

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

Marcelo Dallagnol Alloy

**PASTA NUCLEAR E EVOLUÇÃO DE PROTOESTRELAS DE  
NÊUTRONS**

Florianópolis(SC)

2012



Marcelo Dallagnol Alloy

**PASTA NUCLEAR E EVOLUÇÃO DE PROTOESTRELAS DE  
NÊUTRONS**

Tese submetido ao Curso de Pós-Graduação  
em Física para a obtenção do Grau de Dou-  
tor em Física.

Orientadora: Débora Peres Menezes, Dr.<sup>a</sup>

Florianópolis(SC)

2012



Marcelo Dallagnol Alloy

**PASTA NUCLEAR E EVOLUÇÃO DE PROTOESTRELAS DE  
NÊUTRONS**

Este Tese foi julgado aprovado para a obtenção do Título de “Doutor em Física”, e aprovado em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Física.

Florianópolis(SC), 09 de abril 2012.

---

Prof. Luis Guilherme de Carvalho Rego, Dr.  
Coordenador

---

Débora Peres Menezes, Dr.<sup>a</sup>  
Orientadora

**Banca Examinadora:**

---

Prof.<sup>a</sup> Débora Peres Menezes, Dr.<sup>a</sup>  
Orientador  
UFSC

---

Prof. Abílio Mateus Junior, Dr.  
UFSC



---

Prof. Celso de Camargo Barros, Dr.  
UFSC

---

Prof.<sup>a</sup> Veronica Dexheimer, Dr.<sup>a</sup>  
UFSC

---

Prof. Germán Lugones, Dr.  
UFABC

---

Prof.<sup>a</sup> Maria Beatriz de Leone Gay Ducati, Dr.<sup>a</sup>  
UFRGS





Dedico este trabalho a meus pais,  
cujo exemplo de honestidade e trabalho  
tem sido um norteador para a minha vida,  
e para minha esposa, que tem  
me dado apoio nos momentos mais difíceis  
e mostrado a simplicidade de ter esperança.



## AGRADECIMENTOS

A professora Dr.<sup>a</sup> Débora Peres Menezes, pela orientação e incentivo. Aos meus Pais que sempre me apoiaram em todos os sentidos. A Flávia Postalli, com quem aprendi muito e continuo aprendendo lições de caráter, humildade e perseverança. A todos os professores do Departamento de Física que, de alguma forma, contribuíram para minha formação e, conseqüentemente, para o desenvolvimento deste trabalho. Gostaria de agradecer ao Dr. Germán Lugones pelas sugestões e comentários que ajudaram no desenvolvimento desse trabalho. A CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual não seria possível a execução deste trabalho.







## RESUMO

Acredita-se que uma protoestrela de nêutrons nasça partir do colapso do núcleo de uma estrela massiva em conjunção com uma explosão de supernova. Durante os primeiros segundos de evolução, aproximadamente toda energia de ligação é irradiada em forma de neutrinos. A luminosidade de neutrinos é controlada por vários fatores, alguns deles sendo a massa total da protoestrela de nêutrons e a opacidade dos neutrinos em relação a sua matéria constituinte. Nesta tese mostramos que há uma diferença importante na evolução de protoestrelas de nêutrons quando estas apresentam a formação da pasta nuclear na sua crosta. A fase de desleptonização e resfriamento no início da vida da protoestrela de nêutrons é temporalmente mais longa em comparação com uma protoestrela de nêutrons constituída apenas de matéria homogênea. Isso pode ser dito porque os coeficientes de difusão das equações de transporte que regem os processos de desleptonização e resfriamento da estrela são sempre menores na presença da pasta nuclear.

A pasta nuclear foi calculada pelo método de coexistência de fases impondo neutralidade de carga, equilíbrio beta e aprisionamento de neutrinos. O coeficiente da energia de superfície nuclear foi calculado a partir de três parametrizações diferentes e vimos que, com uma das parametrizações, os resultados obtidos se aproximam muito da pasta nuclear calculada pelo método de Thomas-Fermi, o que confere credibilidade ao método aqui utilizado.

**Palavras-chave:** Protoestrelas de Nêutrons. Pasta Nuclear. Neutrinos. Equação de Estado Relativística. Evolução estelar.





## ABSTRACT

A protoneutron star is believed to be born from the collapse of a very massive star and a supernova explosion. During the first few seconds of the star evolution, almost all the binding energy is taken away by the neutrinos. The neutrino luminosity is controlled mainly by the total protoneutron star mass and the neutrino opacity.

In this thesis we show that an important difference in the evolution of a protoneutron star is seen if a pasta phase is present in its inner crust. The deleptonization and cooling processes take longer than if the crust would be made of homogeneous matter only. This statement results from the smaller diffusion coefficients obtained with the inclusion of the pasta phase. The diffusion coefficients present in the transport equations determine the temporal behavior associated with the deleptonization and cooling processes.

The nuclear pasta was calculated by the coexistence phases method. We have assumed total charge neutrality,  $\beta$ -equilibrium and neutrino trapping in the equation of state. The surface energy coefficient was obtained with three different parametrizations and one of them practically reproduces results obtained with the more sophisticated Thomas-Fermi method, yielding credibility to our method.

**Keywords:** Proto-Neutron stars. Nuclear Pasta. Neutrinos. Relativistic Equation of State. Star Evolution.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Os principais estágios de evolução de uma estrela de nêutrons. O raio $R$ e a temperatura central $T_c$ são indicados a cada instante $t$ (Lattimer; Prakash, 2007).	28
Figura 2 Energia de ligação em função da densidade bariônica para os modelos $NL3$ , $TM1$ e $GL$ a temperatura $T = 0$ .	61
Figura 3 Energia de simetria em função de densidade bariônica para os modelos $NL3$ , $TM1$ e $GL$ a temperatura $T = 0$ .	62
Figura 4 Massa efetiva em função da densidade bariônica a temperatura $T = 0$ .	63
Figura 5 (a) Massa efetiva dos nucleons em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para diferentes valores de temperatura e fração de léptons $Y_L = 0.4$ . (b) Massa efetiva dos nucleons em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para diferentes valores de fração de léptons e temperatura 25 MeV. Parametrização $NL3$ usada em ambos os gráficos.	67
Figura 6 (a) Entropia (por bárion) em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para diferentes valores de temperatura e fração de léptons $Y_L = 0.4$ . (b) Entropia (por bárion) em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para diferentes valores de fração de léptons e temperatura 25 MeV. Parametrização $NL3$ usada em ambos os gráficos.	68
Figura 7 Fração de partículas ( $\nu$ :neutrino, $e^-$ :elétron, $p$ :próton e $n$ :nêutron) em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para diferentes valores de temperatura e fração de léptons $Y_L = 0.4$ .	69
Figura 8 Fração de partículas ( $\nu$ :neutrino, $e^-$ :elétron, $p$ :próton e $n$ :nêutron) em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para temperatura igual a 25 MeV e diferentes frações de léptons.	70
Figura 9 Potencial químico ( $\nu$ :neutrino, $e^-$ :elétron, $p$ :próton e $n$ :nêutron) em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para diferentes valores de temperatura e fração de léptons $Y_L = 0.4$ .	71
Figura 10 (a) Pressão total do sistema em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para temperatura 25 MeV e fração de léptons $Y_L = 0.4$ . (b) Densidade de energia em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para temperatura 25 MeV e fração de léptons $Y_L = 0.4$ .	72
Figura 11 (a) Energia livre em função de unidades da densidade de saturação	

da matéria nuclear para diferentes valores de temperatura e fração de léptons $Y_L = 0.4$ . (b) Energia livre em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para temperatura 25 MeV e diferentes valores de fração de léptons. ....	73
Figura 12 Espectro de decaimento beta do trítio ( ${}^3_1H \rightarrow {}^3_2He$ ) (Griffiths, 1987). ....	76
Figura 13 Coeficiente de difusão (a) $D_2$ , (b) $D_3$ e (c) $D_4$ para diferentes valores de temperatura e fração de lépton. ....	82
Figura 14 Evolução temporal da temperatura e da entropia em função da massa bariônica da estrela. ....	86
Figura 15 Evolução temporal de $\eta_\nu$ e de $\mu_\nu$ em função da massa bariônica da estrela. ....	87
Figura 16 Evolução temporal das frações de léptons em função da massa bariônica da estrela. ....	88
Figura 17 Evolução temporal das frações de prótons e de nêutrons em função da massa bariônica da estrela. ....	89
Figura 18 Evolução temporal dos coeficientes de difusão $D_2$ , $D_3$ e $D_4$ em função da massa bariônica da estrela. ....	90
Figura 19 As cinco regiões principais de uma estrela de nêutrons. O topo da figura mostra a transição da matéria homogênea no caroço externo para matéria não homogênea na crosta. ....	92
Figura 20 Representação das estruturas da pasta nuclear. ....	93
Figura 21 Diagrama de fases obtida a partir dos métodos CP e TF para temperatura $T = 0$ . (a) Parametrização NL3 para matéria simétrica e (b) Parametrização NL3 e TM1 com $Y_p = 0.3$ . Cada cor representa uma estrutura diferente da pasta. Da densidade mais baixa para mais alta, temos: gotas, haste, laje, tubo e bolha. A última cor (marrom) é matéria homogênea (Avancini et al., 2008). ....	96
Figura 22 Na parte esquerda da figura temos uma representação de uma célula de Wigner-Seitz. Na parte direita da figura temos gotas iguais formadas da fase I envoltas pela fase II da matéria. ....	98
Figura 23 Representação da energia total $E$ , energia de superfície $E_S$ e energia de Coulomb $E_C$ , onde $V_W$ é o volume da célula de Wigner-Seitz. Gráfico tirado de (Maruyama et al., 2006). ....	99
Figura 24 Coeficiente da energia de superfície em função da temperatura nas três diferentes formas de cálculo. ....	102
Figura 25 Coeficiente da energia de superfície em função da fração de léptons nas três diferentes formas de cálculo. ....	102
Figura 26 Diagrama de fases em função da densidade bariônica para as	

três diferentes formas de calcular o coeficiente da energia de simetria. . .	108
Figura 27 (a) Pressão e (b) energia pelas respectivas estruturas da pasta nuclear para $T = 5$ MeV e $Y_L = 0.4$ com parametrização NL3. A coluna 1 é obtida com coeficiente de energia de simetria não relativístico e $Y_p$ da fase mais densa. A coluna 2 é obtida com coeficiente de energia de simetria relativístico e $Y_p$ local. A coluna 3 é obtida com coeficiente de energia de simetria relativístico e $Y_p$ global. . . . .	109
Figura 28 (a) Pressão por $\rho/\rho_0$ densidade bariônica para $T = 5$ MeV e $Y_L = 0.4$ com parametrização NL3. (b) Densidade de energia total por $\rho/\rho_0$ . Em ambos os gráficos o coeficiente de energia é relativístico com $Y_p$ global. . . . .	110
Figura 29 Energia livre por $\rho/\rho_0$ para $T = 3$ MeV e fração de léptons $Y_L = 0.2$ com parametrização NL3. . . . .	111
Figura 30 Energia livre por $\rho/\rho_0$ para $T = 3$ MeV e fração de léptons $Y_L = 0.4$ com parametrização NL3. . . . .	112
Figura 31 Energia livre por $\rho/\rho_0$ para $T = 5$ MeV e fração de léptons $Y_L = 0.2$ com parametrização NL3. . . . .	113
Figura 32 Energia livre por $\rho/\rho_0$ para $T = 5$ MeV e fração de léptons $Y_L = 0.4$ com parametrização NL3. . . . .	114
Figura 33 Coeficiente de difusão $D_2$ para $T = 3$ MeV e fração de léptons: (a) $Y_L = 0.2$ e (b) $Y_L = 0.4$ . . . . .	115
Figura 34 Coeficiente de difusão $D_2$ para $T = 5$ MeV e fração de léptons: (a) $Y_L = 0.2$ e (b) $Y_L = 0.4$ . . . . .	116
Figura 35 Coeficiente de difusão $D_3$ para $T = 3$ MeV e fração de léptons: (a) $Y_L = 0.2$ e (b) $Y_L = 0.4$ . . . . .	117
Figura 36 Coeficiente de difusão $D_3$ para $T = 5$ MeV e fração de léptons: (a) $Y_L = 0.2$ e (b) $Y_L = 0.4$ . . . . .	118
Figura 37 Coeficiente de difusão $D_4$ para $T = 3$ MeV e fração de léptons: (a) $Y_L = 0.2$ e (b) $Y_L = 0.4$ . . . . .	119
Figura 38 Coeficiente de difusão $D_4$ para $T = 5$ MeV e fração de léptons: (a) $Y_L = 0.2$ e (b) $Y_L = 0.4$ . . . . .	120
Figura 39 Coeficientes de difusão a) $D_2$ , b) $D_3$ e c) $D_4$ para $T = 5$ MeV e fração de léptons $Y_L = 0.2$ e $Y_L = 0.4$ . . . . .	121



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Massas dos bárions e dos mésons em 3 diferentes parametrizações: NL3, TM1 e GL. As massas estão em unidades de MeV . . . . .	59
Tabela 2	Valores dos parâmetros livres em 3 diferentes modelos: NL3 (Lalazissis; König; Ring, 1997), TM1 (Santos; Menezes, 2004) e GL (Glendenning, 2000). . . . .	60
Tabela 3	Propriedades da matéria nuclear no contexto dos parâmetros usados na saturação. $B/A$ é a energia de ligação, $\rho_0$ é a densidade de saturação da matéria nuclear, $K$ é a compressibilidade, $\epsilon_{sim}$ é a energia de simetria, $m_B^*/m_B$ é a massa efetiva dos bárions em unidades da massa de repouso do nucleon e $M_{max}$ é a máxima massa de uma estrela de nêutrons no referido modelo em temperatura nula. NL3 (Pearson; Goriely; Chamel, 2011), TM1 (Santos; Menezes, 2004) e GL (Glendenning, 2000). . .	60





## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	25
1.1 UMA BREVE HISTÓRIA DAS ESTRELAS DE NÊUTRONS ...	29
1.2 ASPECTOS OBSERVACIONAIS .....	32
1.3 OS TÓPICOS DESTE TRABALHO .....	33
<b>2 REVISÃO TEÓRICA</b> .....	35
2.1 EQUAÇÕES DE TRANSPORTE .....	35
2.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MOMENTOS .....	41
2.3 MÉTODO NUMÉRICO .....	47
<b>3 A EQUAÇÃO DE ESTADO</b> .....	53
3.1 MODELO DE WALECKA NÃO LINEAR .....	54
3.2 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA OS CAMPOS .....	55
3.3 APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO .....	56
3.4 VARIÁVEIS TERMODINÂMICAS .....	58
3.5 PARÂMETROS DO MODELO .....	59
3.6 NEUTRALIDADE DE CARGA .....	60
3.7 EQUILÍBRIO BETA E APRISIONAMENTO DE NEUTRINOS .	64
<b>4 OPACIDADE DOS NEUTRINOS</b> .....	75
4.1 OS NEUTRINOS E A SN 1987A .....	77
4.2 REVISÃO TEÓRICA .....	78
<b>5 EVOLUÇÃO TEMPORAL</b> .....	83
<b>6 PASTA NUCLEAR</b> .....	91
6.1 AS ESTRUTURAS PRINCIPAIS DAS ESTRELAS DE NÊUTRONS	91
6.2 MATÉRIA NÃO HOMOGÊNEA .....	94
6.3 COEXISTÊNCIA DE FASES .....	94
6.4 COEXISTÊNCIA DE FASES: MATÉRIA ESTELAR .....	97
6.5 VARIÁVEIS TERMODINÂMICAS .....	97
6.6 ENERGIA DE COULOMB .....	97
6.7 ENERGIA DE SUPERFÍCIE .....	100
6.8 OPACIDADE DOS NEUTRINOS NA PASTA NUCLEAR .....	104
<b>7 CONCLUSÃO</b> .....	123
<b>Referências Bibliográficas</b> .....	127
<b>ANEXO A – ANEXOS</b> .....	133



## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente a física moderna está fundamentada em dois grandes pilares: a relatividade geral e a mecânica quântica. A relatividade geral é uma teoria da gravitação, publicada por Albert Einstein em 1916, que estende o limite de validade da Lei da Gravitação Universal de Isaac Newton ao explicar que a gravidade advém da forma geométrica do espaço tempo. Serve como base para o entendimento de objetos compactos como estrelas de nêutrons e buracos negros. A mecânica quântica procura explicar a física dos fenômenos que ocorrem nas escalas microscópicas, ou seja, para objetos pequenos comparáveis ao tamanho dos átomos onde a mecânica clássica não é válida. Assim, a maioria das áreas da física, atualmente, está diretamente ligada à relatividade geral ou à mecânica quântica ou simultaneamente a ambas. A Física nuclear, física das partículas, física atômica, física molecular, matéria condensada, física do estado sólido são alguns dos ramos ligados à mecânica quântica. A astrofísica e a cosmologia são exemplos de áreas ligadas à relatividade geral.

No estudo de objetos compactos, como estrelas de nêutrons e buracos negros, precisamos fazer uso desses dois pilares para explicá-los de forma adequada. Um dos principais benefícios de se estudar objetos compactos, onde encontramos condições físicas extremas, condições estas impossíveis de se reproduzir até mesmo no mais sofisticado laboratório que a tecnologia atual é capaz de construir, é confrontarmos os resultados obtidos a partir de modelos teóricos da física nuclear e de hádrons com os dados obtidos a partir da observação astronômica desses objetos. As condições físicas extremas existentes no interior e nas proximidades de uma estrela de nêutrons nos permitem estudar a matéria em condições jamais alcançadas em qualquer laboratório. Assim, podemos dizer que as estrelas servem como um “laboratório” que nos possibilita explorar a natureza do universo físico, de forma a compreender cada vez mais os mecanismos que regem o interior da matéria.

Para se ter uma ideia, a massa gravitacional total de uma estrela de nêutrons está entre  $1 - 2 M_{\odot}$  e o seu raio está entre  $10 - 12$  km e, nestas condições, a densidade média no interior de uma estrela de nêutrons é da ordem de  $3 \times 10^{14} \text{ gcm}^{-3}$  (Baym; Lamb, 2005). A densidade típica no centro de uma estrela de nêutrons fica entre 5 e 10 vezes a densidade de saturação da matéria nuclear que é de  $0.16 \text{ fm}^{-3}$  (Lattimer; Prakash, 2004). Não é de se admirar que o peso de qualquer objeto na superfície de uma estrela de nêutrons seja da ordem de  $10^{11}$  vezes maior do que o peso do mesmo objeto na superfície da Terra. Campos gravitacionais intensos podem provocar o colapso de configurações metaestáveis de estrelas de nêutrons dando

origem a buracos negros. No entanto, em configurações estáveis, onde há equilíbrio hidrostático, o que exatamente evita o colapso gravitacional numa estrela de nêutrons? Em estrelas ordinárias, as reações termonucleares em seu interior impedem o colapso gravitacional, ou seja, a força gravitacional é compensada pela pressão térmica do gás constituinte da estrela. Nas estrelas de nêutrons, a intensa força gravitacional é contrabalanceada pela pressão de degenerescência dos nêutrons e outras partículas fermiônicas que obedecem ao princípio de exclusão de Pauli.

Além da intensa força gravitacional, as altas temperaturas também chamam a atenção. No momento em que nascem, as estrelas de nêutrons apresentam uma temperatura da ordem de  $10^{11}$  K, esfriando para menos de  $10^{10}$  K nos primeiros dias através da emissão de neutrinos (Baym; Lamb, 2005). Uma explosão de supernova do tipo II marca o nascimento de uma protoestrela de nêutrons, que é o remanescente do colapso gravitacional do núcleo de uma estrela massiva. O fim do colapso gravitacional ocorre quando a densidade da matéria alcança a densidade de saturação da matéria nuclear (Lattimer; Prakash, 2004). Neste ponto, ocorre a formação de uma onda de choque no núcleo da estrela que dá início a uma série de eventos que resultam na formação de uma supernova, mas o mecanismo exato que gera a explosão ainda não é bem compreendido (Janka et al., 2007). Inicialmente, a matéria que constitui a protoestrela de nêutrons é rica em léptons, principalmente elétrons  $e^-$  e neutrinos do elétron  $\nu_e$  (Figura 1) e, além disso, é opaca em relação aos neutrinos, ou seja, a pequena seção de choque dos neutrinos em relação à matéria é da ordem de  $\sigma \approx 10^{-40}$  cm<sup>2</sup>, o que resulta num livre caminho médio  $\lambda \approx (n\sigma)^{-1} \approx 10$  cm, onde a densidade bariônica  $n$  é 2 a 3 vezes a densidade de saturação da matéria nuclear. Podemos dizer que nos instantes iniciais de formação da estrela de nêutrons, dominado pela difusão dos neutrinos, o livre caminho médio é muito menor que o raio da protoestrela de nêutrons que é da ordem de  $R \approx 20$  km, sendo que nesta configuração, os neutrinos ficam aprisionados no interior da estrela. Após a explosão, a protoestrela de nêutrons encolhe rapidamente devido a uma diminuição de pressão em função do fluxo de neutrinos (fase II da Figura 1). Nos instantes iniciais de formação da estrela de nêutrons, o fluxo de neutrinos faz com que haja um aumento da temperatura da protoestrela de nêutrons até aproximadamente 50 MeV ( $6 \times 10^{11}$  K) (fase III da figura 1). Entretanto, depois de aproximadamente 10 – 20 s a temperatura da estrela começa a diminuir. No processo de desleptonização, o livre caminho médio dos neutrinos começa a aumentar até o ponto em que se torna muito maior que o raio total da estrela e, assim, a matéria passa a ser transparente em relação aos neutrinos, o que se dá aproximadamente nos primeiros minutos de vida. Esse estágio de resfriamento e desleptonização é conhecido como fase Kelvin-Helmholtz.

Durante a fase Kelvin-Helmholtz a estrela pode colapsar formando um buraco negro. Caso isso não aconteça, depois de aproximadamente um minuto, a estrela torna-se transparente em relação aos neutrinos e começa um longo e lento processo de resfriamento. Esse novo processo é dominado principalmente por emissão de neutrinos e pela difusão de calor das camadas mais internas para a superfície resultando na emissão de fótons. A emissão de neutrinos domina a emissão de fótons nos primeiros  $10^5$  anos (Yakovlev; Pethick, 2004). Depois, a emissão de fótons predomina sobre a emissão de neutrinos.

Os neutrinos emitidos de objetos compactos revelaram importantes detalhes da formação de supernovas, bem como as propriedades e composição da matéria densa. A detecção dos neutrinos provenientes da SN 1987A (Hirata et al., 1987) confirmou a existência do processo de evolução das protoestrelas de nêutrons (Burrows; Lattimer, 1986), bem como fortaleceu a ideia da formação de objetos estelares desse tipo. Podemos dizer que hoje um dos principais objetivos ao simular a evolução temporal de protoestrelas de nêutrons é determinar a composição interna da estrela. A detecção de neutrinos num intervalo de 10 – 15 s, advindos da supernova SN 1987A, é consistente com os seguintes eventos: a formação de uma protoestrela de nêutrons estável ou a formação de uma protoestrela de nêutrons metaestável com híperons. Diversos trabalhos nesse sentido buscam explicar a constituição física de tais objetos. Teoricamente falando, muitas simulações preveem o aparecimento de formas exóticas de matéria nuclear como matéria estranha, matéria hiperônica, condensados de píons e de káons, e até mesmo o aparecimento de matéria quarkionica. A questão é: a detecção dos neutrinos provenientes de tais objetos estelares poderia evidenciar a formação de tal matéria no interior da estrela? Para responder a esta pergunta se faz necessário confrontar observação com teoria. Uma estrela de nêutrons suficientemente massiva torna-se metaestável quando sua constituição interna apresenta a existência de matéria estranha e, nesse caso, num intervalo entre 10 – 100 s após sua formação, a estrela colapsará formando um buraco negro (Keil; Janka, 1995). O colapso será marcado pela interrupção abrupta na emissão de neutrinos. Em outras palavras, os neutrinos ainda presos no interior da estrela durante o colapso, não poderão mais escapar da estrela (Baumgarte et al., 1996). O colapso do núcleo de ferro de uma estrela massiva pode formar diretamente um buraco negro, o que geraria sinais de neutrinos de duração relativamente curtos (Burrows, 1988b). Outra possibilidade estaria ligada a metaestabilidade de uma protoestrela de nêutrons formada com massa bariônica superior ao limite máximo de massa de uma estrela de nêutrons fria e desleptonizada. Isso significa que a estrela colapsará formando um buraco negro durante a fase Kelvin-Helmholtz. Contudo, a alta

concentração de léptons, uma das características principais das protoestrelas de nêutrons, suprime a formação de matéria nuclear exótica como quarks, condensados de píons ou káons, bem como a formação de híperons (Prakash; Cooke; Lattimer, 1995; Prakash et al., 1997). O aparecimento dos káons depois do processo de desleptonização torna a equação de estado menos dura. Isso pode desestabilizar a estrela causando o colapso gravitacional e, conseqüentemente, a formação de um buraco negro (Pons et al., 2001).

O foco deste trabalho é a fase Kelvin-Helmholtz, onde examinaremos mais de perto como se dá a evolução temporal de uma recém nascida estrela de nêutrons levando em consideração a formação da pasta nuclear na crosta.

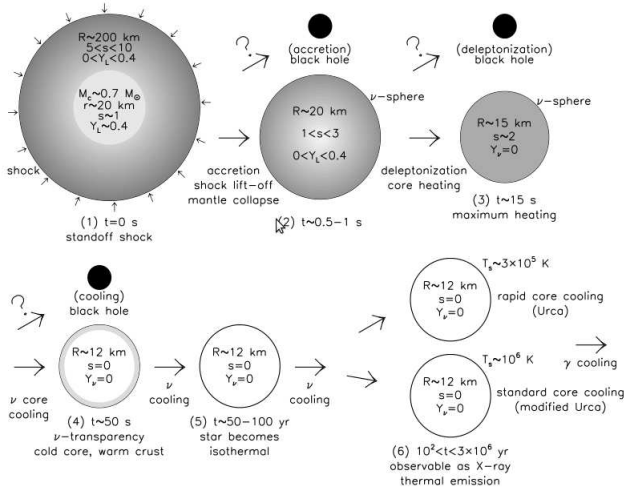


Figura 1: Os principais estágios de evolução de uma estrela de nêutrons. O raio  $R$  e a temperatura central  $T_c$  são indicados a cada instante  $t$  (Lattimer; Prakash, 2007).

## 1.1 UMA BREVE HISTÓRIA DAS ESTRELAS DE NÊUTRONS

Podemos dizer que, de certa forma, as estrelas de nêutrons foram previstas, aproximadamente, um ano antes da descoberta do nêutron. Em 1932, James Chadwick anunciou a descoberta do nêutron num artigo publicado na *Nature* no dia 27 de fevereiro. Um ano antes, no mês de fevereiro do ano de 1931, Lev Landau com apenas 23 anos de idade, estudante de graduação do instituto técnico Leningrad Physico (atualmente instituto técnico Ioffe Physico, St.-Petersburg) terminou um artigo em que calculou de forma brilhante, independente de Chandrasekhar (1931), a massa máxima das anãs brancas, bem como especulou sobre a possível existência de estrelas formadas de matéria mais densa que as anãs brancas. Apesar do artigo de Lev Landau ter sido publicado em 1932, o mesmo afirma que foi concluído em 1931 (Hansel; Potekhin; Yakovlev, 2007).

Em 1934, Baade e Zwicky propuseram que a explosão de uma supernova marca o nascimento de uma estrela de nêutrons <sup>1</sup>. Outra parte interessante do mesmo artigo fala a respeito do raio e da densidade da estrela de nêutrons <sup>2</sup>(Baade; Zwicky, 1934).

Em 1939, outro importante passo foi dado pelos físicos Richard Chace Tolman, Julius Robert Oppenheimer e George Michael Volkoff que derivaram, a partir da relatividade geral, a equação de equilíbrio hidrostático para um estrela estática com simetria esférica. A importância desse trabalho está no fato de que as estrelas de nêutrons são objetos estelares extremamente compactos e causam considerável deformação no espaço tempo, de forma que os efeitos previstos pela relatividade geral não são desprezíveis. É interessante mencionar que a equação de equilíbrio hidrostático tinha sido derivada, em 1934, por Von Newmann e Chandrasekhar. No entanto, esses resultados não foram publicados (Baym, 1982). Ainda em 1939, Oppenheimer e Volkoff usaram a equação de equilíbrio hidrostático para calcular numericamente modelos de estrelas de nêutrons a partir de uma equação de estado simples. O simples aqui se refere ao fato de que a equação de estado não levava em consideração a interação dos nêutrons. Com isso, concluíram que a massa gravitacional máxima de uma estrela de nêutrons estática estável era aproximadamente  $M_{max} \approx 0.71M_{\odot}$ . Este limite é conhecido como limite de massa

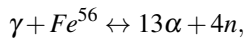
---

<sup>1</sup>Nas próprias palavras dos autores, em inglês: *With all reserve we advance the view that a super-nova represents the transition of an ordinary star into a neutron star, consisting mainly of neutrons.*

<sup>2</sup>Nas próprias palavras dos autores, em inglês: *may possess a very small radius and an extremely high density. As neutrons can be packed much more closely than ordinary nuclei and electrons, the 'gravitational packing' energy in a cold neutron star may become very large, and, under certain circumstances, may far exceed the ordinary nuclear packing fractions*

de Oppenheimer-Volkoff. Isto dificultaria explicar o nascimento de estrelas de nêutrons a partir de estrelas ordinárias. Oppenheimer e Volkoff estavam cientes da simplicidade da equação de estado utilizada nos cálculos e, apesar disso, concluíram erradamente que o limite de massa de  $M_{max} \approx 0.71M_{\odot}$  encontrado era aproximadamente o correto. No entanto, medidas precisas da massa de estrelas de nêutrons de sistemas binários estão entre  $1.25 - 1.44M_{\odot}$  revelando uma direta evidência astrofísica da forte interação repulsiva na matéria a densidades acima da densidade de saturação da matéria nuclear.

Em 1957 um artigo publicado por Geoffrey Ronald Burbidge, Margaret Burbidge, Willian Fowler e Fred Hoyle, artigo conhecido popularmente na comunidade científica como  $B^2FH$ , serviu como base para o nosso entendimento atual da evolução de estrelas massivas<sup>3</sup>. O artigo mostra que a evolução de estrelas massivas se dá através de reações termonucleares que transformam hidrogênio em elementos químicos mais pesados como hélio, oxigênio, silício e ferro. O hidrogênio se concentra na parte mais externa da estrela, enquanto que os elementos químicos mais pesados se concentram próximos ao núcleo formado de ferro. O núcleo da estrela massiva, cuja densidade é  $> 10^8 \text{ g cm}^{-3}$ , cresce à medida que a estrela evolui e, conseqüentemente, a temperatura do núcleo da estrela aumenta. Quando a temperatura atinge aproximadamente  $7 \times 10^9 \text{ K}$ , a foto-dissociação do ferro se inicia dando origem a partículas  $\alpha$  e nêutrons  $n$



onde  $\gamma$  representa o fóton. Nestas condições, o núcleo da estrela massiva se torna instável dando início ao colapso do núcleo (Burrows, 1988a).

Em 1959, num artigo intitulado *Neutron Star Models* (Cameron, 1959), Cameron enfatizou a importância de se levar em conta a interação nuclear no cálculo da equação de estado. Com isso, Cameron conseguiu estender o limite de massa de Oppenheimer-Volkoff de  $\sim 0.7M_{\odot}$  para  $\sim 2M_{\odot}$ . Esse resultado fortalece bastante a explicação de que as estrelas de nêutrons nascem a partir de explosões de supernovas. Além disso, Cameron foi um dos primeiros a sugerir a existência de híperons no núcleo das estrelas de nêutrons. Posteriormente, em 1966, Cameron calculou modelos de estrelas de nêutrons usando a hipótese da existência dos híperons.

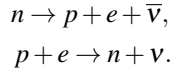
Em 1960, na expectativa de se detectar experimentalmente as estrelas de nêutrons a partir dos neutrinos provenientes de sua superfície motivou outra linha de pesquisa teórica: o processo de emissão de neutrinos. A evolução térmica da estrela de nêutrons se dá inicialmente através da emissão de fótons

---

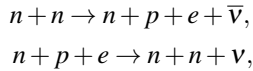
<sup>3</sup>As estrelas massivas do artigo  $B^2FH$  tinham massa da ordem de  $1.5M_{\odot}$  (Burrows, 1988a). Atualmente, o termo estrelas massivas refere-se à estrelas com massa total  $> 8M_{\odot}$ .



das superfícies e emissão de neutrinos originados das partes mais internas da estrela. Portanto, o processo de formação de neutrinos ganhou destaque devido a sua grande importância nos momentos iniciais de formação da estrela de nêutrons. Um conhecido processo de formação de neutrinos é o processo URCA (Nadyozhin, 1995):



No ano seguinte, 1961, a primeira estimativa de tempo no resfriamento de estrela de nêutrons foi feito por Chiu e Stabler (Chiu; Stabler, 1961). Em 1964, Chiu e Salpeter (Chiu; Salpeter, 1964) sugeriram o processo URCA modificado:



onde, a partir deste processo, foi possível estimar a emissividade dos neutrinos. Neste mesmo ano, Chiu provou teoricamente ser possível detectar estrelas de nêutrons a partir da sua emissão térmica na faixa de frequência raio-X (Chiu, 1964).

Os primeiros cientistas que consideraram hipoteticamente a possibilidade de núcleo de quarks para estrela de nêutrons foram Ivanenko em 1965 (Ivanenko; Kurdgelaidze, 1965) e Kurdgelaidze em 1969 (Ivanenko; Kurdgelaidze, 1969).

Em 1967, no dia 6 de agosto, Jocelyn Bell, que estava fazendo doutorado sob orientação de Antony Hewish, detectou um fraco sinal na faixa de frequência rádio. O sinal, precisamente regular, se repetia a cada 1.3373012 segundos. Na época, a princípio, suspeitaram que os sinais de rádio eram provenientes de alguma fonte artificial. Após alguns meses discutindo sobre a extraordinária observação, mais exatamente no dia 24 de fevereiro de 1968, Hewish *et al.* anunciaram a descoberta do sinal sugerindo que a fonte do sinal era uma anã branca ou uma estrela de nêutrons (Hewish et al., 1968). Atualmente, este tipo de objeto é mais conhecido como pulsar pelos astrofísicos observacionais. Em 1974, Hewish foi laureado com prêmio Nobel de física pela descoberta dos pulsares.

## 1.2 ASPECTOS OBSERVACIONAIS

As quantidades físicas observacionais de interesse primário são a massa máxima e o raio das estrelas de nêutrons. Estas quantidades estão relacionadas com as propriedades da matéria nuclear em densidades superiores à densidade de saturação da matéria nuclear. Observações recentes sugerem vínculos existentes entre a estrutura das estrelas de nêutrons e a sua respectiva equação de estado. Entre as propriedades que têm algum tipo de vínculo observacional (Lattimer; Prakash, 2007) estão:

- massa máxima,
- massa mínima,
- período mínimo de rotação,
- raio,
- momento de inércia,
- energia de ligação,

entre outras. Todas as propriedades acima citadas, exceto a massa máxima, são altamente sensíveis a energia nuclear de simetria (Lattimer, 2010).

Estrelas de nêutrons emitem radiação em todas as bandas do espectro eletromagnético. No entanto, para observá-las, a única restrição é que estas estejam em nossa galáxia, a Via Láctea, ou em galáxias não muito distantes como a nuvem de Magalhães. No entanto, erupções em raios X já foram detectadas fora do Grupo Local<sup>4</sup>, mais especificamente na galáxia M31 (Pietsch; Haberl, 2005). São observadas nas seguintes faixas do espectro eletromagnético: rádio, infravermelho, ótico, ultravioleta, raios X e raios  $\gamma$ . O radiotelescópio de Arecibo, o maior radiotelescópio fixo do mundo, localizado em Porto Rico, é um exemplo de telescópio utilizado na observação de estrelas de nêutrons na faixa de rádio. A radiação nas faixas do infravermelho próximo e ótico são fracas e, por isso, necessita-se grandes telescópios como o telescópio Subaru operado pelo observatório nacional do Japão (NAOJ), e os dois telescópios do observatório W. M. Keck<sup>5</sup>. A faixa do ultravioleta é observada pelo telescópio espacial Hubble. O telescópio espacial raios gamma Fermi (*Gamma-ray Large Area Space Telescope (GLAST)*) em órbita terrestre, opera no sentido de explorar objetos astronômicos na faixa dos raios  $\gamma$ .

---

<sup>4</sup>Grupo Local é um grupo de galáxias que inclui a Via-Láctea e mais 35 galáxias. Seu centro gravitacional é localizado entre a Via Láctea e a Galáxia de Andrômeda.

<sup>5</sup>Localizado no Havai.

O fluxo de neutrinos provenientes de estrelas de nêutrons recém nascidas é difícil de ser detectado diretamente. Contudo, após a formação de uma supernova, espera-se observar um surto na emissão de neutrinos com duração de aproximadamente 10 s. Exemplos de observatórios de neutrinos são o observatório de neutrinos de Sudbury<sup>6</sup>, o KamLAND<sup>7</sup> (Kamioka Liquid Scintillator Antineutrino Detector), e o Super-Kamiokande<sup>8</sup>.

Uma outra possibilidade na observação de estrelas de nêutrons é por meio de ondas gravitacionais. Sistemas binários formados por estrelas de nêutrons ou buracos negros emitem continuamente ondas gravitacionais. Outra possível fonte de ondas gravitacionais são estrelas de nêutrons com grandes velocidades de rotação que perdem momentaneamente sua simetria axial. Exemplos de observatórios de ondas gravitacionais são o LIGO (round-based Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory), VIRGO (European Gravitational Observatory) e o LISA (Large Interferometer Space Antenna).

### 1.3 OS TÓPICOS DESTE TRABALHO

Nesta seção falaremos um pouco sobre como este trabalho está organizado. Primeiramente faremos uma revisão das equações de transporte necessárias na simulação de explosão de supernova e, a partir delas, obter as equações de transporte na aproximação de difusão. Discutiremos brevemente o método numérico utilizado.

O terceiro capítulo trata da equação de estado derivada do modelo não linear de Walecka na aproximação de campo médio. A equação de estado terá apenas prótons, nêutrons, elétrons e neutrinos. Usaremos a parametrização NL3.

O quarto capítulo é sobre a interação dos neutrinos com a matéria. A opacidade dos neutrinos é calculada nos limites extremos de degenerescência da matéria e interpolado entre esses extremos a partir de um simples algoritmo. A opacidade dos neutrinos é calculada tanto na fase homogênea quanto na fase não homogênea. A partir do livre caminho médio obtêm-se os coeficientes de difusão que são usados como entrada nas equações de transporte.

O quinto capítulo faz referência a simulação dos segundos iniciais de uma recém nascida estrela de nêutrons. A evolução das variáveis termodinâmicas e químicas será mostrada.

O sexto capítulo fala a respeito da pasta nuclear que é uma fase não homogênea da matéria nuclear em baixas densidades. A pasta é obtida pelo

---

<sup>6</sup>localizado em Sudbury, província canadense de Ontário.

<sup>7</sup>Localizado perto de Toyama, Japão

<sup>8</sup>Localizado no subsolo a 1 km de profundidade numa mina de Mozumi, Japão.

método da coexistência de fases e, em ambas as fases, usamos o modelo não linear de Walecka. Neste ponto será mostrado o comportamento dos coeficientes de difusão na pasta nuclear.

## 2 REVISÃO TEÓRICA

### 2.1 EQUAÇÕES DE TRANSPORTE

Em 1966, Richard W. Lindquist estendeu a equação de transporte de Boltzmann para tratar o transporte radiativo em sistemas sob influência de forte campo gravitacional. Em outras palavras, Lindquist derivou a equação de transporte de Boltzmann para partículas sem massa, levando em consideração os efeitos previstos pela teoria da Relatividade Geral. A forma desta equação é dada por (Lindquist, 1966)

$$p^\beta \left( \frac{\partial f}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\gamma \frac{\partial f}{\partial p^\alpha} \right) = \left( \frac{df}{d\tau} \right)_{coll}, \quad (2.1)$$

onde  $f$  é a função distribuição dos neutrinos,  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  são os símbolos de Christoffel<sup>1</sup> e  $p^\alpha$  são as componentes do quadrimomento dos neutrinos em relação a base das coordenadas  $\{e_\alpha\}$

$$p_\alpha = p^\alpha e_\alpha.$$

Os índices  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  recebem os valores  $t$ ,  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ . O termo do lado direito da equação (2.1) está relacionado à interação dos neutrinos com a matéria e é mais facilmente calculado no referencial comovente. Isso sugere reescrever a equação (2.1) no referencial comovente, ou seja, reescrever a equação (2.1) em termos das componentes do quadrimomento da radiação em relação a matéria. A métrica empregada neste trabalho é dada por

$$ds^2 = -e^{2\phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.2)$$

onde  $t$  é a coordenada temporal,  $e^{2\Lambda}$  é dado por

$$e^{2\Lambda} = \frac{1}{1 - 2m/r}, \quad (2.3)$$

onde  $m$  é a massa gravitacional da estrela englobada numa esfera de raio  $r$  e  $e^{2\phi}$  é uma função de  $r$ . O referencial comovente é formado por quatro vetores ortonormais  $\{e_a\}$  que satisfazem a seguinte relação

$$e_a \cdot e_b = \eta_{ab}, \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>Usaremos neste trabalho unidades naturais para fins de simplificação, onde  $G = c = \hbar = 1$ .

onde  $\eta_{ab}$  é a métrica de Minkowski

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No referencial comoviente um dos quatro vetores formadores da base ortonormal deve ser a quadrivelocidade da matéria

$$e_0 = u,$$

onde  $u$  é a quadrivelocidade de cada elemento do fluido. Supondo que o fluido tenha apenas velocidade radial, a quadrivelocidade fica

$$u = (\gamma e^{-\phi}, \gamma v e^{-\Lambda}, 0, 0), \quad (2.5)$$

onde  $\gamma$  é o fator de Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (2.6)$$

A condição de normalização (Wald, 1984) da quadrivelocidade é dada por

$$u^a u_a = -1, \quad (2.7)$$

e é verificada no anexo (A.1).

