UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CONJUNTOS COMPACTOS

Simone Milioli da Luz

Florianópolis
2000

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Simone Milioli da Luz

CONJUNTOS COMPACTOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura,para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientador: William Glenn Whitley

Florianópolis
2000

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 28/SCG/2000.

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. William G. Whitley

Prof. Antonio Vladimir Martins

Prof. Eliana Farias e Soares

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho faremos um estudo mais amplo de espaços compactos do que o visto na graduação. Inicialmente estudaremos as propriedades de compacidade em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$. Em seguida procuraremos estender os conceitos e teoremas obtidos em $\mathbb{R}$ para espaços métricos. Para finalizar, faremos um estudo de espaços topológicos compactos em geral, bem como suas relacões com funções contínuas.

Alguns conceitos e teoremas que foram utilizados neste trabalho não serão apresentados, pois já foram demonstrados durante o curso. Portanto, é conveniente que o leitor tenha conhecimento referente aos Cálculos e alguma noção de Análise para facilitar o acompanhamento do texto.

Antes de começar com o desenvolvimento do trabalho, faremos um pequeno resumo do surgimento dos conjuntos compactos.

Algumas definições a respeito de conjuntos compactos aparecem desde o ínicio do século XIX através da Análise. Embora não se usasse o termo compacto naquela época, já se conheciam alguns teoremas que hoje equivalem a compacidade de conjuntos. Como, por exemplo, o Teorema de Bolzano-Weierstrass. Esse Teorema, que diz que todo conjunto infinito e limitado possui um ponto de acumulação, foi descoberto em 1830 por Bernhard Bolzano e tornou-se conhecido somente 50 anos mais tarde quando foi redescoberto por Karl Weierstrass. Aparentemente Cauchy também conhecia este Teorema.

Outro teorema que também está relacionado com conjuntos compactos é o Teorema de Borel-Lebesgue que diz que todo subconjunto fechado de uma reta pode ser coberto por um conjunto de intervalos de modo que se cada ponto do conjunto é ponto interior de pelo menos um dos intervalos, então existe um número finito de intervalos que cobre o conjunto. Esse Teorema foi enunciado em 1872 por Eduard Heine com uma terminologia um pouco diferente, mas tornou-se conhecido apenas em 1895 quando foi reenunciado por Emile Borel.

O conceito de Espaço Métrico foi introduzido apenas em 1906 e a Topologia começou a aparecer através da Análise por volta do ano 1911 e durante o século XX foi um dos ramos da Matemática mais favorecido. Assim, os conjuntos compactos nasceram na Análise e atualmente se encontram na Topologia.

Capítulo 2

Compactos em $\mathbb{R}$

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Uma *cobertura* de X é uma família $\mathcal{C}= (C_\lambda)_{\lambda\in L}$ de conjuntos $C_\lambda \subset \mathbb{R}$ tais que $X \subset \bigcup_{\lambda\in L} C_\lambda$; isto é, para todo $x \in X$, existe algum $\lambda \in$ L tal que $x \in C_\lambda$.

Uma cobertura de $X \subset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$ diz-se *aberta* quando cada conjunto A_λ, $\lambda \in L$, é aberto em $\mathbb{R}$. A cobertura $\bigcup_{\lambda\in L} C_\lambda$ de X é *finita* quando L é um conjunto finito; isto é, L $= \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ e $X \subset C_{\lambda 1} \cup ... \cup C_{\lambda n}$.

Uma *subcobertura* de $\mathcal{C}$ é uma família $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda\in L'}$, $L' \subset L$, tal que ainda se tenha $X \subset \bigcup_{\lambda\in L'} C_\lambda$.

Os intervalos abertos $C_1 = (0, \frac{2}{3})$, $C_2 = (\frac{1}{3}, 1)$ e $C_3 = (\frac{1}{2}, \frac{9}{10})$, constituem uma *cobertura* $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$ do intervalo $X = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. De fato, o intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \subset C_1 \cup C_2 \cup C_3 = (0, 1)$; ou seja $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \subset \bigcup_{\lambda\in L} C_\lambda$ para $L = \{1, 2, 3\}$. Agora, $L' = \{1, 3\}$ determina uma *subcobertura* de $\mathcal{C}$, pois temos que o intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \subset C_1 \cup C_3 = (0, \frac{9}{10})$, ou em outra notação, $X \subset \bigcup_{\lambda\in L'} C_\lambda$.

Definição 1 *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ chama-se compacto quando toda cobertura aberta de K possui subcobertura finita.*

Seja X um subconjunto finito de $\mathbb{R}$. Digamos que $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Se $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda\in L}$ é cobertura aberta de X então cada ponto de X pertence a algum C_λ. Digamos que $a_1 \in C_{\lambda 1}$, $a_2 \in C_{\lambda 2}, ...,$ $a_m \in C_{\lambda m}$. Então $X \subset C_{\lambda 1} \cup C_{\lambda 2} \cup ... \cup C_{\lambda m}$. Como $\{C_{\lambda_1}, ... C_{\lambda_m}\}$ é um conjunto finito, X é um conjunto compacto.

Para mostrarmos que um conjunto X não é compacto basta encontrarmos uma cobertura aberta de X que não contenha subcobertura finita.

A reta $\mathbb{R}$ não é um conjunto compacto. De fato, para $A_n = (-n, n)$, a cobertura aberta $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ não admite subcobertura finita, pois a união de um número finito de intervalos $(-n, n)$ é igual ao intervalo de maior índice, que não é igual $\mathbb{R}$.

O intervalo (a, b) também não é um conjunto compacto. Considere a família de abertos $A_n = (a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n})$. Então $(a, b) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. No entanto a união de um número finito de intervalos $(a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n})$ é igual ao intervalo de maior índice, que não contém o intervalo (a, b).

O teorema a seguir será demostrado para nos auxiliar nas demonstrações dos próximos teoremas.

Teorema 1 (Intervalos Encaixantes) *Seja* $\{I_n; n \geq 1\}$ *uma família de intervalos fechados e limitados tal que* $I_{n+1} \subseteq I_n\ \forall\ n \geq 1$. *Então existe* $x_0 \in \bigcap_{n \geq 1} I_n$. *Além disso, se* $I_n = [a_n, b_n]$ *e* $\lim_n (b_n - a_n) = 0$, x_0 *é único.*

Demonstração: Seja $I_n = [a_n, b_n]$ intervalos não triviais. Como $I_{n+1} \subseteq I_n$, temos que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Ou seja, a seqüência (a_n) é monótona não decrescente e limitada superiormente por $b_k\ \forall\ k \geq 1$. Portanto existe $\lim_n a_n = x_0$ e $x_0 \leq b_n\ \forall\ n \geq 1$. E a seqüência (b_n) é monótona não crescente e limitada inferiormente por x_0. Então existe $\lim_n b_n = y_0$ e $x_0 \leq y_0$. Como $a_n \leq x_0 \leq b_n$ e $a_n \leq y_0 \leq b_n\ \forall\ n$, $x_0 \in I_n\ \forall\ n$ e $y_0 \in I_n\ \forall\ n$. Portanto $\{x_0, y_0\} \subset \bigcap_{n \geq 1}(I_n)$. Além disso, se $\lim_n (b_n - a_n) = 0$, então $x_0 = y_0$, pois $\lim_n (b_n - a_n) = \lim_n a_n - \lim_n b_n = x_0 - y_0$. Suponhamos, que exista $x_1 \in \bigcap_{n \geq 1} I_n$, então $a_n \leq x_1 \leq b_n\ \forall\ n \geq 1$. Daí $x_0 = lim_n a_n \leq x_1$ e $y_0 = \lim_n b_n \geq x_1$ e portanto, $x_0 \leq x_1 \leq y_0$. Ou seja, $x_0 = x_1 = y_0$, então

$\bigcap_{n\geq 1} I_n = \{x_0\}$.

Para que o teorema seja válido é necessário que os intervalos sejam fechados e limitados, caso contrário nada poderíamos afirmar, como veremos:

Considere a seqüência de intervalos $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ tais que $A_1 = (0, 1]$, $A_2 = (0, \frac{1}{2}], ..., A_n = (0, \frac{1}{n}]$. Neste caso temos $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$, no entanto $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \cap ... = \varnothing$, e a seqüência de intervalos não satisfaz a conclusão do teorema.

Considere agora, os intervalos $A_n = [n, +\infty)$ fechados e limitados. Note que $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$, no entanto $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \cap ... = \varnothing$, e a seqüência de intervalos não satisfaz a conclusão do teorema.

Teorema 2 (Borel-Lebesgue) *Seja $F \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado e fechado. Toda cobertura $F \subset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$ de F por meio de abertos admite uma subcobertura finita $F \subset A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_n}$.*

Demonstração: Considere $F = [a, b]$ e $\mathcal{F}$ uma família de abertos tal que $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$. Suponhamos que não seja possível obter uma subfamília finita $A_1,\ A_2, ...,\ A_k$ tal que $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Consideremos os intervalos $[a, \frac{a+b}{2}]$ e $[\frac{a+b}{2}, b]$. Pelo menos um deles só é coberto por uma infinidade de abertos de $\mathcal{F}$. Seja $[a_1, b_1]$ tal intervalo. Consideremos agora os intervalos $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ e $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. Da mesma forma um deles, digamos $[a_2, b_2]$ não pode ser coberto por uma subfamília finita de abertos de $\mathcal{F}$. Prosseguindo desta forma obtemos uma coleção de intervalos $[a_n, b_n]$ tal que:

i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset [a, b]\ \forall\ n \geq 1$;

ii) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$; e

iii) cada $[a_n, b_n]$ só pode ser coberto por uma infinidade de abertos de $\mathcal{F}$.

Pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes, existe $x_0 \in \bigcap_{n\geq 1}[a_n, b_n]$. Assim podemos fixar $\lambda_0 \in L$ tal que $x_0 \in A_{\lambda_0} \in \mathcal{F}$. Como A_{λ_0} é aberto, existe

$r \geq 0$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A_{\lambda_0}$.
Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{2^k} < r$. Então $x_0 - a_k \leq b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} < r$ e $b_k - x_0 \leq b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} < r$, ou seja, $[a_k, b_k] \subset (x_0 - r,\ x_0 + r) \subset A_{\lambda_0}$. Desta forma encontramos uma subfamília finita que cobre $[a_k, b_k]$, que é um absurdo. Portanto a suposição inicial está errada; ou seja, dada uma família de abertos que contém F é possível obter uma subfamília finita que ainda contém F. Agora, sejam F qualquer subconjunto fechado e limitado e $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de F. Sabemos que existe um intervalo $[a, b]$ tal que $F \subseteq [a, b]$. Seja $B = ([a, b] - F)$. Então B é aberto e $[a, b] \subset (\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda) \cup B$. Conforme mostramos acima, existem $[a, b] \subset A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_n} \cup B$. Mas B não contém pontos de F e $\{A_{\lambda_1}, ..., A_{\lambda_n}\}$ é um subcobertura finita de F. Portanto F é compacto.

Pelo Teorema 2 temos que todo intervalo fechado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ é compacto. Gostaríamos de mostrar um exemplo mais interessante de um intervalo $[a, b]$ que satisfaz o teorema.

