

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

Antonio da Silva Silveira

**CONTRIBUIÇÕES AO CONTROLE DE VARIÂNCIA  
MÍNIMA GENERALIZADO:  
ABORDAGEM DE PROJETO NO ESPAÇO DE ESTADOS**

Florianópolis

2012



Antonio da Silva Silveira

**CONTRIBUIÇÕES AO CONTROLE DE VARIÂNCIA  
MÍNIMA GENERALIZADO: ABORDAGEM DE  
PROJETO NO ESPAÇO DE ESTADOS**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas.

Orientador: Prof. Antonio Augusto Rodrigues Coelho, Dr.

Florianópolis

2012

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária  
da  
Universidade Federal de Santa Catarina

S587c Silveira, Antonio da Silva

Contribuições ao controle de variância mínima generalizado [tese] : abordagem de projeto no espaço de estados / Antonio da Silva Silveira ; orientador, Antônio Augusto Rodrigues Coelho. - Florianópolis, SC, 2012.

149 p.: il., grafs., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Inclui referências

1. Engenharia de sistemas. 2. Automação. 3. Métodos de espaço de estados. 4. Kalman, Filtragem de. 5. Aproximação diofantina. 6. Análise de variância. I. Coelho, Antonio Augusto Rodrigues. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. III. Título.

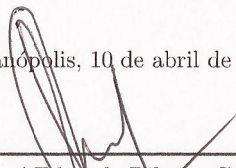
CDU 621.3-231.2(021)

Antonio da Silva Silveira

**CONTRIBUIÇÕES AO CONTROLE DE VARIÂNCIA  
MÍNIMA GENERALIZADO: ABORDAGEM DE  
PROJETO NO ESPAÇO DE ESTADOS**

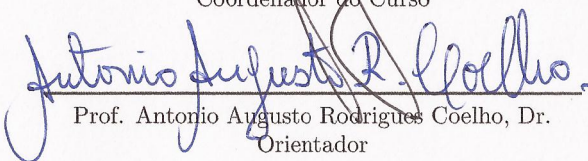
Esta Tese foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Florianópolis, 10 de abril de 2012.



---

Prof. José Eduardo Ribeiro Cury, Dr.  
Coordenador do Curso



---


Prof. Antonio Augusto Rodrigues Coelho, Dr.  
Orientador

**Banca Examinadora:**



---

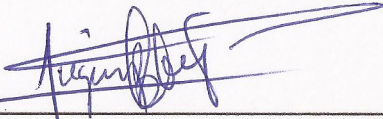
Prof. Antonio Augusto Rodrigues Coelho, Dr., DAS/UFSC  
Presidente



---

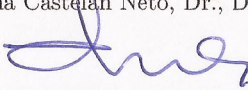
Prof. Daniel Ferreira Coutinho, Dr., DAS/UFSC





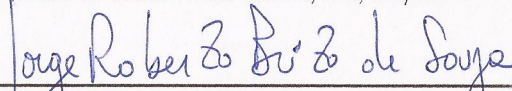
---

Prof. Eugênio de Bona Castellan Neto, Dr., DAS/UFSC



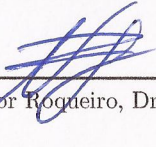
---

Prof. Francisco José Gomes, Dr., FE/UFJF



---

Prof. Jorge Roberto Brito de Souza, Dr., DEE/UFPA



---

Prof. Nestor Roqueiro, Dr., DAS/UFSC





## AGRADECIMENTOS

Início com o especial agradecimento a minha amada esposa, Aline Silveira, que dividiu comigo as alegrias e dificuldades enfrentadas durante toda a minha vida acadêmica, deixando parentes e amigos para mudar-se para Florianópolis, me acompanhar durante o doutoramento e paralelamente desenvolver seus próprios planos acadêmicos e profissionais dentro desse novo contexto. Sem dúvida alguma, esta tese é tanto dela quanto minha, considerando as inúmeras horas em que ela se dedicou a ouvir minhas explicações, reclamações e dúvidas, além das horas de diversão que tivemos de abdicar juntos para que este trabalho fosse concluído. A você, Aline, muito obrigado!

À minha família inteira por todo o apoio e atenção, especialmente dos meus pais, Antonio e Lucilêda, e minha irmã, Luciana, pelo carinho e incentivo de uma vida inteira. Sou grato por cada momento que passamos juntos e que sem dúvida moldaram a pessoa que sou hoje.

Ao amigo e orientador, Prof. Antonio Coelho, por todos os conselhos durante tantos cafezinhos que tomamos juntos. Sem dúvida uma parceria inesquecível para mim e que guardarei na memória como um padrão referencial na minha vida pessoal e profissional, para que um dia eu possa repetir algo similar com meus próprios alunos.

A todos os meus amigos, especialmente a Tanísia, o Jim e o Vitor, que tiveram também um papel fundamental durante o período das disciplinas que fizemos juntos. Também ao meu grande amigo Tales Imbiriba, não somente pelo apoio na educação, mas também pelos momentos de diversão e companheirismo na prática do tão amado surf.

A todos os professores que contribuíram com a minha formação e aos que avaliaram esta tese, com destaque ao Prof. Jorge Brito de Souza que me acompanha desde a graduação e mestrado ainda na Universidade Federal do Pará.

Às universidades federais, UFSC e UFPA, que proporcionaram os meios para a minha formação acadêmica. Ao Departamento de Automação e Sistemas da UFSC, à CAPES e ao CNPq, pela confiança e financiamento.

Agradeço ao meu país – este grande Brasil que nem sempre me orgulho, mas amo e respeito – pelas oportunidades a mim fornecidas.



## RESUMO

Neste trabalho, o controlador de Variância Mínima Generalizado, GMV, é desenvolvido no domínio de representações no espaço de estados, beneficiando-se de uma equivalência de seu preditor de variância mínima com uma solução particular do Filtro de Kalman, a qual caracteriza uma atraente abordagem por evitar a solução da equação de Diophantine.

O procedimento de projeto se baseia na característica de que a estrutura do controlador é herdada do modelo de projeto, onde variáveis de estado estimadas, com significado ou comportamento físico compreensível, entram na síntese de uma lei de controle por realimentação de estados estimados. A complexidade da estrutura do controlador é então ditada pela complexidade do modelo de projeto, mas o procedimento de sintonia, mesmo para sistemas multivariáveis e com múltiplos atrasos assíncronos, é factível de ser executado e implementado.

A idéia usada no GMV via realimentação de estados está focada no controlador GMV de ordem mínima, o qual é sintonizado por um único parâmetro escalar que pondera a energia empregada no sinal de controle. Mas como o conceito de variáveis de estado é introduzido, a lei de controle resultante é uma composição de diversos GMVs de ordem mínima, um para cada variável de estado considerada no problema.

A base teórica para o desenvolvimento desse controlador por realimentação de estados estimados é um novo procedimento de projeto de controle GMV no espaço de estados, conhecido como GMVSS. Este procedimento difere do original, de Clarke e Gawthrop, via funções de transferência, mas fornecendo exatamente os mesmos resultados. A contribuição mais significativa do GMVSS é a simplicidade de obtenção do preditor devido a ausência da equação de Diophantine no procedimento de projeto. A Diophantine é resolvida indiretamente e de maneira natural pela própria formulação do problema, a partir do Filtro de Kalman obtido de uma representação ARMAX no espaço de estados, dispensando também a solução da equação a diferenças de Riccati para calcular o ganho de Kalman.

A união dos resultados do GMVSS com a abordagem por realimentação de estados estimados, abre novas perspectivas de projeto de controle GMV com filtragem de Kalman de forma intrínseca e sintonia do controlador baseada em GMVs de ordem mínima operando paralelamente como em uma topologia de controle de múltiplas malhas.

**Palavras-chave:** Variância mínima. Métodos no espaço de estados. Filtro de Kalman. Equação de Diophantine.

## ABSTRACT

In this work, the Generalized Minimum Variance controller, GMV, is developed within the state space framework, benefiting from an equivalence of its minimum variance predictor with a particular solution of the Kalman Filter, which characterizes an attractive approach since it avoids the Diophantine equation solution.

The design procedure is based on the characteristic that the controller structure is inherited from the design model, where estimated state variables, with comprehensible physical meaning or behavior, come into play in the synthesis of a state-feedback control law. The complexity of the controller structure is then dictated by the complexity of the design model, but the tuning procedure, even for asynchronous multi-delayed multivariable systems, is feasible to be handled with a certain degree of simplicity.

The main idea behind the state-feedback GMV controller is focused on the minimal order GMV controller, which is tuned by a single scalar parameter that weights the energy employed on the control signal. Since the state variable concept is introduced, the produced control law is the composition of several minimal order GMVs, each one to every state variable considered in the problem.

The theoretical base used in the development of the estimated state-feedback controller is a new GMV state space design procedure, known as GMVSS. This procedure differs from the original transfer function method, of Clarke and Gawthrop, but matching exactly the same results. The most significant contribution of GMVSS is the simplicity of the predictor design, since it avoids the Diophantine equation solution. The Diophantine is indirectly solved in a natural way by the problem formulation itself, from a Kalman Filter obtained from an ARMAX state space representation, that also dismisses the Riccati difference equation solution to derive the Kalman gain.

By putting together the GMVSS and the state-feedback approach results, leads to new design perspectives of GMV control with intrinsic Kalman filtering techniques and tuning of minimal order GMVs operating as if in a multi-loop control topology.

**Keywords:** Minimum variance. State space methods. Kalman filter. Diophantine equation.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Número de publicações relativas ao GMV nos últimos anos (dados de <a href="http://www.scopus.com">www.scopus.com</a> , acesso em janeiro de 2012).	25
Figura 2	Resposta ao degrau unitário do sistema em (1.8).	41
Figura 3	Diagrama de Bode do sistema em (1.8).	41
Figura 4	Foto do PAM.	42
Figura 5	Resposta ao degrau do modelo linear do PAM em (1.9).	44
Figura 6	Diagrama de Bode do modelo linear do PAM em (1.9).	44
Figura 7	Resposta ao degrau do modelo linear de WB em (1.12).	47
Figura 8	Ganhos principais do modelo linear de WB em (1.12).	47
Figura 9	Resposta ao degrau do modelo de projeto de WB em (1.13).	48
Figura 10	Ganhos principais do modelo de projeto de WB em (1.13).	48
Figura 11	GMV incremental de ordem mínima aplicado ao PAM com: $\lambda = 10$ , $\lambda = 30$ e $\lambda = 60$ .	63
Figura 12	GMV incremental de ordem mínima aplicado ao PAM: caso ideal, em termos da mínima variância da variável de saída, com $\lambda = 0$ .	63
Figura 13	Posição angular ( $y_p(t)$ , em Volts) controlada por dois GMVs de ordem mínima. Um segundo GMV de ordem mínima regula a velocidade angular $y_v(t)$ inferida a partir das variações da posição.	67
Figura 14	Sinal de controle do controlador GMV incremental via velocidade inferida: sinal de controle resultante (gráfico superior); sinais de controle independentes (gráfico inferior) para $\lambda_p = 4$ e $\lambda_v = 0.1$ .	67
Figura 15	Sinais de saída do PAM para as simulações com GMV e GMVSS.	86
Figura 16	Sinais de controle das simulações com GMV e GMVSS.	86
Figura 17	Compensação do longo atraso de transporte do modelo <i>benchmark</i> utilizando GMVSS.	89
Figura 18	Análise de três sintonias do Filtro de Kalman no domínio da frequência e do tempo.	109
Figura 19	Sinais de saída e entrada do PAM controlado pelo controlador GMVSF.	112

Figura 20 Variáveis de estado estimadas utilizando a Sintonia 2 no Filtro de Kalman. ....	113
Figura 21 Variáveis de estado “reais” utilizando a Sintonia 2 no Filtro de Kalman. ....	113
Figura 22 Variáveis de estado estimadas após modificação nas características de filtragem. A presença do ruído, a partir dos 25.1 s de simulação, torna-se aparente. ....	114
Figura 23 Comparação entre as características do Filtro de Kalman com a Sintonia 2 e o filtro com a modificação nas ponderações da velocidade e aceleração. ....	114
Figura 24 Sinais de perturbações de carga e ruído utilizados nas simulações. ....	115
Figura 25 Ganhos principais do Filtro de Kalman no domínio da frequência em relação aos ganhos principais da coluna de WB. ....	120
Figura 26 Resposta no domínio do tempo que caracteriza a dinâmica de convergência do Filtro de Kalman projetado. ....	120
Figura 27 Saídas da coluna de WB para os dois casos de sintonia no teste de rastreamento de referência. ....	126
Figura 28 Sinais de controle aplicados a coluna de WB para os dois casos de sintonia no teste de rastreamento de referência. ....	126
Figura 29 Estimação das variáveis de estado relativas a velocidade e aceleração da saída medida para os dois casos de sintonia no teste de rastreamento de referência. ....	127
Figura 30 Saídas da coluna de WB utilizando a Sintonia 1, para o problema de regulação quando o sistema está sujeito a perturbações de baixa e alta frequência. ....	127
Figura 31 Sinais de controle aplicados a coluna de WB utilizando a Sintonia 1 no teste de rejeição de perturbações. ....	128
Figura 32 Variáveis de estado estimadas durante o teste de rejeição de perturbações com a Sintonia 1. ....	128
Figura 33 Variáveis de estado “reais” (não filtradas) durante o teste de rejeição de perturbações com a Sintonia 1. ....	129
Figura 34 Sinais de perturbação de carga e ruído utilizados. ....	129



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Áreas de aplicação da teoria de controle GMV. ....	26
Tabela 2	Condições típicas de operação da coluna. ....	45
Tabela 3	Principais passos de projeto do GMVSS e GMV. ....	84
Tabela 4	Código de implementação do GMVSS. ....	88



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GMV	Generalized Minimum Variance . . . . .	21
GPC	Generalized Predictive Controller . . . . .	21
LQG	Linear Quadratic Gaussian . . . . .	21
MPC	Model Predictive Control . . . . .	21
PID	Proporcional-Integral-Derivativo . . . . .	21
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina . . . . .	22
MV	Minimum Variance . . . . .	24
ARMAX	Auto-Regressive Moving-Average with eXogenous inputs	27
MVP	Minimum Variance Predictor . . . . .	27
SISO	Single-Input, Single-Output . . . . .	28
MIMO	Multi-Input, Multi-Output . . . . .	28
LTV	Linear Time-Varying . . . . .	28
LQR	Linear Quadratic Regulator . . . . .	29
AR	Auto-Regressive . . . . .	30
GMVSS	GMV in the State Space . . . . .	31
GMVSF	GMV with State-Feedback . . . . .	31
ARE	Algebraic Riccati Equation . . . . .	32
FOPDT	First-Order Plus Dead-Time . . . . .	33
SOPDT	Second-Order Plus Dead-Time . . . . .	33
IPDT	Integral Plus Dead-Time . . . . .	33
IMC	Internal Model Control . . . . .	36
GA	Genetic Algorithm . . . . .	38
IAE	Integral Absolute Error . . . . .	39
DAS	Departamento de Automação e Sistemas . . . . .	42
ARIMAX	Auto-Regressive Integrated-Moving-Average with eXoge- nous inputs . . . . .	60
MA	Moving-Average . . . . .	92



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	21
1.1 MOTIVAÇÃO .....	21
1.1.1 Resumo dos problemas .....	27
1.2 OBJETIVOS .....	30
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	31
1.3.1 Alternativas na simplificação do MVP .....	32
1.3.2 Alternativas na sintonia do GMV .....	35
1.4 DESCRIÇÃO DOS PROCESSOS UTILIZADOS .....	39
1.4.1 Processo <i>benchmark</i> de Åström e Hägglund (2000) ..	40
1.4.2 Processo Pêndulo Amortecido (PAM) .....	42
1.4.3 Coluna de destilação de Wood e Berry (WB) .....	45
1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO .....	49
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	51
2.1 TEORIA DE CONTROLE GMV: CASO SISO .....	51
2.1.1 MVP no domínio das funções de transferência .....	52
2.1.2 Solução da equação de Diophantine do MVP .....	54
2.1.3 Lei de controle e o sistema em malha fechada .....	55
2.1.4 GMV com filtro de medição generalizado .....	57
2.1.5 GMV para um sistema ARMAX de 2ª ordem .....	58
2.1.6 Controlador GMV de estrutura fixa .....	59
2.1.6.1 GMV incremental de ordem mínima aplicado ao PAM ...	61
2.1.6.2 Controle por inferência com GMVs de ordem mínima ...	62
2.2 TEORIA DE CONTROLE GMV: CASO MIMO .....	68
2.3 CONCLUSÃO .....	72
<b>3 GMVSS – GMV NO ESPAÇO DE ESTADOS</b> .....	75
3.1 REVISÃO SUCINTA DA TEORIA DE CONTROLE GMV ..	76
3.2 MVP VIA FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA .....	77
3.3 MVP NO ESPAÇO DE ESTADOS .....	78
3.4 SOLUÇÃO INTRÍNSECA DA EQUAÇÃO DE DIOPHANTINE .....	81
3.5 CONTROLADOR GMVSS .....	82
3.6 EXEMPLOS DE SIMULAÇÃO .....	84
3.6.1 Controle de posição angular do PAM .....	84
3.6.2 Modelo <i>benchmark</i> com atraso longo .....	87
3.7 CONCLUSÃO .....	89

<b>4 GMVSF – CONTROLE GMV VIA REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS ESTIMADOS POR FILTRO DE KALMAN</b> .....	91
4.1 GMVSS EM TERMOS DE SUB-SISTEMAS DE PROCESSOS MIMO .....	93
4.2 MVP COM FILTRO DE KALMAN INTEGRADO .....	95
4.3 CONTROLADOR GMVSF .....	98
4.3.1 Observação sobre as simplificações no GMVSF .....	102
4.3.2 Projeto do Filtro de Kalman no GMVSF .....	103
4.3.2.1 Funcionamento das matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ .....	104
4.3.3 Solução particular do Filtro de Kalman (caso <i>dead-beat</i> ) .....	105
4.3.4 Algoritmos de projeto e implementação do GMVSF .....	105
4.4 EXEMPLOS DE SIMULAÇÃO .....	106
4.4.1 Caso SISO: controle de posição do PAM com GMVSF .....	106
4.4.2 Caso MIMO: controle da coluna de WB com GMVSF .....	116
4.5 CONCLUSÃO .....	130
<b>5 CONCLUSÕES FINAIS</b> .....	133
5.1 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DA TESE .....	134
5.2 PUBLICAÇÕES .....	135
5.2.1 Trabalhos com relação direta: .....	135
5.2.2 Trabalhos com relação indireta: .....	136
5.3 PERSPECTIVAS DE PESQUISAS FUTURAS .....	137
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	139

## 1 INTRODUÇÃO

São apresentados neste capítulo, os fatores que motivaram a composição da tese de que uma abordagem no espaço de estados para o controle de Variância Mínima Generalizado (GMV, *Generalized Minimum Variance*), seria benéfica tanto na simplificação dos mecanismos de projeto, como também na síntese de novos controladores apoiados na filosofia de variáveis de estado. Além dos fatores motivacionais, apresentam-se os objetivos, a revisão bibliográfica que fundamenta este trabalho e contextualiza suas contribuições em relação ao estado da arte, e a descrição dos processos adotados para o desenvolvimento da pesquisa, obtenção dos resultados e sua validação.

### 1.1 MOTIVAÇÃO

Uma das motivações desta tese tem cunho teórico e se baseia no trabalho de Bitmead, Gevers e Wertz (1990). Utilizando-se de uma redação crítica-constructiva e até certo ponto, sarcástica, os autores abordaram as provas matemáticas de robustez e estabilidade do então revolucionário Controlador Preditivo Generalizado (GPC, *Generalized Predictive Controller*) sustentando sua formulação sobre a consagrada teoria do regulador Linear Quadrático Gaussiano (LQG, *Linear Quadratic Gaussian*). Deixando o sarcasmo de lado, o trabalho de Bitmead, Gevers e Wertz (1990) acalmou os ânimos dos teóricos e acadêmicos, que na época, observavam atônitos os excelentes resultados práticos que o GPC e outros da família de Controladores Preditivos Baseados em Modelos (MPC, *Model Predictive Controllers*) forneciam.

A possibilidade de mapeamento entre o GPC e o LQG despertou a curiosidade sobre o porquê, dentro do contexto desta tese, de se estabelecer novos algoritmos de controle quando há um caso tão geral como o LQG, que apesar de não ser originalmente uma técnica preditiva, também pode ser desenvolvido como um controlador preditivo, exatamente como mostraram Bitmead, Gevers e Wertz (1990). No entanto, este tipo de curiosidade poderia retroceder ainda mais ao ponto de questionar o porquê de se desenvolver qualquer outro tipo de controlador, haja vista que todos se baseiam em operações de amplificação e atenuação, acúmulo e variação, ou seja, a base do controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo). Argumentar sobre este tipo de dúvida geraria uma discussão interminável e, possivelmente, não se chegaria a um senso co-

mum. De qualquer maneira, não é por acaso que mais de 90% das malhas de controle no mundo operam sob o comando das três ações básicas dos PIDs, sendo este, assunto de investigação, sempre presente, nos principais veículos da literatura de controle atual (BOZORG; TERMEH, 2011). Os motivos desse sucesso, geralmente, são atribuídos ao preço e, especialmente, à simplicidade do controlador PID.

A simplicidade também tem seu preço. Apesar do PID ser vastamente utilizado, em alguns casos é mal empregado, estando meramente sintonizado para garantir o funcionamento do processo. O incorreto emprego pode estar relacionado a complexidade de um determinado problema que demanda uma técnica de controle de maior complexidade, mas nem sempre a maioria dos operadores e engenheiros de chão de fábrica, por exemplo, estão capacitados para lidar com tais técnicas de maior complexidade e acabam por difundir o que lhes é de domínio.

A principal questão do porquê de se desenvolver uma determinada técnica de controle volta-se ao seu apropriado emprego e sua absorção pelos possíveis usuários. Por exemplo, projetar um LQG para regular um sistema precisamente descrito por um modelo de primeira ordem, que opera em condições ideais e dentro de uma faixa de operação linear, seria uma grande perda de tempo se comparado a um projeto por alocação de pólos. No entanto, se houvesse uma forma de simplificar e sistematizar o projeto do LQG para tratar especificamente sistemas de primeira ordem, de maneira que a sintonia resultante seria ótima e o método de projeto de fácil compreensão, a nova técnica poderia ser bem absorvida, teria designação específica e alguns de seus usuários nem sequer saberiam de onde ela se originou, mas que resolvia o problema em questão.

Então, independente das similaridades e particularizações de técnicas de controle mais gerais, cujas particularizações fornecem novas técnicas de controle mais pontuais, específicas ou simples, pode-se dizer que estas novas técnicas são geradas com o propósito da pesquisa, da extensão, da solução de um determinado problema, ou simplesmente ao acaso e sem o conhecimento de teoria antecessora. A questão é que, a partir do momento de sua aceitação e difusão, mesmo que haja certa resistência por parte de analistas mais conservadores, significa que a nova formulação passou a fazer sentido para um grupo de pessoas e para a solução de problemas específicos.

Com base nas premissas anteriores, um problema que fazia sentido durante os estudos preliminares no curso de doutorado em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), especificamente na área de controle preditivo, era a



determinação dos parâmetros dos filtros de predição dos controladores GMV e GPC. Em ambos os casos, para fins de aplicação em simulação numérica e experimentação em laboratório, podia-se utilizar o mecanismo de resposta livre do modelo para promover a predição (CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1987). Mas, para fins de estudos analíticos, era necessário obter a função de transferência do filtro preditor.

A determinação do filtro preditor tornava-se um problema se a ordem do modelo do processo fosse elevada, o horizonte de predição longo e o filtro, além de predizer a saída, devesse ter uma característica dinâmica específica em termos de convergência e rejeição de perturbações (SILVEIRA; COELHO, 2011a). E foi na busca por uma solução sistemática para este problema, relativamente simples e de programação, que se iniciou um estudo visando outras formas de projeto para os preditores do GMV e GPC.

O controlador GMV, por ser o “irmão mais velho” do GPC e de menor complexidade, foi o candidato escolhido para iniciar a pesquisa (SILVEIRA; COELHO, 2010); a parte do projeto que se queria evitar era a solução das equações de Diophantine (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1973; CLARKE; GAWTHROP, 1975) e o procedimento com maior chance de ser factível, possivelmente, estava relacionado ao trabalho de Bitmead, Gevers e Wertz (1990).

Na busca por alternativas para evitar a solução das equações de Diophantine, configuravam-se outras dificuldades que estavam atreladas ao tema e passaram a moldar uma proposta maior conforme o estudo avançava. Dentre elas pode-se citar:

- A não-comutatividade da equação de Diophantine em sistemas multivariáveis ou variantes no tempo (LI; EVANS; WITTENMARK, 1997);
- Alta complexidade envolvida no projeto de controle GMV para sistemas multivariáveis devido ao cálculo da matriz *interactor* (COELHO, 1991; XIA et al., 2006) e sintonia por métodos de alocação de pólos e zeros de transmissão;
- Técnica de projeto do preditor de tempo não-mínimo (*non-dead-beat*) independente do método por alocação de pólos (INOUE et al., 2001; GARCÍA; ALBERTOS, 2008).

Com estas dificuldades e partindo do pressuposto que soluções mais simples e eficazes são melhor absorvidas pela indústria, estabeleceu-se a meta de estender as técnicas de projeto do controlador GMV para

que, de maneira simples, garantisse a eficácia exigida na solução de problemas nos mais variados graus de complexidade. Para isto, iniciou-se a pesquisa na tentativa de relacionar o LQG e o controle GMV segundo Bitmead, Gevers e Wertz (1990) e a relação histórica entre estes controladores, que ainda em uma versão com muitas aproximações e ausência de provas matemáticas, forneceu resultados satisfatórios, por exemplo, dispensando a solução da Diophantine (SILVEIRA; COELHO, 2010).

Tanto o controlador de Variância Mínima Generalizado como o Linear Quadrático Gaussiano foram obtidos a partir de uma família de metodologias de projeto sob o nome de controle de variância mínima, no contexto da teoria de controle ótimo e estocástico. O controle de Variância Mínima (MV, *Minimum Variance*) foi introduzido por Åström e Wittenmark no início da década de 1970 (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1973), sendo considerado o pai do GMV, apresentado por Clarke e Gawthrop em 1975, enquanto o LQG se originou da teoria de controle ótimo e robusto desenvolvida na década de 1960 através de métodos lineares quadráticos, onde todos estes três tipos de controladores estão apoiados. Então, pode-se afirmar que, devido a isto, o MV e o GMV compartilham similaridades com a teoria de controle LQG, ou até mesmo se pode afirmar que eles são, de fato, soluções particulares do problema de controle LQG.

Apesar de qualquer similaridade sobre a hereditariedade entre MV, GMV e LQG, uma diferença marcante entre eles em relação ao escopo deste trabalho é que os dois primeiros são técnicas de projeto baseadas em funções de transferência, enquanto o último, em técnica baseada no espaço de estados. No entanto, é possível formular o problema de controle MV como uma solução particular do LQG para o caso de realimentação da saída, trabalhando com modelos descritos no espaço de estados, tal como mostrado por Kwong (1987). De maneira similar, Inoue et al. (2001) apresentaram o controlador GMV como sendo um compensador dinâmico preditivo, composto de um estimador de estados de ordem reduzida e um controlador por realimentação de estados estimados. Isto significa que o princípio da separação (DORF; BISHOP, 2008) é válido para o MV e o GMV, permitindo que este último seja descrito de forma semelhante ao controlador LQG e utilize modelos de projeto descritos no espaço de estados.

Apesar das justificativas apresentadas sobre a simplicidade do GMV – em relação a outros MPCs – ser favorável no quesito de sua melhor absorção por usuários na indústria e comunidade científica em geral, pode parecer estranho o esforço para o desenvolvimento do GMV quando técnicas de controle preditivo mais sofisticadas estão dispo-

níveis. No entanto, desde o seu surgimento, o GMV continua a ser utilizado nos mais diversos campos práticos de aplicação ao longo dos anos, tais como: medicina e saúde (GANBING, 1988); aeronáutica (REYNOLDS; PACHTER, 1997); controle de processos (YAMAMOTO; FUJII; KANEDA, 1998); sistemas de comunicação (RINTAMAKI; VIRTEJ; KOIVO, 2001); sistemas de potência (KO; NIIMURA; LEE, 2003); robótica aérea (SHIINO et al., 2008); e outros da Tab. 1.

O GMV não tem mais o mesmo impacto como na década que sucedeu a do seu surgimento – tendo em vista as numerosas novas técnicas preditivas existentes nos dias atuais – mas ainda é referência e bastante utilizado em avaliação de desempenho (*performance assessment*) de malhas de controle e em controle de processos industriais, tal como reforça a informação apresentada na Fig. 1, com o número de publicações em periódicos e conferências de temas relacionados ao GMV nos últimos anos e que justificam o interesse da comunidade científica sobre o tema, assim como novas propostas de técnicas de projeto e controladores baseados no GMV (SILVEIRA; COELHO, 2011a; SILVEIRA; RODRÍGUEZ; COELHO, 2012).

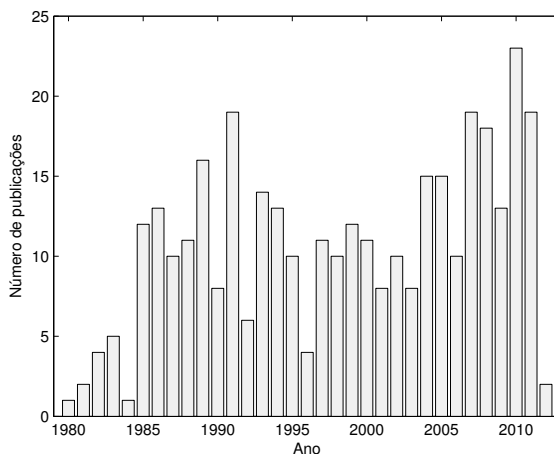


Figura 1 – Número de publicações relativas ao GMV nos últimos anos (dados de [www.scopus.com](http://www.scopus.com), acesso em janeiro de 2012).

As idéias por trás do intercâmbio entre domínios de projeto (*design framework*) – por exemplo, função de transferência e espaço de estados – podem conter características que apóiam uma nova teoria

Tabela 1 – Áreas de aplicação da teoria de controle GMV.

Área	Aplicação
Sistemas de Potência	Estabilizador de sistema de potência com gerador síncrono de ampla faixa de operação (GU; BOLLINGER, 1989); Controle de um inversor UPS com compensação de atraso (DENG; ORUGANTI; SRINIVASAN, 2004).
Controle de Processos	Controle de força cortante em máquina CNC (ALLEN; HUANG, 1994); Controle de vazão em tanques acoplados (JOTA; BRAGA; PENA, 1995); Controle de uma coluna de destilação (SUMAR, 2002); Controle de velocidade rotacional de um mecanismo tipo manivela deslizante ( <i>slider-crank</i> ) (SAITO et al., 2009).
Conversão de Energia	Controle de velocidade de alto desempenho para motor DC sem escovas (EL-SAMAHY; EL-SHARKAWI; SHARAF, 1994).
Robótica	Controle de posição de um robô manipulador de três graus de liberdade (RIUL; VALE; MONTENEGRO, 2010).
Sist. de Comunicação	Controle de potência de sistemas de comunicação tipo CDMA (RINTAMAKI; KOIVO; HARTIMO, 2004); Controle de tráfego em redes TCP/AQM (BARZAMINI; SHAFIEE; DADLANI, 2012).

baseando-se em outra; podem se beneficiar de procedimentos de projeto que existem somente dentro de um domínio de projeto particular; ou podem atender a restrições práticas de aplicações específicas para reduzir o tempo e esforço requeridos na solução de uma determinada tarefa (SILVEIRA; COELHO, 2011a). E, neste sentido, as relações encontradas entre o GMV e o LQG acabaram motivando o desenvolvimento de novas formulações de controle GMV no espaço de estados. Mas antes de apresentá-las ao leitor, os problemas que motivaram estas novas idéias serão sucintamente apresentados.

### 1.1.1 Resumo dos problemas

Com o objetivo de mostrar um resumo dos problemas que motivaram este trabalho, faz-se uma abordagem sumária e com formalismo teórico e matemático reduzidos apenas para fins de contextualização. O detalhamento completo é abordado na fundamentação teórica no Capítulo 2. Sendo assim, considere um sistema Auto-Regressivo, Média-Móvel e com entradas exógenas (ARMAX, *Auto-Regressive Moving-Average with exogenous inputs*), descrito por

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})z^{-d}u(k) + C(z^{-1})\xi(k), \quad (1.1)$$

sendo  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$ ,  $C(z^{-1})$ , polinômios descritos no domínio do operador de atraso discreto  $z^{-1}$ ;  $d$  é o atraso discreto do sistema;  $y(k)$ ,  $u(k)$ ,  $\xi(k)$ , são a saída, a entrada e uma seqüência do tipo ruído branco, respectivamente.

Um dos passos de projeto do controlador GMV, tal como apresentado por Clarke e Gawthrop (1975), é a determinação do Preditor de Variância Mínima (MVP, *Minimum Variance Predictor*). Em suma, a obtenção do MVP é dependente de uma identidade polinomial também conhecida como equação de Diophantine, que no caso estocástico e generalizado é dada por

$$P(z^{-1})C(z^{-1}) = A(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-d}F(z^{-1}). \quad (1.2)$$

Na solução da Eq. (1.2), o objetivo é obter os coeficientes de  $E(z^{-1})$  e  $F(z^{-1})$  sujeitos ao sistema em (1.1) e filtrado por  $P(z^{-1})$ . Quando a ordem de (1.1) é elevada, assim como o atraso discreto  $d$ , a obtenção dos resultados torna-se trabalhosa do ponto de vista de um operador humano, e ferramentas computacionais para soluções automatizadas da Diophantine do MVP completo, como em (1.2), não estão

disponíveis nos principais softwares utilizados por engenheiros de controle, como o MATLAB<sup>1</sup>, ScicosLab<sup>2</sup> e SciLab<sup>3</sup>. O que se encontra, ainda com certa dificuldade, são algoritmos que resolvem apenas o caso simplificado e parcialmente generalizado, onde  $P(z^{-1}) = C(z^{-1}) = 1$ , mas que podem ser facilmente ajustados para casos mais gerais, desde que  $P(z^{-1})$  seja um polinômio mônico (SILVEIRA; COELHO, 2011a).

Quando  $P(z^{-1})$  é não-mônico, ou mais geral ainda, é descrito por uma função de transferência do tipo

$$P(z^{-1}) = \frac{p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_{n_p} z^{-n_p}}{1 + \bar{p}_1 z^{-1} + \dots + \bar{p}_{n_{\bar{p}}} z^{-n_{\bar{p}}}}, \quad (1.3)$$

e  $p_0 \neq 1$ , a solução de (1.2) não é factível de maneira trivial (CAMERON; SEBORG, 1983).

Estas dificuldades retratam o problema para sistemas de uma entrada e uma saída (SISO, *Single-Input, Single-Output*) e ficam ainda mais complexas para o caso multivariável (MIMO, *Multi-Input, Multi-Output*). No caso MIMO, o sistema normalmente possui atrasos múltiplos e assíncronos, além de acoplamentos entre as saídas e entradas, de tal forma que o projeto do MVP passa a depender de uma equação matricial de Diophantine, dada por

$$\mathbf{P}(z^{-1})\mathbf{\Psi}(z^{-1})\mathbf{C}^*(z^{-1}) = \mathbf{E}(z^{-1})\mathbf{A}^*(z^{-1}) + z^{-d}\mathbf{F}(z^{-1}), \quad (1.4)$$

e para que haja uma solução baseada no atraso discreto  $d$  em (1.4), a matriz *interactor*  $\mathbf{\Psi}(z^{-1})$  precisa ser obtida (COELHO, 1991). Sua função é operar como um pré-compensador de atraso que sincronize ou elimine os múltiplos atrasos do modelo de projeto para que seja possível resolver a Eq. (1.4) (COELHO, 1991).

