-0,2938
16 4	0,05 73	0,338 7	0,22 58	0,37 81	0,00 02	11,81 12	12334,21 23	18335,46 22	-0,3073
16 5	0,15 56	0,482 2	0,11 16	0,25 06	0,00 03	12,18 09	12559,29 65	19460,19 21	-0,3377
16 6	0,17 76	0,485 8	0,10 24	0,23 42	0,00 02	11,89 35	12537,48 17	19194,44 85	-0,3478
16 7	0,07 71	0,350 5	0,22 20	0,35 05	0,00 02	11,45 89	12360,02 35	18538,76 67	-0,3490
16 8	0,07 60	0,361 8	0,21 66	0,34 56	0,00 01	11,60 56	12390,20 94	18776,66 38	-0,3495
16 9	0,07 74	0,380 5	0,20 80	0,33 41	0,00 02	11,77 19	12517,74 26	19179,10 39	-0,3574
17 0	0,08 24	0,369 7	0,21 16	0,33 63	0,00 01	11,57 66	12409,04 13	18875,89 52	-0,3575
17 1	0,07 64	0,373 0	0,21 35	0,33 71	0,00 02	11,67 06	12476,66 34	19085,21 72	-0,3610
17 2	0,08 55	0,379 4	0,20 61	0,32 89	0,00 01	11,63 04	12457,89 96	19040,36 98	-0,3620
17 3	0,03 07	0,180 4	0,33 69	0,45 20	0,00 16	9,901 9	11970,36 67	16459,34 94	-0,3699

17 4	0,07 51	0,401 3	0,20 17	0,32 19	0,00 03	11,97 03	12553,58 84	19760,79 49	-0,3726
17 5	0,06 71	0,304 9	0,25 81	0,36 99	0,00 03	10,87 01	12189,67 03	18096,65 65	-0,3759
17 6	0,17 94	0,447 4	0,13 95	0,23 37	0,00 01	11,02 11	12384,59 35	18967,85 77	-0,4111
17 7	0,07 07	0,319 1	0,26 98	0,34 05	0,00 01	10,54 03	12346,68 93	18941,28 16	-0,4515
17 8	0,01 93	0,224 3	0,34 47	0,41 17	0,00 03	10,00 51	12143,38 92	18129,58 23	-0,4534
17 9	0,06 99	0,345 0	0,25 76	0,32 75	0,00 01	10,83 64	12427,72 62	19511,79 68	-0,4573
18 0	0,07 47	0,298 6	0,28 73	0,33 94	0,00 01	10,05 77	12239,25 12	18738,13 02	-0,4825
18 1	0,08 01	0,320 3	0,27 49	0,32 47	0,00 00	10,21 87	12326,48 47	19110,65 50	-0,4891
18 2	0,07 26	0,335 5	0,27 14	0,32 05	0,00 00	10,46 91	12393,25 49	19596,01 57	-0,4941
18 3	0,10 38	0,317 8	0,26 69	0,31 14	0,00 01	9,860 9	12170,69 89	18654,26 56	-0,4950
18 4	0,07 46	0,324 6	0,27 85	0,32 24	0,00 00	10,26 50	12352,52 17	19411,62 16	-0,5017
18 5	0,02 00	0,248 7	0,35 56	0,37 56	0,00 00	9,760 7	12284,49 97	19356,88 11	-0,5428
18 6	0,01 99	0,240 5	0,36 33	0,37 64	0,00 00	9,592 0	12248,18 50	19300,17 40	-0,5544
18 7	0,01 86	0,226 0	0,37 22	0,38 32	0,00 01	9,418 9	12204,26 95	19055,53 49	-0,5560
18 8	0,00 69	0,254 9	0,36 17	0,37 65	0,00 00	9,924 3	12409,10 52	19869,41 86	-0,5569
18 9	0,03 75	0,173 9	0,39 89	0,38 98	0,00 07	8,388 3	12091,08 32	17946,69 97	-0,5855
19 0	0,03 83	0,268 2	0,34 87	0,34 48	0,00 00	9,511 6	12328,18 26	19796,04 88	-0,5890
19 1	0,02 01	0,246 4	0,36 92	0,36 44	0,00 00	9,460 4	12316,65 21	19731,22 33	-0,5899
19 2	0,01 22	0,225 1	0,38 92	0,37 35	0,00 00	9,189 2	12256,27 95	19623,97 79	-0,6077
19 3	0,06 17	0,254 7	0,35 13	0,33 23	0,00 01	8,926 5	12197,23 57	19250,70 29	-0,6102
19 4	0,00 62	0,224 5	0,39 32	0,37 62	0,00 00	9,235 8	12293,23 09	19769,85 34	-0,6117
19 5	0,00 11	0,189 7	0,42 87	0,38 05	0,00 01	8,554 6	12213,02 35	19660,89 25	-0,6659

19 6	0,03 19	0,226 7	0,40 26	0,33 88	0,00 00	8,454 8	12232,33 52	20096,52 43	-0,6988
19 7	0,03 81	0,211 0	0,41 84	0,33 25	0,00 01	7,963 6	12182,31 43	19996,72 54	-0,7367
19 8	0,15 67	0,337 7	0,29 61	0,20 95	0,00 01	8,048 0	12170,45 18	20201,22 13	-0,7406
19 9	0,07 31	0,249 5	0,38 28	0,29 46	0,00 01	7,978 0	12169,86 29	20123,60 77	-0,7424
20 0	0,07 86	0,248 6	0,38 84	0,28 44	0,00 01	7,731 3	12163,74 46	20273,31 87	-0,7725