O conjunto de Cantor ou conjunto ternário é um conjunto compacto que não contém intervalo aberto algum e portanto seu interior é vazio, como veremos a seguir. Considere o intervalo fechado e limitado $[0, 1]$. Agora retiramos a terça parte central aberta; ou seja, retiramos o intervalo aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Seja I_1 tal intervalo. Dos intervalos restantes $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$ retiramos a terça parte central aberta de cada um dos intervalos, isto é, os intervalos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ e $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Sejam I_2 e I_3 respectivamente os intervalos retirados. Restam então os quatro intervalos fechados $[0, \frac{1}{9}], [\frac{2}{3}, \frac{3}{9}], [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}]$ e $[\frac{8}{9}, 1]$. Retiramos a terça parte central aberta de cada intervalo restante indefinidamente. Consideremos os intervalos abertos retirados como $I_1, I_2, ..., I_n, ...$, então o conjunto de Cantor é $K = [0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$; ou seja, é o conjunto dos pontos que não forem retirados ao longo das etapas. Como cada intervalo retirado é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$ e também em $[0, 1]$, o conjunto de Cantor é um subconjunto fechado em $[0, 1]$ e limitado, portanto é um conjunto compacto.

Teorema 3 (Bolzano-Weierstrass) *Todo subconjunto infinito e limitado $X \subset \mathbb{R}$ possui um ponto de acumulação.*

Demonstração: Como X é um conjunto limitado, existem $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$ tal que $X \subset [a, b]$. Sendo X um conjunto infinito então pelo menos um dos intervalos $[a, \frac{a+b}{2}]$ e $[\frac{a+b}{2}, b]$ contém uma infinidade de pontos de X. Seja $[a_1, b_1]$ tal intervalo. Analogamente pelo menos um dos intervalos $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ e $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ contém uma infinidade de pontos de X. Considere $[a_2, b_2]$ o intervalo desejado. Prosseguindo desta forma obtemos uma família de intervalos tal que:

i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset [a, b]\ \forall\, n \geq 1$;

ii) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$; e

iii) cada $[a_n, b_n]$ contém uma infinidade de pontos de X.

Pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes temos que existe $x_0 \in \bigcap_{n\geq 1} [a_n, b_n]$. Afirmamos que x_0 é ponto de acumulação de X. De fato, se $r \geq 0$, consideremos $B(x_0, r)$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{b-a}{2^n} < r$. Sendo que $x_0 \in [a_n, b_n]$ e r é maior que o comprimento de $[a_n, b_n]$, então $[a_n, b_n] \subset B(x_0, r)$. Como $[a_n, b_n] \cap X \subseteq B(x_0, r) \cap X$ contém uma infinidade de pontos de X, $x_0 \in X'$.

Teorema 4 *Toda seqüência limitada de números reais possui uma subseqüência convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência de números reais tal que $a \leq x_n \leq b\ \forall\, n \geq 1$. Consideremos os intervalos $[a, \frac{a+b}{2}]$ e $[\frac{a+b}{2}, b]$. Pelo menos um destes intervalos contém os termos x_n para uma infinidade de índices n. Seja $[a_1, b_1]$ tal intervalo. Considere agora os intervalos $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ e $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. Pelo menos um destes intervalos contém uma infinidade de termos x_n. Seja $[a_2, b_2]$ tal intervalo. Prosseguindo desta maneira temos $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_k \leq ... \leq b_k \leq b_{k-1} \leq ... \leq b_2 \leq b_1$, de modo que:

i) $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k] \subset [a, b]\ \forall\, k \geq 1$;

ii) $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$ e $\lim_k (b_k - a_k) = 0$; e

iii) cada $[a_k, b_k]$ contém uma infinidade de termos da seqüência (x_n).

Pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes, existe um único $x_0 \in \bigcap_{k\geq 1}[a_k, b_k]$. Afirmamos que x_0 é limite de uma subseqüência de (x_n). De fato, existem $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$, $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ com $n_2 \geq n_1$, e $x_{n_3} \in [a_3, b_3]$ com $n_3 \geq n_2$. Em geral existe $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ com $n_k \geq n_{k-1}$. Agora $|x_{n_k} - x_0| \leq \frac{b-a}{2^k}$, pois $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ e $x_0 \in [a_l, b_l]\ \forall\ l$. Seja $\varepsilon \geq 0$ e $k \in \mathbb{N}$ com $2^k > \frac{b-a}{\varepsilon}$. É possível obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n_k} - x_0| \leq \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon\ \forall\ k \geq k_0$. Ou seja, $\lim_k x_{n_k} = x_0$. Portanto a subseqüência converge para x_0.

Teorema 5 *As seguintes afirmações a respeito de um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ são eqüivalentes.*

1. *K é limitado e fechado;*
2. *toda cobertura aberta de K possui subcobertura finita;*
3. *todo subconjunto infinito de K possui um ponto de acumulação de K;*
4. *toda seqüência de pontos de K possui uma subseqüência que converge para um ponto de K.*

Demonstração: Provaremos que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$) Sendo K fechado e limitado, o Teorema 2 nos garante que toda cobertura aberta de K possui subcobertura finita.

$2 \Rightarrow 3$) Seja $X \subset K$ um subconjunto sem ponto de acumulação em K, isto é, $X' \cap K = \varnothing$. Então, para cada $x \in K$ temos r_x tal que $B(x, r_x) \cap X = \{x\}$ se $x \in X$ e $B(x, r_x) \cap X = \varnothing$ se $x \notin X$. Denotemos $B(x, r_x) = I_x$, então $K \subset \bigcup_{x \in X}(I_x)$. De acordo com a afirmação 2 podemos extrair da cobertura de K uma subcobertura finita tal que $K \subset I_{x_1} \cup I_{x_2} \cup \ldots \cup I_{x_n}$. Portanto X também está contido numa reunião finita. Para cada $x \in X$, o único intervalo que contém x é o próprio I_x; ou seja, X é finito pois em cada I_x há somente um x. Portanto se K cumpre as condições de 2, ele só não possui ponto de acumulação quando X é finito. Logo para X infinito, X possui um ponto de acumulação.

$3 \Rightarrow 4)$ Dada uma seqüência (x_n) de pontos de K, há duas possibilidades para o conjunto dos valores x_n, ou o conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ é finito ou infinito. Se X é finito, existe algum valor $a = x_{n_1} = x_{n_2} = ... = x_{n_k} = ...$ que se repete infinitas vezes, e portanto nos dá uma subseqüência constante que converge para a. No caso de X ser infinito, pela hipótese, o conjunto K possui um ponto de acumulação de X, digamos $b \in X' \cap K$. Então para todo $k \in \mathbb{N}$, existe x_{n_k} tal que $x_{n_k} \in (b - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k})$. E $(b - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k})$ contém uma infinidade de termos x_i com índices arbitrariamente grandes. Portanto b é o limite da subseqüência (x_{n_k}).

$4 \Rightarrow 1)$ Se K for um conjunto ilimitado (digamos superiormente), tomamos um $x_1 \in K$ e observemos que sempre é possível obter $x_2 \in K$ tal que $x_2 > x_1 + 1$. Assim encontramos uma seqüência (x_n) de pontos de K com $x_{n+1} > x_n + 1$. Portanto, toda subseqüência de (x_n) é não convergente, pois é ilimitada. Portanto K é limitado. Agora se K não for fechado, existe uma seqüência de pontos (x_n) de K com $lim_n x_n = x \notin K$ e desta forma qualquer subseqüência converge para $x \notin K$. Portanto K deve ser fechado.

Quando um conjunto cumpre uma das condições do Teorema 5, conseqüentemente cumpre todas as outras. As condições do teorema implicam na compacidade do conjunto.

Se A e B são subconjuntos do $\mathbb{R}$ tal que A é compacto e B é fechado, Então $A \cap B$ é compacto. Com efeito, sendo A um subconjunto compacto, é fechado e limitado. Sabemos que $A \cap B \subset A$, então como A é limitado, $A \cap B$ também é. Sendo A e B subconjuntos fechados, $A \cap B$ também é. Portanto como $A \cap B$ é fechado e limitado, pelo Teorema 5, $A \cap B$ é um subconjunto compacto.

Capítulo 3

Espaços Métricos Compactos

Sabemos que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico e apresentamos no capítulo anterior alguns conceitos de compacidade em $\mathbb{R}$. Neste capítulo, faremos um estudo de espaços métricos em geral, e apresentaremos resultados de espaços métricos em geral, semelhantes aos encontrados em $\mathbb{R}$.

Definição 2 *Um espaço métrico (M, d) é compacto se, para toda cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ existe uma subcobertura finita $\{A_{\lambda_1}, ..., A_{\lambda_k}\}$ tal que $M \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_{\lambda_i}$; isto é, um espaço métrico M diz-se compacto quando toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita.*

Teorema 6 *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto. Reciprocamente, um subconjunto compacto de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração: Sejam M um espaço métrico compacto e F um subconjunto fechado de M. Dada uma cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de F, $M = \cup A_\lambda \cup (M - F)$. Portanto $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L} \cup \{M - F\}$ é uma cobertura aberta de M. Como M é compacto por hipótese, extraímos da cobertura aberta uma subcobertura finita $M = A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_n} \cup (M - F)$. Como nenhum ponto de F pertence a $M - F$, então $F \subset A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_n}$. Logo F é compacto.
Reciprocamente, seja $K \subset M$ um subconjunto compacto de um espaço métrico qualquer. Suponhamos que K não seja fechado em M. Neste caso

existe $x \in \overline{K} - K$. Pondo para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = M - \overline{B(x, \frac{1}{n})}$, temos uma cobertura aberta $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de K. De fato, $\bigcap_{n \geq 1} \overline{B(x, \frac{1}{n})} = \{x\}$ e $x \notin K$, portanto $K \subset M - \{x\} = \cup A_n$. Como $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$, a reunião de um número finito de conjuntos A_n é igual ao de maior índice. Como nenhum A_n contém K, pois como $x \in \overline{K}$, cada $\overline{B(x, \frac{1}{n})}$ contém algum ponto de K, a cobertura aberta $K = \cup A_n$ não admite subcobertura finita, o que contradiz a hipótese de K ser compacto. Portanto K é um subconjunto fechado.

Um subconjunto de um espaço métrico compacto não é necessariamente compacto. Por exemplo, o intervalo aberto $(0,1)$ é um subconjunto do intervalo $[0,1]$ que é compacto, no entanto $(0,1)$ não é compacto como já foi visto no capítulo 2.

Teorema 7 *Qualquer interseção* $K = \bigcap_{\lambda \in L} K_\lambda$ *de compactos* $K_\lambda \subset M$ *é compacta.*

Demonstração: Seja $K = \bigcap_{\lambda \in L} K_\lambda$, onde K_λ é um subconjunto compacto em M. Neste caso, cada K_λ é fechado e portanto a interseção K é um subconjunto fechado em M e portanto em cada K_λ. Agora, seja $\lambda_0 \in L$, então $\bigcap_{\lambda \in L} K_\lambda \subset K_{\lambda_0}$. Como K_{λ_0} é compacto e K é fechado, pelo Teorema 6, K também é compacto.

Teorema 8 *Todo espaço métrico compacto é limitado.*

Demonstração: Seja M um espaço métrico compacto. Para cada ponto $x \in M$, seja $A_x = B(x, 1)$. Então $\{A_x\}_{x \in M}$ é uma cobertura aberta de M, pois $M \subset \bigcup_{x \in M} A_x$. Sendo M compacto, podemos extrair uma subcobertura finita de M tal que $M \subset A_{x_1} \cup ... \cup A_{x_m}$. Como cada $A_{x_i}, 1 \leq i \leq m$ é limitado então a reunião finita $A_{x_1} \cup ... \cup A_{x_n}$ também é. Portanto M é limitado.