O projeto da versão MIMO do GMV no domínio de funções de transferência apresenta outra dificuldade, sendo esta válida também no caso SISO para sistemas lineares variantes no tempo (LTV, *Linear Time Varying*), que se refere a comutação entre  $\mathbf{A}(z^{-1})$  e  $\mathbf{C}(z^{-1})$ . Portanto, em (1.4), as matrizes polinomiais precisam garantir a comutação, por exemplo, entre:

$$\mathbf{A}^{-1}(z^{-1})\mathbf{C}(z^{-1}) = \mathbf{C}^*(z^{-1})(\mathbf{A}^*(z^{-1}))^{-1}. \quad (1.5)$$

Pode-se dizer que, no projeto do controlador GMV, o estágio em

---

<sup>1</sup>www.mathworks.com

<sup>2</sup>www.scicoslab.org

<sup>3</sup>www.scilab.org

que se resolve a Diophantine seria análogo ao estágio da Equação Algébrica de Riccati (STEVENS; LEWIS, 2003) no projeto do LQG. Ou seja, toda a parte de sintonia está definida e resolve-se uma última expressão para que seja possível extrair os ganhos do Filtro de Kalman e do Regulador Linear Quadrático (LQR, *Linear Quadratic Regulator*), que no caso do GMV via funções de transferência, equivaleria à obtenção de  $\mathbf{F}(z^{-1})$  e  $\mathbf{E}(z^{-1})$ . No entanto, sintonizar tanto o LQG como o GMV, especialmente no caso multivariável, pode ser uma árdua tarefa.

O termo *generalizado* foi atribuído ao GMV pois este se baseia em uma função custo (no caso SISO)

$$J = \mathbf{E} \left\{ \left[ P(z^{-1})y(k+d) - T(z^{-1})y_r(k+d) + Q(z^{-1})u(k) \right]^2 \right\}, \quad (1.6)$$

onde  $\mathbf{E}\{\cdot\}$  denota o operador esperança matemática e  $y_r(k)$  uma sequência de referência. Esta função custo considera ponderações sobre todos os sinais da malha de controle, ponderações normalmente designadas por polinômios, mas que também podem ser definidas como funções de transferência em  $P(z^{-1})$ ,  $T(z^{-1})$ ,  $Q(z^{-1})$ , de tal forma que é possível mapear qualquer controlador linear para a estrutura GMV.

De maneira a igualar qualquer controlador linear a estrutura GMV, uma das técnicas mais utilizadas para a sua sintonia consiste em promover a alocação de pólos e zeros do sistema da seguinte forma (CLARKE; GAWTHROP, 1975):

$$\frac{y(k)}{y_r(k)} = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{B(z^{-1})P(z^{-1}) + A(z^{-1})Q(z^{-1})} = \bar{G}_{cl}(z^{-1}). \quad (1.7)$$

A função de transferência  $\bar{G}_{cl}(z^{-1})$  em (1.7) determina a dinâmica de malha fechada desejada, definida pelo projetista, enquanto os termos à esquerda da expressão assumem os valores que possibilitam tal sintonia. Definidas as funções que ponderam (1.6), resolve-se a Diophantine em (1.2) (WELLSTEAD; ZARROP, 1991).

O método apresentado em (1.7) é eficaz e simples, tanto quanto a solução da Diophantine do preditor o é, se aplicada a sistemas SISO de ordem reduzida – e.g., de primeira e segunda ordens – e também quando se conhece, de maneira razoável, a influência dos pólos e zeros alocados, no comportamento do sistema. Para o caso MIMO, a expressão em (1.7) passa a ter designação matricial, e dependendo do número de variáveis envolvidas, assim como a ordem dos sub-sistemas que o compõem, a solução via alocação de pólos deixa de ser trivial.

É interessante notar como a teoria do GMV se difundiu bastante

na área de avaliação de desempenho (*performance assessment*) (GRIMBLE, 2002) de controladores e malhas de controle, tendo em vista sua capacidade de absorção de qualquer outra estrutura linear e sua relação direta com o MV (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1973). No entanto, houve uma redução na sua utilização como controlador para sistemas MIMO devido as dificuldades de sintonia, cálculo da matriz *interactor* e solução da Diophantine matricial. Esta última observação foi baseada a partir do levantamento dos dados utilizados na composição da Fig. 1.

As dificuldades de projeto motivaram soluções mais simples na sintonia dos GMVs. As equações de Diophantine passaram a ser exploradas na forma simplificada e parcialmente generalizada,  $P(z^{-1}) = C(z^{-1}) = 1$  (DOI; MORI, 2002); as ponderações do sinal de controle passaram a formas fixas mínimas (escalares), de primeira ou segunda ordem (DOI; MORI, 2002; SILVEIRA; RODRÍGUEZ; COELHO, 2012); o MVP resultante torna-se de tempo-mínimo (INOUE et al., 2001; GARCÍA; ALBERTOS, 2008); o controle da largura de banda do sistema em malha fechada é puramente resultado da seleção da ponderação do controle e das características naturais do modelo Auto-Regressivo (AR) de projeto.

Estas simplificações no projeto do GMV facilitaram a compreensão e utilização do *novo* algoritmo; as funções para o MATLAB encontradas no *Google*<sup>1</sup> resolveram a versão simplificada e parcialmente generalizada da Diophantine. Apesar disto, o potencial do controlador foi limitado, assim como suas aplicações.

A partir dos problemas, ou mesmo divergência entre pontos de vista aqui expostos, foram traçados os objetivos deste trabalho na tentativa de eliminar o que se considerou “entreve” e usufruir do “atraente”, respectivamente endereçados à “Diophantine” e ao “GMV de ordem mínima”.

## 1.2 OBJETIVOS

Os objetivos deste trabalho estão definidos no contexto de uma abordagem do controlador GMV no espaço de estados, de maneira a usufruir da estrutura matricial natural deste domínio de representação de sistemas e conseqüentemente tirar proveito dos métodos de análise e projeto existentes na teoria de controle moderno.

Especificamente, este trabalho defende duas novas propostas de controladores GMV no espaço de estados: a primeira é a estrutura

---

<sup>1</sup>[www.google.com](http://www.google.com)



fundamental desta nova abordagem, denominada GMV no Espaço de Estados, ou GMVSS (*GMV in the State Space*); a segunda se baseia nos resultados do GMVSS para compor um controlador com realimentação total de estados estimados, designado GMVSF (*GMV with State-Feedback*), auxiliado por filtragem de Kalman.

O objetivo do GMVSS é fornecer resultado exatamente igual ao GMV de Clarke e Gawthrop (1975), mas a partir de uma técnica de projeto diferente que dispensa a solução da equação de Diophantine e torna a obtenção do MVP bem mais simples. Ao contrário do método tradicional de projeto, o GMVSS utiliza a alimentação direta de estados estimados a partir de um Filtro de Kalman projetado diretamente do modelo estocástico da planta e sem a necessidade de resolver a Equação Algébrica de Riccati.

Para o GMVSF, a relação estabelecida no GMVSS entre o MVP e uma solução particular do Filtro de Kalman é explorada, configurando um projeto com maior grau de liberdade em relação à sintonia. A lei de controle obtida é função de uma realimentação total de estados preditos e filtrados, onde variáveis de estado com significado e comportamento físico conhecidos entram no problema de acordo com a necessidade da tarefa ou do projetista. A complexidade da estrutura de controle é então ditada pela complexidade do modelo de projeto, mas o procedimento de sintonia, mesmo para sistemas MIMO com múltiplos atrasos, é factível.

Algumas analogias, assim como a utilização de descrições de modelos não-lineares, sistemas variantes no tempo, modelos contínuos e controladores adaptativos, são feitas neste documento, mas o escopo desta pesquisa se resume aos controladores propostos em topologias não-adaptativas, limitadas a sistemas SISO e MIMO lineares, discretos e invariantes no tempo.

### 1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta revisão bibliográfica busca-se estabelecer um contexto histórico-evolutivo de alguns dos principais trabalhos relativos aos controladores baseados no Variância Mínima, suas dificuldades e seus métodos de sintonia.

### 1.3.1 Alternativas na simplificação do MVP

Não somente o controlador GMV, mas boa parte da família de MPCs dentro do contexto de controladores avançados, que surgiram a partir da década de 1970 com os avanços tecnológicos em *hardware* de processamento, têm suas bases no domínio das funções de transferência e descrições polinomiais.

Tais representações polinomiais ganhavam força, especialmente, na relação academia-indústria, pois as bases teóricas do problema do preditor e de filtragem eram decorrentes dos resultados de Kalman (1960), que para a época, era um método de projeto considerado complexo demais para ser aplicado em topologias adaptativas. Esse dependia da solução da Equação Algébrica de Riccati (ARE, *Algebraic Riccati Equation*), que no caso linear, era resolvida a partir de equações matriciais quadráticas, computacionalmente “pesadas” para o período.

A indústria vivenciava o aparecimento dos primeiros controladores adaptativos, e incluir a solução das AREs dentro do intervalo de amostragem para atualizar os ganhos dos preditores e controladores não era simples, de tal forma que os resultados do Filtro de Kalman passaram a ser incorporados em representações polinomiais, culminando no MVP (ÅSTRÖM, 1970).

Com o surgimento do MVP, os diversos controladores que o sucederam se apoiaram no projeto do preditor a partir das identidades polinomiais, pois estas equações de Diophantine eram mais simples de se resolver. No entanto, o regulador MV se popularizou, assim como o GMV; a gama de aplicações se estendeu e, em pouco tempo, resolver as Diophantines de problemas de maior ordem e com compensação de atrasos longos, de maneira intrínseca, já passava a ser uma nova dificuldade (KUCERA, 1976).

Nos dias atuais, existe uma tendência inversa incentivada pelo avanço ainda maior dos *hardwares* digitais de processamento. Hoje em dia, mesmo um simples computador residencial é capaz de resolver complexas equações matriciais quadráticas. Um exemplo desse “absurdo” potencial computacional é o trabalho de Li e Wang (2004). Os autores utilizaram uma rede neural para mapear a relação de entrada e saída do controlador GPC, em diversas situações de operação, sintonia e de horizontes de predição, com a justificativa de evitar a solução da Diophantine e as operações matriciais em aplicações adaptativas em tempo real.

Na indústria de controle de processos, diversas classes de plantas, especialmente no caso SISO, são bem modeladas por sistemas do tipo

primeira ordem com tempo morto (FOPDT, *First-Order Plus Dead-Time*), segunda ordem (SOPDT, *Second-Order Plus Dead-Time*) e integral com tempo morto (IPDT, *Integral Plus Dead-Time*) (CAMACHO; BORDONS, 1997). Mesmo assim, quando o horizonte de predição é muito longo, há a super-parametrização dos filtros do MVP para que o resultado seja ótimo em termos da mínima variância (ÅSTRÖM, 1970). Ou seja, a ordem da Diophantine cresce assim como a do filtro  $E(z^{-1})$  mostrado em (1.2).

Para que seja possível analisar a estabilidade, robustez e convergência do MVP, ou mesmo do sistema de controle completo com este preditor, os filtros resultantes de (1.2) precisam estar disponíveis. Kucera (1976) apresentou um dos primeiros algoritmos analíticos de solução direcionados especificamente ao projeto do MV e GMV. Além de Kucera (1976), pode-se citar um algoritmo analítico mais recente de Plarre, Rojas e Rojas (1998). De qualquer forma, ambos os casos lidam com a forma mais comum do projeto, no qual o lado esquerdo da equação de Diophantine resulta em um polinômio mônico.

A verdade é que os resultados práticos dos MPCs eram evidentes e a solução das Diophantines eram dispensáveis através de alternativas recursivas como em Albertos e Ortega (1989), Hess e Jung (1989), entre outras. Mas se havia tempo hábil de processamento para executar as predições por simulação dentro do intervalo de amostragem, também seria possível, ao menos nestas aplicações que utilizavam os algoritmos recursivos, resolver as Diophantines. O motivo para não fazê-lo fica óbvio na justificativa dos próprios Albertos e Ortega (1989) de que o passo de solução das identidades polinomiais era inconveniente.

Ainda em trabalhos científicos recentes, as Diophantines são apontadas como vilãs nos métodos de projeto, as alternativas recursivas são empregadas e os resultados são avaliados sem critérios analíticos, como em Cui, Pang e Pang (2008). Neste trabalho, o controlador proposto foi basicamente comparado com ele mesmo. Os critérios de sintonia não estavam apoiados sobre nenhuma verificação analítica que provasse que a heurística adotada na sintonia do controle proposto era ao menos próxima do controle tomado como referência. O controlador proposto era o GPC com ponderação do sinal de controle filtrado, e o tomado como referência, o GPC com ponderação escalar.

Alguns trabalhos recentes propuseram alternativas interessantes a equação de Diophantine, que não eram métodos recursivos para promover predições. Tian, Yang e Wang (2010) propuseram um algoritmo chamado *Ratio and Displacement* (RDIS) para executar divisões polinomiais. Então, ao contrário de utilizar a identidade polinomial, de

fato executam divisões dos polinômios para obter os filtros do GMV.

No projeto do GMV no caso MIMO com múltiplos atrasos assíncronos, determinados autores vêm, há algum tempo, investindo em métodos de discretização modificados para sincronizar os atrasos e facilitar o projeto do MVP. Adotam um procedimento de amostragem em taxas múltiplas (*multi-rate sampling*) para que o período de amostragem, em cada par de entrada e saída, torne-se equivalente ao atraso de transporte desse par. Estes métodos estão descritos em Tamura e Mori (2005), Mori e Takaki (2007), estendendo-se até recentemente em Mori e Takaki (2011). Apesar do longo período em que Yasuchika Mori desenvolve esta técnica, ela restringe bastante a largura de banda do controlador, haja vista que a frequência de amostragem normalmente é muito baixa quando se aproxima o período de amostragem ao valor de atrasos longos.

Enquanto os MPCs se popularizavam cada vez mais com o sucesso dos resultados práticos, trabalhos como o de Kwong (1987), ou de Bitmead, Gevers e Wertz (1990), procuravam explicar matematicamente a estabilidade e robustez dos MPCs através de métodos análogos, como o LQG. Neste sentido, o problema do MVP tomou o caminho inverso ao feito por Åström (1970). As atenções voltam-se a formulação do MVP a partir do Filtro de Kalman, por exemplo em Li, Evans e Wittenmark (1997), que destacaram a equivalência para o preditor de 1-passo a frente.

Em Ming, Yun e Gang (2011), Gang e Yun (2011), e outros trabalhos recentes, o problema do preditor também é resolvido a partir do Filtro de Kalman, evitando assim a equação de Diophantine, mas resolvendo a ARE sobre uma versão aumentada do modelo de projeto no espaço de estados que incorpora o atraso do sistema a variáveis de estado adicionais. Apesar de aumentar a ordem do problema, o projeto incorpora filtragem de forma natural e torna-se convidativo para a solução do caso MIMO. Para o problema dos autores, era essencial a estimação proveniente do Filtro de Kalman para garantir a fusão de informações em uma aplicação MIMO de múltiplos sensores.

Seguindo esta tendência de recorrer ao Filtro de Kalman na obtenção do MVP, parte da contribuição desta tese foi anteriormente documentada em Silveira e Coelho (2011a), onde uma versão do MVP no espaço de estados foi estabelecida a partir da relação do Filtro de Kalman com o preditor de 1-passo a frente como em Li, Evans e Wittenmark (1997). A diferença em relação ao método utilizado por Ming, Yun e Gang (2011) é que a ordem do sistema não aumenta explicitamente, ou seja, não são incluídas novas variáveis de estado para repre-

sentar o atraso. Outra diferença é que o MVP é obtido com o auxílio do Filtro de Kalman, mas sem a necessidade de resolver a ARE, no entanto, o preditor é de tempo mínimo e não incorpora nenhuma filtragem adicional a não ser o que herda da descrição estocástica do processo.

O método de projeto de Silveira e Coelho (2011a), basicamente estabelece uma nova forma analítica de resolver a Diophantine, que ocorre de forma natural pelo método de projeto e que também pode ser utilizado para auxiliar os projetos via funções de transferência. Devido ao problema ser tratado na forma matricial, este pode ser estendido para o caso MIMO com certa facilidade. No entanto, esta última etapa está documentada apenas no Capítulo 4 deste documento.

### 1.3.2 Alternativas na sintonia do GMV

Na síntese de controle GMV, assim como no regulador MV, a idéia chave se baseia em topologias de controle de sintonia adaptativa, ou mesmo já incorporadas no jargão nacional como “self-tuning”. Estes controladores self-tuning alcançaram um grau de maturidade em que passaram a ser utilizados como métodos convencionais no contexto da academia e da indústria (KIRECCI; EKER; DULGER, 2003).

A idéia de sintonia automática transferiu boa parte da responsabilidade do bom desempenho e robustez das malhas de controle ao caráter adaptativo do GMV e controladores similares, como se o sucesso em caráter prático estivesse garantido pela utilização de estruturas adaptativas. Como um exemplo remoto, cita-se um trabalho de Baker e Morris (1985) onde destaca-se a preocupação com o estimador de parâmetros do sistema quando o horizonte de predição é longo; conseqüentemente, há uma super-parametrização do GMV e mais variáveis para estimar.

De maneira alguma há intenção em desmerecer o trabalho de Baker e Morris (1985), visto que o interesse dos autores seria confrontar a sugestão de Clarke (1984), de resolver o problema da super-parametrização do GMV devido ao longo horizonte de predição, a partir da mudança do período de amostragem. Este exemplo visa apenas destacar o fato de que mais atenção era dada ao estimador do que as ponderações da saída, referência e controle no funcional do GMV, principais responsáveis pelo comportamento dinâmico de malha fechada desejado.

Nesta revisão sobre a sintonia do controlador GMV deu-se preferência em destacar os métodos de projeto independentemente se em

topologias estáticas ou adaptativas, considerando que a segunda favorece a teoria de controle com redundância em termos de robustez e estabilidade, haja vista que a adaptação dos parâmetros do controlador, ou da planta, a partir de medições de entrada e saída – respectivo ao controle adaptativo direto ou indireto – garantem um menor desvio entre o comportamento dinâmico esperado (desejado; projetado) e o efetivo em aplicações sobre processos reais.

A forma *detuned* (ou dessintonizada) do problema de Variância Mínima, que culminou no GMV e permitiu sua aplicação prática em termos de sinais de controle factíveis em implementações reais, aumentou o grau de liberdade do projeto e, conseqüentemente a complexidade.

As possibilidades de sintonia do controlador GMV podem ser as mais diversas dentro do contexto dos métodos da teoria de controle clássico, moderno, robusto, avançado, adaptativo, inteligente, ótimo, ou via hibridização destas teorias. Para exemplificar algumas dessas contribuições, citam-se trabalhos nessas áreas mencionadas da teoria de controle.

Uma forma usual e eficaz de sintonia no projeto do GMV é o método por alocação de pólos e zeros, bem documentado no livro de Wellstead e Zarrop (1991). Apesar de ser uma técnica de projeto eficaz, torna-se difícil de ser aplicada a sistemas MIMO com mais de dois pares de entrada e saída. No entanto, para boa parte dos sistemas SISO representados por modelos de ordem reduzida, o método de projeto é factível. Nesses casos, a análise do sistema de malha fechada é mais simples, podendo-se usufruir de técnicas clássicas como análise do Lugar Geométrico das Raízes e Diagramas de Bode (DORF; BISHOP, 2008), e em certos problemas, até mesmo dispensar o projeto assistido por computador.

Em Jones (1986), os autores utilizaram o critério de estabilidade de Jury (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998) em uma abordagem adaptativa com o GMV. O sistema de controle era inicializado a partir de um projeto nominal e a adaptação do filtro de ponderação do controle era supervisionada de acordo com o critério de estabilidade de Jury.

Gawthrop, Jones e Sbarbaro (1996), apresentaram uma técnica de sintonia para o GMV baseada no Controle por Modelo Interno (IMC, *Internal Model Control*), de Morari e Zafiriou (1989). A técnica IMC é bastante utilizada pela indústria, sendo um padrão referencial presente em muitos controladores industriais. Sua limitação em termos de aplicação se assemelha às técnicas por alocação, haja vista que quanto maior a complexidade dos modelos de projeto, maior a complexidade

em atribuir os parâmetros internos a partir da abordagem IMC.

Apesar de existirem métodos analíticos simples para modelos de ordem reduzida, verifica-se na literatura, maior inclinação para as estruturas GMV fixas e de ordem mínima ou reduzidas. Em alguns casos, há até mesmo certa ingenuidade dos autores em compreender o potencial do algoritmo de controle, como em Yaacob e Mohamed (1998), que trataram o problema de controle de velocidade de um motor DC a partir da sintonia de (1.6), com  $P(z^{-1}) = T(z^{-1}) = 1$  e  $Q(z^{-1}) = 0$ , sem ao menos destacar que era o caso particular, o regulador MV.

As estruturas fixas dos GMVs podem ser definidas para espelhar estruturas de controladores conhecidos, de maneira que o grau de abstração dos projetistas possa ser reduzido. Como exemplo, em Montague, Morris e Tham (1986), os autores tinham um problema MIMO de atrasos assíncronos. Adotaram a forma de discretização *multi-rate* (MORI; TAKAKI, 2011),  $P(z^{-1}) = T(z^{-1}) = 1$ , e o filtro de ponderação do controle em (1.6), com a estrutura inversa de um controlador PI. Basicamente utilizavam o GMV como um Preditor de Smith (GARCÍA; ALBERTOS, 2010) para fornecer dados preditos a um controlador PI. A sintonia do PI era então feita a partir de métodos tradicionais, como: Ziegler-Nichols, Cohen-Coon, AMIGO (COELHO; COELHO, 2004).

Assim como em Montague, Morris e Tham (1986), os autores Minter e Fisher (1988), fizeram uma pesquisa sobre o algoritmo GMV em relação a controladores industriais tipo PID self-tuning da época. É interessante destacar as conclusões dos autores, que apontaram o algoritmo proposto por Clarke e Gawthrop (1975) como não-self-tuning. No entanto, foram Minter e Fisher (1988) que deixaram de compreender o potencial do algoritmo GMV e o porquê do nome *generalizado*. Eles desprezaram as ponderações da saída e referência fixando-as em  $P(z^{-1}) = T(z^{-1}) = 1$ ; fixaram a ponderação do controle pela inversa do controlador PI e esperavam que esta última fosse adaptada sem tê-la incluída como parâmetro do estimador ou mesmo através de alguma relação indireta com a identificação do modelo do processo. Por fim, resolveram utilizar o GMV apenas como um compensador de atraso que alimentava os PIDs self-tuning industriais.

Já em Cluett e Goberdhansingh (1990), e Choi, Hong e Kim (2004), a mesma proposta de espelhar o filtro do sinal de controle do GMV na inversa do PI foi abordada, mas com adaptação dos parâmetros do PI em uma estrutura self-tuning, de fato. Não deixa de ser uma estrutura baseada em um compensador de atraso mais um controlador PI, mas exemplifica a forma generalizada que o algoritmo de Clarke e Gawthrop (1975) apresenta, permitindo utilizar todo o vasto conheci-

mento presente na teoria e prática de controladores PID na sintonia do GMV.

Além das formas de sintonia adaptativas tradicionalmente empregadas no controle GMV via estimadores recursivos (COELHO; COELHO, 2004), pode-se citar adaptação e sintonia a partir de sistemas especialistas e inteligentes, baseados no comportamento de operadores humanos, como em procedimentos de escalonamento de modelos ou parâmetros, supervisão com lógica fuzzy, aprendizado via redes neurais, entre outros.

Xu, Liu e Hang (1994) apresentaram uma aplicação com múltiplos controladores GMV sintonizados para diversos pontos de operação de uma planta. Usaram um sistema supervisor que escalonava os controladores com base nos pontos de operação e, além disto, um sistema fuzzy de Mamdani (PASSINO; YURKOVICH, 1998) era utilizado para modificar os filtros de ponderação dos controladores GMV durante as fases transitórias após uma mudança no sinal de referência. Em Silveira, Rodríguez e Coelho (2012), sintonia fuzzy similar foi adotada em aplicações com controladores GMV de ordem reduzida.

Em Liu e Lara-Rosano (2004), Castillo, Grimble e Katebi (2005), há a utilização de escalonamento de controladores GMV, mas a partir de uma abordagem via interpolação neuro-fuzzy dos controladores lineares locais, resultando, em alguns casos, em um controlador global não-linear. O método se baseia em utilizar sistemas fuzzy do tipo Takagi-Sugeno-Kang (PASSINO; YURKOVICH, 1998) para aproximar o comportamento dos processos em pontos de operação não-linear.

Mitsukura, Yamamoto e Kaneda (1999) aplicaram um método de sintonia a partir de Algoritmo Genético (GA, *Genetic Algorithm*) para selecionar os parâmetros de um controlador GMV com ponderação do controle baseada na inversa do PID. De maneira semelhante, Yanou, Deng e Inoue (2011) utilizaram GA na sintonia do GMV, cuja forma de operar se baseava na seleção da estrutura do controlador, assim como dos parâmetros, para que o sistema completo em malha fechada mantivesse os pólos da planta inalterados, adicionando a partir dos filtros do GMV, os novos pólos que garantissem o comportamento dinâmico desejado.

Outro método menos convencional de sintonizar o GMV é descrito no trabalho de Pan, Li e Cai (2007). Neste, há a hibridização da sintonia do controlador GMV com ponderação do controle baseada no PID, a partir de um método de busca via programação quadrática para a seleção dos ganhos, e adaptação do modelo do processo via Aprendizado Baseado em Instâncias ou Memória (*Lazy Learning*), onde as



solicitações ou instâncias, eram executadas quando o índice da Integral do Erro Absoluto (IAE, *Integral Absolute Error*) alcançava um valor pré-definido.

Apesar de interessantes, essas técnicas de sintonia mais especializadas normalmente são empregadas sobre algoritmos de controle consagrados, como é o caso do GMV, assim como outros renomados controladores da família de controladores preditivos. Além disto, essas técnicas inteligentes normalmente estão sujeitas aos métodos tradicionais de análise, ou seja, selecionam parâmetros, modelos e controladores, baseados em princípios clássicos da teoria de sistemas e controle.

Devido ao exposto anteriormente, e a atual fase “embrionária” dos controladores propostos nesta tese, se optou por utilizar métodos de sintonia e análise de reconhecida reputação na literatura de controle, como: sintonia heurística por tentativa e erro, via análise de resposta no domínio do tempo e da frequência para estabelecer margens qualitativas de robustez e estabilidade nos projetos desenvolvidos.

De maneira geral, estes métodos de sintonia e análise estão presentes de forma direta ou indireta em todos os tipos de sintonia citados nessa seção. No entanto, especificamente, se baseiam em projetos por análise de resposta em frequência via Diagramas de Bode no caso SISO e Diagramas de Magnitude de Ganhos Principais no caso MIMO, onde o projetista busca moldar a forma das curvas de resposta desses diagramas através do procedimento de *Loop-Shaping* (DOYLE; STEIN, 1981; CRUZ, 1996).

O procedimento de *Loop-Shaping* é bastante comum no projeto de controladores PID, LQR e Filtro de Kalman robustos (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 2004), mas com relação a análise e projeto de controladores GMV, foi pouco explorado e apenas recentemente, com o intuito de atender às necessidades desta pesquisa, foi apresentado em Silveira, Rodríguez e Coelho (2012).

## 1.4 DESCRIÇÃO DOS PROCESSOS UTILIZADOS

Uma das características deste trabalho, que precisa estar clara para o leitor, é que o problema abordado resume-se a apresentação de dois novos controladores baseados no GMV, e não o problema de controlar um único processo ou classe de processos específica. Portanto, optou-se por selecionar um conjunto de processos com características estruturais e dinâmicas distintas para a realização de testes via simulação numérica, para que fosse possível explorar exemplos em diferentes

níveis de dificuldade de acordo com a necessidade.

Como cada etapa da pesquisa compreendeu avanços de complexidade dos algoritmos de controle propostos, cada caso demandou um exemplo de complexidade à altura. Devido a isto, diversos modelos, propostos na literatura de controle como sistemas *benchmark* para teste de controladores, foram definidos para enfatizar, da melhor forma possível, cada resultado que se desejava extrair nos diferentes estágios da pesquisa. Estes sistemas, são descritos a seguir e são referenciados de acordo com a necessidade nos capítulos seguintes.

#### 1.4.1 Processo *benchmark* de Åström e Hägglund (2000)

O modelo linear contínuo do processo é descrito pela função de transferência em (1.8), onde se destaca o longo atraso de transporte dado por  $\theta = 15$  s. A resposta ao degrau unitário do sistema e seu diagrama de Bode são apresentados, respectivamente, nas figuras 2 e 3.

O processo *benchmark* de Åström e Hägglund (2000), impõe certa dificuldade ao projeto de preditores digitais tipo MVP pois, dependendo do período de amostragem utilizado para definir o modelo discreto de projeto, o atraso discreto torna-se muito longo e, conseqüentemente, cresce a dificuldade para resolver a equação de Diophantine. Por exemplo, para um período de amostragem,  $T_s = 0.1$  s, o atraso do sistema discreto seria  $d = 151$ , acarretando um filtro  $E(z^{-1})$ , do MVP, de ordem igual a 150.

Este processo é abordado no Capítulo 3 para enfatizar a contribuição do controlador GMVSS a partir da compensação do atraso de maneira intrínseca, exigindo pouca intervenção do projetista se comparado a forma tradicional de projeto de controle GMV.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-15s}}{(s+1)^3} \quad (1.8)$$

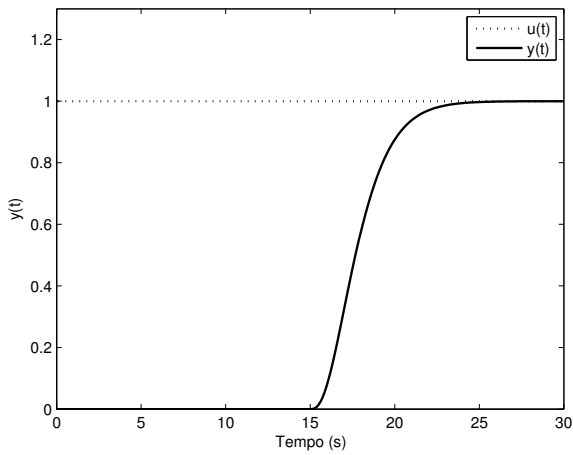


Figura 2 – Resposta ao degrau unitário do sistema em (1.8).

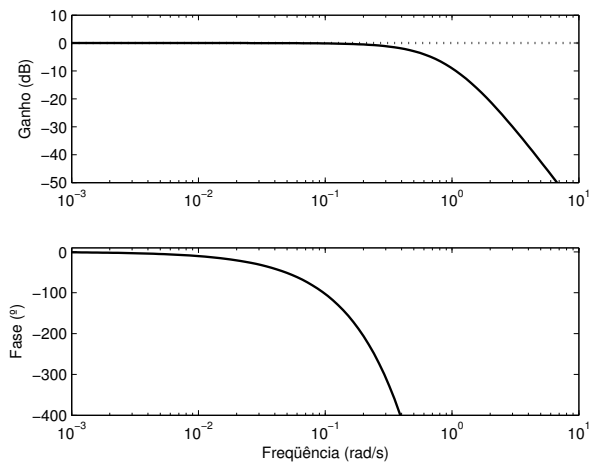


Figura 3 – Diagrama de Bode do sistema em (1.8).

### 1.4.2 Processo Pêndulo Amortecido (PAM)

O PAM é um processo mecatrônico (cf. Fig. 4) sub-amortecido desenvolvido pelo Prof. Dr. Antonio A. R. Coelho do Departamento de Automação e Sistemas (DAS) da UFSC. É um protótipo didático caracterizado por não-linearidades, como a variação do ganho estático e do coeficiente de amortecimento de acordo com o ponto de operação. É constituído de um sistema propulsor composto por uma hélice e um motor DC, que quando excitado, provoca o deslocamento angular de uma haste. Este deslocamento varia a resistência de um potenciômetro e, a partir de um circuito de tratamento de sinais, produz uma variação em tensão no terminal de saída do processo. Tanto a entrada, como a saída do PAM, são limitadas na faixa de tensão entre 0 V e 5 V.



Figura 4 – Foto do PAM.

Um modelo linear para o PAM, identificado a partir da resposta ao degrau na faixa de operação de 2.5 V, é dado pela seguinte função de transferência:

$$Y(s) = \frac{3.195}{s^2 + 0.8013s + 4.072}U(s) + \frac{9.772(s + 1.4194)}{s^2 + 0.8013s + 4.072}\xi(s), \quad (1.9)$$

onde  $Y(s)$ ,  $U(s)$ ,  $\xi(s)$ , são respectivamente a posição em tensão, a tensão de armadura do motor DC, e uma perturbação estocástica de alta frequência agindo sobre o sistema de medição.

A resposta ao degrau unitário (considerando  $\xi(s) = 0$ ) e o dia-

grama de Bode do sistema (1.9), são mostrados nas figuras 5 e 6. Pelos gráficos apresentados é possível observar quão oscilatório este processo é, caracterizado pelo baixo coeficiente de amortecimento na vizinhança de  $\zeta \approx 0.2$ , também evidenciado pelo elevado pico de ressonância no gráfico da Fig. 6.

Os desafios que o PAM apresenta vão além das características do seu modelo linear. Por ser um processo leve e de tamanho reduzido (menos de 50 cm de altura), pode-se transportá-lo com facilidade e utilizá-lo para testes práticos, onde normalmente os sinais da saída medida e controle estão contaminados com ruído. Como não há atraso de transporte considerável nesse processo, pode-se atribuir um atraso fictício no código de aquisição e controle da planta, para teste de algoritmos de controle preditivo, tal como foi feito em Silveira e Coelho (2011a).

Por se tratar de um processo de controle de posição, torna-se atraente para exemplificar o problema de controle por realimentação de estados estimados, pois há como expressar o modelo no espaço de estados em termos da posição e velocidade angulares.

Considerando apenas a parcela determinística do modelo em (1.9), pode-se reescrever sua equação em termos de

$$\ddot{y} + 0.8013\dot{y} + 4.072y = 3.195u, \quad (1.10)$$

sendo  $x_1 = y$  e  $x_2 = \dot{y}$ , as variáveis de estado de posição e velocidade, respectivamente. Logo, uma possível representação no espaço de estados para o processo PAM é dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.072 & -0.8013 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3.195 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

O PAM é utilizado nos capítulos 2 e 4 deste trabalho. No Capítulo 2, se destaca a forma pela qual controladores GMV de ordem mínima atuam em sistemas oscilatórios. Nesse mesmo capítulo, faz-se uma demonstração antecipada da idéia de controle por inferência da variável de velocidade observada, mas ainda em uma abordagem de controle GMV de ordem mínima no domínio das funções de transferência. Somente no Capítulo 4 o modelo no espaço de estados do PAM é utilizado no projeto do GMVSF, para apresentar as características desse controlador no caso SISO.

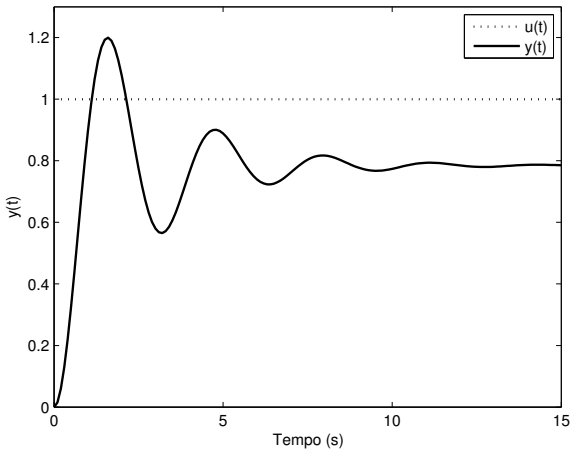


Figura 5 – Resposta ao degrau do modelo linear do PAM em (1.9).

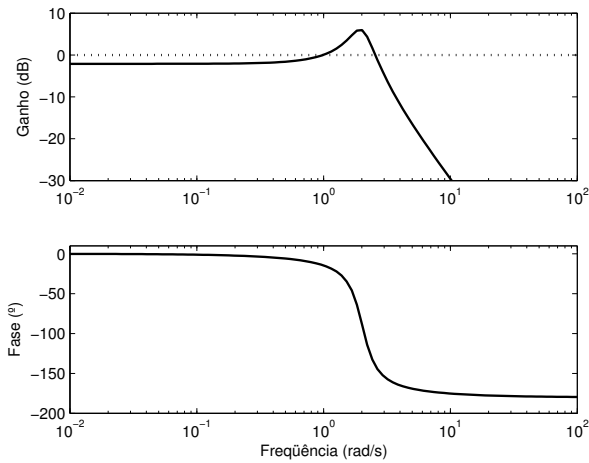


Figura 6 – Diagrama de Bode do modelo linear do PAM em (1.9).