Para as componentes  $e_2$  e  $e_3$  do referencial comoviente é conveniente tomar

$$\begin{aligned} e_2 &= e_\theta / r, \\ e_3 &= e_\phi / r \sin\theta. \end{aligned}$$

Para calcular a componente  $e_1$  usa-se a condição (2.4), conforme calculado detalhadamente no anexo (A.2), de forma a obter

$$e_1 = (v \gamma e^{-\phi}, \gamma e^{-\Lambda}, 0, 0). \quad (2.8)$$

As transformações entre as bases são dadas por

$$\begin{aligned} e_a &= e_a^\alpha e_\alpha, \\ e_\alpha &= e_\alpha^a e_a, \end{aligned}$$

onde a matriz  $e_a^\alpha$  é dada por

$$e_a^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma e^{-\phi} & \gamma v e^{-\Lambda} & 0 & 0 \\ v \gamma e^{-\phi} & \gamma e^{-\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r \operatorname{sen} \theta)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

e  $e_\alpha^a$  é a matriz inversa de  $e_a^\alpha$ . Assim, a equação de transporte de Boltzmann em termos da base comoviente é dada por

$$p^b \left( e_b^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta} - \Gamma_{bc}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) = \left( \frac{df}{d\tau} \right)_{col}. \quad (2.10)$$

Expandindo o lado esquerdo da equação de transporte de Boltzmann (2.10), temos

$$\begin{aligned} & p^b \left( e_b^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta} - \Gamma_{bc}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) = \\ & p^0 \left( e_0^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta} - \Gamma_{0c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) + \\ & p^1 \left( e_1^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta} - \Gamma_{1c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) + \\ & p^2 \left( e_2^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta} - \Gamma_{2c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) + \\ & p^3 \left( e_3^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta} - \Gamma_{3c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right), \end{aligned}$$

expandindo o primeiro termo de cada parêntese da equação anterior, temos

$$\begin{aligned} & p^b \left( e_b^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta} - \Gamma_{bc}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) = \\ & p^0 \left( e_0^t \frac{\partial f}{\partial x^t} + e_0^r \frac{\partial f}{\partial x^r} + e_0^\theta \frac{\partial f}{\partial x^\theta} + e_0^\phi \frac{\partial f}{\partial x^\phi} - \Gamma_{0c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) + \\ & p^1 \left( e_1^t \frac{\partial f}{\partial x^t} + e_1^r \frac{\partial f}{\partial x^r} + e_1^\theta \frac{\partial f}{\partial x^\theta} + e_1^\phi \frac{\partial f}{\partial x^\phi} - \Gamma_{1c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) + \\ & p^2 \left( e_2^t \frac{\partial f}{\partial x^t} + e_2^r \frac{\partial f}{\partial x^r} + e_2^\theta \frac{\partial f}{\partial x^\theta} + e_2^\phi \frac{\partial f}{\partial x^\phi} - \Gamma_{2c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) + \\ & p^3 \left( e_3^t \frac{\partial f}{\partial x^t} + e_3^r \frac{\partial f}{\partial x^r} + e_3^\theta \frac{\partial f}{\partial x^\theta} + e_3^\phi \frac{\partial f}{\partial x^\phi} - \Gamma_{3c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right). \end{aligned}$$

É fácil ver que alguns termos da equação anterior são eliminados de acordo com a equação (2.9)

$$\begin{aligned}
 & p^b \left( e_b^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta} - \Gamma_{bc}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) = \\
 & p^0 \left( e_0^t \frac{\partial f}{\partial x^t} + e_0^r \frac{\partial f}{\partial x^r} - \Gamma_{0c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) + \\
 & p^1 \left( e_1^t \frac{\partial f}{\partial x^t} + e_1^r \frac{\partial f}{\partial x^r} - \Gamma_{1c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) + \\
 & p^2 \left( e_2^\theta \frac{\partial f}{\partial x^\theta} - \Gamma_{2c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) + \\
 & p^3 \left( e_3^\phi \frac{\partial f}{\partial x^\phi} - \Gamma_{3c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right).
 \end{aligned}$$

Sabendo que  $x^t = t$ ,  $x^r = r$ ,  $x^\theta = \theta$  e  $x^\phi = \phi$ , temos

$$\begin{aligned}
 & p^b \left( e_b^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta} - \Gamma_{bc}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) = \\
 & p^0 \left( e_0^t \frac{\partial f}{\partial t} + e_0^r \frac{\partial f}{\partial r} - \Gamma_{0c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) + \\
 & p^1 \left( e_1^t \frac{\partial f}{\partial t} + e_1^r \frac{\partial f}{\partial r} - \Gamma_{1c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) + \\
 & p^2 \left( e_2^\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} - \Gamma_{2c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) + \\
 & p^3 \left( e_3^\phi \frac{\partial f}{\partial \phi} - \Gamma_{3c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right).
 \end{aligned}$$

Supondo simetria esférica, ficamos com

$$\begin{aligned}
 & p^b \left( e_b^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta} - \Gamma_{bc}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) = \\
 & p^0 \left( e_0^t \frac{\partial f}{\partial t} + e_0^r \frac{\partial f}{\partial r} - \Gamma_{0c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) + \\
 & p^1 \left( e_1^t \frac{\partial f}{\partial t} + e_1^r \frac{\partial f}{\partial r} - \Gamma_{1c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) - \\
 & p^2 \left( \Gamma_{2c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right) - p^3 \left( \Gamma_{3c}^a p^c \frac{\partial f}{\partial p^a} \right).
 \end{aligned}$$





Os coeficientes de rotação de Ricci não nulos são dados por (Pons et al., 1999)

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &= \Gamma_{01}^0 = e^{-\phi} e^{-\Lambda} \left[ \frac{\partial(\gamma e^\phi)}{\partial r} + \frac{\partial(\gamma v e^\Lambda)}{\partial t} \right], \\ \Gamma_{11}^0 &= \Gamma_{10}^1 = e^{-\phi} e^{-\Lambda} \left[ \frac{\partial(\gamma e^\Lambda)}{\partial t} + \frac{\partial(\gamma v e^\phi)}{\partial r} \right], \\ \Gamma_{20}^2 &= \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{30}^3 = \Gamma_{33}^0 = -v\Gamma_{22}^1 = v\Gamma_{21}^2 = -v\Gamma_{33}^1 = v\Gamma_{31}^3 = \frac{\gamma v e^{-\Lambda}}{r}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\Gamma_{32}^3 = -\frac{cot\theta}{r}.\end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever a equação (2.11) da seguinte forma

$$\begin{aligned}& p^0 e'_0 \frac{\partial f}{\partial t} + p^0 e'_0 \frac{\partial f}{\partial r} - p^0 \Gamma_{01}^0 p^1 \frac{\partial f}{\partial p^0} - p^0 \Gamma_{00}^1 p^0 \frac{\partial f}{\partial p^1} - \\ & p^0 \Gamma_{01}^1 p^1 \frac{\partial f}{\partial p^1} - p^0 \Gamma_{02}^2 p^2 \frac{\partial f}{\partial p^2} - p^0 \Gamma_{03}^3 p^3 \frac{\partial f}{\partial p^3} + p^1 e'_1 \frac{\partial f}{\partial t} + \\ & p^1 e'_1 \frac{\partial f}{\partial r} - p^1 \Gamma_{10}^0 p^0 \frac{\partial f}{\partial p^0} - p^1 \Gamma_{11}^0 p^1 \frac{\partial f}{\partial p^0} - p^1 \Gamma_{10}^1 p^0 \frac{\partial f}{\partial p^1} - \\ & p^1 \Gamma_{12}^2 p^2 \frac{\partial f}{\partial p^2} - p^1 \Gamma_{13}^3 p^3 \frac{\partial f}{\partial p^3} - p^2 \Gamma_{22}^0 p^2 \frac{\partial f}{\partial p^0} - p^2 \Gamma_{22}^1 p^2 \frac{\partial f}{\partial p^1} - \\ & p^2 \Gamma_{20}^2 p^0 \frac{\partial f}{\partial p^2} - p^2 \Gamma_{21}^2 p^1 \frac{\partial f}{\partial p^2} - p^2 \Gamma_{23}^3 p^3 \frac{\partial f}{\partial p^3} - p^3 \Gamma_{33}^0 p^3 \frac{\partial f}{\partial p^0} - \\ & p^3 \Gamma_{33}^1 p^3 \frac{\partial f}{\partial p^1} - p^3 \Gamma_{33}^2 p^3 \frac{\partial f}{\partial p^2} - p^3 \Gamma_{30}^3 p^0 \frac{\partial f}{\partial p^3} - p^3 \Gamma_{31}^3 p^1 \frac{\partial f}{\partial p^3} - \\ & p^3 \Gamma_{32}^3 p^2 \frac{\partial f}{\partial p^3} = \left( \frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_{col}.\end{aligned}$$

Portanto, a equação de Boltzmann para um sistema com simetria esférica (Thorne, 1981) fica dada por

$$\begin{aligned}& \omega(e'_0 + \mu e'_1) \frac{\partial f}{\partial t} + \omega(e'_0 + \mu e'_1) \frac{\partial f}{\partial r} \\ & - \omega^2 [\mu \Gamma_{00}^1 + \mu^2 \Gamma_{10}^1 + (1 - \mu^2) \Gamma_{20}^2] \frac{\partial f}{\partial \omega} \\ & - \omega(1 - \mu^2) (\Gamma_{00}^1 + \Gamma_{22}^1 + \mu \Gamma_{10}^1 - \mu \Gamma_{20}^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} = \left( \frac{df}{d\tau} \right)_{col}.\end{aligned}\quad (2.11)$$

A partir dessa equação pode-se derivar as equações de transporte utilizadas para simular explosões de supernova, bem como simular os instantes iniciais

da formação de estrelas de nêutrons.

## 2.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MOMENTOS

O método dos momentos é muito usado para simplificar a equação de Boltzmann e isso é feito ao aplicar o operador (Thorne, 1981)

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \mu^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

na equação (2.11). Definindo o  $i$ -ésimo momento da função distribuição como

$$M_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \mu^i f,$$

e aplicando este operador correspondente ao momento zero na equação (2.11), temos que

$$\begin{aligned} & \omega e'_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu f \right) + \omega e'_1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \mu f \right) + \\ & \omega e''_0 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu f \right) + \omega e''_1 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \mu f \right) - \\ & \omega^2 \Gamma_{00}^1 \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \mu f \right) - \omega^2 \Gamma_{10}^1 \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \mu^2 f \right) - \\ & \omega^2 \Gamma_{20}^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu f \right) + \omega^2 \Gamma_{20}^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \mu^2 f \right) - \\ & \omega \Gamma_{00}^1 \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu f \right) - \omega \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu f \right) - \\ & \omega \Gamma_{10}^1 \left[ \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \mu f \right) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu f \right] + \\ & \omega \Gamma_{20}^2 \left[ \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \mu f \right) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu f \right] + \\ & \omega (\Gamma_{00}^1 + \Gamma_{22}^1) \left( \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \mu^2 f \right) - 2 \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \mu f \right) \right) + \\ & \omega (\Gamma_{10}^1 - \Gamma_{20}^2) \left( \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \mu^3 f \right) - 3 \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \mu^2 f \right) \right) = \\ & \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \left( \frac{df}{d\tau} \right)_{col}, \end{aligned}$$

rearranjando e eliminando termos nulos, ficamos com (Pons et al., 1999)

$$\begin{aligned}
 & \omega \left( e'_0 \frac{\partial M_0}{\partial t} + e'_0 \frac{\partial M_0}{\partial r} + e'_1 \frac{\partial M_1}{\partial t} + e'_1 \frac{\partial M_1}{\partial r} \right) \\
 & - \omega^2 \left[ \Gamma_{00}^1 \frac{\partial M_1}{\partial \omega} + (\Gamma_{10}^1 - \Gamma_{20}^2) \frac{\partial M_2}{\partial \omega} + \Gamma_{20}^2 \frac{\partial M_0}{\partial \omega} \right] \\
 & + \omega \left[ (\Gamma_{10}^1 - \Gamma_{20}^2)(M_0 - 3M_2) - 2(\Gamma_{00}^1 + \Gamma_{22}^1)M_1 \right] = Q_0,
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde

$$Q_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \left( \frac{df}{d\tau} \right)_{col}.$$

Para se obter a equação de transporte que rege o comportamento do número de neutrinos basta multiplicar a equação (2.12) por  $\omega/2\pi^2$  e integrar em  $\omega$

$$\begin{aligned}
 & e'_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^2 M_0 \right) + e'_0 \frac{\partial}{\partial r} \left( \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^2 M_0 \right) \\
 & + e'_1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^2 M_1 \right) + e'_1 \frac{\partial}{\partial r} \left( \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^2 M_1 \right) \\
 & - \Gamma_{00}^1 \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^3 M_1 \right) - 3 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^2 M_1 \right) \\
 & - (\Gamma_{10}^1 - \Gamma_{20}^2) \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^3 M_2 \right) - 3 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^2 M_2 \right) \\
 & - \Gamma_{20}^2 \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^3 M_0 \right) - 3 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^2 M_0 \right) \\
 & + (\Gamma_{10}^1 - \Gamma_{20}^2) \left( \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^2 M_0 - 3 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^2 M_2 \right) \\
 & - 2(\Gamma_{00}^1 + \Gamma_{22}^1) \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^2 M_1 = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega Q_0,
 \end{aligned}$$

rearranjando e eliminando termos nulos, ficamos com (Pons et al., 1999)

$$\begin{aligned}
 & e'_0 \frac{\partial N_V}{\partial t} + e'_0 \frac{\partial N_V}{\partial r} + e'_1 \frac{\partial F_V}{\partial t} + e'_1 \frac{\partial F_V}{\partial r} + (\Gamma_{10}^1 + 2\Gamma_{20}^2)N_V \\
 & + (\Gamma_{00}^1 - 2\Gamma_{22}^1)F_V = S_N,
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde

$$\begin{aligned}
 N_V &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} M_0 \omega^2, \\
 F_V &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} M_1 \omega^2, \\
 S_N &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} Q_0 \omega,
 \end{aligned}$$

$N_V$ ,  $F_V$  e  $S_N$  são a densidade do número de neutrinos, a densidade do fluxo leptônico e número fonte respectivamente. Para se obter a equação de transporte de energia dos neutrinos basta multiplicar a equação (2.12) por  $\omega^2/2\pi^2$  e integrar em  $\omega$

$$\begin{aligned}
 & e_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^3 M_0 \right) + e_0^r \frac{\partial}{\partial r} \left( \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^3 M_0 \right) \\
 + & e_1^t \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^3 M_1 \right) + e_1^r \frac{\partial}{\partial r} \left( \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^3 M_1 \right) \\
 - & \Gamma_{00}^1 \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^4 M_1 \right) - 4 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^3 M_1 \right) \\
 - & (\Gamma_{10}^1 - \Gamma_{20}^2) \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^4 M_2 \right) - 4 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^3 M_2 \right) \\
 - & \Gamma_{20}^2 \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^4 M_0 \right) - 4 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^3 M_0 \right) \\
 + & (\Gamma_{10}^1 - \Gamma_{20}^2) \left( \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^3 M_0 - 3 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^3 M_2 \right) \\
 - & 2(\Gamma_{00}^1 + \Gamma_{22}^1) \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^3 M_1 = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} \omega^2 Q_0,
 \end{aligned}$$

rearranjando e eliminando termos nulos, ficamos com (Pons et al., 1999)

$$\begin{aligned}
 & e_0^t \frac{\partial J_V}{\partial t} + e_0^r \frac{\partial J_V}{\partial r} + e_1^t \frac{\partial H_V}{\partial t} + e_1^r \frac{\partial H_V}{\partial r} + (\Gamma_{10}^1 + 3\Gamma_{20}^2) J_V \\
 + & (2\Gamma_{00}^1 - 2\Gamma_{22}^1) H_V + (\Gamma_{10}^1 - \Gamma_{20}^2) P_V = S_E,
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde

$$\begin{aligned} J_V &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} M_0 \omega^3, \\ H_V &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} M_1 \omega^3, \\ P_V &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} M_2 \omega^2, \\ S_E &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi^2} Q_0 \omega^2, \end{aligned}$$

são a densidade de energia dos neutrinos, o fluxo de energia, pressão e a fonte de energia respectivamente.

As equações (2.13) e (2.14) são usadas para simular o colapso do núcleo de estrelas massivas (Pons et al., 1999) porque incluem termos com a velocidade do fluido, bem como, todos os efeitos previstos pela relatividade geral.

No entanto, como já mencionado, na simulação de protoestrelas de nêutrons a evolução é quase estática e, portanto, os termos que levam em consideração a velocidade do fluido são pequenos e podem ser desprezados. Portanto, substituindo os símbolos de rotação de Ricci nas equações (2.13) e (2.14) e assumindo que a evolução é quase estática, obtemos as equações de transporte que descrevem o comportamento da evolução do transporte dos neutrinos numa recém nascida estrela de nêutrons (Pons et al., 1999)

$$\frac{\partial(N_V/n_B)}{\partial t} + \frac{\partial e^\phi 4\pi r^2 F_V}{\partial a} = e^\phi \frac{S_N}{n_B}, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial(J_V/n_B)}{\partial t} + P_V \frac{\partial(1/n_B)}{\partial t} + e^{-\phi} \frac{\partial e^{2\phi} 4\pi r^2 H_V}{\partial a} = e^\phi \frac{S_E}{n_B}, \quad (2.16)$$

onde  $n_B$  é a densidade número bariônico e  $a$  é o número bariônico englobado numa esfera de raio  $r$ . Combinando a equação (2.15) e a correspondente equação para a fração de elétrons  $Y_e$

$$\frac{\partial Y_e}{\partial t} = e^{-\phi} \frac{S_N}{n_B}, \quad (2.17)$$

temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial(N_\nu/n_B)}{\partial t} + \frac{\partial e^\phi 4\pi r^2 F_\nu}{\partial a} &= -\frac{\partial Y_e}{\partial t}, \\ \frac{\partial Y_\nu}{\partial t} + \frac{\partial Y_e}{\partial t} + \frac{e^\phi 4\pi r^2 F_\nu}{\partial a} &= 0, \\ \frac{\partial Y_L}{\partial t} + \frac{\partial e^\phi 4\pi r^2 F_\nu}{\partial a} &= 0,\end{aligned}\quad (2.18)$$

onde  $Y_L$  é a fração de léptons. De forma similar, combinando a equação (2.16) e a correspondente equação

$$\frac{\partial U}{\partial t} + P \frac{\partial(1/n_B)}{\partial t} = -e^\phi \frac{S_E}{n_B}, \quad (2.19)$$

temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial(J_\nu/n_B)}{\partial t} + P_\nu \frac{\partial(1/n_B)}{\partial t} + e^{-\phi} \frac{\partial e^{2\phi} 4\pi r^2 H_\nu}{\partial a} &= -\frac{\partial U}{\partial t} - P \frac{\partial 1/n_B}{\partial t}, \\ T \frac{\partial s}{\partial t} - \mu_\nu \frac{\partial Y_L}{\partial t} + e^{-2\phi} \frac{\partial e^{2\phi} 4\pi r^2 H_\nu}{\partial a} &= 0,\end{aligned}\quad (2.20)$$

onde  $U$  é a energia interna específica e  $s$  é a entropia por bárion. Durante o primeiro minuto de uma recém nascida estrela de nêutrons, os neutrinos estão em equilíbrio térmico e por isso o transporte deve ser tratado na aproximação de difusão (Reddy; Prakash; Lattimer, 1998). Nessa aproximação, a densidade do fluxo leptônico é escrita em termos do gradiente da densidade de número dos neutrinos e a densidade do fluxo da densidade de energia dos neutrinos é escrito em termos do gradiente da densidade de energia dos neutrinos, de forma que as equações (2.18) e (2.20) podem ser escritas como (Reddy; Prakash; Lattimer, 1998)

$$\frac{\partial Y_L}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ 4\pi r^2 e^\phi \int \frac{1}{3} \left( \lambda_\nu(E_\nu) \frac{\partial n_\nu}{\partial r} - \lambda_{\bar{\nu}}(E_\nu) \frac{\partial n_{\bar{\nu}}}{\partial r} \right) dE_\nu \right], \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial t} + \eta_\nu \frac{\partial Y_L}{\partial t} = \\ \frac{e^{-2\phi}}{T} \frac{\partial}{\partial a} \left[ 4\pi r^2 e^{2\phi} \int \frac{1}{3} \left( \lambda_\nu(E_\nu) \frac{\partial E_\nu}{\partial r} - \lambda_{\bar{\nu}}(E_\nu) \frac{\partial E_{\bar{\nu}}}{\partial r} \right) dE_\nu \right],\end{aligned}\quad (2.22)$$

onde

$$n_\nu(E_\nu) = \frac{E_\nu^2}{2\pi^2} f_\nu(E_\nu),$$

$$n_{\bar{\nu}}(E_\nu) = \frac{E_\nu^2}{2\pi^2} f_{\bar{\nu}}(E_\nu),$$

$$E_\nu(E_\nu) = \frac{E_\nu^3}{2\pi^2} f_\nu(E_\nu),$$

$$E_{\bar{\nu}}(E_\nu) = \frac{E_\nu^3}{2\pi^2} f_{\bar{\nu}}(E_\nu),$$

são a densidade do número de neutrinos e antineutrinos e a densidade de energia dos neutrinos e antineutrinos respectivamente,  $\lambda_\nu$  é o livre caminho médio dos neutrinos.,  $f_\nu$  e  $f_{\bar{\nu}}$  são as funções de distribuição de Fermi-Dirac para neutrinos e antineutrinos respectivamente. Podemos reescrever as equações de transporte (2.21) e (2.22) usando os coeficientes de difusão definidos como (Reddy; Prakash; Lattimer, 1998)

$$D_n = \int_0^\infty dE_\nu E_\nu^n \lambda_\nu(E_\nu) f_\nu(E_\nu) (1 - f_\nu(E_\nu)), \quad (2.23)$$

$$D_{\bar{n}} = \int_0^\infty dE_{\bar{\nu}} E_{\bar{\nu}}^n \lambda_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}}) f_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}}) (1 - f_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}})), \quad (2.24)$$

para neutrinos e antineutrinos respectivamente, onde  $f_\nu$  e  $f_{\bar{\nu}}$  são as distribuições de Fermi-Dirac para neutrinos e antineutrinos dadas por

$$\begin{aligned} f_\nu &= (1 + e^{(E_\nu - \mu_\nu)/T})^{-1}, \\ f_{\bar{\nu}} &= (1 + e^{(E_\nu + \mu_\nu)/T})^{-1}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

respectivamente. Assim, em termos dos coeficientes de difusão as equações de transporte ficam

$$\frac{1}{6\pi^2 r^2 n_B e^\Lambda} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 e^{-\Lambda} \left( \frac{D_3}{T^2} \frac{\partial T e^\phi}{\partial r} + e^\phi D_2 \frac{\partial \eta_\nu}{\partial r} \right) \right], \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \eta_\nu \frac{\partial Y_L}{\partial t} = \frac{e^{-2\phi}}{6\pi^2 r^2 n_B e^\Lambda T} \frac{\partial}{\partial r} \left[ e^\phi e^{-\Lambda} r^2 \left( \frac{D_4}{T^2} \frac{\partial T e^\phi}{\partial r} + e^\phi D_3 \frac{\partial \eta_\nu}{\partial r} \right) \right], \quad (2.27)$$



onde  $\eta_\nu$  é o parâmetro de degenerescência dos neutrinos dado por

$$\eta_\nu = \frac{\mu_\nu}{T}. \quad (2.28)$$

Assim, as equações (2.26) e (2.27) são as equações de transporte dos neutrinos que servem para simular a fase Kelvin-Helmholtz de uma protoestrela de nêutrons na aproximação de difusão. Na próxima seção focalizaremos o método numérico utilizado para solucionar estas equações reescrevendo-as numa forma mais apropriada para suprir nossos objetivos. Trataremos também das condições de contorno necessárias para solucioná-las.

### 2.3 MÉTODO NUMÉRICO

Neste capítulo apresentaremos o método numérico usado para solucionar as equações de transporte dos neutrinos usadas na simulação da fase Kelvin-Helmholtz de protoestrelas de nêutrons. Durante a evolução, o número bariônico total  $A$  da estrela é mantido constante. Seguimos a mesma receita que no trabalho de Burrows e Lattimer (Burrows; Lattimer, 1986) resolvendo as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff separadamente das equações de transporte. Isso pode ser feito porque a evolução temporal da estrutura da estrela se dá de forma mais lenta quando comparado com as equações de transporte (Pons et al., 1999). Desta forma podemos simplificar nosso trabalho no que diz respeito ao desenvolvimento do programa computacional.

Explicitamente as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff são dadas por

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{1}{4\pi r^2 n_B e^\Lambda}, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial m}{\partial a} = \frac{\varepsilon}{n_B e^\Lambda}, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a} = \frac{e^\Lambda}{4\pi r^4 n_B} (m + 4\pi r^3 P), \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial P}{\partial a} = -(\rho + P) \frac{e^\Lambda}{4\pi r^4 n_B} (m + 4\pi r^3 P), \quad (2.32)$$

onde as quantidades  $m$ ,  $\varepsilon$  e  $P$  são a massa gravitacional, a densidade de energia e a pressão respectivamente. A função da métrica  $e^\Lambda$  tem forma funcional dada por

$$e^\Lambda = \left(1 - 2\frac{m}{r}\right)^{-1/2}, \quad (2.33)$$

e segue que na superfície da estrela as funções  $e^\Lambda$  e  $e^\phi$  obedecem a seguinte relação (Camenzind, 2007)

$$e^{-\Lambda} = \left(1 - 2\frac{m(A)}{r(A)}\right)^{1/2} = e^\phi, \quad (2.34)$$

o que sugere a seguinte condição de contorno para a equação (2.31)

$$\phi(a=A) = \frac{1}{2} \ln \left[1 - \frac{2m(A)}{r(A)}\right]. \quad (2.35)$$

As demais condições de contorno necessárias para resolver as equações da estrutura da estrela são dadas por

$$\begin{aligned} r(a=0) &= 0, \\ m(a=0) &= 0, \\ P(a=A) &= P_s, \end{aligned}$$

onde  $P_s$  é a pressão na superfície da estrela. O método numérico utilizado para resolver as equações da estrutura da estrela é o método de Runge-Kutta de quarta ordem. O procedimento consiste em varrer um intervalo de valores para a densidade central de energia e integrar até a superfície da estrela. A unicidade da solução nos permite repetir a integração para cada valor de densidade de energia central até encontrarmos o valor desejado da massa bariônica total da estrela. Cada densidade central de energia gera uma única solução e, portanto, um único valor para a massa bariônica total da estrela.

Para resolver numericamente as equações de transporte optamos por reescrevê-las. A equação (2.26) fica

$$\frac{\partial Y_L}{\partial t} = \frac{\partial Y_L}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial Y_L}{\partial \eta_v} \frac{\partial \eta_v}{\partial t} = F, \quad (2.36)$$

e a equação (2.27) fica

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + \eta_v \frac{\partial Y_L}{\partial t} &= \frac{\partial s}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial \eta_v} \frac{\partial \eta_v}{\partial t} \\ &+ \eta_v \left( \frac{\partial Y_L}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial Y_L}{\partial \eta_v} \frac{\partial \eta_v}{\partial t} \right) = H, \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde

$$F = \frac{1}{6\pi^2 r^2 n_B e^\Lambda} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 e^{-\Lambda} \left( \frac{D_3}{T^2} \frac{\partial T e^\phi}{\partial r} + e^\phi D_2 \frac{\partial \eta_V}{\partial r} \right) \right],$$

$$H = \frac{e^{-2\phi}}{6\pi^2 r^2 n_B e^\Lambda T} \frac{\partial}{\partial r} \left[ e^\phi e^{-\Lambda} r^2 \left( \frac{D_4}{T^2} \frac{\partial T e^\phi}{\partial r} + e^\phi D_3 \frac{\partial \eta_V}{\partial r} \right) \right],$$

onde  $D_2 = (D_2^V + D_2^{\bar{V}})$ ,  $D_3 = (D_3^V - D_3^{\bar{V}})$  e  $D_4 = (D_4^V + D_4^{\bar{V}})$ . Isolando  $\partial T / \partial t$  na equação (2.36), temos que

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left( F - \frac{\partial Y_L}{\partial \eta_V} \frac{\partial \eta_V}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial Y_L}{\partial T} \right)^{-1}, \quad (2.38)$$

e substituindo na equação (2.37) e isolando  $\partial \eta_V / \partial t$ , ficamos com

$$\frac{\partial \eta_V}{\partial t} = \frac{H \frac{\partial Y_L}{\partial T} - F \left( \frac{\partial s}{\partial T} + \eta_V \frac{\partial Y_L}{\partial T} \right)}{\frac{\partial Y_L}{\partial T} \left( \frac{\partial s}{\partial \eta_V} + \eta_V \frac{\partial Y_L}{\partial \eta_V} \right) - \frac{\partial Y_L}{\partial \eta_V} \left( \frac{\partial s}{\partial T} + \eta_V \frac{\partial Y_L}{\partial T} \right)}. \quad (2.39)$$

As duas últimas equações representam as equações de transporte e podem ser resolvidas numericamente pelo método das linhas (Hamdi; Schiesser; Griffiths, 2007). Podemos dizer de forma simples e objetiva que o método das linhas consiste em transformar um sistema de equações parciais diferenciais num sistema de equações diferenciais ordinárias. Isso é feito escrevendo a parte espacial em diferenças finitas e isso significa dividir a parte espacial em  $j$  partes gerando, em nosso caso, um sistema de  $2j$  equações diferenciais ordinárias com  $2j$  condições iniciais. A parte espacial das equações de transporte são os termos  $F$  e  $H$  que escritos em diferenças finitas ficam da seguinte forma

$$F_i = \frac{(1 - 2m_i/r_i)^{1/2}}{6\pi^2 r_i^2 n_{Bi}} (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_5 \alpha_6 + \alpha_7 \alpha_8),$$

$$H_i = \frac{e^{-2\phi_i} (1 - 2m_i/r_i)^{1/2}}{6\pi^2 r_i^2 n_{Bi} T_i} (\alpha_1 \alpha_9 + \alpha_{10} \alpha_4 + \alpha_5 \alpha_{11} + \alpha_{12} \alpha_8),$$

onde

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{T_{i+1}e^{\phi_{i+1}} - T_{i-1}e^{\phi_{i-1}}}{r_{i+1} - r_{i-1}}, \\
\alpha_2 &= \frac{D_{3i} r_{i+1}^2 T_{i+1}^{-2} (1 - 2m_{i+1}/r_{i+1})^{1/2} - r_{i-1}^2 T_{i-1}^{-2} (1 - 2m_{i-1}/r_{i-1})^{1/2}}{r_{i+1} - r_{i-1}} \\
&\quad + \frac{r_i^2 (1 - 2m_i/r_i)^{1/2}}{T_i^2} \left( \left( \frac{\partial D_3}{\partial T} \right)_{\eta_V} \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{r_{i+1} - r_{i-1}} + \left( \frac{\partial D_3}{\partial \eta_V} \right)_T \frac{\eta_{V(i+1)} - \eta_{V(i-1)}}{r_{i+1} - r_{i-1}} \right), \\
\alpha_3 &= \frac{r_i^2 (1 - 2m_i/r_i)^{1/2} D_{3i}}{T^2}, \\
\alpha_4 &= \frac{T_{i+1}e^{\phi_{i+1}} - 2T_i e^{\phi_i} + T_{i-1}e^{\phi_{i-1}}}{(r_{i+1} - r_i)^2}, \\
\alpha_5 &= \frac{\eta_{V(i+1)} - \eta_{V(i-1)}}{r_{i+1} - r_{i-1}}, \\
\alpha_6 &= \frac{D_2 r_{i+1}^2 (1 - 2m_{i+1}/r_{i+1})^{1/2} e^{\phi_{i+1}} - r_{i-1}^2 (1 - 2m_{i-1}/r_{i-1})^{1/2} e^{\phi_{i-1}}}{r_{i+1} - r_{i-1}} \\
&\quad + r_i^2 (1 - 2m_i/r_i)^{1/2} e^{\phi_i} \left( \left( \frac{\partial D_2}{\partial T} \right)_{\eta_V} \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{r_{i+1} - r_{i-1}} + \left( \frac{\partial D_2}{\partial \eta_V} \right)_T \frac{\eta_{V(i+1)} - \eta_{V(i-1)}}{r_{i+1} - r_{i-1}} \right), \\
\alpha_7 &= r_i^2 (1 - 2m_i/r_i)^{1/2} e^{\phi_i} D_{2i}, \\
\alpha_8 &= \frac{\eta_{V(i+1)} - 2\eta_{V(i)} + \eta_{V(i-1)}}{(r_{i+1} - r_i)^2}, \\
\alpha_9 &= \frac{D_{4i} e^{\phi_{i+1}} r_{i+1}^2 T_{i+1}^{-2} (1 - 2m_{i+1}/r_{i+1})^{1/2} - e^{\phi_{i-1}} r_{i-1}^2 T_{i-1}^{-2} (1 - 2m_{i-1}/r_{i-1})^{1/2}}{r_{i+1} - r_{i-1}} \\
&\quad + \frac{e^{\phi_i} r_i^2 (1 - 2m_i/r_i)^{1/2}}{T_i^2} \left( \left( \frac{\partial D_4}{\partial T} \right)_{\eta_V} \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{r_{i+1} - r_{i-1}} + \left( \frac{\partial D_4}{\partial \eta_V} \right)_T \frac{\eta_{V(i+1)} - \eta_{V(i-1)}}{r_{i+1} - r_{i-1}} \right), \\
\alpha_{10} &= e^{\phi_i} \frac{r_i^2 (1 - 2m_i/r_i)^{1/2} D_{4i}}{T^2}, \\
\alpha_{11} &= \frac{D_{3i} r_{i+1}^2 (1 - 2m_{i+1}/r_{i+1})^{1/2} e^{2\phi_{i+1}} - r_{i-1}^2 (1 - 2m_{i-1}/r_{i-1})^{1/2} e^{2\phi_{i-1}}}{r_{i+1} - r_{i-1}} \\
&\quad + r_i^2 (1 - 2m_i/r_i)^{1/2} e^{\phi_i} \left( \left( \frac{\partial D_3}{\partial T} \right)_{\eta_V} \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{r_{i+1} - r_{i-1}} + \left( \frac{\partial D_3}{\partial \eta_V} \right)_T \frac{\eta_{V(i+1)} - \eta_{V(i-1)}}{r_{i+1} - r_{i-1}} \right), \\
\alpha_{12} &= e^{2\phi_i} r_i^2 (1 - 2m_i/r_i)^{1/2} D_{3i}.
\end{aligned}$$

As  $2j$  condições iniciais são dadas por

$$\begin{aligned} T(r_i, t = 0) &= T_0(r_i), & 1 \leq i \leq j, \\ \eta_\nu(r_i, t = 0) &= \eta_{\nu 0}(r_i), & 1 \leq i \leq j, \end{aligned}$$

onde  $T_0$  e  $\eta_{\nu 0}$  são o perfil inicial de temperatura e o perfil inicial do parâmetro de degenerescência dos neutrinos. As condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ H_0 &= 0, \\ \left. \frac{\partial T(r_j, t)}{\partial r} \right|_{r=R} &= 0, \\ \left. \frac{\partial \eta_\nu(r_j, t)}{\partial r} \right|_{r=R} &= 0. \end{aligned}$$

A temperatura na superfície e o parâmetro de degenerescência dos neutrinos na superfície da estrela variam pouco durante a fase Kelvin-Helmholtz. Como podemos ver na figura 9 de (Pons et al., 1999) e na figura 1 de (Burrows; Latimer, 1986), a temperatura e a fração de léptons permanecem constante na superfície durante os instantes iniciais de vida de uma estrela de nêutrons. O primeiro passo para simular a evolução da protoestrela de nêutrons é definir um perfil inicial de temperatura e um perfil inicial de  $\eta_\nu$ . O passo seguinte é resolver as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff para se obter os perfis de massa, pressão, funções da métrica e entre outras quantidades. O próximo passo é calcular os coeficientes de difusão definidos que servirão de entrada para as equações de transporte para um determinado intervalo de tempo  $\Delta t$ . A partir da solução das equações de transporte se obtém um novo perfil de temperatura e um novo perfil de  $\eta_\nu$  que serão usados para se repetir o processo.

Um ponto interessante a ser comentado se refere a escala adotada ao longo do raio da estrela. Numericamente, o raio estelar é dividido em um certo número de pontos de forma que cada ponto está associado a uma equação diferencial ordinária. A escala adotada nesse trabalho é linear, ou seja, a distância entre um ponto e outro é constante. No entanto, pode-se adotar outra escala, como a logarítmica, favorecendo uma quantidade maior de pontos na superfície da estrela.

Com relação a equação de estado, construímos uma grade de vários pontos da seguinte forma: fixamos  $\eta_\nu$  e a temperatura e calculamos várias quantidades termodinâmicas que foram armazenadas num arquivo. Variamos a temperatura em 0.5 MeV e, novamente, armazenamos os dados num arquivo e isso é feito para cada valor diferente de temperatura. O intervalo de temperatura vai de 8.5 MeV a 50 MeV. Todo o processo é repetido para cada

valor diferente de  $\eta_v$  que variamos de 0.5 em 0.5. Dessa forma obtivemos uma grade de pontos cujo intervalo de  $\eta_v$  vai de 0 a 10.

### 3 A EQUAÇÃO DE ESTADO

Atualmente, apesar do rápido avanço tecnológico, ainda é muito complicado explicar a natureza da força nuclear em condições físicas extremas. Estas condições estão muito além do mais moderno acelerador de partículas existente hoje: o grande colisor de partículas (LHC - Large Hadron Collider). Um acelerador de partículas funciona no sentido de explorar a natureza buscando compreender fundamentalmente a física das partículas elementares. O LHC, a maior máquina já criada pelo homem, é um túnel de 27 km que fica a 175 m abaixo do nível do solo na fronteira franco-suíça, próximo a Genebra, Suíça. Nesse túnel, feixes de partículas formados por prótons, por exemplo, são acelerados em sentidos opostos e a velocidades próximas a da luz, de forma que ocorre um violento choque entre as partículas constituintes do feixe. Os resultados dessas colisões são analisados de modo a buscar um melhor entendimento a respeito das interações entre partículas. Realizar esse tipo de experimento significa se aproximar cada vez mais de respostas a questões ligadas à origem do universo. Isso porque no início do universo, caracterizado por elevadas temperaturas, as partículas elementares interagem umas com as outras em condições físicas extremas e, especula-se que as forças existentes entre elas façam parte de um único mecanismo teórico que ainda não é completamente compreendido.

Equações de estado obtidas para modelos relativísticos, seja a partir do cálculo do tensor energia momento, seja a partir do potencial termodinâmico, são ajustadas para descrever a matéria nuclear na sua densidade de saturação a temperatura zero. Extrapolações para altas ou baixas densidades e para temperatura finita refletem as incertezas associadas às variações de quantidades físicas fora dos limites onde são conhecidos. Muito se conhece a respeito das propriedades dos núcleos atômicos e, diversos modelos podem ser utilizados para reproduzir resultados experimentais e prever o resultado de experimentos. No entanto, um núcleo atômico é um sistema muito bem descrito pela equação de Schrödinger, ou seja, um sistema em que os efeitos relativísticos podem ser desprezados. Isso significa que as energias envolvidas e, conseqüentemente, as temperaturas envolvidas são baixas. Condições físicas caracterizadas por intenso campo gravitacional, densidades e temperaturas elevadas e fortíssimos campos magnéticos não podem ser reproduzidas aqui na Terra e, portanto, não há como realizar experimentos nessas condições com o objetivo de validar modelos teóricos. Assim, uma possível forma de se ampliar o conhecimento da interação nuclear é extrapolar modelos que reproduzam de forma precisa resultados experimentais e que sejam capazes de descrever fenomenologicamente a estrutura de determinados ob-

jetos compactos, como as estrelas de nêutrons. Em outras palavras, aplicar o conhecimento da física nuclear e de hádrons em objetos compactos é uma tentativa de elucidar a forma da equação de estado para temperaturas e densidades variadas. Assim, as estrelas de nêutrons, ou pulsares como preferem os astrofísicos, servem como um excelente laboratório de física. Em geral, é unânime a ideia de que objetos estelares com massa aproximadamente igual a  $1.4 M_{\odot}$  e raio entre 10 – 12 km são constituídos, principalmente, por bárions. Assim, espera-se que modelos teóricos da física nuclear e de hádrons sirvam para explicar os principais processos físicos que ocorrem no interior dessas estrelas.

Em 1950, a teoria de campos ganhou terreno e uma nova linguagem surgiu na explicação do núcleo atômico. O artigo pioneiro nesse novo rumo teórico da física nuclear foi publicado por M. H. Johnson e Edward Teller em 1955 no artigo intitulado "Classical Field Theory of Nuclear Forces" (Teoria Clássica de Campos das Forças Nucleares). A ideia era que os nucleons interagem por meio de dois campos: um campo escalar, mediado pelo méson escalar (méson  $\sigma$ ) e, um campo vetorial, mediado pelo méson vetorial (méson  $\omega$ ). O méson escalar, responsável pela interação de longo e médio alcance, explica a ligação dos nucleons no núcleo. O méson vetorial, responsável pela interação de curto alcance, responde pela saturação da matéria nuclear. O modelo  $\sigma - \omega$  tinha como uma das principais desvantagens o fato de não ser relativístico. Isso foi resolvido em 1956 por Hans Peter Durr que desenvolveu uma versão relativística do modelo  $\sigma$ - $\omega$ . Em 1974, John Dirk Walecka publicou um artigo em que desenvolveu em detalhes o modelo  $\sigma - \omega$ .

### 3.1 MODELO DE WALECKA NÃO LINEAR

A estrutura das estrelas de nêutrons depende de diversos fatores e entre eles estão a composição da matéria em altas densidades, a compressibilidade da matéria e a energia de simetria da matéria nuclear. A equação de estado é uma equação que relaciona as várias variáveis termodinâmicas de forma a reproduzir o comportamento da matéria em altas densidades e altas temperaturas. A equação de estado utilizada neste trabalho para descrever matéria hadrônica é derivada a partir do modelo não linear de Walecka (Serot; Walecka, 1986) utilizando a aproximação de campo médio. Este modelo é amplamente usado em física nuclear e em física de hádrons e, portanto, serve muito bem no estudo de estrelas de nêutrons. Obviamente, este modelo fundamenta-se na mecânica quântica relativística e baseia-se no fato que há duas interações no núcleo: uma atrativa a grandes distâncias e outra repulsiva a curtas distâncias.



Como se trata de um modelo, temos os seguintes parâmetros: três constantes de acoplamento, ajustadas de forma a reproduzir a interação nucleon-nucleon,  $g_\sigma$ ,  $g_\omega$  e  $g_\rho$ , a massa do nucleon  $m_B$ , em geral tomada como 939 MeV e as massas dos mésons escalar e vetoriais,  $m_\sigma$ ,  $m_\omega$  e  $m_\rho$ . A densidade Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_{mesons}, \quad (3.1)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B &= \sum_{B=n,p} \bar{\psi}_B [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu - g_\rho \mathbf{t} \cdot \rho^\mu) - (m_B - g_\sigma \sigma)] \psi_B, \\ \mathcal{L}_{mesons} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{3!} \kappa \sigma^3 - \frac{1}{4!} \lambda \sigma^4 \\ &\quad - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu + \frac{1}{4!} \xi g_\omega^4 (\omega_\mu \omega^\mu)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{B}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_\mu \cdot \rho^\mu, \end{aligned}$$

onde o campo  $\psi_B$  representa os bárions,  $\sigma$ ,  $\omega$  e  $\rho$  representam os mésons que são os mediadores da força forte. O modelo é dito não linear em função dos termos  $\kappa \sigma^3$ ,  $\lambda \sigma^4$  e  $\xi g_\omega^4 (\omega_\mu \omega^\mu)^2$ . Os dois primeiros termos não lineares foram acrescentados por Boguta e Bodmer num artigo de 1977 (Boguta; Bodmer, 1977) de forma a reproduzir corretamente os valores experimentais da compressibilidade e da energia de simetria. As quantidades  $F_{\mu\nu}$  e  $\mathbf{B}_{\mu\nu}$  são dadas por

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu, \\ \mathbf{B}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu - g_\rho (\rho_\mu \times \rho_\nu). \end{aligned}$$

A massa do bárion é dada por  $m_B$ . Nesse trabalho consideraremos que os únicos bárions presentes são o próton e o nêutron.  $\mathbf{t}$  é operador isospin.

### 3.2 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA OS CAMPOS

Ao aplicar a equação de Euler-Lagrange na lagrangiana do modelo não linear de Walecka, obtemos as equações de movimento para os campos. De forma geral, cada campo obedece a uma determinada equação diferencial

que, nada mais é que a equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (3.2)$$

onde  $q_i$  são as coordenadas generalizadas. Obtêm-se as equações de movimento para os campos

$$[\gamma_\mu (i\partial_\mu - g_\nu V^\mu - g_\rho \mathbf{t} \cdot \mathbf{b}^\mu) - (m_B - g_s \phi)] \psi_B = 0, \quad (3.3)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_s^2) \phi + \frac{\kappa \phi^2}{2!} + \frac{\lambda \phi^3}{3!} - \bar{\psi}_B g_s \psi_B = 0, \quad (3.4)$$

$$\partial_\mu \Omega^{\mu\nu} + m_\nu^2 V^\nu + \frac{\xi g_\nu^4 V_\nu V^\nu V^\nu}{6} - \bar{\psi}_B \gamma^\nu g_\nu \psi_B = 0, \quad (3.5)$$

$$\partial_\mu \mathbf{B}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \mathbf{b}^\nu - \bar{\psi}_B g_\rho \gamma^\nu \mathbf{t} \psi_B = 0, \quad (3.6)$$

que formam um sistema de equações diferenciais parciais. A aproximação de campo médio que aplicaremos a seguir nos auxiliará na obtenção dos campos.

### 3.3 APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO

A aproximação de campo médio é, em geral, apropriada para calcular a equação de estado de um sistema uniforme de alta densidade. Ao usar essa aproximação, evita-se resolver um sistema de equações diferenciais parciais não lineares com o objetivo de se obter os campos. Tal aproximação é a de que, quando a densidade bariônica  $\rho_B$  aumenta, os campos mesônicos tendem a se estabilizar num certo valor, ou seja, podemos substituir os campos por seus valores esperados. Antes de aplicar a aproximação de campo médio, assumimos que o sistema seja estático para os campos mesônicos. Isso significa remover a dinâmica do problema

$$\begin{aligned} \partial_0 \sigma &= 0, \\ \partial_0 \omega_\mu &= 0, \\ \partial_0 \rho_\mu &= 0. \end{aligned}$$

Feito isso, descreveremos a aproximação de campo médio. Considerando que a força forte é invariante à rotação, ou seja, supondo que o sistema seja esféricamente simétrico, não deve haver direção preferencial na matéria bariônica. Em outras palavras, o espaço é isotrópico. Portanto, podemos remover as

componentes espaciais dos campos  $\omega^\mu$  e  $\rho^\mu$ . Assim, ficamos com

$$\begin{aligned}\sigma &\rightarrow \langle \sigma \rangle = \sigma_0, \\ \omega_\mu &\rightarrow \langle \omega_\mu \rangle = \delta_{\mu 0} \omega_0, \\ \rho_\mu &\rightarrow \langle \rho_\mu \rangle = \delta_{\mu 0} \delta^{i3} \rho_{03}.\end{aligned}$$

A interação forte também é invariante no espaço de isospin, de forma que podemos escrever

$$\langle \tau_1 \rangle = \langle \tau_2 \rangle = 0, \quad (3.7)$$

ficando apenas  $\tau_3$

$$\langle \tau \cdot \rho^\mu \rangle = \langle \tau_1 \rho_1^\mu + \tau_2 \rho_2^\mu + \tau_3 \rho_3^\mu \rangle = \tau_3 \rho_3^0 = \tau_3 \rho_{03}, \quad (3.8)$$

onde  $\tau_3 = +1/2$  para o próton e  $\tau_3 = -1/2$  para o nêutron. Portanto, as equações de movimento dos campos mesônicos, na aproximação de campo médio, ficam

$$\sigma_0 = -\frac{\kappa}{2m_\sigma^2} \sigma_0^2 - \frac{\lambda}{6m_s^2} \sigma_0^3 + \sum_{B=n,p} \frac{g_\sigma}{m_s^2} \rho_{sB}, \quad (3.9)$$

$$\omega_0 = -\frac{\xi g_\omega^4}{6m_\omega^2} \omega_0^3 + \sum_{B=n,p} \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \rho_B, \quad (3.10)$$

$$b_{03} = \frac{g_\rho}{2m_\rho^2} (\rho_p - \rho_n). \quad (3.11)$$

onde  $\rho_p$  é a densidade de prótons e  $\rho_n$  é a densidade de nêutrons. A densidade escalar  $\rho_{sB}$  e a densidade bariônica  $\rho_B$  são dadas por

$$\rho_{sB} = \langle \bar{\Psi}_B \Psi_B \rangle = \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{i=n,p} \int d^3 p \frac{m_B^*}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} (f_{i+} + f_{i-}),$$

$$\rho_B = \rho_n + \rho_p = \langle \bar{\Psi}_B \gamma^0 \Psi_B \rangle = \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{i=n,p} \int d^3 p (f_{i+} - f_{i-}),$$

onde  $m_B^*$  é a massa efetiva dos bárions,  $m_B^* = m_B - g_s \sigma$ , e as funções  $f_{B\pm}$  referem-se a função distribuição de Fermi

$$f_{B\pm} = \frac{1}{1 + e^{(E^* \mp v_B)/T}}, \quad (3.12)$$

sendo que  $E^*(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_B^{*2}}$  é a energia relativística de cada bárion, e  $v_B$  é o potencial químico efetivo dado por

$$v_B = \mu_B - g_\omega \omega_0 - g_\rho t_{3i} \rho_{03}, \quad (3.13)$$

onde  $\mu_B$  é o potencial químico do respectivo bárion. Assim, pela aplicação da aproximação de campo médio transforma-se um sistema de equações diferenciais parciais num sistema algébrico não linear de equações. Um possível método numérico para resolver esse sistema algébrico de equações é o método de Newton, também conhecido como método de Newton-Raphson.