A recíproca do Teorema 8 não é válida. Note que, se considerarmos um conjunto infinito M com a métrica zero-um, então M é limitado, pois $\{x\}_{x \in M}$

é uma cobertura de M. No entanto, nenhuma subcobertura finita contém M.

Se $K, N \subset M$ são subconjuntos compactos, então $K \cup N$ é compacto. Com efeito, dada uma cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de $K \cup N$, então $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ e $N \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Como K é compacto, existe uma subcobertura finita com $K \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} ... \cup A_{\lambda_n}$. Analogamente, $N \subset A_{\lambda_{n+1}} \cup A_{\lambda_{n+2}} ... \cup A_{\lambda_p}$, onde $\{\lambda_1, ..., \lambda_n, ..., \lambda_p\}$ não são necessariamente diferentes. Portanto temos $K \subset A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_p}$. Ou seja, $K \cup N$ é compacto.

Segue do exemplo anterior que a reunião finita de subconjuntos compactos é compacta. No entanto a reunião infinita de conjuntos compactos pode não ser compacta. Note que todo conjunto é formado pela reunião de seus pontos que são compactos. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{Z}$ não é compacto, pois não é limitado, por outro lado, um conjunto formado por um número inteiro é um conjunto finito e portanto compacto.

A noção de espaço compacto pode também ser formulada em termos de conjuntos fechados.

Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de abertos em M. Então os complementares $F_\lambda = M - A_\lambda$ formam uma família de fechados em M. E ainda, $M = \cup A_\lambda \Leftrightarrow \cap F_\lambda = \varnothing$.

Portanto um espaço métrico é compacto se, e somente se, toda família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de fechados com interseção vazia possui uma subfamília finita com interseção vazia: $F_{\lambda_1} \cap ... \cap F_{\lambda_n} = \varnothing$. De fato, seja M um espaço métrico compacto. Suponhamos $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \varnothing$. Então pela lei de De Morgan temos, $M = \varnothing^c = (\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda)^c = \bigcup_{\lambda \in L} {F_\lambda}^c$. Como $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de fechados, cada F_λ^c é aberto e assim $\{{F_\lambda}^c\}$ é cobertura aberta. Como M é um espaço compacto por hipótese, então existem ${F_{\lambda_1}}^c, ..., {F_{\lambda_n}}^c \in \{{F_\lambda}^c\}$ tal que $M \subset {F_{\lambda_1}}^c \cup ... \cup {F_{\lambda_n}}^c$. Assim, pela lei de De Morgan sabemos que, $\varnothing = M^c = ({F_{\lambda_1}}^c \cup ... \cup {F_{\lambda_n}}^c)^c = {F_{\lambda_1}}^{cc} \cap ... \cap {F_{\lambda_n}}^{cc} = F_{\lambda_1} \cap ... \cap F_{\lambda_n}$. Ou seja, $F_{\lambda_1} \cap ... \cap F_{\lambda_n} = \varnothing$.

Reciprocamente, seja $\{F_\lambda\}$ uma cobertura aberta de M. Pela lei de De Morgan, $\varnothing = M^c = (\bigcup_{\lambda\in L} F_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda^c$. Como cada F_λ é aberto, então $({F_\lambda}^c)_{\lambda\in L}$ é uma família de fechados e tem interseção vazia. Logo por hipótese existem ${F_{\lambda_1}}^c, ..., {F_{\lambda_n}}^c \in \{{F_\lambda}^c\}_{\lambda\in L}$ tal que ${F_{\lambda_1}}^c \cap ... \cap {F_{\lambda_n}}^c = \varnothing$. Assim, $M = \varnothing^c = ({F_{\lambda_1}}^c \cap ... \cap {F_{\lambda_n}}^c)^c = {F_{\lambda_1}}^{cc} \cup ... \cup {F_{\lambda_n}}^{cc} = F_{\lambda_1} \cup ... \cup F_{\lambda_n}$. Portanto M é compacto, pois toda cobertura aberta de M possui subcobertura finita.

Definição 3 *Diz-se que uma família $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ tem a propriedade da interseção finita se para todo subconjunto finito $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset L$ tem-se, $F_{\lambda_1} \cap ... \cap F_{\lambda_n} \neq \varnothing$.*

Um exemplo de uma família com a propriedade de interseção finita é a classe $A_n = (-\infty, n]$. Note que $\bigcap_{\lambda\in\mathbb{Z}}(A_n) = \varnothing$, mas qualquer subclasse finita de A_n tem uma interseção não vazia, satisfazendo a condição.

Podemos formalizar a discussão anterior no seguinte teorema.

Teorema 9 *Um espaço métrico M é compacto se, e somente se, para toda família $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ de fechados com a propriedade de interseção finita, tem-se $\bigcap_{\lambda\in L}(F_\lambda) \neq \varnothing$.*

Teorema 10 *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.*

Demonstração: Sejam $f : M \to N$ contínua e $K \subset M$ compacto. Dada uma cobertura aberta $f(K) \subset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$, obtemos uma cobertura aberta $K \subset \bigcup_{\lambda\in L} f^{-1}(A_\lambda)$. Sendo K compacto, podemos extrair uma subcobertura finita $K \subset f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup f^{-1}(A_{\lambda_2}) \cup ... \cup f^{-1}(A_{\lambda_n})$. Daí temos que $f(K) \subset ff^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup ff^{-1}(A_{\lambda_2}) \cup ... \cup ff^{-1}(A_{\lambda_n}) \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup ... \cup A_{\lambda_n}$. Portanto $f(K)$ é compacto.

O círculo $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ é compacto, pois é a imagem pela aplicação contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (cos\ t, sen\ t)$ de qualquer intervalo compacto $[a, b]$ com $b - a \geq 2\pi$

Teorema 11 *Se M é compacto, toda aplicação contínua $f : M \to N$ é fechada; isto é, se um subconjunto de M é fechado, então a sua imagem é um subconjunto fechado de N.*

Demonstração: Sejam M um espaço métrico compacto, $f : M \to N$ contínua e F um subconjunto fechado de M. Então pelo Teorema 6, temos que o subconjunto F é compacto. Logo $f(F)$ também é compacto, como mostramos no Teorema 10 Portanto $f(F)$ é fechado em N.

Definição 4 *Sejam M e N espaços métricos. Um homeomorfismo de M sobre N é uma bijeção contínua $f : M \to N$ cuja inversa $f^{-1} : N \to M$ também é contínua. Neste caso diz-se que M e N são homeomorfos.*

Teorema 12 *Se M é compacto, toda bijeção contínua $f : M \to N$ é um homeomorfismo.*

Demonstração: Seja M compacto e $f : M \to N$ contínua e bijetiva. Denotemos $f^{-1} : N \to M$ por g. Devemos mostrar que g é contínua: isto é, se G é um subconjunto fechado em M então $g^{-1}(G)$ é fechado em N. Mas $g^{-1}(G) = (f^{-1})^{-1}(G) = f(G)$ e $f(G)$ é fechado pelo Teorema 11. Portanto g é contínua e M e N são homeomorfos.

A função $f : (0, 3\pi) \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (cos\ x, sen\ x), & \text{se } x \in [0, 2\pi] \\ (1, x - 2\pi), & \text{se } x \in (2\pi, 3\pi] \end{cases}$$

não satisfaz o teorema pois M não é compacto. Observe que uma vizinhança de 2π é um intervalo aberto, no entanto uma vizinhança de $f(2\pi)$ é um "Y".

Teorema 13 *Se M é compacto, então toda aplicação contínua $f : M \to N$ é limitada.*

Demonstração: Sejam M compacto e $f : M \to N$ uma função contínua, então pelo Teorema 10, $f(M) \subset N$ é compacto. Logo, sendo $f(M)$ compacto é limitado.

A função contínua $f : (-1, +1) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$, não é limitada. Isto pode ocorrer porque seu domínio não é um conjunto fechado e, portanto não é compacto.

Teorema 14 *Se M é compacto, toda função real contínua $f : M \to \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em M. Mais precisamente: existem $x_0, x_1 \in M$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in M$.*

Demonstração: Sejam M compacto e $f : M \to \mathbb{R}$ contínua, então pelo Teorema 10, temos que $f(M)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Portanto é fechado e limitado. Daí, existem $a = inf\ f(M)$ e $b = sup\ f(M)$, tais que $a \in f(M)$ e $b \in f(M)$. Ou seja, existem x_0 e $x_1 \in M$ tais que $f(x_0) = a$ e $f(x_1) = b$. Portanto $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in M$.

A função $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, é contínua e limitada e assume seu valor máximo no ponto $x = 0$. Mas, não existe um ponto $x \in [0, +\infty)$ tal que $g(x) = 0 = inf\{g(x); x \in [0, +\infty)\}$. Isto pode ocorrer porque seu domínio é fechado mas não é limitado.

O Teorema a seguir é conseqüência imediata do Teorema 14.

Teorema 15 *Sejam M compacto e $f : M \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in M$. Então existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$ para todo $x \in M$.*

Demonstração: Sendo M compacto e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua então $f(M)$ é compacto e portanto é fechado e limitado. Portanto, existe $c = inf\{f(x); x \in M\}$ tal que $c \in f(M)$. Temos $c > 0$ pois $f(x) > 0$ para todo $x \in M$. Logo $c > 0$ e $f(x) \geq c$ para todo $x \in M$.

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ é contínua e $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas para $c > 0$, podemos obter $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < c$.

Isto ocorre porque $\mathbb{R}$ não é conjunto compacto.

Definição 5 *Diz-se que um subconjunto K de um espaço métrico M é totalmente limitado quando para todo $\varepsilon > 0$, existir um conjunto finito $F = \{a_1, ..., a_n\}$ em M tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \varepsilon)$.*

Teorema 16 *Em qualquer espaço métrico M, um conjunto totalmente limitado é limitado*

Demonstração: Seja M um espaço métrico totalmente limitado, então dado $\varepsilon = 1$, existe $x_1, ..., x_n \in M$ tais que para todo ponto $x \in M$, $d(x, x_i) < \varepsilon$. Assim $M \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$ é limitado pois é a união finita de subconjuntos limitados.

A recíproca do Teorema 16 não é válida. Observe que no espaço $S = \{(x_n); |x_n| \leq 1\}$ com a métrica $d((x_n), (y_n)) = sup\ |x_n - y_n|$, o conjunto fechado $F = \{a_1, a_2, ...\}$, onde:

$a_1 = (1, 0, 0, 0, ...)$

$a_2 = (0, 1, 0, 0, 0, ...)$

$\vdots$

$a_n = (\underbrace{0, 0, 0, ..., 0}_{n-1 \text{ vezes}}, 1, 0, ...)$

$\vdots$

é limitado, pois $d(a_n, a_m) = 1$. No entanto F não é totalmente limitado, pois para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, qualquer bola $B(a, \varepsilon)$ em S não pode conter mais do que um ponto de F. Então para este ε não se pode obter um conjunto finito $F = \{a_1, ..., a_n\}$ em S tal que $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \varepsilon)$.

Como todo conjunto totalmente limitado é limitado, pelo exemplo anterior percebemos que ser totalmente limitado é uma condição mais forte do que ser limitado.

No entanto quando nosso espaço métrico é a reta $\mathbb{R}$, temos que para todo subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ limitado, então X é totalmente limitado. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ tomamos $0 < \delta < \varepsilon$ e exprimimos a reta como a reunião dos intervalos $I_n = [n.\delta, (n+1).\delta]$, todos de comprimento δ. Sendo limitado, X está contido numa reunião finita desses intervalos. Analogamente, decompondo $\mathbb{R}^n$ como a reunião de pequenos paralelepípedos $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ temos que todo subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ é totalmente limitado.