### 1.4.3 Coluna de destilação de Wood e Berry (WB)

A descrição da coluna binária de destilação de Wood e Berry (1973) é apresentada a seguir, de forma sintetizada.

O modelo linear contínuo da coluna de WB, dado pela matriz de funções de transferência

$$\begin{bmatrix} X_t(s) \\ X_b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12.8e^{-s}}{16.7s+1} & \frac{-18.9e^{-3s}}{21s+1} \\ \frac{6.6e^{-7s}}{10.9s+1} & \frac{-19.4e^{-3s}}{14.4s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(s) \\ V(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3.8e^{-8.1s}}{14.9s+1} \\ \frac{4.9e^{-3.4s}}{13.2s+1} \end{bmatrix} D(s), \quad (1.12)$$

se popularizou como um processo *benchmark* para teste de controladores digitais. Isto se deve ao tratamento simplificado e direto do problema de separação de mistura binária (WB: metanol e água), ou seja, parte do princípio de que diversas malhas de controle internas do sistema – relativas a fluxos internos, temperatura, nível de reservatório – estão perfeitamente reguladas, resultando em um sistema MIMO  $2 \times 2$ , com acoplamentos e atrasos assíncronos (MEJÍA, 2003).

Em (1.12), as variáveis de saída  $X_t(s)$  e  $X_b(s)$ , correspondem à composição em percentual mássico de metanol no topo e na base da coluna, respectivamente. As variáveis de entrada,  $R(s)$  e  $V(s)$ , correspondem ao refluxo da mistura no topo e à injeção de vapor na base, respectivamente.  $D(s)$  corresponde a entrada de alimentação de mistura à coluna, funcionando como uma perturbação de carga.

O modelo em (1.12) foi identificado a partir do processo real operando sob as condições mostradas na Tab. 2. Portanto, considera-se que o modelo (1.12), com condições iniciais nulas, retrata a condição de operação da Tab. 2.

Tabela 2 – Condições típicas de operação da coluna.

Entradas e Saídas	Fluxo (lb/min)	% Mássico
$X_t$	1.18 (0.54 kg/min)	96.0
$X_b$	1.27 (0.58 kg/min)	0.5
$R$	1.95 (0.89 kg/min)	96.0
$V$	1.71 (0.78 kg/min)	–
$D$	2.45 (1.11 kg/min)	46.5

O funcionamento da coluna de WB – caso restrito ao modelo em (1.12) – pode ser compreendido a partir dos gráficos da Fig. 7.

Quando há refluxo,  $R(s)$ , de mistura concentrada de metanol voltando a coluna a partir do topo, há o aumento da concentração de metanol tanto no topo como na base da coluna. Ao injetar vapor,  $V(s)$ , a partir da base da coluna, esta se aquece e aumenta a taxa de evaporação da mistura, reduzindo assim a concentração de metanol na base. A partir do aumento da taxa de alimentação,  $D(s)$ , a coluna é novamente perturbada pela adição de mais água e metanol misturados.

Na Fig. 8, pode-se observar os ganhos principais, superior e inferior (CRUZ, 1996), equivalente ao diagrama de Bode de magnitude para o caso MIMO, que caracteriza a forma diferenciada como o sistema responde em frequência em relação aos dois pares de entrada e saída, enfatizando-se o grau de acoplamento de (1.12).

O modelo de Wood e Berry (1973) em (1.12) é considerado como sendo o modelo de simulação do processo, mas para o projeto dos controladores propostos neste trabalho, um modelo de projeto foi identificado via Mínimos Quadrados Recursivo (COELHO; COELHO, 2004), pois é necessário que as funções de transferência possuam um denominador comum, tal como explicado em Silveira e Coelho (2011b), também no Capítulo 4. O modelo de projeto é então descrito por

$$\begin{bmatrix} X_t(s) \\ X_b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.5104e^{-s}}{s^2+0.7465s+0.03987} & \frac{-0.7536e^{-3s}}{s^2+0.7465s+0.03987} \\ \frac{0.5036e^{-7s}}{s^2+1.032s+0.07631} & \frac{-1.48e^{-3s}}{s^2+1.032s+0.07631} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(s) \\ V(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3.8e^{-8.1s}}{14.9s+1} \\ \frac{4.9e^{-3.4s}}{13.2s+1} \end{bmatrix} D(s). \quad (1.13)$$

O modelo apresentado em (1.13) é utilizado no Capítulo 4 para exemplificar os resultados do controlador GMVSF no caso MIMO. A representação da coluna através de (1.13) é ideal para a obtenção de uma representação no espaço de estados onde são estimadas as variações das saídas medidas, podendo-se explorar o controle da velocidade de resposta através da estratégia GMVSF detalhada no Capítulo 4.

Apesar da forma modificada do modelo de projeto, observe nas figuras 9 e 10, que tanto a resposta no domínio do tempo como na frequência, para o modelo em (1.13), se assemelham às respostas do modelo original.



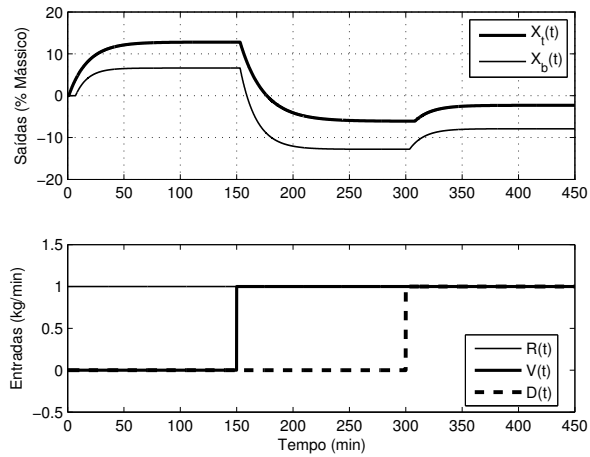


Figura 7 – Resposta ao degrau do modelo linear de WB em (1.12).

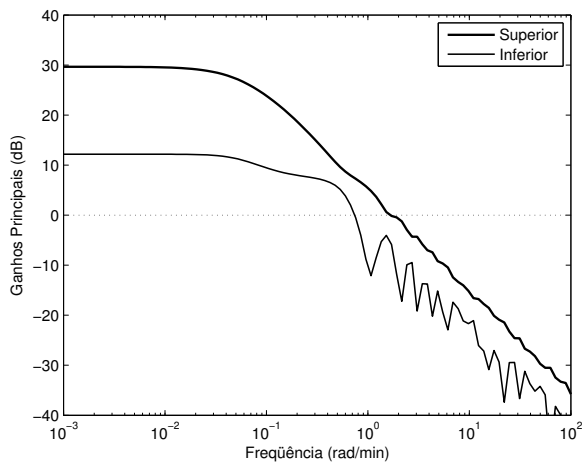


Figura 8 – Ganhos principais do modelo linear de WB em (1.12).

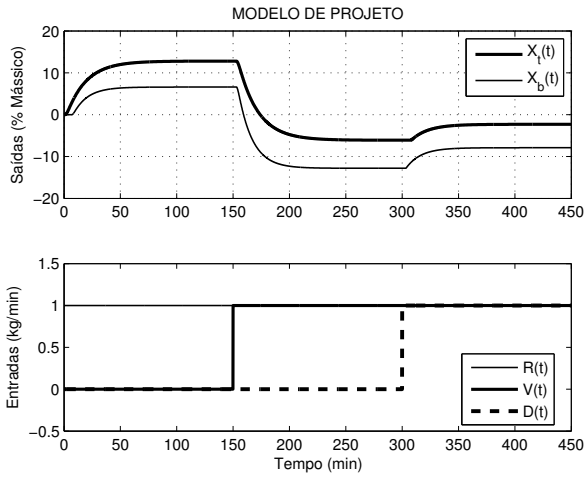


Figura 9 – Resposta ao degrau do modelo de projeto de WB em (1.13).

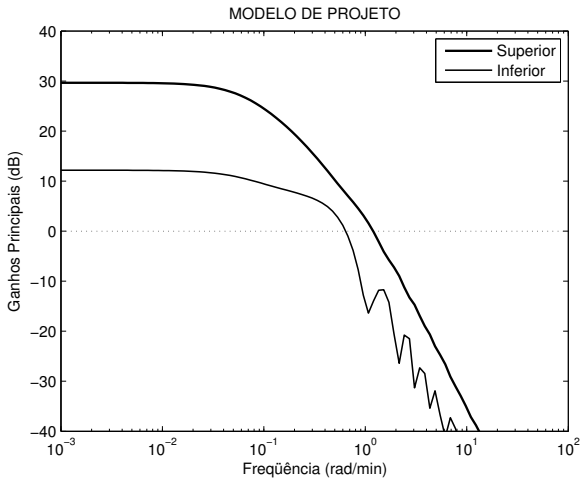


Figura 10 – Ganhos principais do modelo de projeto de WB em (1.13).

## 1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

Além do capítulo introdutório, este trabalho está estruturado da seguinte maneira:

**Capítulo 2:** abordam-se os fundamentos teóricos diretamente utilizados nos demais capítulos deste documento para proporcionar fácil acesso ao leitor; faz-se uma revisão da teoria de controle GMV no domínio das funções de transferência para o caso SISO e MIMO; são fornecidos alguns exemplos práticos de simulação para destacar as dificuldades de projeto onde as contribuições deste trabalho se aplicam.

**Capítulo 3:** apresenta-se o desenvolvimento do novo projeto de controle GMV no espaço de estados, ou GMVSS; são fornecidos exemplos analíticos da equivalência do GMVSS e o GMV de Clarke e Gawthrop (1975); são fornecidos exemplos práticos dessa equivalência via simulações entre o GMVSS e o GMV; pelo método de projeto do GMVSS, é fornecido um método analítico para a solução da Diophantine do MVP.

**Capítulo 4:** apresenta-se o desenvolvimento do controle GMV com realimentação total de estados, ou GMVSF; mostra-se a equivalência entre o Filtro de Kalman e o projeto do MVP no GMVSS para contribuir com filtragem de forma natural no projeto do MVP; apresenta-se uma técnica de projeto para o controlador GMVSF por tentativa e erro, com base em análise de resposta no domínio do tempo e da frequência; são fornecidos dois exemplos de simulação numérica para detalhar o projeto no caso SISO e MIMO, utilizando os modelos do PAM e da coluna de WB.

**Capítulo 5:** as conclusões finais são apresentadas com ênfase nas contribuições, publicações realizadas e perspectivas de pesquisas futuras.



## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo tem o objetivo de fornecer a fundamentação teórica necessária para fins de comparação e compreensão do conteúdo dos capítulos seguintes deste trabalho. O interesse é permitir que o leitor, não-familiarizado com a teoria de controle GMV, possa absorver conhecimento suficiente para compreender o desenvolvimento do GMVSS e GMVSF, e também garantir uma rápida revisão ao leitor com maior experiência em relação a essa teoria.

Além da revisão sobre a teoria de controle GMV, são apresentados alguns métodos clássicos de projeto no caso SISO e MIMO, e as dificuldades envolvidas nos mesmos, para que seja possível estabelecer uma forma de comparação com os métodos propostos nos capítulos 3 e 4. Também são apresentados exemplos de simulação numérica com os processos descritos no Capítulo 1, para reforçar os conceitos apresentados e relacionar os resultados clássicos com os da nova proposta.

### 2.1 TEORIA DE CONTROLE GMV: CASO SISO

Considerando o modelo ARMAX dado por

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\xi(k), \quad (2.1)$$

onde  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $y(k) \in \mathbb{R}$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}$  e  $\xi(k) \in \mathbb{R}$ , são, respectivamente, o atraso de tempo discreto, a saída, a entrada e uma seqüência aleatória do tipo ruído branco de variância  $\sigma_\xi^2$ .

O comportamento dinâmico do sistema em (2.1) é definido pelos polinômios  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$ ,  $C(z^{-1})$ , descritos no domínio do operador de atraso discreto  $z^{-1}$  e designados como

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{n_a}z^{-n_a}, \quad (2.2)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{n_b}z^{-n_b}, \quad (2.3)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_{n_c}z^{-n_c}. \quad (2.4)$$

O problema de controle GMV estabelece que, uma saída generalizada e a  $d$ -passos a frente (CLARKE; GAWTHROP, 1975),

$$\phi(k+d) = P(z^{-1})y(k+d) - T(z^{-1})y_r(k+d) + Q(z^{-1})u(k), \quad (2.5)$$

tende a um valor mínimo de acordo com a minimização do índice de desempenho quadrático

$$J = \mathbf{E}[\phi^2(k+d)], \quad (2.6)$$

dada em função do sinal de controle  $u(k)$ , ou seja,

$$\frac{\partial J}{\partial u(k)} = 0. \quad (2.7)$$

Em (2.6),  $\mathbf{E}[\cdot]$  corresponde ao operador esperança matemática e em (2.5),  $P(z^{-1})$ ,  $T(z^{-1})$ ,  $Q(z^{-1})$ , são polinômios que filtram a saída, uma seqüência de referência  $y_r(k)$  e o sinal de controle, respectivamente. Estes filtros polinomiais ponderam a saída generalizada e conseqüentemente, o problema de otimização do GMV. Atendo-se ao inicialmente proposto por Clarke e Gawthrop (1975), os filtros de ponderação são descritos por

$$P(z^{-1}) = p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_{n_p} z^{-n_p}, \quad (2.8)$$

$$T(z^{-1}) = t_0 + t_1 z^{-1} + \dots + t_{n_t} z^{-n_t}, \quad (2.9)$$

$$Q(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{n_q} z^{-n_q}. \quad (2.10)$$

Na saída generalizada em (2.5), dados futuros da seqüência de referência,  $y_r(k+d)$ , são supostamente conhecidos *a priori*, mas  $y(k+d)$  não está disponível. Isto acarreta o problema de prever a saída do sistema  $d$ -passos a frente para que o controlador GMV possa compensar o atraso de maneira intrínseca.

### 2.1.1 MVP no domínio das funções de transferência

O problema do MVP para o sistema da saída generalizada em (2.5) considera que a saída predita do sistema é filtrada por  $P(z^{-1})$ . Portanto, inclui-se o filtro na descrição do sistema ARMAX em (2.1) e deslocando-o  $d$ -passos a frente, o sistema é reescrito como

$$P(z^{-1})y(k+d) = \frac{P(z^{-1})B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k) + \frac{P(z^{-1})C(z^{-1})}{A(z^{-1})}\xi(k+d), \quad (2.11)$$

com a clara evidência da influência aleatória de  $\xi(k+d)$  sobre  $y(k+d)$ . O problema do MVP então utiliza a melhor informação disponível sobre

$\xi(k)$ , que em outras palavras significa qualquer informação disponível sobre  $\xi(k)$  em instantes anteriores até uma medida recente de  $y(k)$ . Isto é feito separando-se a parte relacionada a  $\xi(k+d)$  em (2.11), em dados presentes e futuros, tal que

$$\frac{P(z^{-1})C(z^{-1})}{A(z^{-1})}\xi(k+d) = \underbrace{\frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})}\xi(k)}_{\text{presente}} + \underbrace{E(z^{-1})\xi(k+d)}_{\text{futuro}}, \quad (2.12)$$

onde  $F(z^{-1})$  e  $E(z^{-1})$  são polinômios, a princípio desconhecidos, que explicam a relação  $\frac{P(z^{-1})C(z^{-1})}{A(z^{-1})}\xi(k+d)$ .

A melhor estimativa de  $y(k+d)$  até o instante  $k$ , i.e.,  $\hat{y}(k+d|k)$ , é baseada na informação no presente de (2.12), ou seja,

$$P(z^{-1})\hat{y}(k+d|k) = \frac{P(z^{-1})B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k) + \frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})}\xi(k). \quad (2.13)$$

Considerando que o descarte da parcela no futuro de  $\xi(k)$  introduz um erro na estimação de (2.13), erro esse, dado por

$$e_{est}(k+d) = E(z^{-1})\xi(k+d) = P(z^{-1})[y(k+d) - \hat{y}(k+d|k)], \quad (2.14)$$

pode-se reescrever (2.14) com base nas informações conhecidas de  $y(k)$ , ou seja,

$$e_{est}(k) = E(z^{-1})\xi(k) = P(z^{-1})[y(k) - \hat{y}(k|k)], \quad (2.15)$$

de onde é possível observar que

$$\xi(k) = \frac{P(z^{-1})}{E(z^{-1})}[y(k) - \hat{y}(k|k)]. \quad (2.16)$$

Substituindo-se (2.16) em (2.13), a equação do preditor se modifica para

$$\hat{y}(k+d|k) = \frac{B(z^{-1})E(z^{-1})u(k) + F(z^{-1})y(k)}{A(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-d}F(z^{-1})}. \quad (2.17)$$

Recorrendo-se à Eq. (2.12), é possível verificar que,

$$P(z^{-1})C(z^{-1}) = A(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-d}F(z^{-1}), \quad (2.18)$$

o que possibilita reescrever a equação do preditor também na seguinte forma:

$$\hat{y}(k+d|k) = \frac{B(z^{-1})E(z^{-1})u(k) + F(z^{-1})y(k)}{P(z^{-1})C(z^{-1})}. \quad (2.19)$$

Pode-se observar a partir da equação (2.19) que as raízes de  $P(z^{-1})C(z^{-1})$  precisam estar contidas no círculo unitário para que o preditor seja estável (CLARKE; GAWTHROP, 1975). O filtro de saída  $P(z^{-1})$  pode ser projetado para garantir a estabilidade do preditor. Observação equivalente é destacada nos capítulos 3 e 4 para o caso no espaço de estados.

O filtro  $P(z^{-1})$  é suposto conhecido, atribuído pelo projetista de acordo com as necessidades de filtragem (e de estabilidade) da variável de saída  $y(k)$ . Portanto, tanto em (2.17) como em (2.19), é necessário calcular os polinômios  $E(z^{-1})$  e  $F(z^{-1})$  que possibilitam a predição via  $\hat{y}(k+d|k)$ . Tal como apresentado por Åström e Wittenmark (1973), e Clarke e Gawthrop (1975), uma das formas é a solução da identidade polinomial mostrada em (2.18), designada como uma equação de Diophantine.

### 2.1.2 Solução da equação de Diophantine do MVP

Na equação de Diophantine em (2.18), considera-se que os polinômios que descrevem a parcela média-móvel do modelo ARMAX em (2.1),  $A(z^{-1})$  e  $C(z^{-1})$ , sejam mônicos, tal como descrito em (2.2) e (2.4). E, de acordo com Clarke e Gawthrop (1975), os polinômios resultantes da solução da Diophantine têm a seguinte forma:

$$E(z^{-1}) = 1 + e_1 z^{-1} + \dots + e_{n_e} z^{-n_e}, \quad (2.20)$$

$$n_e = d - 1; \quad (2.21)$$

$$F(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{n_f} z^{-n_f}, \quad (2.22)$$

$$n_f = \max(n_p + n_c, n_a - 1); \quad (2.23)$$

o que estabelece algumas observações.

*Observação 1:* a solução de (2.18), no contexto do MVP, é factível somente quando  $P(z^{-1})$  for mônico, pois

$$p_0 + [P(z^{-1}) - p_0] [C(z^{-1}) - 1] = 1 + [A(z^{-1}) - 1] [E(z^{-1}) - 1]. \quad (2.24)$$



*Observação 2:* quando  $p_0 \neq 1$ , a estrutura do polinômio em (2.20) não é verdadeira ou não há solução para (2.24). No entanto, se

$$E(z^{-1}) = e_0 + e_1 z^{-1} + \dots + e_{n_e} z^{-n_e}, \quad (2.25)$$

$e_0 = p_0$ , e a solução é factível.

### 2.1.3 Lei de controle e o sistema em malha fechada

Substituindo-se a expressão do preditor, (2.19), na saída generalizada em (2.5), esta última pode ser reescrita em sua forma estimada a partir de informações até o instante  $k$ , tal que

$$\hat{\phi}(k+d|k) = P(z^{-1})\hat{y}(k+d|k) - T(z^{-1})y_r(k+d) + Q(z^{-1})u(k). \quad (2.26)$$

Resolvendo-se o problema de otimização em (2.7) e notando que

$$\mathbf{E}[\hat{\phi}^2(k+d|k)] = \hat{\phi}^2(k+d|k), \quad (2.27)$$

pois em (2.26), todas as informações são conhecidas,

$$\frac{\partial \left[ \hat{\phi}^2(k+d|k) \right]}{\partial u(k)} = 0 = \quad (2.28)$$

$$2Q(z^{-1})[P(z^{-1})\hat{y}(k+d|k) - T(z^{-1})y_r(k+d) + Q(z^{-1})u(k)],$$

a lei de controle do GMV é dada por

$$u(k) = \frac{C(z^{-1})T(z^{-1})y_r(k+d) - F(z^{-1})y(k)}{B(z^{-1})E(z^{-1}) + C(z^{-1})Q(z^{-1})}. \quad (2.29)$$

Em (2.29), é importante observar que o filtro  $P(z^{-1})$  não aparece explicitamente na lei de controle, mas suas características de filtragem foram transferidas aos polinômios  $E(z^{-1})$  e  $F(z^{-1})$  através da Diophantine.

A equação de malha fechada, considerando uma planta descrita por (2.1) e controlada pela lei de controle em (2.29), é representada

pela seguinte expressão:

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{B(z^{-1})P(z^{-1}) + A(z^{-1})Q(z^{-1})} y_r(k) + \frac{B(z^{-1})E(z^{-1}) + C(z^{-1})Q(z^{-1})}{B(z^{-1})P(z^{-1}) + A(z^{-1})Q(z^{-1})} \xi(k). \quad (2.30)$$

Esta equação considera a dinâmica de malha fechada tanto a partir da referência,  $y_r(k)$ , como a partir da sequência tipo ruído branco,  $\xi(k)$ .

A função de transferência que caracteriza o comportamento dinâmico de malha fechada do sistema controlado a partir de  $y_r(k)$ , em (2.30), está explicitamente representada pelos polinômios que ponderam o problema de otimização no controle GMV, ou seja,  $P(z^{-1})$ ,  $T(z^{-1})$ ,  $Q(z^{-1})$ . Relaxando-se então, o ponto de vista de análise para o caso determinístico, i.e., reescrevendo-se (2.1) como

$$\frac{y(k)}{u(k)} = \frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}, \quad (2.31)$$

e também (2.30) como

$$\frac{y(k)}{y_r(k)} = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{B(z^{-1})P(z^{-1}) + A(z^{-1})Q(z^{-1})}, \quad (2.32)$$

é possível tratar o problema de projeto do controlador GMV de maneira direta pelo método de alocação de pólos (WELLSTEAD; ZARROP, 1991), dado por

$$A_{cl}(z^{-1}) = B(z^{-1})P(z^{-1}) + A(z^{-1})Q(z^{-1}), \quad (2.33)$$

onde  $A_{cl}(z^{-1})$  é um polinômio característico de malha fechada que estabelece a dinâmica desejada pelo projetista.

A expressão (2.33) configura uma nova equação de Diophantine, onde os fins justificam os meios, pois o polinômio característico de malha fechada é conhecido e, a partir deste, os filtros de projeto são estabelecidos. Essa nova Diophantine é mais simples que a do projeto do MVP em (2.18), especialmente no caso SISO para sistemas descritos por modelos de ordem reduzida.

Apesar de (2.33) ser um método eficaz e direto de se estabelecer  $P(z^{-1})$  e  $Q(z^{-1})$ , em certos casos pode haver a necessidade de incluir filtros de medição específicos. A inclusão desses filtros geralmente modifica o comportamento dinâmico da variável de saída do

sistema; portanto, deve ser considerado no projeto do controlador, podendo acarretar casos particulares de projeto do controlador GMV.

#### 2.1.4 GMV com filtro de medição generalizado

Na maioria das aplicações reais em controle de processos há a presença de ruídos de medição provenientes dos sensores, dispositivos de aquisição de dados ou induzidos através de interferências provocadas por outros equipamentos nas mediações dos processos. Quando os níveis de ruído são inaceitáveis, normalmente faz-se a inclusão de filtros com características de um passa-baixa (analógicos ou digitais).

Quando os filtros são inerentes ao processo, e os modelos para projeto de controladores já detêm tais características de filtragem como parte integrante do processo sem distinção, pode-se desconsiderar a ponderação da saída [ $P(z^{-1}) = 1$ ], ou obtê-la a partir de (2.33), por exemplo.

No entanto, quando há necessidade de implementar o filtro de saída e o modelo de projeto não considera a presença desse filtro, deve-se considerá-lo a partir de  $P(z^{-1})$  ou o filtro projetado precisa ser incorporado à descrição do modelo do processo. De tal forma que, considerando um filtro de medição generalizado, representado por

$$P(z^{-1}) = \frac{P_N(z^{-1})}{P_D(z^{-1})} = \frac{p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_{n_p} z^{-n_p}}{1 + \bar{p}_1 z^{-1} + \dots + \bar{p}_{n_{\bar{p}}} z^{-n_{\bar{p}}}}, \quad (2.34)$$

a equação de Diophantine no projeto do MVP, (2.18), modifica-se para (CAMERON; SEBORG, 1983; WELLSTEAD; ZARROP, 1991)

$$P_N(z^{-1})C(z^{-1}) = P_D(z^{-1})A(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-d}F(z^{-1}). \quad (2.35)$$

Observa-se em (2.35), que com a inclusão do filtro generalizado no problema, a solução da Diophantine torna-se mais complicada, especialmente se  $n_{\bar{p}} \geq n_a$ , pois

$$E(z^{-1}) = e_0 + e_1 z^{-1} + \dots + e_{n_e} z^{-n_e}, \quad (2.36)$$

$$n_e = d - 1; \quad (2.37)$$

$$F(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{n_f} z^{-n_f}, \quad (2.38)$$

$$n_f = \max(n_p + n_c, n_{\bar{p}} + n_a - 1); \quad (2.39)$$

e conseqüentemente  $n_f$  cresce para incorporar as características de

$P(z^{-1})$ .

Mesmo para sistemas SISO de ordem relativamente baixa, por exemplo, descritos por SOPDT ou ARMAX de segunda ordem, a solução da Diophantine já não é trivial para determinados tipos de filtros. Para melhor ilustrar esta afirmação, apresenta-se um exemplo a seguir.

### 2.1.5 GMV para um sistema ARMAX de 2ª ordem

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})y(k) = \\ (b_0 + b_1 z^{-1})u(k-5) + (1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2})\xi(k). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Deseja-se projetar um controlador GMV para (2.40) com a inclusão de um filtro de 2ª ordem descrito por

$$P(z^{-1}) = \frac{p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}{1 + \bar{p}_1 z^{-1} + \bar{p}_2 z^{-2}}. \quad (2.41)$$

O atraso discreto do sistema é dado por  $d = 5$  e analisando-se a ordem dos polinômios envolvidos no projeto, verifica-se que

$$E(z^{-1}) = e_0 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2} + e_3 z^{-3} + e_4 z^{-4}, \quad (2.42)$$

$$F(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + f_3 z^{-3} + f_4 z^{-4}, \quad (2.43)$$

acarretando a equação de Diophantine para o projeto do MVP, dada por

$$\begin{aligned} (p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}) \times (1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}) = \\ (1 + \bar{p}_1 z^{-1} + \bar{p}_2 z^{-2}) \times (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) \\ \times (e_0 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2} + e_3 z^{-3} + e_4 z^{-4}) \\ + (f_0 z^{-5} + f_1 z^{-6} + f_2 z^{-7} + f_3 z^{-8} + f_4 z^{-9}). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Supondo-se que exista uma especificação de desempenho atrelada ao projeto, mapeada na forma de um polinômio característico de malha fechada  $A_{cl}(z^{-1})$ , que deva ser comparado, como em (2.33), para a obtenção de  $Q(z^{-1})$ . Com mais esta etapa, nota-se que este simples exemplo cresce, de maneira exagerada, em ordem e complexidade, tornando os métodos tradicionais de projeto inviáveis sem o auxílio de algoritmos que resolvam as equações de Diophantine envolvidas.

Em alguns casos, há como reduzir a ordem da descrição planta+filtro quando esta se encontra em uma forma não-mínima. No entanto, o foco de interesse é investigar os casos em que esta redução não é viável, haja vista que o objetivo deste trabalho está direcionado à utilização do Filtro de Kalman, também, como estimador de estados para uma abordagem de controle GMV no espaço de estados. Portanto, a ordem dos filtros está diretamente ligada à ordem do modelo de projeto, e uma redução implica no descarte de uma variável de estado estimada (supondo-se que o modelo de projeto já possui ordem mínima em relação aos interesses do projetista).

Dependendo da técnica de projeto adotada para obter  $P(z^{-1})$ , verifica-se em (2.44) que esse filtro contribui para o aumento da complexidade das equações de projeto. Além desse motivo, há uma contribuição ainda maior em decorrência de longos valores de atraso.

Clarke (1984) sugeriu como alternativa para evitar o crescimento da Diophantine no tratamento de sistemas com atrasos longos, o aumento do período de amostragem, de tal forma que  $d \leq 3$ . No entanto, esta abordagem é de certo modo contraditória, pois sabe-se que a seleção do período de amostragem está atrelada às características dinâmicas do processo e que a frequência de amostragem deve ser, no mínimo, duas vezes mais veloz que a máxima frequência do processo (WELLSTEAD; ZARROP, 1991).

### 2.1.6 Controlador GMV de estrutura fixa

Diferentemente das abordagens mais gerais do controle GMV, como a filtrada por (2.34) e sintonizada via alocação de pólos, mostrada em (2.33), estruturas fixas mais simples desse controlador tornaram-se atraentes pelo baixo número de parâmetros de sintonia e facilidade de executá-la por tentativa e erro, métodos inteligentes, entre outros.

Doi e Mori (2002) abordaram um estudo sobre algumas dessas estruturas fixas do controlador GMV com ênfase apenas na ponderação do sinal de controle, ou seja, a saída generalizada é dada por

$$\phi(k+d) = y(k+d) - y_r(k+d) + Q(z^{-1})u(k). \quad (2.45)$$

Nessa abordagem, os autores consideraram a análise do caso posicional, com  $Q(z^{-1}) = \lambda$ , incremental *ad hoc*, com  $Q(z^{-1}) = \lambda(1 - z^{-1})$ , e o caso por inclusão da ação incremental no modelo de projeto, designada como de modelo aumentado.

A forma incremental por modelo aumentado é caracterizada pela

inclusão de  $\Delta = (1 - z^{-1})$  no modelo de projeto, ou seja,

$$\Delta A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})\Delta u(k - d) + C(z^{-1})\xi(k), \quad (2.46)$$

que corresponde a descrição de um sistema integral média-móvel (ARI-MAX, *Auto-Regressive Integrated-Moving-Average with exogenous inputs*). O projeto é então resolvido para

$$\phi(k + d) = y(k + d) - y_r(k + d) + \lambda\Delta u(k), \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}[\phi^2(k + d)]}{\partial \Delta u(k)} = 0. \quad (2.48)$$

O problema de otimização em (2.48) se estabelece em função de  $\Delta u(k)$ , porém, o sinal de controle aplicado ao processo é

$$u(k) = u(k - 1) + \Delta u(k). \quad (2.49)$$

Tanto em (2.45) como em (2.47), o controlador GMV é dito de ordem mínima ou de um único parâmetro de sintonia. Este parâmetro, identificado por  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , é o fator escalar que pondera a energia do sinal de controle. Quanto maior seu valor, mais conservativa a ação de controle se torna.

Dentre essas três estruturas fixas apresentadas, a de modelo aumentado é a que apresenta o maior grau de robustez em relação ao rastreamento assintótico de referência (DOI; MORI, 2002). Essa estrutura de controle GMV incremental é capaz de rastrear seqüências de referência em rampa, senóide e quadradas, além de garantir a rejeição de perturbações de carga na entrada e na saída do processo (SILVEIRA; RODRÍGUEZ; COELHO, 2012).

Devido ao modelo de projeto ser aumentado pela inclusão da ação incremental, a equação de Diophantine no projeto do MVP sofre uma modificação, sendo esta dada por

$$C(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-d}F(z^{-1}), \quad (2.50)$$

e como  $\Delta$  passa a fazer parte da expressão, a ordem de  $F(z^{-1})$  passa a ser  $n_f = n_a$ .

Por ser mais simples, a estrutura fixa de ordem mínima fornece pouca flexibilidade ao projetista. Isto quer dizer que a lei de controle resultante é essencialmente dependente das características dinâmicas do modelo de projeto, ponderadas por  $\lambda$ . De maneira análoga a forma

utilizada para se chegar em (2.29), a lei de controle do GMV incremental de ordem mínima é

$$\Delta u(k) = \frac{C(z^{-1})y_r(k+d) - F(z^{-1})y(k)}{B(z^{-1})E(z^{-1}) + \lambda C(z^{-1})}. \quad (2.51)$$

Essa ponderação da dinâmica do sistema a partir de  $\lambda$  torna-se mais evidente pela observação da equação de malha fechada, da referência para a saída, análoga ao apresentado em (2.32) e reescrita como

$$\frac{y(k)}{y_r(k)} = \frac{B(z^{-1})}{B(z^{-1}) + \lambda \Delta A(z^{-1})}. \quad (2.52)$$

Para enfatizar as afirmações apresentadas nesta sub-seção, o processo PAM, apresentado no Capítulo 1 em (1.9) é utilizado como exemplo.

### 2.1.6.1 GMV incremental de ordem mínima aplicado ao PAM

O equivalente discreto (via ZOH) do modelo em (1.9), para um período de amostragem  $T_s = 0.1$  s, é dado por

$$\begin{aligned} (1 - 1.8840z^{-1} + 0.9230z^{-2})y(k) = \\ (0.0155 + 0.0151z^{-1})z^{-1}u(k) + (1 - 0.8672z^{-1})\frac{\xi(k)}{\Delta}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Para possibilitar a rápida reprodução deste exemplo, são fornecidos os resultados da Diophantine em (2.50), para o sistema aumentado:

$$\begin{aligned} E(z^{-1}) &= 1, \\ F(z^{-1}) &= 2.0168 - 2.8070z^{-1} + 0.9230z^{-2}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Observe, na Fig. 11, que a variação de  $\lambda$  apenas modifica o grau de conservadorismo da resposta do PAM e da ação de controle do GMV. Como o PAM é um processo sub-amortecido (evidente na Fig. 5), para reduzir as oscilações com este tipo de controlador, perde-se em desempenho em termos de velocidade de resposta do sistema de malha fechada.

Para confrontar o resultado do GMV incremental de ordem mínima, apresenta-se o caso ideal em termos de variância mínima para quando  $\lambda = 0$ , mostrado na Fig. 12. Este resultado fornece uma de-

monstração de qual seria o melhor desempenho para um controlador de variância mínima sobre o PAM, apesar do sinal de controle gerado não ser factível em aplicações práticas nesse processo.

Conclui-se então, que apesar de atraente por ter apenas um parâmetro de sintonia, o GMV de ordem mínima opera basicamente restringindo a largura de banda da malha de controle e, conseqüentemente, aumentando o atraso da velocidade de resposta, conforme  $\lambda$  cresce.

Neste exemplo não se levou em consideração a presença do ruído, ou seja,  $\xi(k) = 0$ . Isto se deve ao fato de que o caso determinístico seria suficiente para explicar o conteúdo apresentado de maneira mais clara. No entanto, mesmo se  $\xi(k) \neq 0$ , os resultados apresentados seriam válidos.

Apesar do controlador de ordem mínima fornecer baixa flexibilidade ao projetista, é intuitivamente simples. Um operador humano é capaz de sintonizar tal controlador com extrema facilidade para, ao menos, estabilizar o processo. É possível notar, também, que há como escalonar os valores de  $\lambda$  de acordo com o estado do processo – i.e., em regime permanente ou no transitório – para obter um melhor desempenho em termos de velocidade de resposta e evitar oscilações. Em Silveira, Rodríguez e Coelho (2012), este método de sintonia de  $\lambda$  foi testado com um sistema de escalonamento fuzzy e o PAM.

O método de escalonamento do GMV de ordem mínima fornece boa flexibilidade ao projeto. No entanto, a idéia de adicionar sistemas inteligentes para supervisionar malhas de controle em camadas hierárquicas inferiores, aumenta a complexidade do algoritmo. Para evitar este problema, buscou-se estender a idéia do GMV de ordem mínima em uma estratégia de controle por inferência (SEBORG; EDGAR; MELLICHAMP, 2003), detalhada no próximo exemplo.