### 3.4 VARIÁVEIS TERMODINÂMICAS

Os campos obtidos a partir da solução das equações de movimento nos permitem obter as relações entre as variáveis termodinâmicas, ou seja, a equação de estado do sistema. Para isso, juntamente com as equações (3.9), (3.10) e (3.11), e o tensor energia momento (Marston, 1982) dado por

$$T_{\mu\nu} = \sum_i \partial_\nu q_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu q_i)} \right) - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (3.14)$$

onde o índice  $i$  soma todas as coordenadas generalizadas, é possível calcular as relações existentes entre os campos, a densidade de energia e a pressão (Weinberg, 1972) a partir de

$$\varepsilon = \langle T_{00} \rangle, \quad (3.15)$$

$$P = \frac{1}{3} (\langle T_{11} \rangle + \langle T_{22} \rangle + \langle T_{33} \rangle). \quad (3.16)$$

Assim, a densidade de energia do sistema na aproximação de campo médio é dada por (Menezes; Providência, 2003)

$$\begin{aligned} \varepsilon = & 2 \sum_{B=n,p} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^{*2}} (f_{B+} + f_{B-}) + \\ & \frac{m_s^2}{2} \phi_0^2 + \frac{\kappa}{6} \phi_0^3 + \frac{\lambda}{24} \phi_0^4 + \frac{m_v^2}{2} V_0^2 + \frac{\xi g_v^4}{8} V_0^4 + \frac{m_\rho^2}{2} b_{03}^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

e a pressão do sistema é dada por (Menezes; Providência, 2003)

$$P = \frac{1}{3\pi^2} \sum_{B=n,p} \int dp \frac{\mathbf{p}^4}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^{*2}} (f_{B+} + f_{B-}) - \frac{m_s^2}{2} \phi_0^2 - \frac{\kappa}{6} \phi_0^3 - \frac{\lambda}{24} \phi_0^4 + \frac{m_v^2}{2} V_0^2 + \frac{\xi g_v^4}{24} V_0^4 + \frac{m_\rho^2}{2} b_{03}^2. \quad (3.18)$$

A densidade de energia e a pressão tem seus comportamentos ilustrados na figura (10) como função da densidade bariônica, para temperatura  $T = 25$  MeV. Outras variáveis termodinâmicas podem ser obtidas a partir da Primeira Lei da Termodinâmica. Por exemplo, a densidade de entropia é dada por

$$s = \frac{\varepsilon + P - \sum_{i=n,p} \mu_i \rho_i}{T}, \quad (3.19)$$

e a energia livre é dada por

$$\mathcal{F} = \varepsilon - Ts. \quad (3.20)$$

### 3.5 PARÂMETROS DO MODELO

Os parâmetros livres do modelo são  $g_\sigma/m_\sigma$ ,  $g_\omega/m_\omega$ ,  $g_\rho/m_\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\kappa$  e o  $\Xi$ . O único parâmetro obtido experimentalmente é a massa dos nucleons  $m_B$ . Neste trabalho, usaremos o modelo NL3 (Lalazissis; König; Ring, 1997) cujos valores estão na tabela (1) e (2). A inclusão do octeto bariônico é feita praticamente de forma direta na aproximação de campo médio. No entanto, não o incluiremos porque estamos interessados na evolução de protoestrela de nêutrons com a crosta que apresenta a formação da pasta nuclear. Simulações de protoestrelas de nêutrons que levam em consideração o octeto bariônico já foram feitas no artigo (Pons et al., 1999).

modelo	$m_B$	$m_\sigma$	$m_\omega$	$m_\rho$
NL3	939.0	508.194	782.501	763.0
TM1	938.0	511.198	783.0	770.0
GL	938.0	511.198	783.0	770.0

Tabela 1: Massas dos bárions e dos mésons em 3 diferentes parametrizações: NL3, TM1 e GL. As massas estão em unidades de MeV

Cada modelo reproduz as propriedades da matéria nuclear com valores ligeiramente diferentes uns dos outros, como podemos ver na tabela (3)

modelo	$g_s$	$g_\omega$	$g_\rho$	$\kappa/m_B$	$\lambda$	$\xi$
NL3	10.217	12.868	8.948	4.377	-173.31	0.0
TM1	10.0289	12.6139	9.2644	3.04	3.7098	0.0169
GL	8.188	9.197	9.732	4.546	193.110	0.0

Tabela 2: Valores dos parâmetros livres em 3 diferentes modelos: NL3 (Lalazissis; König; Ring, 1997), TM1 (Santos; Menezes, 2004) e GL (Glendenning, 2000).

	NL3	TM1	GL
$B/A$	16.3	16.3	15.95
$\rho_0(fm^{-3})$	0.148	0.145	0.145
$K(MeV)$	272	281	285
$\epsilon_{sim}(MeV)$	37.4	36.9	36.8
$m_B^*/m_B$	0.6	0.63	0.77
$M_{max}/M_\odot$	2.76	2.15	1.95

Tabela 3: Propriedades da matéria nuclear no contexto dos parâmetros usados na saturação.  $B/A$  é a energia de ligação,  $\rho_0$  é a densidade de saturação da matéria nuclear,  $K$  é a compressibilidade,  $\epsilon_{sim}$  é a energia de simetria,  $m_B^*/m_B$  é a massa efetiva dos bárions em unidades da massa de repouso do nucleon e  $M_{max}$  é a máxima massa de uma estrela de nêutrons no referido modelo em temperatura nula. NL3 (Pearson; Goriely; Chamel, 2011), TM1 (Santos; Menezes, 2004) e GL (Glendenning, 2000).

As curvas das figuras (2), (3) e (4) reproduzem as propriedades da matéria nuclear e, como podemos ver, estão de acordo com a tabela (3). Neste trabalho, todos os resultados foram obtidos a partir da parametrização NL3 em função da facilidade de se calcular numericamente os coeficientes de difusão em baixas densidades que serão apresentados no capítulo 6.

### 3.6 NEUTRALIDADE DE CARGA

Uma estrela eletricamente carregada alcança a condição de neutralidade de carga expelindo o excesso de carga elétrica. Portanto, ao derivar a equação de estado, busca-se, em geral, a neutralidade de carga elétrica. Para tanto, é preciso somar na lagrangiana do modelo não linear de Walecka a seguinte expressão

$$\mathcal{L}_I = \sum_I \bar{\Psi}_I (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_I) \Psi_I, \quad (3.21)$$

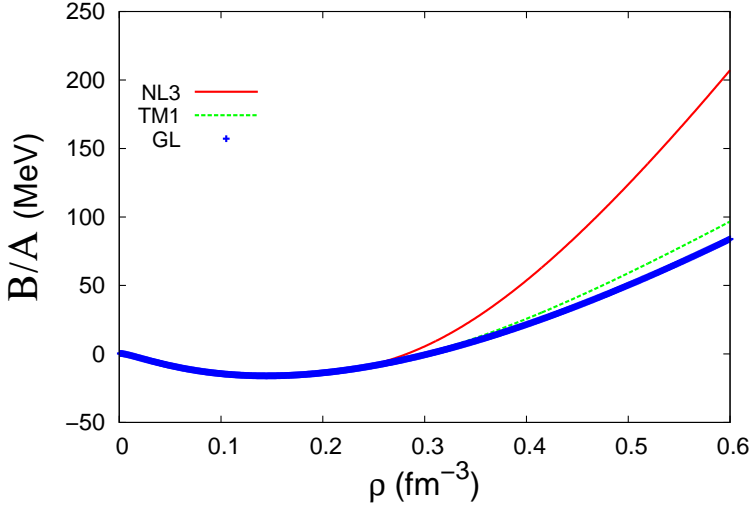


Figura 2: Energia de ligação em função da densidade bariônica para os modelos *NL3*, *TM1* e *GL* a temperatura  $T = 0$ .

onde  $l$  refere-se aos elétrons e aos neutrinos. Essa parte é responsável pela presença de um gás livre de elétrons e neutrinos com função de estabelecer o equilíbrio elétrico e químico. Esse último veremos na próxima seção.

Uma partícula eletricamente carregada sofre ação de uma força elétrica que é inversamente proporcional ao quadrado da distância de outra partícula eletricamente carregada. Essa força pode ser atrativa ou repulsiva. Caso as partículas tenham sinais iguais, a força é repulsiva. Caso contrário, a força é atrativa. No interior de uma estrela, o excesso de cargas elétricas de mesmo sinal faz com que as partículas sofram influência da força gravitacional, que é sempre atrativa, e da força coulombiana, que nesse caso, é sempre repulsiva. Assim, o que acontece é uma “competição” entre essas forças de forma que, caso exista uma quantidade de carga elétrica maior que um determinado limite, essas partículas eletricamente carregadas serão expelidas da estrela porque a força de repulsão é maior que a força gravitacional. Para se ter uma ideia do limite máximo de cargas elétricas no interior de uma estrela, pode-se partir da seguinte condição

$$\frac{(Ze)e}{R^2} \leq \frac{Gmm_B}{R^2} < \frac{G(Am_B)m_B}{R^2}, \quad (3.22)$$

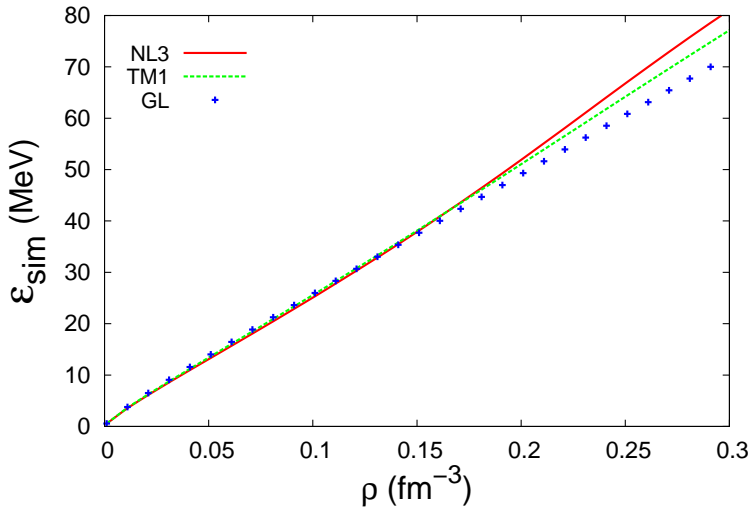


Figura 3: Energia de simetria em função de densidade bariônica para os modelos *NL3*, *TM1* e *GL* a temperatura  $T = 0$ .

onde  $Z$  é número de partículas resultante no interior da estrela,  $R$  e  $m$  são o raio e a massa gravitacional da estrela, respectivamente. A carga e a massa do próton são expressos por  $e$  e  $m_B$ .  $A$  é o número de bárions. Obviamente,  $m < Am_B$  porque parte da massa dos bárions é convertida em energia de ligação da estrela. Assim, ficamos com

$$\frac{Z}{A} < \left(\frac{m_B}{e}\right)^2. \quad (3.23)$$

Portanto, qualquer quantidade de carga elétrica  $Z$ , maior que estabelecida pela condição acima, seria ejetada da estrela. Em outras palavras, as partículas com carga elétrica não estariam ligadas gravitacionalmente. Numericamente, temos (Glendenning, 2000)

$$\left(\frac{m_B}{e}\right)^2 \approx 10^{-36}. \quad (3.24)$$

Assim, o limite máximo de carga elétrica numa estrela de nêutrons de número bariônico  $A$  é  $Z < 10^{-36}A$ . Concluimos que a quantidade de carga elétrica em excesso, se existir, deve ser extremamente pequena. Esse resultado também é comprovado pela observação de sistemas binários. Tais sistemas tem um



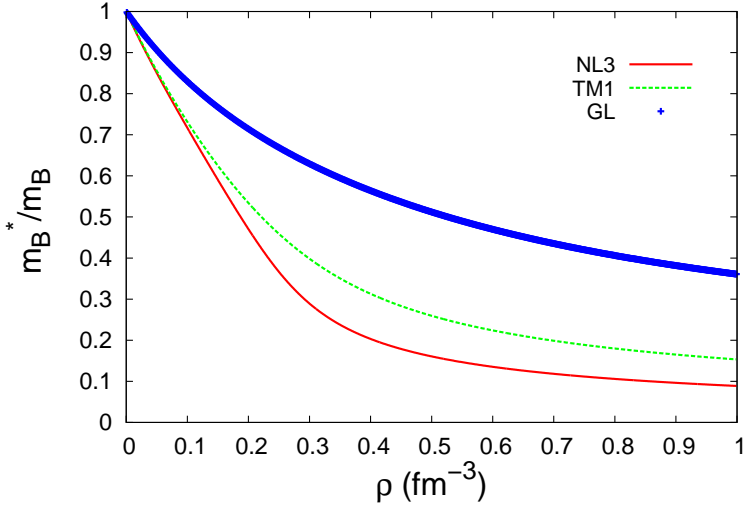


Figura 4: Massa efetiva em função da densidade bariônica a temperatura  $T = 0$ .

comportamento exclusivamente explicado pela interação gravitacional. Caso houvesse um acúmulo significativo de carga elétrica em cada estrela, a interação coulombiana também deveria ser levada em consideração para explicar o movimento relativo entre os objetos estelares.

Desta forma, é natural impormos a condição de neutralidade de carga elétrica ao derivar equações de estado para explicar a constituição física de estrelas de nêutrons. Na equação de estado deste trabalho, apenas o próton e o elétron possuem carga elétrica diferente de zero. Assim, a condição é a seguinte

$$\rho_p - \rho_e = 0,$$

onde  $\rho_p$  é a densidade de prótons e  $\rho_e$  é a densidade dos elétrons. Nas figuras (7) e (8) vemos que para cada valor de densidade bariônica, a fração de elétrons  $Y_e = \rho_e/\rho$  é exatamente igual a fração de prótons  $Y_p = \rho_p/\rho_B$ .

### 3.7 EQUILÍBRIO BETA E APRISIONAMENTO DE NEUTRINOS

O equilíbrio beta está intimamente relacionado com as reações de decaimento beta e a sua reação inversa. Tais reações fazem parte do conhecido processo Urca que é uma reação que emite neutrinos. Acredita-se que esse seja o processo dominante no resfriamento de estrela de nêutron via emissão de neutrinos. O processo foi pela primeira vez discutido por George Gamow e o físico pernambucano Mario Schenberg enquanto visitavam um cassino denominado Urca, no Rio de Janeiro (Nadyozhin, 1995). Relata-se que Gamow teria dito a Schenberg que “a energia desaparece no núcleo de uma supernova tão rapidamente quanto o dinheiro desaparece na mesa da roleta.” A reação de decaimento beta é dada por

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e, \quad (3.25)$$

e sua respectiva reação inversa é dada por

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e. \quad (3.26)$$

Para garantir o equilíbrio beta com aprisionamento de neutrinos no modelo não linear de Walecka, a seguinte condição deve ser obedecida (Menezes; Providência, 2004)

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e^- + \mu_{\bar{\nu}_e}, \quad (3.27)$$

onde todos os  $\mu$  são potenciais químicos de partículas denotadas pelo seu subscrito.

O processo de resfriamento e desleptonização de uma recém nascida estrela de nêutrons, ou protoestrela de nêutrons, está ligado ao fato de que a estrela é rica em léptons. Nesse estágio de vida da estrela, a opacidade dos neutrinos é muito alta. Em outras palavras, o livre caminho médio dos neutrinos é muito menor que o raio da estrela. No estudo de protoestrela de nêutrons, pode-se incluir os neutrinos na equação de estado sem levar em consideração a interação deles com a matéria. A interação dos neutrinos com a matéria se dá pela interação fraca e, portanto, as energias envolvidas são muito menores que as energias da interação forte. A inclusão de elétrons e neutrinos no sistema faz com que haja um aumento na densidade de energia dado por

$$\varepsilon_l = 2 \sum_l \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_l^2} (f_{l+} + f_{l-}), \quad (3.28)$$

e também, um aumento na pressão dado por

$$P_l = \frac{1}{3\pi^2} \sum_l \int dp \frac{\mathbf{p}^4}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_l^2}} (f_{l+} + f_{l-}). \quad (3.29)$$

A entropia total do sistema é dada pela equação (3.19) mais o seguinte termo

$$\frac{\sum_{l=e,\nu} \mu_l \rho_l}{T}, \quad (3.30)$$

onde  $\mu_e$  e  $\mu_\nu$  são os potenciais químicos do elétron e do neutrino, respectivamente e  $\rho_e$  e  $\rho_\nu$  são as densidades do elétron e do neutrino, respectivamente. Na figura (9) vemos os comportamentos de todos os potenciais químicos em função da densidade bariônica para diferentes valores de temperatura e fração de léptons  $Y_L = 0.4$ . A fração de léptons é definida em termos das densidades bariônicas e de léptons

$$Y_L = \frac{\rho_e + \rho_l}{\rho_B}. \quad (3.31)$$

Nas figuras (6) vemos o comportamento da entropia total por bárion do sistema para diferentes valores de temperatura e frações de léptons.

As figuras (5), (6), (7), (8), (9), (10) e (11) foram obtidos com equilíbrio beta e neutralidade de carga, usando a parametrização NL3 conforme a tabela (2) e aproximação de campo médio. A seguir descreveremos cada uma delas em maiores detalhes.

Na figura (5) temos a massa efetiva dos nucleons como função da densidade bariônica para diferentes valores de temperatura e de frações de léptons. Apesar da pequena influência da temperatura e da fração de léptons, as curvas da figura (5) nos mostra que a massa efetiva dos nucleons aumenta com a temperatura e o gráfico b) nos mostra que a massa efetiva diminui com o aumento da fração de léptons.

O Comportamento da entropia por bárion em função da densidade bariônica é representado nas curvas da figura (6) e, como podemos ver no gráfico a), tem variação bastante pronunciada com a temperatura e, de acordo com o gráfico b), tem pequena variação com a fração de léptons. Segue o seguinte comportamento:  $s/\rho_B$  aumenta com o aumento da temperatura e da fração de léptons e diminui com o aumento da densidade bariônica.

As curvas das figura (8) e (7) refletem o comportamento das frações das partículas com a temperatura, fração de léptons e densidade bariônica. Como podemos ver, as frações de partículas pouco variam com a temperatura exceto em densidades abaixo da densidade de saturação da matéria nuclear. Por outro lado, como era de se esperar, tem variação considerável com a

fração de léptons.

O potencial químico de cada partícula é representado na figura (9) para diferentes valores de temperatura e fração de léptons. Da mesma forma que a fração de léptons, os potenciais químicos tem pequena variação com a temperatura sendo mais pronunciada abaixo da densidade de saturação da matéria nuclear.

Os gráficos a) e b) da figura (10) nos mostram o comportamento da pressão e da densidade de energia com a densidade bariônica para  $T = 25$  MeV e  $Y_L = 0.4$  e nos dizem que ambas as variáveis aumentam com a densidade.

A energia livre, representada na figura (11), aumenta com a densidade bariônica e, em a), podemos ver que diminui com a temperatura. No gráfico b), com a variação da fração de léptons, a energia livre varia pouco. Em densidades abaixo de  $2\rho_0$ , a energia livre aumenta com a fração de léptons. Entre  $\rho_0$  e  $2\rho_0$ , a energia livre referente a fração de léptons  $Y_L = 0.1$  se torna maior que as curvas de energia livre referentes a  $Y_L = 0.2$  e  $Y_L = 0.3$  e um pouco acima de  $4\rho_0$  ultrapassa a curva referente a  $Y_L = 0.4$ .

A equação de estado é um dos elementos necessários na simulação de protoestrela de nêutrons. Outro elemento importante é o tratamento da interação dos neutrinos com a matéria e que veremos no próximo capítulo.

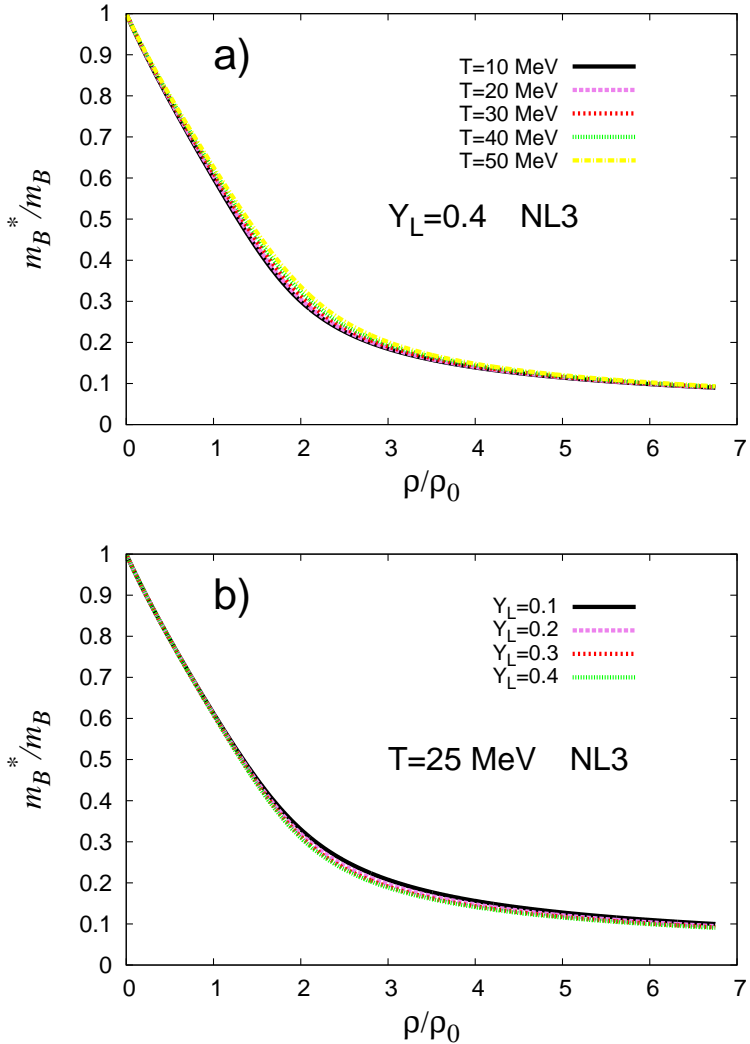


Figura 5: (a) Massa efetiva dos nucleons em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para diferentes valores de temperatura e fração de léptons  $Y_L = 0.4$ . (b) Massa efetiva dos nucleons em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para diferentes valores de fração de léptons e temperatura 25 MeV. Parametrização NL3 usada em ambos os gráficos.

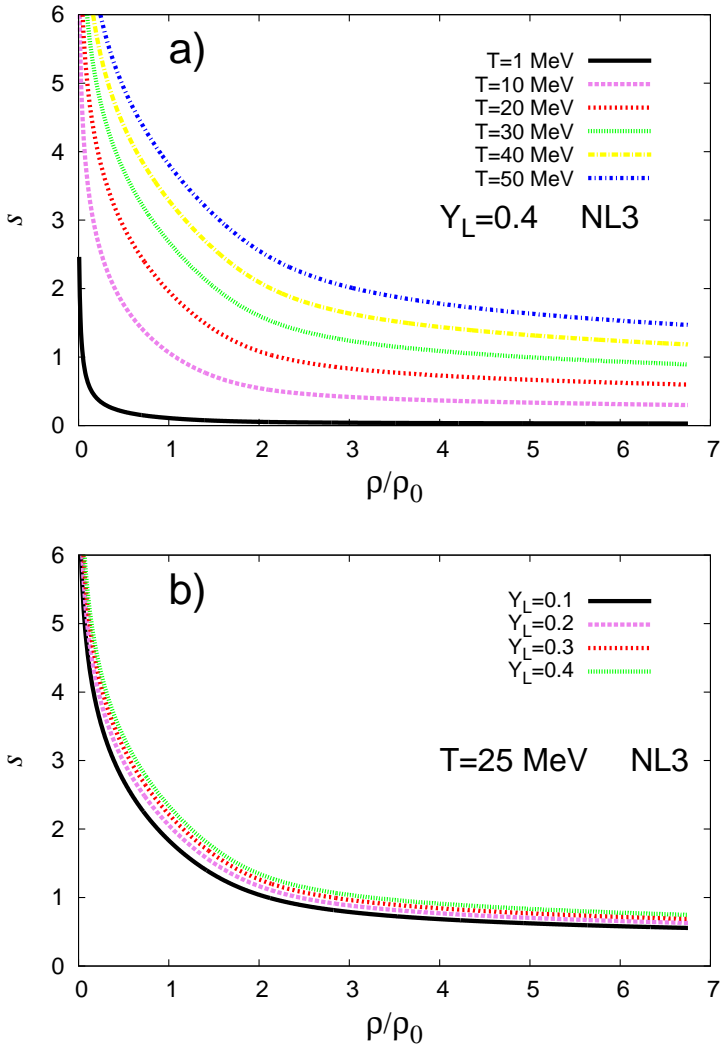


Figura 6: (a) Entropia (por bárion) em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para diferentes valores de temperatura e fração de léptons  $Y_L = 0.4$ . (b) Entropia (por bárion) em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para diferentes valores de fração de léptons e temperatura 25 MeV. Parametrização NL3 usada em ambos os gráficos.

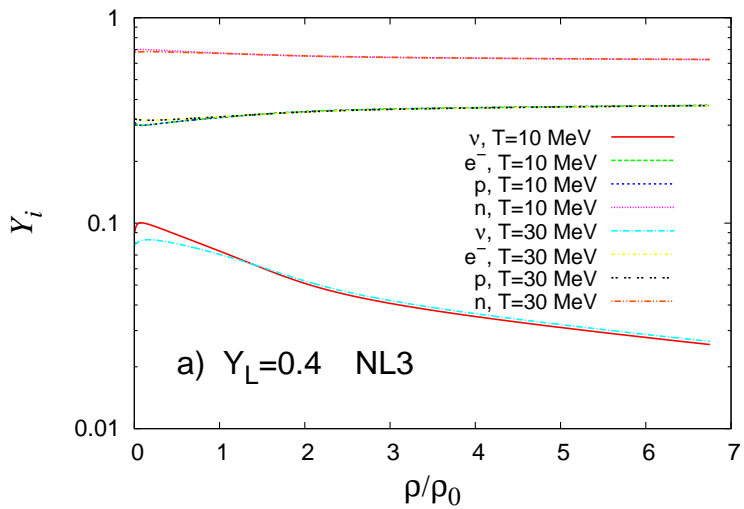


Figura 7: Fração de partículas ( $\nu$ :neutrino,  $e^-$ :elétron,  $p$ :próton e  $n$ :nêutron) em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para diferentes valores de temperatura e fração de léptons  $Y_L = 0.4$ .

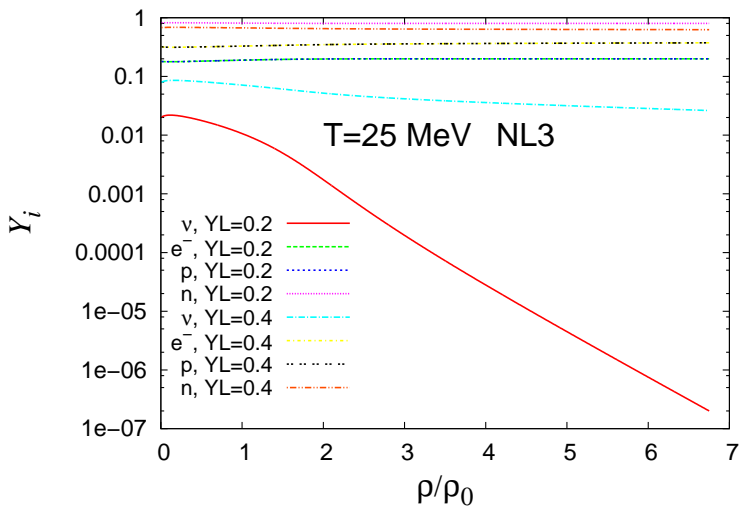


Figura 8: Fração de partículas ( $\nu$ :neutrino,  $e^-$ :elétron,  $p$ :próton e  $n$ :nêutron) em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para temperatura igual a 25 MeV e diferentes frações de léptons.



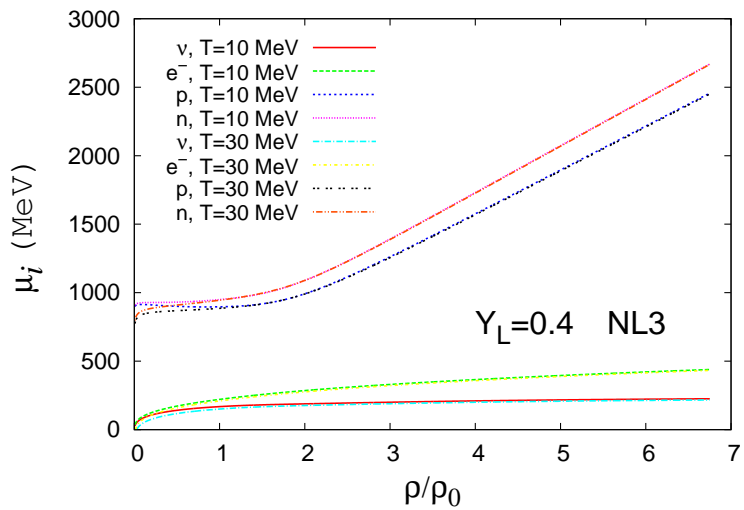


Figura 9: Potencial químico ( $\nu$ :neutrino,  $e^-$ :elétron,  $p$ :próton e  $n$ :nêutron) em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para diferentes valores de temperatura e fração de léptons  $Y_L = 0.4$ .

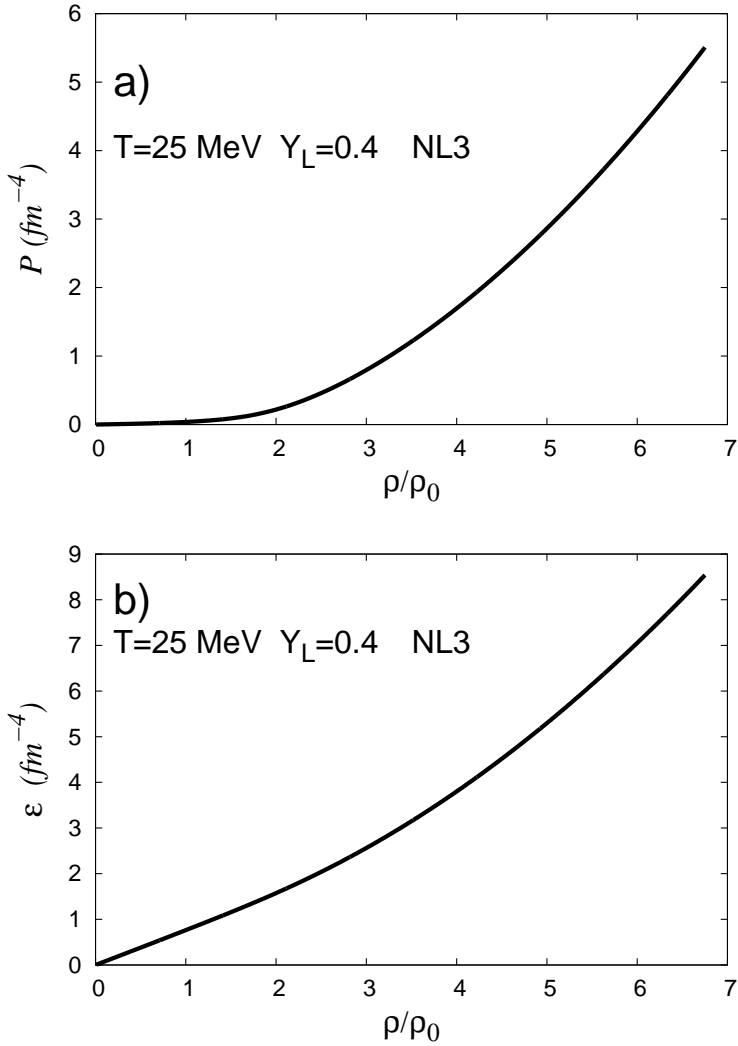


Figura 10: (a) Pressão total do sistema em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para temperatura 25 MeV e fração de léptons  $Y_L = 0.4$ . (b) Densidade de energia em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para temperatura 25 MeV e fração de léptons  $Y_L = 0.4$ .

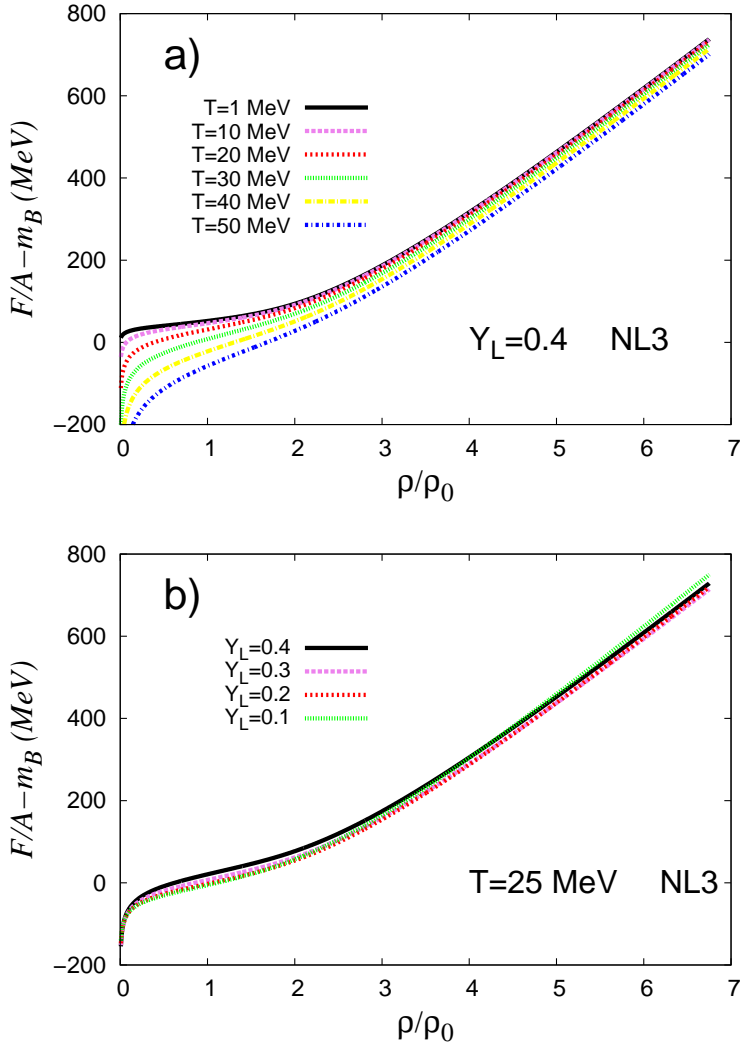


Figura 11: (a) Energia livre em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para diferentes valores de temperatura e fração de léptons  $Y_L = 0.4$ . (b) Energia livre em função de unidades da densidade de saturação da matéria nuclear para temperatura 25 MeV e diferentes valores de fração de léptons.



## 4 OPACIDADE DOS NEUTRINOS

Em 1930, a partir do estudo do decaimento nuclear beta, um problema que aparentemente violava o princípio de conservação de energia perturbou a comunidade científica. Basicamente, o problema se originou na aplicação do princípio de conservação da energia na seguinte reação

$$A \rightarrow B + e^-, \quad (4.1)$$

onde  $A$  é um núcleo radioativo que se transforma noutro núcleo mais leve  $B$  com a emissão de um elétron  $e^-$ . Naquele tempo, pensou-se que a energia do elétron seria dada por

$$E = \left( \frac{m_A^2 - m_B^2 + m_e^2}{2m_A} \right) c^2. \quad (4.2)$$

No entanto, de acordo com os dados experimentais, a energia dos elétrons variava consideravelmente conforme vemos na figura (12). Teoricamente, tinha-se apenas o valor máximo da energia dos elétrons no processo de decaimento beta. Na tentativa de resolver o impasse entre teoria e experimento, Niels Bohr sugeriu abandonar o princípio da conservação da energia. De forma mais cautelosa, Wolfgang Ernst Pauli, propôs a existência de uma outra partícula que “carregava” a diferença de energia que faltava nos cálculos teóricos. Cerca de um ano depois, a ideia proposta por Pauli ganhou atenção em função da teoria de Enrico Fermi do decaimento beta que incorporava a partícula até então não muito bem aceita pela comunidade científica. Fermi chamou a partícula de neutrino. Em 1950, ainda sem nenhuma evidência experimental direta que comprovasse a existência dos neutrinos, uma questão importante vinha à tona: o neutrino existia fisicamente ou apenas era um artifício criado no sentido de salvar as leis físicas de conservação de energia e momento? A partícula prevista teoricamente por Pauli era extremamente difícil de ser detectada. Milhares de neutrinos provenientes do sol atravessam a terra praticamente sem perder energia. Para se ter uma ideia, imagine um equipamento capaz de detectar neutrinos. Caso este seja instalado de forma que fique entre o planeta terra e o sol, a maior parte dos neutrinos emanados do sol e que atingem a terra seriam detectados quase em sua totalidade. Isso significa que a terra é transparente aos neutrinos. A razão é que os neutrinos interagem com a matéria apenas pela força fraca. Os neutrinos foram detectados diretamente pela primeira vez por Frederick Reines e Clyde L. Cowan (Reines; Cowan, 1953). Eles usaram o fato de que reatores nucleares produzem um fluxo de neutrinos da ordem de  $10^{12} - 10^{13}$  neutrino/s  $\cdot$  cm<sup>2</sup>. A ideia

do experimento consiste, basicamente, em se detectar os raios gamma oriundos do processo de aniquilação dos elétrons com os pósitrons provenientes da reação inversa do decaimento beta

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+ \quad (4.3)$$

Apesar do alto fluxo de neutrinos, o número de eventos detectados era em média de 2 a 3 por hora. Outro fato experimental que marcou o início do entendimento da física dos neutrinos foi realizado por Raymond Davis e Don Harmer (Griffiths, 1987). Eles comprovaram experimentalmente que a reação

$$\bar{\nu}_e + n \rightarrow p + e^- \quad (4.4)$$

nunca ocorre, mostrando assim que os neutrinos e seus respectivos antineutrinos são partículas distintas. O que distingue um neutrino do seu antineutrino é exatamente o número leptônico introduzido pelos cientistas Emil John Konopinski e H. M. Mahmoud (Mahmoud; Konopinski, 1952). Eles atribuíram número leptônico  $L = +1$  para o neutrino e  $L = -1$  para o antineutrino. O fato é que o número leptônico obedece a uma lei de conservação que diz: em qualquer processo físico, o soma do número leptônico antes deve ser igual a soma do número leptônico depois do processo.

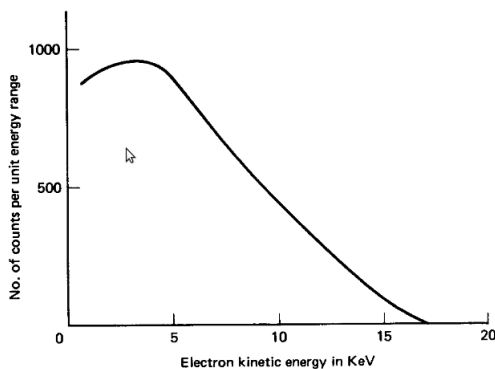


Figura 12: Espectro de decaimento beta do trítio ( ${}^3_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He}$ ) (Griffiths, 1987).

Assim, podemos dizer, resumidamente, que o neutrino é uma partícula elementar que interage com a matéria somente pela força fraca. A carga elétrica do neutrino é nula e sua massa é extremamente pequena, por vezes considerada zero. Neste trabalho consideraremos que a massa do neutrino é nula e tem velocidade igual a da luz. Os neutrinos exercem um papel fun-

damental no interior de estrelas de nêutrons servindo como protagonista no processo de resfriamento e desleptonização.

#### 4.1 OS NEUTRINOS E A SN 1987A

SN 1987A é uma supernova localizada na Nebulosa da Tarântula na Grande Nuvem de Magalhães, uma galáxia satélite da Via Láctea. Ela ocorreu a cerca de 168.000 anos-luz ( $\approx 50$  kpc) (Burrows, 1990) da Terra, tão perto que foi visível a olho nu. Pode ser visto a partir do hemisfério sul. A luz da supernova atingiu a Terra em 23 de fevereiro de 1987. Todas as tentativas na procura de um buraco negro ou estrela de nêutrons como remanescente da SN 1987A falharam. No entanto, a detecção dos neutrinos provenientes desta supernova teve forte impacto na teoria da implosão dos núcleos de estrelas massivas na formação de supernova do tipo II. Na verdade, reforçou a ideia principal de que a explosão de uma supernova se dá a partir da implosão do núcleo degenerado ( $M \approx 1.4 M_{\odot}$ ) de uma estrela massiva.

Um possível remanescente na explosão de supernova do tipo II é uma protoestrela de nêutrons. Uma protoestrela de nêutrons é um objeto estelar muito especial. É uma estrela quente, opaca em relação aos neutrinos e maior que uma estrela de nêutrons. Tem vida curta de cerca de um minuto como podemos ver nos gráficos do próximo capítulo. Nesse período de tempo ela evolui para uma estrela de nêutrons ou pode colapsar formando um buraco negro. Colocando em números, uma recém formada protoestrela de nêutrons tem raio de aproximadamente 50 km, é constituída de aproximadamente  $10^{57}$  bárions, tem fração de léptons central de  $Y_e = 0.35$ . Outra propriedade interessante é que a massa gravitacional  $M$  é apenas ligeiramente menor que a massa bariônica  $M_B$ . Isto acontece em função do aprisionamento de neutrinos. Em outras palavras, a energia de ligação é compensada pelo aumento da energia interna advinda, principalmente, dos neutrinos degenerados presos no interior estelar. O processo de desleptonização tem duração aproximada de 10 s como podemos ver nas figuras do próximo capítulo quando em que os neutrinos escapam quase que completamente da estrela. Em algum momento dentro desse intervalo de tempo a protoestrela de nêutrons evolui para uma estrela de nêutrons de massa  $M$ . Ao final do processo de desleptonização, uma grande quantidade de energia é liberada pela emissão de neutrinos e antineutrinos de todos os sabores. Essa quantidade de energia liberada é dada pela diferença existente entre a massa bariônica  $M_B$  da protoestrela de nêutrons e a massa gravitacional  $m$  da estrela de nêutrons.

As 25 capturas de neutrinos por prótons, detectadas aqui na Terra, permitiram estimar a energia radiada na forma de antineutrinos do elétron da SN

1987A. Assim, a partir dessas detecções estimou-se que a energia radiada é cerca de  $E_{\bar{\nu}_e} \approx 5 \times 10^{52}$  erg (Hansel; Potekhin; Yakovlev, 2007). No entanto, sabe-se que neutrinos de todos os tipos são emitidos, bem como seus respectivos antineutrinos. Simulações numéricas de protoestrelas de nêutrons mostram que podemos estimar a energia total radiada na forma de neutrinos de todos os sabores como sendo  $E_\nu = 6E_{\bar{\nu}_e} \approx 5 \times 10^{53}$  erg, ou seja,  $E_\nu = 3 \times 10^{53}$  erg.

## 4.2 REVISÃO TEÓRICA

O transporte dos neutrinos é um aspecto essencial na simulação do colapso gravitacional de objetos compactos, explosões de supernova e evolução de protoestrela de nêutrons. Os neutrinos de todos os sabores emitidos de estrelas de nêutrons, recém formadas em explosões de supernova, são o único meio direto de examinar a estrutura de protoestrela de nêutrons e o mecanismo de explosões de supernova (Reddy; Prakash; Lattimer, 1998). Em protoestrelas de nêutrons a matéria é bastante opaca em relação aos neutrinos. A opacidade é responsável pela existência da fase Kelvin-Helmholtz, bem como, pela sua longa duração. Neste trabalho tratamos as interações dos neutrinos com a matéria da mesma forma que Burrows e Lattimer (Burrows; Lattimer, 1986). Consideramos as correntes neutras no processo de espalhamento de neutrinos do elétron-nêutron e no processo de espalhamento de neutrinos do elétron-próton

$$\nu_e + n \rightarrow \nu_e + n, \quad (4.5)$$

$$\nu_e + p \rightarrow \nu_e + p, \quad (4.6)$$

e consideramos também as correntes carregadas em reações de absorção

$$\nu_e + n \rightarrow e^- + p, \quad (4.7)$$

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n, \quad (4.8)$$

para  $\nu_e$  e  $\bar{\nu}_e$ . Em baixas densidades o espalhamento de neutrinos por elétrons é bastante importante. No entanto, iremos desconsiderar tal fato nesse trabalho. A seção de choque aproximada para a reação (4.5) é dada por (Burrows;



Lattimer, 1986)

$$\sigma_n = \begin{cases} \sigma_{ref} = \left(\frac{\sigma_0}{4}\right) \left(\frac{E_\nu}{m_e c^2}\right)^2, & nND, \nu D \text{ ou } \nu ND, \\ \sigma_{ref} \left(\frac{E_\nu}{p_{Fc}}\right) \left(\frac{(1+4g_A^2)}{5}\right), & nD, \nu ND, (Iw), \\ \sigma_{ref} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\pi^2(1+2g_A^2)}{8}\right) \left(\frac{T}{E_\nu}\right) \left(\frac{T}{p_{Fc}}\right) \left(\frac{m_B c^2}{E_F}\right), & nD, \nu D, (GP, SS). \end{cases} \quad (4.9)$$

A seção de choque aproximada para a reação (4.6) é dada por (Burrows; Lattimer, 1986)

$$\sigma_p = \begin{cases} \sigma_n, & pND, \nu D \text{ ou } \nu ND, \\ \sigma_n \left(\frac{Y_n}{Y_p}\right)^{1/3}, & pD, \nu ND, \\ \sigma_n \left(\frac{Y_n}{Y_p}\right), & pD, \nu D, (GP). \end{cases} \quad (4.10)$$

A seção de choque aproximada para as reações (4.7) e (4.8) é dada por (Burrows; Lattimer, 1986)

$$\sigma_a = \begin{cases} \sigma_{ref}(1+3g_A^2), & nND, \nu ND, \\ \sigma_{ref}(1+3g_A^2) \left(\frac{2Y_p}{Y_n+Y_p}\right), & nND, \nu D \text{ ou } \nu ND, \\ \sigma_{ref}(1+3g_A^2) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3\pi^2}{16}\right) \left(\frac{T}{E_\nu}\right)^2 \left(\frac{m_B c^2}{\epsilon_F}\right) \left(\frac{Y_e}{Y_n}\right)^{1/3}, & nD, \nu D, (Iw), \\ 0, & nD, Y_L < 0.08. \end{cases} \quad (4.11)$$

Nessas expressões  $p_F$  e  $\epsilon_F$  são o momento de Fermi e a energia de Fermi respectivamente dos nêutrons degenerados, onde  $\epsilon_F$  é igual ao potencial químico dos nêutrons e  $p_F$  é calculado a partir da seguinte equação

$$\epsilon_F^2 = (m_B^*)^2 c^4 + p_F^2 c^2, \quad (4.12)$$

onde  $m_B^*$  é a massa efetiva do nêutron.  $Y_e$  é a fração de elétrons,  $Y_n$  é a fração de nêutrons e  $Y_p$  é a fração de prótons. "ND" denota o regime não degenerado e "D" denota o regime degenerado da matéria. "Iw", "GP", "SS" e "BVR" significam Iwamoto (Iwamoto, 1981), Goodwin e Pethick (Goodwin; Pethick, 1982), Sawyer e Soni (Sawyer; Soni, 1979) e Bludman e Van Riper (Bludman; van Riper, 1978) respectivamente.  $E_\nu$  é a energia do neutrino, a constante de acoplamento  $g_A$  e  $\sigma_0$  são iguais a  $1.254$  e  $2.5 \times 10^{-44} \text{ cm}^2$ , respectivamente.