Definição 6 *Uma seqüência(x_n) num espaço métrico M chama-se uma seqüência de Cauchy quando, para todo$\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica $d(x_m, x_n) < \varepsilon$; ou seja, para índices m e n grandes a distância entre os termosx_n e x_m é pequena.*

Toda subseqüência de uma seqüência de Cauchy é também de Cauchy. Ser de Cauchy é uma propriedade intrínseca da seqüência, enquanto convergência não é. Isto é, se $M \subset N$ uma seqüência de pontos $x_n \in M$ é de Cauchy em M se, e somente se, é de Cauchy em N.

Teorema 17 *Toda seqüência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy num espaço métrico M. Dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > n_0$ então $d(x_m, x_n) < 1$. Em particular para $n > n_0$ temos $d(x_n, x_{n_0}) < 1$; ou seja, $x_n \in B(x_{n_0}, 1)$. Sabemos que $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \{x_1, x_2, ..., x_{n_0-1}\} \cup \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, ...\}$. Como $\{x_1, x_2, ..., x_{n_0+1}\}$ é finito e $B(n_0, 1)$ é limitada, então a seqüência (x_n) é limitada.

Teorema 18 *Uma seqüência de Cauchy que possui uma subseqüência convergente é convergente (e tem o mesmo limite que a subseqüência)*

Demonstração: Sejam (x_n) uma seqüência de Cauchy e (x_{n_k}) uma subseqüência que converge para um ponto$a$. Neste caso, $lim_n x_{n_k} = a$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $k > p$. Sendo (x_n) uma seqüência de Cauchy, existe$q \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > q$ temos $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Agora, seja $n_0 = max\{n_p, q\}$. Então para todo $n > n_0$ e $n_k > n_0$ temos $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Portanto $lim_n x_n = a$.

Definição 7 *Diremos que um espaço métrico M é completo quando toda seqüência de Cauchy em M for convergente.*

Um dos exemplos mais importantes de espaço métrico completo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais com a métrica usual. Note que, dada uma seqüência (x_n) de Cauchy em $\mathbb{R}$, então (x_n) é limitada, como mostramos no Teorema 10. Se para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$, então $X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_n \supset ....$ Tomando $a_n = inf\ X_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ temos $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b = sup\ X_1$. Então (a_n) é uma seqüência de números reais monótona e limitada. Portanto (a_n) é convergente. Neste caso existe $a = lim_n a_n$; ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_m \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ $\forall\ m > n_1$. Como $a_m = inf X_m$, existe $n > m$ e portanto $n > n_1$ tal que $a_m \leq x_n < a + \varepsilon$; isto é, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Portanto $lim_n x_n = a$. Ou seja, (x_n) é convergente em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é completo.

Teorema 19 *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico são equivalentes.*

1. *M é compacto;*
2. *todo subconjunto infinito de M possui um ponto de acumulação;*
3. *toda seqüência de pontos de M possui uma subseqüência convergente;*
4. *M é fechado e totalmente limitado.*

Demonstração: Provaremos que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$) Suponhamos M compacto e seja $X \subset M$ um subconjunto sem ponto de acumulação; isto é, $X' = \varnothing$. Então $\overline{X} = X$; ou seja, X é fechado em M. Portanto X é compacto. Agora, como nenhum $x \in X$ é ponto de acumulação, X é discreto e portanto finito. Logo para X infinito, X possui um ponto de acumulação.

$2 \Rightarrow 3$) Dada uma seqüência (x_n) em M, há duas possibilidades para o conjunto dos valores x_n; ou o conjunto $X = \{x_1, ..., x_n, ...\}$ é finito ou infinito. Se o conjunto X é finito então, existe algum valor a tal que se tenha $a = x_{n_1} = ... = x_{n_k} = ...$ que se repete infinitas vezes e portanto a subseqüência (x_{n_k}) converge para a. Se o conjunto $X = \{x_1, ..., x_n, ...\}$ é infinito, então, por hipótese, possui um ponto de acumulação a. Então toda bola centrada em a contém uma infinidade de termos x_n com índices arbitrariamente grande, logo a é limite de uma subseqüência de (x_n).

3 $\Rightarrow$ 4) Suponhamos que toda seqüência em M possui subseqüência convergente. Mostraremos que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, podemos exprimir M como a reunião de um número finito de bolas de raio ε. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $x_1 \in M$. Se $M = B(x_1, \varepsilon)$, o resultado está provado. Caso contrário, existe $x_2 \in M$ tal que $d(x_2, x_1) \geq \varepsilon$. Se $M = B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$ o resultado está provado. Se não, existe $x_3 \in M$ tal que $d(x_3, x_2) \geq \varepsilon$ e portanto $d(x_3, x_1) \geq \varepsilon$. Prosseguindo desta maneira, ou encontramos n tal que $M = B(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup B(x_n, \varepsilon)$, ou então obtemos uma seqüência de (x_n) tal que $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ para $m \neq n$. Neste caso, nenhuma subseqüência de (x_n) seria convergente. Portanto isto não ocorre e M é totalmente limitado.

4 $\Rightarrow$ 1) Seja M um espaço métrico fechado e totalmente limitado. Suponhamos por absurdo, que existe uma cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$, que não possui subcobertura finita. Sendo M totalmente limitado, podemos escrever M como a reunião de um número finito de subconjuntos fechados, cada um com diâmetro menor do que 1. Pelo menos um desses subconjuntos, digamos X_1 é tal que $X_1 \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$ não admite subcobertura finita. Agora, X_1 também é totalmente limitado, logo pode ser expresso como a reunião finita de subconjuntos fechados, cada um com diâmetro menor que $\frac{1}{2}$. Ao menos um desses conjuntos, digamos X_2, não pode ser coberto por um número finito de $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$. Prosseguindo desta maneira obtemos uma seqüência $X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_n \supset ...$ de subconjuntos fechados de M, onde diâmetro de $X_n < \frac{1}{n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e nenhum X_n pode ser coberto por um número finito de $\{A_\lambda\}$. Em particular, nenhum X_n é vazio. Tomemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in X_n$. Como o diâmetro de X_n tende a zero, (x_n) é de Cauchy e $lim_n x_n = a \in M$, pois M é fechado. Para algum $\lambda \in L$ tem-se $a \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, deve-se ter $B(a, \frac{1}{n}) \subset \{A_\lambda\}$, para algun n. Temos $a \in X_n$ e diam $X_n < \frac{1}{n}$, então $X_n \subset B(a, \frac{1}{n})$, daí $X_n \subset A_\lambda$, o que é uma contradição. Portanto M é compacto.

Note que, no Teorema 5 do capítulo anterior, o fato de M ser fechado e limitado implicava na compacidade do conjunto. No entanto, para espaços métricos é preciso que M seja totalmente limitado, além de ser fechado.

Definição 8 *O produto cartesiano dos conjuntos M e N é o conjunto $M \times N$ cujos elementos s ão todos os pares ordenados (x, y) cuja primeira coordenada pertence a M e a segunda a N. Portanto $M \times N = \{(x, y);\ x \in M \text{ e } y \in N\}$.*

Definiremos então, a métrica do produto como:

$$d((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = d_M(x_1, x_2) + d_N(y_1, y_2)$$

Mostraremos que d é métrica:

Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in M$, então:

1) Se $d((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = d_M(x_1, x_2) + d_N(y_1, y_2) = 0$, então
$d_M(x_1, x_2) = 0$ e $d_N(y_1, y_2) = 0$.
Como d_M e d_N são métricas $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Portanto $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
Agora se $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, então $d_M(x_1, x_2) = 0$ e $d_N(y_1, y_2) = 0$.
Logo, $0 = d_M(x_1, y_1) + d_N(x_2, y_2) = d((x_1, y_1)(x_2, y_2))$.

2) $d((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = d_M(x_1, x_2) + d_N(y_1, y_2)$.
Como d_M e d_N são métricas, então $d_M(x_1, x_2) \geq 0$ e $d_N(y_1, y_2) \geq 0$.
Portanto, $d_M(x_1, x_2) + d_N(y_1, y_2) \geq 0$

3) $d((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = d_M(x_1, x_2) + d_N(y_1, y_2)$. Como d_M e d_N são métricas, então $d_M(x_1, x_2) = d_M(x_2, x_1)$ e $d_N(y_1, y_2) = d_N(y_2, y_1)$.
Portanto, $d((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = d((x_2, y_2)(x_1, y_1))$.

4) $d((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = d_M(x_1, x_2) + d_N(y_1, y_2)$.
Agora, $d_M(x_1, x_2) \leq d_M(x_1, x_3) + d_M(x_3, x_2)$, e
$d_N(y_1, y_2) \leq d_N(y_1, y_3) + d_N(y_3, y_2)$. Portanto:
$d((x_1, y_1)(x_2, y_2)) \leq d_M(x_1, x_3) + d_N(y_1, y_3) + d_M(x_3, x_2) + d_N(y_3, y_2)$.
Logo, $d((x_1, y_1)(x_2, y_2)) \leq d((x_1, y_1)(x_3, y_3)) + d((x_3, y_3)(x_2, y_2))$.

Portanto d é métrica.

Seja $z_n = (x_n, y_n)$ uma seqüência em $\mathbb{R}^2$. Mostremos que a seqüência (z_n) converge para (x, y) se, e somente se (x_n) converge para x e (y_n) converge para y. Se a seqüência (z_n) converge para z em $\mathbb{R}^2$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(z_n, z) < \varepsilon$ sempre que $n \geq n_0$. Mas $\varepsilon > d(z_n, z) = d(x_n, x) + d(y_n, y) > d(x_n, x)$. Portanto, a seqüência (x_n) converge para x.
Analogamente, mostramos que (y_n) converge para y.
Reciprocamente, seja (x_n) uma seqüência que converge para x e (y_n) convergindo para y, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_1$ implica $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. E como (y_n) converge para y então para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_2$ implica $d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ e $n \geq n_0$, então: $d(z_n, z) = d(x_n, x) + d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Portanto (z_n) converge para (x, y).

A situação é análoga quando se considera a métrica Euclidiana em $\mathbb{R}^2$.

Seja $z_n = (x_n, y_n)$ uma seqüência em $\mathbb{R}^2$ com a métrica Euclidiana usual. Mostremos que $lim_n z_n = z = (x, y)$ se, e somente se, $lim_n x_n = x$ e $lim_n y_n = y$. Seja $lim_n z_n = z = (x, y)$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon$ sempre que $n \geq n_0$, então:
$|x_n - x| = \sqrt{|x_n - x|^2} \leq \sqrt{|x_n - x|^2 + |y_n - y|^2} = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$.
Como $\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = |\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}| \leq \varepsilon|$, então:
$lim_n x_n = x$.
Analogamente, mostramos que $lim_n y_n = y$.
Reciprocamente, sejam $lim_n x_n = x$ e $lim_n y_n = y$. Como $lim_n x_n = x$, temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_1$ implica $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. E como $lim_n y_n = y$ então para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_2$ implica $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $n_3 = max\{n_1, n_2\}$ e $n \geq n_3$, então:
$|\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}| < |\sqrt{(x_n - x)^2}| + |\sqrt{(y_n - y)^2}| = |x_n - x| + |y_n - y|$ e $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Logo, $|\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$; ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $|\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}| < \varepsilon$ sempre que $n \geq n_3$. Portanto $lim_n(x_n, y_n) = (x, y)$.