### 2.1.6.2 Controle por inferência com GMVs de ordem mínima

Na abordagem de controle por inferência considera-se que as variações da posição do PAM podem ser observadas, caracterizando a informação de velocidade, estimada por inferência. Como este exemplo trata o caso de simulação numérica, a variação da posição angular,  $[y(k) - y(k-1)]$ , é precisamente a velocidade angular do modelo de simulação do PAM, dispensando qualquer projeto de observador de estados neste exemplo (isto será detalhado no caso do GMVSF no Capítulo 4).

A idéia chave é considerar o projeto de dois controladores GMV de ordem mínima trabalhando paralelamente no controle da posição e



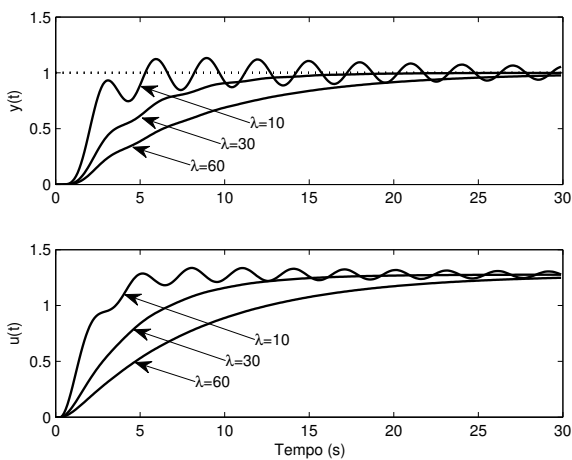


Figura 11 – GMV incremental de ordem mínima aplicado ao PAM com:  $\lambda = 10$ ,  $\lambda = 30$  e  $\lambda = 60$ .

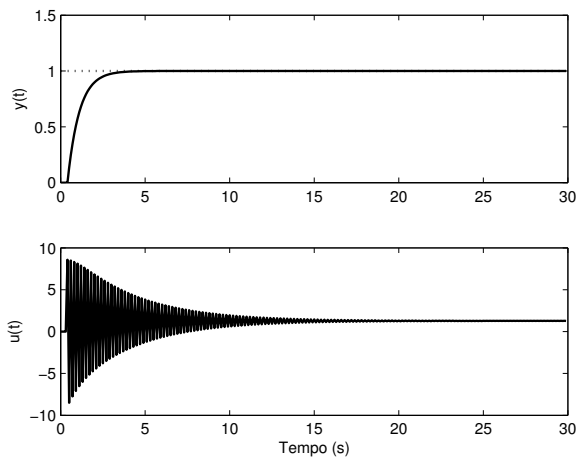


Figura 12 – GMV incremental de ordem mínima aplicado ao PAM: caso ideal, em termos da mínima variância da variável de saída, com  $\lambda = 0$ .

velocidade angular, em uma abordagem *multi-loop* (de múltiplas malhas). A lei de controle resultante é então a composição desses dois controladores dada pela soma dos mesmos.

Reescreve-se então o modelo discreto do PAM, em (2.53), enfatizando-se a variável medida,  $y_p(k) = y(k)$ , que designa a posição angular, de tal forma que

$$A(z^{-1})y_p(k) = B(z^{-1})u(k-d) + C(z^{-1})\frac{\xi(k)}{\Delta}. \quad (2.55)$$

O projeto do GMV incremental de ordem mínima, para a posição angular, considera a saída generalizada

$$\phi_p(k+d) = y_p(k+d) - y_r(k+d) + \lambda_p \Delta u_p(k), \quad (2.56)$$

onde destacam-se o fator de ponderação da energia de controle em relação a posição,  $\lambda_p$ , e a parcela do sinal de controle referente a posição,  $\Delta u_p(k)$ . Portanto, o modelo em (2.55) é aumentado e reescrito em função de  $\Delta u_p(k)$ , conforme:

$$\Delta A(z^{-1})y_p(k) = B(z^{-1})\Delta u_p(k-d) + C(z^{-1})\xi(k). \quad (2.57)$$

A partir de (2.57), resolve-se a equação de Diophantine referente ao MVP da parcela da posição angular, ou seja,

$$C(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1})E_p(z^{-1}) + z^{-d}F_p(z^{-1}). \quad (2.58)$$

Perceba que em (2.58) o sistema está aumentado, evidente pela presença de  $\Delta A(z^{-1})$ .

De maneira similar, resolve-se a segunda parcela do controlador, referente a variável inferida de velocidade angular,  $y_v(k) = y(k) - y(k-1) = \Delta y(k)$ . Esta variável é assintoticamente estável, portanto, quando  $y_p(\infty) = cte$  (constante),  $y_v(\infty) = 0$ . A saída generalizada correspondente a parcela da velocidade angular é então dada por

$$\phi_v(k+d) = y_v(k+d) + \lambda_v \Delta u_v(k). \quad (2.59)$$

Veja que em (2.59) a segunda saída generalizada passou a considerar a ponderação do sinal de controle em termos do problema de velocidade,  $\lambda_v$ , e também a forma incremental de controle com a parcela de velocidade,  $\Delta u_v(k)$ .

Diferentemente do caso de posição, o modelo do PAM é reescrito

enfatizando-se  $\Delta y(k)$ , ou seja,

$$A(z^{-1})\Delta y(k) = A(z^{-1})y_v(k) = B(z^{-1})\Delta u_v(k-d) + C(z^{-1})\xi(k). \quad (2.60)$$

A nova formulação do modelo para o problema de velocidade, dado por (2.60), requer a solução de uma segunda Diophantine,

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})E_v(z^{-1}) + z^{-d}F_v(z^{-1}). \quad (2.61)$$

Note que a Diophantine (2.61), para o problema do MVP referente a parcela de velocidade angular, não considera a forma aumentada, o que acarreta em dois outros filtros,  $E_v(z^{-1})$  e  $F_v(z^{-1})$ .

Para possibilitar a rápida reprodução deste exemplo, são fornecidos os seguintes resultados das equações de Diophantine:

$$E_p(z^{-1}) = E_v(z^{-1}) = 1, \quad (2.62)$$

$$F_p(z^{-1}) = 2.0168 - 2.8070z^{-1} + 0.9230z^{-2}, \quad (2.63)$$

$$F_v(z^{-1}) = 1.0168 - 0.9230z^{-1}. \quad (2.64)$$

A lei de controle resultante, dada pela composição dos dois projetos de controle GMV de ordem mínima é

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = & \underbrace{\frac{C(z^{-1})y_r(k+d) - F_p(z^{-1})y(k)}{B(z^{-1})E_p(z^{-1}) + \lambda_p C(z^{-1})}}_{\Delta u_p(k)} \\ & + \underbrace{\frac{[-F_v(z^{-1})]\Delta y(k)}{B(z^{-1})E_v(z^{-1}) + \lambda_v C(z^{-1})}}_{\Delta u_v(k)}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Apesar do controlador resultante utilizar dois parâmetros para a sintonia, a maneira intuitiva de executá-la é mantida, dada pela forma com que o projetista retém a energia de controle para mover a variável controlada de interesse. Com essa premissa, fez-se a simulação deste exemplo com o PAM usando-se  $\lambda_p = 4$  e  $\lambda_v = 0.1$ , selecionados por tentativa e erro na busca por um resultado semelhante ao caso ideal, MV ( $\lambda = 0$ ), apresentado na Fig. 12, mas que fornecesse um sinal de controle factível de implementação prática.

Os resultados, em termos da saída medida e velocidade inferida do sistema, são apresentados na Fig. 13. Note que as oscilações foram eliminadas e a velocidade de resposta, aumentada consideravelmente, se

comparada a Fig. 11. Na Fig. 14, os sinais de controle não apresentam o chaveamento abrupto obtido para o caso ideal mostrado na Fig. 12.

Os resultados apresentados, a forma escolhida para sintonizar o controlador, a definição de sua estrutura com base na inferência a partir da variação da saída medida e até mesmo a escolha do PAM, são estritamente decorrentes do que se pretende esclarecer a partir de um exemplo simplificado. No entanto, pode-se afirmar que outros valores de  $\lambda_p$  e  $\lambda_v$ , na vizinhança dos utilizados neste exemplo, fornecem bons resultados em termos de velocidade de resposta, sinal de controle implementável e baixo sobre-sinal.

Portanto, neste momento do texto, não se pretende explorar os limites de estabilidade ou margens de robustez do controlador do exemplo, mas sim visualizar sua contribuição em síntese para o controlador GMVSF abordado no Capítulo 4. Analisando-se esse tipo de síntese de controle concluiu-se que era possível estabelecer estruturas complexas de controle GMV com base em sub-estruturas mais simples de ordem mínima operando paralelamente como em uma estratégia por realimentação de estados estimados.

Note que a introdução de  $y_v(k)$  no problema nada mais é do que considerar uma variável observada na constituição da lei de controle. Também, o método de projeto nada mais é do que projetar controladores GMV de ordem mínima adicionais para cada variável de interesse, obviamente, fazendo-se a distinção dos casos de rastreamento de referência [normalmente no controle da saída medida – cf. (2.56)], e de regulação das variáveis assintoticamente estáveis observadas [cf. (2.59)].

A estratégia de projeto apresentada, quando aplicada a sistemas SISO simples, como o modelo do PAM, não impõe grande dificuldade. Mesmo assim, é necessário destacar que para cada variável inferida adicionada, há uma nova equação de Diophantine envolvida no projeto. De tal forma que, se o projetista desejar incluir um grande número de variáveis inferidas a partir do modelo nominal de projeto, deixa de ser trivial projetar tantos GMVs de ordem mínima necessários através do método convencional via funções de transferência.

Pode-se fazer uma analogia deste exemplo em relação aos controladores por realimentação de estados, haja vista que a observação da velocidade angular e sua utilização na lei de controle se assemelha aos métodos normalmente empregados na teoria de controle moderno. A vantagem desse domínio de análise – diga-se o de espaço de estados – é que as descrições matriciais possibilitam resolver o problema para todas as variáveis de estado envolvidas e de uma só vez.

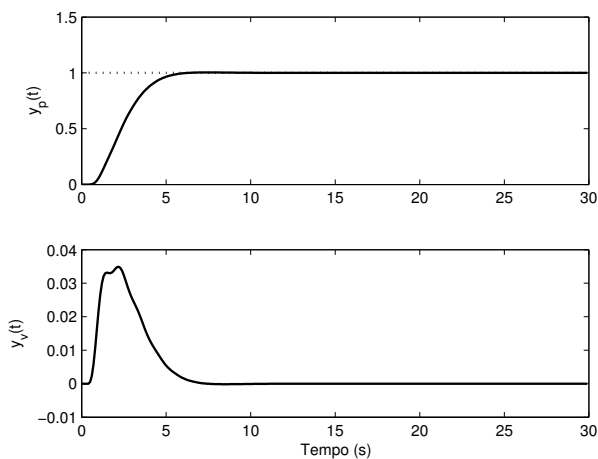


Figura 13 – Posição angular ( $y_p(t)$ , em Volts) controlada por dois GMVs de ordem mínima. Um segundo GMV de ordem mínima regula a velocidade angular  $y_v(t)$  inferida a partir das variações da posição.

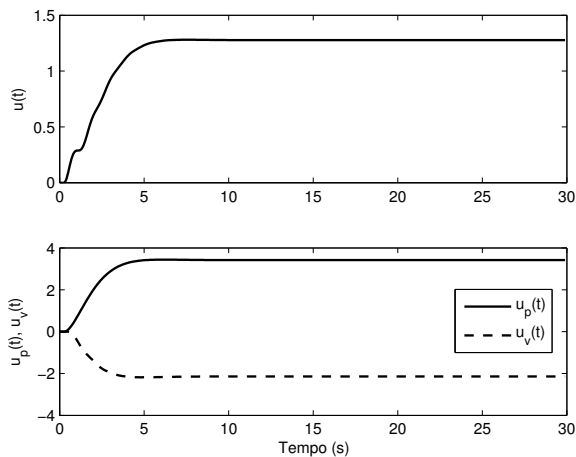


Figura 14 – Sinal de controle do controlador GMV incremental via velocidade inferida: sinal de controle resultante (gráfico superior); sinais de controle independentes (gráfico inferior) para  $\lambda_p = 4$  e  $\lambda_v = 0.1$ .

Com base nos comentários apresentados, verifica-se que a inclusão de outras variáveis no problema se assemelha a uma estrutura multivariável. Para melhor estabelecer essa ligação, e apresentar as dificuldades de projeto no controle MIMO GMV quando não há uma solução em batelada, faz-se uma revisão do caso multivariável na Seção 2.2.

## 2.2 TEORIA DE CONTROLE GMV: CASO MIMO

Considere um sistema multivariável, cuja relação entre as entradas e saídas é dada pela seguinte matriz de funções de transferência:

$$\mathbf{G}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{B_{11}(z^{-1})z^{-d_{11}}}{A_{11}(z^{-1})} & \dots & \frac{B_{1q}(z^{-1})z^{-d_{1q}}}{A_{1q}(z^{-1})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{B_{p1}(z^{-1})z^{-d_{p1}}}{A_{p1}(z^{-1})} & \dots & \frac{B_{pq}(z^{-1})z^{-d_{pq}}}{A_{pq}(z^{-1})} \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

A equação (2.66) designa a representação de um processo linear discreto com  $p \times q$  atrasos distintos nas entradas do sistema. Considerando que o sistema em (2.66) também pode ser descrito por um modelo ARMAX multivariável, dado por

$$\mathbf{A}(z^{-1})y(k) = \mathbf{B}(z^{-1})u(k - \mathbf{d}) + \mathbf{C}(z^{-1})\xi(k), \quad (2.67)$$

onde convencionou-se que  $\mathbf{d}$  representa o conjunto dos  $p \times q$  atrasos discretos, apenas para simplificar a notação. Além disto,  $y(k) \in \mathbb{R}^p$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^q$ ,  $\xi(k) \in \mathbb{R}^p$ , são, respectivamente, o vetor de saídas, de entradas, e um vetor de seqüências tipo ruído branco, média nula e variância  $\sigma_\xi^2$ .

Em (2.67),  $\mathbf{A}(z^{-1})$ ,  $\mathbf{B}(z^{-1})$  e  $\mathbf{C}(z^{-1})$ , são matrizes polinomiais no domínio do operador de atraso  $z^{-1}$  e definidas por

$$\mathbf{A}(z^{-1}) = \mathbf{I}_p + \mathbf{A}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{A}_{n_A} z^{-n_A}, \quad (2.68)$$

$$\mathbf{B}(z^{-1}) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{B}_{n_B} z^{-n_B}, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{C}(z^{-1}) = \mathbf{I}_p + \mathbf{C}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{C}_{n_C} z^{-n_C}, \quad (2.70)$$

onde  $\mathbf{A}(z^{-1}) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\mathbf{B}(z^{-1}) \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ,  $\mathbf{C}(z^{-1}) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ .

O problema de controle GMV no caso MIMO foi inicialmente proposto por Koivo (1980) e apresenta algumas modificações em termos

do funcional que deve ser minimizado:

$$J = \mathbf{E} \left\{ \|y_f(k+d) - y_{r_f}(k+d)\|^2 + \|\mathbf{Q}(z^{-1})u(k)\|^2 \right\}, \quad (2.71)$$

$$y_f(k+d) = \mathbf{P}(z^{-1})\mathbf{\Psi}(z^{-1})y(k+d), \quad (2.72)$$

$$y_{r_f}(k+d) = \mathbf{T}(z^{-1})\mathbf{\Psi}(z^{-1})y_r(k+d), \quad (2.73)$$

onde  $d$  representa a maior potência de  $\mathbf{\Psi}(z^{-1})$  e

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z^{-1}) &= \mathbf{I}_p + \mathbf{P}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{P}_{n_P} z^{-n_P}, \\ \mathbf{T}(z^{-1}) &= \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{T}_{n_T} z^{-n_T}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

são filtros de ponderação do controlador GMV, na forma de matrizes polinomiais.

Em (2.71), há uma nova matriz polinomial,  $\mathbf{\Psi}(z^{-1})$ , que designa a matriz *interactor* do sistema (2.67). A matriz *interactor* de um sistema multivariável foi introduzida por Wolovich e Falb (1976) como uma maneira de representar o atraso de transporte de sistemas MIMO. Sua descrição é apresentada de maneira resumida na forma de um teorema descrito por Coelho (1991):

### **Teorema 2.1 (Matriz *Interactor*)**

*Seja  $\mathbf{G}(z^{-1})$  uma matriz de transferência de um sistema multivariável. Então, existe uma matriz polinomial  $\mathbf{\Psi}(z^{-1}) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  definida por*

$$\mathbf{\Psi}(z^{-1}) = \mathbf{H}(z^{-1})\mathbf{D}(z^{-1}), \quad (2.75)$$

onde

$$\mathbf{H}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21}(z^{-1}) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_{p1}(z^{-1}) & h_{p2}(z^{-1}) & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

$$\mathbf{D}(z^{-1}) = \text{diag} [ z^{d_1} \quad z^{d_2} \quad \dots \quad z^{d_p} ], \quad (2.77)$$

e  $h_{ij}(z^{-1})$  ( $i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q$ ) é divisível por  $z^{-1}$  ou é nulo, tal que

$$\lim_{z^{-1} \rightarrow 0} \mathbf{\Psi}(z^{-1})\mathbf{G}(z^{-1}) = \mathbf{K}, \quad (2.78)$$

sendo  $\mathbf{K}$  uma matriz não-singular.

Como foi dito no Capítulo 1, uma das dificuldades no projeto do GMV no caso MIMO é a não-comutatividade das operações com matrizes polinomiais. De tal maneira que, além de ser necessário o cálculo da matriz *interactor*, precisa-se obter as matrizes polinomiais  $\mathbf{A}^*(z^{-1})$  e  $\mathbf{C}^*(z^{-1})$ , tais que

$$\mathbf{C}(z^{-1})\mathbf{A}^*(z^{-1}) = \mathbf{A}(z^{-1})\mathbf{C}^*(z^{-1}), \quad (2.79)$$

com  $\mathbf{A}^*(0) = \mathbf{I}_p$ ,  $\mathbf{C}^*(0) = \mathbf{I}_p$ ;  $n_{\mathbf{A}^*} = n_{\mathbf{A}}$ ,  $n_{\mathbf{C}^*} = n_{\mathbf{C}}$  (COELHO, 1991).

De maneira análoga ao projeto no caso SISO, a informação sobre  $y_f(k+d)$  é desconhecida e precisa ser predita. A equação de Diophantine para o caso MIMO é dada por

$$\mathbf{P}(z^{-1})\mathbf{\Psi}(z^{-1})\mathbf{C}^*(z^{-1}) = \mathbf{E}(z^{-1})\mathbf{A}^*(z^{-1}) + z^{-d}\mathbf{F}(z^{-1}), \quad (2.80)$$

onde

$$\mathbf{E}(z^{-1}) = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{E}_{d-1} z^{-(d-1)}, \quad (2.81)$$

$$\mathbf{F}(z^{-1}) = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{F}_{n_{\mathbf{F}}} z^{-n_{\mathbf{F}}}, \quad (2.82)$$

$$n_{\mathbf{F}} = \max(n_{\mathbf{P}} + n_{\mathbf{C}}, n_{\mathbf{A}} - 1). \quad (2.83)$$

Reorganizando (2.79), tal que

$$\mathbf{A}^*(z^{-1})\mathbf{C}^{*-1}(z^{-1}) = \mathbf{C}^{-1}(z^{-1})\mathbf{A}(z^{-1}), \quad (2.84)$$

e substituindo (2.84) em (2.80), sendo (2.80) pré-multiplicada pela direita por  $\mathbf{C}^{*-1}(z^{-1})$ , fornece

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z^{-1})\mathbf{\Psi}(z^{-1}) &= \\ \mathbf{E}(z^{-1})\mathbf{C}^{-1}(z^{-1})\mathbf{A}(z^{-1}) &+ z^{-d}\mathbf{F}(z^{-1})\mathbf{C}^{*-1}(z^{-1}). \end{aligned} \quad (2.85)$$

A saída filtrada e a  $d$ -passos a frente, em (2.72), é então

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z^{-1})\mathbf{\Psi}(z^{-1})y(k+d) &= \\ \mathbf{E}(z^{-1})\mathbf{C}^{-1}(z^{-1})\mathbf{A}(z^{-1})y(k+d) &+ z^{-d}\mathbf{F}(z^{-1})\mathbf{C}^{*-1}(z^{-1})y(k+d). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Comparando (2.86) com (2.67), conclui-se que

$$\begin{aligned} y_f(k+d) &= \mathbf{E}(z^{-1})\mathbf{C}^{-1}(z^{-1})\mathbf{B}(z^{-1})u(k) \\ &+ \mathbf{F}(z^{-1})\mathbf{C}^{*-1}(z^{-1})y(k) + \mathbf{E}(z^{-1})\xi(k+d). \end{aligned} \quad (2.87)$$



Pode-se dizer que a melhor estimativa da predição de  $y_f(k+d)$  até o instante  $k$ , ou seja,  $\hat{y}_f(k+d|k)$ , é descrita por

$$\hat{y}_f(k+d|k) = \mathbf{E}(z^{-1})\mathbf{C}^{-1}(z^{-1})\mathbf{B}(z^{-1})u(k) + \mathbf{F}(z^{-1})\mathbf{C}^{*-1}(z^{-1})y(k), \quad (2.88)$$

pois o erro de predição na equação (2.87) é caracterizado por

$$\mathbf{E}(z^{-1})\xi(k+d) = y_f(k+d) - \hat{y}_f(k+d|k). \quad (2.89)$$

Assumindo

$$\Sigma(z^{-1}) = \mathbf{F}(z^{-1})\mathbf{C}^{*-1}(z^{-1}), \quad (2.90)$$

$$\Xi(z^{-1}) = \mathbf{E}(z^{-1})\mathbf{C}^{-1}(z^{-1})\mathbf{B}(z^{-1}), \quad (2.91)$$

o problema de controle GMV no caso MIMO pode ser reescrito através de um novo funcional, baseado em informação disponível até o instante  $k$ , dado por

$$J = \|\hat{y}_f(k+d|k) - y_{r_f}(k+d)\|^2 + \|\mathbf{Q}(z^{-1})u(k)\|^2, \quad (2.92)$$

que minimizado em relação a  $u(k)$ , fornece a seguinte lei de controle:

$$u(k) = [\mathbf{Q}_0^T \mathbf{Q}_0 + \Xi_0^T \Xi_0]^{-1} \{ \Xi_0^T [y_{r_f}(k+d) - \Sigma(z^{-1})y(k)] - [\mathbf{Q}_0^T (\mathbf{Q}(z^{-1}) - \mathbf{Q}_0) + \Xi_0^T (\Xi(z^{-1}) - \Xi_0)] u(k) \}. \quad (2.93)$$

Para finalizar a discussão sobre o problema de controle GMV no caso MIMO, no contexto de funções de transferência, são apresentadas algumas observações:

*Observação 1:* o controlador GMV no caso MIMO com ação incremental via modelo aumentado se dá, analogamente ao caso SISO, pela consideração do operador  $\Delta$  no modelo do sistema que, para o caso MIMO, torna-se

$$\Delta \mathbf{A}(z^{-1})y(k) = \mathbf{B}(z^{-1})\Delta u(k - \mathbf{d}) + \mathbf{C}(z^{-1})\xi(k), \quad (2.94)$$

$$\Delta = (1 - z^{-1})\mathbf{I}_p; \quad (2.95)$$

*Observação 2:* o GMV de ordem mínima no caso MIMO, consi-

dera que as matrizes polinomiais

$$\mathbf{P}(z^{-1}) = \mathbf{T}(z^{-1}) = \mathbf{I}_p, \quad (2.96)$$

$$\mathbf{Q}(z^{-1}) = \mathbf{Q}_{0_{p \times q}}, \quad (2.97)$$

sendo  $\mathbf{Q}_0 \in \mathbb{R}^+$  a matriz de ponderação do sinal de controle, cujos elementos ponderam as  $q$  saídas do controlador;

*Observação 3:* a utilização da matriz *interactor*,  $\Psi(z^{-1})$ , é imprescindível no projeto de controle GMV quando o processo possui múltiplos atrasos assíncronos e acoplados. Essa matriz condiciona o modelo do processo a uma descrição mais simples para que seja possível resolver a equação de Diophantine. O projeto de controle GMV no caso MIMO apresentado neste trabalho, objetiva somente estabelecer um meio de comparação entre o método clássico de projeto e a proposta no espaço de estados. Portanto, os algoritmos para o cálculo da matriz *interactor* não são detalhados. Estes podem ser estudados em Wolovich e Falb (1976), e Coelho (1991);

*Observação 4:* quando o sistema MIMO é caracterizado por uma estrutura  $p \times p$ , cujos atrasos de cada par entrada/saída estão desacoplados, é possível projetar o controlador GMV no caso MIMO via uma estratégia de múltiplas malhas, resolvendo cada equação de Diophantine relacionada a cada  $p$  sub-sistema, como em Yamamoto e Shah (2004). Essa estratégia é semelhante ao que é apresentado no Capítulo 4; no entanto, a forma proposta nesse capítulo resolve o problema em batelada e sem as Diophantines.

## 2.3 CONCLUSÃO

Com base no conteúdo apresentado neste capítulo, verifica-se que o projeto de controle GMV, no caso MIMO, em sua forma tradicional no domínio de matrizes polinomiais, não é trivial. Existem diversas etapas de verificação quanto à comutatividade dos filtros envolvidos, condicionamento do modelo de projeto em termos do atraso através da matriz *interactor*, além da própria sintonia do controlador que, não sendo o caso de ordem mínima, gera novas equações de Diophantine, por exemplo, no caso de projetos por alocação de pólos.

O condicionamento do modelo de projeto a partir da matriz *interactor* nem sempre fornece solução única. Também há casos em que nem todos os  $pq$  atrasos do modelo do processo podem ser representados por  $\Psi(z^{-1})$ , o que acarreta uma representação aproximada da descrição

dos atrasos do processo para que seja possível projetar o controlador. De maneira similar, as abordagens GMVSS e GMVSF, também utilizam certas aproximações, mas que não dependem do cálculo da matriz *interactor* e que serão detalhadas nos capítulos 3 e 4.



### 3 GMVSS – GMV NO ESPAÇO DE ESTADOS

O projeto de controle GMV no espaço de estados, GMVSS, surgiu a partir da busca por um método de projeto para o MVP que dispensasse a solução da equação de Diophantine. A premissa foi a de que tanto o controle MV, GMV, como o LQG, compartilham algumas similaridades e são derivados de uma família de métodos de projeto baseados em variância mínima no contexto da teoria de controle ótimo e estocástico.

Apesar das similaridades entre MV, GMV e LQG, uma das principais diferenças, no contexto do escopo deste trabalho, é que essas duas primeiras técnicas de controle são baseadas no domínio de funções de transferência, e o LQG, baseado no domínio de representações no espaço de estados.

No entanto, é possível formular o problema de controle MV como uma solução particular do LQG para realimentação de saída, trabalhando com modelos no espaço de estados, tal como mostrou Kwong (1987). De forma similar, Inoue et al. (2001) apresentaram o controlador GMV como sendo um compensador dinâmico preditivo, composto de um estimador de estados de ordem reduzida e um controlador por realimentação de estados estimados. Isto significa que o princípio da separação é válido para o MV e GMV, permitindo que estes sejam descritos de forma semelhante ao LQG e projetados a partir de modelos no espaço de estados.

A técnica de projeto adotada na proposta do GMVSS segue na direção do princípio da separação e na equivalência de uma solução particular do Filtro de Kalman que recai no problema do MVP de 1-passo a frente (BITMEAD; GEVERS; WERTZ, 1990; LI; EVANS; WITTENMARK, 1997).

As principais diferenças do GMVSS em relação ao projeto do GMV no espaço de estados de Inoue et al. (2001) são: a simplicidade no desenvolvimento, a possibilidade de utilizar filtros generalizados de ponderação do sinal de saída a partir do Filtro de Kalman e que não há necessidade de resolver a Diophantine. De fato, mostra-se que o método de projeto do GMVSS resolve, de maneira intrínseca, a equação de Diophantine. Isto significa que o procedimento de projeto implementa, indiretamente, um algoritmo analítico de solução da Diophantine do MVP.

Deve-se ter em mente que os métodos GMVSS, o de Kwong (1987) e Inoue et al. (2001), são equivalentes aos seus homólogos no

domínio de funções de transferência. Portanto, as mesmas restrições e vantagens do controlador GMV de Clarke e Gawthrop (1975) se mantêm. O que muda é o procedimento de projeto e a adição do conceito de variáveis de estado no problema. No caso do GMVSS a idéia é a simplificação do procedimento de projeto para processos de ordem elevada e longos atrasos de transporte.

Este capítulo foi baseado no artigo de Silveira e Coelho (2011a). Buscou-se manter uma organização semelhante e, certas equações mencionadas no Capítulo 2, serão repetidas para garantir que o leitor possa fazer rápida referência. Então, os seguintes tópicos são abordados: revisão sucinta do GMV clássico; MVP no domínio das funções de transferência; MVP no espaço de estados; solução intrínseca da equação de Diophantine; controlador GMVSS; exemplos de simulação.

### 3.1 REVISÃO SUCINTA DA TEORIA DE CONTROLE GMV

Considerando um modelo SISO, ARMAX, descrito por

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\xi(k), \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{n_a}z^{-n_a}, \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{n_b}z^{-n_b}, \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_{n_c}z^{-n_c}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

o problema de controle GMV, estabelece que uma saída generalizada,

$$\begin{aligned} \phi(k+d) = \\ P(z^{-1})y(k+d) - T(z^{-1})y_r(k+d) + Q(z^{-1})u(k), \end{aligned} \quad (3.3)$$

deve ser minimizada a partir do funcional

$$J = \mathbf{E}[\phi^2(k+d)]. \quad (3.4)$$

Para simplificar a análise, a saída generalizada em (3.3) é redefinida por

$$\phi(k+d) = y(k+d) - y_r(k+d) + \lambda u(k), \quad (3.5)$$

considerando apenas um controlador GMV de ordem mínima, com o escalar  $\lambda$  ponderando o sinal de controle  $u(k)$ .

Em (3.5), a seqüência de referência no futuro,  $y_r(k+d)$ , é suposta conhecida *a priori*, mas não se conhece  $y(k+d)$ . Isto acarreta o problema de prever a saída a  $d$ -passos a frente para compensar o atraso de transporte.

### 3.2 MVP VIA FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

Avançando a equação (3.1)  $d$ -passos a frente, fornece

$$y(k+d) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}\xi(k+d), \quad (3.6)$$

tal que,

$$\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}\xi(k+d) = \underbrace{\frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})}\xi(k)}_{\text{presente}} + \underbrace{E(z^{-1})\xi(k+d)}_{\text{futuro}}, \quad (3.7)$$

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-d}F(z^{-1}). \quad (3.8)$$

Estima-se que a predição de  $y(k+d)$ , utilizando dados disponíveis até o instante  $k$ , é dada por

$$\hat{y}(k+d|k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k) + \frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})}\xi(k), \quad (3.9)$$

e que o erro de estimação é

$$e(k+d) = E(z^{-1})\xi(k+d) = y(k+d) - \hat{y}(k+d|k). \quad (3.10)$$

A equação do MVP no domínio de representações via funções de transferência pode ser reescrita levando-se em consideração o erro de estimação, tal que

$$\hat{y}(k+d|k) = \frac{B(z^{-1})E(z^{-1})}{C(z^{-1})}u(k) + \frac{F(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(k), \quad (3.11)$$

dependente apenas das informações no presente e no passado. O controlador GMV é então desenvolvido a partir de uma nova saída generalizada, dada por

$$\hat{\phi}(k+d|k) = \hat{y}(k+d|k) - y_r(k+d) + \lambda u(k). \quad (3.12)$$

### 3.3 MVP NO ESPAÇO DE ESTADOS

Uma descrição no espaço de estados do modelo ARMAX em (3.1) pode ser representada pelas  $n_a$  variáveis de estado (SILVEIRA; COELHO, 2011a)

$$\begin{aligned} x_1(k) &= -a_1x_1(k-1) + x_2(k-1) + b_0u(k-d) \\ &\quad + (c_1 - a_1)\xi(k-1) \\ x_2(k) &= -a_2x_1(k-1) + x_3(k-1) + b_1u(k-d) \\ &\quad + (c_2 - a_2)\xi(k-1) \\ &\quad \vdots \\ x_{n_a}(k) &= -a_{n_a}x_1(k-1) + b_{(n_a-1)}u(k-d) \\ &\quad + (c_{n_a} - a_{n_a})\xi(k-1) \end{aligned}$$

tal que  $y(k) = x_1(k) + \xi(k)$  seja equivalente a (3.1) e o modelo no espaço de estados, denotado por

$$x(k) = \mathbf{A}x(k-1) + \mathbf{B}u(k-d) + \mathbf{\Gamma}\xi(k-1), \quad (3.13)$$

$$y(k) = \mathbf{C}x(k) + \xi(k), \quad (3.14)$$

onde as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{\Gamma}$ ,  $\mathbf{C}$ , são descritas por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{a} & \mathbf{I}_{(n_a-1)} \\ \mathbf{0}_{1 \times (n_a-1)} & \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0}_{(n_a-n_b) \times 1} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{\Gamma} = [ (c_1 - a_1) \quad (c_2 - a_2) \quad \cdots \quad (c_{n_a} - a_{n_a}) ]^T, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{C} = [ 1 \quad \mathbf{0}_{1 \times (n_a-1)} ], \quad (3.18)$$

sendo  $\mathbf{a}^T = [ a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{n_a} ]$ ,  $\mathbf{b}^T = [ b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n_b} ]$ .

Avançando (3.14)  $d$ -passos a frente, fornece

$$y(k+d) = \mathbf{C}x(k+d) + \xi(k+d), \quad (3.19)$$

onde uma expressão geral para  $x(k+d)$  é obtida avançando-se (3.13)



de tal maneira que,

$$\begin{aligned}
 x(k) &= \mathbf{A}x(k-1) + \mathbf{B}u(k-d) + \mathbf{\Gamma}\xi(k-1) \\
 x(k+1) &= \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k-d+1) + \mathbf{\Gamma}\xi(k) \\
 x(k+2) &= \mathbf{A}^2x(k) + \mathbf{A}\mathbf{B}u(k-d+1) + \mathbf{A}\mathbf{\Gamma}\xi(k) \\
 &\quad + \mathbf{B}u(k-d+2) + \mathbf{\Gamma}\xi(k+1) \\
 &\quad \vdots \\
 x(k+d) &= \mathbf{A}^d x(k) + \sum_{i=1}^d \mathbf{A}^{(d-i)} \mathbf{B}u(k-d+i) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^d \mathbf{A}^{(d-i)} \mathbf{\Gamma}\xi(k-1+i)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Como o vetor de estados  $x(k)$  não está sendo completamente medido, ele deve ser estimado para alimentar diretamente (3.20). Em Li, Evans e Wittenmark (1997), uma solução particular do Filtro de Kalman foi apresentada como sendo equivalente ao MVP de 1-passo a frente. Diz-se então que o vetor de estados estimados,

$$\bar{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{C})\bar{x}(k) + \mathbf{B}u(k-d+1) + \mathbf{\Gamma}y(k), \tag{3.21}$$

obtido pela substituição de  $\xi(k) = y(k) - \mathbf{C}\bar{x}(k)$  de (3.14) em (3.13), fornece a saída predita,

$$\hat{y}(k+1|k) = \mathbf{C}\bar{x}(k+1), \tag{3.22}$$

equivalente ao MVP de 1-passo a frente baseado em (3.11).

A garantia de estabilidade e de convergência do estimador é análoga ao exposto por Åström e Wittenmark (1973) e também em (2.19) no Capítulo 2, ou seja, os polinômios  $A(z^{-1})$  e  $C(z^{-1})$  de (3.1) precisam ser estáveis para garantir que os autovalores de  $(\mathbf{A} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{C})$  também sejam estáveis. Quando este não for o caso, há a necessidade de projetar um estimador estável, tal como no projeto de um filtro  $P(z^{-1})$  em (2.19), mas isto é discutido somente no Capítulo 4, pois faz parte de uma das contribuições do controlador GMVSF.