Para diferentes regimes de degenerescências usamos as seguintes expressões para interpolar as seções de choque do processo de espalhamento e

do processo de absorção

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \psi_n \sigma_n(nND) + (1 - \psi_n) [\psi_v \sigma_n(nD, vND) + (1 - \psi_v) \sigma_n(nD, vD)], \\ \sigma_p &= \psi_p \sigma_p(pND) + (1 - \psi_p) [\psi_v \sigma_p(pD, vND) + (1 - \psi_v) \sigma_p(pD, vD)], \\ \sigma_a &= \psi_n \psi_v \sigma_a(nND, vND \text{ ou } vD) \\ &+ (1 - \psi_n)(1 - \psi_v) \sigma_a(nD, vD) \Theta(Y_L - 0.08),\end{aligned}$$

onde  $\Theta(x)$  denota a função de passo e  $\psi_i$  é dado por

$$\psi_i = \frac{1}{1 + \max(0, \eta_i)}, \quad i = n, p \text{ e } v, \quad (4.13)$$

onde

$$\eta_v = \frac{\mu_v}{T} \quad (4.14)$$

é o parâmetro de degenerescência dos neutrinos,  $\eta_n = \mu_n^0/T$  define o parâmetro de degenerescência dos nêutrons e  $\eta_p = \mu_p^0/T$  define o parâmetro de degenerescência dos prótons. O índice “0” nos potenciais químicos dos nêutrons e dos prótons significa calcular os potenciais químicos sem os termos de interação dos nucleons, ou seja,

$$\begin{aligned}\mu_n^0 &= \mu_n - m_B^* c^2, \\ \mu_p^0 &= \mu_p - m_B^* c^2.\end{aligned}$$

Portanto, a partir das aproximações das seções de choques nos processos de espalhamento e absorção, pode-se obter o livre caminho médio dos neutrinos

$$\lambda_v(E_v) = \frac{1}{n_B(Y_n \sigma_n(E_v) + Y_p \sigma_p(E_v) + (Y_n + Y_p) \sigma_a(E_v))}, \quad (4.15)$$

onde  $n_B$  é a densidade número bariônico.

Como vimos, o livre caminho médio depende da forma da equação de estado, pois depende de algumas variáveis termodinâmicas como temperatura, densidades, frações de partículas, potenciais químicos, entre outras. O formalismo revisto nesse capítulo nos habilita a calcular os coeficientes de difusão definidos nas equações (2.23) e (2.24). Na figura (13) temos os coeficientes de difusão  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$  em função da densidade bariônica para diferentes valores de temperatura e diferentes frações de léptons. Todas as curvas foram calculadas com uma equação de estado derivada do modelo não linear de Walecka na aproximação de campo médio com neutralidade de carga e equilíbrio beta. Como podemos ver, todos os coeficientes de difusão tem

comportamento semelhante com a variação de  $T$  e  $Y_L$ , ou seja, diminuem com o aumento da temperatura e aumentam com a fração de léptons.

Assim, temos os ingredientes necessários para simular a fase Kelvin-Helmholtz cujos detalhes apresentaremos no próximo capítulo.

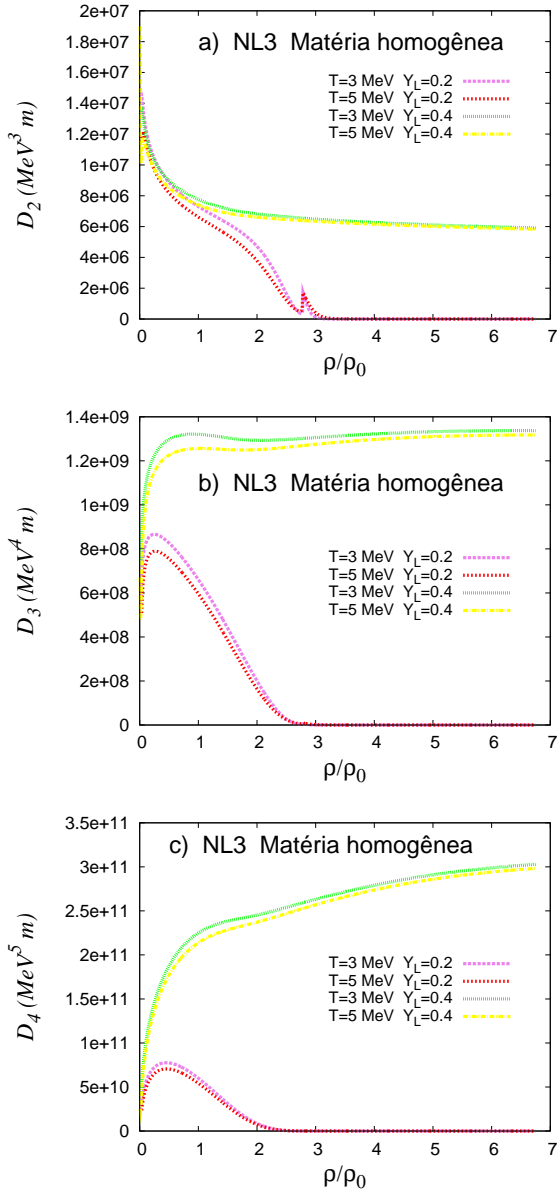


Figura 13: Coeficiente de difusão (a)  $D_2$ , (b)  $D_3$  e (c)  $D_4$  para diferentes valores de temperatura e fração de lépton.

## 5 EVOLUÇÃO TEMPORAL

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos para uma simulação de uma protoestrela de nêutrons de massa bariônica total de  $M_B = 1.35 M_\odot$ . Durante o processo evolutivo a massa bariônica permanece constante e isso significa que não há acreção. A evolução das várias quantidades termodinâmicas são apresentadas nas figuras (14), (15), (16), (17) e (18). O ideal é partir de um perfil inicial de temperatura e  $\eta_\nu$  obtidos a partir da simulação do colapso do núcleo de uma estrela. No entanto, a princípio, estamos interessados em apenas testar o código numérico e não nos preocupamos com esse detalhe. O valor de massa bariônica total da estrela de  $1.35 M_\odot$  foi o único que funcionou dentro das limitações da equação de estado que tínhamos nesse ponto do trabalho. O fato é que em função das dificuldades numéricas em calcular as variáveis termodinâmicas da equação de estado em baixas temperaturas e densidades, a simulação ficou limitada dentro de um intervalo de temperatura e densidade considerado pequeno.

A simulação é o resultado da solução das equações de transporte (2.26) e (2.27) juntamente com as equações da estrutura estelar 2.29, 2.30, 2.31 e 2.32. A equação de estado, adotada na simulação apresentada nesse capítulo, foi derivada do modelo não linear de Walecka na aproximação de campo médio com neutralidade de carga, equilíbrio beta e aprisionamento de neutrinos. Todos os detalhes da obtenção da equação de estado estão descritos no capítulo 3. Como podemos ver, as equações de transporte são sensíveis à equação de estado pois dependem de diversas variáveis termodinâmicas como temperatura, fração de léptons, parâmetro de degenerescência dos neutrinos e entropia. As equações (2.23) e (2.24), que definem os coeficientes de difusão das equações de transporte, dependem do livre caminho médio dos neutrinos na matéria estelar e, portanto, carregam toda a informação relacionada à opacidade dos neutrinos com a matéria e para calculá-los precisamos do formalismo apresentado no capítulo 4.

Podemos observar que a evolução temporal da temperatura representada na curva localizada na parte superior da figura (14) é bastante semelhante à figura 1 de (Burrows; Lattimer, 1986), à figura 6 de (Keil; Janka, 1995) e à figura 9 de (Pons et al., 1999). O comportamento das frações de elétrons e neutrinos também segue o comportamento da figura 9 de (Pons et al., 1999). Outro importante detalhe verificado é que a evolução da estrutura da estrela é muito lenta em comparação com a evolução das variáveis termodinâmicas. Isso pode ser visto na figura 5 de (Burrows; Lattimer, 1986), onde a maior parte da mudança na estrutura da estrela ocorre apenas no primeiro segundo.

Podemos dizer que a evolução ocorre em duas etapas: o processo de

desleptonização e o processo de resfriamento. O processo de desleptonização da estrela, representado pelas curvas azuis de todas as figuras desse capítulo, tem duração de aproximadamente 10 s da mesma forma que em (Burrows; Lattimer, 1986), fato que ocorre de forma mais lenta nas simulações feitas em (Pons et al., 1999) em função do tratamento mais sofisticado dado as interações dos neutrinos com a matéria do referido trabalho.

O processo de resfriamento que ocorre após o término do processo de desleptonização é representado pelas curvas vermelhas em todas as figuras desse capítulo. Durante os primeiros instantes da evolução vemos que ocorre um aumento da temperatura conforme o gráfico localizado na parte superior da figura (14) e isso ocorre em função da conversão da energia de degenerescência do elétron em energia térmica. Em outras palavras, no início da evolução um elétron tem energia maior que o neutrino criado no processo de captura eletrônica. No processo de desleptonização a energia da estrela é liberada principalmente por emissão de neutrinos. Logo a diferença de energia existente entre o elétron e o neutrino no início do processo evolutivo é convertido em energia térmica.

No gráfico superior da figura (14), a temperatura máxima é alcançada no instante 3.35 s e, logo depois, a temperatura começa a diminuir. Em função da limitação da equação de estado usada nessa simulação, não conseguimos atingir a mesma temperatura do artigo (Pons et al., 1999) no final do processo de resfriamento que é aproximadamente nula. A variação temporal da entropia é representada na parte inferior da figura (14). Segue um comportamento parecido com o da temperatura, ou seja, há aumento da entropia por bárion no processo de desleptonização alcançando um valor máximo de 1.67 s e diminuindo logo em seguida.

Na figura (15), vemos os comportamentos do parâmetro de degenerescência e potencial químico dos neutrinos. Nesses gráficos fica evidente que o processo evolutivo é dominado pela desleptonização da estrela nos primeiros 10 s. A partir desse instante o potencial químico tende a se estabilizar num valor que fica em torno de 10 MeV até o final da fase Kelvin-Helmholtz. Podemos dizer que o processo de resfriamento tem pouca influência no comportamento das variáveis termodinâmicas ligadas aos neutrinos.

Nas figuras (16) e (17) temos os comportamentos das frações de todas as partículas envolvidas na simulação. Na figura (16) podemos mais uma vez evidenciar bem o comportamento do processo de desleptonização, onde vemos que nos instantes iniciais há uma grande variação na fração dos léptons (gráfico superior da figura) e, separadamente, os elétrons (gráfico central da figura) e neutrinos (gráfico inferior da figura). Vemos que depois de aproximadamente 10 s essas variações cessam dando início ao resfriamento da estrela. Simultaneamente as frações de prótons e nêutrons tem grandes

variações nos instantes iniciais como podemos ver na figura (17). A fração de prótons diminuindo (gráfico superior da figura) e a fração de nêutrons aumentando (gráfico inferior da figura). De forma semelhante aos léptons, a fração de nêutrons e prótons tendem a um valor que não muda muito depois do processo de desleptonização.

Na figura (18) temos o comportamento dos coeficientes de difusão  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$  como função da massa bariônica e do tempo. Como podemos ver,  $D_3$  e  $D_4$  diminuem com o tempo e tem suas variações mais pronunciadas logo no início da evolução, ou seja, diminuem muito no processo de desleptonização. Por outro lado, o coeficiente de difusão  $D_2$  tem um comportamento diferenciado, alcançando seus valores máximos ao fim da fase Kelvin-Helmholtz.

Nesse trabalho levamos em consideração apenas os neutrinos do elétron e os antineutrinos do elétron. Ambos são responsáveis pelo fluxo de energia para fora da estrela. Durante o processo de desleptonização a fração de léptons diminui conforme mostrado na figura (16) e, conseqüentemente, a fração de prótons conforme o gráfico da parte superior da figura (17). No sentido inverso, a fração de nêutrons aumenta conforme o gráfico inferior da figura (17). Conforme as figuras (15) e (16) vemos que o processo de desleptonização se dá de forma mais rápida em regiões próximas a superfície da estrela quando comparado com regiões mais internas da estrela.

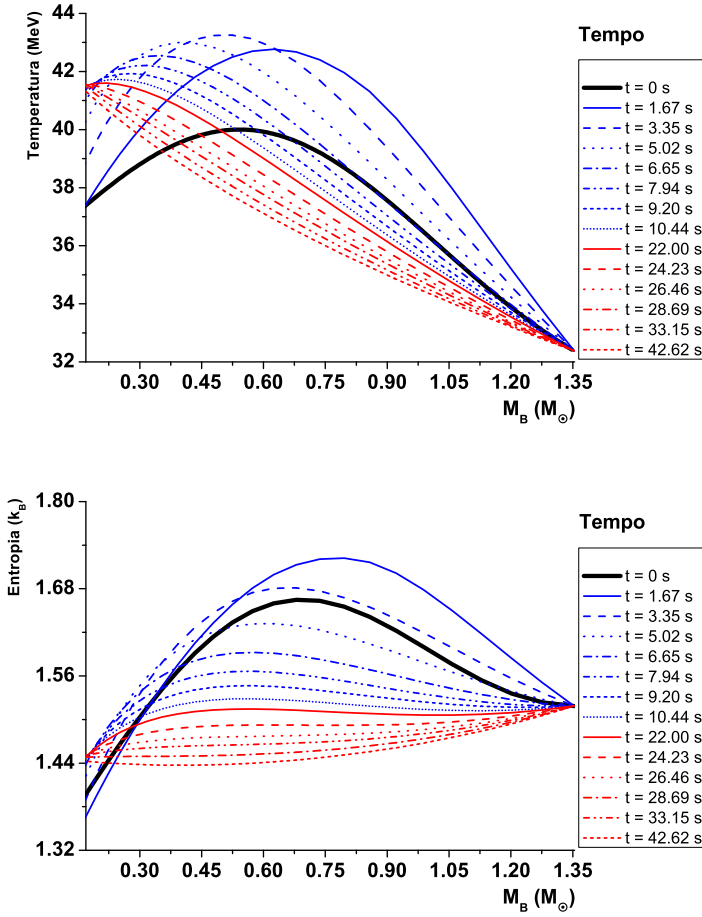


Figura 14: Evolução temporal da temperatura e da entropia em função da massa bariônica da estrela.



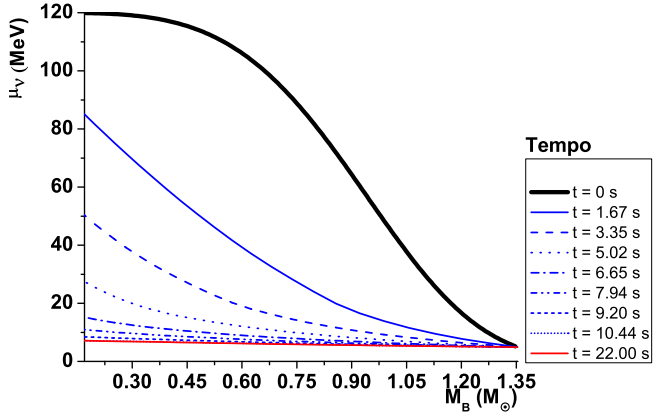
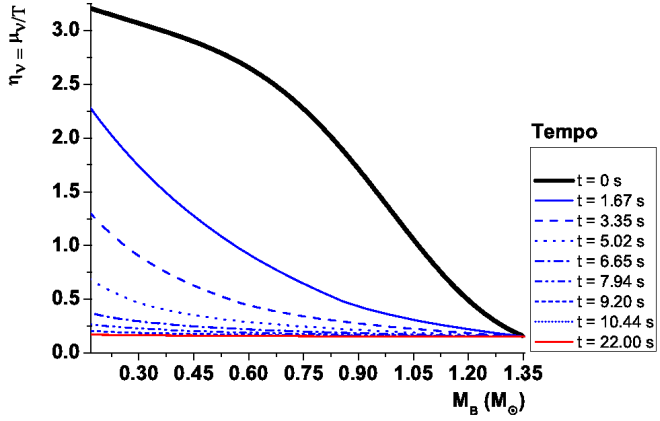


Figura 15: Evolução temporal de  $\eta_V$  e de  $\mu_V$  em função da massa bariônica da estrela.

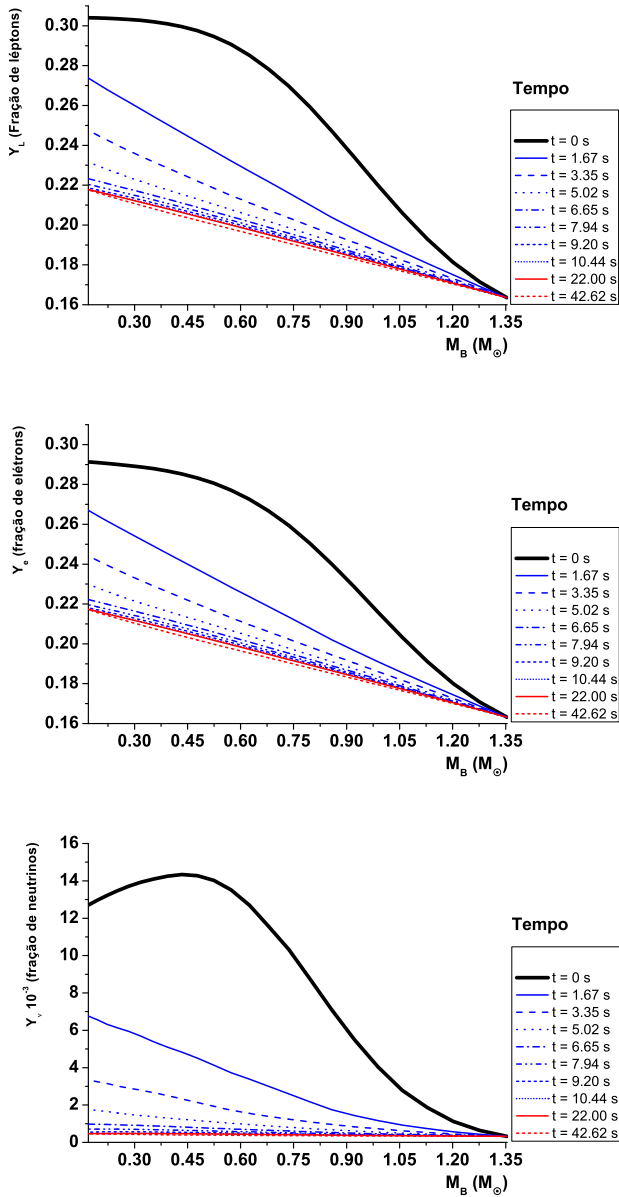


Figura 16: Evolução temporal das frações de léptons em função da massa bariônica da estrela.

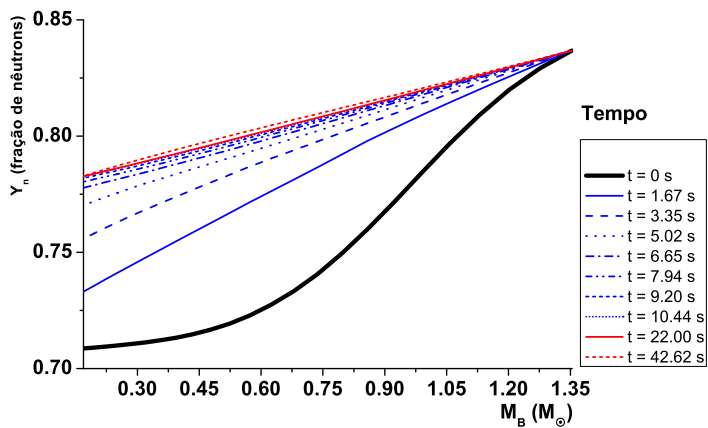
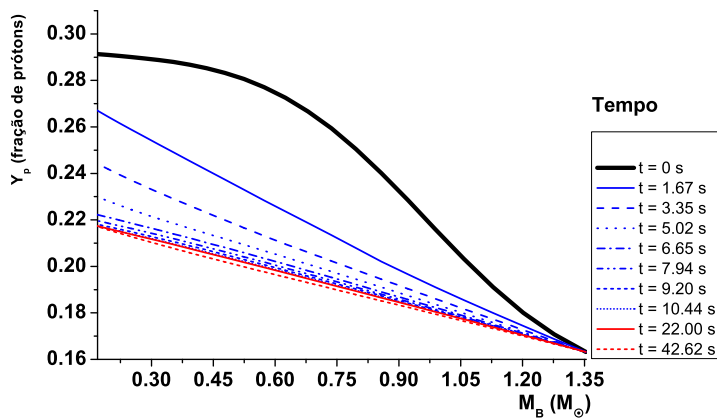


Figura 17: Evolução temporal das frações de prótons e de nêutrons em função da massa bariônica da estrela.

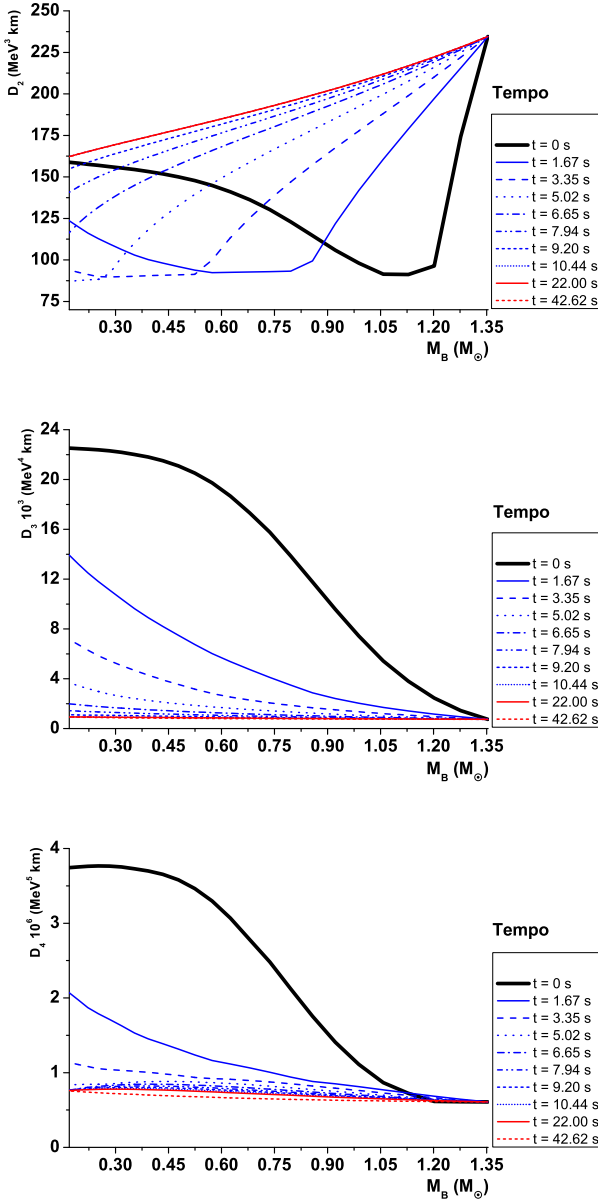


Figura 18: Evolução temporal dos coeficientes de difusão  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$  em função da massa bariônica da estrela.

## 6 PASTA NUCLEAR

Neste capítulo, revisaremos a pasta nuclear que é uma fase mista da matéria nuclear formada por determinadas estruturas geométricas complexas. Tais estruturas surgem em densidades abaixo da densidade de saturação da matéria nuclear. A formação dessa fase pode ocorrer no interior de estrelas de nêutrons, mais especificamente na sua crosta.

### 6.1 AS ESTRUTURAS PRINCIPAIS DAS ESTRELAS DE NÊUTRONS

Pode-se dizer que estrelas de nêutrons tem cinco regiões principais: caroço interno, caroço externo, crosta, envelope e atmosfera, conforme figura (19).

A atmosfera é uma camada fina de plasma e fica na parte mais externa da estrela. Essa região define o espectro eletromagnético térmico. O espectro da radiação proveniente dessa região contém informações sobre a temperatura efetiva da superfície, intensidade da força gravitacional, composição química, massa e, eventualmente, raio da estrela. A espessura da atmosfera varia com a temperatura, sendo de alguns centímetros para estrelas de nêutrons com temperatura efetiva na superfície de  $T_s \approx 3 \times 10^6$  K e alguns milímetros quando  $T_s \approx 3 \times 10^5$  K (Hansel; Potekhin; Yakovlev, 2007). Dependendo do fluxo de radiação térmica oriundos dos processos que ocorrem nas regiões mais internas da estrela, a atmosfera pode apresentar uma certa instabilidade com relação ao fluxo de plasma. Em outras palavras, a instabilidade acontece quando a pressão de radiação térmica nessa região excede a força gravitacional. A atmosfera representa uma quantidade insignificante na quantidade total da massa da estrela. No entanto, como vimos exerce forte influência no espectro de fótons e no transporte de energia térmica da superfície da estrela.

A crosta apresenta uma extensão que varia entre 1 e 2 km, é constituída basicamente de nêutrons, prótons e elétrons, e sua densidade é menor que a densidade de saturação da matéria nuclear. Na verdade, podemos dividir a crosta em duas partes: crosta externa (menor densidade) e crosta interna (maior densidade). A crosta externa tem por característica a formação de aglomerados de nucleons (*clusters*) imersos num gás de elétrons. Nessa região da crosta, os nêutrons e os prótons estão todos ligados formando estruturas semelhantes aos núcleos dos átomos. Na crosta interna, onde a densidade é maior que na externa, ocorre o que chamamos de escorrimento de nêutrons (*neutron drip*). Mais especificamente falando, em densidades su-

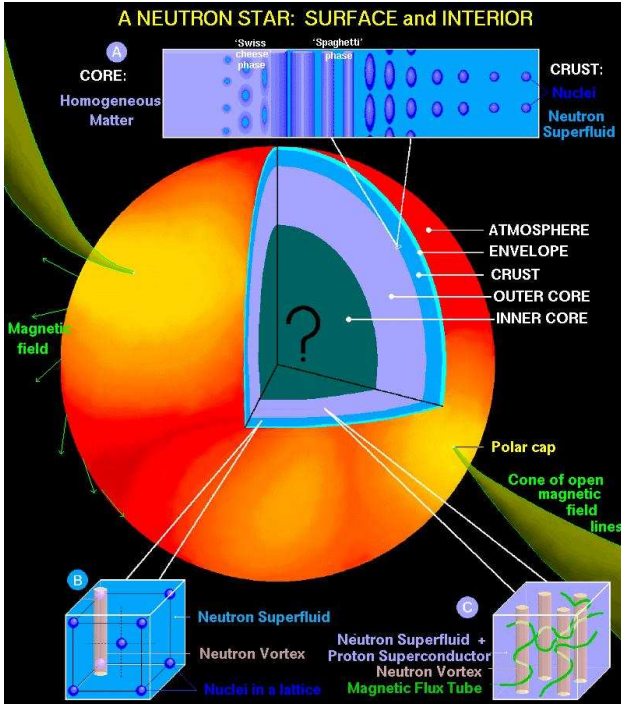


Figura 19: As cinco regiões principais de uma estrela de nêutrons. O topo da figura mostra a transição da matéria homogênea no caroço externo para matéria não homogênea na crosta.

periores a  $4 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$  ( $4 \times 10^{-4} \text{ fm}^{-3}$ ), onde o potencial químico dos nêutrons é zero, uma fração dos nêutrons se desliga formando um gás em torno desses aglomerados dando início a uma fase mista numa transição de fase líquido gás. Nessa transição, os aglomerados nucleares assumem determinadas formas geométricas que dependem do equilíbrio das forças eletromagnéticas e nucleares, ou seja, trata-se de um sistema frustrado. Essa fase da matéria nuclear é conhecida como pasta nuclear. Na figura (20), da esquerda (azul) para a direita (vermelho), temos as formas básicas da pasta nuclear: gota = almôndega (droplet), haste = espaguete (rod), laje = lasanha (slabs), tubo = espaguete (tube), bolha = queijo suíço (bubble). A partir de densidades  $10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ , cerca de 90% dos núcleons são nêutrons num superfluido e os aglomerados são constituídos de prótons com uma pequena fração de nêutrons.

O caroço externo ocupa um intervalo de densidade que fica entre  $0.5\rho_0$

e  $2\rho_0$  e preenche radialmente alguns quilômetros da estrela. Basicamente, essa região é formada de nêutrons, prótons, elétrons e possivelmente múons.

O caroço interno ocupa a região mais interna da estrela, ou seja, aparece em densidades superiores a duas vezes a densidade de saturação da matéria nuclear. Podemos dizer que o caroço interno e externo representam mais de 99 % da massa da estrela. O raio dessa região tem vários quilômetros e sua densidade central pode ficar entre  $10 - 15\rho_0$ . A composição dessa parte da estrela é ainda assunto de grande especulação. As hipóteses predominantes são:

- Aparecimento de híperons;
- Formação de condensados de káons e píons;
- O surgimento de uma transição de fase da matéria hadrônica para matéria quarkionica.

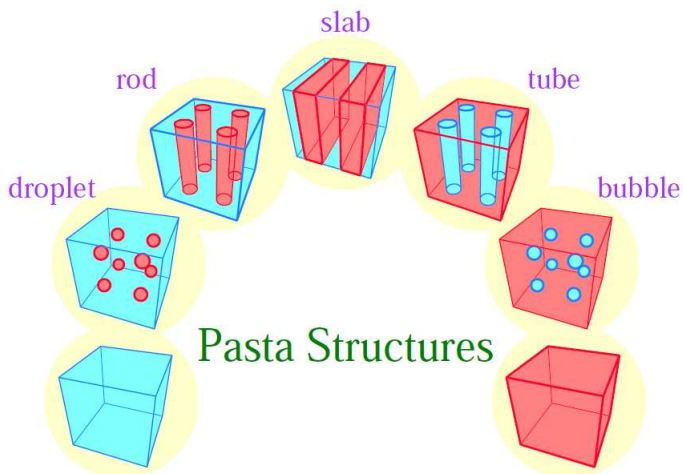


Figura 20: Representação das estruturas da pasta nuclear.

## 6.2 MATÉRIA NÃO HOMOGÊNEA

Para ficar um pouco mais clara a questão da formação dessas estruturas geométricas na pasta nuclear, vamos tomar como exemplo uma isoterma da água em temperatura ambiente. Em densidades baixas, a água existe apenas na forma de vapor. Com o aumento da densidade, surgem gotas de água dando origem a uma fase mista de líquido e vapor. Aumentando ainda mais a densidade, a água passa a existir apenas na forma líquida. Para cada uma das fases da água acima mencionadas, há uma equação de estado, sendo que a equação de estado da fase mista é obtida pelas condições de Maxwell: potenciais químicos, temperatura e pressão iguais em ambas as fases. No entanto, não podemos esquecer que há duas diferenças importantes entre o exemplo da água e da matéria nuclear. Na matéria nuclear, diferente da água que é formada apenas de um componente químico, temos um sistema binário, ou seja, consiste de dois componentes quimicamente independentes: bárions e elétrons. Nesse caso, as condições de Gibbs devem ser satisfeitas e não as condições de Maxwell. A outra diferença é que na matéria nuclear, os componentes químicos são eletricamente carregados fazendo com que a fase mista seja não uniforme. Como podemos ver na figura (21), há uma diferença na aparência da pasta que depende da aproximação utilizada. Em geral, a região da fase pasta nuclear é maior quando se usa o método de Thomas-Fermi (TF) em comparação com o método coexistência de fases (CP).

## 6.3 COEXISTÊNCIA DE FASES

Dentre as possíveis aproximações para calcular a fase pasta nuclear estão a aproximação de Thomas-Fermi (TF) e a coexistência de fases (CP). O método de TF é uma aproximação semiclássica de campo médio que supõe que os campos variam lentamente, de tal forma que os bárions estão sob influência de um campo constante no tempo. A aproximação de TF é mais sofisticada que a CP do ponto de vista numérico e, portanto, neste trabalho, nos concentraremos apenas no método CP. A seguir faremos uma explanação um pouco mais detalhada do método CP.

Um sistema é estável em uma única fase se a energia livre de Helmholtz  $F$  é menor que a correspondente energia livre na configuração de duas fases.



Isso pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} F(T, \rho) &< fF(T, \rho^I) + (1-f)F(T, \rho^{II}), \\ \rho &= f\rho^I + (1-f)\rho^{II}, \\ 0 &< f < 1, \end{aligned}$$

onde  $\rho^I$  é a densidade da fase *I*,  $\rho^{II}$  é a densidade da fase *II* e  $f$  é a fração de volume da fase *I*. Matematicamente, estabilidade termodinâmica implica que a densidade de energia livre é uma função convexa da densidade de partículas. Caso essa condição seja violada, um sistema com mais de uma fase é energeticamente favorável. A pasta nuclear é um exemplo de sistema marcado pela coexistência de fases onde as condições de Gibbs são obedecidas:

- Equilíbrio mecânico

$$P^I(v_p^I, v_n^I, m^{*I}) = P^{II}(v_p^{II}, v_n^{II}, m^{*II}). \quad (6.1)$$

- Equilíbrio químico

$$\mu_n^I = \mu_n^{II}, \quad (6.2)$$

$$\mu_e^I = \mu_e^{II}, \quad (6.3)$$

$$\mu_v^I = \mu_v^{II}, \quad (6.4)$$

$$\mu_p^I = \mu_p^{II}, \quad (6.5)$$

$$(6.6)$$

- Equilíbrio térmico

$$T^I = T^{II}. \quad (6.7)$$

Nas equações acima,  $P$  é a pressão,  $v_i$  são os potenciais químicos efetivos,  $m^*$  é a massa efetiva dos nucleons,  $\mu_i$  são os potenciais químicos e  $T$  é a temperatura. A equação de estado obtida para ambas as fases da pasta nuclear foi derivada do modelo de Walecka não linear e, em função disso, as equações

dos campos  $\phi$ ,  $b_0$  e  $V_0$  devem ser satisfeitas

$$m_s^2 \phi_0^I + \frac{\kappa}{2} (\phi_0^I)^2 + \frac{\lambda}{6} (\phi_0^I)^3 = g_s \rho_s^I, \quad (6.8)$$

$$m_s^2 \phi_0^{II} + \frac{\kappa}{2} (\phi_0^{II})^2 + \frac{\lambda}{6} (\phi_0^{II})^3 = g_s \rho_s^{II}, \quad (6.9)$$

$$V_0^I = \frac{g_v}{m_v^2} \rho_B^I, \quad (6.10)$$

$$V_0^{II} = \frac{g_v}{m_v^2} \rho_B^{II}, \quad (6.11)$$

$$b_0^I = \frac{g_\rho}{m_\rho^2} (\rho_p^I - \rho_n^I), \quad (6.12)$$

$$b_0^{II} = \frac{g_\rho}{m_\rho^2} (\rho_p^{II} - \rho_n^{II}), \quad (6.13)$$

onde  $I$  e  $II$  rotulam cada uma das fases.

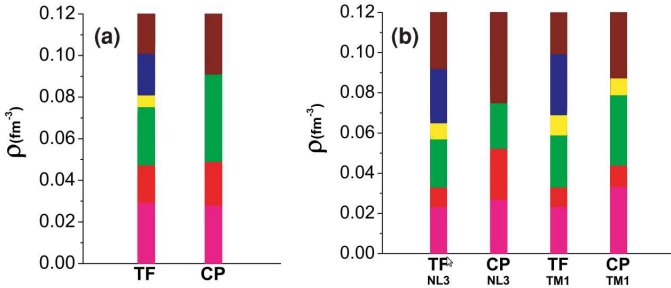


Figura 21: Diagrama de fases obtida a partir dos métodos CP e TF para temperatura  $T = 0$ . (a) Parametrização NL3 para matéria simétrica e (b)

Parametrização NL3 e TM1 com  $Y_p = 0.3$ . Cada cor representa uma estrutura diferente da pasta. Da densidade mais baixa para mais alta, temos: gotas, haste, laje, tubo e bolha. A última cor (marrom) é matéria homogênea (Avancini et al., 2008).

A figura (21) nos dá uma ideia das diferenças entre a fase pasta obtida pelo método CP e pelo Método TF. O diagrama foi obtido com a parametrização NL3 e com imposição de neutralidade de carga e equilíbrio beta.

## 6.4 COEXISTÊNCIA DE FASES: MATÉRIA ESTELAR

Da mesma forma que na matéria homogênea, a fase pasta nuclear deve apresentar neutralidade de carga elétrica. Assim, no cálculo da pasta nuclear, a condição de neutralidade de carga fica

$$f(\rho_p^I - \rho_e^I) + (1 - f)(\rho_p^{II} - \rho_e^{II}) = 0, \quad (6.14)$$

condição esta que garante que o número de prótons seja igual ao número de elétrons.

Estamos interessados na evolução de uma recém nascida estrela de nêutrons levando em consideração a formação da pasta nuclear na crosta. Para isso, precisamos considerar o equilíbrio beta, bem como o aprisionamento dos neutrinos nessa fase da matéria nuclear. Isso é feito ao impor a mesma condição sobre o potencial químico dos prótons dada pela equação (3.27).

## 6.5 VARIÁVEIS TERMODINÂMICAS

A pressão total do sistema é dada por

$$P_T = P^I + P_e + P_\nu, \quad (6.15)$$

onde  $P_e$  é a pressão dos elétrons e  $P_\nu$  é a pressão dos neutrinos dados pela equação (3.29). Os elétrons e os neutrinos são incluídos na equação de estado como um gás de Fermi degenerado não interagente e, portanto, a quantidade  $P_e + P_\nu$  é a mesma dada por (3.29). A densidade de energia total do sistema é dada por (Avancini et al., 2008)

$$\mathcal{E} = f\mathcal{E}^I + (1 - f)\mathcal{E}^{II} + \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_\nu + \mathcal{E}_{surf} + \mathcal{E}_{Coul}, \quad (6.16)$$

onde  $\mathcal{E}_e$  é a densidade de energia dos elétrons e  $\mathcal{E}_\nu$  é a densidade de energia dos neutrinos são dados pela equação (3.28).  $\mathcal{E}_{surf}$  é a energia de superfície e  $\mathcal{E}_{Coul}$  é a energia de Coulomb que discutiremos em maiores detalhes na próxima seção. A energia dos elétrons e dos neutrinos é dada pela equação (3.28).

## 6.6 ENERGIA DE COULOMB

Para entendermos a questão da energia de superfície e da energia de Coulomb, vamos considerar um sistema de duas fases. A fase  $I$  da matéria

forma gotas de raio  $R$  que estão envoltas na fase  $II$  da matéria. De acordo com a figura (22), todo o espaço é dividido em equivalentes células de Wigner-Seitz com um raio  $R_W$ . O volume da célula é  $V_W = 4\pi R_W^3/3$  e o volume da gota é dado por  $V = 4\pi R^3/3$ . Usando o modelo não linear de Walecka, duas equações de estado são calculadas de forma a satisfazer as condições de Gibbs e a condição de neutralidade de carga, sendo que para cada densidade bariônica  $\rho_B$  global a seguinte equação é satisfeita:

$$f = \frac{\rho_B - \rho^I}{\rho^I - \rho^{II}}, \quad 1 < f < 0, \quad (6.17)$$

onde  $\rho^i$  é a densidade bariônica da correspondente fase. A densidade de energia de superfície pode ser expressa em termos da tensão superficial  $\sigma$  como

$$\mathcal{E}_{surf} = 3f\sigma/R, \quad (6.18)$$

e a densidade de energia de Coulomb pode ser expressa como

$$\mathcal{E}_{coul} = f \frac{16\pi^2}{15} (\rho_p^I - \rho_p^{II}) R^2. \quad (6.19)$$

O valor ótimo do raio da gota  $R_D$ , conforme a figura (23), é determinado ao

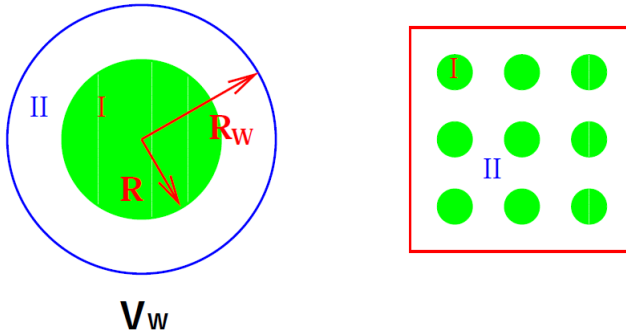


Figura 22: Na parte esquerda da figura temos uma representação de uma célula de Wigner-Seitz. Na parte direita da figura temos gotas iguais formadas da fase  $I$  envoltas pela fase  $II$  da matéria.

tomar o valor mínimo da densidade de energia em termos de  $R$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial R} \Big|_{R=R_D} = 0, \quad (6.20)$$

para uma dada fração  $f$ . Como  $\mathcal{E}$  não depende de  $R$ , podemos sempre encontrar um mínimo com resultado da competição entre  $\mathcal{E}_{coul}$  e  $\mathcal{E}_{surf}$ , satisfazendo a relação  $\mathcal{E}_{surf} = 2\mathcal{E}_{coul}$  onde o resultado sempre satisfaz a conhecida relação  $E_S = 2E_C$ .

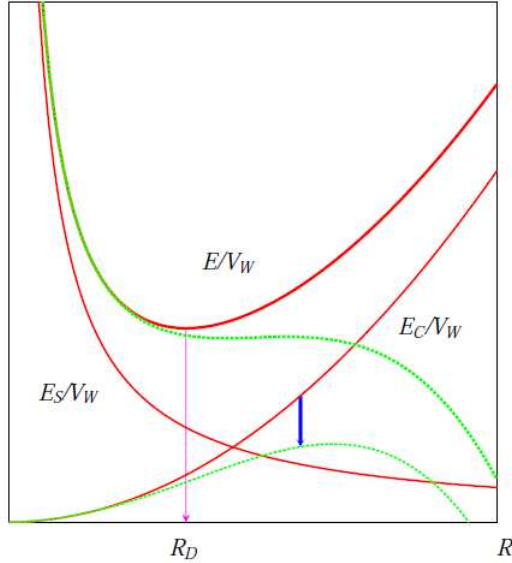


Figura 23: Representação da energia total  $E$ , energia de superfície  $E_S$  e energia de Coulomb  $E_C$ , onde  $V_W$  é o volume da célula de Wigner-Sietz. Gráfico tirado de (Maruyama et al., 2006).

Assim, a energia coulombiana é dada por

$$\mathcal{E}_{Coul} = \frac{2\alpha}{4^{2/3}} (e^2 \pi \Phi)^{1/3} [\sigma D (\rho_p^I - \rho_p^{II})]^{2/3}, \quad (6.21)$$

onde  $\alpha = f$  para gota, espaguete e lasanha,  $\alpha = 1 - f$  para bolhas e tubos,  $\sigma$  é a energia de superfície,  $D$  é a dimensão do sistema. Para gotas, espaguete e lasanha,  $\Phi$  é dado por

$$\Phi = \begin{cases} \left[ \left( \frac{2-Df^{1-\frac{D}{2}}}{D-2} + f \right) \frac{1}{D+2} \right], & D = 1, 3, \\ \frac{f-1-\ln(f)}{D+2}, & D = 2, \end{cases} \quad (6.22)$$

e para bolhas substitui-se  $f$  por  $1 - f$ . O coeficiente da energia de superfície  $\sigma$  afeta a aparência da pasta nuclear de forma significativa. A seguir veremos em detalhes o tratamento dado ao coeficiente da energia de superfície.

## 6.7 ENERGIA DE SUPERFÍCIE

Adotamos três possíveis formas de se calcular o coeficiente da energia de superfície. A primeira forma é ajustar, em termos da fração de prótons da fase mais densa da pasta, os valores numéricos das aproximações de Thomas-Fermi e Hartree-Fock com uma força de Skyrme (Avancini et al., 2008). Assim o coeficiente da energia de superfície fica

$$\sigma = \sigma_0 \frac{16 + b}{Y_p^3 + \frac{1}{(1-Y_p)^3} + b} h_t, \quad (6.23)$$

onde

$$h_t = \left[ 1 - \left( \frac{T}{4T_c Y_p (1 - Y_p)} \right)^2 \right]^2, \quad (6.24)$$

com  $\sigma_0 = 1.03 \text{ MeVfm}^{-2}$ ,  $b = 24.4$  e  $T_c = 14.55 \text{ MeV}$  para a parametrização NL3.  $T_c$  é a temperatura crítica no qual ocorre uma transição de fase gás para fase líquida.