No que segue, sempre usaremos a métrica "produto" a não ser que se digamos o contrário.

Teorema 20 *O produto cartesiano de dois espaços métricos compactos é um espaço métrico compacto.*

Demonstração: Sejam M, N espaços métricos compactos. Dada arbitrariamente uma seqüência de pontos $z_n = (x_n, y_n) \in M \times N$, a seqüência das primeiras coordenadas $x_n \in M$ possui subseqüência convergente; isto é, existe $x_0 \in M$ tais que $\lim\limits_{k \in \mathbb{N}} x_{n_k} = x_0$. Por sua vez, a seqüência $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ em N possui também uma subseqüência convergente. Seja (y_m) tal subseqüência, então, existe $y_0 \in N$ tais que $\lim\limits_{m \in \mathbb{N}} y_m = y_0$. É claro que a subseqüência (x_m) da seqüência (x_{n_k}) também converge para x_0, ou seja, $\lim\limits_{m \in \mathbb{N}} x_m = x_0$. Portanto $\lim\limits_{m \in \mathbb{N}} (x_m, y_m) = (x_0, y_0)$. Ou seja, $\lim\limits_{m \in \mathbb{N}} z_m = (x_0, y_0)$ em $M \times N$. Logo, $M \times N$ é compacto.

Portanto, um subconjunto fechado e limitado M em $\mathbb{R}^2$ é compacto. De fato, $M \subseteq N_1 \times N_2$, onde N_1 e N_2 são intervalos fechados em $\mathbb{R}$. E em $\mathbb{R}$ um subconjunto fechado e limitado é compacto, como mostramos no capítulo anterior. Pelo Teorema 20 temos que o produto cartesiano de dois espaços compactos é compacto. Portanto o subconjunto M é fechado dentro do compacto $N_1 \times N_2$. Logo é compacto em $\mathbb{R}^2$.

Teorema 21 *Se um subconjunto S de um espaço métrico M é totalmente limitado, seu fecho $\overline{M}$ também é.*

Demonstração: Sendo M totalmente limitado, então dado $\varepsilon = 1$, existe um conjunto finito $\{x_1, ..., x_n\}$ tal que se $X_i = B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ então $M \subseteq X_1 \cup ... \cup X_n$. Como X_i é uma bola aberta de diâmetro ε e centro x_i, $\overline{X_i}$ é a bola fechada de diâmetro ε e centro x_i. Daí $M \subseteq \overline{X_i} \cup ... \cup \overline{X_n}$. Assim $\overline{M} = \overline{X_1} \cup ... \cup \overline{X_n}$. Ou seja, $\overline{M}$ é totalmente limitado.

Teorema 22 *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tem fecho compacto se, e somente se, é limitado.*

Demonstração: Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto tal que $\overline{X}$ é compacto, então pelo Teorema 5, $\overline{X}$ é limitado. Reciprocamente, seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado. Agora $diam X = diam \overline{X}$. Portanto $\overline{X}$ é limitado e fechado; ou seja, $\overline{X}$ é compacto.

Definição 9 *Diz-se que um espaço métrico seqüencialmente compacto quando toda seqüência de pontos nele contida possui subseqüência convergente.*

Por exemplo, o conjunto finito $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ é seqüencialmente compacto, pois sendo X finito, existe $a = x_{n_1} = x_{n_2} = ... = x_{n_k} = ...$ que se repete infinitas vezes, e portanto (x_{n_k}) converge para $a \in X$.

Pelo Teorema 19, temos que um espaço métrico é seqüencialmente compacto se, e somente se, é compacto.

Teorema 23 *Se X é um espaço métrico seqüencialmente compacto, Y é um espaço métrico e $f : X \to Y$ é contínua então $f(X)$ é seqüêncialmente compacto.*

Demonstração: Seja $f : X \to Y$ uma função contínua e X um conjunto seqüencialmente compacto. Seja $\{b_1, b_2, ...\}$ uma seqüência em $f(X)$. Então existem $a_1, a_2, ... \in X$ tais que $f(a_n) = b_n \forall\, n \in \mathbb{N}$. Mas X é seqüencialmente compacto, logo a seqüência (a_n) contém uma subseqüência (a_{n_k}) que converge para um ponto $p \in X$. Como f é contínua $\{f(a_{n_1}), f(a_{n_2}), ...\} = \{b_{n_1}, b_{n_2}, ...\}$ converge para $f(p) \in f(X)$. Assim, $f(X)$ é seqüencialmente compacto.

Definição 10 *Um subconjunto A de um espaço métrico M é dito contavelmente compacto se, e somente se, todo subconjunto infinito B de A contém um ponto de acumulação em A.*

Teorema 24 *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes.*

1. *M é compacto;*

2. *M é contavelmente compacto;*

3. M é seqüencialmente compacto.

Demonstração: Veja Teorema 19.

Definição 11 *Sejam M e N espaços métricos quaisquer. Uma aplicação contínua $f : M \to N$ diz-se uniformemente contínua quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ tal que, $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ para quaisquer $x, y \in M$ com $d(x, y) < \delta$.*

Teorema 25 *Se o espaço métrico M é compacto, então toda aplicação contínua $f : M \to N$ é uniformemente contínua.*

Demonstração: Suponhamos que f não fosse uniformemente contínua. Então para algum $\varepsilon > 0$ e, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, haveria $x_n, y_n \in M$ tais que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ e $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Agora, da compacidade de M segue que existe uma subseqüência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $lim_n x_n = a$ e portanto $lim_n y_n = a$, pois $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Como f é contínua, temos $lim_n d(f(x_n), f(y_n)) = d(f(a), f(a)) = 0$, que é uma contradição. Portanto $f : M \to N$ é uniformemente contínua.

Teorema 26 *Sejam $f : M \to N$ contínua e $K \subset M$ compacto. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in K$ e $y \in M, d(x, y) < \delta$ então $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Demonstração: Suponhamos que dado $\varepsilon > 0$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe pontos $x_n \in K$ e $y_n \in M$ tais que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ e $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Sendo K compacto, existe uma subsequência convergente. Logo podemos supor $lim_n x_n = a \in K$. Como $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, temos $lim_n y_n = a$. Como f é contínua $lim_n d(f(x_n), f(y_n)) = d(f(a), f(a)) = 0$, que é uma contradição.

Definição 12 *Um espaço métrico M chama-se localmente compacto quando todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhança compacta. Isto significa que para todo $x \in M$ existe um compacto K com $x \in int(K)$.*

Todo espaço discreto é localmente compacto, pois cada um dos seus pontos é uma vizinhança compacta de si próprio. Também, todo espaço métrico compacto é, em particular localmente compacto, pois o espaço inteiro é uma vizinhança compacta de cada um de seus pontos.

A reta $\mathbb{R}$ é localmente compacta. De fato, dado $p \in \mathbb{R}$, consideremos $K = [p-1, p+1]$ então $p \in int(K) = (p-1, p+1)$. Além disso, K é compacto, pois é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}$. Portanto K é vizinhança compacta de p em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é localmente compacto.

No entanto um espaço métrico localmente compacto pode não ser compacto, como veremos no exemplo.

Observe o conjunto de intervalos $A = \{..., (-3,-1), (-2,0), (-1,1), (0,2), ...\}$. Então $\mathbb{R}$ é localmente compacto, mas o conjunto de intervalos é cobertura aberta de $\mathbb{R}$ por meio de conjuntos abertos, cujo fechados são compactos.

Teorema 27 *Um espaço métrico M é localmente compacto se e somente se, para todo $x \in M$ existe $r > 0$ tal que a bola fechada $B[x,r]$ seja compacta.*

Demonstração: Seja M um espaço métrico localmente compacto. Dado $x \in M$ qualquer, existe uma vizinhança compacta V tal que $x \in V$. Pela definição de vizinhança segue que existe uma bola fechada $B[x,\varepsilon] \subset V$. Sendo $B[x,\varepsilon]$ um subconjunto fechado de um espaço métrico compacto, então $B[x,\varepsilon]$ é compacto.
Reciprocamente, suponha que para qualquer $x \in M$ exista $r > 0$ tal que $B[x,r]$ é compacta. Como $B[x,r]$ é vizinhança de $x \in M$, M é localmente compacto.

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é um espaço localmente compacto. Considere $x \in \mathbb{Q}$, então qualquer vizinhança V de x em $\mathbb{Q}$ contém um intervalo racional onde certamente existe uma sequência de racionais convergindo em $\mathbb{R}$ para um irracional; isto é, uma sequência sem subsequência convergente. Ou seja, V não é compacta.

Teorema 28 *Seja M localmente compacto. Se $A \subset M$ é aberto então A é localmente compacto.*

Demonstração: De fato, para todo $x \in A$ existem $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tais que $B[x, r_1]$ é compacta e $B[x, r_2] \subset A$. Seja $r = min\{r_1, r_2\}$. Então $B[x, r]$ é compacta e está contida em A. Logo A é localmente compacto.

Teorema 29 *Seja M localmente compacto. Se $F \subset M$ é fechado então F é localmente compacto.*

Demonstração: De fato, para todo $x \in F$ existe uma bola $B[x, r]$ em M que é compacta. Então $B[x, r] \cap F$ é uma bola fechada em F. Como $B[x, r]$ é um subconjunto fechado de um espaço métrico compacto F, é compacta em F. Portanto F é localmente compacto.

Se $X, Y \subset M$ são subconjuntos localmente compactos então $X \cap Y$ é localmente compacto. Note que, para cada $x \in X \cap Y$, existem bolas fechadas $B = B[x, r]$ e $B' = B[x, r']$ em M tais que $B \cap X$ e $B' \cap Y$ são compactas. Então $(B \cap X) \cap (B' \cap Y) = (B \cap B') \cap (X \cap Y)$, que é uma bola fechada em $X \cap Y$ e é compacta. Portanto $X \cap Y$ é localmente compacta. Em particular, se M é localmente compacto, $A \subset M$ é aberto e $F \subset M$ é fechado, então A e F são localmente compactos e portanto $A \cap F$ é localmente compacto.

Observe que, a reuni ão de dois subconjuntos localmente compactos pode não ser localmente compacta. Se $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ e $p = (0, 0)$, então $Y = X \cup \{p\}$ não é localmente compacto porque nenhuma bola de centro p em Y é compacta.

Definição 13 *Um subconjunto $X \subset M$ diz-se denso em M quando $\overline{X} = M$, ou seja, quando toda bola aberta em M contém algum ponto de X, ou ainda, para cada aberto n ão vazio A em M, tem-se $A \cap X \neq \varnothing$.*

Proposição 1 *Se um subconjunto localmente compacto $X \subset M$ é denso em M então X é aberto em M.*

Demonstração: Para todo $x \in X$ existe uma vizinhança V de x em M tal que $V \cap X = F$ é compacto, e portanto fechado em M. Seja A aberto em M tal que $x \in A \subset V$. Então $A \cap X$ é denso em A e fechado em A, pois $A \cap X = A \cap V \cap X = A \cap F$. Sendo assim, $A \cap X = A$, isto é, $A \subset X$. Obtemos portanto, para cada ponto $x \in X$ um aberto A tal que $x \in A \subset X$. Logo X é aberto.

Corolário 1 *Todo subconjunto localmente compacto $X \subset M$ é interseção de um subconjunto aberto com um subconjunto fechado.*

Demonstração: Como X um subconjunto denso em $\overline{X}$, então X é aberto em $\overline{X}$, ou seja, existe um aberto A em M tal que $X = A \cap \overline{X}$. Portanto X é a interseção de um subconjunto aberto com um subconjunto fechado.