Substituindo-se  $\bar{x}(k)$  em (3.20), a saída predita em (3.19) torna-

se igual a

$$\begin{aligned}
 y(k+d) &= \mathbf{CA}^d \bar{x}(k) + \sum_{i=1}^d \mathbf{CA}^{(d-i)} \mathbf{B}u(k-d+i) \\
 &+ \sum_{i=1}^d \mathbf{CA}^{(d-i)} \mathbf{\Gamma} \xi(k-1+i) + \xi(k+d),
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

sob a influência de ações no presente e no futuro de  $\xi(k)$ , explicitamente representada pelos termos de

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^d \mathbf{CA}^{(d-i)} \mathbf{\Gamma} \xi(k-1+i) + \xi(k+d) &= \underbrace{\mathbf{CA}^{(d-1)} \mathbf{\Gamma} \xi(k)}_{\text{presente}} \\
 &+ \underbrace{\mathbf{CA}^{(d-2)} \mathbf{\Gamma} \xi(k+1) + \mathbf{CA}^{(d-3)} \mathbf{\Gamma} \xi(k+2) + \dots}_{\text{futuro}} \\
 &+ \underbrace{\mathbf{CA}^0 \mathbf{\Gamma} \xi(k+d-1) + \xi(k+d)}_{\text{futuro}}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

De maneira similar ao que foi feito no Capítulo 2, Seção 2.1.1, a melhor informação disponível sobre  $\xi(k)$  está ligada a medidas passadas e até o instante  $k$ , e a saída estimada a  $d$ -passos a frente é então reescrita como

$$\begin{aligned}
 \hat{y}(k+d|k) &= \mathbf{CA}^d \bar{x}(k) + \sum_{i=1}^d \mathbf{CA}^{(d-i)} \mathbf{B}u(k-d+i) \\
 &+ \mathbf{CA}^{(d-1)} \mathbf{\Gamma} \xi(k).
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

No entanto, sabe-se que  $\xi(k) = y(k) - \mathbf{C}\bar{x}(k)$ , então o MVP no espaço de estados pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \hat{y}(k+d|k) &= \mathbf{C}\hat{x}(k+d|k) = (\mathbf{CA}^d - \mathbf{CA}^{(d-1)} \mathbf{\Gamma} \mathbf{C}) \bar{x}(k) \\
 &+ \sum_{i=1}^d \mathbf{CA}^{(d-i)} \mathbf{B}u(k-d+i) + \mathbf{CA}^{(d-1)} \mathbf{\Gamma} y(k).
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

**Exemplo 3.1 (MVP no espaço de estados)** *Considerando um modelo ARMAX de segunda ordem baseado em (3.1) e com  $d = 1$  para simplificar a análise, a equação do MVP no espaço de estados é expandida para mostrar que (3.25) é equivalente a (3.9), e conseqüentemente,*

(3.26) a (3.11). A solução da equação de Diophantine para o problema em questão é

$$\begin{aligned} E(z^{-1}) &= 1, \\ F(z^{-1}) &= (c_1 - a_1) + (c_2 - a_2)z^{-1}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Isolando-se o vetor de estados na equação do Filtro de Kalman, verifica-se que

$$\bar{x}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}z^{-1})^{-1}[\mathbf{B}u(k-1) + \mathbf{\Gamma}\xi(k-1)], \quad (3.28)$$

onde

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{A}z^{-1})^{-1} &= \\ \frac{\text{adj}(\mathbf{I} - \mathbf{A}z^{-1})}{A(z^{-1})} &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & z^{-1} \\ -a_2z^{-1} & 1 + a_1z^{-1} \end{bmatrix}}{A(z^{-1})}. \end{aligned}$$

A equação (3.28) é substituída no MVP no espaço de estados em (3.26). A saída predita então se torna

$$\begin{aligned} A(z^{-1})\hat{y}(k+1|k) &= [(-a_1z^{-1} - a_2z^{-2})b_0 + b_1z^{-1}]u(k) \\ &+ [(-a_1z^{-1} - a_2z^{-2})(c_1 - a_1) + (c_2 - a_2)z^{-1}]\xi(k) \\ &+ A(z^{-1})[b_0u(k) + (c_1 - a_1)\xi(k)]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Como,  $1 - A(z^{-1}) = -a_1z^{-1} - a_2z^{-2}$ , e comparando (3.29) com os resultados da Diophantine em (3.27), o MVP no espaço de estados reproduz os resultados do preditor via funções de transferência, representado por

$$A(z^{-1})\hat{y}(k+1|k) = (b_0 + b_1z^{-1})u(k) + (f_0 + f_1z^{-1})\xi(k). \quad (3.30)$$

### 3.4 SOLUÇÃO INTRÍNSECA DA EQUAÇÃO DE DIOPHANTINE

O MVP no espaço de estados mostrado em (3.26) retém, intrinsecamente, uma forma de solução analítica da equação de Diophantine utilizada no projeto via funções de transferência do controlador GMV, mostrada em (3.8).

Reescrevendo-se (3.26) de maneira a visualizá-la como um pre-

ditor de estados MV, tal que

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+d|k) &= (\mathbf{A}^d - \mathbf{FC})\bar{x}(k) \\ &+ \sum_{i=1}^d \mathbf{A}^{(d-i)} \mathbf{B}u(k-d+i) + \mathbf{F}y(k),\end{aligned}\quad (3.31)$$

com  $\mathbf{F} = \mathbf{A}^{(d-1)}\mathbf{\Gamma}$  sendo o ganho do preditor de estados MV a filtrar  $y(k)$ , tornando evidente que  $\mathbf{F}$  é responsável pela função do filtro  $F(z^{-1})$ , i.e.,

$$\mathbf{F}^T = [ f_0 \quad f_1 \quad \cdots \quad f_{(n_a-1)} ]. \quad (3.32)$$

De forma similar, recorrendo aos termos no futuro relativos a  $\xi(k)$  em (3.24) e comparando-os com (3.7), é possível explicar  $E(z^{-1})$  deslocando-se (3.7)  $d$ -passos atrás para obter o filtro

$$\begin{aligned}E(z^{-1}) &= 1 + \mathbf{CA}^0\mathbf{\Gamma}z^{-1} + \mathbf{CA}^1\mathbf{\Gamma}z^{-2} + \cdots \\ &+ \mathbf{CA}^{(d-2)}\mathbf{\Gamma}z^{-(d-1)}.\end{aligned}\quad (3.33)$$

O procedimento de projeto do MVP no espaço de estados fornece, de forma natural, um algoritmo de solução para a equação de Diophantine do controlador GMV no caso clássico via funções de transferência.

### 3.5 CONTROLADOR GMVSS

Revisando o que foi feito até este momento, o procedimento de projeto é baseado na alimentação direta dos estados estimados pelo Filtro de Kalman,

$$\bar{x}(k) = (\mathbf{A} - \mathbf{FC})\bar{x}(k-1) + \mathbf{B}u(k-d) + \mathbf{F}y(k-1), \quad (3.34)$$

na saída predita,

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+d|k) &= (\mathbf{CA}^d - \mathbf{CFC})\bar{x}(k) \\ &+ \sum_{i=1}^d \mathbf{CA}^{(d-i)} \mathbf{B}u(k-d+i) + \mathbf{CF}y(k).\end{aligned}\quad (3.35)$$

Recorrendo-se a revisão sucinta da teoria de controle GMV feita

na Seção 3.1, a saída generalizada modifica-se para,

$$\hat{\phi}(k+d|k) = \hat{y}(k+d|k) - y_r(k+d) + \lambda u(k), \quad (3.36)$$

a qual é baseada em medidas até o instante  $k$  e uma seqüência de referência futura conhecida, o que leva funcional do GMV a ser reescrito como

$$\bar{J} = \hat{\phi}^2(k+d|k), \quad (3.37)$$

pois a esperança matemática  $\mathbf{E}[\hat{\phi}^2(k+d|k)] = \hat{\phi}^2(k+d|k)$ .

Minimizando (3.37) em relação a  $u(k)$ , i.e.,

$$\partial \bar{J} / \partial u(k) = 0,$$

produz a lei de controle do GMVSS de ordem mínima,

$$\left( \sum_{i=1}^d \mathbf{CA}^{(d-i)} \mathbf{B} z^{-(d-i)} + \lambda \right) u(k) = y_r(k+d) - (\mathbf{CA}^d - \mathbf{CFC}) \bar{x}(k) - \mathbf{CF}y(k). \quad (3.38)$$

**Exemplo 3.2 (Lei de controle GMVSS)** *Considerando um modelo de primeira ordem baseado em (3.1) e com  $d = 2$ , para simplificar os cálculos, é possível mostrar que (3.38) é equivalente a lei de controle do GMV de ordem mínima representado no domínio de funções de transferência. A solução da equação de Diophantine para o sistema sob análise é*

$$\begin{aligned} E(z^{-1}) &= c_1 - a_1, \\ F(z^{-1}) &= -a_1(c_1 - a_1). \end{aligned} \quad (3.39)$$

A partir de (3.34), o vetor de estados estimados pelo Filtro de Kalman é

$$\bar{x}(k) = \frac{1}{C(z^{-1})} [b_0 z^{-2} u(k) + (c_1 - a_1) z^{-1} y(k)]. \quad (3.40)$$

Pela substituição de (3.40) em (3.38), e expandindo todos os seus termos e comparando-os com (3.39), produz a mesma equação da lei de

controle apresentada no Capítulo 2, em (2.51), dada por

$$u(k) = \frac{C(z^{-1})y_r(k+d) - F(z^{-1})y(k)}{B(z^{-1})E(z^{-1}) + \lambda C(z^{-1})}. \quad (3.41)$$

Na Tab. 3 apresenta-se um resumo dos principais passos de projeto do GMVSS em comparação com o GMV via funções de transferência.

Tabela 3 – Principais passos de projeto do GMVSS e GMV.

<b>GMVSS</b>
1. Definir o modelo no espaço de estados como em (3.13) e (3.14);
2. Definir o Filtro de Kalman, $\bar{x}(k) = (\mathbf{A} - \mathbf{\Gamma C})\bar{x}(k-1) + \mathbf{B}u(k-d) + \mathbf{\Gamma}y(k-1);$
3. Calcular o ganho do MVP no espaço de estados, $\mathbf{F} = \mathbf{A}^{(d-1)}\mathbf{\Gamma};$
4. Calcular o lado esquerdo de (3.38), i.e., $\sum_{i=1}^d \mathbf{C}\mathbf{A}^{(d-i)}\mathbf{B}z^{-(d-i)}.$
<b>GMV</b>
1. Definir o modelo em funções de transferência como em (3.1);
2. Resolver a equação de Diophantine do MVP, $C(z^{-1}) = A(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-d}F(z^{-1});$
3. Calcular o polinômio do controlador a partir de (3.41), $R(z^{-1}) = B(z^{-1})E(z^{-1}) + \lambda C(z^{-1}).$

## 3.6 EXEMPLOS DE SIMULAÇÃO

### 3.6.1 Controle de posição angular do PAM

Um dos motivos deste exemplo é mostrar, via simulação, que os resultados do GMVSS são os mesmo do GMV no domínio de funções de transferência mesmo quando sujeitos a atrasos de transporte longos, haja vista que os exemplos em Exemplo 3.1 e Exemplo 3.2, contaram apenas com atrasos curtos para simplificar os cálculos, tal como apresentado em Silveira e Coelho (2011a).

A planta considerada na simulação é o PAM, descrito no Capítulo 1, mas neste exemplo utilizado com um atraso de transporte fictício de 10 amostras ( $d = 10$ ). O modelo ARMAX discreto do PAM, para um período de amostragem  $T_s = 0.1$  s, é denotado pelos seguintes

polinômios:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 - 1.8840z^{-1} + 0.9230z^{-2}, \\ B(z^{-1}) &= 0.0155 + 0.0151z^{-1}, \\ C(z^{-1}) &= 1 - 0.8672z^{-1}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

O objetivo de controle é o rastreamento de uma seqüência de referência de posição angular, designada em uma faixa em tensão entre 0 e 5 V, que também é a mesma faixa da saída  $y(k)$  e da entrada  $u(k)$ . O PAM é simulado sob a influência de uma seqüência do tipo ruído branco,  $\xi(k)$ , de média nula e variância  $\sigma_\xi^2 = 0.0025$ .

Os polinômios em (3.42) são utilizados para simular a planta, mas o modelo de projeto é a versão aumentada de (3.42) com a adição do operador  $\Delta$ , configurando uma descrição ARIMAX para que o controlador obtenha a ação incremental de forma natural, para que o erro de rastreamento em regime permanente seja nulo. O modelo aumentado é descrito por

$$\Delta A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})\Delta u(k-d) + C(z^{-1})\xi(k), \quad (3.43)$$

sendo  $\Delta = 1 - z^{-1}$  e, conseqüentemente, a lei de controle é obtida em função de  $\Delta u(k)$ , mas o sinal de controle a ser aplicado na planta é

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k). \quad (3.44)$$

Para facilitar a reprodução deste exemplo, a solução da equação de Diophantine para o projeto no domínio de funções de transferência é fornecida:

$$\begin{aligned} E(z^{-1}) &= 1 + 2.0168z^{-1} + 3.0095z^{-2} + 3.9411z^{-3} \\ &\quad + 4.7801z^{-4} + 5.5009z^{-5} + 6.0844z^{-6} \\ &\quad + 6.5186z^{-7} + 6.7978z^{-8} + 6.9233z^{-9}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$F(z^{-1}) = 6.9019 - 13.1592z^{-1} + 6.3902z^{-2}. \quad (3.46)$$

Utilizando o fator de ponderação do sinal de controle,  $\lambda = 15$ , os resultados de simulação coincidiram perfeitamente para o GMVSS e GMV, tal como pode ser visto nas figuras 15 e 16. Este resultado é também apoiado pela exata equivalência das variâncias dos sinais de saída e entrada, respectivamente dadas por:  $\sigma_y^2 = 1.2963$  e  $\sigma_u^2 = 1.8944$ .

Uma ressalva deve ser feita sobre a inicialização do algoritmo de simulação. Observe na Fig. 15, que o sinal de referência  $y_r(k)$  foi

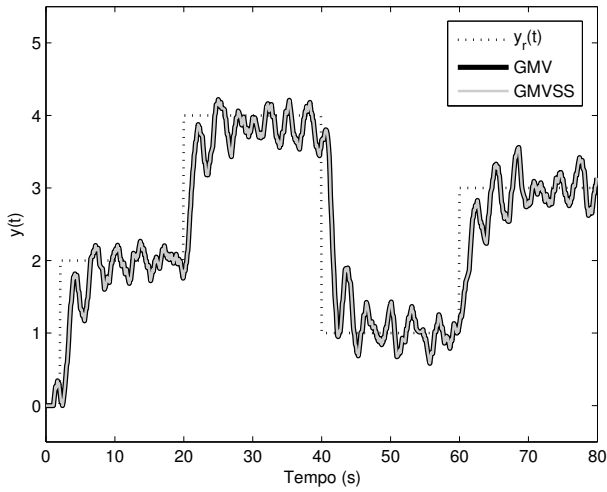


Figura 15 – Sinais de saída do PAM para as simulações com GMV e GMVSS.

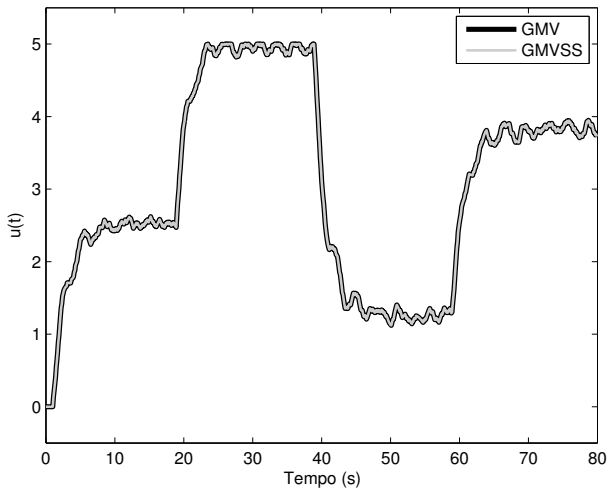


Figura 16 – Sinais de controle das simulações com GMV e GMVSS.



mantido em zero durante os segundos iniciais de simulação, ou mais precisamente, durante as  $d$  amostras iniciais. O motivo foi garantir que a simulação do GMV e do GMVSS fossem igualmente inicializadas, pois o GMVSS calcula a lei de controle baseando-se em  $y_r(k+d)$ ,  $\bar{x}(k)$  e  $y(k)$ , enquanto que o GMV clássico, faz o cálculo baseando-se em  $C(z^{-1})y_r(k+d)$  e  $y(k)$ . Isso significa que  $\bar{x}(k)$  é inicializado com valor nulo, conseqüentemente, não considera os valores passados de  $y_r(k)$  tal como em  $C(z^{-1})y_r(k+d)$ .

### 3.6.2 Modelo *benchmark* com atraso longo

Neste segundo exemplo, a maior preocupação é apresentar um código de programação para o algoritmo do GMVSS, aplicado a um problema de controle de processos típico, para enfatizar a forma simples e direta do projeto e implementação dos resultados apresentados neste capítulo.

O problema selecionado é o processo *benchmark* de Åström e Hägglund (2000) apresentado em (1.8) no Capítulo 1. O equivalente discreto (via ZOH) para esse sistema, considerando um período de amostragem  $T_s = 0.1$  s, é descrito por

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 - 2.7145z^{-1} + 2.4562z^{-2} - 0.7408z^{-3}, \\ B(z^{-1}) &= (0.1547 + 0.5740z^{-1} + 0.1331z^{-2}) \times 10^{-3}, \\ C(z^{-1}) &= 1, \end{aligned} \quad (3.47)$$

com um atraso de transporte discreto, consideravelmente longo, de 151 amostras ( $d = 151$ ).

Para garantir erro nulo em regime permanente para o problema de rastreamento de referência, (3.47) é aumentado com a inclusão do operador  $\Delta$  no modelo de projeto. Uma outra observação é que  $\xi(k)$  é nulo durante todos os instantes da simulação, de maneira a fornecer uma melhor apresentação dos resultados gráficos, enfatizando apenas a compensação do longo atraso de transporte.

Na Tab. 4, mostra-se de maneira sumária o código essencial (escrito para MATLAB, mas de fácil portabilidade) para a implementação do GMVSS, considerando que o modelo no espaço de estados está disponível pelo uso apropriado da forma canônica apresentada em (3.15–3.18). O código da Tab. 4 é detalhado a seguir:

- Linha 1: responsável pelo cálculo do ganho do MVP no espaço de estados,  $\mathbf{F}$ ;
- Linhas 2 e 3: produzem um vetor dos termos de  $\mathbf{CA}^{(d-i)}\mathbf{B}$ , referentes ao lado esquerdo da expressão em (3.38);
- Linha 4: o *loop* de controle inicia neste ponto;
- Linha 5: estima o vetor de estados do Filtro de Kalman;
- Linhas 6 e 7: produzem um vetor composto pelos valores passados de  $\Delta u(k)$  – i.e., termos de  $\Delta u(k - d + i)$  do lado esquerdo da expressão em (3.38);
- Linha 8: cálculo da lei de controle em função de  $\Delta u(k)$ ;
- Linha 9: cálculo do sinal de controle enviado a planta.

Tabela 4 – Código de implementação do GMVSS.

---

```

1 - F = A^(d-1)*G; % G é o vetor Gamma
2 - Usum=[]; % Somatório dos C*A^(d-i)*B
3 - for i=1:d-1, Usum=[Usum C*A^(d-i)*B]; end
4 - for k=start_time:end_time, % Control loop
5 -   x(:,:,k)=(A-G*C)*x(:,:,k-1)+B*du(k-d)+G*y(k-1);
6 -   Usumk=[]; % Somatório dos du(k-d+i)
7 -   for i=1:d-1, Usumk=[Usumk ; du(k-d+i)]; end
8 -   du(k)=1/(C*B+lambda)*(-Usum*Usumk+yr(k+d) ...
9 -     -(C*A^d - C*F*C)*x(:,:,k) - C*F*y(k));
10 - u(k)=u(k-1)+du(k);
10 - end

```

---

Utilizando uma ponderação do sinal de controle,  $\lambda = 50$ , para o GMVSS projetado e implementado com o código da Tab. 4, foram obtidos os resultados apresentados na Fig. 17, onde tanto o sinal de saída como o sinal de controle foram apresentados juntamente com o sinal de referência para enfatizar a compensação do atraso de transporte.

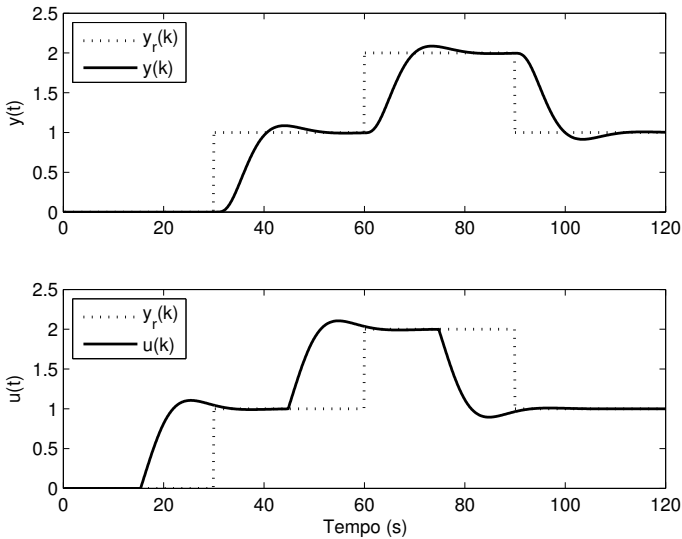


Figura 17 – Compensação do longo atraso de transporte do modelo *benchmark* utilizando GMVSS.

### 3.7 CONCLUSÃO

Neste capítulo, uma nova técnica de controle GMV no espaço de estados foi apresentada. O novo método proposto teve como objetivo trazer o conceito de variáveis de estado para o problema de controle GMV, buscando-se simplificar a técnica de projeto no tratamento de modelos de ordem elevada e atrasos de transporte longos a partir da eliminação da equação de Diophantine como parte do projeto.

Apesar da solução de forma explícita da Diophantine não ser necessária, mostrou-se que sua solução está intrinsecamente presente nos ganhos do MVP no espaço de estados e também como é possível extrair os resultados para a composição dos filtros do GMV clássico. Portanto, parte do método de projeto do GMVSS pode ser usado como um algoritmo de solução da Diophantine do MVP, contribuindo, assim, também para o projeto no domínio de funções de transferência.

No início deste capítulo, fez-se algumas simplificações no problema de controle GMV para proporcionar o fácil desenvolvimento e

entendimento sobre o GMVSS. Por exemplo, a saída generalizada em (3.3) foi simplificada para a que é mostrada em (3.5), onde considerou-se que  $P(z^{-1}) = T(z^{-1}) = 1$  e  $Q(z^{-1}) = \lambda$ , caracterizando apenas o caso do controlador GMV de ordem mínima. No entanto, o problema completo, para quando os filtros de saída e referência,  $P(z^{-1})$  e  $T(z^{-1})$ , são diferentes de um, também pode ser resolvido. Quando este é o caso, sabe-se que a ordem de  $F(z^{-1})$  deixa de ser  $n_a - 1$ , mas sim  $\max(n_p + n_c, n_{\bar{p}} + n_a - 1)$ . Como o ganho  $\mathbf{F}$  do MVP no espaço de estados tem relação direta com o polinômio  $F(z^{-1})$ , o modelo definido no espaço de estados deve incorporar as características do filtro  $P(z^{-1})$ .

Apesar da solução geral do GMVSS ser garantida a partir da incorporação de  $P(z^{-1})$  na descrição do modelo de projeto no espaço de estados, há uma forma bem mais elegante de tratar o problema. O GMVSS depende diretamente dos estados estimados a partir de um Filtro de Kalman e, portanto, há como considerar as características do filtro  $P(z^{-1})$  no próprio Filtro de Kalman. No entanto, isto acarreta uma solução diferenciada do ganho do Filtro de Kalman, ou seja, este deixa de ser equivalente a  $\mathbf{\Gamma}$ .

A relação estabelecida entre o Filtro de Kalman e o MVP neste capítulo abre uma grande gama de métodos de projeto alternativos para o filtro de saída do controlador GMV, aumentando o grau de liberdade do projetista em relação ao controlador GMV de ordem mínima, a partir do projeto do Filtro de Kalman como parte da etapa de sintonia do GMV. Este é um dos assuntos propostos e discutidos no Capítulo 4, quando a técnica de controle GMV no espaço de estados é estendida para o caso de realimentação total de estados e engloba o caso multivariável.

#### 4 GMVSF – CONTROLE GMV VIA REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS ESTIMADOS POR FILTRO DE KALMAN

Neste capítulo, o controlador GMV é apresentado no domínio de representações no espaço de estados, beneficiando-se da equivalência de seu MVP a uma solução particular do Filtro de Kalman, a qual caracteriza uma atraente abordagem por evitar a solução da equação de Diophantine.

O procedimento de projeto se baseia na característica de que a estrutura do controlador é herdada do modelo de projeto, onde variáveis de estado estimadas, com significado ou comportamento físico compreensível, entram na síntese de uma lei de controle por realimentação de estados estimados.

A complexidade da estrutura do controlador é então ditada pela complexidade do modelo de projeto, mas o procedimento de sintonia, mesmo para sistemas multivariáveis e com múltiplos atrasos de transporte, é factível de ser executado com certa simplicidade, tal como a sintonia de controladores de ordem fixa apresentados no Capítulo 2.

A principal idéia do controlador GMVSF está focada no controlador GMV de ordem mínima, o qual é sintonizado por um único parâmetro escalar que pondera a energia empregada no sinal de controle. Mas como o conceito de variáveis de estado é introduzido, a lei de controle resultante é uma composição de diversos GMVs de ordem mínima, um para cada variável de estado considerada no problema, semelhante ao que foi apresentado na Seção 2.1.6, no Capítulo 2, sobre controle GMV via inferência de variáveis observadas.

A base para o desenvolvimento do GMVSF são os resultados estabelecidos no Capítulo 3 sobre o procedimento de projeto do GMVSS. Mostrou-se que este procedimento difere do original apresentado por Clarke e Gawthrop (1975), ou mesmo do homólogo de Inoue et al. (2001), mas fornecendo exatamente os mesmos resultados.

A contribuição mais significativa do GMVSS para este capítulo é a simplicidade de obtenção do preditor devido a ausência da equação de Diophantine no procedimento de projeto. Ao contrário do projeto clássico, a Diophantine é resolvida indiretamente e de maneira natural pela própria formulação do problema, a partir do Filtro de Kalman obtido diretamente do modelo ARMAX no espaço de estados, dispensando também a solução da equação a diferenças de Riccati para calcular o ganho de Kalman (BITMEAD; GEVERS; WERTZ, 1990).

Já no GMVSF, uma das idéias chave é aumentar o grau de liberdade de sintonia do GMV de ordem mínima a partir da manipulação do projeto do Filtro de Kalman e, conseqüentemente, a obtenção direta do ganho de Kalman a partir da representação ARMAX no espaço de estados deixa de ser factível. Também é importante destacar que o modelo ARMAX no espaço de estados é atraente em termos da construção desse modelo a partir das representações via funções de transferência, mas variáveis de estado não medidas do modelo ARMAX – estimadas a partir da saída medida – geralmente não são assintoticamente estáveis. Ou seja, quando a saída medida estabiliza e se torna constante, as variáveis estimadas não tendem a zero.

As variáveis de estado estimadas de um modelo ARMAX normalmente não possuem significado ou comportamento físico apropriado para serem consideradas em um problema de controle por realimentação de estados como os que o GMVSF se propõe a realizar. Normalmente estas variáveis estimadas correspondem simplesmente a valores passados da saída medida, enquanto que a prioridade para o projeto do GMVSF é o controle por realimentação da saída medida mais da velocidade e/ou aceleração dessa saída medida.

Também é interessante mencionar o quanto é comum representar uma variedade de sistemas com a finalidade de utilização em projeto de controladores, por um único modelo (ou matriz de modelos) tipo FOPDT ou SOPDT sem a parte média-móvel (MA, *Moving-Average*), e quando a técnica de controle é estocástica, tal como o GMV, a parcela MA é considerada igual a um. Conseqüentemente, o filtro de predição é totalmente baseado apenas na parte auto-regressiva (AR) e no horizonte de predição. Em outras palavras, o filtro de predição obtido nessas circunstâncias pode ter pobres características de filtragem devido a falta da parcela MA no projeto e, para que seja possível filtrar perturbações de alta frequência, a largura de banda do controlador deverá sofrer uma grande redução e conseqüente perda de desempenho.

No entanto, tal como foi apresentado no Capítulo 2, sabe-se que o filtro de predição de um controlador GMV pode ser aumentado por um filtro de saída quando necessário, mesmo sem uma parcela MA adequadamente modelada. Isto é de fato, um procedimento comum em projeto de controle GMV no domínio de funções de transferência, onde o filtro de saída é obtido com base em um modelo de referência dado por uma função de transferência de malha fechada, ou seja, o método de alocação de pólos abordado no Capítulo 2. Esta abordagem é rápida e eficiente para sistemas SISO com atraso de transporte de tempo curto, mas muito complicada para sistemas MIMO com atrasos múltiplos, tal

como foi destacado na Seção 2.2, no Capítulo 2.

O Filtro de Kalman é comumente aplicado para a solução de problemas em filtragem e estimação de sistemas MIMO, também sabe-se que o MVP de 1-passo a frente é uma solução particular do Filtro de Kalman (LI; EVANS; WITTENMARK, 1997). De tal maneira que, no Capítulo 3, se estabeleceu a relação apropriada do ganho ótimo de Kalman dentro das equações do problema de controle GMV, abrindo caminho para que as técnicas de filtragem e estimação de Kalman contribuam com a teoria de controle GMV.

O escopo deste capítulo é então complementar com o caso de realimentação total de estados estimados, o que foi iniciado com o GMVSS para o caso de realimentação de saída. Apresenta-se também o projeto do preditor com projeto de filtro integrado, o que é uma característica interessante, pois a maioria dos controladores preditivos lidam com este tipo de problema separadamente, especialmente nos casos de atrasos múltiplos e assíncronos, onde compensadores de atraso são previamente projetados e então, um modelo de projeto sem atrasos – ou ao menos melhor condicionado – é utilizado no projeto do controlador (ZHANG; DUAN; XIE, 2006). Como consequência disso, o GMVSF engloba o caso de MVP no espaço de estados de tempo não-mínimo (GARCÍA; ALBERTOS, 2008), idealizado como trabalho futuro por Inoue et al. (2001) e por Silveira e Coelho (2011a).

Este capítulo está organizado de acordo com: resumo sobre o GMVSS em termos de sub-sistemas de sistemas multivariáveis; a relação do Filtro de Kalman com o preditor no GMVSS; desenvolvimento do controlador GMVSF; projeto do GMVSF robusto com base em análise no domínio do tempo e da frequência; exemplos de projeto e simulação sobre o modelo do PAM e da coluna de destilação de Wood e Berry (1973) apresentados no Capítulo 1.

#### 4.1 GMVSS EM TERMOS DE SUB-SISTEMAS DE PROCESSOS MIMO

Para manter a forma de apresentação adotada nos capítulos anteriores, nesta seção, resume-se o projeto GMVSS a partir das representações de processos no domínio de funções de transferência no caso SISO, mas descrito em termos de sub-sistemas de sistemas MIMO. Posteriormente, a descrição no espaço de estados é formalizada e generalizada para o caso MIMO onde  $p$  sub-sistemas são tratados em conjunto enquanto acoplados por  $pq$  entradas, sendo  $p, q$ , índices positivos inteiros

que identificam os sub-sistemas e suas entradas.

Reformula-se o problema de controle GMV de ordem mínima em relação a seguinte função custo quadrática:

$$J_p = \mathbf{E} [\phi_p^2(k + d_p)], \quad (4.1)$$

onde  $d_p$  é o  $p$ -ésimo atraso de transporte discreto e  $\phi_p(k)$  é a  $p$ -ésima saída generalizada do GMV de ordem mínima, representada por

$$\phi_p(k + d_p) = y_p(k + d_p) - y_{r_p}(k + d_p) + \lambda_p u_p(k), \quad (4.2)$$

com  $y_{r_p}(k)$  como a  $p$ -ésima seqüência de referência,  $u_p(k)$  o  $p$ -ésimo sinal de controle ponderado pelo fator escalar  $\lambda_p$ , e  $y_p(k)$  é a  $p$ -ésima saída da planta representada por um modelo ARMAX descrito por

$$A(z^{-1})y_p(k) = B(z^{-1})u_p(k - d_p) + C(z^{-1})\xi_p(k), \quad (4.3)$$

onde  $\xi_p(k)$  é uma seqüência aleatória tipo ruído branco agindo sobre a  $p$ -ésima saída.

Conforme demonstrado no Capítulo 3, uma descrição ARMAX no espaço de estados para o sub-sistema mostrado em (4.3) pode ser representado pelas  $n_a$  variáveis de estado, tal que  $y_p(k) = \mathbf{C}_p x_p(k) + \xi_p(k)$  seja equivalente a (4.3) e seu modelo no espaço de estados denotado por

$$x_p(k) = \mathbf{A}_p x_p(k - 1) + \mathbf{B}_p u_p(k - d_p) + \mathbf{\Gamma}_p \xi_p(k - 1), \quad (4.4)$$

$$y_p(k) = \mathbf{C}_p x_p(k) + \xi_p(k), \quad (4.5)$$

onde  $x_p(k)$  é o vetor de estados do  $p$ -ésimo sub-sistema mostrado em (4.3), e as matrizes  $\mathbf{A}_p$ ,  $\mathbf{B}_p$ ,  $\mathbf{\Gamma}_p$ ,  $\mathbf{C}_p$ , correspondem a uma representação assintoticamente estável do sistema em (4.3).

Recorrendo-se a (4.2), valores futuros da seqüência de referência são considerados conhecidos *a priori*, mas a saída a  $d_p$ -passos a frente, não é conhecida. Sendo assim, avançando (4.4) e (4.5)  $d_p$ -passos a frente, tal como demonstrado no Capítulo 3, fornece:

$$y_p(k + d_p) = \mathbf{C}_p x_p(k + d_p) + \xi_p(k + d_p), \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} x_p(k + d_p) &= \mathbf{A}_p^{d_p} x_p(k) + \sum_{i=1}^{d_p} \mathbf{A}_p^{(d_p-i)} \mathbf{B}_p u_p(k - d_p + i) \\ &+ \sum_{i=1}^{d_p} \mathbf{A}_p^{(d_p-i)} \mathbf{\Gamma}_p \xi_p(k - 1 + i). \end{aligned} \quad (4.7)$$



Substituindo-se (4.7) na equação de saída a  $d_p$ -passos a frente apresentada em (4.6), e considerando que a melhor informação disponível sobre  $\xi_p(k)$  está ligada às medidas até o instante  $k$ , a informação sobre a saída predita  $d_p$ -passos a frente é baseada nas informações mais recentes – designada por  $\hat{y}_p(k + d_p|k)$  – e sabendo-se que  $\xi_p(k) = y_p(k) - \mathbf{C}_p x_p(k)$ , o MVP no espaço de estados em termos de um sub-sistema MIMO pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \hat{y}_p(k + d_p|k) &= (\mathbf{C}_p \mathbf{A}_p^{d_p} - \mathbf{C}_p \mathbf{F}_p \mathbf{C}_p) x_p(k) \\ &+ \sum_{i=1}^{d_p} \mathbf{C}_p \mathbf{A}_p^{(d_p-i)} \mathbf{B}_p u_p(k - d_p + i) + \mathbf{C}_p \mathbf{F}_p y_p(k), \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde o ganho do MVP no espaço de estados, em (4.8), é dado por

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{A}_p^{(d_p-1)} \mathbf{\Gamma}_p. \quad (4.9)$$

Fazendo-se nova substituição, de (4.8), na  $p$ -ésima saída generalizada em (4.2), e minimizando-se  $J_p$  em relação a  $u_p(k) - \partial J_p / \partial u_p(k) = 0$  – fornece a seguinte lei de controle GMVSS em termos de um sub-sistema MIMO:

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{i=1}^{d_p} \mathbf{C}_p \mathbf{A}_p^{(d_p-i)} \mathbf{B}_p z^{-(d_p-i)} + \lambda_p \right) u_p(k) = \\ &y_{r_p}(k + d_p) - (\mathbf{C}_p \mathbf{A}_p^{d_p} - \mathbf{C}_p \mathbf{F}_p \mathbf{C}_p) x_p(k) - \mathbf{C}_p \mathbf{F}_p y_p(k). \end{aligned} \quad (4.10)$$

O problema GMVSS pode, então, ser resumido pelo cálculo do ganho  $\mathbf{F}_p$  em (4.9) e a seleção apropriada do fator de ponderação da energia de controle,  $\lambda_p$ . Além disto, o  $p$ -ésimo vetor de estados,  $x_p(k)$ , precisa ser estimado para que (4.10) seja implementável na prática. De maneira similar ao que foi apresentado no Capítulo 3, a Seção 4.2 estabelece a relação geral entre o MVP e o Filtro de Kalman para o caso de tempo não-mínimo.