A segunda forma é parametrizar o coeficiente da energia de simetria em função da temperatura e da fração de prótons por meio do método de TF usando modelos relativísticos como feito em (Avancini et al., 2010). Nesse caso, o coeficiente da energia de superfície fica

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 e^{-20.7779x^{1.5}} (1 - 5.84915x + 138.839x^2 - 1631.42x^3 + 8900.34x^4 \\ &\quad - 21592.3x^5 + 20858.6x^6) \times (1 - (0.0121222 + 0.01664T \\ &\quad - 0.00137266T^2 + 4.0257 \times 10^{-5}T^3)xT - (0.00792168 \\ &\quad - 8.25 \times 10^{-5}T - 4.5933 \times 10^{-6}T^2 - 2.8167 \times 10^{-7}T^3)T^2), \quad (6.25) \end{aligned}$$

onde  $x = (1 - 2Y_p)^2$ . A segunda forma difere da terceira forma de tratar o coeficiente da energia de superfície apenas em relação a fração de prótons. Na segunda forma  $Y_p$  é local e na terceira forma  $Y_p$  é global. As figuras (24), (25), (26), (27), (29), (30), (31) e (32) nos mostram em maiores detalhes as diferenças nas três formas adotadas no tratamento do coeficiente da energia de simetria. Todas as curvas foram obtidas impondo neutralidade de carga, equilíbrio beta e os campos foram calculados na aproximação de campo médio. Como veremos nas figuras supramencionadas, a pasta nuclear

é bastante sensível no que diz respeito a energia de superfície. Não só o tamanho da pasta, mas também as estruturas que aparecem antes de dar início a matéria homogênea são afetadas pelo coeficiente da energia de simetria. As figuras (24) e (25) mostram que com a fórmula 6.25 com  $Y_p$  global, obtemos valores mínimos para o coeficiente da energia de superfície. Como consequência, a energia de superfície também é minimizada fazendo com que o tamanho da pasta seja maior quando comparado às outras duas formas de se calcular o coeficiente da energia de superfície. Isso pode ser verificado ao analisar as curvas da figura (26). Como se pode ver, no diagrama de fases calculado para vários valores de temperatura e frações de léptons, a pasta sempre alcança valores maiores de densidade bariônica quando se adota  $\sigma$  relativístico e  $Y_p$  global. Outro detalhe importante que vemos nos diagramas da figura (26) é como a pasta varia com a fração de léptons e a temperatura em termos das formas de se calcular o coeficiente de energia de superfície adotadas nesse trabalho. Ao comparar o diagrama *a*) com o diagrama *b*), fica claro que a variação da pasta é maior quando  $Y_L = 0.2$ . O mesmo acontece quando comparamos os diagramas *c*) com *d*) e *e*) com *f*). Em outras palavras, o intervalo de densidade bariônica em que a pasta varia é maior quando  $Y_L = 0.2$ . Em tais diagramas, podemos notar que a temperatura influencia no sentido de aumentar as estruturas da pasta. A medida que a temperatura diminui, a tendência é favorecer o aparecimento de novas estruturas. Por exemplo, no diagrama *e*), para  $T = 7$  MeV, a curva vermelha apresenta três estruturas. No diagrama *c*), para  $T = 5$  MeV, uma estrutura nova surge totalizando quatro estruturas. A mesma ideia pode ser vista ao comparar os diagramas *d*) e *f*): para  $T = 7$  MeV há quatro estruturas e para  $T = 5$  MeV há cinco.

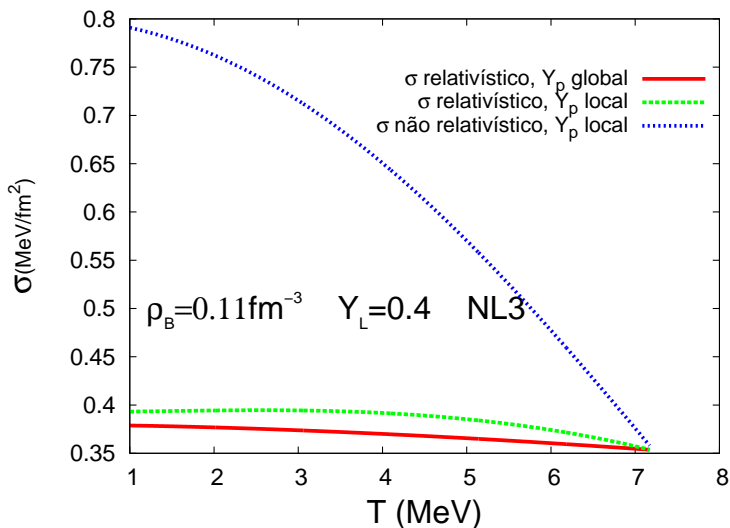


Figura 24: Coeficiente da energia de superfície em função da temperatura nas três diferentes formas de cálculo.

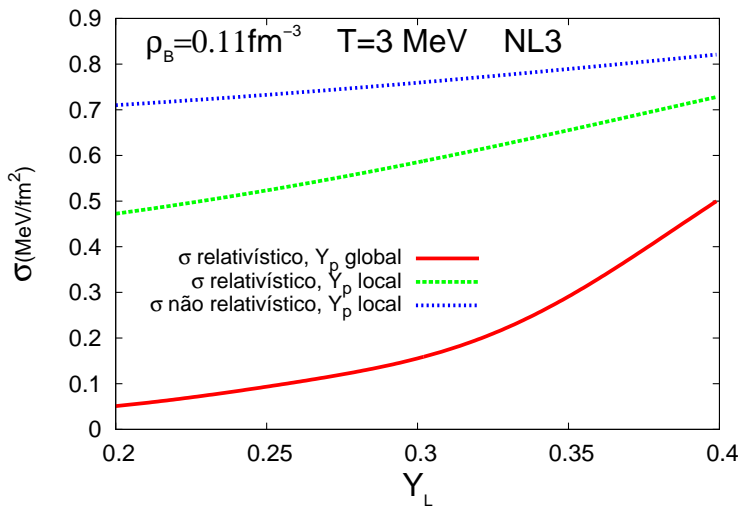


Figura 25: Coeficiente da energia de superfície em função da fração de léptons nas três diferentes formas de cálculo.



Na figura (27) temos dois diagramas de pressão e densidade de energia que indicam o começo e o fim da pasta para  $T = 5$  MeV, fração de léptons  $Y_L = 0.4$  e parametrização NL3. Claramente vemos que o tamanho da pasta é maior com o coeficiente da energia de simetria calculado da terceira forma. Além disso, uma quarta estrutura da pasta aparece, na forma de tubo, antes de dar início a matéria homogênea.

As formações da pasta na primeira e segunda forma de se calcular o coeficiente de energia de simetria são parecidas, sendo que na segunda forma, a estrutura em forma de laje é um pouco maior. Na figura (28) temos a pressão e a densidade de energia como função da densidade bariônica calculadas usando a terceira forma apenas. Na verdade, as curvas de pressão pela densidade bariônica ficam sobrepostas quando usamos as três formas de se calcular  $\sigma$ . O mesmo acontece com a densidade de energia pela densidade bariônica.

Nas figuras (29), (30), (31) e (32) temos a energia livre calculada para diferentes valores de temperatura e fração de léptons. Como podemos ver, a formação da pasta é sempre maior quando adotamos o coeficiente da energia de simetria relativístico com  $Y_p$  global e, também, energeticamente mais favorável. Podemos dizer também que a segunda forma é energeticamente mais favorável que a primeira forma em todos os gráficos.

Em (Avancini et al., 2008) vemos claramente as diferenças no cálculo da pasta ao adotar o método de Thomas-Fermi e o método da coexistência de fases para temperatura nula. Algo interessante a ser notado é que a pasta é sempre maior no método de Thomas-Fermi e, além disso, com uma estrutura extra quando comparamos com o método da coexistência de fases. Mais especificamente, os diagramas de fases da figura (21), extraída do artigo (Avancini et al., 2008), mostram o comportamento da pasta nos diferentes métodos utilizados para temperatura zero. O cálculo da pasta nuclear pelo método da coexistência de fases usando a energia de superfície relativística e fração de prótons global nos dá resultados semelhantes aos resultados obtidos com o método de Thomas-Fermi. Como podemos ver na figura (27), a pasta é maior e com um número maior de estruturas quando usamos a terceira forma da energia de simetria. Assim, podemos dizer que o cálculo da pasta no método de coexistência de fases juntamente com a terceira forma de se calcular o coeficiente de energia de superfície se aproxima dos resultados obtidos ao calcular a pasta no método de Thomas-Fermi.

Como já mencionado, a pasta nuclear prevalece em baixas densidades de tal forma que os bárions interagentes constituintes do gás, mais especificamente falando, os prótons, sofrem influência não desprezível de ambas as forças: nuclear e eletromagnética. O fato é que, nesse caso, a matéria homogênea tem energia livre maior que a matéria não homogênea favorecendo,

assim, a formação da pasta nuclear. Podemos verificar isso a partir das figuras (29), (30), (31) e (32) onde vemos a diferença significativa que existe entre a energia livre da matéria homogênea e matéria não homogênea.

Hoje, acredita-se fortemente na possibilidade da formação da pasta nuclear no interior da crosta de estrelas massivas, estrelas de nêutrons e protoestrelas de nêutrons. A formação da pasta nuclear no interior de tais objetos estelares poderia modificar de forma sensível, por exemplo, o mecanismo que serve de “gatilho” inicial na explosão de supernova, bem como, a fase Kelvin-Helmholtz de protoestrelas de nêutrons. No caso da evolução de protoestrelas de nêutrons, a formação da matéria não homogênea provoca uma mudança considerável na interação dos neutrinos com a matéria e, como consequência, altera o processo de resfriamento e de desleptonização de uma recém nascida estrela de nêutrons. No entanto, não podemos esquecer que a formação da pasta nuclear em estrelas de nêutrons se dá próximo da superfície da estrela, região em que os neutrinos são praticamente transparentes em relação a matéria, ou seja, o livre caminho médio dos neutrinos se torna comparável ao raio da estrela. A partir dos gráficos das figuras (29), (30), (31) e (32) podemos facilmente concluir que a pasta nuclear é energeticamente favorável em baixas temperaturas para frações de léptons próximas a  $Y_L = 0.4$ . A medida que a temperatura aumenta, a ocorrência da matéria não homogênea diminui dando lugar apenas a matéria homogênea. Assim, na simulação da fase Kelvin-Helmholtz de protoestrela de nêutrons, esperamos que o surgimento da matéria não homogênea ocorra logo nos primeiros segundos de sua vida e nas regiões mais externas da estrela, já que a estrela é rica em léptons e, de acordo com os perfis iniciais de temperatura, em geral tomados de simulações de explosão de supernova, fria na superfície.

## 6.8 OPACIDADE DOS NEUTRINOS NA PASTA NUCLEAR

Como já vimos, os segundos iniciais de vida de uma recém nascida estrela de nêutrons são sensíveis a interação dos neutrinos com a matéria. Os coeficientes de difusão das equações de transporte (2.26) e (2.27), que regem a evolução da estrela, guardam toda informação ligada a opacidade dos neutrinos na matéria densa. Como veremos a seguir, os coeficientes de difusão calculados na pasta nuclear sugerem uma diferença sensível no que diz respeito ao processo evolutivo relacionado aos instantes iniciais de uma protoestrela de nêutrons.

No capítulo 4, vimos que a seção de choque relacionada com a interação dos neutrinos depende da massa efetiva dos nucleons e, consequentemente, podemos dizer que os coeficientes de difusão também são dependentes

dessa variável. Para calcular o livre caminho médio dos neutrinos na pasta nuclear surge um problema: a pasta nuclear é formada de duas fases e cada fase tem sua respectiva massa efetiva. De forma simplificada, ao usar a equação de estado da pasta para simular uma evolução estelar, não temos como saber que fase da pasta está presente numa determinada posição radial da estrela. Tudo o que temos são valores médios da pressão, energia, entropia e assim por diante. Da mesma forma, no cálculo do livre caminho médio na pasta nuclear adotamos a seguinte aproximação (Alloy; Menezes, 2011)

$$m_B^* = f m_B^{*I} + (1 - f) m_B^{*II}. \quad (6.26)$$

Com essa aproximação na massa efetiva da pasta nuclear podemos calcular os coeficientes de difusão das equações de transporte definidos nas equações (2.23) e (2.24). Outra possibilidade seria adotar uma aproximação em termos do livre caminho médio dos neutrinos,  $\lambda_\nu = f \lambda_\nu^{*I} + (1 - f) \lambda_\nu^{*II}$ , ou através dos coeficientes de difusão,  $D_n = f D_n^{*I} + (1 - f) D_n^{*II}$ . No entanto, a forma adotada nesse trabalho nos pareceu ser a mais simples. A primeira alternativa nos forçaria a calcular o livre caminho médio em cada uma das fases. A segunda alternativa duplicaria o número de integrais porque seria necessário calcular um coeficiente de difusão para cada uma das duas fases.

A seguir mostraremos os coeficientes de difusão da pasta como função da densidade bariônica. Todas as curvas são calculadas com imposição de neutralidade de carga, equilíbrio beta, parametrização NL3 e com campos calculados na aproximação de campo médio. Adotamos a terceira forma de se calcular o coeficiente da energia de simetria em todos os gráficos porque como vimos anteriormente, nessa forma obtemos a maior pasta possível dentro do que estudamos. Isso nos dá uma maior diferença entre a matéria homogênea e a matéria não homogênea.

Mostraremos agora o comportamento dos coeficientes de difusão em função da densidade bariônica. Como era de se esperar, os coeficientes de difusão definidos nas equações (2.23) e (2.24) também estão intimamente ligados a equação de estado e, como já mencionado, são funções da temperatura, da densidade bariônica e do potencial químico dos neutrinos. Conforme as figuras (33), (34), (35), (36), (37) e (38) vemos a forte dependência existente entre os coeficientes de difusão e a equação de estado. Podemos dizer com isso que a evolução é sensível a presença de outras partículas na estrela, bem como a existência da pasta na crosta da estrela deve afetar o processo de resfriamento e o processo de desleptonização. Em todas as figuras, os coeficientes de difusão obtidos com a matéria homogênea e com a macarronada nuclear se cruzam num ponto da densidade bariônica além do intervalo de densidade mostrado. Nosso código interrompe os cálculos quando a matéria

homogênea torna-se energeticamente favorável. Em outras palavras, podemos dizer que os coeficientes, de maneira geral, apresentam uma descontinuidade na transição da matéria homogênea para matéria não homogênea. O mesmo comportamento é visto em outras variáveis termodinâmicas no ponto de transição, como a pressão, por exemplo.

De acordo com as figuras (33), (34), (35), (36), (37) e (38) vemos que as estruturas da macarronada nuclear presentes para fração de léptons  $Y_L = 0.4$  são: almôndegas, espaguete, lasanha e tubo. Para fração de léptons  $Y_L = 0.2$ , somente as três primeiras estruturas da pasta nuclear aparecem. Podemos concluir que a presença da matéria não homogênea diminui com a fração de léptons. Os resultados apresentados nas figuras mencionadas são para  $Y_L = 0.2$  e para  $Y_L = 0.4$ . Tais valores de fração de léptons foram escolhidos porque é o intervalo de variação da fração de léptons na fase Kelvin-Helmholtz, como podemos ver na figura (16). Outro detalhe importante é a diferença que surge entre os gráficos dos coeficientes de difusão da matéria homogênea e da matéria não homogênea. Na matéria homogênea, os coeficientes variam suavemente com a densidade bariônica. Por outro lado, os coeficientes da matéria não homogênea apresentam picos em densidades que ficam entre  $0.01$  e  $0.015 \text{ fm}^{-3}$ . Uma das causas desses picos está ligada ao algoritmo de interpolação utilizado. Acreditamos que melhorar o tratamento dado no cálculo do livre caminho médio dos neutrinos com a matéria pode eliminar por completo a existência desses picos. Isso seria bastante importante porque facilitaria solucionar as equações de transporte dadas pelas equações (2.26) e (2.27).

Os gráficos das figuras (33) e (34) nos mostram o comportamento do coeficiente de difusão  $D_2$  em função da densidade bariônica para diferentes valores de temperatura e fração de léptons. A forma da curva varia pouco com a variação da fração de léptons como ilustra a figura (33), sendo que aparece uma estrutura a mais na pasta quando  $Y_L = 0.4$ . No entanto, quando a temperatura varia de 3 para 5 MeV vemos uma alteração mais pronunciada. À medida que a temperatura aumenta,  $D_2$  diminui.

As figuras (35) e (36) ilustram o comportamento dos coeficientes de difusão  $D_3$ . Nesse caso, podemos ver que a variação da fração de léptons gera uma alteração significativa na forma funcional de  $D_3$ . Para ambas as temperaturas 3 e 5 MeV, o aumento da fração de léptons sugere um aumento na fração de léptons. Além disso, em  $Y_L = 0.4$  há uma estrutura a mais na pasta quando comparada a  $Y_L = 0.2$ . No caso da temperatura,  $D_3$  tem comportamento de forma a diminuir levemente com o aumento da temperatura para densidades acima de  $0.1 \rho_0$ . Para densidades abaixo de  $0.1 \rho_0$ ,  $D_3$  aumenta com a temperatura.

O coeficiente de difusão  $D_4$  tem seu comportamento representado nos

gráficos das figuras (37) e (38). Claramente vemos um aumento dos valores de  $D_4$  com o aumento da fração de léptons acompanhado de uma estrutura adicional para  $Y_L = 0.4$ . O comportamento de  $D_4$  com a temperatura é menos pronunciado e, como podemos ver, há um leve aumento de  $D_4$  com a temperatura em todo intervalo de densidade.

Na figura (39) temos os coeficientes de difusão a)  $D_2$ , b)  $D_3$  e c)  $D_4$  na temperatura de 5 MeV e frações de léptons 0.2 e 0.4. Nesses gráficos fica mais claro que  $D_3$  e  $D_4$  diminuem a medida que a estrela desleptoniza. Valores menores para os coeficientes de difusão configuram as equações de transporte de forma a diminuir a taxa de variação das variáveis termodinâmicas. Em outras palavras, a medida que os coeficientes de difusão diminuem, o processo de desleptonização e resfriamento torna-se mais lento. O coeficiente de difusão  $D_2$  no intervalo de densidade que fica aproximadamente entre  $0.1\rho_0$  e  $0.35\rho_0$ , é maior quando  $Y_L = 0.2$ . No entanto,  $D_2$  está associado à variação do parâmetro de degenerescência dos neutrinos, ou seja, na equação (2.26)  $D_2$  aparece junto a uma derivada do parâmetro de degenerescência dos neutrinos em relação ao raio da estrela. Quando  $Y_L = 0.2$ , o parâmetro de degenerescência dos neutrinos é aproximadamente constante no interior da estrela como mostra a curva do gráfico superior da figura (15) e, portanto, a sua variação em relação ao raio é aproximadamente nula. Assim sendo, em frações de léptons próximas a 0.2, o coeficiente de difusão  $D_2$  não irá afetar a evolução temporal de uma estrela de nêutrons.

Ao analisar os gráficos dos coeficientes de difusão, podemos dizer que a presença da pasta nuclear diminui de forma considerável o livre caminho médio dos neutrinos. Isso porque os coeficientes de difusão estão ligados a uma média do livre caminho médio em todo o espectro de energia dos neutrinos. Assim sendo, a evolução de uma protoestrela de nêutrons com pasta na crosta é afetada de forma a retardar temporalmente os processos de desleptonização. Podemos concluir isso porque caso não haja a pasta na crosta, ou seja, caso a crosta seja formada apenas de matéria homogênea, o livre caminho médio dos neutrinos será maior fazendo com que escapem mais rápido da estrela. No entanto, é bastante provável que a diferença temporal no processo de desleptonização não seja significativa porque a extensão da pasta na crosta da estrela é pequena. Para precisar exatamente a diferença temporal precisa-se simular a evolução resolvendo as equações de transporte (2.26) e (2.27).

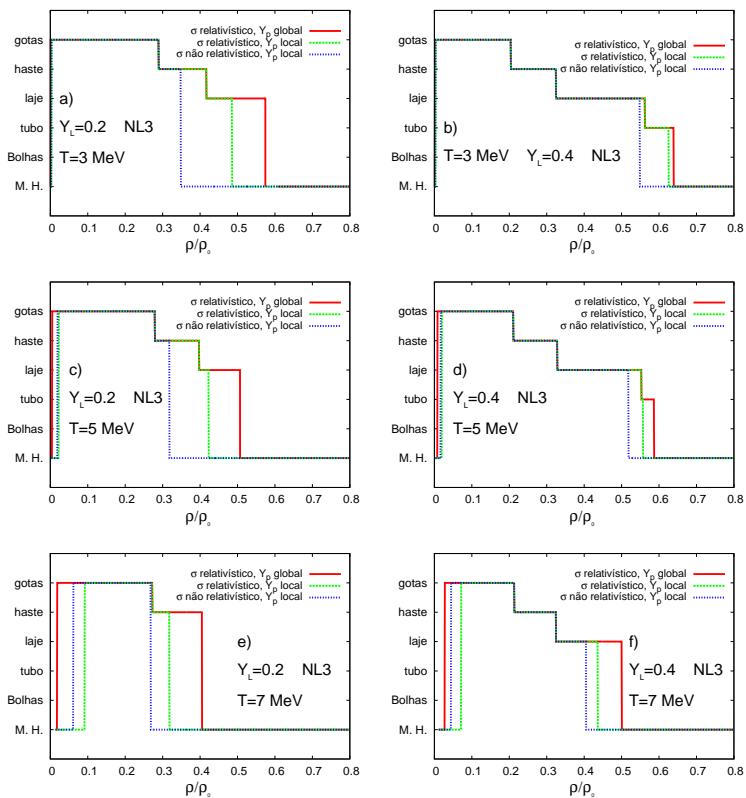


Figura 26: Diagrama de fases em função da densidade bariônica para as três diferentes formas de calcular o coeficiente da energia de simetria.

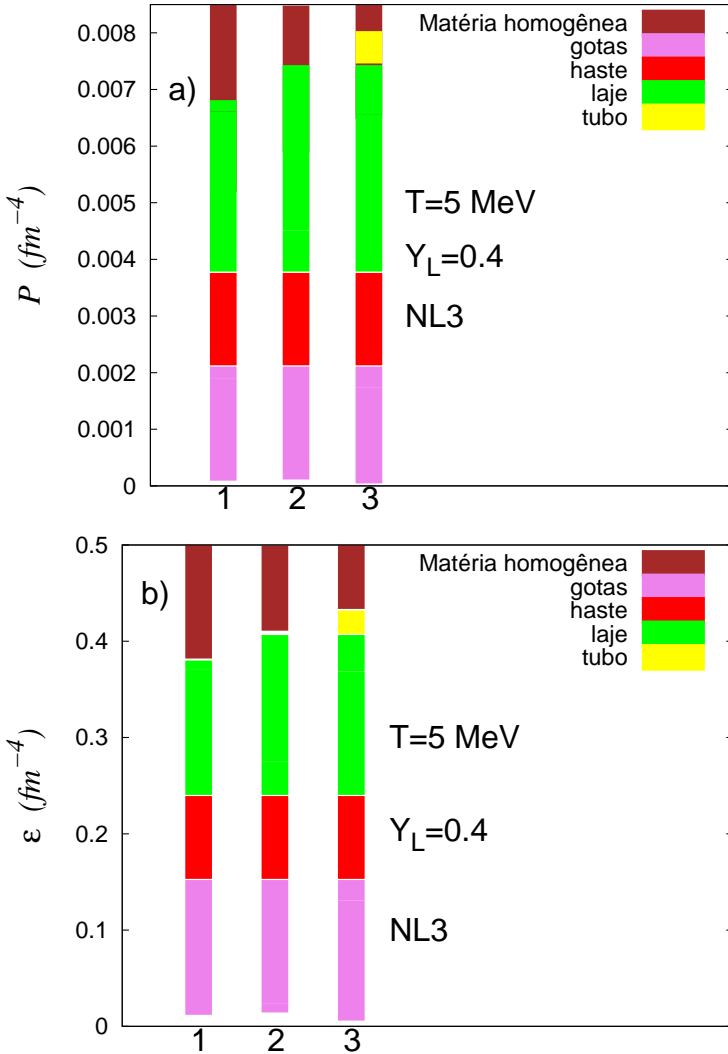


Figura 27: (a) Pressão e (b) energia pelas respectivas estruturas da pasta nuclear para  $T = 5$  MeV e  $Y_L = 0.4$  com parametrização NL3. A coluna 1 é obtida com coeficiente de energia de simetria não relativístico e  $Y_p$  da fase mais densa. A coluna 2 é obtida com coeficiente de energia de simetria relativístico e  $Y_p$  local. A coluna 3 é obtida com coeficiente de energia de simetria relativístico e  $Y_p$  global.

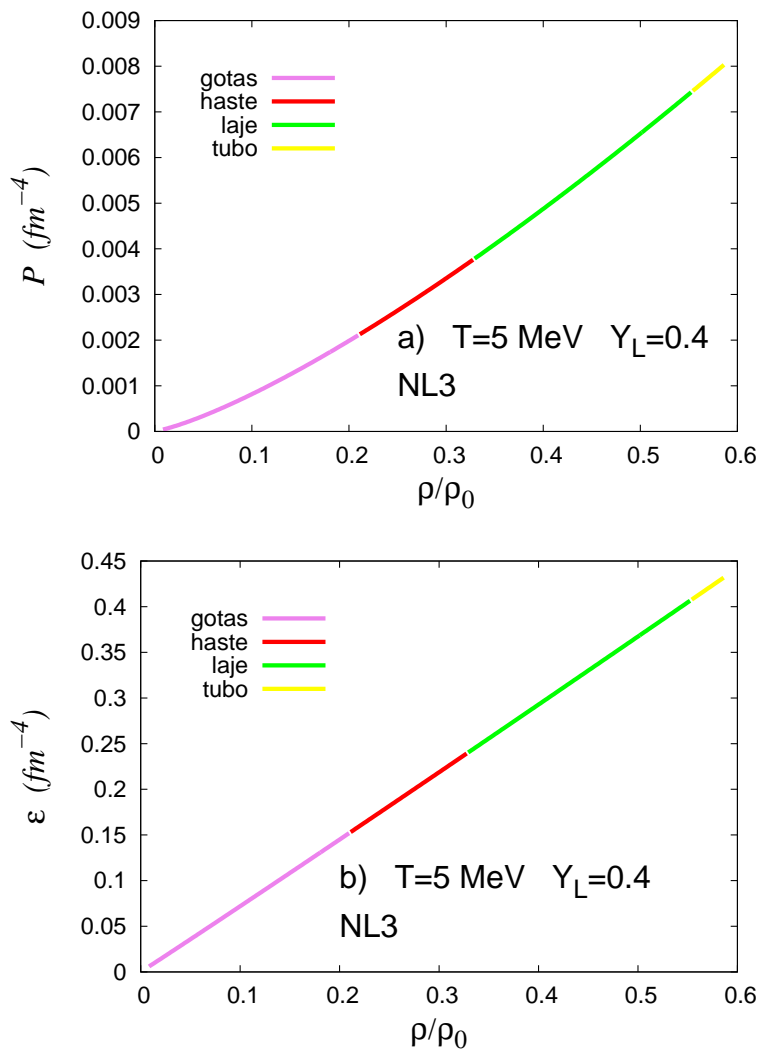


Figura 28: (a) Pressão por  $\rho/\rho_0$  densidade bariônica para  $T = 5$  MeV e  $Y_L = 0.4$  com parametrização NL3. (b) Densidade de energia total por  $\rho/\rho_0$ . Em ambos os gráficos o coeficiente de energia é relativístico com  $Y_p$  global.



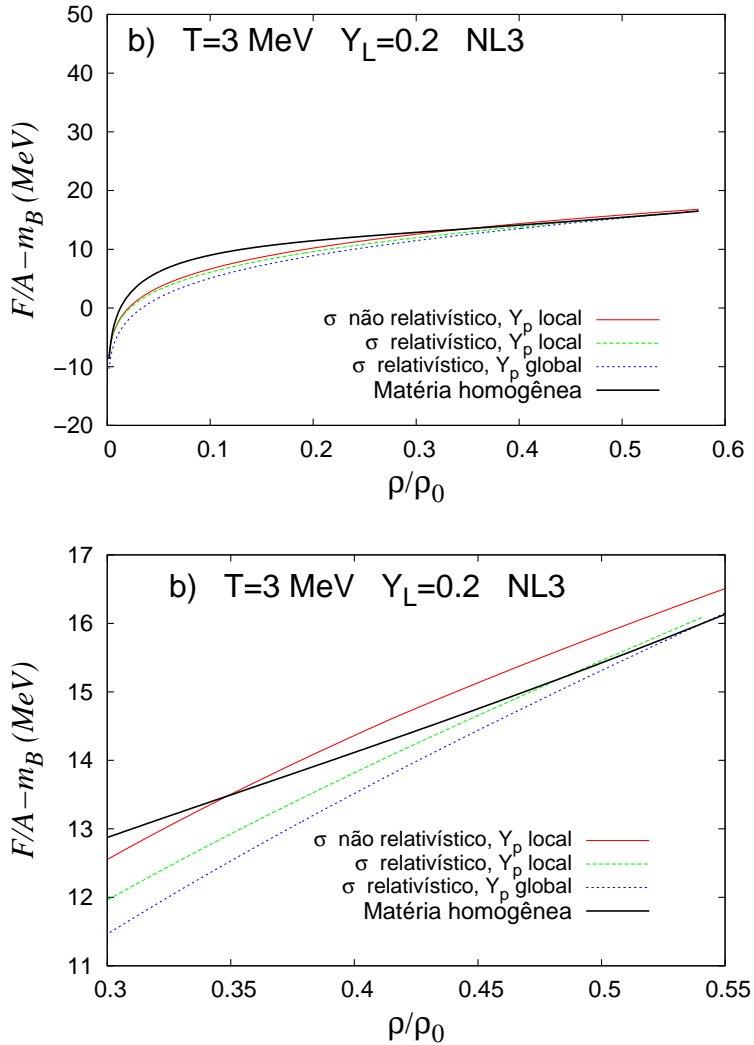


Figura 29: Energia livre por  $\rho/rho_0$  para  $T = 3$  MeV e fração de léptons  $Y_L = 0.2$  com parametrização NL3.

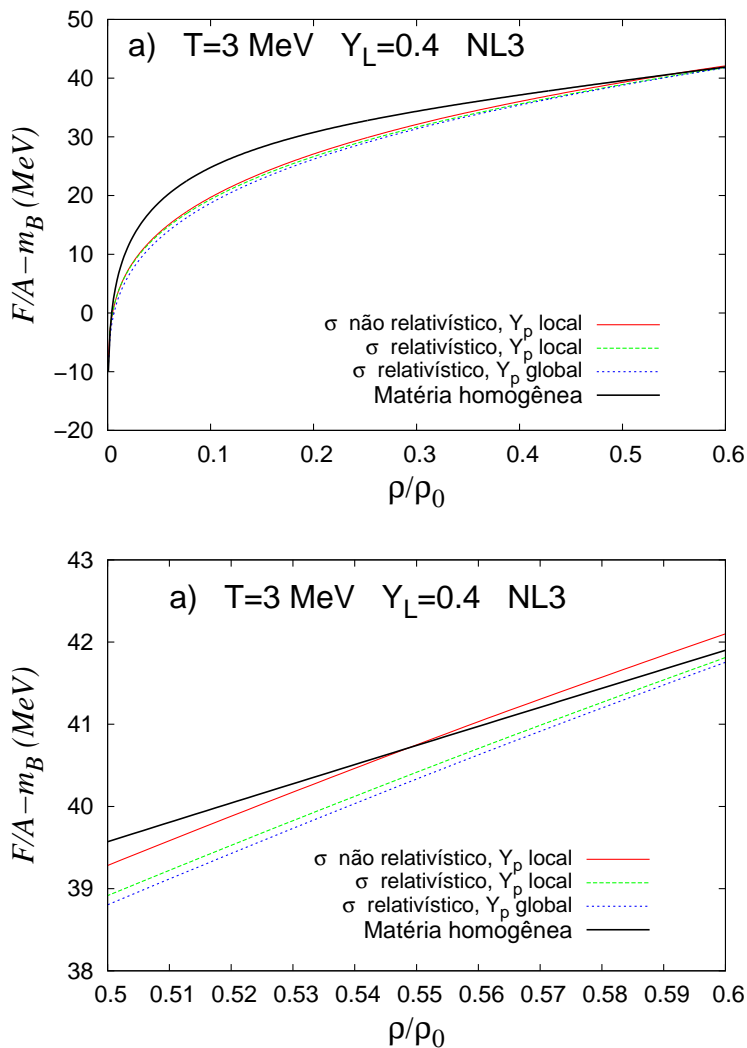


Figura 30: Energia livre por  $\rho/\rho_0$  para  $T = 3$  MeV e fração de léptons  $Y_L = 0.4$  com parametrização NL3.

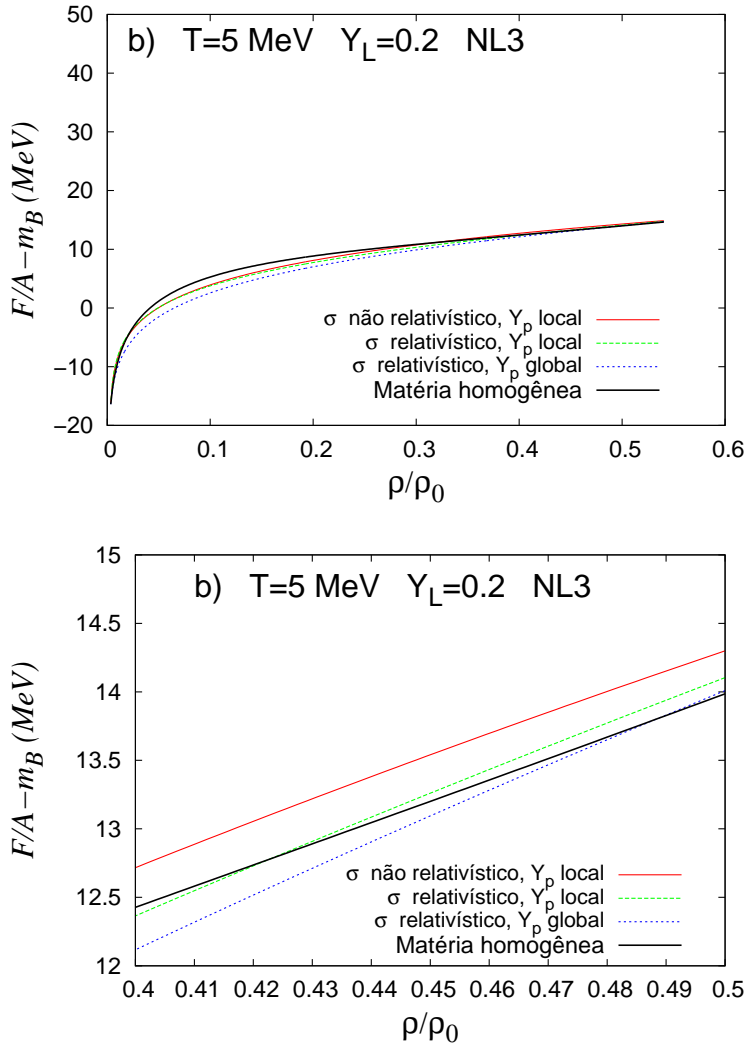


Figura 31: Energia livre por  $\rho/\rho_0$  para  $T = 5$  MeV e fração de léptons  $Y_L = 0.2$  com parametrização NL3.

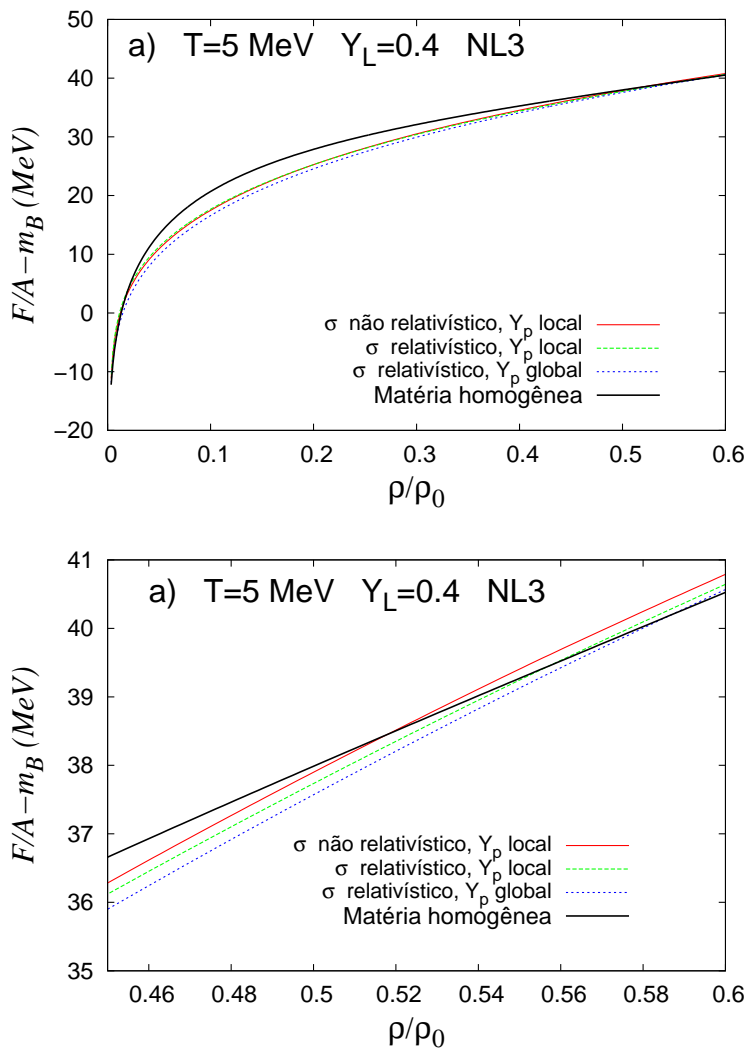


Figura 32: Energia livre por  $\rho/\rho_0$  para  $T = 5$  MeV e fração de léptons  $Y_L = 0.4$  com parametrização NL3.

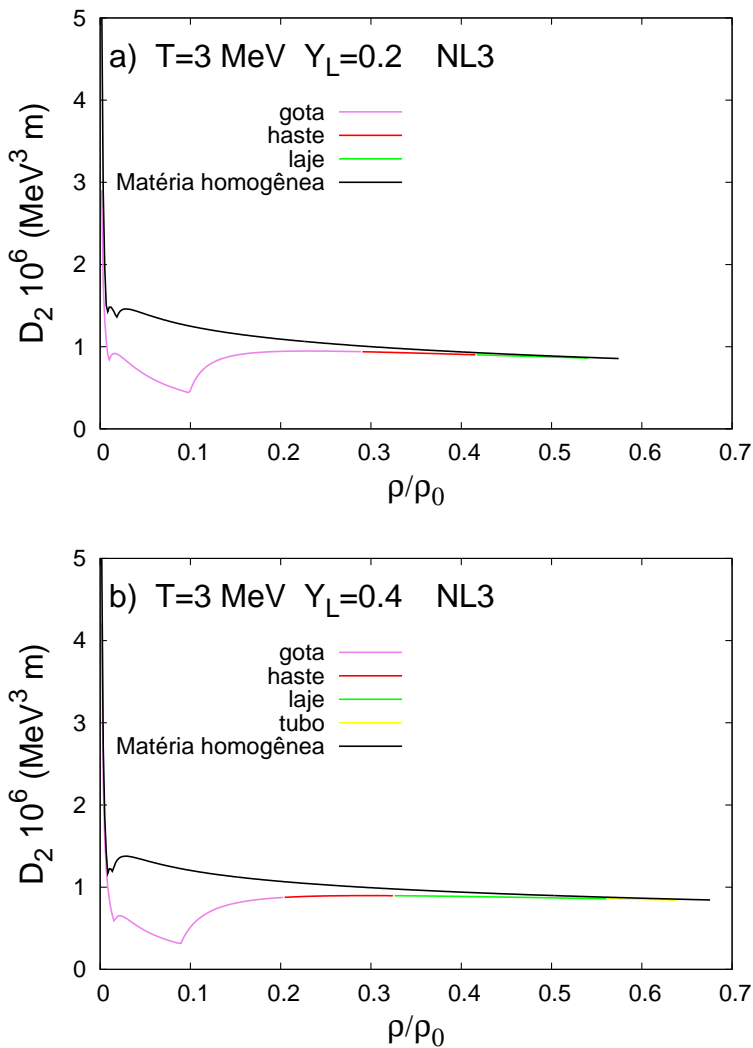


Figura 33: Coeficiente de difusão  $D_2$  para  $T = 3 \text{ MeV}$  e fração de léptons: (a)  $Y_L = 0.2$  e (b)  $Y_L = 0.4$ .

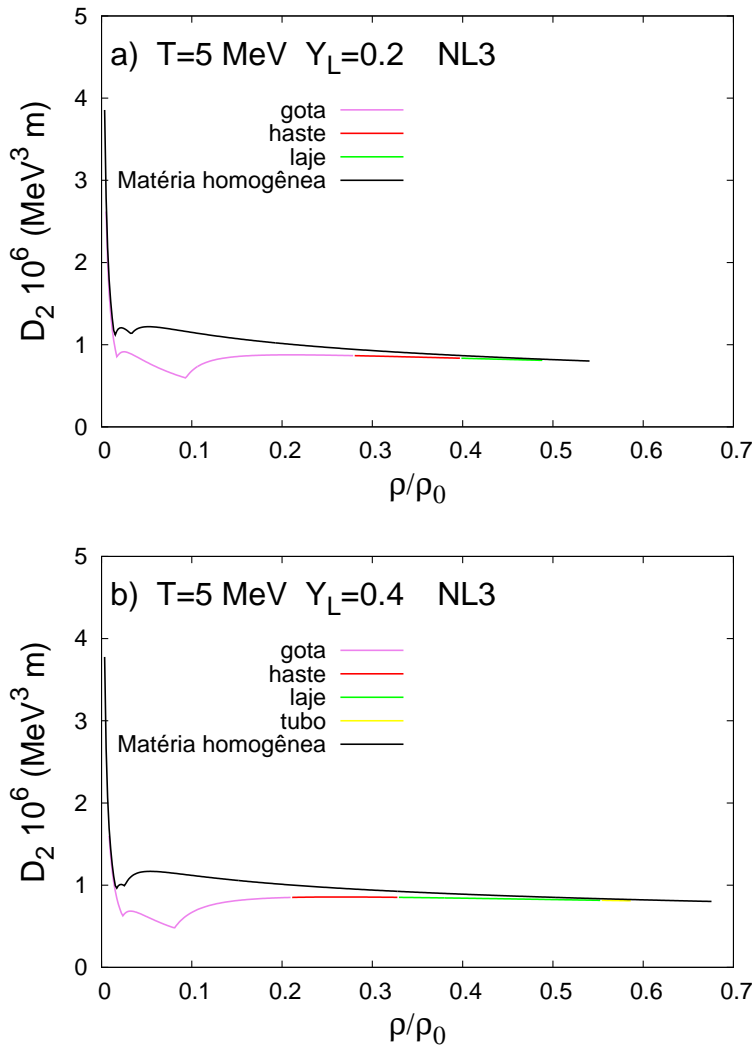


Figura 34: Coeficiente de difusão  $D_2$  para  $T = 5 \text{ MeV}$  e fração de léptons: (a)  $Y_L = 0.2$  e (b)  $Y_L = 0.4$ .

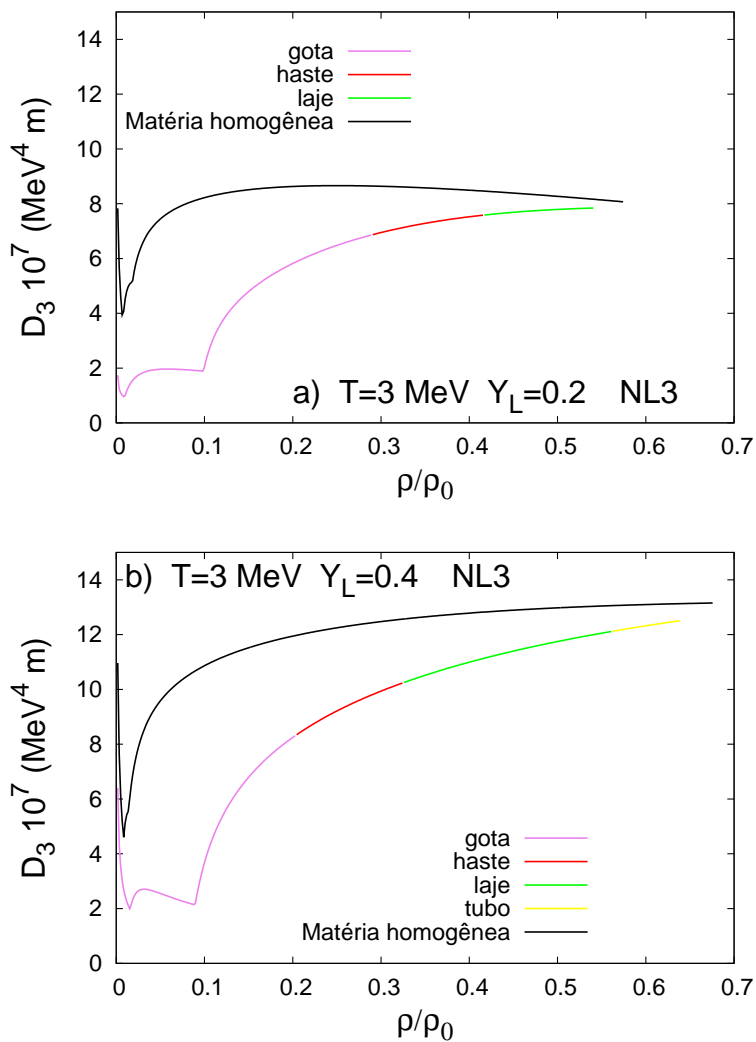


Figura 35: Coeficiente de difusão  $D_3$  para  $T = 3 \text{ MeV}$  e fração de léptons: (a)  $Y_L = 0.2$  e (b)  $Y_L = 0.4$ .