Teorema 30 *Seja $f : M \to N$ contínua aberta e sobrejetiva. Se M é localmente compacto então N também é.*

Demonstração: Seja $p \in N$. Como f é sobrejetiva, existe $a \in M$ tal que $f(a) = p$. Como M é localmente compacto, existe uma vizinhança compacta V de a em M. Então $a \in int(V)$ e V é compacto. Como f é aberta, $f(V)$ é vizinhança de $p = f(a)$. Por outro lado, a continuidade de f garante que $f(V)$ é compacto. Portanto $f(V)$ é vizinhança compacta de p em N. Logo N é localmente compacto.

Não é verdade, que a imagem de um conjunto localmente compacto $X \subset M$ por uma aplicação contínua $f : M \to N$ seja sempre um conjunto localmente compacto $f(X) \subset N$, mesmo se f é aberta. Por exemplo, seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a projeção $f(x, y, z) = (x, y)$ sobre o plano horizontal $D = \{x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < 1\}$. Sejam $p = (1, 0, 1)$ e $X = D \cup \{p\}$. Então X é localmente compacto, mas $f(X) = D \cup \{(1, 0)\}$ não é.

Teorema 31 *Seja K um subconjunto compacto de um espaço métrico M. Se $A \subset M$, então existe $p \in K$ tal que $d(p, A) = d(K, A)$.*

Demonstração: Seja $\varepsilon = d(K, A)$. Pela definição de distância de conjuntos, temos $d(K, A) = inf\{d(x, y); x \in K, y \in A\}$ então existem para cada $n \in \mathbb{N}, x_n \in K$ e $y_n \in A$ de maneira que $\varepsilon \leq d(x_n, y_n) < \varepsilon + \frac{1}{n}$. Consideremos a sequência $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ e seja $B = \{x_n; n \geq 1\}$. Há duas possibilidades para B. Ou B é finito ou infinito. Se B é finito, existe $p \in K$ tal que $x_n = p$ para infinitos índices da sequência. Portanto $d(K, A) = d(p, A)$. De fato, suponhamos por absurdo que $d(K, A) \neq d(p, A)$. Seja $d(p, A) = \varepsilon + \delta$, com $\delta > 0$ e tomemos um número natural $r > 0$ tal que $x_r = p$ e $\frac{1}{r} < \frac{\delta}{2}$. Daí: $\varepsilon + \delta = d(p, A) = d(x_r, A) < \varepsilon + \frac{1}{r} < \varepsilon + \frac{\delta}{2}$, que é absurdo. Agora, se B é infinito, existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $lim x_{n_k} = p \in K$. Suponhamos por absurdo que $d(K, A) \neq d(p, A)$. Neste caso, seja $d(p, A) = \varepsilon + \delta$, com $\delta > 0$. Como (x_{n_k}) converge para $p \in K$, então $B(p, \frac{\delta}{2})$ contém infinitos termos de (x_n) e portanto existe $x_r \in B(p, \frac{\delta}{2})$ de maneira que $\frac{1}{r} < \frac{\delta}{2}$. Daí: $d(p, x_r) + d(x_r, y_r) < \frac{\delta}{2} + \varepsilon + \frac{1}{r} < \frac{\delta}{2} + \varepsilon + \frac{\delta}{2} = \varepsilon + \delta = d(p, A) \leq d(p, y_r)$. Em contradição com a desigualdade triangular. Portanto $d(p, A) = d(K, A)$.

Teorema 32 *Seja K um subconjunto compacto de um espaço métrico M e seja $F \subset M$ um subconjunto fechado tal que $K \cap F = \varnothing$, então $d(F, K) > 0$.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $d(K, F) = 0$. Então existe um ponto $p \in K$ tal que $d(p, F) = 0$, o que significa que $p \in \overline{F}$. Como $p \in K$ e $\overline{F} = F$, pois F é fechado, então $p \in K \cap F$, mas $K \cap F = \varnothing$. Portanto $d(K, F) > 0$.

Teorema 33 *Se K e L são subconjuntos compactos de um espaço métrico M, então existem pontos $p \in K$ e $q \in L$ tais que $d(K, L) = d(p, q)$.*

Demonstração: Sendo K compacto, existe um ponto $p \in K$ tal que $d(K, L) = d(p, L)$, como mostramos no Teorema 31. Sabemos que $\{p\}$ é compacto, então existe $q \in L$ tal que $d(p, L) = d(\{p\}, L) = d(\{p\}, q) = d(p, q)$. Logo $d(p, q) = d(K, L)$.

Sejam $K, L \subset M$ compactos. A função distância $d : K \times L \to \mathbb{R}$ atinge seu mínimo num ponto $(a, b) \in K \times L$. Ou seja, existem $a \in K$ e $b \in L$ tais que $d(a, b) \leq d(x, y)$ para quaisquer $x \in K$ e $y \in L$.

Se $F, G \subset M$ são apenas subconjuntos fechados, temos que $d(F,G) = inf\{d(x,y); x \in F, y \in G\}$ pode ser zero, mesmo com $F \cap G = \varnothing$. Por exemplo se $F = \{(x,0); x \in \mathbb{R}\}$ e $G = \{(x, \frac{1}{x}); x > 0\}$.

Se $K \subset M$ é compacto e $F \subset M$ é fechado, com a $K \cap F = \varnothing$, então existe $c > 0$ tal que $x \in K$ e $y \in F, d(x,y) \geq c$; isto é, $d(K,F) > 0$.

Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado não-vazio. Então existe $x_0 \in F$ tal que $d(a,F) = d(a,x_0)$. De fato, tomemos um ponto $x \in F$ e observemos que, se $r = d(a,x)$ então $K_0 = B[a;x] \cap F$ é fechado no compacto $B[a,x]$ e portanto é compacto. Além disso, temos que:
$d(a,F) = inf\{d(a,y); y \in F\} = inf\{d(a,y); y \in K_0\} = d(a,K_0)$, pois os pontos de F que não pertencem a K_0, então por definição, mais longe de a do que qualquer ponto de K_0. Pelo Teorema 16, a função $y \mapsto d(a,y), y \in K_0$, assume seu mínimo num ponto $x_0 \in K_0$

Seja K um subconjunto compacto de um espaço métrico M. Dado $a \in M - K$, tem-se $d(a,K) > 0$, e além disso, existe $k_0 \in K$ tal que $d(a,K) = d(a,k_0)$. Com efeito, a aplicação $K \mapsto d(a,K)$ é uma função real contínua definida no compacto K e portanto atinge o seu mínimo num ponto $k_0 \in K$. Como $a \neq K$, este valor mínimo $d(a,k_0)$ é positivo. Note que se $F \subset M$ é fechado e $a \in M - F$, então $d(a,F) > 0$, mas não existe necessariamente um ponto $x_0 \in F$ tal que $d(a,F) = d(a,x_0)$.

Por exemplo, seja $M = \mathbb{R} - 0$ a reta desprovida da origem. A semi-reta negativa $F = \{x \in \mathbb{R}; x < 0\}$ é um subconjunto fechado de M. Considerando o ponto $1 \in M$, tem-se $d(1,F) = 1$, mas para cada ponto $x \in F, d(1,x) = 1 - x > 1$, pois $x < 0$. A sequência de pontos $x + n = \frac{-1}{n} \in F$ é tal que $d(1,x_n)$ tende a 1, mas (x_n) não converge em M. Neste exemplo, M não é completo.

Sejam K um subconjunto compacto e F um subconjunto fechado de um espaço métrico M. Se $K \cap F = \varnothing$ então $d(K,F) > 0$. Não se pode garantir a existência de pontos $k_0 \in K$ e $x_0 \in F$ tais que $d(K,F) = (k_0,x_0)$. Mas, como K é compacto existe $k_0 \in K$ tal que $d(K,F) = d(k_0,F)$, definido como ínfimo do conjunto $\{d(k,x); k \in K, x \in F\}$, pode ser também descrito como $d(k,F) = inf\{d(k,F); k \in K\}$; isto é, como o ínfimo da função real contínua

$b \mapsto d(k, F)$, definida no compacto K. Como F é é fechado e disjunto de K, esta função assume somente valores positivos, cujo mínimo é atingido num ponto $k_0 \in K$, de acordo com o Teorema 16 $d(K, F) = d(k_0, F) > 0$.

O resultado acima se usa muitas vezes sob a seguinte forma. Dados um compacto $K \subset M$ e um aberto U em M com $K \subset U$, a distância K ao complementar de U é positiva, isto é, $d(K, M - U) > 0$. Ou ainda, existe $c > 0$ tal que $x \in K; y \in M - U$ então $d(x, y) \geq c$.

Definição 14 *Um espaço métrico M é chamado regular se para todo subconjunto fechado F de M e para todo $x \in F$ existem abertos disjuntos G e H tais que $F \subset G$ e $p \in H$.*

Corolário 1 *Espaços métricos compactos são regulares.*

Demonstração: Seja F um subconjunto fechado de um compacto M e $x \notin F$, então pelo Teorema 32, existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(F, x) > \varepsilon > 0$. Seja $U = \bigcup_{x \notin F} B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ e $V = \bigcup_{y \in F} B(y, \frac{\varepsilon}{2})$. Suponhamos $p \in U \cap V$, então existe $y \in F$ tal que $p \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ e $p \in B(y, \frac{\varepsilon}{2})$. Agora, pela desigualdade triangular $d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, o que é um absurdo. Portanto M é regular.

Definição 15 *Um espaço métrico M é chamado normal se dados X, Y fechados em M com $X \cap Y = \varnothing$ existem abertos disjuntos G e H tais que $X \subset G$ e $Y \subset H$.*

Corolário 2 *Espaços métricos compactos são normais.*

Demonstração: Sejam F e G subconjuntos fechados disjuntos de M. Se F ou G forem vazios, então nada a fazer. No caso de $F \neq \varnothing \neq G$, então pelo Teorema 32, existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(F, G) > \varepsilon$. Seja $U = \bigcup_{x \notin F} B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ e $V = \bigcup_{y \in F} B(y, \frac{\varepsilon}{2})$. Suponhamos $p \in U \cap V \neq \varnothing$, então existe $x \in F, y \in G$ tal que $p \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ e $p \in B(y, \frac{\varepsilon}{2})$. Agora, $d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, o que é um absurdo. Portanto M é normal.

Capítulo 4

Espaços Topológicos Compactos

Os espaços topológicos compactos são mais abrangentes que os espaços métricos, por isso neste capítulo, faremos uma generalização de alguns conceitos importantes já apresentados nos capítulos anteriores.

Quando estamos em espaços topológicos não faz sentido falarmos em distância, o que realmente interessa é a coleção de abertos que determinada pelos Espaços Métricos, por isso, a noção de métrica será substituída pelo conceito de topologia, que em geral é mais amplo.

Definição 16 *Uma topologia num conjunto X é uma coleção $\mathcal{J}$ de subconjuntos de X, chamados os subconjuntos abertos, segundo a topologia $\mathcal{J}$, satisfazendo as seguintes condições:*

1. *$\varnothing$ e X pertencem a $\mathcal{J}$;*

2. *Se $A_1, ..., A_n \in \mathcal{J}$ então $A_1 \cap ... \cap A_n \in \mathcal{J}$;*

3. *Dada uma família arbitrária $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ com $A_\lambda \in \mathcal{J}$ para cada $\lambda \in L$, tem-se $\bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathcal{J}$.*

Definição 17 *Um espaço topológico é um par $(X, \mathcal{J})$ onde X é um conjunto e $\mathcal{J}$ é uma topologia em X. É comum fazer referência ao espaço topológico X, deixando subtendida a topologia.*

Nos espaços topológicos não poderão existir bolas, pois não existe a noção de distância nesses espaços. No entanto, os conceitos de vizinhança, aberto, fechado,..., podem ser estendidos para espaços topológicos como veremos.