## 4.2 MVP COM FILTRO DE KALMAN INTEGRADO

Considerando que, quando um vetor de estados estimados  $\bar{x}_p(k)$  tende a  $x_p(k)$ , a partir das equações (4.4) e (4.5), é possível escrever a saída do MVP a  $d_p$ -passos a frente em função dos dados estimados – ou seja,  $\hat{y}_p(k + d_p|k)$  – através da solução particular do Filtro de Kalman

apresentada no Capítulo 3, onde

$$\begin{aligned}\bar{x}_p(k+1) &= (\mathbf{A}_p - \mathbf{\Gamma}_p \mathbf{C}_p) \bar{x}_p(k) \\ &\quad + \mathbf{B}_p u_p(k - d_p + 1) + \mathbf{\Gamma}_p y_p(k),\end{aligned}\tag{4.11}$$

e  $\mathbf{\Gamma}_p$ , obtida da parte MA do modelo ARMAX em (4.4), executa a função do ganho do Filtro de Kalman nesse caso particular. Esse estimador iguala-se aos resultados do observador *deadbeat* de Inoue et al. (2001), ou quando a  $p$ -ésima saída medida,  $y_p(k)$ , não está sendo filtrada por um  $P(z^{-1})$ . No entanto, (4.11) está pronta para considerar o caso aumentado por filtro de ponderação da saída em um caso mais geral da  $p$ -ésima saída generalizada, sendo esta

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_p(k + d_p) &= \\ P(z^{-1})y_p(k + d_p) - y_{r_p}(k + d_p) + \lambda_p u_p(k),\end{aligned}\tag{4.12}$$

onde  $P(z^{-1})$  é um filtro de saída que precisa ter ganho unitário para evitar o *offset* em relação a  $y_{r_p}(k)$ . Caso não seja unitário, o *offset* precisa ser compensado a partir de  $y_{r_p}(k)$ .

$P(z^{-1})$  deve possuir estrutura apropriada para uma característica de filtragem desejada pelo projetista. Esse filtro pode ser descrito por uma função de transferência genérica, mesmo com numerador não-mônico, tal que

$$P(z^{-1}) = \frac{p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_{n_p} z^{-n_p}}{1 + \bar{p}_1 z^{-1} + \dots + \bar{p}_{n_{\bar{p}}} z^{-n_{\bar{p}}}},\tag{4.13}$$

onde a característica não-mônica do numerador modificaria a forma tradicional de projeto do GMV, enquanto que, na forma de solução via Filtro de Kalman, é indiferente e dispensa qualquer consideração adicional como a apresentada no Capítulo 2, Seção 2.1.2.

Assume-se que o Filtro de Kalman em (4.11) pode ser escrito em uma forma mais geral, onde um ganho ótimo de Kalman,  $\mathbf{L}_p$ , é calculado para garantir uma determinada característica de filtragem, tal que  $\mathbf{L}_p$  não seja necessariamente igual a  $\mathbf{\Gamma}_p$ . Deste modo,

$$P(z^{-1})y_p(k) = \mathbf{C}_p \bar{x}_p(k),\tag{4.14}$$

e o Filtro de Kalman passa a ser representado por

$$\begin{aligned}\bar{x}_p(k) &= (\mathbf{A}_p - \mathbf{L}_p \mathbf{C}_p) \bar{x}_p(k-1) \\ &\quad + \mathbf{B}_p u_p(k - d_p) + \mathbf{L}_p y_p(k-1).\end{aligned}\tag{4.15}$$

O filtro  $P(z^{-1})$  pode ser obtido diretamente a partir de (STEVENS; LEWIS, 2003)

$$P(z^{-1}) = \mathbf{C}_p (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p + \mathbf{L}_p \mathbf{C}_p)^{-1} \mathbf{L}_p. \quad (4.16)$$

Pela alimentação direta de (4.15) na equação do MVP no espaço de estados em (4.8), a  $p$ -ésima saída generalizada em (4.12) é reescrita em uma versão filtrada,

$$\bar{\phi}_p(k + d_p) = \hat{y}_p(k + d_p | k) - y_{r_p}(k + d_p) + \lambda_p u_p(k), \quad (4.17)$$

onde o novo ganho do MVP,  $\mathbf{F}_p$ , está sujeito ao cálculo do ganho do Filtro de Kalman obtido pela solução da equação algébrica recursiva de Riccati (BITMEAD; GEVERS; WERTZ, 1990),

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(k + 1) &= \mathbf{A}_p \mathbf{S}(k) \mathbf{A}_p^T \\ &- \mathbf{A}_p \mathbf{S}(k) \mathbf{C}_p^T (\mathbf{C}_p \mathbf{S}(k) \mathbf{C}_p^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{C}_p \mathbf{S}(k) \mathbf{A}_p^T + \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

sendo que  $\mathbf{S} \triangleq \mathbf{S}(\infty)$  é a matriz de covariância para o caso de estimação de horizonte infinito (BITMEAD; GEVERS; WERTZ, 1990), e o ganho do MVP filtrado é calculado por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p &= \mathbf{A}_p^{(d_p-1)} \mathbf{L}_p = \\ &\mathbf{A}_p^{(d_p-1)} \left[ \mathbf{A}_p \mathbf{S} \mathbf{C}_p^T (\mathbf{C}_p \mathbf{S} \mathbf{C}_p^T + \mathbf{R})^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

A teoria sobre filtragem de Kalman tem sido vastamente discutida na literatura de controle desde a década de 1960; portanto, não há razão para repetição e maior detalhamento dessa teoria neste trabalho, haja vista que apenas conteúdo bem consolidado está sendo utilizado. Deve-se ressaltar que, todas as restrições quanto à utilização do Filtro de Kalman como estimador de estados são válidas, ou seja: a matriz de transição de estados do modelo de projeto não pode ser singular, o sistema sob análise tem que ser observável e as matrizes  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{Q}$  são normalmente especificadas a partir de uma técnica apropriada para o projeto do Filtro de Kalman.

Neste trabalho, a técnica de projeto do Filtro de Kalman que será apresentada, é uma forma considerada *não-ortodoxa* por Cruz (1996), bem detalhada em seu livro e também em Stevens e Lewis (2003): utiliza o método heurístico de sintonia a partir da análise de resposta no domínio do tempo e da magnitude em frequência do filtro para calcular o ganho de Kalman apropriado.

A técnica de projeto do Filtro de Kalman via método heurístico é detalhada na seção seguinte, como parte do projeto do controlador GMVSF. Portanto, considera-se que mesmo não sendo única, essa técnica de projeto é suficiente para abordar o conteúdo deste trabalho e familiarizar o leitor apenas com o que é necessário para compreender e implementar o conteúdo proposto. Para um estudo mais detalhado, as seguintes referências podem ser consultadas: Bitmead, Gevers e Wertz (1990), Cruz (1996), Stevens e Lewis (2003).

### 4.3 CONTROLADOR GMVSF

A idéia chave por trás do controlador GMVSF foi previamente exemplificada no controle por inferência da velocidade angular do PAM, na Seção 2.1.6, no Capítulo 2. A idéia é utilizar informação adicional do modelo do processo para a síntese de estratégias complexas de controle, usando conhecimento básico sobre o comportamento das variáveis de estado envolvidas no problema. Neste sentido, a complexidade do controlador é ditada pela complexidade do modelo no espaço de estados considerado – isto quer dizer que, cada variável de estado no problema possui o seu próprio controlador GMV de ordem mínima, ponderando a energia de controle que está sendo utilizada para *mover* essa variável específica. O sistema de controle completo então divide a energia de controle a sua disposição com base na relatividade entre os fatores de ponderação de cada GMV de ordem mínima dos  $p$  sub-sistemas.

Uma outra maneira de visualizar essa idéia é pensar que se as leis de controle são baseadas em amplificação ou atenuação de energia, acúmulo e variação, tais ações podem ser diretamente inseridas e fixadas em uma estrutura de controlador, tal como em um controlador PID. No entanto, essas mesmas ações de controle podem ser herdadas, de maneira natural, a partir do modelo do processo via técnicas de projeto de controladores baseados em modelo. Como exemplo, lembre-se o quanto é comum utilizar descrições aumentadas do modelo de projeto, pelo operador  $\Delta$  (cf. Capítulo 2), para que a ação de controle incremental seja considerada na síntese da lei de controle.

Sendo assim, considerando-se um sistema MIMO que pode ser descrito por  $p$  sub-sistemas do tipo mostrado em (4.3), tal que

$$\begin{aligned}
 w(k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} w(k-1) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} u_{11}(k-d_{11}) \\ \vdots \\ u_{pq}(k-d_{pq}) \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_p(k) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} w(k)
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

onde  $w(k)$  é um vetor de estados com  $n$  variáveis de  $p$  vetores de estado na forma apresentada em (4.4), mas sem a descrição das perturbações de alta frequência para os estados, i.e., sem a informação de  $\xi_1(k), \dots, \xi_p(k)$  disponível na descrição do modelo. Esta consideração visa destacar casos comuns de descrição de modelos, onde a parcela média-móvel não está disponível, mas apenas um certo conhecimento sobre o tipo e faixa de operação em que as perturbações são atuantes para serem consideradas no projeto de controladores.

Assumindo-se a representação de todo o conjunto de atrasos dos sub-sistemas como sendo,  $d = [d_1, \dots, d_p]$ , para simplificar a notação, i.e.,  $w(k+d) \triangleq [x_1(k+d_1) \cdots x_p(k+d_p)]^T$ , a saída generalizada no GMVSF é designada por um vetor de saídas generalizadas dos sub-sistemas,

$$\Phi(k+d) = w(k+d) - \mathbf{C}^T y_r(k+d) + \Lambda u(k), \tag{4.21}$$

sendo  $\Phi(k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $w(k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{C}^T \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $y_r(k) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ ,  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ . Note que as dimensões em relação a  $\Lambda$  e  $u(k)$ , em (4.21), são conflitantes com a definição geral de um sistema MIMO acoplado e com atrasos múltiplos assíncronos, como em (4.20). No entanto, isto se faz necessário neste momento do texto, sendo justificado somente na Seção 4.3.1.

A nova formulação do problema apresentada em (4.21), considera  $p$  seqüências de referência contidas em  $y_r(k+d)$  e também  $n \times p$  fatores de ponderação do sinal de controle na matriz  $\Lambda$ . A diferença mais significativa em relação ao caso de realimentação de saída é que, dentro de  $w(k)$ , existem  $p$  variáveis de estado com relação direta as  $p$  saídas

medidas do sistema e,  $n-p$  variáveis de estado assintoticamente estáveis e estimadas. Apesar do problema ter sido reformulado para o caso matricial, é resolvido da mesma maneira que no caso de realimentação da saída, i.e.,

$$\frac{\partial \mathbf{E} [\Phi^2(k+d)]}{\partial u(k)} = 0. \quad (4.22)$$

Expandindo-se o termo quadrático de (4.22), omitindo-se os deslocamentos no tempo em termos de  $k$ ,  $k+d$ , para simplificar a notação, obtém-se:

$$\begin{aligned} \Phi^2 &= w^T w + y_r^T \mathbf{C} \mathbf{C}^T y_r + u^T \Lambda^T \Lambda u \\ &+ 2u^T \Lambda^T w - 2u^T \Lambda^T \mathbf{C}^T y_r. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Substituindo (4.23) em (4.22), a solução para a derivada parcial é dada por

$$2\Lambda^T \Lambda u(k) + 2\Lambda^T w(k+d) - 2\Lambda^T \mathbf{C}^T y_r(k+d) = 0. \quad (4.24)$$

A partir da equação (4.8) o vetor de estados preditos, baseado nos estados estimados pelo Filtro de Kalman, pode ser obtido, sabendo-se que

$$\hat{y}(k+d|k) = \mathbf{C} \hat{w}(k+d|k). \quad (4.25)$$

No caso MIMO, o ganho do MVP no espaço de estados,  $\mathbf{F}$ , e o ganho do Filtro de Kalman,  $\mathbf{L}$ , que no caso SISO em termos de sub-sistemas são dados por (4.19), podem ser reescritos na seguinte representação MIMO:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{(d_1-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_p^{(d_p-1)} \end{bmatrix} \underbrace{\left[ \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{S} \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \right]}_{\mathbf{L}}. \quad (4.26)$$

Logo, o MVP no espaço de estados para o caso MIMO, cujo caso

SISO é solução particular, pode ser representado por

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+d_1|k) \\ \vdots \\ \hat{x}_p(k+d_p|k) \end{bmatrix}}_{\hat{w}(k+d|k)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{d_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_p^{d_p} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_d} - \mathbf{FC} \bar{w}(k) \\
 + \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{d_1-1} \mathbf{A}_1^{(d_1-i)} \mathbf{B}_1 \begin{bmatrix} u_{11}(k-d_1+i) \\ \vdots \\ u_{1q}(k-d_1+i) \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{d_p-1} \mathbf{A}_p^{(d_p-i)} \mathbf{B}_p \begin{bmatrix} u_{p1}(k-d_p+i) \\ \vdots \\ u_{pq}(k-d_p+i) \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \\
 + \mathbf{B}u(k) + \mathbf{F}y(k), \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

onde  $\bar{w}(k)$  e  $\mathbf{F}$ , são obtidos a partir de (4.15) e (4.19), respectivamente. Também é importante mencionar que a informação mais recente sobre o sinal de controle foi retirada da parcela representada pelo somatório e está explicitamente representada pelo termo  $\mathbf{B}u(k)$ , para que seja possível obter a lei de controle.

Para obter a lei de controle do GMVSF,  $\hat{w}(k+d|k)$  é substituído em (4.24), e essa equação é reorganizada em termos dos estados preditos, tal que

$$u(k) = \mathbf{K} [\mathbf{C}^T y_r(k+d) - (\mathbf{A}_d - \mathbf{FC})\bar{w}(k) - \mathbf{F}y(k) - \mathbf{U}], \tag{4.28}$$

onde a matriz  $\mathbf{K}$  denota o ganho do controlador GMVSF com base nos fatores de ponderação da energia de controle adotados na matriz  $\Lambda$ , i.e.,

$$\mathbf{K} = [\Lambda^T (\Lambda + \mathbf{B})]^{-1} \Lambda^T, \tag{4.29}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{np} \end{bmatrix}_{n \times p}. \tag{4.30}$$

### 4.3.1 Observação sobre as simplificações no GMVSF

O controlador proposto conta com a suposição de que um sistema MIMO, acoplado e com múltiplos atrasos assíncronos, pode ser descrito por um conjunto,  $d$ , de atrasos “dominantes”, escolhidos a partir de critérios de pior caso ou pelo melhor condicionamento do sistema com o uso de compensadores de atraso auxiliares (GARCÍA; ALBERTOS, 2010). De qualquer modo, a escolha dos atrasos e o seu impacto na estabilidade da malha de controle é um tópico ainda aberto na literatura de controle e o qual o presente trabalho não lida diretamente. Porém, adotou-se o seguinte critério para a escolha do conjunto de atrasos: se cada sub-sistema  $p$ , tiver múltiplas  $pq$  entradas atuantes, como em (4.20), então existe uma única entrada atrasada para cada sub-sistema, que move esse sub-sistema  $p$  com maior magnitude em relação as demais. O atraso ligado a esta entrada dominante é então priorizado.

Essa suposição levou a considerar que o preditor MIMO no espaço de estados pudesse ser projetado a partir da matriz  $\mathbf{A}_d$ , como mostrado em (4.27), e que suas entradas dominantes ditariam a seleção dos respectivos atrasos,  $d_1, \dots, d_p$ , como em (4.27). Essa forma de solução foi adotada para simplificar o algoritmo do GMVSF e apresentá-lo como um método que dispensasse pré-compensadores de atraso ou as representações dependentes da matriz *interactor*. No entanto, não significa que métodos de pré-compensação de atraso não possam ser utilizados juntamente com o GMVSF, mas isto não é abordado neste trabalho, pois foge a idéia de simplificar o projeto de controle GMV no caso MIMO.

Uma forma de determinar qual das  $pq$  entradas move um dos  $p$  sub-sistemas específicos com maior magnitude, é calcular a matriz de ganhos DC do sistema MIMO e comparar os valores absolutos dos seus elementos. A inversa da matriz de ganhos DC, também pode ser utilizada como um pré-compensador para a redução do grau de acoplamento do sistema MIMO em regime estacionário, designada pelo ganho  $\mathbf{P}_c$ , conforme (STEVENS; LEWIS, 2003)

$$\mathbf{P}_c = \left[ \mathbf{C}_{nominal} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{nominal})^{-1} \mathbf{B}_{nominal} \right]^{-1}, \quad (4.31)$$

onde o índice *nominal* designa o modelo nominal de projeto, ou seja, sem integradores, caso o sistema tenha sido previamente aumentado.

Como a seleção de  $\Lambda$  no GMVSF é puramente relacionada a relatividade entre os valores dos seus elementos, a utilização de (4.31) é



recomendada, o que leva o ganho do GMVSF em (4.29) a ser reescrito através de uma versão balanceada, dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_c [\Lambda^T (\Lambda + \mathbf{B})]^{-1} \Lambda^T. \quad (4.32)$$

### 4.3.2 Projeto do Filtro de Kalman no GMVSF

Tal como mencionado anteriormente, o MVP no controlador GMVSF não é mais do tipo *deadbeat*, mas sim, baseado no Filtro de Kalman projetado. Isto significa que o Filtro de Kalman tem papel fundamental no comportamento dinâmico do sistema em malha fechada, de maneira similar a forma como esse filtro opera no problema de controle LQG. E mesmo que o GMVSF esteja baseado em GMVs de ordem mínima, o grau de liberdade de sintonia pode ser estendido do ponto de vista do projeto do Filtro de Kalman, pela apropriada seleção das suas matrizes de projeto,  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{Q}$ , em (4.18). A avaliação da dinâmica do filtro indica o quão apropriado este é para um determinado problema.

Uma maneira de avaliar a dinâmica do Filtro de Kalman é através da análise da resposta desse filtro em malha fechada, no domínio do tempo (STEVENS; LEWIS, 2003), onde

$$\bar{w}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\bar{w}(k) + \mathbf{L}y(k), \quad (4.33)$$

pode ser utilizado para verificar a convergência do filtro quando sujeito a um sinal conhecido, introduzido no sistema a partir de  $y(k)$ .

Uma outra forma de análise da dinâmica do Filtro de Kalman é através da análise de resposta em frequência do sistema em malha aberta buscando-se moldar, de maneira apropriada, de acordo com os requisitos de filtragem, a forma da curva de magnitude em frequência dos ganhos principais do filtro. Este método, designado por *loop-shaping*, fornece informações qualitativas sobre os níveis dos ganhos do sistema nas baixas frequências e frequências de corte, permitindo avaliar a robustez do Filtro de Kalman de maneira a garantir seu funcionamento como estimador, além de filtro de perturbações de alta frequência. A análise de resposta em frequência é conduzida através da descrição do filtro em malha aberta (STEVENS; LEWIS, 2003), sendo esta,

$$\bar{w}(k+1) = \mathbf{A}\bar{w}(k) + \mathbf{L}y(k). \quad (4.34)$$

#### 4.3.2.1 Funcionamento das matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$

Para compreender como a sintonia do Filtro de Kalman modifica as respostas de (4.33) e (4.34), é necessário entender como as matrizes  $\mathbf{Q}_{n \times n} \in \mathbb{R}^+$  e  $\mathbf{R}_{p \times p} \in \mathbb{R}^*$  funcionam. Neste trabalho, essas duas matrizes são utilizadas somente na forma diagonal, favorecendo a simplicidade na seleção de seus elementos por tentativa e erro.

A matriz  $\mathbf{Q}$  é responsável por moldar a curva de magnitude em frequência do Filtro de Kalman. A relatividade entre a magnitude dos elementos de sua diagonal, pondera a forma pela qual as variáveis de estado são priorizadas no problema de otimização do estimador. Quanto maior o valor de um dado elemento em relação aos demais, maior é a prioridade de convergência da variável de estado relativa a esse elemento. De maneira inversa, quanto menor o valor de um dado elemento da diagonal de  $\mathbf{Q}$ , filtra-se mais a sua variável de estado correspondente (STEVENS; LEWIS, 2003).

A matriz  $\mathbf{R}$  é responsável por deslocar a curva de magnitude em frequência para os lados, podendo-se utilizá-la para ajustar a frequência de corte desejada para o Filtro de Kalman. A relatividade entre a magnitude dos elementos de sua diagonal, pondera a prioridade que é dada no problema de otimização a um determinado sub-sistema. Quanto maior for a magnitude da ponderação do elemento, menor será a largura de banda do sub-sistema correspondente e, conseqüentemente, mais lenta será a dinâmica do estimador em relação as variáveis de estado estimadas a partir desse sub-sistema (STEVENS; LEWIS, 2003).

Reforçando novamente que os métodos de projetar e analisar sistemas do tipo Filtro de Kalman são diversificados e que, nesta seção, buscou-se apresentar apenas o conteúdo suficiente para a aplicação no controle GMVSF. Além disso, caso o leitor necessite de maiores informações sobre esse tema vastamente documentado na literatura de controle, recomenda-se a leitura das referências citadas, pois o que foi apresentado até este momento direciona-se apenas ao leitor não-familiarizado e também para a rápida referência dos que necessitam apenas de uma breve revisão no assunto.

O método de sintonia do Filtro de Kalman no GMVSF é detalhado nos exemplos da Seção 4.4.

### 4.3.3 Solução particular do Filtro de Kalman (caso *deadbeat*)

Para o projeto do GMVSF, assumiu-se uma forma não-ortodoxa de projeto do Filtro de Kalman, baseada na estrutura do modelo em (4.20), sem a parcela do modelo de perturbações estocásticas. No entanto, existe uma solução particular do projeto do Filtro de Kalman no GMVSF que recai sobre o caso do estimador de tempo mínimo. Considerando que os sub-sistemas de (4.20) são descritos por

$$\begin{bmatrix} x_{p,1}(k) \\ x_{p,2}(k) \\ \vdots \\ x_{p,n_p}(k) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_p x_p(k-1) + \mathbf{B}_p u_p(k-d_p) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}^*} \xi_p(k), \quad (4.35)$$

$$y_p(k) = x_{p,1}(k) - \xi_p(k),$$

pode-se considerar o estimador *deadbeat*, onde o ganho  $\mathbf{L} = \mathbf{\Gamma}^*$ , o que faz com que o MVP no espaço de estados, calculado com esse ganho, seja equivalente ao MVP do GMVSS como quando  $C(z^{-1}) = 1$  em (4.3).

### 4.3.4 Algoritmos de projeto e implementação do GMVSF

#### Algoritmo de projeto:

1. Definir o modelo de projeto com base na relação entre a sua ordem e as variáveis de estado de interesse para o problema. Selecionar o conjunto apropriado de atrasos para cada par de entrada e saída;
2. Verificar se há necessidade em aumentar o modelo de projeto com ação incremental para garantir erro nulo em regime estacionário. Se necessário, adicionar o operador  $\Delta$  nos sub-sistemas;
3. Organizar todos os sub-sistemas juntos em uma descrição MIMO completa, no espaço de estados, como em (4.20);
4. Projetar o estimador de estados via Filtro de Kalman, avaliando se suas respostas no tempo e na frequência, obtidas a partir de (4.33) e (4.34), são apropriadas para o problema considerado;
5. Calcular o ganho  $\mathbf{F}$  do MVP utilizando (4.26), a matriz  $\mathbf{A}_d$  em (4.27), e o pré-compensador  $\mathbf{P}_c$  em (4.31);
6. Ajustar os valores dos elementos da matriz de ponderação do controle,  $\Lambda$ , e calcular o ganho  $\mathbf{K}$  do controlador GMVSF utilizando

(4.32);

7. Efetuar testes de simulação para avaliar a malha de controle. Se necessário, ajuste a sintonia do controlador e recomece a partir do passo 4.

### Algoritmo de implementação:

1. Estimar

$$\bar{w}(k) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\bar{w}(k-1) + \mathbf{B}u(k-d) + \mathbf{L}y(k-1);$$

2. Calcular  $\mathbf{U}$  [cf. Eq. (4.27)];

3. Aplicar a lei de controle em (4.28);

4. Retornar ao passo 1.

## 4.4 EXEMPLOS DE SIMULAÇÃO

### 4.4.1 Caso SISO: controle de posição do PAM com GMVSF

Segundo o algoritmo de projeto, apresentado na Seção 4.3.4, o projeto de controle GMVSF é iniciado pela definição do modelo de projeto adequado ao problema. No caso do processo PAM, descrito no Capítulo 1, enfatiza-se uma representação no espaço de estados com baixo grau de abstração. Por se tratar de um problema de controle de posição angular, é possível obter um modelo onde as variáveis de estado estimadas correspondem às derivadas da variável medida, fornecendo, por exemplo, a velocidade e aceleração angulares.

De acordo com o que foi apresentado sobre a teoria de controle GMVSF, sabe-se que o preditor MVP deixa de ser necessariamente do tipo *deadbeat*, e que o modelo de projeto precisa ser assintoticamente estável. Sendo assim, considere o modelo determinístico e contínuo do PAM, apresentado na Seção 1.4.2 e reescrito abaixo neste exemplo:

$$\ddot{y} + 0.8013\dot{y} + 4.072y = 3.195u. \quad (4.36)$$

Para garantir o rastreamento de referência com *offset* nulo em regime estacionário, de maneira análoga ao caso discreto, pela inclusão do operador  $\Delta$  no modelo do processo, faz-se a inclusão de um integrador em (4.36), sendo este reescrito na forma

$$\ddot{y} + 0.8013\dot{y} + 4.072y = 3.195\dot{u}. \quad (4.37)$$

A partir do sistema (4.37), é possível obter uma representação no espaço de estados considerando as seguintes variáveis de interesse no problema:  $w_1 = y$ ,  $w_2 = \dot{y}$ ,  $w_3 = \ddot{y}$ ; de posição, velocidade e aceleração angulares, respectivamente. O modelo de projeto do PAM, contínuo, no espaço de estados, é definido por

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4.072 & -0.8013 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.195 \end{bmatrix} \dot{u}, \quad (4.38)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] [w_1 \ w_2 \ w_3]^T.$$

O equivalente discreto (via ZOH) do sistema (4.38), para o período de amostragem,  $T_s = 0.1$  s, é dado por

$$\begin{bmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \\ w_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0993 & 0.0049 \\ 0 & 0.9802 & 0.0954 \\ 0 & -0.3887 & 0.9038 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(k-1) \\ w_2(k-1) \\ w_3(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0005 \\ 0.0155 \\ 0.3050 \end{bmatrix} \Delta u(k-d), \quad (4.39)$$

$$y(k) = [1 \ 0 \ 0] [w_1(k) \ w_2(k) \ w_3(k)]^T.$$

O sistema em (4.39) é então o modelo de projeto do GMVSF, enquanto que, para a simulação do processo, utiliza-se o modelo estocástico com o atraso discreto fictício,  $d = 10$ , conforme feito no Capítulo 3, Seção 3.6.1, definido como

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-10) + C(z^{-1})\xi(k) + v(k), \quad (4.40)$$

$$A(z^{-1}) = 1 - 1.8840z^{-1} + 0.9230z^{-2},$$

$$B(z^{-1}) = 0.0155 + 0.0151z^{-1},$$

$$C(z^{-1}) = 1 - 0.8672z^{-1},$$

onde  $v(k)$  designa uma perturbação constante, introduzida para simular uma perturbação de carga atuando no processo.

Conforme o algoritmo de projeto, executou-se o passo 2 pela inclusão do integrador no sistema; o passo 3 é dispensável, pois o sistema é SISO; o passo 4 é referente ao projeto do Filtro de Kalman através da seleção apropriada de  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , de acordo com o que foi exposto na Seção 4.3.2.

Antes de comentar a sintonia do Filtro de Kalman, é importante destacar os objetivos a serem alcançados neste exemplo. Recorrendo-se aos exemplos do Capítulo 2, mais especificamente aos resultados da Fig. 12, que correspondem ao caso ideal de variância mínima, o que se deseja é obter um resultado aproximado a esse, mas com um sinal de controle factível de ser implementado na prática.

Para apresentar, na prática, como a seleção das matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  modificam as características do filtro, três sintonias distintas foram testadas:

- **Sintonia 1:**  $\mathbf{Q} = \text{diag} [ 1 \ 10 \ 10 ]$ ,  $\mathbf{R} = 1$ . Prioriza-se as variáveis de estado de velocidade e aceleração, mais do que a de posição;
- **Sintonia 2:**  $\mathbf{Q} = \text{diag} [ 100 \ 1 \ 1 ]$ ,  $\mathbf{R} = 1$ . Prioriza-se a variável de estado de posição;
- **Sintonia 3:**  $\mathbf{Q} = \text{diag} [ 100 \ 1 \ 1 ]$ ,  $\mathbf{R} = 10^4$ . Prioriza-se a variável de estado de posição e reduz-se a frequência de corte do filtro com o aumento de  $\mathbf{R}$ .

Os resultados dos testes com as três sintonias para o Filtro de Kalman, podem ser observados na Fig. 18. Veja que quando as variáveis de velocidade e aceleração são priorizadas (Sintonia 1), a curva de magnitude em frequência do filtro apresenta um pico de ressonância, característico de sistemas sub-amortecidos e com relação direta a modos dinâmicos mais rápidos. Conseqüentemente, a análise no domínio do tempo apresenta uma característica de convergência com sobre-sinal.

O resultado da Sintonia 2, na Fig. 18, destaca como a mudança na matriz  $\mathbf{Q}$  afeta a forma da curva de magnitude. Priorizando-se mais a variável de posição em detrimento das demais, eliminou-se o pico de ressonância, acarretando em um Filtro de Kalman com rápida convergência e sem sobre-sinal. A convergência do filtro é tão rápida, que aproxima-se do caso *deadbeat*. Já a Sintonia 3, utilizou a mesma forma para a curva de magnitude, mas deslocou a frequência de corte do sistema, reduzindo a largura de banda e deteriorando o desempenho em termos de velocidade de convergência do estimador.

A Sintonia 2 fornece o resultado mais adequado entre as três. Se sua resposta em frequência for comparada com o diagrama de Bode de magnitude do PAM, na Fig. 6, Capítulo 1, verifica-se que a largura de banda do Filtro de Kalman, com a Sintonia 2, engloba as características dinâmicas do PAM, fornece elevado ganho nas baixas frequências de modo a garantir estimação robusta, além de atenuar perturbações de

alta frequência a partir de 10 rad/s. Essas, são características normalmente desejadas para garantir filtragem robusta (ANDERSON; MOORE, 1979; STEVENS; LEWIS, 2003).

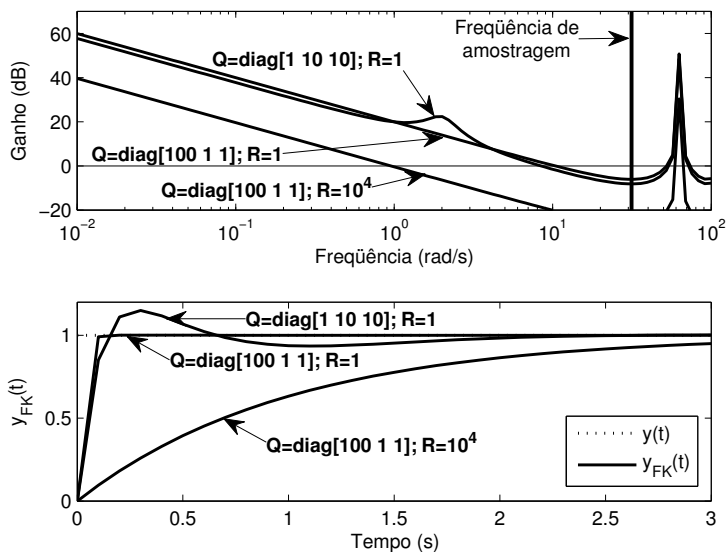


Figura 18 – Análise de três sintonias do Filtro de Kalman no domínio da frequência e do tempo.

O ganho de Kalman,  $\mathbf{L}$ , e o ganho do MVP no espaço de estados,  $\mathbf{F}$ , obtidos a partir da Sintonia 2, além da matriz  $\mathbf{A}_d$ , são:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.9910 & 0.0076 & -0.0091 \end{bmatrix}^T, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.9929 & -0.0032 & -0.0080 \end{bmatrix}^T, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0.5353 & 0.2801 \\ 0 & -0.1408 & 0.3110 \\ 0 & -1.2665 & -0.3898 \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

A última etapa do projeto do controlador GMVSF é a seleção dos elementos da matriz  $\mathbf{\Lambda}$ , que pondera a ação de controle sobre cada uma das variáveis de estado consideradas no problema. Portanto,  $\mathbf{\Lambda}$ , que no caso SISO é escrito na forma de um vetor, pode ser interpretado

como

$$\mathbf{\Lambda} = [ \lambda_p \quad \lambda_v \quad \lambda_a ]^T, \quad (4.44)$$

onde os índices  $p$ ,  $v$  e  $a$ , nos seus elementos de ponderação, destacam a relação com a posição, velocidade e aceleração, respectivamente.

A maneira de selecionar os elementos de  $\mathbf{\Lambda}$  é feita de forma bastante intuitiva. Segue a mesma premissa do controlador GMV de ordem mínima de Clarke e Gawthrop (1975), ou seja, quanto maior a ponderação, menor a variância do sinal de controle. No entanto, é a relatividade entre a magnitude dos elementos de  $\mathbf{\Lambda}$  que caracteriza a dinâmica da saída controlada.

A forma que o projetista inicia a sintonia de  $\mathbf{\Lambda}$  é arbitrária. Mesmo assim, pode-se recomendar um método a ser seguido, tal como foi utilizado na concepção deste exemplo:

- Passo 1. Inicie a sintonia com valores baixos, por exemplo,

$$\mathbf{\Lambda} = [ 1 \quad 1 \quad 1 ]^T,$$

e vá gradativamente aumentando os valores dos elementos, mas mantendo a relação entre eles até encontrar uma resposta estável, mesmo que oscilatória;

- Passo 2. Use o valor que, forneceu a estabilização da malha de controle, no elemento de  $\mathbf{\Lambda}$  que pondera a variável de estado mais rápida, reduzindo os demais elementos a unidade. Ou seja,

$$\mathbf{\Lambda} = [ 1 \quad 1 \quad \lambda_a ]^T,$$

onde  $\lambda_a$  foi o valor encontrado no passo 1;

- Passo 3. Se a dinâmica de saída ainda não for a desejada, por exemplo, ainda havendo grande oscilação, vá aumentando o valor do elemento correspondente a ponderação da segunda variável de estado mais rápida até atingir a característica de resposta desejada;
- Passo 4. Realize ajustes finos nos valores, quando necessário, acelerando ou freando a velocidade de resposta, pela redução ou aumento de todos os valores, respectivamente, mas mantendo a proporção entre suas magnitudes.



No caso deste exemplo,

$$\mathbf{\Lambda} = [ 3 \quad 3 \quad 3 ]^T,$$

forneceu uma resposta estável, porém, oscilatória. Posteriormente testou-se

$$\mathbf{\Lambda} = [ 1 \quad 2 \quad 3 ]^T,$$

até o ajuste fino final, definindo o vetor de ponderação do GMVSF como sendo

$$\mathbf{\Lambda} = [ 1 \quad 2.7 \quad 3.1 ]^T. \quad (4.45)$$

Utilizando-se a ponderação em (4.45), o ganho do controlador GMVSF calculado a partir de (4.29) é dado por

$$\mathbf{K} = [ 0.0529 \quad 0.1429 \quad 0.1641 ]. \quad (4.46)$$

Os resultados da simulação em termos da saída controlada e do sinal de controle, são apresentados na Fig. 19. Durante os primeiros 25 s de simulação, não se considerou a influência da perturbação estocástica  $\xi(k)$ , buscando-se destacar a característica de resposta obtida pela sintonia utilizada. Após esse período, uma seqüência tipo ruído branco, de variância  $\sigma_\xi^2 = 0.0025$ , passou a atuar sobre o sinal de saída. Além dessa perturbação, aos 10.1 s de simulação, foi aplicada uma perturbação de carga equivalente a 10 mV, para enfatizar que o controlador é capaz de rejeitar perturbações de carga quando o projeto é realizado com o modelo aumentado na forma incremental [cf. (4.39)].