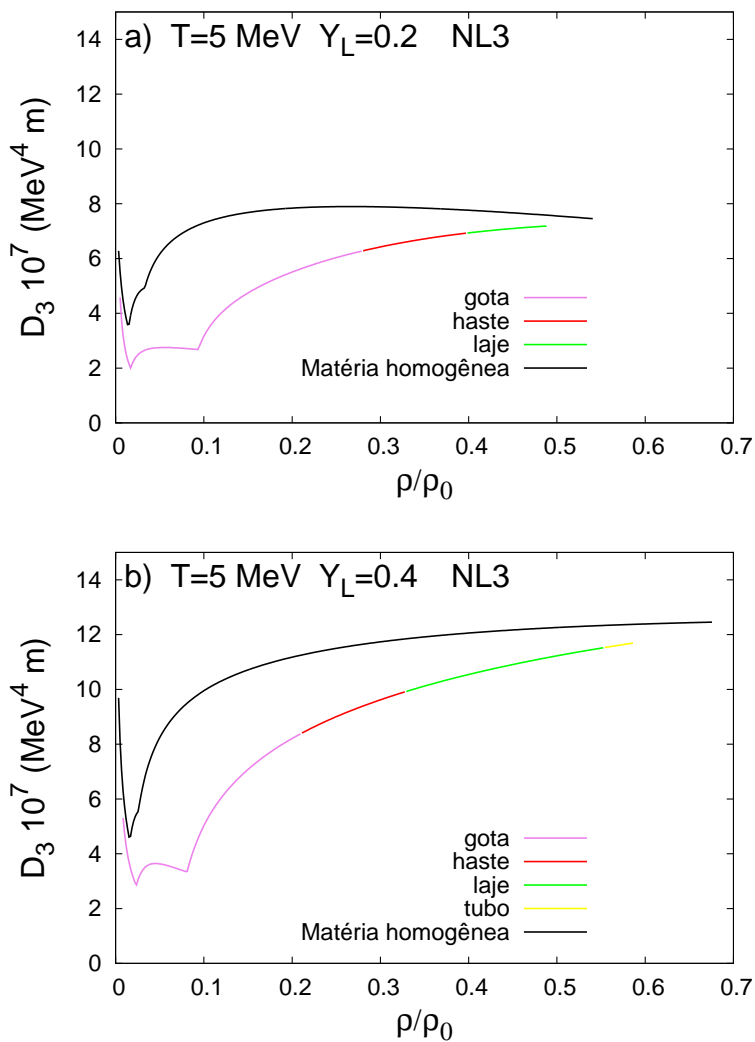


Figura 36: Coeficiente de difusão  $D_3$  para  $T = 5 \text{ MeV}$  e fração de léptons: (a)  $Y_L = 0.2$  e (b)  $Y_L = 0.4$ .



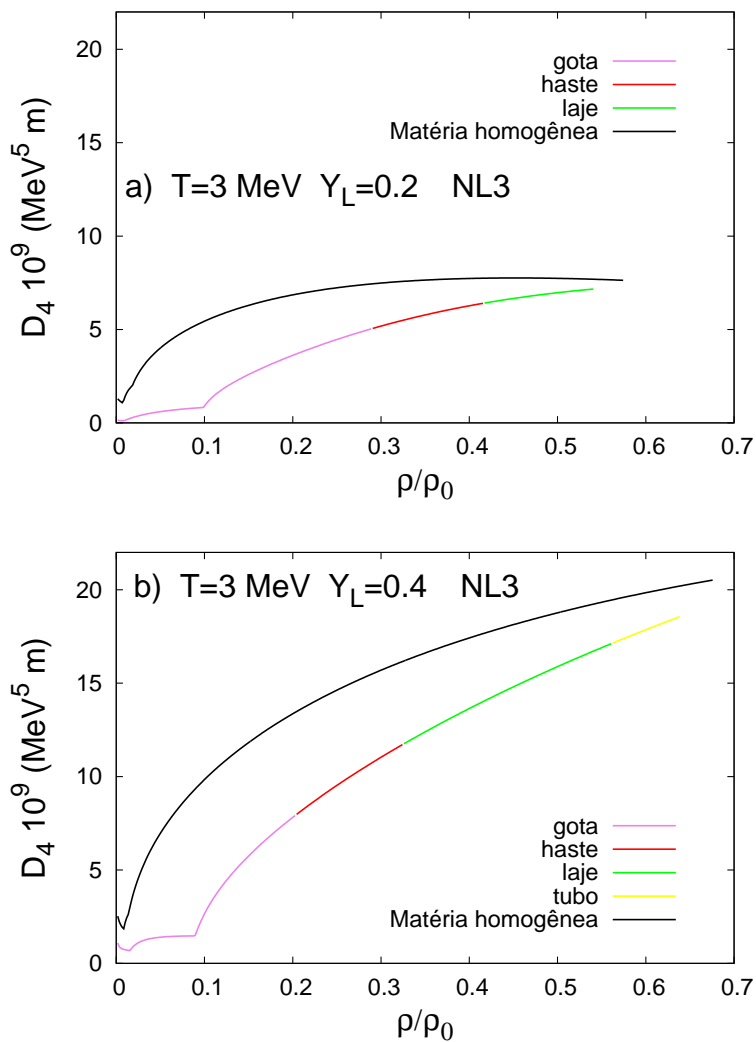


Figura 37: Coeficiente de difusão  $D_4$  para  $T = 3 \text{ MeV}$  e fração de léptons: (a)  $Y_L = 0.2$  e (b)  $Y_L = 0.4$ .

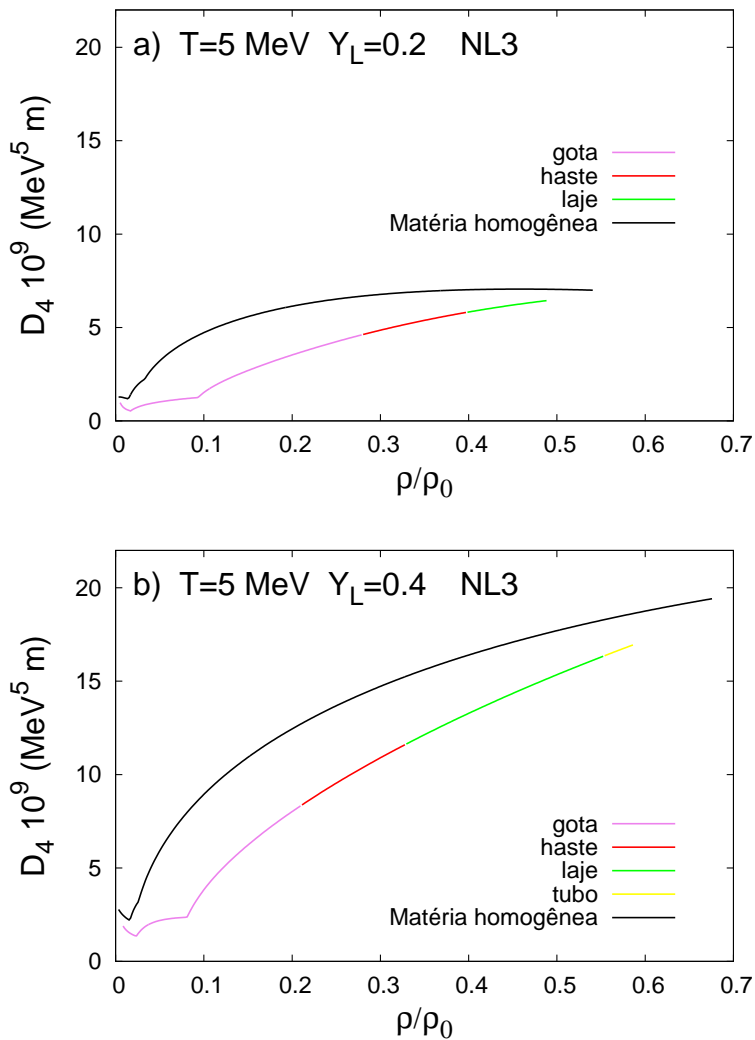


Figura 38: Coeficiente de difusão  $D_4$  para  $T = 5 \text{ MeV}$  e fração de léptons: (a)  $Y_L = 0.2$  e (b)  $Y_L = 0.4$ .

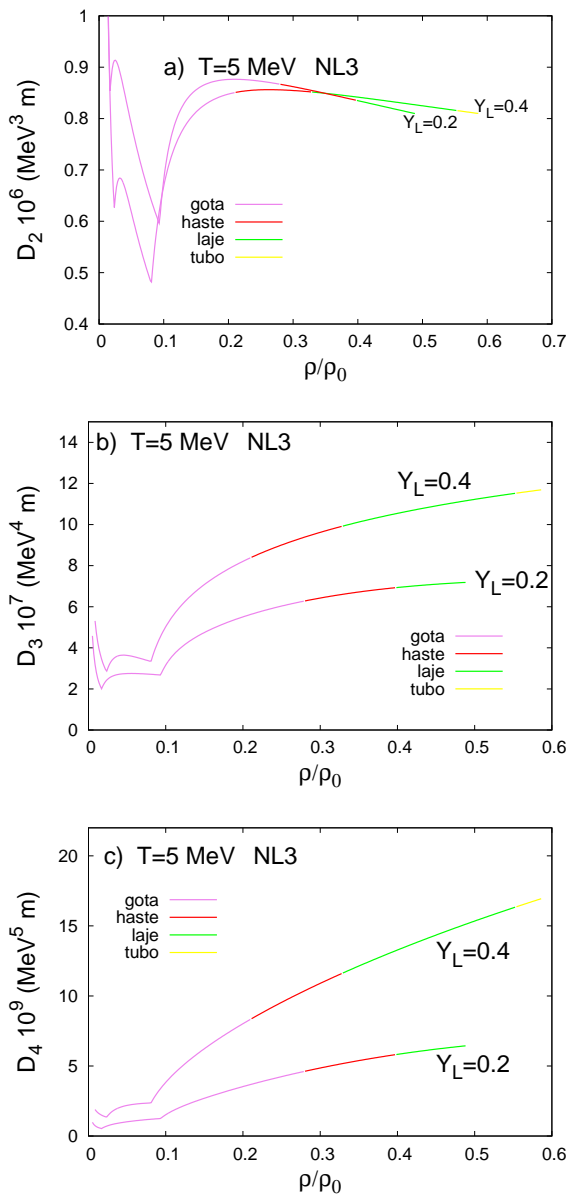


Figura 39: Coeficientes de difusão a)  $D_2$ , b)  $D_3$  e c)  $D_4$  para  $T = 5$  MeV e fração de léptons  $Y_L = 0.2$  e  $Y_L = 0.4$ .



## 7 CONCLUSÃO

Neste trabalho buscamos compreender melhor como se dá o processo evolutivo de uma proto estrela de nêutrons, levando-se em consideração a existência da pasta na constituição física desta. O colapso de uma estrela massiva pode dar origem a uma proto estrela de nêutrons quando o final de sua, os processos de fusão nuclear cessam e nada mais pode conter a ação da gravidade. Nesse momento, o núcleo da estrela colapsa dando origem a um objeto compacto. Tal objeto pode ser uma proto estrela de nêutrons, um objeto rico em léptons (elétrons e neutrinos) e com temperatura central de aproximadamente 50 MeV. Inicialmente, os neutrinos estão aprisionados no interior da estrela porque o livre caminho médio é muito menor que o raio da estrela. No processo de desleptonização que dura cerca de 10 s, podemos dizer que o livre caminho médio já é da ordem do raio da estrela. Até esse momento o processo de desleptonização é mais pronunciado que o processo de resfriamento. Em seguida, temos o processo de resfriamento da estrela que geralmente não passa de 40 s. Nessa fase, a estrela de nêutrons pode colapsar formando um buraco negro. Isso pode ser evidenciado no interrompimento abrupto da emissão de neutrinos. Essas duas fases (desleptonização e resfriamento) obedecem às equação de transporte (2.26) e (2.27) derivadas no capítulo 2 deste trabalho. O método numérico adotado nesse trabalho na resolução das equações de transporte consiste em dividir a dimensão espacial, no caso o raio da estrela, em  $N$  pontos e cada ponto está associado a uma equação diferencial ordinária na variável temporal. A escala adotada nesse trabalho é linear, ou seja, a distância entre um ponto e outro é constante. No entanto, pode-se adotar outra escala, como a logarítmica, favorecendo uma quantidade maior de pontos na superfície da estrela. Para resolver essas equações, precisamos de dois ingredientes básicos que servirão como entrada: a equação de estado e o livre caminho médio dos neutrinos com a matéria hadrônica.

A equação de estado utilizada neste trabalho, discutida no capítulo 3, foi derivada do modelo não linear de Walecka na aproximação de campo médio. Consideramos apenas a existência de nêutrons, prótons, elétrons e neutrinos do elétron como os constituintes principais da estrela. Os léptons foram sujeitos às condições de equilíbrio beta e neutralidade de carga. A parametrização usada foi a NL3. As equações de movimento na aproximação de campo médio recaem num sistema não linear de equações que foi resolvido com a utilização do método de Newton.

A interação dos neutrinos com a matéria, tratada no capítulo 4 deste trabalho, foi calculada da mesma forma que no artigo (Burrows; Lattimer,

1986). A seção de choque dos neutrinos foi tomada em dois diferentes regimes de degenerescência e interpolada entre esses extremos. O algoritmo de interpolação usado foi o mesmo adotado no artigo (Keil; Janka, 1995). A seção de choque dos neutrinos depende da equação de estado utilizada, pois são funções dependentes da temperatura, densidade bariônica e das frações de partículas. A seção de choque nos permite calcular os coeficientes de difusão dadas pelas equações (2.23) e (2.24). Os coeficientes carregam toda informação relacionada a interação dos neutrinos com a matéria e, obviamente, são sensíveis à forma da equação de estado adotada. Na figura (13), apresentamos os coeficientes de difusão  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$  para diferentes valores de temperatura e frações de léptons.

No capítulo 5, apresentamos a simulação de uma proto estrela de nêutrons de massa bariônica  $1.35 M_{\odot}$ . Podemos ver que todo o processo de desleptonização e resfriamento não passa de aproximadamente 50 s. A simulação nos permite compreender melhor como se dá a evolução temporal de diversas variáveis termodinâmicas como temperatura, entropia, potenciais químicos e dos coeficientes de difusão. Como podemos ver nos gráficos das figuras (15) e (16), as curvas azuis representam o processo de desleptonização da estrela que tem duração aproximada de 10 s. O processo de resfriamento, é representado pelas curvas vermelhas. Nesse capítulo tínhamos como objetivo apenas apresentar os resultados do código numérico que nos permite simular a evolução temporal da estrela. Como podemos ver nos resultados, ficamos presos a certos valores de temperatura e densidade devido às limitações da equação de estado utilizada.

No capítulo 6 estudamos a pasta nuclear. A pasta nuclear sugere a formação de certas estruturas complexas que aparecem devido a competição entre a força nuclear e a força eletromagnética. A formação da pasta se dá em densidades baixas tal que a distância média dos prótons é grande o suficiente para que a força elétrica seja da ordem da força nuclear. As formas complexas que surgem na fase não homogênea da matéria nuclear tem densidade bariônica diferente do meio em que se encontram. Essa fase da matéria obedece às condições de Gibbs que são equilíbrio mecânico, térmico e químico. Assim, há a necessidade de se calcular duas equações de estado, uma equação de estado para a estrutura e outra equação de estado para o meio em que a estrutura se encontra e, além disso, as variáveis termodinâmicas de ambas equações de estado devem satisfazer as condições de Gibbs. O modelo utilizado nessa parte do trabalho também foi o método não linear de Walecka na parametrização NL3. Equilíbrio beta e neutralidade de carga foram impostos. A energia de superfície foi calculada de três formas diferentes. A primeira forma adotada foi através de uma parametrização obtida das aproximações de Thomas-Fermi e Hartree-Fock com uma força de Skyrme. As outras duas

formas foram parametrizar o coeficiente da energia de superfície em função da temperatura e da fração de prótons por meio do método de Thomas-Fermi usando modelos relativísticos. A diferença entre a segunda e a terceira forma da energia de superfície está na fração de prótons usada. Na segunda usamos a fração de prótons local e na terceira a fração de prótons global. Notamos que a terceira forma mais se aproxima dos resultados obtidos pelo método de Thomas-Fermi. Como podemos ver, a pasta é maior e possui mais estruturas. Calculamos os coeficientes de difusão  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$  na pasta nuclear para entender se de alguma forma essas estruturas alteram a difusão dos neutrinos nos instantes iniciais de vida de uma estrela de nêutrons. Como podemos ver nas figuras (33), (34), (35), (36), (37) e (38) temos os comportamentos de todos os coeficientes de difusão para diferentes valores de temperatura e fração de léptons. As curvas coloridas representam os coeficientes de difusão na matéria não homogênea e as curvas escuras na matéria homogênea. Como podemos ver a diferença entre os coeficientes de difusão da matéria homogênea e a matéria não homogênea é bastante significativa. Isso nos faz concluir que os processos de desleptonização e resfriamento da estrela nos instantes iniciais podem ser consideravelmente diferentes quando a pasta se faz presente na crosta de estrela. As diferenças referidas aqui estão relacionadas com o tempo que o processo de evolução leva para acontecer.

Como perspectivas futuras, temos como principais objetivos:

- Simular a evolução da fase Kelvin-Helmholtz levando-se em consideração os efeitos do campo magnético.
- Incluir a rotação da estrela.
- Aprimorar o cálculo da seção de choque dos neutrinos na fase da pasta nuclear, ou seja, fazer o cálculo para qualquer regime de degenerescência, pois o trabalho (Pons et al., 1999) mostra que há diferenças bastante significativas no que se refere ao tratamento usado no cálculo da seção de choque dos neutrinos.
- Compreender melhor como se dá a interação dos neutrinos na fase não homogênea da matéria, com o objetivo de obter um resultado mais realista em nossas simulações. Simular a fase Kelvin-Helmholtz com outras parametrizações e comparar as diferenças obtidas.





## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alloy, M. D.; Menezes, D. P. Nuclear “pasta phase” and its consequences on neutrino opacities. *Phys. Rev. C*, v. 83, n. 3, p. 035803–+, mar. 2011.
- Avancini, S. S. et al.  $\alpha$  particles and the “pasta” phase in nuclear matter. *Phys. Rev. C*, v. 82, n. 2, p. 025808–+, ago. 2010.
- Avancini, S. S. et al. Warm and cold pasta phase in relativistic mean field theory. *Phys. Rev. C*, v. 78, n. 1, p. 015802–+, jul. 2008.
- Baade, W.; Zwicky, F. Cosmic Rays from Super-novae. *Proceedings of the National Academy of Science*, v. 20, p. 259–263, 1934.
- Baumgarte, T. W. et al. Delayed Collapse of Hot Neutron Stars to Black Holes via Hadronic Phase Transitions. *ApJ*, v. 468, p. 823–+, set. 1996.
- Baym, G. Neutron stars: the first fifty years. In: Schofield, P. (Ed.). *The Neutron and its Applications, 1982*. [S.l.: s.n.], 1982. p. 45–50.
- Baym, G.; Lamb, F. K. Neutron Stars. *ArXiv Physics e-prints*, mar. 2005.
- Bludman, S. A.; van Riper, K. A. Diffusion approximation to neutrino transport in dense matter. *ApJ*, v. 224, p. 631–642, set. 1978.
- Boguta, J.; Bodmer, A. R. Relativistic calculation of nuclear matter and the nuclear surface. *Nuclear Physics A*, v. 292, p. 413–428, dez. 1977.
- Burrows, A. Protoneutron star formation. *Proceedings of the Astronomical Society of Australia*, v. 7, p. 371–381, 1988.
- Burrows, A. Supernova neutrinos. *ApJ*, v. 334, p. 891–908, nov. 1988.
- Burrows, A. Neutrinos from supernova explosions. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, v. 40, p. 181–212, 1990.
- Burrows, A.; Lattimer, J. M. The birth of neutron stars. *ApJ*, v. 307, p. 178–196, ago. 1986.
- Camenzind, M. *Compact objects in astrophysics : white dwarfs, neutron stars, and black holes*. [S.l.: s.n.], 2007.
- Cameron, A. G. Neutron Star Models. *apj*, v. 130, p. 884–+, nov. 1959.

- Chiu, H.-Y. Supernovae, neutrinos, and neutron stars. *Annals of Physics*, v. 26, p. 364–410, fev. 1964.
- Chiu, H.-Y.; Salpeter, E. E. Surface X-Ray Emission from Neutron Stars. *Physical Review Letters*, v. 12, p. 413–415, abr. 1964.
- Chiu, H.-Y.; Stabler, R. C. Emission of Photoneutrinos and Pair Annihilation Neutrinos from Stars. *Physical Review*, v. 122, p. 1317–1322, maio 1961.
- Glendenning, N. K. (Ed.). *Compact stars : nuclear physics, particle physics, and general relativity*. [S.l.: s.n.], 2000.
- Goodwin, B. T.; Pethick, C. J. Transport properties of degenerate neutrinos in dense matter. *ApJ*, v. 253, p. 816–838, fev. 1982.
- Griffiths, D. *Introduction to Elementary Particles*. [S.l.: s.n.], 1987.
- Hamdi, S.; Schiesser, E. W.; Griffiths, G. W. Method of lines. *Scholarpedia*, 2007.
- Hansel, P.; Potekhin, A. Y.; Yakovlev, D. G. (Ed.). *Neutron Stars I : Equation of State and Structure*, v. 326 de *Astrophysics and Space Science Library*, (Astrophysics and Space Science Library, v. 326). [S.l.: s.n.], 2007.
- Hewish, A. et al. Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source. *Nature*, v. 217, p. 709–+, fev. 1968.
- Hirata, K. et al. Observation of a neutrino burst from the supernova SN1987A. *Physical Review Letters*, v. 58, p. 1490–1493, abr. 1987.
- Ivanenko, D.; Kurdgelaidze, D. F. Remarks on quark stars. *Nuovo Cimento Lettere*, v. 2, p. 13–16, 1969.
- Ivanenko, D. D.; Kurdgelaidze, D. F. Hypothesis concerning quark stars. *Astrophysics*, v. 1, p. 251–252, out. 1965.
- Iwamoto, N. *Neutrino processes in dense matter*. Tese (Doutorado) — AA(Illinois Univ., Urbana-Champaign.), 1981.
- Janka, H.-T. et al. Theory of core-collapse supernovae. *Phys. Rep.*, v. 442, p. 38–74, abr. 2007.
- Keil, W.; Janka, H.-T. Hadronic phase transitions at supranuclear densities and the delayed collapse of newly formed neutron stars. *A&A*, v. 296, p. 145–+, abr. 1995.

- Lalazissis, G. A.; König, J.; Ring, P. New parametrization for the Lagrangian density of relativistic mean field theory. *Phys. Rev. C*, v. 55, p. 540–543, jan. 1997.
- Lattimer, J. M. Neutron stars and the dense matter equation of state. *Ap&SS*, p. 324–+, nov. 2010.
- Lattimer, J. M.; Prakash, M. The Physics of Neutron Stars. *Science*, v. 304, p. 536–542, abr. 2004.
- Lattimer, J. M.; Prakash, M. Neutron star observations: Prognosis for equation of state constraints. *Phys. Rep.*, v. 442, p. 109–165, abr. 2007.
- Lindquist, R. W. Relativistic transport theory. *Annals of Physics*, v. 37, p. 487–518, maio 1966.
- Mahmoud, H. M.; Konopinski, E. J. The Evidence of the Once-Forbidden Spectra for the Law of  $\beta$ -Decay. *Physical Review*, v. 88, p. 1266–1275, dez. 1952.
- Marston, P. L. Theoretical Mechanics of Particles and Continua, by Alexander L. Fetter and John Dirk Walecka. *Acoustical Society of America Journal*, v. 71, p. 774–775, mar. 1982.
- Maruyama, T. et al. Pasta structures in compact stars. *ArXiv Nuclear Theory e-prints*, maio 2006.
- Menezes, D. P.; Providência, C. Warm stellar matter with deconfinement: Application to compact stars. *Phys. Rev. C*, v. 68, n. 3, p. 035804–+, set. 2003.
- Menezes, D. P.; Providência, C. Warm stellar matter with neutrino trapping. *Phys. Rev. C*, v. 69, n. 4, p. 045801–+, abr. 2004.
- Nadyozhin, D. K. Gamow and the Physics and Evolution of Stars. *Space Sci. Rev.*, v. 74, p. 455–461, nov. 1995.
- Pearson, J. M.; Goriely, S.; Chamel, N. Properties of the outer crust of neutron stars from Hartree-Fock-Bogoliubov mass models. *Phys. Rev. C*, v. 83, n. 6, p. 065810, jun. 2011.
- Pietsch, W.; Haberl, F. XMM-Newton detection of type I X-ray bursts in M 31. *A&A*, v. 430, p. L45–L48, jan. 2005.
- Pons, J. A. et al. Evolution of Proto-Neutron Stars with Kaon Condensates. *ApJ*, v. 553, p. 382–393, maio 2001.

Pons, J. A. et al. Evolution of Proto-Neutron Stars. *ApJ*, v. 513, p. 780–804, mar. 1999.

Prakash, M. et al. Composition and structure of protoneutron stars. *Phys. Rep.*, v. 280, p. 1–77, 1997.

Prakash, M.; Cooke, J. R.; Lattimer, J. M. Quark-hadron phase transition in protoneutron stars. *Phys. Rev. D*, v. 52, p. 661–665, jul. 1995.

Reddy, S.; Prakash, M.; Lattimer, J. M. Neutrino interactions in hot and dense matter. *Phys. Rev. D*, v. 58, n. 1, p. 013009–+, jul. 1998.

Reines, F.; Cowan, C. L. Detection of the Free Neutrino. *Physical Review*, v. 92, p. 830–831, nov. 1953.

Santos, A. M.; Menezes, D. P. Dense and hot matter within the nonlinear Walecka model. *Phys. Rev. C*, v. 69, n. 4, p. 045803, abr. 2004.

Sawyer, R. F.; Soni, A. Transport of neutrinos in hot neutron-star matter. *ApJ*, v. 230, p. 859–869, jun. 1979.

Serot, B. D.; Walecka, J. D. *Advances in Nuclear Physics*. New York: Plenum Press, v. 16, 1986.

Thorne, K. S. Relativistic radiative transfer - Moment formalisms. *MNRAS*, v. 194, p. 439–473, fev. 1981.

Wald, R. M. *General relativity*. [S.l.: s.n.], 1984.

Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. [S.l.: s.n.], 1972.

Yakovlev, D. G.; Pethick, C. J. Neutron Star Cooling. *ARA&A*, v. 42, p. 169–210, set. 2004.

## **ANEXO A - ANEXOS**



## A.1 VERIFICAÇÃO DA CONDIÇÃO DE NORMALIZAÇÃO DA 4-VELOCIDADE DO FLUIDO

O comprimento do vetor 4-velocidade tem sempre valor unitário e isso nos dá a seguinte condição

$$u^a u_a = -1.$$

Para verificar a condição de normalização da 4-velocidade dada por

$$\vec{u} = (\gamma e^{-\phi}, \gamma v e^{-\Lambda}, 0, 0), \quad (\text{A.1})$$

escrevemos

$$u^a g_{ab} u^b = -1,$$

onde  $g_{ab}$  é a métrica. A partir da métrica (2.1) empregada neste trabalho

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -e^{2\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

temos que

$$\begin{pmatrix} \gamma e^{-\phi} & \gamma v e^{-\Lambda} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{2\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma e^{-\phi} \\ \gamma v e^{-\Lambda} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1, \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{pmatrix} \gamma e^{-\phi} & \gamma v e^{-\Lambda} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\gamma e^{\phi} \\ \gamma v e^{\Lambda} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1, \quad (\text{A.4})$$

que nos fornece

$$-\gamma^2 + \gamma^2 v^2 = -1, \quad (\text{A.5})$$

sabendo que  $\gamma$  é fator de Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (\text{A.6})$$

fica fácil ver que a condição de normalização da 4-velocidade é satisfeita.

## A.2 CÁLCULO DE $\vec{E}_1$ DA BASE ORTONORMAL DO REFERENCIAL COMOVENTE COM A MATÉRIA

Para calcular as componentes de  $\vec{e}_1$  da base ortonormal do referencial comoviente usa-se a condição (2.4) que nos fornece duas equações

$$e_0^a e_{1a} = e_0^a g_{ab} e_1^b = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$e_1^a e_{1a} = e_1^a g_{ab} e_1^b = 1, \quad (\text{A.8})$$

onde  $\vec{e}_0$  é a 4-velocidade e  $g_{ab}$  é a métrica

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -e^{2\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

Expandindo a equação (A.7), temos

$$\begin{aligned} e_0^a g_{ab} e_1^b &= e_0^a (g_{a0} e_1^0 + g_{a1} e_1^1 + g_{a2} e_1^2 + g_{a3} e_1^3), \\ &= e_0^0 (g_{00} e_1^0 + g_{01} e_1^1 + g_{02} e_1^2 + g_{03} e_1^3) + \\ &= e_0^1 (g_{10} e_1^0 + g_{11} e_1^1 + g_{12} e_1^2 + g_{13} e_1^3) + \\ &= e_0^2 (g_{20} e_1^0 + g_{21} e_1^1 + g_{22} e_1^2 + g_{23} e_1^3) + \\ &= e_0^3 (g_{30} e_1^0 + g_{31} e_1^1 + g_{32} e_1^2 + g_{33} e_1^3). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Eliminando os termos nulos da equação anterior, temos

$$e_0^a g_{ab} e_1^b = e_0^0 g_{00} e_1^0 + e_0^1 g_{11} e_1^1 = 0, \quad (\text{A.11})$$

substituindo os termos, temos

$$e_0^a g_{ab} e_1^b = -\gamma e^{-\phi} e^{2\phi} e_1^0 + \gamma v e^{-\Lambda} e^{2\Lambda} e_1^1 = 0, \quad (\text{A.12})$$

que nos fornece a seguinte relação

$$e^\phi e_1^0 = v e^\Lambda e_1^1. \quad (\text{A.13})$$



Expandindo a equação (A.8) temos

$$\begin{aligned}
 e_1^a g_{ab} e_1^b &= e_1^a (g_{a0} e_1^0 + g_{a1} e_1^1 + g_{a2} e_1^2 + g_{a3} e_1^3), \\
 &= e_1^0 (g_{00} e_1^0 + g_{01} e_1^1 + g_{02} e_1^2 + g_{03} e_1^3) + \\
 &= e_1^1 (g_{10} e_1^0 + g_{11} e_1^1 + g_{12} e_1^2 + g_{13} e_1^3) + \\
 &= e_1^2 (g_{20} e_1^0 + g_{21} e_1^1 + g_{22} e_1^2 + g_{23} e_1^3) + \\
 &= e_1^3 (g_{30} e_1^0 + g_{31} e_1^1 + g_{32} e_1^2 + g_{33} e_1^3). \tag{A.14}
 \end{aligned}$$

Eliminando os termos nulos da equação anterior, temos

$$e_1^a g_{ab} e_1^b = g_{00} (e_1^0)^2 + g_{11} (e_1^1)^2 = 1, \tag{A.15}$$

substituindo os termos, temos

$$e_1^a g_{ab} e_1^b = -e^{2\phi} (e_1^0)^2 + e^{2\Lambda} (e_1^1)^2 = 1. \tag{A.16}$$

Substituindo  $e_1^0$  da equação (A.13) na equação (A.16), temos que

$$\begin{aligned}
 -e^{2\phi} \left( \frac{v e^\Lambda e_1^1}{e^\phi} \right)^2 + e^{2\Lambda} (e_1^1)^2 &= 1, \\
 -v^2 e^{2\Lambda} (e_1^1)^2 + e^{2\Lambda} (e_1^1)^2 &= 1, \\
 e^{2\Lambda} (e_1^1)^2 (1 - v^2) &= 1, \\
 e_1^1 &= \gamma e^{-\Lambda}.
 \end{aligned}$$

Portanto, o vetor ortonormal  $\vec{e}_1$  formador da base do referencial comovente é dado por

$$\vec{e}_1 = (v\gamma e^{-\phi}, \gamma e^{-\Lambda}, 0, 0). \tag{A.17}$$



## **ANEXO B – Artigos Publicados**



## Warm and cold pasta phase in relativistic mean field theory

S. S. Avancini,<sup>1</sup> D. P. Menezes,<sup>1</sup> M. D. Alloy,<sup>1</sup> J. R. Marinelli,<sup>1</sup> M. M. W. Moraes,<sup>1</sup> and C. Providência<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Depto de Física CFM, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC CP476, CEP 88.040-900, Brazil*

<sup>2</sup>*Centro de Física Computacional, Department of Physics, University of Coimbra, P-3004-516 Coimbra, Portugal*

(Received 29 April 2008; published 9 July 2008)

In the present article we investigate the onset of the pasta phase with different parametrizations of the nonlinear Walecka model. At zero temperature two different methods are used, one based on coexistent phases and the other on the Thomas-Fermi approximation. At finite temperature only the coexistence phases method is used. *npe* matter with fixed proton fractions and in  $\beta$  equilibrium is studied. The pasta phase decreases with the increase of temperature. The internal pasta structure and the beginning of the homogeneous phase vary depending on the proton fraction (or the imposition of  $\beta$  equilibrium), on the method used, and on the chosen parametrization. It is shown that a good parametrization of the surface tension with dependence on the temperature, proton fraction, and geometry is essential to describe correctly large isospin asymmetries and the transition from pasta to homogeneous matter.

DOI: [10.1103/PhysRevC.78.015802](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.78.015802)

PACS number(s): 21.65.-f, 24.10.Jv, 26.60.-c, 95.30.Tg

### I. INTRODUCTION

Understanding the origin of our universe and the mechanisms associated with the supernova explosions and the cooling of neutron stars are important topics of investigation. Simulations of supernova explosions and the conditions for them to take place have been the subject of different studies for the past 30 years. The observed pulsars are believed to be the remnants of type II supernova explosions. These type II supernovae appear at the end of the evolution of very massive stars. The core of these stars collapses to a density around several times nuclear saturation density. A rebound takes place and drives a shock-wave that expels most of the original mass of the star. Depending on certain thermodynamical conditions present in the equations of state (EOS), the supernova explosion simulation is successful or not [1]. Finding the adequate EOS for nuclear astrophysics purposes requires the knowledge of a series of thermodynamic properties that are obtained for certain temperatures, densities, and matter composition.

The ingredients used to adjust the parameters present in all relativistic models come from nuclear matter and nuclei properties such as binding energy, saturation density, compressibility and energy symmetry at saturation density, particle energy levels, etc. Although describing the isoscalar channel in a similar way at saturation density, if the relativistic models are extrapolated to higher densities or isospin asymmetries as in stellar matter or higher temperatures as in heavy-ion collisions or even to lower densities as in the nuclear matter liquid-gas phase transitions, they can and indeed provide different information.

An appropriate EOS that can be used to simulate supernova explosions has to be obtained for a wide range of densities (very low to 10 times nuclear saturation density, at least) and also for a wide range of temperatures (0 to 100 MeV, at least) [2]. On the way to perform this task the inclusion of the pasta phase, whenever it exists, is mandatory.

The pasta phase is the result of a frustrated system. Frustration is a phenomenon characterised by the existence of

more than one low-energy configuration. At low densities, both in neutral nuclear matter or in  $\beta$ -equilibrium stellar matter, a competition between the strong and the electromagnetic interactions takes place, leading to a frustrated system. Normally the short- and large-distance scales related to the nuclear and Coulomb interactions are well separated so that nucleons bind into nuclei but at densities of the order of  $10^{13}$ – $10^{14}$  g/cm<sup>3</sup> these length scales are comparable [3,4]. A variety of complex structures exist and they are commonly named droplet (bubble), rod (tube), and slab for three, two, and one dimensions, respectively. A droplet (bubble) and a rod (tube) have densities larger (smaller) than their surroundings and are normally defined within a Wigner-Seitz cell. The pasta phase is the ground-state configuration if its binding energy is lower than the corresponding homogeneous phase. The typical densities for its existence lie below  $0.1 \text{ fm}^{-3}$ , depending on the model, the parametrization used, and the temperature as seen next and in Refs. [5,6], for instance.

It is widely accepted that the crust of neutron stars is formed by nonuniform neutron rich matter in  $\beta$  equilibrium above a liquid mantle. In the inner crust nuclei coexist with a gas of neutrons that have dripped out. The properties of this crust as, for instance, its thickness and pressure at the crust-core interface depend a lot on the density dependence of the EOS used to describe it [5]. The solid crust insulates thermally the neutron star cold surface from its hot liquid interior and because of this fact, it is of vital importance in the understanding of neutron star cooling and evolution. Moreover, the mechanical properties of the pasta phase in the crust matter may influence the neutrino opacity in supernova matter [4] and explain star quakes and pulsar glitches [7].

The existence of a liquid-gas phase transition in asymmetric nuclear matter (ANM) is associated with an instability region limited by spinodals [8,9]. In Ref. [10] the nuclear matter thermodynamical spinodal sections for two relativistic models, one with constant couplings known as NL3 [11] and another with density-dependent couplings we usually refer to as TW [12], were obtained. It was shown that the EOS of

$\beta$ -equilibrium stellar matter crosses the spinodal surface at  $T = 0$  MeV. This means that at low densities a cold neutron star has a nonhomogeneous region, corresponding to its crust. For higher temperatures this effect generally does not occur, meaning that the outer layer of a hot compact star is homogeneous. However, the thermodynamical spinodal calculation does not take into account the Coulomb interaction. A dynamical calculation of the spinodal at finite temperature was done in Ref. [13]. This takes into account both the presence of electrons and the finite range of the nuclear force, and, therefore we expect it to make a much better preview of the boundary of the pasta phase both at  $T = 0$  and at finite temperature. In fact, more information on this nonhomogeneous phase is required.

In Ref. [14] the physical properties of hot nuclear matter in a range of densities which included subsaturation densities, were studied for fixed proton fractions and  $\beta$ -equilibrium matter. The non-homogeneous phase included a nuclei phase and a bubble phase and a Skyrme interaction was used. Within a similar approach but including other geometries in the pasta phase, Lattimer and Swesty [15] have built a consistent EOS appropriate for supernova simulations. In Ref. [2] an investigation of the properties of the pasta phase was performed within the Thomas-Fermi approximation and the TM1 parametrization [16] of the nonlinear Walecka model [17] for finite temperature and spherical symmetry only. In Ref. [6], a more complete dimensional treatment was done but only zero temperature matter was considered. In Ref. [18] a detailed study at  $T = 0$  MeV of  $\beta$ -equilibrium matter at low densities, using both a Hartree-Fock (HF) self-consistent method and a simplified Thomas Fermi (TF) calculation, was performed for both Skyrme-type and relativistic models. Pairing correlations were included and the authors used a periodic lattice of Wigner-Seitz cells of cubic shapes to perform the calculation. In Ref. [19] the same formalism was applied to the description of  $\beta$ -equilibrium matter with a density-dependent hadronic model derived from realistic  $NN$  interactions. The calculation was performed both at  $T = 0$  MeV and at finite temperatures. The authors of the above references have pointed out that their TF calculation, which includes a bulk energy term plus a surface term contribution dependent on a surface parameter, gives larger energies than the HF calculation and this can be traced back to a too-large value of the surface parameter.

In the present article we investigate the existence of the pasta phase at zero and finite temperature through the equations of motion obtained for different parametrizations of the relativistic nonlinear Walecka model [17]: NL3 [11], TM1 [16], and GM3 [20]. Nonuniform nuclear matter is obtained numerically via two different prescriptions: the coexistence of phases within a mean-field approximation and a self-consistent Thomas-Fermi calculation. The last approach is considered only at zero temperature. Two different matters are described: (a) neutral nuclear matter, where the proton fraction can be fixed and the electrons are included to compensate the proton electric charge, and (b) stellar matter, where the conditions of  $\beta$  equilibrium and charge neutrality are enforced. In this case the proton fraction is small and varies with the density. The onset of muons occurs at larger densities and therefore

electrons are the only leptons that contribute in this region. The results are then compared.

Through out the article we call  $npe$  matter the neutral matter with protons, neutrons, and electrons. The aim of the present study is to understand the model dependence of the pasta phase, the importance of using a self-consistent method to obtain this phase, the dependence of the results on the surface description of the pasta structure, and how well the dynamical spinodal describes the boundary of the inhomogeneous phase. However, one should have in mind that, at low densities, a proper description of matter would require the inclusion of  $\alpha$  clusterization [21] and this is not done in the present approach. Using a simple approach to describe the pasta phase, we discuss the effects of the parametrization and temperature on the pasta phase structure and densities at which the pasta phase starts and ends. The pasta phase is built from Gibbs conditions of coexisting phases and the inclusion by hand of the surface and Coulomb contributions. At  $T = 0$  MeV we compare the results obtained within this approach with the ones calculated from a self-consistent Thomas-Fermi (TF) calculation of  $npe$  matter. A comment on the way the surface energy changes with the pasta structure is included in the discussion of the results. A comparison with other previously published results is also included.

The article is organized as follows: in Sec. II we develop the formalism both for the homogeneous  $npe$  matter and the pasta phase. The general Thomas-Fermi approximation for finite temperature systems is outlined in subsection II A. From the more general equations, the mean-field approximation is obtained and the equations for homogeneous nuclear matter and homogeneous stellar matter ( $npe$  matter in  $\beta$  equilibrium) are displayed in subsections II B and II C, respectively. In subsections II D and II E the formalism used to obtain nonhomogeneous matter by means of coexisting liquid-gas phases for nuclear and stellar matter are explained. In subsection II F nonuniform matter is once more investigated with the help of the Thomas-Fermi approximation at zero temperature. In Sec. III the results are shown and discussed. In the final section the conclusions are drawn.

## II. THE FORMALISM

We consider a system of protons and neutrons with mass  $M$  interacting with and through an isoscalar-scalar field  $\phi$  with mass  $m_s$ , an isoscalar-vector field  $V^\mu$  with mass  $m_v$ , and an isovector-vector field  $\mathbf{b}^\mu$  with mass  $m_\rho$ . We also include a system of electrons with mass  $m_e$ . Protons and electrons interact through the electromagnetic field  $A^\mu$ . The Lagrangian density reads:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=p,n} \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_\omega + \mathcal{L}_\rho + \mathcal{L}_\gamma, \quad (1)$$

where the nucleon Lagrangian reads

$$\mathcal{L}_i = \bar{\psi}_i [\gamma_\mu i D^\mu - M^*] \psi_i, \quad (2)$$

with

$$i D^\mu = i \partial^\mu - g_v V^\mu - \frac{g_\rho}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{b}^\mu - e \frac{1 + \tau_3}{2} A^\mu, \quad (3)$$

$$M^* = M - g_s \phi, \quad (4)$$

and the electron Lagrangian is given by

$$\mathcal{L}_e = \bar{\psi}_e [\gamma_\mu (i \partial^\mu + e A^\mu) - m_e] \psi_e. \quad (5)$$

The isoscalar part is described by the scalar field  $\phi$  and the vector field  $V_\mu$  associated, respectively, to the  $\sigma$  and  $\omega$  mesons, whereas the isospin dependence is coming from the isovector-vector field  $b_\mu^i$  (where  $\mu$  is the four-dimensional space-time indices and  $i$  the three-dimensional isospin direction indices), corresponding to the  $\rho$  meson. The meson and electromagnetic Lagrangian densities are

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\sigma &= +\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_\sigma^2 \phi^2 - \frac{1}{3} \kappa \phi^3 - \frac{1}{12} \lambda \phi^4) \\ \mathcal{L}_\omega &= \frac{1}{2} [-\frac{1}{2} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} + m_\omega^2 V_\mu V^\mu + \frac{1}{12} \xi g_\omega^4 (V_\mu V^\mu)^2] \\ \mathcal{L}_\rho &= \frac{1}{2} (-\frac{1}{2} \mathbf{B}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{B}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \mathbf{b}_\mu \cdot \mathbf{b}^\mu) \\ \mathcal{L}_\gamma &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

where  $\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ ,  $\mathbf{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{b}_\nu - \partial_\nu \mathbf{b}_\mu - g_\rho (\mathbf{b}_\mu \times \mathbf{b}_\nu)$  and  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . The model comprises the following parameters: three coupling constants,  $g_s$ ,  $g_v$ , and  $g_\rho$ , of the mesons to the nucleons, the nucleon mass  $M$ , the electron mass  $m_e$ , the masses of the mesons  $m_\sigma$ ,  $m_\omega$ ,  $m_\rho$ , the electromagnetic coupling constant  $e = \sqrt{4\pi}/137$ , and the self-interacting coupling constants  $\kappa$ ,  $\lambda$ , and  $\xi$ . We use the sets of constants identified as NL3 [11], TM1 [16], and GM3 [20] that provide the nuclear matter properties displayed in Table I.

In the above Lagrangian density  $\tau$  is the isospin operator. When using the GM3 parametrization we have fixed the  $\sigma$  mass as 400 MeV as in Ref. [6]. For the other parameter sets, the usual masses used in Refs. [11] and [16] were kept.

### A. The Thomas-Fermi approximation

From the Euler-Lagrange formalism, we obtain the coupled equations of motion for the scalar, isoscalar-vector, isovector-vector, electromagnetic, and nucleon fields. In the static case there are no currents in the system and the spatial vector components  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{b}$ , and  $\mathbf{A}$  are zero. Therefore, the equations of motion become:

$$\nabla^2 \phi = m_\sigma^2 \phi + \frac{1}{2} \kappa \phi^2 + \frac{1}{3!} \lambda \phi^3 - g_s \rho_s, \quad (6)$$

$$\nabla^2 V_0 = m_\omega^2 V_0 + \frac{1}{3!} \xi g_\omega^4 V_0^3 - g_v \rho_B, \quad (7)$$

$$\nabla^2 b_0 = m_\rho^2 b_0 - \frac{g_\rho}{2} \rho_3, \quad (8)$$

$$\nabla^2 A_0 = -e(\rho_p - \rho_e), \quad (9)$$

TABLE I. Nuclear matter properties obtained with different relativistic models.

	NL3 [11]	TM1 [16]	GM3 [20]
$B/A$ (MeV)	16.3	16.3	16.3
$\rho_0$ (fm $^{-3}$ )	0.148	0.145	0.153
$K$ (MeV)	271	281	240
$\mathcal{E}_{\text{sym}}$ (MeV)	37.4	36.9	32.5
$M^*/M$	0.60	0.63	0.78

where  $\rho_B = \rho_p + \rho_n$  and  $\rho_3 = \rho_p - \rho_n$  are the baryonic densities,  $\rho_p$ ,  $\rho_n$ , and  $\rho_e$  are the proton, neutron, and electron densities, and  $\rho_s$  is the scalar density. In the following we work with the distribution function for particles at position  $\mathbf{r}$ , instant  $t$  with momentum  $\mathbf{p}$ ,  $f_+( \mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , and the distribution function for antiparticles at position  $\mathbf{r}$ , instant  $t$  with momentum  $-\mathbf{p}$ ,  $f_-( \mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  so that [22,23]

$$E_N = \gamma \sum_{i=p,n} \int \frac{d^3 r d^3 p}{(2\pi)^3} [f_{i+}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) h_{i+} - f_{i-}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) h_{i-}], \quad (10)$$

where

$$h_{i\pm} = \pm \sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{V}_i)^2 + (M - g_s \phi)^2} + \mathcal{V}_i \quad (11)$$

with

$$\mathcal{V}_{i0} = g_v V_0 + \tau_i \frac{g_\rho}{2} b_0 + e \frac{1 + \tau_i}{2} A_0.$$

$$\mathcal{V}_i = g_v \mathbf{V} + \tau_i \frac{g_\rho}{2} \mathbf{b} + e \frac{1 + \tau_i}{2} \mathbf{A}.$$

where  $\tau_p = 1$  and  $\tau_n = -1$ . The quantities

$$\epsilon_\pm(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \pm h_\pm(\mathbf{r}, -\mathbf{p}, t)$$

are the classical effective one-body Hamiltonian for particles (+) and antiparticles (−) because particles and antiparticles have opposite baryonic charge and  $\gamma = 2$  refers to the spin multiplicity. For a system in equilibrium, the distribution functions should be chosen to make the thermodynamic potential  $\Omega$  (defined next) stationary and hence

$$f_{i\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{1 + \exp[(\epsilon \mp \mu_i)/T]}, \quad i = p, n, \quad (12)$$

where  $\mu_i$  is the chemical potential for particles of type  $i$ ,  $T$  is the temperature,  $v_i = \mu_i - \mathcal{V}_i$  are the effective chemical potentials,  $\epsilon = \sqrt{p^2 + M^{*2}}$ , and  $M^* = M - g_s \phi$  is the effective nucleon mass. In the static approximation  $\mathcal{V}_i = 0$ .