Seja X um espaço topológico.
Um ponto $a \in U$ é *ponto interior* de U se existir $V \in \mathcal{J}$ tal que $a \in V \subset U$.
Um subconjunto $A \subset X$ é *aberto* quando $A \in \mathcal{J}$.
Um subconjunto $F \subset X$ é *fechado* quando $X - F$ é aberto.
O *interior* de um conjunto $A \subset X$ é o conjunto formado pelos pontos interiores de A.
O subconjunto U é *vizinhança* de a quando $a \in intU$.

Todo espaço métrico pode ser considerado, de modo natural, como um espaço topológico, no qual a coleção $\mathcal{J}$ é formada pelos subconjuntos abertos a partir da métrica de M.

Observe o conjunto $X = \{0, 1, 2, 3\}$ e $\mathcal{J}_1 = \{\varnothing, X, \{1, 2\}\}$. O par $\{X, \mathcal{J}_1\}$ é um espaço topológico, pois satisfaz as condições da definição. No entanto, se considerarmos $\mathcal{J}_2 = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$, então $(X, \mathcal{J}_2)$ não é um espaço topológico. Note que $\mathcal{J}_2$ não é uma topologia de X, pois X não pertence a $\mathcal{J}_2$ e ainda a união dos subconjuntos $\{1\}$ e $\{2\}$ não pertencem a $\mathcal{J}_2$.

Quando estamos nos restringindo à espaços métricos, sabemos que dados $a \neq b$ em M, sempre podemos obter vizinhaças U e V para x e y tais que $U \cap V = \varnothing$. No entanto, nos espaços topológicos, nem sempre é possível obter tais vizinhanças. Observe que se tivermos $X = \{a, b, c, d\}$ e $\mathcal{J} = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, X\}$ então em $(X, \mathcal{J})$, os pontos a e b não possuem vizinhanças disjuntas.

Os espaços topológicos mais interessantes são os espaços de Hausdorff. Portanto neste capítulo, estudaremos somente esses espaços topológicos.

Definição 18 *Um espaço topológico X chama-se espaço de Hausdorff, ou espaço separado, quando, para cada par de pontos distintos x, y em X, existem abertos U, V tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \varnothing$.*

Podemos formalizar os comentários anteriores no seguinte teorema.

Teorema 34 *Todo espaço métrico é de Hausdorff.*

Seja Y um conjunto de um espaço topológico X. Uma *cobertura* de Y é uma família $\mathcal{C}= (C_\lambda)_{\lambda\in L}$ de subconjuntos de X com $Y \subset \bigcup_{\lambda\in L} C_\lambda$; isto é, para todo $a \in Y$, existe algum $\lambda \in$ L tal que $a \in C_\lambda$.
Pode-se considerar uma cobertura de Y como a coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X, tal que, para cada $a \in Y$, existe um conjunto C da coleção $\mathcal{C}$ com $a \in C$.

Uma cobertura de $\mathcal{C}$ diz-se *aberta* quando cada conjunto C_λ, $\lambda \in L$, que a compõe, é aberto em X. A cobertura $\mathcal{C}$ é *finita* quando o conjunto L dos índices λ é finito; isto é, L $= \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ e $Y \subset C_{\lambda 1} \cup ... \cup C_{\lambda n}$.

Uma *subcobertura* de $\mathcal{C}$ é uma família $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda\in L'}$, $L' \subset L$ tal que ainda se tenha $Y \subseteq \bigcup_{\lambda\in L'} C_\lambda$.

Definição 19 *Um espaço topológico X chama-se compacto quando toda cobertura aberta de X possui subcobertura finita.*

Definição 20 *Seja Y um subconjunto não-vazio de um espaço topológico $(X, \mathcal{J})$. A classe $\mathcal{J}_y$ de todas as interseções de Y com os subconjuntos abertos de X é chamada topologia relativa de Y.*

Diz-se que um subconjunto Y de um espaço topológico X é um *subconjunto compacto* quando Y, com a topologia relativa de X, é um espaço compacto. Ou seja, se $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família de subconjuntos de Y, abertos em Y, com $Y \subseteq \cup U_\lambda$, então existe uma subfamília finita $(U_{\lambda_1}, ..., U_{\lambda_n})$ tal que $Y \subseteq (U_{\lambda_1} \cup ... \cup U_{\lambda_n})$

Para que um subconjunto Y seja compacto é necessário e suficiente que toda cobertura $Y \subset \cup V_\lambda$ de Y, por meio de abertos V_λ do espaço X, possua subcobertura finita $Y \subset V_{\lambda_1} \cup ... \cup V_{\lambda_n}$. Portanto, todo conjunto U_λ aberto em Y, é da forma $U_\lambda = V_\lambda \cap Y$ com V_λ aberto em X.

Se K, L são subconjuntos compactos de um espaço topológico X, então $K \cup L$ é compacto. De fato, seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta de $K \cup L$, em particular $\mathcal{C}$ é uma cobertura de K e uma cobertura de L. Portanto, sendo K e L subconjuntos compactos, existe uma subcobertura finita $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ cobrindo K e uma subcobertura finita $\mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}$ cobrindo L. Daí, temos $\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{C}$ que cobre $K \cup L$. Ou seja, $K \cup L$ é compacto.

Do exemplo acima, concluímos que dados um número finito $K_1, ...K_n$ de subconjuntos compactos de um espaço topológico X , então sua reunião $K = K_1 \cup ... \cup K_n$ é um conjunto compacto. Porém, a reunião de um número infinito de subconjuntos compactos pode não ser compacta.

Como em $\mathbb{R}$ e espaços métricos podemos caracterizar a propriedade de ser compacto usando a propriedade de interseção finita. Nos espaços topológicos, as definições e notações são quase idênticas as de espaços métricos.

Para que os conjuntos $U_\lambda, \lambda \in L$, formem uma cobertura aberta de um espaço topológico X, é necessário e suficiente que seus complementares $F_\lambda = X - U_\lambda$ constituam uma família de fechados em X, cuja interseção $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é vazia.

Portanto um espaço topológico X é compacto se, e somente se, toda família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos fechados em X, com interseção vazia possui uma subfamília finita $\{F_{\lambda_1}, ..., F_{\lambda_n}\}$ com interseção $F_{\lambda_1} \cap ... \cap F_{\lambda_n}$ vazia.

Definição 21 *Diz-se que uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ tem a propriedade da interseção finita se para todo subconjunto finito $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset L$ tem-se, $F_{\lambda_1} \cap ... \cap F_{\lambda_n} \neq \varnothing$.*

Assim, para que um espaço topológico X seja compacto, é necessário e suficiente que a seguinte condição se cumpra:
Se uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos fechados em X possui a propriedade da interseção finita, então a interseção $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é não vazia.

Teorema 35 *As seguintes afirmações a respeito de um espaço toplógico são eqüivalentes.*

1. *toda cobertura aberta de X possui subcobertura finita;*

2. *toda família $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ de fechados com a propriedade da interseção finita tem $\bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda \neq \varnothing$.*

Demonstração: $1 \Rightarrow 2$) Sejam X um espaço topológico e $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma família de fechados com a propriedade de interseção finita, então para todo subconjunto finito $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset L$ tem-se $F_{\lambda_1} \cap ... \cap F_{\lambda_n} \neq \varnothing$. Suponhamos, por absurdo que $\bigcap_{\lambda\in L}(F_\lambda) = \varnothing$. Daí temos $\{X - F_\lambda\}_{\lambda\in L}$ é uma cobertura aberta de X. Por hipótese, existe uma subcobertura finita, digamos $X - F_{\lambda_1}, ..., X - F_{\lambda_n}$ que ainda cobre X. Agora, existe $x \in F_{\lambda_1} \cap ... \cap F_{\lambda_n}$. Logo, temos que $x \notin \{X - F_{\lambda_1} \cup ... \cup X - F_{\lambda_n}\}$; ou seja, $x \notin \bigcup_{i=1}^{k} X - F_{\lambda_i}$, o que é um absurdo. Portanto $\bigcap_{\lambda\in L}(F_\lambda) \neq \varnothing$.

$2 \Rightarrow 1$) Suponhamos que qualquer família de fechados em X com a propriedade de interseção finita tem interseção não vazia. Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ uma cobertura aberta de X. Suponhamos por absurdo que $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ não admite subcobertura finita. Agora $\{X - A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ é uma coleção de fechados em X. Como $\{A_{\lambda_1}, ..., A_{\lambda_n}\}$ é coleção finita de $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ não pode ser cobertura de X. Portanto, existe $x \in X$ tal que $x \notin \{A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_n}\}$. Assim $x \in X - A_{\lambda_i}, i = 1, ..., n$ então $x \in \bigcap_{i=1}^{n} X - A_{\lambda_i} \neq \varnothing$. Isto é, $\{X - A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ é uma família de fechados com a propriedade de interseção finita. Por hipótese, $\bigcap_{\lambda\in L}(X - A_\lambda) \neq \varnothing$. Então, $\varnothing \neq \bigcap_{\lambda\in L}(X - A_\lambda) = X - (\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda) = \varnothing$, que é um absurdo. Portanto, toda cobertura de X possui subcobertuta finita.

Teorema 36 *Seja X um espaço de Hausdorff. Todo subconjunto compacto $K \subset X$ é fechado em X.*

Demonstração: Provaremos que K^c é aberto. Seja $x \in X - K$. Pela definição de espaço de Hausdorff, para cada ponto $y \in K$ existem abertos A_y contendo x e B_y contendo y tais que $A_y \cap B_y = \varnothing$. Portanto, obtemos uma cobertura aberta $\{B_y\}_{y\in k}$ de K da qual podemos extrair uma subcobertura finita, pois K é compacto; ou seja, $K \subset B_{y_1} \cup ... \cup B_{y_m}$. Seja $A = A_{y_1} \cap ... \cap A_{y_m}$.

Então A é um aberto que contém x e nenhum ponto de A pertence a K; isto é, $A \subset X - K$. Logo, K é fechado em X.

O Teorema 36 não é verdadeiro para espaços topológicos em geral. Note que, os conjuntos finitos são sempre compactos, no entanto, existem espaços topológicos cujos subconjuntos finitos não são todos fechados.

Teorema 37 *Todo subconjunto fechado F de um espaço topológico compacto é compacto.*

Demostração: Seja F um subconjunto fechado de um espaço topológico compacto X. Seja $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma cobertura de F por abertos $U_\lambda \subset X$. A família dos $U_\lambda, \lambda \in L$ e mais o conjunto $U = X - F$, é cobertura aberta de X. Como X é um espaço topológico compacto, existe uma subcobertura finita tal que $X \subset U_{\lambda_1} \cup ... \cup U_{\lambda_n} \cup U$. Como nenhum ponto de F pode pertencer a U, tem-se $F \subset U_{\lambda_1} \cup ... \cup U_{\lambda_n}$; ou seja, U_{λ_i} para $1 \leq i \leq n$ é subcobertura aberta de F. Portanto F é compacto.