As variáveis de estado estimadas pelo Filtro de Kalman são apresentadas na Fig. 20 e, as “reais” não-filtradas, na Fig. 21. É importante notar que mesmo após o ruído entrar em ação na simulação, as variáveis estimadas sofreram pouca influência desse ruído se comparadas aos estados “reais” do PAM, pois são a média filtrada inferida a partir dos dados ruidosos. Essa característica é decorrente da sintonia adotada no filtro. No entanto, se a ponderação de filtragem da velocidade e da aceleração sofresse uma mudança, por exemplo,  $\mathbf{Q} = \text{diag} [ 100 \quad 10 \quad 10 ]$ , o ruído passa a ser notado nos dados estimados, tal como é observado na Fig. 22. A Fig. 23 compara os dois filtros e a Fig. 24 apresenta os sinais de perturbação utilizados.

A mudança quase não é notada na janela de tempo e freqüência da Fig. 23, mas essa mudança acelera a estimação, reduz a supressão

de ruído e aproxima o resultado do estimador a uma configuração mais próxima do caso *deadbeat*. Conseqüentemente, os dados realimentados ao controlador GMVSF são mais agressivos, e há maior reação a influência do ruído. Logo, a sintonia do Filtro de Kalman pode ser escolhida para priorizar a supressão de ruído e atribuir ações de controle mais conservativas ou priorizar a observação do ruído e atribuir ações de controle agressivas, na direção dos resultados do que seria o ideal em termos de variância mínima da saída (ou do erro de rastreamento), tal como no regulador de Åström e Wittenmark (1973).

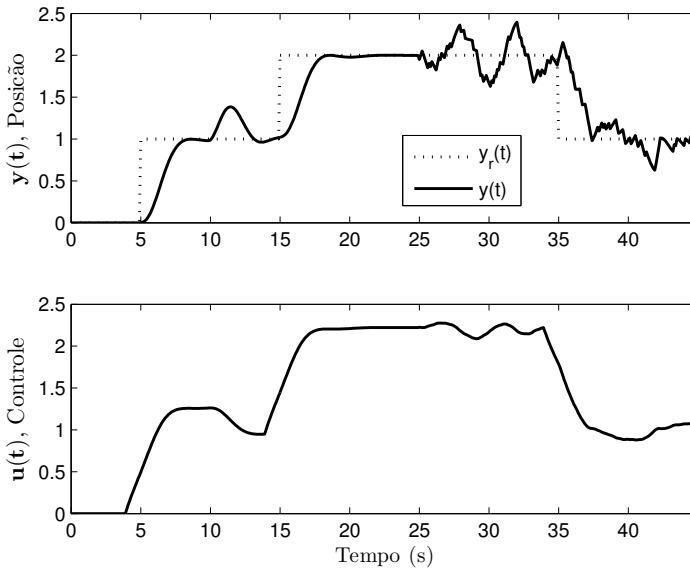


Figura 19 – Sinais de saída e entrada do PAM controlado pelo controlador GMVSF.

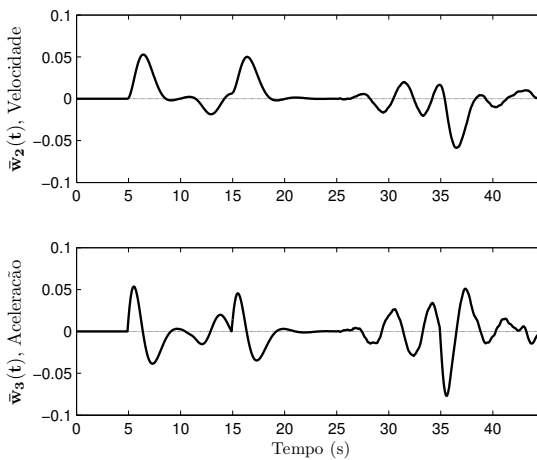


Figura 20 – Variáveis de estado estimadas utilizando a Sintonia 2 no Filtro de Kalman.

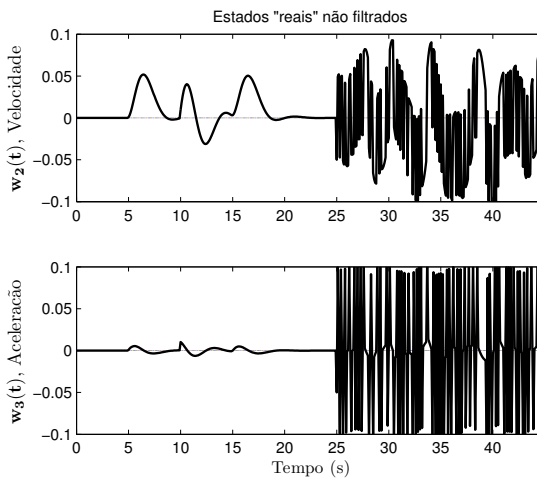


Figura 21 – Variáveis de estado “reais” utilizando a Sintonia 2 no Filtro de Kalman.

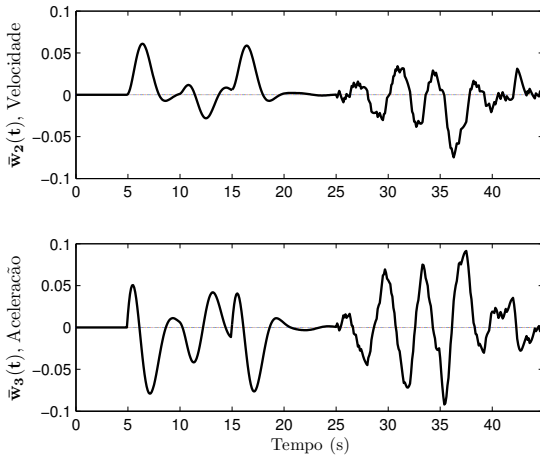


Figura 22 – Variáveis de estado estimadas após modificação nas características de filtragem. A presença do ruído, a partir dos 25.1 s de simulação, torna-se aparente.

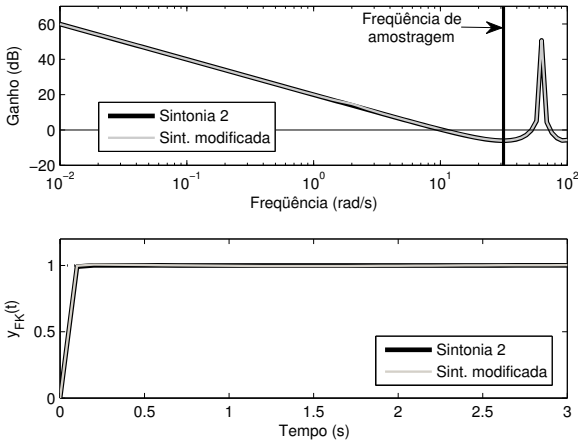


Figura 23 – Comparação entre as características do Filtro de Kalman com a Sintonia 2 e o filtro com a modificação nas ponderações da velocidade e aceleração.

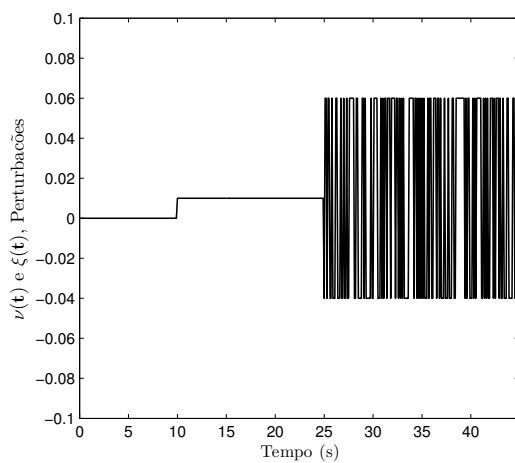


Figura 24 – Sinais de perturbações de carga e ruído utilizados nas simulações.

#### 4.4.2 Caso MIMO: controle da coluna de WB com GMVSF

O modelo linear da coluna de destilação de Wood e Berry (WB) foi escolhido para o teste de controle GMVSF no caso MIMO, não porque caracteriza um difícil problema de controle – até porque, mesmo controladores PID MIMO fornecem bons resultados (CHEN; SEBORG, 2003) – mas porque essa planta possui todas as características de interesse para este exemplo, tais como: é descrita por uma matriz de modelos lineares do tipo FOPDT; não há parcela MA; possui atrasos múltiplos assíncronos; acoplamento com ganhos positivos e negativos; é um problema de controle do tipo *benchmark*, vastamente discutido na literatura de teoria de controle, permitindo que o leitor possa estabelecer uma base de comparação.

Nesta seção, o processo de WB é tratado como um exemplo de simulação numérica sem restrições, de maneira a explorar os aspectos de sintonia do GMVSF sem se preocupar com as limitações e condições de operação da coluna em si. O modelo de projeto utilizado, é baseado na forma aproximada apresentada na Seção 1.4.3, onde reescreve-se o modelo com a notação utilizada no Capítulo 4, conforme:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.5104e^{-s}}{s^2+0.7465s+0.03987} & \frac{-0.7536e^{-3s}}{s^2+0.7465s+0.03987} \\ \frac{0.5036e^{-7s}}{s^2+1.032s+0.07631} & \frac{-1.48e^{-3s}}{s^2+1.032s+0.07631} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

onde  $Y_1(s) = X_t(s)$ ,  $Y_2(s) = X_b(s)$ ,  $U_1(s) = R(s)$  e  $U_2(s) = V(s)$ .

Analisando os valores absolutos da matriz de ganhos DC do sistema em (4.47), verifica-se que os ganhos a partir de  $U_2(s)$  são maiores para ambas as saídas do sistema, porém, é maior ainda de  $U_2(s)$  para  $Y_2(s)$ , com 1.48, e de  $U_1(s)$  para  $Y_1(s)$ , com 0.5104. Então, a partir da verificação das entradas dominantes de cada sub-sistema, define-se o conjunto de atrasos do modelo contínuo, fornecido em minutos,  $\theta = [ 1 \quad 3 ]$ . Outros métodos para a determinação das entradas dominantes e seleção dos atrasos são apresentadas em Shinskey (1984).

O sistema MIMO em (4.47) pode ser representado por dois sub-sistemas, tais que suas representações aumentadas pela inclusão de in-

tregadores, são dadas por

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1(t) + 0.7465\dot{y}_1(t) + 0.03987y_1(t) = \\ 0.5104\dot{u}_1(t-1) - 0.7536\dot{u}_2(t-1), \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2(t) + 1.032\dot{y}_2(t) + 0.07631y_2(t) = \\ 0.5036\dot{u}_1(t-3) - 1.48\dot{u}_2(t-3), \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde pode ser observado que as entradas dos sub-sistemas são apresentadas em termos dos atrasos selecionados.

Os sub-sistemas em (4.48) e (4.49) podem ser descritos no espaço de estados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.03987 & -0.7465 \end{bmatrix} x_1 \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5104 & -0.7536 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t-1) \\ \dot{u}_2(t-1) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$y_1 = [1 \ 0 \ 0] x_1; \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.07631 & -1.032 \end{bmatrix} x_2 \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5036 & -1.48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t-3) \\ \dot{u}_2(t-3) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$y_2 = [1 \ 0 \ 0] x_2; \quad (4.53)$$

onde

$$x_1 = [w_1 \ w_2 \ w_3]^T, \quad (4.54)$$

$$x_2 = [w_4 \ w_5 \ w_6]^T, \quad (4.55)$$

sendo  $w_1 = y_1$ ,  $w_2 = \dot{y}_1$ ,  $w_3 = \ddot{y}_1$ ,  $w_4 = y_2$ ,  $w_5 = \dot{y}_2$ ,  $w_6 = \ddot{y}_2$ . Essa descrição caracteriza uma representação em termos de variáveis de estado adicionais de velocidade e aceleração das saídas medidas.

As constantes de tempo dos modelos dos sub-sistemas (4.50–4.53) são dadas em minutos. O equivalente discreto (via ZOH) desses sub-sistemas, para um período de amostragem  $T_s = 1$  min, é expresso

como:

$$x_1(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.9944 & 0.3945 \\ 0 & 0.9843 & 0.7000 \\ 0 & -0.0279 & 0.4618 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_1} x_1(k-1) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.0712 & -0.1051 \\ 0.2013 & -0.2973 \\ 0.3573 & -0.5275 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_1} \begin{bmatrix} \Delta u_1(k-2) \\ \Delta u_2(k-2) \end{bmatrix}, \quad (4.56)$$

$$y_1(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_1} x_1(k); \quad (4.57)$$

$$x_2(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.9900 & 0.3624 \\ 0 & 0.9723 & 0.6160 \\ 0 & -0.0470 & 0.3367 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_2} x_2(k-1) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.0658 & -0.1935 \\ 0.1825 & -0.5364 \\ 0.3102 & -0.9117 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_2} \begin{bmatrix} \Delta u_1(k-4) \\ \Delta u_2(k-4) \end{bmatrix}, \quad (4.58)$$

$$y_2(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_2} x_2(k). \quad (4.59)$$

O modelo de projeto é então definido por

$$w(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} w(k-1) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \Delta u(k-\mathbf{d}), \quad (4.60)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} w(k), \quad (4.61)$$

onde  $\mathbf{d}$  representa o conjunto dos atrasos discretos.

Com o modelo de projeto definido, inicia-se o projeto do Filtro de Kalman para que seja possível estimar as variáveis de estado de maneira adequada e com um determinado grau de filtragem de perturbações de alta frequência. A premissa é então a mesma utilizada no exemplo com o PAM, onde o diagrama de magnitude em frequência do Filtro



de Kalman deve incorporar as características dinâmicas da planta e atenuar o ruído de medição.

A partir das figuras 25 e 26, é possível observar de maneira qualitativa o resultado do Filtro de Kalman projetado. Na Fig. 25, percebe-se que a frequência de corte do Filtro de Kalman é menor do que seria ideal para incorporar a dinâmica de alta frequência da coluna de WB, caracterizada pela curva do ganho principal superior na linha tracejada. Essa interceptação foi necessária para que os sobre-sinais do teste de convergência do estimador no domínio do tempo, apresentado na Fig. 26, não fossem ainda maiores.

Seria ideal se a dinâmica de convergência do filtro projetado pudesse ser rápida e, ao mesmo tempo, sobre-amortecida. No entanto, a partir da sintonia por tentativa e erro dos elementos da diagonal das matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , só foi possível reduzir o sobre-sinal do estimador a partir da redução da frequência de corte – pelo aumento dos elementos de  $\mathbf{R}$  ou diminuição dos elementos de  $\mathbf{Q}$  correspondentes as variáveis de estado de velocidade e aceleração da saída “medida”. Essas modificações deterioram as características de *percepção* do estimador, ou seja, deteriora sua capacidade de observar rápidas variações da saída “medida”.

As matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  utilizadas, e o ganho de Kalman obtido, são:

$$\mathbf{Q} = \text{diag} \left[ 4 \times 10^2 \quad 1 \quad 2 \times 10^2 \quad 2 \times 10^2 \quad 1 \quad 2 \times 10^2 \right], \quad (4.62)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}_2, \quad (4.63)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.5536 & 0.5770 & 0.0269 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5679 & 0.5809 & 0.0010 \end{bmatrix}^T. \quad (4.64)$$

É interessante notar que os elementos de  $\mathbf{Q}$ , em (4.62), correspondentes às variáveis de estado  $w_1(k)$  e  $w_4(k)$ , estão ponderados de maneira diferente. Isto se deve a tentativa de equiparar as características de convergência do Filtro de Kalman, para os dois sub-sistemas, em termos das suas respostas no domínio do tempo apresentadas na Fig. 26. No entanto, é necessário destacar que esse tipo de compatibilização dos pares de entrada e saída, normalmente designados como *casamento dos ganhos principais* (CRUZ, 1996), só deve ser considerado quando a dinâmica das variáveis envolvidas for aproximada – i.e., entre variáveis mecânicas ou entre variáveis elétricas. Caso o problema envolva uma representação híbrida – e.g., mecânica e elétrica – o casamento dos ganhos principais deve ser evitado (ANDERSON; MOORE, 1979; STEVENS; LEWIS, 2003).

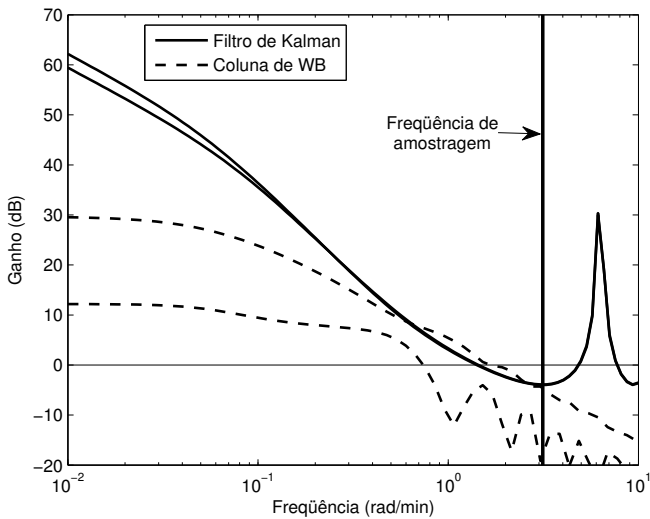


Figura 25 – Ganhos principais do Filtro de Kalman no domínio da frequência em relação aos ganhos principais da coluna de WB.

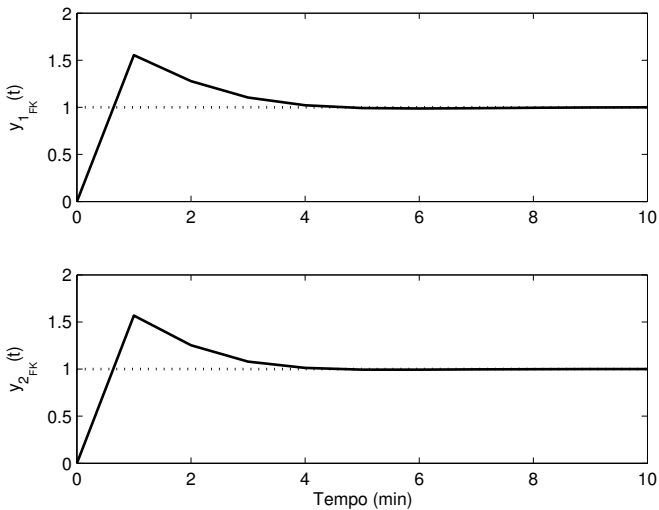


Figura 26 – Resposta no domínio do tempo que caracteriza a dinâmica de convergência do Filtro de Kalman projetado.

O modelo de simulação da planta neste exemplo é o equivalente discreto proposto por Wood e Berry (1973), apresentado em (1.12) no Capítulo 1, designado por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \frac{(0.7440-0.7094z^{-1})z^{-2}}{1-1.8954z^{-1}+0.8981z^{-2}} & \frac{(-0.8789+0.8278z^{-1})z^{-4}}{1-1.8954z^{-1}+0.8981z^{-2}} \\ \frac{(0.5786-0.5398z^{-1})z^{-8}}{1-1.8452z^{-1}+0.8511z^{-2}} & \frac{(-1.3015+1.1874z^{-1})z^{-4}}{1-1.8452z^{-1}+0.8511z^{-2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \\ + & \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{0.2467z^{-9}}{1-0.9351z^{-1}} \\ \frac{0.3575z^{-4}}{1-0.9270z^{-1}} \end{bmatrix}}_{\text{Perturbação de carga}} v(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \end{bmatrix}}_{\text{Ruído}}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

sendo que as perturbações tipo ruído branco,  $\xi_1(k)$  e  $\xi_2(k)$ , média nula e variância  $\sigma_{\xi_1}^2 = \sigma_{\xi_2}^2 = 0.0025$ , foram incluídas para enriquecer o exemplo.

A sintonia do controlador GMVSF a partir da matriz de ponderações  $\mathbf{\Lambda}$ , configura-se da seguinte maneira:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \lambda_2 \end{bmatrix}; \lambda_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{w_1} \\ \lambda_{w_2} \\ \lambda_{w_3} \end{bmatrix}; \lambda_2 = \begin{bmatrix} \lambda_{w_4} \\ \lambda_{w_5} \\ \lambda_{w_6} \end{bmatrix}, \quad (4.66)$$

ou seja, cada elemento  $\lambda_{w_i}$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , pondera a energia de controle empregada a uma respectiva variável de estado estimada,  $\bar{w}_i(k)$ .

Para simplificar a seleção dos elementos de  $\mathbf{\Lambda}$  no caso MIMO, especialmente quando o sistema considerado possuir ganhos negativos, como é o caso de WB, recomenda-se o cálculo do pré-compensador  $\mathbf{P}_c$  em (4.31), sendo este

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} 0.1570 & -0.1529 \\ 0.0534 & -0.1036 \end{bmatrix}. \quad (4.67)$$

O ganho  $\mathbf{P}_c$  compatibiliza os pares de entrada e saída do sistema em regime estacionário, reduzindo os acoplamentos enquanto o Filtro de Kalman, quando projetado para garantir o casamento dos ganhos principais, auxilia na redução do acoplamento durante o transitório, pois o controlador recebe os dados estimados com características dinâmicas normalizadas.

As contribuições de  $\mathbf{P}_c$  e do Filtro de Kalman permitem que o procedimento de sintonia adotado no caso SISO, seja mantido no caso

MIMO. Sendo assim, o procedimento de sintonia se baseia em sucessivos testes de simulação, com os elementos de  $\mathbf{\Lambda}$  mantendo uma proporção de 1 para 1, sendo gradativamente aumentados até se encontrar um valor que forneça uma resposta estável. Esse valor é então mantido nos elementos que ponderam as variáveis mais velozes – que no caso deste exemplo, são  $\tilde{w}_3(k)$  e  $\tilde{w}_6(k)$  – os demais elementos são reduzidas e o procedimento se repete até que as saídas do sistema forneçam a característica dinâmica desejada.

Quando a proporção desejada entre as magnitudes dos elementos de  $\mathbf{\Lambda}$  estiver definida, pode-se então acelerar ou retardar a velocidade de resposta a partir da redução, ou aumento, proporcional, dos elementos de  $\mathbf{\Lambda}$ .

No caso deste exemplo e utilizando as regras de sintonia expostas, os valores de  $\lambda_1 = \lambda_2 = [4 \ 4 \ 4]^T$ , garantiram a ambas as saídas, respostas estáveis, lentas e sub-amortecidas. Após mais alguns testes de simulação, chegou-se a proporção de  $\lambda_1 = \lambda_2 = [1 \ 4 \ 4]^T$  e,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  passaram a ser ponderados para acelerar a resposta do sistema, onde se estabeleceu que,  $\lambda_1 = 0.01 [1 \ 4 \ 4]^T$ ,  $\lambda_2 = 0.2 [1 \ 4 \ 4]^T$ , estariam em uma faixa aceitável de velocidade de resposta para a coluna de WB.

Fazendo-se ajustes finos na matriz de ponderações, foram estabelecidas duas sintonias para apresentar os resultados em termos de rastreamento de referência e rejeição de perturbações:

- **Sintonia 1:** priorizou-se a composição do topo da coluna,  $y_1(k)$ , além de maior velocidade de resposta, porém com característica sub-amortecida e melhor capacidade de rejeitar perturbações. A seguinte matriz de ponderações foi utilizada:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.04 & 0.04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (4.68)$$

O ganho do controlador GMVSF a partir da versão balanceada por  $\mathbf{P}_c$ , em (4.32), é

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.0517 & 0.2067 & 0.2067 & 0.0081 & 0.0407 & 0.0407 \\ 0.0258 & 0.1032 & 0.1032 & -0.0058 & -0.0290 & -0.0290 \end{bmatrix}; \quad (4.69)$$

- **Sintonia 2:** priorizou-se a composição do topo da coluna,  $y_1(k)$ , porém com característica sobre-amortecida e conseqüente velocidade de resposta mais lenta. A seguinte matriz de ponderações

foi utilizada:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.07 & 0.08 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1.6 & 1.6 \end{bmatrix}^T. \quad (4.70)$$

O ganho do controlador GMVSF, a partir da versão balanceada por  $\mathbf{P}_c$ , em (4.32), é

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.0274 & 0.1921 & 0.2196 & 0.0016 & 0.0128 & 0.0128 \\ 0.0114 & 0.0795 & 0.0908 & -0.0022 & -0.0178 & -0.0178 \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Nas figuras 27 a 29 são apresentados os resultados de simulação para o teste de rastreamento de referência, sem a presença das perturbações. Em ambas as sintonias utilizadas, verifica-se que os tempos de acomodação das variáveis de saída são próximos, pois a principal diferença nas sintonias em (4.68) e (4.70) é que na Sintonia 2 ponderou-se mais as variáveis que caracterizam as variações das saídas “medidas”. Esta observação fica mais evidente na Fig. 29, onde as variações das saídas “medidas” estimadas podem ser comparadas.

As figuras 30 a 33 são resultantes da simulação para o problema de regulação da coluna de WB, ou seja, considerou-se que a coluna operava sob as condições nominais fornecidas na Tab. 2, no Capítulo 1, e aos 51 min de simulação, uma perturbação de carga,  $v(k)$ , foi aplicada na coluna. Também, aos 251 min de simulação, as perturbações tipo ruído branco foram introduzidas nos testes. Na Fig. 34 são apresentados esses sinais de perturbação.

A Sintonia 1 foi escolhida para o teste de rejeição de perturbações, pois apresenta característica mais agressiva em termos dos sinais de controle gerados para reagir às variações nas saídas da coluna. É importante destacar que a variável considerada como uma perturbação de carga, é de fato, uma variável de entrada de alimentação de mistura à coluna. O valor utilizado para esta variável foi o acréscimo de 2% no seu valor nominal, ou seja,  $v(k) = 0.02$ . Na Fig. 30 fica evidente que ao aumentar em 2% a alimentação de mistura à coluna, a concentração mássica na base da coluna,  $y_2(k)$ , sofre bem mais que no topo,  $y_1(k)$ , haja vista que a mistura leva mais tempo para ser destilada e conseqüentemente passar a influenciar na concentração de  $y_1(k)$ .

Na Fig. 31 é possível observar que quando a perturbação de carga passa a atuar na coluna, há um resfriamento da mistura na base, o que acarreta em maior injeção de vapor, via  $u_2(k)$ , para compensar a variação de 2% na produção. De maneira análoga, há o aumento

da concentração de metanol no topo da coluna, fazendo com que o refluxo  $u_1(k)$  diminua para manter a condição de operação nominal na produção do destilado.

No teste de rejeição das seqüências de ruído,  $\xi_1(k)$  e  $\xi_2(k)$ , devem ser feitas algumas considerações, como: ambas possuem média nula e variância de 0.0025; são duas seqüências distintas; possuem picos máximos e mínimos de +0.05 e -0.05, ou seja, a magnitude dessas perturbações foram acentuadas para que fosse possível destacá-las em uma janela tão grande de simulação; são fictícias. Seus valores máximos e mínimos representam a ação instantânea de variações de  $\pm 5\%$  na concentração de metanol na base e no topo. Em suma, o que se quer defender é que a reação do controlador ao ruído é aceitável.

Na Fig. 32 é possível notar a influência do ruído na estimação das variáveis de estado de velocidade e aceleração das saídas. Verifica-se que os dados não são excessivamente filtrados e isto se deve a freqüência de corte do Filtro de Kalman utilizado estar muito próxima a freqüência de amostragem, além de considerar praticamente toda a largura de banda da coluna de WB. No entanto, não se deve considerar que esse aumento na banda passante do Filtro de Kalman seja prejudicial ao controlador projetado pois, observe que os dados ainda estão sendo filtrados se comparados aos estados “reais” na Fig. 33. O que deve ser considerado é o compromisso entre capturar as características dinâmicas do processo para que as informações realimentadas ao controlador possibilitem reação à perturbação ruidosa mas ainda com um certo grau de conservadorismo.

Em outras palavras, pode-se dizer que o Filtro de Kalman é responsável pela supressão de ruído, mas a compensação, ou seja, a reação do controlador ao ruído, requer uma diminuição na taxa de filtragem e também diminuição na ponderação do controlador GMVSF, tal que os resultados se aproximem do regulador de variância mínima de Åström e Wittenmark (1973), quando possível. Sendo assim, não há uma forma geral e exata para definir a sintonia do GMVSF, mas sim considerar as dificuldades particulares de cada problema. Neste exemplo com a coluna de WB, assim como no exemplo anterior com o PAM, priorizou-se a factibilidade de implementação do sinal de controle em atuadores reais. Logo, nota-se que os sinais de controle apresentados nos resultados das simulações possuem variações, no máximo, “moderadas”, descartando chaveamentos abruptos que possam danificar equipamentos reais.

É importante destacar que a compensação dos atrasos, através do método aproximado pelo conjunto de atrasos determinado pelas entradas dominantes dos sub-sistemas, garantiu resultado satisfatório,

evidenciado nos gráficos das figuras 27 e 28, onde verifica-se que a partir das mudanças de referência, as variáveis de saída apresentavam as devidas variações, haja vista que os “disparos” dos sinais de controle ocorrem de maneira antecipada. O mesmo já não pode ser notado nos testes de rejeição de perturbações de carga, pois não somente os atrasos são mais longos, como também não há nenhuma consideração do ponto de vista da síntese do controlador, em relação ao modelo de perturbação de carga. O mesmo ocorre do ponto de vista do estimador de estados, que recebe os dados de forma atrasada, levando mais tempo para corrigir o erro de estimação.

Como foi dito anteriormente, o que se considerou como perturbação de carga neste exemplo, é na realidade, uma variável controlada no problema de colunas de destilação, seja de forma manual, ou automática, a alimentação à coluna é mensurável. No entanto, normalmente encontra-se a coluna de WB sendo testada desta forma na maioria dos trabalhos que visam testes quando há variação na alimentação da coluna. As soluções mais eficazes no tratamento de variações na alimentação da coluna de WB como perturbação de carga, consideram a inclusão de uma parcela tipo *feed-forward* (DORF; BISHOP, 2008) na lei de controle, onde assume-se que há como detectar a perturbação de “carga”, o que é mais do que válido, pois esta é na verdade o resultado de uma mudança em uma entrada conhecida do sistema.

Por simplicidade de apresentação deste exemplo e para acompanhar as bases de referência da literatura correspondente,  $v(k)$  foi então tratada como carga, mas poderia ter sido incluída como uma variável de entrada adicional na descrição do modelo no espaço de estados. Mais interessante seria assumir uma relação entre a alimentação e o nível de mistura na coluna, associando mais um par de entrada e saída no problema, tal como em Seborg, Edgar e Mellichamp (2003), que fornecem outras relações de entrada e saída da coluna de WB.

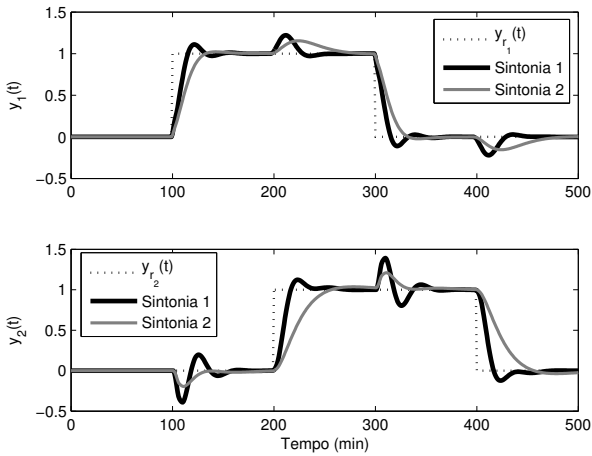


Figura 27 – Saídas da coluna de WB para os dois casos de sintonia no teste de rastreamento de referência.

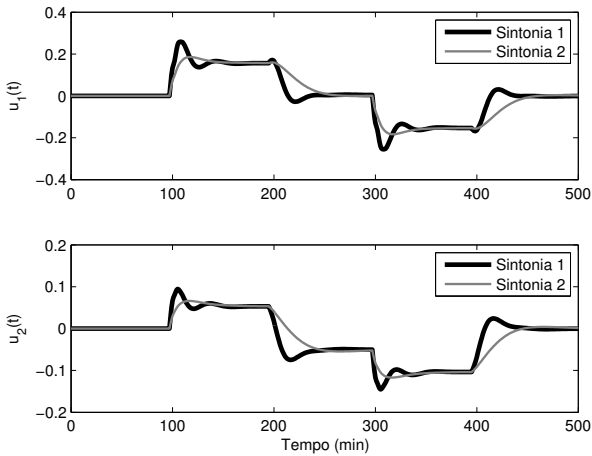


Figura 28 – Sinais de controle aplicados a coluna de WB para os dois casos de sintonia no teste de rastreamento de referência.



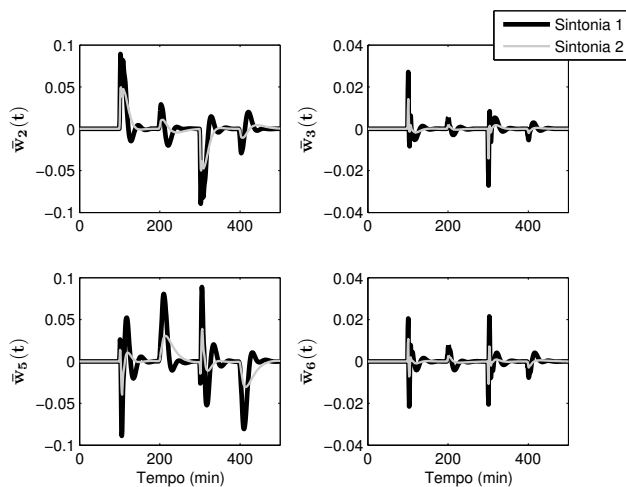


Figura 29 – Estimação das variáveis de estado relativas a velocidade e aceleração da saída medida para os dois casos de sintonia no teste de rastreamento de referência.

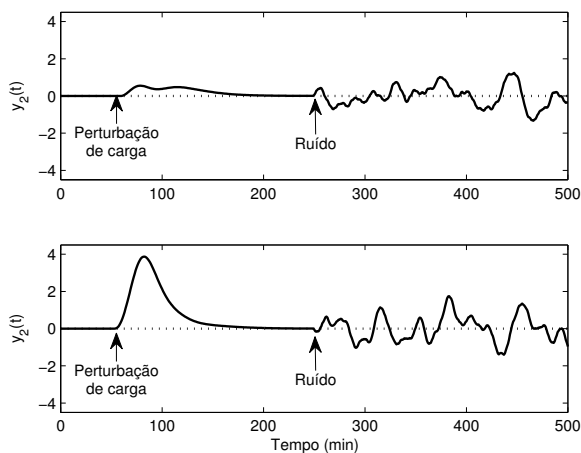


Figura 30 – Saídas da coluna de WB utilizando a Sintonia 1, para o problema de regulação quando o sistema está sujeito a perturbações de baixa e alta frequência.

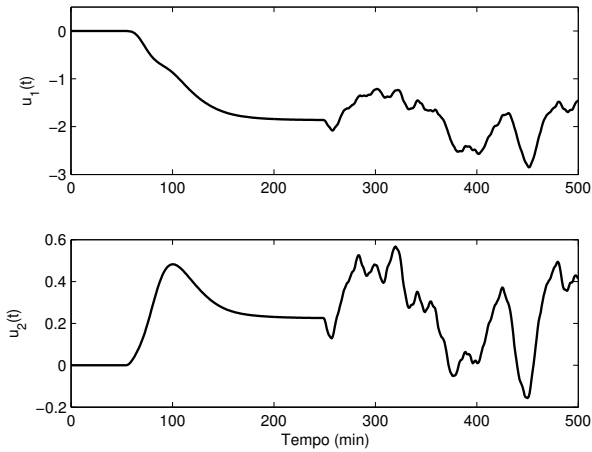


Figura 31 – Sinais de controle aplicados a coluna de WB utilizando a Sintonia 1 no teste de rejeição de perturbações.