The classical entropy of a Fermi gas is given by

$$\begin{aligned} S = -\gamma \sum_{i=p,n} \int \frac{d^3 r d^3 p}{(2\pi)^3} [f_{i+} \ln(f_{i+}) \\ + (1 - f_{i+}) \ln(1 - f_{i+}) + (f_{i+} \leftrightarrow f_{i-})], \end{aligned} \quad (13)$$

the thermodynamic potential and the free energy are defined as

$$\Omega = E - TS - \sum_{i=p,n} \mu_i B_i, \quad F = E - TS, \quad (14)$$

where  $B_p$ ,  $B_n$  are, respectively, the proton and the neutron number:

$$B_i = \int d^3 r \rho_i(\mathbf{r}, t), \quad \rho_i = \gamma \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (f_{i+} - f_{i-}). \quad (15)$$

For the sake of completeness, we also define the scalar density appearing in Eq. (6) as

$$\rho_s = \gamma \sum_{i=p,n} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{M^*}{\epsilon} (f_{i+} + f_{i-}). \quad (16)$$

The coupled differential equations [(6)–(9)] are then solved numerically and all relevant quantities (e.g., effective mass, densities, pressure) that depend on the fields are calculated.

As for the electrons, their density and distribution functions read:

$$\rho_e = \gamma \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (f_{e+} - f_{e-}), \quad (17)$$

with

$$f_{e\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{1 + \exp[(\epsilon_e \mp \mu_e)/T]}, \quad (18)$$

where  $\mu_e$  is the electron chemical potential and  $\epsilon_e = \sqrt{p^2 + m_e^2}$ . They enter the calculation through the electromagnetic interaction with the protons. Whenever a fixed proton fraction is chosen, so that nuclear matter be neutral, the electron density is fixed as the same as the proton density. If, however, stellar matter is investigated, the conditions of  $\beta$  equilibrium and charge neutrality fix the electron chemical potential and density. Both points are clarified in the next subsections.

## B. Homogeneous neutral nuclear matter

Next we restrict ourselves to the mean-field approximation for homogeneous matter. In this case, the electromagnetic field is omitted. In the mean-field approximation the meson fields are replaced by their constant expectation values [17,24],

$$\phi \equiv \langle \phi \rangle = \phi_0, \quad (19)$$

$$V^0 \equiv \langle V^0 \rangle = V_0, \quad (20)$$

$$b^0 \equiv \langle b^0 \rangle = b_0. \quad (21)$$

The substitution of the above expressions in Eqs. (6), (7), and (8) yields

$$\phi_0 = -\frac{\kappa}{2m_\sigma^2} \phi_0^2 - \frac{\lambda}{6m_\sigma^2} \phi_0^3 + \frac{g_s}{m_\sigma^2} \rho_s, \quad (22)$$

$$V_0 = -\frac{\xi g_v^4}{6m_v^2} V_0^3 + \frac{g_v}{m_v^2} \rho_B, \quad (23)$$

$$b_0 = \frac{g_\rho}{2m_\rho^2} \rho_3. \quad (24)$$

The thermodynamic quantities of interest are given in terms of the above meson fields. They are the energy density:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{\gamma}{2\pi^2} \sum_{i=p,n} \int dpp^2 \sqrt{p^2 + M^{*2}} (f_{i+} + f_{i-}) + \frac{m_\sigma^2}{2} V_0^2 \\ & + \frac{\xi g_v^4}{8} V_0^4 + \frac{m_\rho^2}{2} b_0^2 + \frac{m_s^2}{2} \phi_0^2 + \frac{\kappa}{6} \phi_0^3 + \frac{\lambda}{24} \phi_0^4, \end{aligned} \quad (25)$$

the pressure:

$$\begin{aligned} P = & \frac{\gamma}{6\pi^2} \sum_{i=p,n} \int dp \frac{p^4}{\sqrt{p^2 + M^{*2}}} (f_{i+} + f_{i-}) + \frac{m_\sigma^2}{2} V_0^2 \\ & + \frac{\xi g_v^4}{24} V_0^4 + \frac{m_\rho^2}{2} b_0^2 - \frac{m_s^2}{2} \phi_0^2 - \frac{\kappa}{6} \phi_0^3 - \frac{\lambda}{24} \phi_0^4, \end{aligned} \quad (26)$$

the entropy density:

$$S = \frac{1}{T} (\mathcal{E} + P - \mu_p \rho_p - \mu_n \rho_n), \quad (27)$$

the free energy density:

$$\mathcal{F} = \mathcal{E} - T S \quad (28)$$

and the proton fraction:

$$Y_p = \frac{\rho_p}{\rho_B}, \quad (29)$$

taken as a fixed quantity in nuclear *npe* matter.

The energy density, pressure, and free energy density of the electrons are

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{\pi^2} \int dpp^2 \sqrt{p^2 + m_e^2} (f_{e+} + f_{e-}), \quad (30)$$

$$P_e = \frac{1}{3\pi^2} \int dp \frac{p^4}{\sqrt{p^2 + m_e^2}} (f_{e+} + f_{e-}) \quad (31)$$

and

$$\mathcal{F}_e = \mathcal{E}_e - T S_e, \quad (32)$$

with electron entropy density,  $S_e = (\mathcal{E} + P - \mu_e \rho_e)/T$ .

## C. Hadronic matter in $\beta$ equilibrium

The condition of  $\beta$  equilibrium in a system of protons, neutrons, and electrons is

$$\mu_p = \mu_n - \mu_e. \quad (33)$$

Charge neutrality requires that

$$\rho_p = \rho_e. \quad (34)$$

Muons are not present in stellar matter at the densities considered in the present article. In  $\beta$  equilibrium matter the proton fraction is not fixed but is the output of the self-consistent solution of the coupled equations of motion plus the conditions above.

## D. Coexisting phases: neutral nuclear matter

A detailed study of the possibility of phase transitions in hot, asymmetric nuclear matter is done in Refs. [23–25]. Here we just repeat the most important points, used in the search of coexisting phases that give rise to the pasta phase.

In a binary system we have

$$\left( \frac{\partial \mu_p}{\partial Y_p} \right)_{T,P} \geq 0 \quad \text{and} \quad \left( \frac{\partial \mu_n}{\partial Y_p} \right)_{T,P} \leq 0, \quad (35)$$

known as diffusive stability, which reflects the fact that in a stable system, energy is required to change the proton concentration while pressure and temperature are kept constant. To obtain the binodal section that contains points under the same pressure for different proton fractions, we use the conditions above together with the Gibbs' conditions that impose that both phases have the same pressure and proton and neutron chemical potentials.



For a given total density  $\rho_B$  and proton fraction  $Y_p$  we build pasta structures with different geometrical forms in a background nucleon gas. This is achieved by calculating from the Gibbs' conditions the density and the proton fraction of the pasta and of the background gas so that in the whole we had to solve simultaneously the following six equations [6]:

$$P^I(v_p^I, v_n^I, M^{*I}) = P^{II}(v_p^{II}, v_n^{II}, M^{*II}), \quad (36)$$

$$\mu_i^I = \mu_i^{II}, \quad i = p, n \quad (37)$$

$$m_s^2 \phi_0^I + \frac{\kappa}{2} \phi_0^{2I} + \frac{\lambda}{6} \phi_0^{3I} = g_s \rho_s^I, \quad (38)$$

$$m_s^2 \phi_0^{II} + \frac{\kappa}{2} \phi_0^{2II} + \frac{\lambda}{6} \phi_0^{3II} = g_s \rho_s^{II}, \quad (39)$$

and

$$f \rho_p^I + (1-f) \rho_p^{II} = \rho_p = Y_p \rho_B, \quad (40)$$

where I and II label each of the phases,  $f$  is the volume fraction of phase I:

$$f = \frac{\rho_B - \rho^{II}}{\rho^I - \rho^{II}} \quad (41)$$

and  $Y_p$  is the global proton fraction. The density of the electrons is uniform and taken as  $\rho_e = Y_p \rho_B$ .

The total pressure is given by  $P = P^I + P_e$ . The total energy density of the system is given by

$$\mathcal{E} = f \mathcal{E}^I + (1-f) \mathcal{E}^{II} + \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_{\text{surf}} + \mathcal{E}_{\text{Coul}}, \quad (42)$$

where, by minimizing the sum  $\mathcal{E}_{\text{surf}} + \mathcal{E}_{\text{Coul}}$  with respect to the size of the droplet/bubble, rod/tube or slab we get [3,6]  $\mathcal{E}_{\text{surf}} = 2\mathcal{E}_{\text{Coul}}$ , and

$$\mathcal{E}_{\text{Coul}} = \frac{2\alpha}{4^{2/3}} (e^2 \pi \Phi)^{1/3} [\sigma D (\rho_p^I - \rho_p^{II})^2]^{2/3}, \quad (43)$$

where  $\alpha = f$  for droplets and  $\alpha = 1-f$  for bubbles,  $\sigma$  is the surface energy coefficient,  $D$  is the dimension of the system. For droplets

$$\Phi = \begin{cases} \left( \frac{2-Df^{1-2/D}}{D-2} + f \right) \frac{1}{D+2}, & D = 1, 3; \\ \frac{f-1-\ln(f)}{D+2}, & D = 2. \end{cases} \quad (44)$$

and for bubbles the above expressions are valid with  $f$  replaced by  $1-f$ .

We have verified, as already stated in Ref. [6], that the appearance of the pasta phase strongly depends on the value of the surface tension. We have parametrized the surface energy coefficient in terms of the proton fraction according to the functional proposed in [14,15], which was obtained by fitting Thomas-Fermi and Hartree-Fock numerical values with a Skyrme force,

$$\sigma = \sigma_0 \frac{16+b}{\frac{1}{Y_p^3} + \frac{1}{(1-Y_p)^3} + b} h_t, \quad (45)$$

with

$$h_t = \left[ 1 - \left( \frac{T}{4T_c Y_p (1-Y_p)} \right)^2 \right]^2, \quad (46)$$

TABLE II. The average surface tension values obtained for zero temperature with the NL3 parametrization within the TF calculation compared with the values used in the CP calculation derived from Eq. (45). The units are MeV/fm<sup>2</sup>.

$Y_p$	Droplet	Rod	Slab	Tube	Bubble
0.5 (TF)	1.048	1.015	0.974	0.909	0.875
0.5 (CP)	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03
0.3 (TF)	0.688	0.653	0.595	0.542	0.463
0.3 (CP)	0.795	0.740	0.710	0.697	0.681

$\sigma_0 = 1.03$  MeV/fm<sup>2</sup>,  $b = 24.4$  and  $T_c$  is the critical temperature above which there is a smooth transition from the gas phase to the liquid phase [10]. In Eq. (45), the proton fraction  $Y_p$  considered through out the calculation of  $\sigma$  is the one of the denser phase. For  $\sigma_0$  we chose the value used in Ref. [6] that agrees with the value we have obtained for the NL3 parametrization within our self-consistent TF calculation for symmetric matter, see Table II. In a future work we will look for a similar parametrization using RMF theory.

Each structure is considered to be in the center of a charge-neutral cell constituted of neutrons, protons, and leptons [2]. The internal structure forms a body-centred-cubic (BCC) lattice and the Wigner-Seitz cell is a sphere/cylinder/slab whose volume is the same as the unit BCC cell. In Ref. [2] the internal structures are associated with heavy nuclei. Hence, the radius of the droplet (rod, slab) and of the Wigner-Seitz cell are, respectively, given by:

$$R_D = \left[ \frac{\sigma D}{4\pi e^2 (\rho_p^I - \rho_p^{II})^2 \Phi} \right]^{1/3} \quad R_W = \frac{R_D}{(1-f)^{1/D}}. \quad (47)$$

### E. Coexisting phases: stellar matter

In this case the conditions of  $\beta$  equilibrium and charge neutrality discussed in subsection II C have to be taken into account resulting in the following conditions:

$$\mu_n^I = \mu_n^{II}, \quad \mu_e^I = \mu_e^{II} \quad (48)$$

and

$$f (\rho_p^I - \rho_e^I) + (1-f) (\rho_p^{II} - \rho_e^{II}) = 0. \quad (49)$$

together with (36), (38), and (39).

Here the density of electrons is no longer taken uniformly as in last section but appears as the solution of the above equation. Moreover, as already stated, the densities of interest to the study of the pasta phase are too low for the muons to appear.

### F. Pasta phase within a self-consistent Thomas-Fermi calculation at $T = 0$ MeV

We use the Wigner-Seitz approach to describe the nonuniform  $npe$  matter. The matter is assumed to be arranged as a periodic structure and we solve the equations of motion for the fields in a unit cell that is taken to be a sphere, a cylinder, and a slab in three, two, and one dimensions, respectively. The cell is

globally neutral and as boundary conditions we impose that the radial derivatives of all fields vanish at the boundaries. We use the Thomas-Fermi approximation to describe the nonuniform *npe* matter inside the Wigner-Seitz unit cell. Hence, we assume that the *npe* matter is locally homogeneous and at each point its density is determined by the corresponding local Fermi momenta,  $p_{Fi}$ ,  $i = p, n, e$ . At zero temperature the Fermi distribution functions for particles become the usual step function and the antiparticles vanish:

$$f_{i+}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \theta[p_{Fi}^2(\mathbf{r}) - p^2], \quad f_{i-}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 0, \quad i = p, n, e. \quad (50)$$

So, in the Thomas-Fermi approximation, the energy is a functional of the density (or Fermi momenta) which is given by:

$$E_{TF} = \int d^3r \left( \sum_{i=p,n,e} E_i(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \{ [\nabla\phi_0(\mathbf{r})]^2 + m_\xi^2 \phi_0^2(\mathbf{r}) \} \right. \\ + \frac{\kappa}{3!} \phi_0^3(\mathbf{r}) + \frac{\lambda}{4!} \phi_0^4(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \{ [\nabla V_0(\mathbf{r})]^2 + m_v^2 V_0^2(\mathbf{r}) \} \\ + \frac{\xi}{12} g_v^4 V_0^4(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \{ [\nabla b_0(\mathbf{r})]^2 + m_b^2 b_0^2(\mathbf{r}) \} \\ + g_v V_0(\mathbf{r})\rho + \frac{1}{2} g_\rho b_0(\mathbf{r})\rho_3 \quad (51)$$

$$\left. - \frac{1}{2} [ \nabla A_0(\mathbf{r}) ]^2 + e(\rho_p - \rho_e) A_0(\mathbf{r}) \right), \quad (52)$$

where

$$E_i = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{p_{Fi}(\mathbf{r})} dp p^2 (p^2 + M^{*2})^{1/2}, \quad i = p, n, \quad (53)$$

and

$$E_e = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{p_{Fe}(\mathbf{r})} dp p^2 (p^2 + m_e^2)^{1/2}. \quad (54)$$

The definition of the thermodynamic potential given in Eq. (14) reduces to

$$\Omega = E_{TF}[\rho_i] - \sum_{i=n,p,e} \mu_i \int d\mathbf{r} \rho_i(\mathbf{r}). \quad (55)$$

The minimization of the above functional with the constraint of a fixed number of protons, neutrons, and electrons yields the equations:

$$[p_{Fp}^2(\mathbf{r}) + M^{*2}(\mathbf{r})]^{1/2} + g_v V_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} g_\rho b_0(\mathbf{r}) + e A_0(\mathbf{r}) = \mu_p, \quad (56)$$

$$[p_{Fn}^2(\mathbf{r}) + M^{*2}(\mathbf{r})]^{1/2} + g_v V_0(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} g_\rho b_0(\mathbf{r}) = \mu_n, \quad (57)$$

and

$$[p_{Fe}^2(\mathbf{r}) + m_e^2]^{1/2} - e A_0(\mathbf{r}) = \mu_e. \quad (58)$$

Because the thermodynamic potential, Eq. (55), is stationary for variations of the mesonic and electromagnetic fields, the corresponding functional derivatives recover the meson and electromagnetic equations of motion, Eqs. (6)–(9). At first,

we discuss the numerical algorithm for the description of the neutral *npe* matter. The Poisson equation is always solved by using the appropriate Green function according to the spatial dimension of interest. The Klein-Gordon equations, Eqs. (6)–(9) are solved by expanding the meson fields in a harmonic oscillator basis with one, two, or three dimensions based on the method proposed in Ref. [26] and applied in Ref. [27]. In 3D we consider spherical symmetry and in 2D symmetry we assume axial symmetry around the  $z$  axis. Taking into account the symmetries of the meson fields, only the harmonic oscillator basis with orbital angular momentum  $l = 0$  is considered. The radial equation is:

$$\left( -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{D-1}{r} \frac{d}{dr} + m_\xi^2 \right) \xi = s_\xi, \quad D = 3, 2, 1. \quad (59)$$

In the above equation  $\xi$  stands for  $\phi_0(r)$ ,  $V_0(r)$ , and  $b_0(r)$  and  $s_\xi$  for the corresponding sources. Note that nonlinear terms in the Klein-Gordon equations are included in the source term. Such equation is solved through a self-consistent procedure. For example, the source of the  $\sigma$  field reads:

$$s_\sigma = g_\sigma \rho_s - \frac{1}{2} \kappa \phi_0^2 - \frac{1}{6} \lambda \phi_0^3. \quad (60)$$

We expand the meson fields and the sources as:

$$\xi(r) = \sum_{i=1}^{NB} a_i R_i(r), \quad (61)$$

$$s_\xi(r) = \sum_{i=1}^{NB} b_i R_i(r), \quad (62)$$

with  $NB$  the number of the harmonic oscillator shells considered. Substituting these expansions into the Klein-Gordon equations we are left with a matrix system to be solved. This method has been applied with success to obtain the density profiles of finite nuclei in Ref. [27]. The solution of these equations yields density profiles with five different structures. In 3D, a dense region in the center of the cell composed of neutrons, protons, and electrons surrounded by a gas of electrons is identified as the droplet configuration. The situation with the denser region lying outside is the bubble configuration. In a similar way we identify in 2D rodlike and tubelike structures. Finally in 1D only slablike structures appear.

The chemical potentials are used to enforce charge neutrality, a fixed global density, and proton fraction. For each density and proton fraction a self-consistent calculation is performed for one, two, and three dimensions. The sphere and cylinder radii and the slab radius (half-width) are obtained through the minimization of the unit cell energy. The most favourable geometry is obtained as the one that minimizes the energy for a given  $\rho$  and  $Y_p$ .

The calculation of the surface energy per unit area is done as in Ref. [23] and its approximate value can be obtained from:

$$\sigma = \int_0^\infty dr \left[ \left( \frac{d\phi_0}{dr} \right)^2 - \left( \frac{dV_0}{dr} \right)^2 - \left( \frac{db_0}{dr} \right)^2 \right]. \quad (63)$$

This has allowed us to discuss the limitations of not using a self-consistent approach.

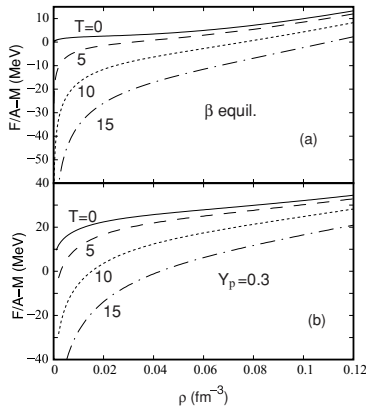


FIG. 1. *npe* matter binding energy for (a) matter in  $\beta$  equilibrium and (b)  $Y_p = 0.3$ ; different temperatures using NL3 parametrization.

The numerical solution of the above equations within a TF approximation is not simple and many problems had to be tackled. Some of them are discussed in Ref. [26] and others in Ref. [18]. A detailed explanation can be found in Ref. [28].

III. RESULTS AND DISCUSSION

Throughout the article, CP stands for calculations within the coexisting phases method and TF for calculations with the Thomas-Fermi approximation.

Although the study of homogeneous *npe* matter is not the main topic of this investigation, its discussion is necessary because the pasta phase only exists when its free energy

per particle is lower than the *npe* matter free energy energy per particle. The inclusion of the electrons modifies a lot the nuclear binding energy. At  $T = 0$  MeV, the presence of the electrons moves the usual binding energy of nuclear symmetric matter at the saturation point from  $-16$  MeV [2,17] to  $+80$  MeV. The larger the proton fraction the larger the electron contribution and therefore larger proton fractions have larger energies per nucleon, contrary to what happens in neutron-proton (*np*) matter.

In Fig. 1 we show the free energy per particle at different temperatures, both for matter in  $\beta$  equilibrium in Fig. 1(a) and for a fixed proton fraction  $Y_p = 0.3$  in Fig. 1(b). The free energy per particle decreases with temperature due to the contribution of the entropy, but its slope increases with temperature. It is the derivative of the free energy per particle with respect to the density that defines the pressure  $P = \rho^2 \partial(F/A)/\partial\rho$ , and the pressure increases with temperature. The behavior of the other parametrizations is similar.

As we look for the pasta phase, very small differences in the binding energy at  $T = 0$  or free energy per particle at finite temperatures at low densities determine its existence or nonexistence. To check how the results depend on the parametrization we verified that the free energy per particle for a fixed proton fraction and the three different parametrizations used in the present work show small differences above  $0.01 \text{ fm}^{-3}$ . At lower proton fractions ( $Y_p = 0$  to  $Y_p = 0.25$ ) the discrepancies are larger than at higher proton fractions ( $Y_p = 0.3$  to  $Y_p = 0.5$ ). This is expected because the models have been fitted to symmetric nuclear matter or to the properties of stable and unstable nuclei that have  $Y_p > 0.39$ . In particular we have shown in Ref. [9] that the spinodals of these models at subsaturation densities are different from each other at large isospin asymmetry and/or temperature.

Now we move to the study of the pasta phase. In Fig. 2 we show the free energy per nucleon of the *npe* matter both for the pasta and the homogeneous phases obtained with the NL3 parametrization and two different proton fractions: symmetric

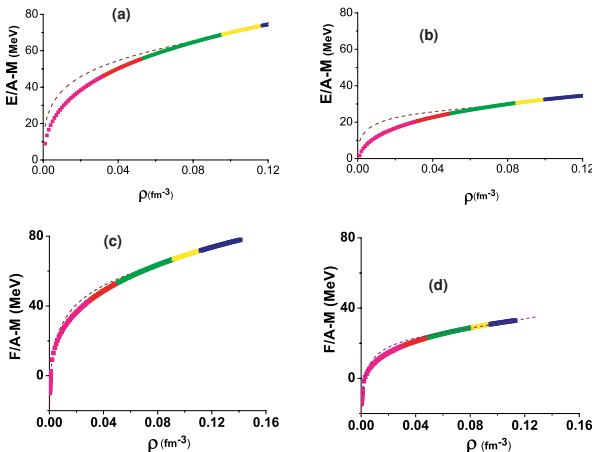


FIG. 2. (Color online) *npe* matter (pasta with the CP method and homogeneous EOS) free energy per particle with the NL3 parametrization obtained for  $T = 0$  MeV: (a)  $Y_p = 0.5$  and (b)  $Y_p = 0.3$ ; and for  $T = 5$  MeV: (c)  $Y_p = 0.5$  and (d)  $Y_p = 0.3$ . The different structures of the pasta are represented by different colors and the dashed line stands for homogeneous matter.

TABLE III. Densities of the inner edge of the crust (crossing points) at finite  $T$  for NL3.

$T$ (MeV)	EOS	Dynamical spinodal versus EOS	Thermodynamical spinodal versus EOS	Pasta (CP) versus uniform matter	$P$ (CP) MeV/fm <sup>3</sup>
0	$Y_p = 0.5$	0.00076/0.083	0.096	0.094	2.58
0	$Y_p = 0.3$	0.00074/0.081	0.094	0.078	1.03
0	$\beta$ -equil.	0.00553/0.053	–	–	–
5	$Y_p = 0.5$	0.008/0.080	0.007/0.094	0.003/0.089	0.29/2.42
5	$Y_p = 0.3$	0.008/0.077	0.008/0.091	0.002/0.075	0.015/1.02
5	$\beta$ -equil.	No crossing	No crossing	–	–
10	$Y_p = 0.5$	0.021/0.066	0.017/0.083	0.02/0.070	0.25/1.83
10	$Y_p = 0.3$	0.023/0.059	0.019/0.076	0.02/0.057	0.24/0.81
10	$\beta$ -equil.	No crossing	No crossing	–	–

matter with  $Y_p = 0.5$  and  $Y_p = 0.3$ . The last value was chosen because it is relevant in supernova matter and newly born neutron stars. In obtaining these curves the coexisting phase (CP) method was used. The nucleon mass was subtracted from the free energy per nucleon because the numbers in this scale can be easily compared with the usual binding energy, normally used at zero temperature. For  $\beta$ -equilibrium matter the CP method with the surface energy defined in (45) does not predict the existence of pasta phase at subsaturation densities. This is an indication of the importance of using a self-consistent method in extreme conditions. We come back to this point later in the text. We observe that for fixed proton fractions, at finite temperatures, the ground-state matter moves from uniform matter to pasta phase to uniform matter again. At low temperatures the onset of the pasta phase occurs at very low densities only distinguishable using a logarithmic scale. For  $T = 10$  MeV the EOS obtained for the pasta phase and homogeneous matter cannot be distinguished within the scales we have chosen. For this reason the graph is not shown, but the densities where the phases cross are shown in Table III.

As density increases the form of the pasta phase varies from droplets to rods, to slabs and sometimes tubes and bubbles before matter becomes uniform, as already shown in Ref. [6]. We verify that this trend is maintained with temperature, what can also be seen in Fig. 3, where the phase structure for matter described within NL3 with  $Y_p = 0.3$  is shown for  $T = 0, 5, 10$  MeV. The pasta phase tends to decrease

as a whole with temperature. The droplet phase is the less affected phase by the increase of temperature while the slab phase is the most sensitive and at  $T = 10$  MeV has almost completely disappeared. This behavior justifies the use in Ref. [2] only of droplet formation in the nonhomogeneous phase.

In the sequel we compare the TF with the CP results for the pasta phase and, in particular, we come back to the problem of the surface energy.

In Fig. 4, just like in Fig. 3, we show the pasta structures with the lowest free energy. In Fig. 4 the phase diagrams at  $T = 0$  with  $Y_p = 0.5$  for NL3 and with  $Y_p = 0.3$  for NL3 and TM1 obtained with CP and TF approximations are compared. With both calculations the pasta phase is larger for larger proton fractions. The beginning of the homogeneous phase is also model dependent, as can be confirmed in Table IV. The main conclusion from this figure is the fact that the structure of the pasta is very sensitive to the method. With the CP approach no tubes (NL3) and bubbles (NL3 and TM1) are present contrary to the result obtained with the TF method. This can be traced back to the way the surface energy is described. As already discussed, the surface energy was parametrized according to Ref. [14,15] for the calculation based on the coexisting phases and the dependence both on the proton fraction and on temperature were included. It results on surface energies smaller for smaller proton fractions and larger temperatures. In the Thomas-Fermi calculation the surface energy results from the self-consistent solutions for the fields and their derivatives

TABLE IV. Densities of the inner edge of the crust (crossing points) at  $T = 0$  MeV.

Parametrization	EOS	Dynamical spinodal versus EOS	Pasta (CP) versus uniform matter	$P$ (CP) MeV/fm <sup>3</sup>	Pasta (TF) versus uniform matter
NL3	$Y_p = 0.5$	0.00076/0.083	0.094	2.58	0.105
NL3	$Y_p = 0.3$	0.00074/0.081	0.078	1.03	0.095
NL3	$\beta$ -equil./ $Y_p = 0.017$	0.00553/0.053	–	–	0.057
TM1	$Y_p = 0.5$	0.00088/0.085	0.093	2.54	0.106
TM1	$Y_p = 0.3$	0.00093/0.084	0.082	1.10	0.097
TM1	$\beta$ -equil./ $Y_p = 0.020$ .	0.00688/0.060	–	–	0.062
GM3	$Y_p = 0.5$	0.00071/0.088	0.095	2.62	0.108
GM3	$Y_p = 0.3$	0.00075/0.087	0.087	1.18	0.102
GM3	$\beta$ -equil./ $Y_p = 0.015$	0.0079/0.062	–	–	0.059

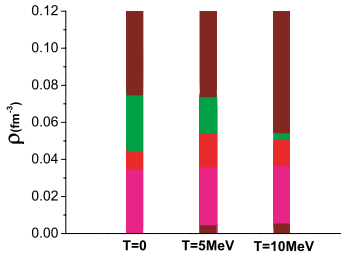


FIG. 3. (Color online) Comparison of the phase diagrams obtained with NL3,  $Y_p = 0.3$  within CP method for  $T = 0, 5, 10$  MeV. From bottom to top the colours represent droplets, rods, slabs, and the homogeneous phase for  $T = 0$  MeV, and homogeneous phase, droplets, rods, slabs, and the homogeneous phase for  $T = 5$  MeV and  $T = 10$  MeV.

as in Refs. [23,27]. Its value is very sensitive to the mass of the lightest meson, the  $\sigma$  meson. We use Eq. (63) to calculate the surface energy within the TF approach. This expression is valid in the limit of a small surface thickness which may break down for structures with a small number of particles. Different values for the surface energy are obtained for each structure of the EOS, as seen in Table II for two fixed proton fractions. In this Table we compare the average surface energy corresponding to each structure in both methods. The CP calculation uses Eq. (45) from Refs. [14,15], which at  $T = 0$  is dependent only on the proton fraction of the dense clusters. Once we set  $Y_p = 0.5$ , the proton fraction of the denser phase is always 0.5 independently of its structure and density. However, for different proton fractions, as  $Y_p = 0.3$ , for instance, the proton fraction of the denser phase becomes larger than 0.3 and the proton fraction of the outside gas is smaller than 0.3. For finite temperature the proton fraction of the denser phase varies also for the  $Y_p = 0.5$  case. In the self-consistent TF calculation the surface energy is also dependent of the shape of the cluster. It is seen that it reduces a lot from the droplet to the bubble configuration having the value of  $0.463$  MeV/fm<sup>2</sup> in this last

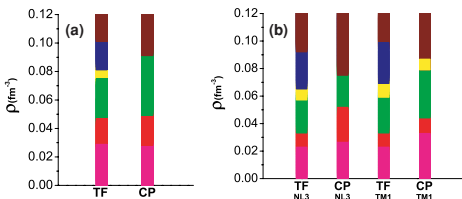


FIG. 4. (Color online) Comparison of the phase diagrams at  $T = 0$  obtained both with CP and TF approximation, for (a) NL3 with  $Y_p = 0.5$  and (b) NL3 and TM1 with  $Y_p = 0.3$ . From bottom to top the colors represent droplets, rods, slabs, tubes, bubbles, and the homogeneous phase for TF NL3 and TM1, and droplets, rods, slabs and the homogeneous phase for CP NL3 and droplets, rods, slabs, tubes, and the homogeneous phase for CP TM1.

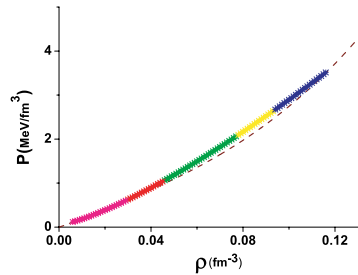


FIG. 5. (Color online) Pressure for  $npe$  matter obtained with NL3,  $T = 10$  MeV and  $Y_p = 0.5$ . The dashed line corresponds to the pressure of the homogeneous phase and the solid line shows the pressures of the different structures of the pasta phase.

case (bubbles) for  $Y_p = 0.3$ , whereas in the CP calculation the value  $0.681$  MeV/fm<sup>2</sup> is used. This explains why the bubblelike structures (tubes and bubbles for NL3 and bubbles for TM1) are not present in the CP results and  $T = 0$  MeV. We expect that also the finite temperature results are affected by the description of the surface energy given by Eq. (45). The use of the CP approach to get an EOS that may be used in supernova calculations (justified because it is very simple to implement from the numerical point of view) requires the knowledge of a good parametrization of the surface energy as a function of the proton fraction, temperature, and geometric shape. Comparing the pasta structure for NL3 and TM1 we conclude that within the TF calculation is very similar although it extends to larger densities for TM1; the CP approach predicts simpler structures (no tubes and bubbles are present for NL3 and no bubbles for TM1) and smaller transition densities to the homogeneous phase. At finite temperature the structure of the pasta and the interfaces between the pasta and the homogeneous phases for NL3 and TM1 show very small model dependence.

A typical figure of the pressure of the pasta phase (CP method) in comparison with the pressure of the homogeneous phase is displayed in Fig. 5. The behavior is the same for all parametrizations,  $npe$  matter with fixed proton fractions or with  $\beta$  equilibrium and all temperatures investigated. However, the magnitude of the pressure is model dependent as seen in Tables IV and III where the pressures at the transition densities are given: GM3 presents the largest pressure at the transition.

We have included Tables IV for  $T = 0$  MeV and III for finite temperature with the information on the densities where the pasta phase ceases to exist and uniform matter becomes the ground-state matter. The related pressures obtained with the CP method are also given as already referred. The pasta phase obtained with TF is systematically larger than the one obtained with the CP method. The binding energy obtained within TF is only slightly smaller than the corresponding CP value and was not included in Fig. 2. This is probably due to the description of the surface of the pasta when matter is

more sensitive to it and a too large surface energy forbids the formation of nonhomogeneous structures. In these tables we also show the densities where the EoS crosses the dynamical spinodal for  $npe$  matter [13]. The dynamical spinodal takes into account both the finite range of the nuclear interaction and the Coulomb interaction and therefore we expect a good correspondence between the range of the nonhomogeneous matter predicted by the dynamical spinodal and by the pasta calculation. In fact it should give a lower limit only, as it does, because in this approach we consider a density fluctuation and the low-density and high-density regions have always the same extension. Structures with a larger extension of the dense or the gas phase are not taken into account and these are the structures that occur at the transition. These differences are larger for more symmetric matter when the energy differences between a nonhomogeneous and a homogeneous phase are greater. We see that the dynamical spinodal prediction for  $\beta$ -equilibrium matter is quite good. We come back to the discussion of  $\beta$ -equilibrium matter in one of the next paragraphs.

In Table III we compare the transition density from the pasta to the homogeneous phase for NL3 and different temperatures. As temperature increases, the EOS of  $\beta$ -equilibrium matter does not vary much, but the spinodal shrinks considerably. Within the formalism used in the present work and the range of densities considered,  $\rho > 0.001 \text{ fm}^{-3}$ , the pasta phase and uniform matter intercept each other twice only for temperatures of the order of 5 MeV. We also include in Table III the points where the EOS crosses the thermodynamical spinodal for  $np$  matter. These numbers should give an order of magnitude of the upper limit of the transition density: neither the Coulomb force nor the finite range of the nuclear force is taken into account. In fact the transition density from a pasta phase to a homogeneous phase is expected to occur for densities below the binodal surface that does not take into account Coulomb force and the finite range of the nuclear force. Therefore, the prediction from the thermodynamical spinodal may be smaller than the TF prediction as we see from the  $T = 0$  calculation. A finite temperature TF calculation should be performed for extreme conditions such as very low proton fractions as the ones found in  $\beta$ -equilibrium matter. The dynamical spinodal at  $T = 5$  MeV does not predict a pasta phase while the TF calculation done in Ref. [19] predicts a transition pasta-homogeneous phase at  $0.045 \text{ fm}^{-3}$ .

We show in Fig. 6 the binding energy, proton fraction, and surface tension for matter in  $\beta$  equilibrium obtained both with the CP and the TF approaches. We also include the binding energy of homogeneous matter. As already discussed, it is seen that within the CP approach there is no pasta phase because the binding energy obtained is larger than the corresponding one for homogeneous matter. For the self-consistent TF approach we get a pasta phase formed only by droplets for densities below  $0.0572 \text{ fm}^{-3}$ . This value agrees with the one obtained in a recent calculation by Gögelein *et al.* [19], where a density-dependent relativistic hadron model was used: they obtain  $0.064 \text{ fm}^{-3}$  in a Hartree calculation and  $0.061 \text{ fm}^{-3}$  in a TF calculation with parametrized densities. It is also interesting to compare this result with the one predicted in a dynamical

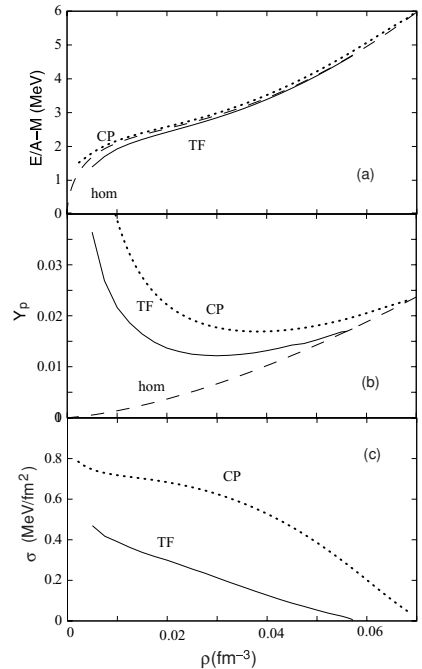


FIG. 6.  $npe$  matter in  $\beta$  equilibrium with the NL3 parametrization at  $T = 0$  for homogeneous phase (dashed curve), TF pasta phase (solid line), and CP pasta phase (dotted line): (a) binding energy; (b) proton fraction  $Y_p$ ; and (c) surface tension.

spinodal calculation [13] given in Table IV,  $0.053 \text{ fm}^{-3}$ , only slightly smaller. The other models tested, TM1 and GM3, predict similar values, respectively,  $0.062$  and  $0.059 \text{ fm}^{-3}$  in a TF calculation and  $0.060 \text{ fm}^{-3}$  and  $0.062 \text{ fm}^{-3}$  from the spinodal calculation.

Similar results to ours with slightly larger transition densities were obtained in Refs. [29,30] using Skyrme interactions. In Refs. [30,31] the transition density for  $\beta$ -equilibrium matter obtained using the Skyrme interaction Sly4 within a TF calculation and the density fluctuations of the free energy were almost coincident, respectively,  $0.077$  and  $0.079 \text{ fm}^{-3}$ . In this work only spherical droplets were obtained in the nonhomogeneous phase. All other configurations have high free energies.

The failure of the CP calculation to predicted a pasta phase may be explained looking at the surface energy, Fig. 6(c): in the CP calculation this quantity is twice (or even more) the one obtained in the TF calculation. This is due, on one hand, to the larger proton fraction obtained with CP as seen in Fig. 6(b) and, on the other, to the parametrization of the surface energy used that seems to fail at very large proton-neutron

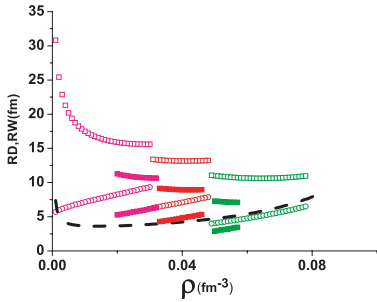


FIG. 7. (Color online) Nuclear sizes for NL3 and  $Y_p = 0.3$ ,  $T = 0$  (empty squares), and 10 MeV (full squares); (top) Wigner Seitz cell radius; (bottom) droplet radius. The dashed line is the output of a dynamical calculation.

asymmetries. In the calculation of the pasta phase this is an essential ingredient. For the TM1 and GM3 parametrizations, the same behaviors are obtained, i.e., no pasta phase for the choice made in Eq. (45). It is seen in Fig. 6(b) that the proton fraction of the clusters is much higher than the one of the gas outside them. This is the so-called distillation effect that tends to increase the proton fraction of the denser phase to reduce the energy by decreasing the contribution of the symmetry term.

We have observed that the differences in the EOS obtained with the simpler CP method and the TF calculation are small for the larger proton fractions. However, for very small proton fractions and close to the transition density the CP method fails. Also the preferential geometry for each density varies significantly, as seen in Figs. 3 and 4. These results are somewhat different from the ones found in Ref. [6], where the pasta structures are very similar. Apart from the parametrization, this difference is probably due to the fact that the energy surface is fixed in their no-Coulomb calculation, whereas ours is parametrized. Although we only have calculations with the TF approach at  $T = 0$  the same kind of difference is expected at finite temperatures.

The nuclear sizes, i.e.,  $R_W$  associated with the Wigner-Seitz cell and  $R_D$  with the internal matter calculated with the CP approach are displayed in Fig. 7. The solid curve in Fig. 7 refers to the size of a cluster that can be found in unstable  $npe$  matter associated with the most unstable mode, i.e., the mode that drives the system into the nonhomogeneous phase [32]. It is interesting to see that the predictions from both calculation are quite similar.

Finally, some examples of the density profiles obtained within the TF calculation for NL3 and symmetric nuclear matter are represented in Fig. 8. To produce these graphs we have fixed a density for which the chosen geometry gives the lowest binding energy state according to the results of Fig. 4. For other proton fractions, the general trend of the density profiles is similar. The size of the Wigner-Seitz cell varies significantly depending on the preferential structure of the pasta phase and so does the electron densities. The proton and neutron densities do not vary much.

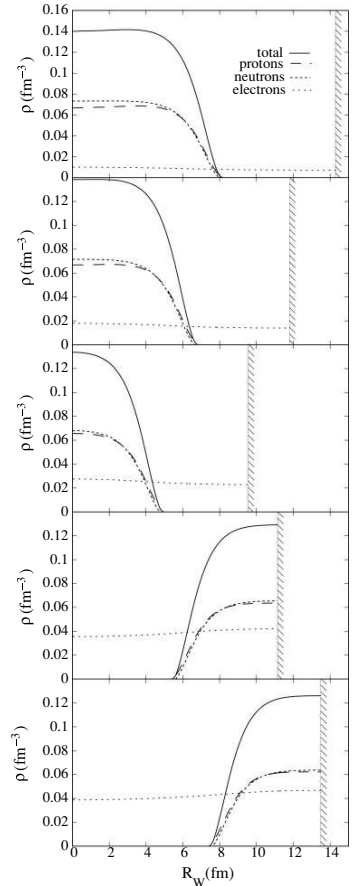


FIG. 8. Density profiles for a TF calculation with the NL3 parametrization and  $Y_p = 0.5$ . From top to bottom the structures are droplet, rod, slab, tube, and bubble.

IV. CONCLUSIONS

In the present article a study on the existence of the pasta phase at zero and finite temperature was performed. Three different parametrizations of the relativistic nonlinear Walecka model [17] were investigated, namely NL3 [11], TM1 [16], and GM3 [20], the last one generally used in the studies of stellar matter.

At zero temperature two different methods were used: the coexisting phases (CP) and the Thomas-Fermi (TF) approximation. Although the final EOS obtained with the different methods do not vary much, the internal structure varies considerably. The TF approximation was performed to

test the much simpler CP calculation. It was shown that the success of the CP calculation depends on the parametrization of the surface energy for very small proton fractions and close to the transition densities.

At finite temperature only the CP method was used and compared with prediction from spinodal calculations. The pasta phase shrinks with the increase of the temperature and we have found that homogeneous matter can be the preferential phase also at very low densities depending on the temperature and the proton fraction. If  $\beta$  equilibrium is imposed the pasta phase does not appear in a CP calculation. This indicates the necessity to use a good parametrization of the surface energy that is temperature, proton fraction, and geometry dependent.

All results are slightly model dependent in the sense that the internal structure of the pasta phase and the interface with the homogeneous phase change with the parametrization used. At  $T = 0$  MeV the different models predict similar transition densities from the pasta phase to the homogeneous phase for  $\beta$ -equilibrium matter within the TF calculation. Only droplets are present in the pasta. This agrees with predictions of the

other RMF models [18,19] and are a bit smaller than the ones obtained with Skyrme interactions [3,30].

Density-dependent hadronic models [12] have shown to provide richer and different results in many cases as compared with the simpler NLWM parametrizations [9,10]. Obtaining the pasta phase at finite temperature with these models is our next goal. Our final aim is the construction of an EOS useful for supernova explosion simulations and neutron star models with appropriate structures (homogeneous and nonhomogeneous matter) as in Ref. [33], but with relativistic models that can easily incorporate degrees of freedom not present in Skyrme-type models as strangeness, for instance.

#### ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially supported by CNPq(Brazil) and FEDER/FCT (Portugal) under the projects POCI/FP/81923/2007 and PDCT/FIS/64707/2006.