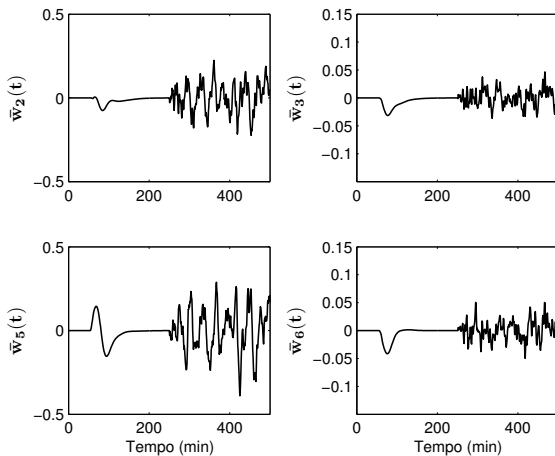


Figura 32 – Variáveis de estado estimadas durante o teste de rejeição de perturbações com a Sintonia 1.

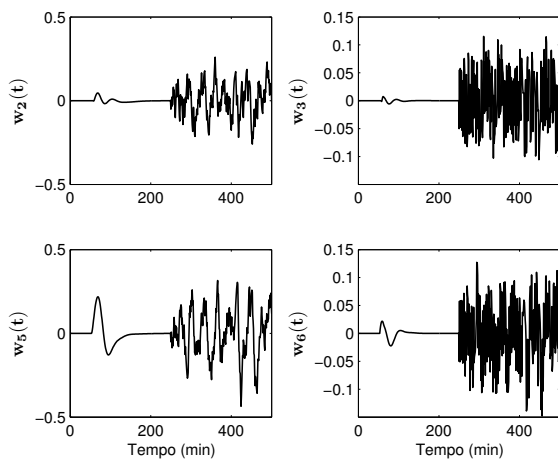


Figura 33 – Variáveis de estado “reais” (não filtradas) durante o teste de rejeição de perturbações com a Sintonia 1.

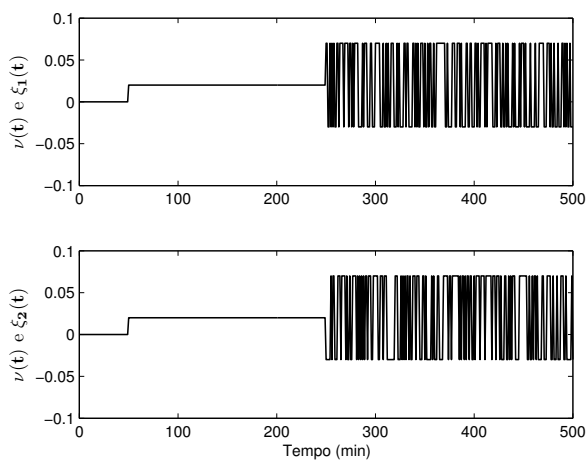


Figura 34 – Sinais de perturbação de carga e ruído utilizados.

## 4.5 CONCLUSÃO

O controlador GMVSF resume praticamente todas as contribuições deste trabalho em termos de uma nova estrutura de controlador baseada em GMV, também com inovações no procedimento de sintonia e nas formas de análise do projeto.

É interessante notar, que apesar do problema GMVSF ser desenvolvido no espaço de estados, este possui relação direta com o controlador GMV tradicional, ou seja, é possível reescrever o problema de maneira reversa e explicá-lo em termos de  $P(z^{-1})$ ,  $Q(z^{-1})$ ,  $E(z^{-1})$  e  $F(z^{-1})$ , tal como apresentado no Capítulo 3. Isto significa, que em essência, o GMVSF é o GMV visto de outra perspectiva de projeto.

O desenvolvimento da teoria do GMVSF em termos de sub-sistemas tem origem no que foi apresentado no Capítulo 2 sobre controle por inferência. No entanto, a maneira como esses sub-sistemas são organizados no modelo de estados assume uma representação observável e controlável; conseqüentemente, as variáveis inferidas podem ser “movidas” pela ação de controle.

Recorrendo-se à base da idéia para este controlador, fornecida no Capítulo 2, a estrutura de controle GMVSF se apresenta como um controlador *multi-loop* (de múltiplas malhas) (SEBORG; EDGAR; MELLICHAMP, 2003), característico de técnicas de controle SISO aplicadas a sistemas MIMO. No entanto, a partir do momento em que a solução do problema de otimização do GMV é resolvida para um vetor de saídas generalizadas, onde o ganho  $\mathbf{K}$  do GMVSF é calculado em batelada, resolvendo o problema para todas as saídas generalizadas consideradas, o problema deixa de ser *multi-loop* e passa a ser uma solução, de fato, multivariável, como em um controlador LQR, mas com o problema de otimização sendo resolvido em função da variável de controle (STEVENS; LEWIS, 2003).

É fundamental ressaltar que a técnica de projeto GMVSF é *não-ortodoxa* do ponto de vista de técnicas de controle estocástico. Isto é afirmado com base em Cruz (1996) considerou os métodos de projeto de controladores LQG/LTR abordados em seu livro, onde o Filtro de Kalman é projetado sem considerar o modelo de perturbações estocásticas, mas sim, baseado em senso comum sobre características de filtragem e controle robusto, bem como sobre o razoável conhecimento das características do processo com base no modelo de projeto disponível.

Destaca-se, então, a utilização de modelos de projeto sem a parcela média-móvel e a obtenção de descrições no espaço de estados que

sejam assintoticamente estáveis. Este é um dos motivos pelo qual as descrições tipo auto-regressivas não podem ser utilizadas, pois normalmente as variáveis de estado representam a variável de saída do sistema em instantes anteriores. Logo, só há como tratar esse tipo de representação através do controle via realimentação da saída, assunto abordado através do GMVSS no Capítulo 3.

A principal vantagem do GMVSF em relação ao GMVSS, está na maneira de promover a sintonia do controlador. O GMVSS é simplesmente o alicerce deste trabalho para escapar da solução da Diophantine, mas se for necessária uma ponderação mais complexa do sinal de controle ou da saída medida – mais complexa que a formulação de ordem mínima – aparecem estruturas polinomiais que remetem aos problemas destacados nos capítulos 1 e 2, relativos aos métodos tradicionais de sintonia do controlador GMV de Clarke e Gawthrop (1975).

A idéia chave na sintonia do GMVSF estava atrelada ao entendimento físico ou comportamental das variáveis de estado consideradas no problema. No entanto, o desenvolvimento do projeto se apresentou de forma bem mais natural e sistêmica do que se esperava. Isto significa que é dispensável, por exemplo, que se conheça o significado físico da derivada da saída medida, pois mesmo assim, a mera interpretação de que essa variável é a variação da saída medida a torna adequada para o problema de sintonia heurística do controlador.

É notório que quanto maior o número de variáveis de entrada e saída, mais difícil é sintonizar o GMVSF. Mas essa regra é válida para toda e qualquer topologia de controle. Mesmo assim, a sintonia em termos da magnitude relativa de elementos de matrizes de ponderação é uma forma tradicionalmente adotada em controladores multivariáveis – um exemplo de grande expressividade é o LQG e suas particularizações ou soluções específicas, como  $H_2$  e  $H_\infty$  (CRUZ, 1996), normalmente empregados em problemas com grande número de variáveis e forte acoplamento (e.g. sistemas de geração e transmissão de energia, sistemas aeroespaciais) (DOYLE; STEIN, 1981; STEVENS; LEWIS, 2003).

Apesar da simplicidade em estabelecer uma sintonia adequada via tentativa e erro, o GMVSF possui algumas restrições que não foram solucionadas neste trabalho. Uma delas é a forma diagonal que a representação no espaço de estados deve assumir em termos dos sub-sistemas. Outra é que os sub-sistemas precisam ser descritos por modelos sem zeros ou zeros de transmissão. Isto se deve a forma utilizada

no desenvolvimento do GMVSF, tal que um sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1\dot{u} + B_0u, \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{4.72}$$

precisaria ser escrito somente em função de  $u$  a partir de uma mudança de coordenada designada por  $z = x - B_1u$ , ficando então (STEVENS; LEWIS, 2003)

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + (AB_1 + B_0)u, \\ y &= Cz + CB_1u = Cz + Du.\end{aligned}\tag{4.73}$$

A representação em (4.73) não atende a forma requerida para o GMVSF tal como a apresentada em (4.20).

O controlador GMVSF é dependente de um ganho resultante do problema de otimização do GMV, estendido ao caso de realimentação total de estados. A maneira pela qual esse ganho é calculado, impossibilita a solução para  $\Lambda = 0$ , portanto, não há como reproduzir o caso ideal de variância mínima a partir do projeto de um GMVSF. Se este for o objetivo do projetista, a abordagem GMVSS resolve esse problema.

Além das restrições estruturais, o GMVSF não possui métodos analíticos de projeto e esse tema permanece em aberto para estudos futuros.

## 5 CONCLUSÕES FINAIS

Esta tese centrou-se no desenvolvimento de técnicas de projeto de controle GMV, com o intuito de simplificar e sistematizar o tratamento de sistemas SISO e MIMO com atrasos de transporte longos, a partir de uma abordagem no espaço de estados.

O desenvolvimento da idéia foi caracterizado pela busca de uma alternativa ao projeto do MVP, que dispensasse a solução da equação de Diophantine e, ao mesmo tempo, garantisse resultado equivalente ao MVP obtido via projeto por funções de transferência. Além disso, priorizou-se usufruir da estrutura mais simples de controle GMV, designada como GMV de ordem mínima, cuja sintonia é caracterizada por um único parâmetro escalar que pondera a energia do sinal de controle.

A solução defendida como alternativa ao projeto do MVP pela Diophantine foi uma abordagem de alimentação direta de estados estimados por Filtro de Kalman, na equação do preditor. Para o caso idêntico ao de Clarke e Gawthrop (1975), de controle por realimentação da saída medida, o controlador GMVSS estabeleceu a relação entre o MVP e o Filtro de Kalman a partir de uma representação auto-regressiva (estocástica) do modelo de projeto no espaço de estados, que permite ao projetista obter o ganho de Kalman sem a necessidade de resolver a equação a diferenças de Riccati. O ganho de Kalman auxilia o cálculo do ganho do MVP no GMVSS, através de multiplicações matriciais, dispensando qualquer divisão polinomial ou mesmo a solução de identidades como as equações de Diophantine.

A relação estabelecida entre o Filtro de Kalman e o MVP estendeu o grau de liberdade de sintonia dos controladores propostos pela inclusão de filtros de medição no projeto, de maneira intrínseca. Essa forma de projetar o MVP foi desenvolvida no contexto de um controlador GMV baseado em um vetor de saídas generalizadas, constituído por variáveis de estado estimadas, derivadas em termos das variações das saídas medidas, cujo significado ou comportamento físico possui baixo grau de abstração. Tais características dessas variáveis de estado, garantem o bom entendimento do problema de filtragem e conseqüente facilidade na sintonia do estimador.

O controlador GMVSF é então o resultado final dessa união entre projeto de Filtro de Kalman e o controle GMV via realimentação de estados estimados e preditos. Sua sintonia se baseia na relação entre a magnitude das ponderações do sinal de controle para cada variável de estado considerada no problema (como em uma estratégia *multi-loop*) e

no cálculo do ganho do GMVSF que resolve o problema SISO e MIMO, em batelada, para todas as variáveis envolvidas no projeto.

Com base no conteúdo apresentado, na continuação, apresentam-se as principais contribuições deste trabalho, campos de aplicação, publicações realizadas e possibilidades de pesquisas futuras.

## 5.1 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DA TESE

- Projeto do MVP que dispensa a solução da Diophantine, mas que fornece os filtros do preditor;
- Projeto do MVP no caso MIMO sem o cálculo da matriz *interactor*;
- Projeto do preditor *deadbeat* ou não-*deadbeat* com filtragem de Kalman intrínseca;
- Algoritmo de solução da equação de Diophantine utilizando a técnica de projeto do MVP do GMVSS;
- Projeto de controladores GMV com filtros complexos de saída e de ponderação do sinal de controle, a partir de premissas simples adotadas na definição do modelo de projeto no espaço de estados;
- Relação do atraso de transporte e sua compensação atrelada ao cálculo do ganho do MVP, obtido a partir da matriz de transição de estados elevada a potência do valor do atraso;
- Procedimento de sintonia por tentativa e erro sistematizado e baseado em características qualitativas de análises no domínio do tempo e da frequência;
- Projeto baseado em variáveis estimadas de baixo grau de abstração, como velocidade e aceleração da saída medida;
- Simplicidade no tratamento de sistemas MIMO acoplados com atrasos assíncronos, através de uma compensação aproximada desses atrasos, compatibilização da dinâmica do transitório via casamento dos ganhos principais com Filtro de Kalman, e normalização dos ganhos do processo em regime estacionário a partir de uma versão balanceada do ganho do controlador GMVSF.



## 5.2 PUBLICAÇÕES

A seguir são apresentadas as principais publicações realizadas durante o doutoramento e que têm relação direta ou indireta com o conteúdo exposto nesta tese:

### 5.2.1 Trabalhos com relação direta:

Silveira, A. S.; Coelho, A. A. R. Generalised minimum variance control state-space design. *Control Theory and Applications*, IET, v. 5, n. 15, 2011.

Este artigo é basicamente uma versão compacta do Capítulo 3 desta tese, abordando o desenvolvimento do controlador GMVSS, seus resultados e perspectivas futuras, como o caso GMVSF.

Silveira, A. S.; Coelho, A. A. R. State feedback GMV controller aided by Kalman filter estimation. *Automatica*, p. 1–10, 2011. Preprint submitted to *Automatica* on December 15, 2011.

Este artigo foi submetido para a revista *Automatica* em 15 de dezembro de 2011. Ainda encontra-se em fase de revisão, porém, uma cópia sob os critérios de *copyright* da *Automatica* está disponível em [www.das.ufsc.br/~toninho/gmvss.pdf](http://www.das.ufsc.br/~toninho/gmvss.pdf). O documento aborda o conteúdo exposto no Capítulo 4 desta tese, referente ao desenvolvimento e resultados sobre o GMVSF.

Silveira, A. S.; Rodríguez, J. E. N.; Coelho, A. A. R. Robust design of a 2-DOF GMV controller: A direct self-tuning and fuzzy scheduling approach. *ISA Transactions*, v. 51, n. 1, p. 13–21, 2012. ISSN 0019-0578.

Este artigo abordou testes preliminares sobre o controle GMV de ordem reduzida e ordem mínima, enfatizando o projeto de filtros de medição via *loop-shaping*, alternativas de sintonia adaptativa e inteligente, além de testes de robustez do controlador GMV de estrutura fixa na forma incremental. Parte do material exposto no artigo é detalhado nos capítulos 1 e 2 desta tese.

Silveira, A. S.; Coelho, A. A. R. Generalized minimum variance control state space design. XVIII Congresso Brasileiro de Automática. Bonito, MS, Brasil: [s.n.], 2010.

Este artigo retrata a fase preliminar da pesquisa desta tese, onde os primeiros testes de alternativas ao projeto do MVP via Filtro de Kalman foram relatados, além de testes experimentais com o processo PAM. Sendo este artigo, o início do desenvolvimento do controlador GMVSS.

Silveira, A. S.; Rodríguez, J. E. N.; Coelho, A. A. R. Design Considerations For Robust Generalized Minimum Variance Control in a Modified 2-DOF Structure With Direct Self-Tuning and Fuzzy Scheduling. Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2009, Brasília-DF.

Este trabalho é um relato dos resultados iniciais do estudo que foi refinado e publicado recentemente na ISA Transactions sobre GMV de ordem mínima, filtragem robusta intrínseca no projeto do controlador GMV e propostas de sintonia para este controlador.

### **5.2.2 Trabalhos com relação indireta:**

Silveira, A. S.; Coelho, A. A. R.; Gomes, F. J. GMV-PID Controller Design with Gradient Method for the Energy Weighting Factor in Nonlinear Plants. IFAC Conference on Advances in PID Control, 28-30 March, Brescia, Italy, 2012, p. 1-6.

Silveira, A. S.; Coelho, A. A. R.; Gomes, F. J. Model-Free Adaptive PID Controllers Applied to the Benchmark PID'12. IFAC Conference on Advances in PID Control, 28-30 March, Brescia, Italy, 2012, p. 1-6.

Silveira, A. S.; Coelho, A. A. R.; Franca, A. A.; Knihs, V. L. Pseudo-PID Controller: Design, Tuning and Applications. IFAC Conference on Advances in PID Control, 28-30 March, Brescia, Italy, 2012, p. 1-6.

Franca, A. A.; Silveira, A. S.; Coelho, A. A. R.; Gomes, F. J.; Meza, C. Teaching PID Tuning with IMC Design for Dynamic Systems using ScicosLab. 18th IFAC World Congress, Milan, Italy, 2011, p. 1-6.

Franca, A. A.; Silveira, A. S.; Coelho, A. A. R.; Gomes, F. J. Aplicação do Ambiente Computacional ScicosLab em Modelagem,

Simulação e Controle Digital em Sistemas Dinâmicos. CAIP'2011 - 10º Congresso Interamericano de Computación Aplicada a La Industria de Procesos, Girona, 2011. p. 1-6.

Silveira, A. S.; Coelho, A. A. R. Simple process control and Hardware-In-the-Loop setups using FOSS: ScicosLab. XVIII Congresso Brasileiro de Automática, 2010, Bonito - MS.

Lemes, A. G.; Silveira, A. S.; Coelho, A. A. R. Pseudo controlador PID: projeto e sintonia automática. XVIII Congresso Brasileiro de Automática, 2010, Bonito - MS.

Lemes, A. G.; Prado, F. D.; Kiametis, D.; Silveira, A. S.; Coelho, A. A. R.; Meza, C. Software livre na educação em engenharia de controle: um estudo de caso na análise e projeto de controle de um pêndulo amortecido. XVIII Congresso Brasileiro de Automática, 2010, Bonito - MS.

Knihs, V. L.; Franca, A. A.; Silveira, A. S.; Gomes, F. J.; Coelho, A. A. R. Aplicação da Sintonia IMC no Controlador PID em Sistemas Não-Lineares Simulados com ScicosLab. 9th IEEE/IAS International Conference on Industry Applications, 2010, São Paulo. p. 1-6.

Knihs, V. L.; Franca, A. A.; Silveira, A. S.; Gomes, F. J.; Coelho, A. A. R. Avaliação e Projeto de um Controlador Self-Tuning na Estabilização de Sistemas Oscilatórios. 9th IEEE/IAS International Conference on Industry Applications, 2010, São Paulo. p. 1-6.

Sumar, R. R.; Silveira, A. S.; Coelho, A. A. R.; Coelho, L. S. Sintonia e Experimentação em Tempo Real de Controladores PID Adaptativo Livre de Modelo de Planta. Congresso Brasileiro de Automática, 2008, Juiz de Fora - MG.

### 5.3 PERSPECTIVAS DE PESQUISAS FUTURAS

Considerando a possibilidade de estender os resultados apresentados nesta tese, alguns temas para pesquisas futuras são apresentados:

- Desenvolver uma técnica de sintonia analítica para o Filtro de Kalman e a matriz de ponderações  $\Lambda$  no GMVSF, que permita

garantir uma dinâmica de malha fechada prescrita pelo projetista;

- Desenvolver as equações do GMVSS e GMVSF para o tratamento de modelos no espaço de estados com zeros ou polos de transmissão;
- Avaliar o algoritmo GMVSF em estruturas adaptativas com identificação e compensação de atraso variante no tempo, de maneira a usufruir da facilidade em calcular o ganho do MVP no espaço de estados a partir da matriz de transição de estados elevada a potência do valor de atraso identificado;
- Explorar outras classes de plantas como as de fase não-mínima, integradoras e instáveis;
- Aplicar a técnica GMVSF a processos com características dinâmicas de alta frequência, como sistemas de comunicação e sistemas elétricos;
- Explorar técnicas de controle GMVSF com restrição do sinal de controle, utilizando modelos dos atuadores na descrição de estados do sistema controlado.

## REFERÊNCIAS

ALBERTOS, P.; ORTEGA, R. On generalized predictive control: Two alternative formulations. *Automatica*, v. 25, n. 5, p. 753 – 755, 1989. ISSN 0005-1098.

ALLEN, R.; HUANG, K. Self-tuning control of cutting force for rough turning operations. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part B. Journal of engineering manufacture*, v. 208, n. 3, p. 157–165, 1994. ISSN 0954-4054.

ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. *Optimal filtering*. [S.l.]: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1979. x, 357 p. ISBN 0136381227.

ÅSTRÖM, K. J. *Introduction to Stochastic Control Theory*. [S.l.]: Academic Press, Inc., 1970.

ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. Benchmark systems for PID control. In: *Proc. of the IFAC Workshop on Digital Control: Past Present and Future of PID Control*. Terrassa, Spain: [s.n.], 2000. p. 165–166.

ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. Revisiting the Ziegler-Nichols step response method for PID control. *Journal of Process Control*, v. 14, n. 6, p. 635–650, 2004.

ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. On self-tuning regulators. *Automatica*, v. 9, p. 195–199, 1973.

BAKER, R. P. D.; MORRIS, A. J. A generalised minimum variance self-tuning controller for systems with large dead times. In: *American Control Conference, 1985*. [S.l.: s.n.], 1985. p. 408–409.

BARZAMINI, R.; SHAFIEE, M.; DADLANI, A. Adaptive generalized minimum variance congestion controller for dynamic TCP/AQM networks. *Computer Communications*, v. 35, n. 2, p. 170–178, 2012. ISSN 0140-3664.

BITMEAD, R. R.; GEVERS, M.; WERTZ, V. *Adaptive optimal control: the thinking man's GPC*. [S.l.]: Prentice Hall, 1990. xi, 244 p. ISBN 0130132772.

BOZORG, M.; TERMEH, F. Domains of PID controller coefficients which guarantee stability and performance for LTI time-delay systems. *Automatica*, v. 47, n. 9, p. 2122–2125, 2011. ISSN 0005-1098.

CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. A. *Model Predictive Control in the Process Industry*. [S.l.]: Springer-Verlag New York, Inc., 1997. ISBN 3540199241.

CAMERON, F.; SEBORG, D. E. A self-tuning controller with a PID structure. *International Journal of Control*, v. 38, n. 2, p. 401–417, 1983.

CASTILLO, S. E. P.; GRIMBLE, M. J.; KATEBI, R. Self-tuning neuro-fuzzy generalized minimum variance controller. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, v. 16, p. 103–108, 2005.

CHEN, D.; SEBORG, D. E. Design of decentralized PI control systems based on nyquist stability analysis. *Journal of Process Control*, v. 13, n. 1, p. 27 – 39, 2003. ISSN 0959-1524.

CHOI, J.; HONG, W.; KIM, J. A self-tuning PI control system design for the flatness of hot strip in finishing mill processes. *Journal of Mechanical Science and Technology*, The Korean Society of Mechanical Engineers, v. 18, p. 379–387, 2004. ISSN 1738-494X.

CLARKE, D. W. *Self-Tuning Controller Design and Implementation in Real-Time Computer Control*. [S.l.]: S. Bennett & D. Linkens, Peter Peregrinus, 1984.

CLARKE, D. W.; GAWTHROP, P. J. Self-tuning controller. In: *Proc. of the Institution of Electrical Engineers*. [S.l.: s.n.], 1975. v. 122, n. 9, p. 929–934.

CLARKE, D. W.; MOHTADI, C.; TUFFS, P. S. Generalized predictive control – part i. the basic algorithm. *Automatica*, Pergamon Press, Inc., Tarrytown, NY, USA, v. 23, n. 2, p. 137–148, 1987. ISSN 0005-1098.

CLUETT, W. R.; GOBERDHANSINGH, E. Autotuning for model-based predictive control. *Automatica*, v. 26, n. 4, p. 691 – 697, 1990. ISSN 0005-1098.

COELHO, A. A. R. *Controle Adaptativo para Processos Multivariáveis: Aspectos Teóricos e Simulação*. 249 p., Tese (Doutorado) – DCA/FEE/UNICAMP, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1991.

COELHO, A. A. R.; COELHO, L. S. *Identificação de Sistemas Dinâmicos Lineares*. Florianópolis, SC, Brasil: Editora da Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.

CRUZ, J. J. *Controle Robusto Multivariável*. São Paulo, Brasil: Editora da Universidade de São Paulo, 1996.

CUI, H.; PANG, Z.; PANG, Z. Generalized predictive control based on input design. In: *Intelligent Control and Automation, 2008. WCICA 2008. 7th World Congress on*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 5594–5599.

DENG, H.; ORUGANTI, R.; SRINIVASAN, D. Adaptive digital control for UPS inverter applications with compensation of time delay. In: *Proc. of the Nineteenth Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 1, p. 450–455.

DOI, M.; MORI, Y. A study on robust asymptotic tracking property for generalized minimum variance control. In: *Proc. of the American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 1472–1477.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Modern Control Systems*. 11. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2008. ISBN 0132270285.

DOYLE, J.; STEIN, G. Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, v. 26, n. 1, p. 4–16, 1981. ISSN 0018-9286.

EL-SAMAHY, A.; EL-SHARKAWI, M.; SHARAF, S. Adaptive multi-layer self-tuning high performance tracking control for DC brushless motor. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 9, n. 2, p. 311–316, 1994. ISSN 0885-8969.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. *Digital control of dynamic systems*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1998. ISBN 9780201820546.

GANBING, W. Adaptive controller of blood pressure using model with fraction time delays. In: *Proc. of the IEEE Annual International Conference on Engineering in Medicine and Biology Society*. [S.l.: s.n.], 1988.

GANG, H.; YUN, L. Multisensor information fusion predictive control algorithm. In: *Proc. of the 2011 Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 1454–1457.

- GARCÍA, P.; ALBERTOS, P. A new dead-time compensator to control stable and integrating processes with long dead-time. *Automatica*, v. 44, n. 4, p. 1062 – 1071, 2008. ISSN 0005-1098.
- GARCÍA, P.; ALBERTOS, P. Dead-time-compensator for unstable MIMO systems with multiple time delays. *Journal of Process Control*, v. 20, n. 7, p. 877–884, 2010. ISSN 0959-1524.
- GAWTHROP, P. J.; JONES, R. W.; SBARBARO, D. G. Emulator-based control and internal model control: Complementary approaches to robust control design. *Automatica*, v. 32, n. 8, p. 1223 – 1227, 1996. ISSN 0005-1098.
- GRIMBLE, M. Controller performance benchmarking and tuning using generalised minimum variance control. *Automatica*, v. 38, n. 12, p. 2111 – 2119, 2002. ISSN 0005-1098.
- GU, W.; BOLLINGER, K. A self-tuning power system stabilizer for wide-range synchronous generator operation. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 4, n. 3, p. 1191–1199, 1989. ISSN 0885-8950.
- HESS, R.; JUNG, Y. An application of generalized predictive control to rotorcraft terrain-following flight. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, v. 19, n. 5, p. 955–962, 1989. ISSN 0018-9472.
- INOUE, A. et al. A state-space based design of generalized minimum variance controller equivalent to transfer-function based design. In: *Proc. of the American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2001. v. 4, p. 2761–2766.
- JONES, R. W. An explicit generalised minimum variance self-tuner. In: *Proc. of the American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 1986. p. 1095 –1096.
- JOTA, F.; BRAGA, A.; PENA, R. Performance assessment of advanced process control algorithms using an interacting tank system. In: *Proc. of the IEEE Industry Applications Conference Annual Meeting*. [S.l.: s.n.], 1995. v. 2, p. 1565–1571.
- KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering*, v. 82, n. Series D, p. 35–45, 1960.
- KIRECCI, A.; EKER, I.; DULGER, L. C. Self-tuning control as conventional method. *Electrical Engineering*, v. 85, n. 2, p. 101–107, 2003. ISSN 1432-0487.



- KO, H.; NIIMURA, T.; LEE, K. An intelligent controller for a remote wind-diesel power system - design and dynamic performance analysis. In: *Proc. of the IEEE Power Engineering Society General Meeting*. [S.l.: s.n.], 2003.
- KOIVO, H. N. A multivariable self-tuning controller. *Automatica*, v. 16, n. 4, p. 351 – 366, 1980. ISSN 0005-1098.
- KUCERA, V. Algebraic methods in discrete linear estimation. *Kybernetika*, v. 12, n. 3, p. 171–191, 1976.
- KWONG, R. H. On the LQG problem with correlated noise and its relation to minimum variance control. In: *Proc. of the 26th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1987. p. 763–767.
- LI, Q.-A.; WANG, S.-Q. Fast algorithm for adaptive generalized predictive control based on BP neural networks. In: *Machine Learning and Cybernetics, 2004. Proceedings of 2004 International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 2, p. 738 – 743.
- LI, Z.; EVANS, R. J.; WITTENMARK, B. Minimum variance prediction for linear time-varying systems. *Automatica*, v. 33, n. 4, p. 607–618, 1997.
- LIU, X.-J.; LARA-ROSANO, F. Generalized minimum variance control of steam-boiler temperature using neuro-fuzzy approach. In: *Fifth World Congress on Intelligent Control and Automation*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 3, p. 2459–2463.
- MEJÍA, R. I. G. *Controle preditivo multivariável: aspectos de projeto e simulação*. 161 p., Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.
- MING, Z.; YUN, L.; GANG, H. Multisensor information fusion predictive control. In: *Complex Medical Engineering (CME), 2011 IEEE/ICME International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 493 –498.
- MINTER, B. J.; FISHER, D. G. A comparison of adaptive controllers: Academic vs industrial. In: *Proc. of the American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 1988. p. 1653–1658.
- MITSUKURA, Y.; YAMAMOTO, T.; KANEDA, M. Design of self-tuning PID controllers using a genetic algorithm. In: *Proc. of the American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 1999. v. 2, p. 1361–1365.

- MONTAGUE, G. A.; MORRIS, A. J.; THAM, M. T. Performance evaluation of three multivariable self-tuning controller design techniques. In: *Proc. of the 25th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1986. v. 25, p. 1564–1569.
- MORARI, M.; ZAFIRIOU, E. *Robust Process Control*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1989. ISBN 0137821530.
- MORI, Y.; TAKAKI, A. Generalized minimum variance control for MIMO system with multiple time delays. *IEEJ Transactions on Electronics, Information and Systems*, v. 127, n. 6, p. 937–942, 2007.
- MORI, Y.; TAKAKI, A. A study of decoupling with skeleton matrix in two-degree-of-freedom generalized minimum variance control. *Electrical Engineering in Japan (English translation of Denki Gakkai Ronbunshi)*, v. 176, n. 1, p. 28–36, 2011.
- PAN, T.; LI, S.; CAI, W.-J. Lazy learning-based online identification and adaptive PID control: A case study for CSTR process. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, v. 46, n. 2, p. 472–480, 2007.
- PASSINO, K. M.; YURKOVICH, S. *Fuzzy Control*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1998.
- PLARRE, K.; ROJAS, A.; ROJAS, R. Analytical solution to the polynomial diophantine equation: development and application to generalised predictive control analysis. In: *Proc. of the 1998 UKACC International Conference on Control*. [S.l.: s.n.], 1998. v. 1, p. 804–809. ISSN 0537-9989.
- REYNOLDS, O. R.; PACHTER, M. The performance of generalized minimum variance system identification. In: *Proc. of the 5th IEEE Mediterranean Conference On Control and Systems*. [S.l.: s.n.], 1997.
- RINTAMAKI, M.; KOIVO, H.; HARTIMO, I. Adaptive closed-loop power control algorithms for CDMA cellular communication systems. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v. 53, n. 6, p. 1756–1768, 2004. ISSN 0018-9545.
- RINTAMAKI, M.; VIRTEJ, I.; KOIVO, H. Two-mode fast power control for WCDMA systems. In: *Proc. of the IEEE 53rd Vehicular Technology Conference*. [S.l.: s.n.], 2001. v. 4, p. 2893–2897.
- RIUL, J. A.; VALE, F. A. M.; MONTENEGRO, P. H. M. Controlador adaptativo aplicado em um robô manipulador eletropneumático de

três gdl cartesiano. In: *Nono Simpósio de Mecânica Computacional (SIMMEC)*. Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ). [S.l.: s.n.], 2010.

SAITO, H. et al. Self-tuning control for rotational speed of slider-crank mechanism. In: *Proc. of the Institute of Control, Robotics and Systems – Society of Instrument and Control Engineers*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 29–33.

SEBORG, D. E.; EDGAR, T. F.; MELLICHAMP, D. A. *Process Dynamics and Control*. 2. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003. ISBN 9780471000778.

SHIINO, T. et al. Gimbals control with the camera for aerial photography in RC helicopter. In: *Proc. of the International Conference on Control, Automation and Systems*. [S.l.: s.n.], 2008.

SHINSKEY, F. G. *Distillation control: for productivity and energy conservation*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1984. ISBN 9780070568945.

SILVEIRA, A. S.; COELHO, A. A. R. Generalized minimum variance control state space design. In: *XVIII Congresso Brasileiro de Automática*. Bonito, MS, Brasil: [s.n.], 2010.

SILVEIRA, A. S.; COELHO, A. A. R. Generalised minimum variance control state-space design. *Control Theory and Applications, IET*, v. 5, n. 15, 2011.

SILVEIRA, A. S.; COELHO, A. A. R. State feedback GMV controller aided by kalman filter estimation. *Automatica*, p. 1–10, 2011. Preprint submitted to Automatica on December 15, 2011. <Disponível em [www.das.ufsc.br/~toninho/gmvss.pdf](http://www.das.ufsc.br/~toninho/gmvss.pdf)>.

SILVEIRA, A. S.; RODRÍGUEZ, J. E. N.; COELHO, A. A. R. Robust design of a 2-DOF GMV controller: A direct self-tuning and fuzzy scheduling approach. *ISA Transactions*, v. 51, n. 1, p. 13–21, 2012. ISSN 0019-0578.

STEVENS, B. L.; LEWIS, F. L. *Aircraft Control and Simulation*. 2. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2003. ISBN 0471371459.

SUMAR, R. R. *Combinação da abordagem estrutura variável na síntese de algoritmos de controle preditivo e nebuloso*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.

TAMURA, T.; MORI, Y. Generalized minimum variance control for MIMO system with multiple time delays. In: *Proc. of the SICE Annual Conference*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 1165–1170.

TIAN, B.; YANG, M.; WANG, H. A new polynomial division algorithm and its application in control performance assessment. In: *Proc. of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 5895–5899.

WELLSTEAD, P. E.; ZARROP, M. B. *Self-tuning systems: Control and Signal Processing*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991.

WOLOVICH, W. A.; FALB, P. L. Invariants and canonical forms under dynamic compensation. *SIAM Journal Control and Optimization*, v. 14, p. 996 – 1008, 1976.

WOOD, R. K.; BERRY, M. W. Terminal composition control of a binary distillation column. *Chemical Engineering Science*, v. 28, p. 1707–1717, 1973.

XIA, H. et al. Performance assessment of MIMO systems based on I/O delay information. *Journal of Process Control*, v. 16, n. 4, p. 373–383, 2006. ISSN 0959-1524.

XU, J.-X.; LIU, C.; HANG, C. C. Combined adaptive and fuzzy control using multiple models. In: *Proc. of the Third IEEE Conference on Fuzzy Systems. 1994 IEEE World Congress on Computational Intelligence*. [S.l.: s.n.], 1994. v. 1, p. 22–29.

YAACOB, S.; MOHAMED, F. A. Online self-tuning controller for induction motor based on generalized minimum variance method. In: *Proc. of the 37th SICE Annual Conference*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 875–878.

YAMAMOTO, T.; FUJII, K.; KANEDA, M. Self-tuning temperature control of a polymerizing reactor. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Control Applications*. [S.l.: s.n.], 1998. v. 2, p. 1110–1114.

YAMAMOTO, T.; SHAH, S. L. Design and experimental evaluation of a multivariable self-tuning PID controller. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings*, v. 151, n. 5, p. 645–652, 2004. ISSN 1350-2379.

YANOU, A.; DENG, M.; INOUE, A. A design method of extended generalized minimum variance control based on state space approach by using a genetic algorithm. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, v. 7, n. 7 B, p. 4183–4194, 2011.

ZHANG, H.; DUAN, G.; XIE, L. Linear quadratic regulation for linear time-varying systems with multiple input delays. *Automatica*, v. 42, n. 9, p. 1465 – 1476, 2006. ISSN 0005-1098.