- 
- [1] J. Cooperstein, H. A. Bethe, and G. E. Brown, *Nucl. Phys.* **A429**, 527 (1984).
- [2] H. Shen, H. Toki, K. Oyamatsu, and K. Sumiyoshi, *Nucl. Phys.* **A637**, 435 (1998).
- [3] D. G. Ravenhall, C. J. Pethick, and J. R. Wilson, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 2066 (1983).
- [4] C. J. Horowitz, M. A. Pérez-García, and J. Piekarewicz, *Phys. Rev. C* **69**, 045804 (2004); C. J. Horowitz, M. A. Pérez-García, D. K. Berry, and J. Piekarewicz, *Phys. Rev. C* **72**, 035801 (2005).
- [5] F. Duchoin and P. Haensel, *Phys. Lett.* **B485**, 107 (2000).
- [6] T. Maruyama, T. Tatsumi, D. N. Voskresensky, T. Tanigawa, and S. Chiba, *Phys. Rev. C* **72**, 015802 (2005).
- [7] Y. Mochizuki and T. Izuyama, *Astrophys. J.* **440**, 263 (1995).
- [8] P. Chomaz, C. Colonna, and J. Randrup, *Phys. Rep.* **389**, 263 (2004).
- [9] S. S. Avancini, L. Brito, D. P. Menezes, and C. Providência, *Phys. Rev. C* **70**, 015203 (2004).
- [10] S. S. Avancini, L. Brito, P. Chomaz, D. P. Menezes, and C. Providência, *Phys. Rev. C* **74**, 024317 (2006).
- [11] G. A. Lalazissis, J. König, and P. Ring, *Phys. Rev. C* **55**, 540 (1997).
- [12] S. Typel and H. H. Wolter, *Nucl. Phys.* **A656**, 331 (1999).
- [13] L. Brito, C. Providência, A. M. Santos, S. S. Avancini, D. P. Menezes, and P. Chomaz, *Phys. Rev. C* **74**, 045801 (2006).
- [14] J. M. Lattimer, C. J. Pethick, D. G. Ravenhall, and D. Q. Lamb, *Nucl. Phys.* **A432**, 646 (1985).
- [15] J. M. Lattimer and F. D. Swesty, *Nucl. Phys.* **A535**, 331 (1991).
- [16] K. Sumiyoshi, H. Kuwabara, and H. Toki, *Nucl. Phys.* **A581**, 725 (1995).
- [17] B. Serot and J. D. Walecka, *Advances in Nuclear Physics* (Plenum, New York, 1986), Vol. 16.
- [18] P. Gögelein and H. Mütter, *Phys. Rev. C* **76**, 024312 (2007).
- [19] P. Gögelein, E. N. E. van Dalen, C. Fuchs, and H. Mütter, *Phys. Rev. C* **77**, 025802 (2008).
- [20] N. K. Glendenning, *Compact Stars* (Springer-Verlag, New-York, 2000).
- [21] P. Schuck, Y. Funaki, H. Horiuchi, G. Roepke, A. Tóhsaki, and T. Yamada, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **59**, 285 (2007).
- [22] M. Nielsen, C. Providência, and J. da Providência, *Phys. Rev. C* **47**, 200 (1993).
- [23] D. P. Menezes and C. Providência, *Nucl. Phys.* **A650**, 283 (1999); D. P. Menezes and C. Providência, *Phys. Rev. C* **60**, 024313 (1999).
- [24] H. Müller and B. D. Serot, *Phys. Rev. C* **52**, 2072 (1995).
- [25] M. Barranco and J. R. Buchler, *Phys. Rev. C* **22**, 1729 (1980).
- [26] Y. K. Gambhir, P. Ring, and A. Thimet, *Ann. Phys.* **198**, 132 (1990).
- [27] S. S. Avancini, J. R. Marinelli, D. P. Menezes, M. M. W. Moraes, and A. S. Schneider, *Phys. Rev. C* **76**, 064318 (2007).
- [28] S. S. Avancini (private communication).
- [29] C. J. Pethick, D. G. Ravenhall, and C. P. Lorenz, *Nucl. Phys.* **A584**, 675 (1995).
- [30] F. Douchin, P. Haensel, and J. Meyer, *Phys. Lett.* **B485**, 107 (2000).
- [31] F. Douchin, P. Haensel, and J. Meyer, *Nucl. Phys.* **A665**, 419 (2000).
- [32] A. M. Santos, L. Brito, and C. Providência, *Phys. Rev. C* **77**, 045805 (2008).
- [33] W. G. Newton, J. R. Stone, and A. Mezzacappa, *J. Phys.: Conf. Ser.* **46**, 408 (2006).



## Nuclear “pasta phase” and its consequences on neutrino opacities

M. D. Alloy<sup>1,\*</sup> and D. P. Menezes<sup>2,†</sup><sup>1</sup>Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, SC, CEP 89.812-000, Brazil<sup>2</sup>Departamento de Física CFM, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC CP476, CEP 88.040-900, Brazil

(Received 3 November 2010; revised manuscript received 23 December 2010; published 25 March 2011)

In this paper, we calculate the diffusion coefficients that are related to the neutrino opacities considering the formation of nuclear pasta and homogeneous matter at low densities. Our results show that the mean-free paths are significantly altered by the presence of nuclear pasta in stellar matter when compared with the results obtained with homogeneous matter. These differences in neutrino opacities certainly influence the Kelvin-Helmholtz phase of protoneutron stars and consequently the results of supernova explosion simulations.

DOI: 10.1103/PhysRevC.83.035803

PACS number(s): 26.60.Gj, 25.30.Pt

### I. INTRODUCTION

When a massive star ( $8M_{\odot} < M < 30M_{\odot}$ ) exhausts its fuel supply, the forces that support the star’s core quickly retreat, and the core is almost instantly crushed by gravity, which triggers a type-II supernova explosion. The remnant of the gravitational collapse of the core of a massive star is a compact star or a black hole, depending on the initial condition of the collapse. Newly-born protoneutron stars (PNS) are hot and rich in leptons, mostly  $e^{-}$  and  $\nu_e$  and have masses of the order of  $1-2 M_{\odot}$  [1,2]. During the very beginning of the evolution, most of the binding energy, of the order of  $10^{53}$  ergs, is radiated away by the neutrinos.

The composition of protoneutron and neutron stars remains a source of intense speculation in the literature. Whether their internal structure is formed by nucleons and leptons, by other light baryons and leptons, by baryons, leptons, and quarks (bearing or not a mixed phase), by baryons, leptons, and kaons or by other possible composition, is still unknown. The neutrino signals detected by astronomers can be used as a constraint to infer protoneutron star composition [2,3]. For the same purpose, theoretical studies involving different possible equations of state obtained for all sorts of matter composition have to be done because the temporal evolution of the PNS in the so-called Kelvin-Helmholtz epoch, during which the remnant compact object changes from a hot and lepton-rich PNS to a cold and deleptonized neutron star depends on two key ingredients: the equation of state (EoS) and its associated neutrino opacity at supranuclear densities [3,4].

Neutrinos already present or generated in the PNS hot matter escape by diffusion (not free streaming) because of the very high densities and temperatures involved. The neutrino opacity is calculated from the scattering and absorption reactions that take place in the medium and, hence, related to its mean-free path, which is of the order of 10 cm and much smaller than the protoneutron star radius [5]. In the diffusion approximation used to obtain the temporal evolution of the PNS in the Kelvin-Helmholtz phase, the total neutrino mean-free path depends on the calculation of diffusion coefficients, which, in turn, depend on the chosen EoS. At zero

temperature no trapped neutrinos are left in the star because their mean-free path would be larger than the compact star radius.

A complete equation of state capable of describing matter ranging from very low densities to few times the saturation density and from zero temperature to around 50 MeV is a necessary step toward the understanding of PNS evolution. The constitution of the PNS crust plays a definite role in the emission of neutrinos. For this reason, the pasta phase, present in very low nuclear matter as the crust of PNS, is included in the investigation of the neutrino opacity in the present work.

A few words on the pasta phase follow. It is a frustrated system [6–10] present at densities of the order of  $0.006-0.1 \text{ fm}^{-3}$  [11] in neutral nuclear matter and  $0.029-0.065 \text{ fm}^{-3}$  [12,13] in  $\beta$ -equilibrium stellar matter, where a competition between strong and electromagnetic interactions takes place. The basic shapes of these complex structures were named [6] after well-known types of cheese and pasta: droplets = meat balls (bubbles = Swiss cheese), rods = spaghetti (tubes = penne), and slabs = lasagna, for three, two, and one dimensions, respectively. The pasta phase is the ground-state configuration if its free energy per particle is lower than the corresponding to the homogeneous phase at the same density.

The evolution of PNS and the simulation of supernova explosion have already been considered for different matter compositions, some with the inclusion of the pasta phase [3,4,7,14,15]. From [3,4] one can see that the transport properties are significantly affected by the presence or absence of hyperons and of the mixed phase in hybrid stars. In [7], the linear response of the nuclear pasta to neutrinos was calculated with a semiclassical simulation and the muon and tauon neutrinos mean-free path were described by the static structure factor of the pasta evaluated with Metropolis Monte Carlo simulations. In [14], rod-like (two dimensions) and slab-like (one dimension) pasta structures were included in the calculation of neutrino opacity within quantum molecular dynamics. A very interesting conclusion was that the pasta phase occupies 10–20 % of the mass of the supernova core in the later stage of the collapse.

In the present work we investigate the influence of the pasta phase on the neutrino opacity by showing the effects on the diffusion coefficients. The pasta phase is calculated with the

\*alloy@uffs.edu.br

†deboraf@fsc.ufsc.br

coexistence phases method (CP) in a mean field approximation [11,13,16]. We consider only nucleons and leptons in the EoS in  $\beta$  equilibrium. In the pasta structure only electron neutrinos are considered.

In Sec. II we present the formalism used to obtain the equation of state. In Sec. III the recipe used for the construction of the pasta phase is outlined. In Sec. IV the expressions used to calculate the neutrino cross sections and related mean-free path are given and in Sec. V our results are shown and the main conclusions are discussed.

## II. FORMALISM

We consider a system of protons and neutrons with mass  $M$  interacting with and through an isoscalar-scalar field  $\phi$  with mass  $m_s$ , an isoscalar-vector field  $V^\mu$  with mass  $m_v$ , and an isovector-vector field  $\mathbf{b}_\mu$  with mass  $m_\rho$ , described by the well-known nonlinear Walecka model (NLWM) [17]. We impose  $\beta$  equilibrium and charge neutrality with neutrino trapping at finite temperature. At zero temperature no neutrinos are left in the system.

The Lagrangian density reads

$$\mathcal{L} = \sum_{j=p,n} \mathcal{L}_j + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_\omega + \mathcal{L}_\rho + \sum_{l=e,\nu} \mathcal{L}_l, \quad (1)$$

where the nucleon Lagrangian reads

$$\mathcal{L}_j = \bar{\psi}_j [\gamma_\mu i D^\mu - M^*] \psi_j, \quad (2)$$

where  $M^* = M - g_s \phi$  is the effective baryon mass and

$$i D^\mu = i \partial^\mu - g_v V^\mu - \frac{g_\rho}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{b}^\mu. \quad (3)$$

The meson Lagrangian densities are given by

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_s^2 \phi^2 - \frac{1}{3} \kappa \phi^3 - \frac{1}{12} \lambda \phi^4), \quad (4)$$

$$\mathcal{L}_\omega = \frac{1}{2} (-\frac{1}{2} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} + m_v^2 V_\mu V^\mu), \quad (5)$$

$$\mathcal{L}_\rho = \frac{1}{2} (-\frac{1}{2} \mathbf{B}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{B}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \mathbf{b}_\mu \cdot \mathbf{b}^\mu), \quad (6)$$

where  $\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$  and  $\mathbf{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{b}_\nu - \partial_\nu \mathbf{b}_\mu - g_\rho (\mathbf{b}_\mu \times \mathbf{b}_\nu)$ . The lepton Lagrangian densities read

$$\mathcal{L}_l = \bar{\psi}_l [\gamma_\mu i \partial^\mu - m_l] \psi_l, \quad (7)$$

where  $m_e$  is the electron mass and the neutrino mass is  $m_\nu = 0$ .

The parameters of the model are three coupling constants  $g_s$ ,  $g_v$ , and  $g_\rho$  of the mesons to the nucleons, the nucleon mass  $M$ , the electron mass  $m_e$ , the masses of the mesons  $m_s$ ,  $m_v$ , and  $m_\rho$ , and self-interacting coupling constants  $\kappa$  and  $\lambda$ . The numerical values of the parameters used in this work and usually referred to as NL3 [18] are shown in Table I. They are fixed in such a way that the main nuclear matter bulk properties are that the binding energy is equal to 16.3 MeV at the

saturation density  $0.148 \text{ fm}^{-3}$ , the compressibility is 272 MeV, and the effective mass at the saturation density is 0.6  $M$ .

From the Euler-Lagrange formalism we obtain the equations of motion for the nucleons and for the meson fields:

$$\nabla^2 \phi = m_s^2 \phi + \frac{1}{2} \kappa \phi^2 + \frac{1}{3!} \lambda \phi^3 - g_s \rho_s, \quad (8)$$

$$\nabla^2 V_0 = m_v^2 V_0 - g_v \rho_B, \quad (9)$$

$$\nabla^2 b_0 = m_\rho^2 b_0 - \frac{g_\rho}{2} \rho_3, \quad (10)$$

where  $\rho_s$ ,  $\rho_B$ , and  $\rho_3$  are defined next. By replacing the meson fields by their mean values

$$\phi \rightarrow \langle \phi \rangle = \phi_0, \quad (11)$$

$$V_\mu \rightarrow \langle V_\mu \rangle = V_0, \quad (12)$$

$$\mathbf{b}_\mu \rightarrow \langle \mathbf{b}_\mu \rangle = b_0, \quad (13)$$

the equations of motion read

$$\phi_0 = -\frac{\kappa}{2m_s^2} \phi_0^2 - \frac{\lambda}{6m_s^2} \phi_0^3 + \frac{g_s}{m_s^2} \rho_s, \quad (14)$$

$$V_0 = \frac{g_v}{m_v^2} \rho_B, \quad (15)$$

$$b_0 = \frac{g_\rho}{2m_\rho^2} \rho_3, \quad (16)$$

where  $\rho_B = \rho_p + \rho_n$  is the baryonic density and  $\rho_3 = \rho_p - \rho_n$ ,  $\rho_p$  and  $\rho_n$  are the proton and neutron densities given by

$$\rho_j = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (f_{j+} - f_{j-}), \quad j = p, n, \quad (17)$$

where  $f_{j\pm} = 1/(1 + \exp[(\epsilon_j \mp v_j)/T])$ ,  $\epsilon_j = \sqrt{p^2 + M^{*2}}$ , and  $v_j = \mu_j - g_v V_0 - g_\rho \tau_3 b_0$ , where  $\tau_3$  is the appropriate isospin projector for the baryon charge states and  $\mu_j$  are the nucleon chemical potentials. The scalar density  $\rho_s$  is given by

$$\rho_s = 2 \sum_{j=p,n} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \epsilon_j M^* (f_{j+} + f_{j-}). \quad (18)$$

The thermodynamic quantities of interest are given in terms of the meson fields. They are the total energy density

$$\mathcal{E}_T = \mathcal{E} + \sum_{l=e,\nu} \mathcal{E}_l, \quad (19)$$

with

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=p,n} \int dpp^2 \sqrt{p^2 + M^{*2}} (f_{j+} + f_{j-}) + \frac{m_s^2}{2} V_0^2 + \frac{m_\rho^2}{2} b_0^2 + \frac{m_s^2}{2} \phi_0^2 + \frac{\kappa}{6} \phi_0^3 + \frac{\lambda}{24} \phi_0^4, \quad (20)$$

TABLE I. Parameters set used in this work. All masses are given in MeV.

Model	$g_s$	$g_v$	$g_\rho$	$M$	$m_e$	$m_s$	$m_v$	$m_\rho$	$\kappa/M$	$\lambda$
NL3	10.217	12.868	8.948	939.0	0.511	508.194	782.501	763.0	4.377	-173.31

the total pressure is

$$P_T = P + \sum_{l=e,\nu} P_l, \quad (21)$$

with

$$P = \frac{1}{3\pi^2} \sum_{j=p,n} \int dp p^2 \frac{p^4}{\sqrt{p^2 + M^{*2}}} (f_{j+} + f_{j-}) + \frac{m_e^2}{2} V_0^2 + \frac{m_p^2}{2} b_0^2 - \frac{m_s^2}{2} \phi_0^2 - \frac{\kappa}{6} \phi_0^3 - \frac{\lambda}{24} \phi_0^4, \quad (22)$$

and the total entropy density

$$S = \frac{1}{T} \left( \mathcal{E}_T + P_T - \sum_{j=p,n} \mu_j \rho_j - \sum_{l=e,\nu} \mu_l \rho_l \right), \quad (23)$$

where the electron and electron neutrino energy densities are

$$\mathcal{E}_l = \frac{g_l}{2\pi^2} \int dp p^2 \sqrt{p^2 + m_l^2} (f_{l+} + f_{l-}), \quad (24)$$

and electron and electron neutrino pressure are

$$P_l = \frac{g_l}{6\pi^2} \int dp \frac{p^4}{\sqrt{p^2 + m_l^2}} (f_{l+} + f_{l-}). \quad (25)$$

The electron density  $\rho_e$  and electron neutrino density  $\rho_\nu$  are given by

$$\rho_l = g_l \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (f_{l+} - f_{l-}), \quad (26)$$

where  $g_e = 2$ ,  $g_\nu = 1$ , and  $f_{l\pm}$  are distributions of Fermi-Dirac given by

$$f_{l\pm} = 1/(1 + \exp[(\epsilon_l \mp \mu_l)/T]), \quad (27)$$

with  $\epsilon_l = \sqrt{p^2 + m_l^2}$  and  $\mu_e$  is the electron chemical potential,  $\epsilon_\nu$  is the electron neutrino energy, and  $\mu_\nu$  is the electron neutrino chemical potential. The condition of  $\beta$  equilibrium in a system of protons, neutrons, electrons, and trapped electron neutrinos is

$$\mu_p = \mu_n - \mu_e + \mu_\nu. \quad (28)$$

We impose neutrality of charge as  $\rho_p = \rho_e$  and fix the lepton fraction

$$Y_L = \frac{\rho_e + \rho_\nu}{\rho_B}. \quad (29)$$

Notice that muons are not considered in the present calculation.

### III. COEXISTING PHASES: NEUTRAL NUCLEAR MATTER WITH NEUTRINO TRAPPING

The formation of the pasta phase has been studied lately with great interest [7,19]. Next we show the main steps for the calculation of the pasta phase with the coexistence phases method based on [20,21]. For further details, please refer to [11,13].

For a given total density  $\rho_B$  and lepton fraction  $Y_L$  we build pasta structures with different geometrical forms in a background nucleon gas with  $\beta$  stability and neutrino trapping.

This is achieved by calculating from the Gibbs conditions the density and the particle fractions of the pasta and of the background gas so that in the whole we had to solve simultaneously the following seven equations:

$$P^I(v_p^I, v_n^I, M^{*I}) = P^{II}(v_p^{II}, v_n^{II}, M^{*II}), \quad (30)$$

$$\mu_n^I = \mu_n^{II}, \quad (31)$$

$$\mu_e^I = \mu_e^{II}, \quad (32)$$

$$\mu_\nu^I = \mu_\nu^{II}, \quad (33)$$

$$m_s^2 \phi_0^I + \frac{\kappa}{2} (\phi_0^I)^2 + \frac{\lambda}{6} (\phi_0^I)^3 = g_s \rho_s^I, \quad (34)$$

$$m_s^2 \phi_0^{II} + \frac{\kappa}{2} (\phi_0^{II})^2 + \frac{\lambda}{6} (\phi_0^{II})^3 = g_s \rho_s^{II}, \quad (35)$$

$$f(\rho_p^I - \rho_e^I) + (1-f)(\rho_p^{II} - \rho_e^{II}) = 0, \quad (36)$$

where  $I$  and  $II$  label each of the phases,  $f$  is the volume fraction of phase  $I$

$$f = \frac{\rho_B - \rho^{II}}{\rho^I - \rho^{II}}. \quad (37)$$

The total pressure is given by  $P_T = P^I + P_e + P_\nu$ . The total energy density of the system is given by

$$\mathcal{E} = f \mathcal{E}^I + (1-f) \mathcal{E}^{II} + \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_\nu + \mathcal{E}_{\text{surf}} + \mathcal{E}_{\text{Coul}}, \quad (38)$$

with  $\mathcal{E}_{\text{surf}} = 2\mathcal{E}_{\text{Coul}}$  [6,9], and

$$\mathcal{E}_{\text{Coul}} = \frac{2\alpha}{4\pi^{2/3}} (e^2 \pi \Phi)^{1/3} [\sigma D (\rho_p^I - \rho_p^{II})]^{2/3}, \quad (39)$$

where  $\alpha = f$  for droplets, rods, and slabs and  $\alpha = 1 - f$  for bubbles and tubes,  $\sigma$  is the surface energy coefficient,  $D$  is the dimension of the system. For droplets, rods, and slabs,  $\Phi$  is given by

$$\Phi = \begin{cases} \left[ \left( \frac{2-D}{D-2} f^{1-\frac{2}{D}} + f \right) \frac{1}{D+2} \right], & D = 1, 3, \\ \frac{f-1-\ln(f)}{D+2}, & D = 2, \end{cases} \quad (40)$$

and for bubbles the above expressions are valid with  $f$  replaced by  $1 - f$ . The surface tension plays a significant role on the appearance of the pasta phase. In our treatment of the surface tension we essentially follow the prescription given in [11, 13], but some comments on the importance of the surface energy on the calculation of the pasta phase are mandatory. It has been shown that the existence of the pasta phase as the lowest free-energy matter and of its internal structures essentially depends on the value of the surface tension [9,11, 13,16,22]. In the present paper the surface energy coefficient is parametrized in terms of the proton fraction according to the functional proposed in [23], obtained by fitting Thomas-Fermi and Hartree-Fock numerical values with a Skyrme force. The same prescription was used in [11,13]. However, a better recipe is to consider the surface energy coefficient in a consistent way, in terms of relativistic models. In [16] the surface energy was parametrized according to the Thomas-Fermi calculations for three parametrizations of the relativistic NLWM. The Gibbs prescription was used to obtain the  $\sigma$  coefficient which is the appropriate surface tension coefficient to be used [24,25]. This

improvement will be added to our calculations in a forthcoming work.

#### IV. NEUTRINO CROSS SECTIONS

To calculate neutrino opacities and mean-free paths we consider [5] neutral current scattering reactions

$$\nu_e + n \rightarrow \nu_e + n, \quad (41)$$

$$\nu_e + p \rightarrow \nu_e + p, \quad (42)$$

and charged current absorption reactions

$$\nu_e + n \rightarrow e^- + p, \quad (43)$$

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n. \quad (44)$$

The cross sections for reactions (41), (42), (43), and (44) employed in this study follow [5].

Reaction (41):

$$\sigma_n = \begin{cases} \sigma_{\text{ref}} = \left(\frac{\sigma_0}{4}\right) \left(\frac{\epsilon_\nu}{m_e c^2}\right)^2, & n\text{ND}, \nu\text{D or } \nu\text{ND}, \\ \sigma_{\text{ref}} \left(\frac{\epsilon_\nu}{p_F c}\right) \left(\frac{(1+4g_A^2)}{5}\right), & n\text{D}, \nu\text{ND}, [26], \\ \sigma_{\text{ref}} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\pi^2(1+2g_A^2)}{8}\right) \\ \times \left(\frac{T}{\epsilon_\nu}\right) \left(\frac{T}{p_F c}\right) \left(\frac{M^* c^2}{\epsilon_F}\right), & n\text{D}, \nu\text{D}, [27,28]. \end{cases} \quad (45)$$

Reaction (42):

$$\sigma_p = \begin{cases} \sigma_n, & p\text{ND}, \nu\text{D or } \nu\text{ND}, \\ \sigma_n \left(\frac{Y_n}{Y_p}\right)^{1/3}, & p\text{D}, \nu\text{ND}, \\ \sigma_n \left(\frac{Y_n}{Y_p}\right), & p\text{D}, \nu\text{D}, [27]. \end{cases} \quad (46)$$

Reactions (43) and (44):

$$\sigma_a = \begin{cases} \sigma_{\text{ref}}(1+3g_A^2), & n\text{ND}, \nu\text{ND}, \\ \sigma_{\text{ref}}(1+3g_A^2) \left(\frac{2Y_p}{Y_n+Y_p}\right), & n\text{ND}, \nu\text{D or } \nu\text{ND} [29], \\ \sigma_{\text{ref}}(1+3g_A^2) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3\pi^2}{16}\right) \left(\frac{T}{\epsilon_\nu}\right)^2 \left(\frac{M^* c^2}{\epsilon_F}\right) \left(\frac{Y_n}{Y_p}\right)^{1/3}, & n\text{D}, \nu\text{D}, [26], \\ 0, & n\text{D}, Y_L < 0.08. \end{cases} \quad (47)$$

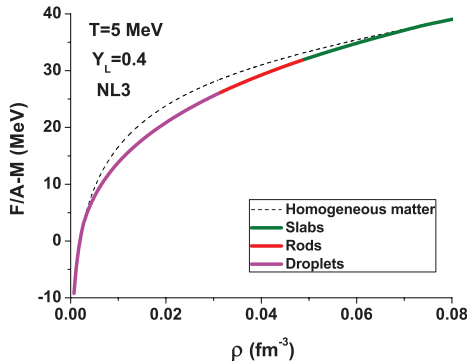


FIG. 1. (Color online) Free energy per particle with the NL3 parametrization obtained for  $T = 5$  MeV and  $Y_L = 0.4$ .

In these expressions  $p_F$  and  $\epsilon_F$  mean the Fermi momentum and Fermi energy of the degenerate neutron.  $Y_e, Y_n, Y_p, Y_L$  are the electron, neutron, proton, and lepton fractions. ND denotes the nondegenerate regime, while D denotes the validity in case of degenerate particles.  $\sigma_0 = 1.76 \times 10^{-44}$  cm<sup>2</sup> and  $g_A = 1.254$ . Regions of intermediate degeneracy are also handled: the degenerate and nondegenerate sectors for both the baryons and the neutrinos of the cross sections detailed in Eqs. (45), (46), and (47) are joined by a simple interpolation algorithm as done in [2].

$$\sigma_{n,p}^* = \psi_{n,p} \sigma_{n,p}(n, p\text{ND}) + (1 - \psi_{n,p}) \times [\psi_\nu \sigma_{n,p}(n, p\text{D}, \nu\text{ND}) + (1 - \psi_\nu) \sigma_{n,p}(n, p\text{D}, \nu\text{D})], \quad (48)$$

$$\sigma_a^* = \psi_n \psi_\nu \sigma_a(n\text{ND}, \nu\text{ND}, \text{or } \nu\text{D}) + (1 - \psi_n)(1 - \psi_\nu) \sigma_a(n\text{D}, \nu\text{D}) \Theta(Y_L - 0.08), \quad (49)$$

where  $\Theta(x)$  denotes the step function and the value 0.08 was chosen in such a way that the absorption cross section is set

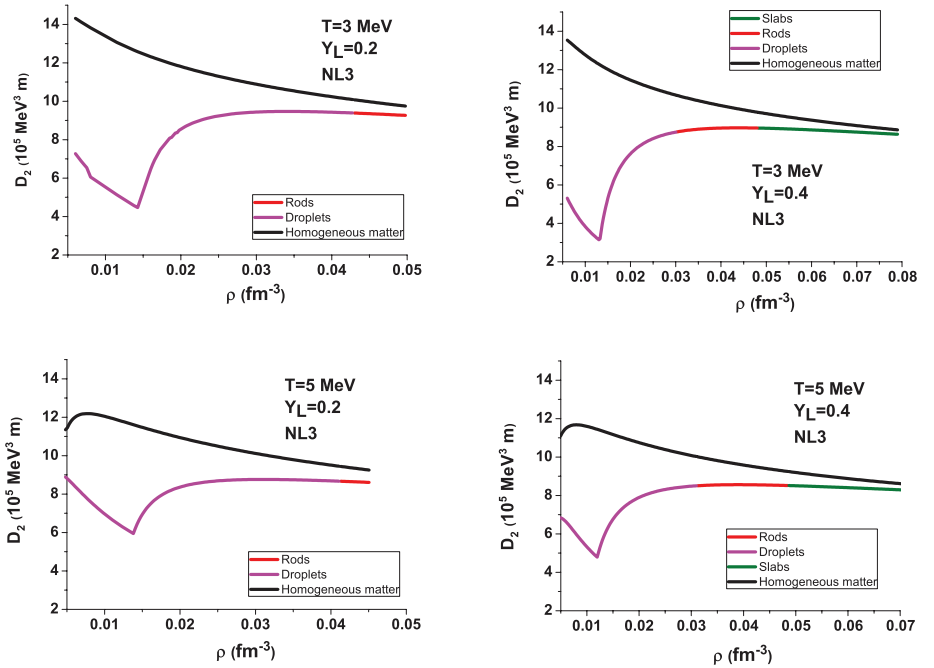


FIG. 2. (Color online) Diffusion coefficient  $D_2$  as function of baryon density for different temperature and proton fraction values for homogeneous matter and pasta phase.

to zero when the lepton fraction is too small ( $Y_L < 0.08$ ). The  $\psi_i$  are dimensionless factors given by

$$\psi_i = 1/[1 + \max(0, \eta_i)] \quad \text{for } i = n, p, \nu, \quad (50)$$

where

$$\eta_{n,p} = \mu_{n,p}/T, \quad (51)$$

is the neutrino degeneracy parameter and

$$\eta_{n,p} = (\mu_{n,p} - M^*)/T \quad (52)$$

defines neutron and proton degeneracy parameters. The total neutrino mean-free path in dense matter is written in terms of cross sections  $\sigma_a^*$ ,  $\sigma_n^*$ , and  $\sigma_p^*$  as

$$\lambda_\nu = \frac{1}{\rho_n \sigma_n^* + \rho_p \sigma_p^* + \rho_B \sigma_a^*}, \quad (53)$$

where the  $\psi_i$  factors in Eqs. (48) and (49) set the degree of dependence of the mean-free path with the degeneracy parameters  $\eta_i$ . Rosseland neutrino mean-free paths are related with the diffusion coefficients  $D_k$  [4] by

$$\lambda_\nu^k = \frac{D_k}{\int_0^\infty d\epsilon_\nu \epsilon_\nu^k f_\nu(\epsilon_\nu) [1 - f_\nu(\epsilon_\nu)]}, \quad (54)$$

where we have [30]

$$D_k = \int_0^\infty d\epsilon_\nu \epsilon_\nu^k \lambda_\nu(\epsilon_\nu) f_\nu(\epsilon_\nu) [1 - f_\nu(\epsilon_\nu)], \quad k = 2, 3, 4, \quad (55)$$

are the diffusion coefficients and  $f_\nu(\epsilon_\nu)$  is the Fermi-Dirac distribution given in Eq. (27).

The diffusion coefficients  $D_2$ ,  $D_3$ , and  $D_4$  are strongly dependent on the EoS and are functions of three thermodynamic variables:  $\rho_B$ ,  $T$ , and  $Y_L$ . The calculation of these coefficients consists basically of three steps: We first fix  $\rho_B$ ,  $T$ , and  $Y_L$  from the EoS to calculate the cross sections  $\sigma_p$ ,  $\sigma_n$ , and  $\sigma_a$  as a function of the neutrino energy by Eqs. (45), (46), and (47). The second step is an interpolation using Eqs. (48) and (49) to obtain  $\sigma_p^*$ ,  $\sigma_n^*$ , and  $\sigma_a^*$  for the intermediate degeneracy regime. The last step is to integrate in neutrino energy. The numerical procedure used to calculate the diffusion coefficients to homogeneous and inhomogeneous matter is the same, except for the nucleon effective mass. The pasta structure is obtained by the coexistence phases method, which is based on the enforcement of the Gibbs conditions given in Eq. (36). Hence, all other thermodynamic variables (chemical potentials of all particle species, temperature, pressure, and lepton fraction), necessary to calculate the neutrino mean-free

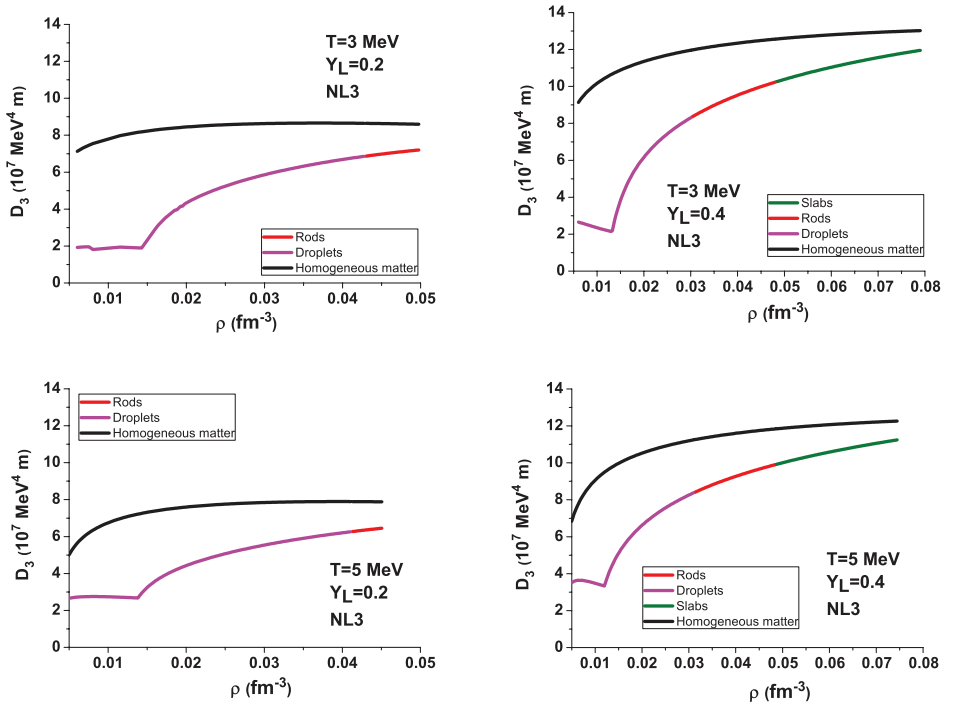


FIG. 3. (Color online) Diffusion coefficient  $D_3$  as function of baryon density for different temperature and proton fraction values for homogeneous matter and pasta phase.

path, and consequently the diffusion coefficients of the pasta phase are equal in both phases. Thus, for inhomogeneous matter, we set

$$M^* = fM^{*l} + (1-f)M^{*ll} \quad (56)$$

for the effective nucleon masses and we use global neutron and proton fractions  $Y_n$  and  $Y_p$  to calculate the cross sections in the pasta phase.

All contributions from neutrino opacities are related to the diffusion coefficients and can be used as an input to the solution of the transport equations in the equilibrium diffusion approximation to simulate the Kelvin-Helmholtz phase of the protoneutron stars [30].

## V. RESULTS AND CONCLUSIONS

Before we tackle the problem of the consequences of the pasta phase on the diffusion coefficients, we display a characteristic figure of the free energy for the homogeneous and pasta-like matter obtained for  $T = 5$  MeV and  $Y_L = 0.4$  in Fig. 1. A similar figure is presented in Fig. 9 of [16], but

obtained with a relativistic surface energy. One can see that the pasta phase ends when the free-energy density reaches the curve for the homogeneous matter. Actually, at this temperature, the pasta phase interpolates between two regions of homogeneous matter, which is the preferential ground state at extremely low densities, as seen in Fig. 1.

Moreover, the size of the pasta phase decreases with the increase of the temperature and, eventually, it no longer exists. It is also worth mentioning that neutrino-free matter in  $\beta$  equilibrium presents a pasta phase smaller than matter with trapped neutrinos [13,16] as a consequence of the fact that the latter presents a larger fraction of protons. According to studies on binodals and spinodals underlying the conditions for phase coexistence and phase transitions [11,31,32], non-homogeneous matter with trapped neutrinos is expected to be found up to temperatures around  $T = 12$  MeV, depending on the model considered.

We next show the diffusion coefficients  $D_2$ ,  $D_3$ , and  $D_4$  as a function of the baryon density for different temperatures obtained for both homogeneous matter and the pasta phase. According to [11,13] the densities where matter becomes homogeneous depend on the proton fraction and on the

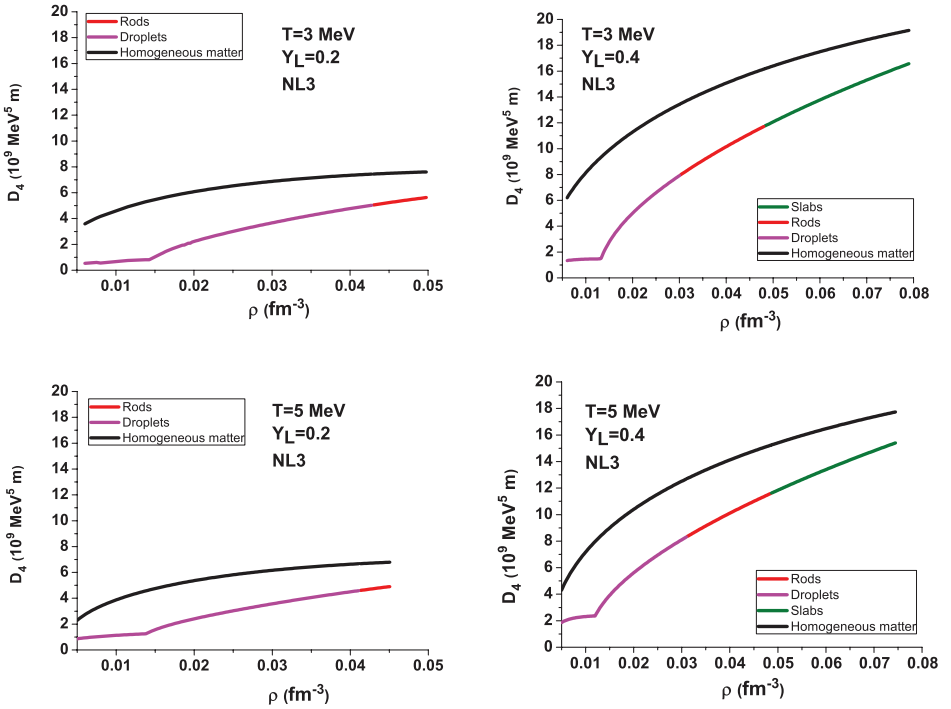


FIG. 4. (Color online) Diffusion coefficient  $D_4$  as a function of baryon density for different temperature and proton fraction values for homogeneous matter and pasta phase.

temperatures involved, but it is always smaller than  $0.1 \text{ fm}^{-3}$  for the NL3 parametrization and for the  $\sigma$  values we consider in the present work.

In obtaining the diffusion coefficients, the EoS was calculated as a grid where temperature ranges are between 0 and 50 MeV and densities vary from  $0.005$  to  $0.5 \text{ fm}^{-3}$ . In our codes we have implemented a prescription given in [33] to evaluate the Fermi integrals so that the same codes run from zero ( $10^{-9}$ ) to high temperatures. We have calculated the diffusion coefficients only for baryonic densities above  $0.005 \text{ fm}^{-3}$  because the integrals of the type in Eq. (55) are very difficult to converge at lower densities. We show results for lepton fractions equal to 0.2 and 0.4 because those are typical values necessary in the numerical simulation of protoneutron star evolution.

In all figures the diffusion coefficients obtained with homogeneous matter join the curves obtained with the pasta phase at densities higher than the ones shown. For  $D_2$  calculated at  $T = 5 \text{ MeV}$  and  $Y_L = 0.4$ , for instance, they cross each other at  $\rho = 0.12 \text{ fm}^{-3}$ . Our codes interrupt the calculation once homogeneous matter becomes the ground state configuration, as depicted in Fig. 1. This means that

there will always be a gap in the diffusion coefficients when the transport equations are calculated with the inclusion of the pasta phase. The same behavior is found at the pressure values for homogeneous and pasta phases at the transition density.

From Figs. 2, 3, and 4 we can see that only three structures are found inside the pasta phase for the present model: droplets, rods, and slabs as far as  $Y_L = 0.4$ . For  $Y_L = 0.2$  only the first two structures remain. While the diffusion coefficients obtained with homogeneous matter is always smooth and continuous, a common trend of all the diffusion coefficients obtained with the pasta phase is a kink at very low densities in between  $0.01$  and  $0.015 \text{ fm}^{-3}$ . The interpolation procedure we use depends on the quantities  $\eta_i = (\mu_i - M^*)/T$ ,  $i = p, n$ , as mentioned in the explanation of the numerical procedure. Whenever either  $\eta_p$  or  $\eta_n$  inverts its sign, these kinks appear, i.e., they are the result of the effective nucleon mass being greater than the corresponding chemical potential. The sign of the  $\eta_i$ 's also explains the two different behaviors delimited by the kinks in the diffusion coefficient curves:  $\eta_i$  negative means  $\psi_i = 1$ , otherwise  $\psi_i$  depends on the  $\eta_i$  value, as we can see from Eq. (50). Moreover, the pasta phase diffusion coefficients

are always lower than the corresponding coefficients obtained with homogeneous matter.

Our results for the diffusion coefficients  $D_2$  and  $D_4$  are one order of magnitude larger than the results obtained in [30]. This difference can be explained because in the present paper all diffusion coefficients are calculated at very low baryonic densities. For larger densities the results coincide.

In summary we point out that in the present paper we have investigated the influence of the pasta phase on the neutrino opacity by calculating the diffusion coefficients. The homogeneous EoS was obtained with the NL3 parametrization of the NLWM in a mean-field approximation. The pasta phase was obtained with the coexistence phases method (CP).

Recent calculations for the pasta phase within the Thomas-Fermi approximation at finite temperatures [34] show that the internal pasta structure is much richer as compared with the CP method we have employed in the present work. Hence, the dependence on the structure of the pasta phase is also of interest and this calculation is planned for different

parametrizations of the NLWM. More sophisticated matter, which includes the  $\alpha$  particles, should also be considered [16].

We have checked that the neutrino interactions in warm and low baryonic densities with pasta formation show significant differences when compared with homogeneous matter. Next the temporal evolution of the PNS will be calculated and, in the face of the present results, we expect that the cooling and deleptonization eras will be influenced by the presence of the pasta phase at low densities.

An obvious improvement is the inclusion of hyperons in the EoS. However, the pasta phase can still be computed just with protons, neutrons, and light clusters because hyperons are expected to appear only at densities where the pasta phase is no longer present.

#### ACKNOWLEDGMENTS

M.D.A. acknowledges financial support from the Brazilian sponsoring organizations CNPq and CAPES which partially supported this work.

- 
- [1] J. M. Lattimer and M. Prakash, *Science* **304**, 536 (2004).  
 [2] W. Keil and H. Janka, *Astron. Astrophys.* **296**, 145 (1995).  
 [3] J. A. Pons, A. W. Steiner, M. Prakash, and J. M. Lattimer, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5223 (2001).  
 [4] J. A. Pons, S. Reddy, M. Prakash, J. M. Lattimer, and J. A. Miralles, *Astrophys. J.* **513**, 780 (1999).  
 [5] A. Burrows and J. M. Lattimer, *Astrophys. J.* **307**, 178 (1986).  
 [6] D. G. Ravenhall, C. J. Pethick, and J. R. Wilson, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 2066 (1983).  
 [7] C. J. Horowitz, M. A. Perez-Garcia, and J. Piekarewicz, *Phys. Rev. C* **69**, 045804 (2004).  
 [8] C. J. Horowitz, M. A. Perez-Garcia, D. K. Berry, and J. Piekarewicz, *Phys. Rev. C* **72**, 035801 (2005).  
 [9] T. Maruyama, T. Tatsumi, D. N. Voskresensky, T. Tanigawa, and S. Chiba, *Phys. Rev. C* **72**, 015802 (2005).  
 [10] G. Watanabe and H. Sonoda, [arXiv:cond-mat/0502515](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0502515).  
 [11] S. S. Avancini, D. P. Menezes, M. D. Alloy, J. R. Marinelli, M. M. W. Moraes, and C. Providência, *Phys. Rev. C* **78**, 015802 (2008).  
 [12] J. Xu, L. W. Chen, B. A. Li, and H. R. Ma, *Phys. Rev. C* **79**, 035802 (2009).  
 [13] S. S. Avancini, L. Brito, J. R. Marinelli, D. P. Menezes, and M. M. W. de Moraes, C. Providência, and A. M. Santos *Phys. Rev. C* **79**, 035804 (2009).  
 [14] H. Sonoda, G. Watanabe, K. Sato, T. Takiwaki, K. Yasuoka, and T. Ebisuzaki, *Phys. Rev. C* **75**, 042801(R) (2007).  
 [15] G. Watanabe, H. Sonoda, T. Maruyama, K. Sato, K. Yasuoka, and T. Ebisuzaki, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 121101 (2009).  
 [16] S. S. Avancini, C. C. Barros, D. P. Menezes, and C. Providência, *Phys. Rev. C* **82**, 025808 (2010).  
 [17] B. Serot and J. D. Walecka, *Advances in Nuclear Physics* (Plenum Press, New York, 1986), Vol. 16, p. 1.  
 [18] G. A. Lalazissis, J. König, and P. Ring, *Phys. Rev. C* **55**, 540 (1997).  
 [19] G. Watanabe, T. Maruyama, K. Sato, K. Yasuoka, and T. Ebisuzaki, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 031101 (2005).  
 [20] M. Barranco and J. R. Buchler, *Phys. Rev. C* **22**, 1729 (1980).  
 [21] D. P. Menezes and C. Providência, *Phys. Rev. C* **60**, 024313 (1999).  
 [22] G. Watanabe, K. Iida, and K. Sato, *Nucl. Phys. A* **676**, 455 (2000); **687**, 512 (2001); **726**, 357 (2003).  
 [23] J. M. Lattimer, C. J. Pethick, D. G. Ravenhall, and D. Q. Lamb, *Nucl. Phys. A* **432**, 646 (1985).  
 [24] M. Centelles, M. Del Estal, and X. Viñas, *Nucl. Phys. A* **635**, 193 (1998).  
 [25] W. D. Myers and W. J. Swiatecki, *Phys. Rev. C* **63**, 034318 (2001).  
 [26] N. Iwamoto, Ph.D. thesis, AA, Illinois University, Urbana-Champaign, 1981.  
 [27] B. T. Goodwin and C. J. Pethick, *Astrophys. J.* **253**, 816 (1982).  
 [28] R. F. Sawyer and A. Soni, *Astrophys. J.* **230**, 859 (1979).  
 [29] S. A. Bludman and K. A. van Riper, *Astrophys. J.* **224**, 631 (1978).  
 [30] S. Reddy, M. Prakash, and J. M. Lattimer, *Phys. Rev. D* **58**, 013009 (1998).  
 [31] C. Ducoin, C. Providência, A. M. Santos, L. Brito, and Ph. Chomaz, *Phys. Rev. C* **78**, 055801 (2008).  
 [32] H. Pais, A. Santos, and C. Providência, *Phys. Rev. C* **80**, 045808 (2009).  
 [33] J. M. Aparício, *Astrophys. J. Suppl.* **117**, 627 (1998).  
 [34] S. S. Avancini, S. Chiacchiera, D. P. Menezes, and C. Providência, *Phys. Rev. C* **82**, 055807 (2010).