Seja $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de subconjuntos compactos K_λ de um espaço de Hausdorff X. A interseção $K = \bigcap_{\lambda \in L} K_\lambda$ é um subconjunto compacto de X. De fato, pelo Teorema 36, cada K_λ é fechado em X, e portanto K é fechado em X. Fixando algum K_λ, K é fechado em K_λ. Como K_λ é compacto, então K é compacto.

Teorema 38 *Seja A um subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff X e suponhamos $p \in X - A$. Então, existem abertos G e H tais que $p \in G, A \subset H$ e $G \cap H = \varnothing$.*

Demonstração: Seja $x \in A$ e $p \notin A$, logo $x \neq p$. Por hipótese X é de Hausdorff, então existem abertos G_x e H_x tais que $x \in H_x$, $p \in G_x$ e $H_x \cap G_x = \varnothing$. Logo $A \subset \bigcup_{x \in A} H_x$; ou seja, $\{H_x\}_{x \in A}$ é cobertura aberta de A. Como A é compacto, existem $H_{x_1}, ..., H_{x_m}$, tais que $A \subset H_{x_1} \cup ... \cup H_{x_m}$. Agora, seja $H = H_{x_1} \cup ... \cup H_{x_m}$ e $G = G_{x_1} \cap ... \cap G_{x_m}$. Então H e G são abertos. Além disso $A \subset H$ e $p \in G$, pois p pertence a cada G_{x_i}. Note que, $G_{x_i} \cap H_{x_i} = \varnothing$ implica $G_{x_i} \cap H = \varnothing$ e,

$G \cap H = (G_{x_i} \cup ... \cup G_{x_m}) \cap H = (G_{x_i} \cap H) \cup ... \cup (G_{x_m} \cap H) = \varnothing \cup ... \cup \varnothing = \varnothing$; ou seja, $G \cap H = \varnothing$

Teorema 39 *Sejam A e B subconjuntos compactos disjuntos de um espaço de Hausdorff X. Então existem abertos disjuntos G e H tais que $A \subset G$ e $B \subset H$.*

Demonstração: Seja $x \in A$, então $x \notin B$, pois A e B são subconjuntos disjuntos. Por hipótese B é compacto, então pelo Teorema 38, existem abertos G_x e H_x tais que $x \in G_x, B \subset H_x$ e $G_x \cap H_x = \varnothing$. Como $x \in G_x, \{G_x\}_{x \in A}$ é cobertura aberta de A. Sendo A compacto, existem $G_{x_1}, ..., G_{x_m}$ tais que $A \subset G_{x_1} \cup ... \cup G_{x_m}$ e $B \subset H_{x_1}, ..., H_{x_m}$. Seja, $G = G_{x_1} \cup ... \cup G_{x_m}$ e $H = H_{x_1} \cap, ..., \cap H_{x_m}$. Então $A \subset G, B \subset H$ e G e H são abertos. Temos $G_{x_i} \cap H_{x_i} = \varnothing$ e portanto $G_{x_i} \cap H = \varnothing$. Logo, $G \cap H = \{G_{x_i} \cup ... \cup G_{x_m}\} \cap H = (G_{x_i} \cap H) \cup ... \cup (G_{x_m} \cap H) = \varnothing \cup ... \cup \varnothing = \varnothing$. Portanto $G \cap H = \varnothing$.

Definição 22 *Um espaço topológico X é chamado normal se dados $F, G \subset X$ fechados em X com $F \cap G = \varnothing$ existem abertos disjuntos U e V tais que $F \subset U$ e $G \subset V$.*

Portanto, pelo Teorema 39 e pela definição de normal temos que todo espaço de Hausdorff compacto é normal.

Teorema 40 *Para que um espaço topológico X seja normal, é necessário e suficiente que a seguinte condição seja satisfeita. Dados em X um fechado F e um aberto A, com $F \subset A$, existe um aberto U em X, tal que $F \subset U$ e $\overline{U} \subset A$*

Demonstração: Sejam X um espaço topológico normal e $F \subset A$, com F fechado e A aberto. Considere $G = X - A$ e obtemos um par de fechados F e G com $F \cap G = \varnothing$. Logo, existem abertos U e V tais que $F \subset U, G \subset V$ e $U \cap V = \varnothing$. Como $U \cap V = \varnothing$, então $U \subset X - V$ e $X - V$ é fechado, logo $\overline{U} \subset X - V$. Mas $G \subset V$, daí $X - V \subset X - G = A$. Portanto $\overline{U} \subset A$.
Reciprocamente, suponhamos que dados em X um fechado F e um aberto

A com $F \subset A$, existe um aberto U em X tal que $F \subset U$ e $\overline{U} \subset A$ e sejam F e G fechados com $F \cap G = \varnothing$. Considere $A = X - G$, portanto A é aberto e $F \subset A$. E ainda, existe um aberto U com $F \subset U$, $\overline{U} \subset A$. Seja $V = X - \overline{U}$. Então, V é aberto em X e, como $\overline{U} \subset A = X - G$, temos $G \subset X - \overline{U} = V$. Como $U \subset \overline{U}$ então $V = X - \overline{U}$ é disjunto de U. Portanto X é normal.

Seja X um espaço de Hausdorff compacto. Dados em X um fechado F e um aberto A com $F \subset A$, existe um aberto U tal que $F \subset U$ e $\overline{U} \subset A$. De fato, seja X um espaço de Hausdorff compacto, então pelo teorema anterior, X é normal. Portanto pelo Teorema 40, dados em X um subconjunto fechado F e um aberto A com $F \subset A$, existe um aberto U em X tal que $\overline{U} \subset A$.

Definição 23 *Sejam X, Y espaços topológicos. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ será dita contínua quando para todo aberto $A \subset Y$ tivermos que $f^{-1}(A)$ é aberto em X.*
Diremos que uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$ é um homeomorfismo se f e f^{-1} forem contínuas.

Teorema 41 *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.*

Demonstração: Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Sejam agora, um subconjunto compacto $K \subset X$ $\{V_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de $f(K)$ por abertos $V_\lambda \subset Y$. Como f é contínua, os conjuntos $f^{-1}(V_\lambda)$ constituem uma cobertura aberta de K, da qual se pode extrair uma subcobertura finita $f^{-1}(V_{\lambda_1}), ..., f^{-1}(V_{\lambda_n})$ tal que $K \subset f^{-1}(V_{\lambda_1}) \cup f^{-1}(V_{\lambda_2}) \cup ... \cup f^{-1}(V_{\lambda_n})$. Daí temos que $f(K) \subset ff^{-1}(V_{\lambda_1}) \cup ... \cup ff^{-1}(V_{\lambda_n}) \subseteq V_{\lambda_1} \cup ... \cup V_{\lambda_n}$. Portanto $f(K)$ é compacto.

Sejam X um espaço topológico compacto e $f : X \longrightarrow Y$ um homeomorfismo, então Y é compacto. De fato, sendo $f : X \longrightarrow Y$ um homeomorfismo, pela definição de homeomorfismo, f e f^{-1} são funções contínuas. Portanto pelo Teorema acima, Y é compacto, pois por hipótese temos que X é compacto. Neste caso dis-ze que compacto é *propriedade topológica*; isto quer dizer que se X é compacto então todo espaço homeomorfo a X também é.

Teorema 42 *Toda aplicação contínua $f : K \to Y$ de um espaço compacto K num espaço de Hausdorff Y é fechada.*

Demonstração: Seja F um subconjunto fechado de um compacto K, então F é compacto. Pelo Teorema 41, $f(F)$ é compacto. Portanto $f(K)$ é um subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff. De acordo com o Teorema 36, $f(F)$ é fechado.

Teorema 43 *Toda aplicação $f : K \to Y$ contínua e biunívoca, de um espaço compacto K sobre um espaço de Hausdorff Y é um homeomorfismo.*

Demonstração: Pelo Teorema 42, f é uma aplicação fechada e $f(K)$ é compacta, então $f^{-1} : Y \to K$ é contínua. Logo f é um homeomorfismo.

Lema 1 *Sejam X, Y espaços topológicos e $\mathcal{J}' = \{A \times B; A$ é aberto em X e B é aberto em $Y\}$. A coleção $\mathcal{J}'$ satisfaz as condições abaixo:*

1. $\varnothing \in \mathcal{J}'$;
2. $X \times Y \in \mathcal{J}'$;
3. $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathcal{J}'$.

Lema 2 *A coleção $\mathcal{J} = \{\bigcup_{j \in C} A_j \times B_j; A_j \times B_j \in \mathcal{J}'\}$ é uma topologia em $X \times Y$.*

Definição 24 *$\mathcal{J}$ é chamada de topologia produto.*

Um aberto da topologia produto é a reunião de abertos $A = A_1 \times ... \times A_n$.

Teorema 44 *Seja $X \times K$ o produto cartesiano de um espaço topológico X por um espaço compacto K. Dado um ponto $x \in X$, seja $U \subset X \times K$ um aberto tal que $x \times K \in U$. Então existe um aberto A em X, com $x \in A$ e $A \times K \subset U$.*

Demonstração: Para cada ponto $(x, K) \in x \times K$ existem abertos A_k em X, $x \in A_k$ e B_k em $K, k \in B_k$, tais que $(x, k) \in A_k \times B_k \subset U$. Daí, obtemos uma cobertura aberta $x \times K \subset \bigcup_{k \in K} A_k \times B_k$ e, como $x \times K$ é compacto, por ser homeomorfo a K, existe uma subcobertura finita $x \times K \subset (A_{k_1} \times B_{k_1}) \cup ... \cup (A_{k_n} \times B_{k_n}) \subset U$. Seja $A = A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_n}$. O conjunto A é aberto em X, $x \in A$ e $A \times K \subset U$.

Teorema 45 *Seja X um espaço topológico. Se K é compacto, então a projeção $p_1 : X \times K \to X$ é uma aplicação fechada.*

Demonstração: Sejam $F \subset X \times K$ um subconjunto fechado e $x \in X - p_1(F)$. Então, não existe em F ponto algum (x, k), cuja primeira coordenada seja x. Ou seja; $x \times K \subset U = (X \times K) - F$. Pelo teorema anterior, existe algum aberto A em X, com $x \in A$ e $A \times K \subset U$. Ou seja, $A \times K$ não contém ponto algum de F e portanto A é disjunto de $p_1(F)$.

A projeção $p_1 : X \times Y \to X$ é contínua. De fato, seja V um aberto em X, então $p_1^{-1} : (V) = V \times Y$. Portanto, $p_1^{-1} : (V)$ é aberta em $X \times Y$.

Teorema 46 *O produto cartesiano $X \times Y$ é compacto se, e somente se, X e Y são espaços topológicos compactos.*

Demonstração: A projeção $p_1 : X \times Y \to X$ é contínua. Como $X \times Y$ é compacto, por hipótese, temos pelo Teorema 41, que X também é. Analogamente, temos que Y é compacto.
Reciprocamente, seja $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de subconjuntos fechados $F_\lambda \subset X \times Y$, com a propriedade da interseção finita. Se acrescentarmos a esta família todos os conjuntos da forma $F_{\lambda_1} \cap ... \cap F_{\lambda_n}$, continuamos a ter uma família com a propriedade da interseção finita. Como a interseção de um número finito de conjuntos da família ainda pertence à mesma, temos, pelo Teorema 45, que os conjuntos $p_1(F_\lambda), \lambda \in L$, constituem uma família de fechados em X, com a propriedade da interseção finita, porque $p_1(F_{\lambda_1}) \cap ... \cap p_1(F_{\lambda_n}) \supset p_1(F_{\lambda_1} \cap ... \cap F_{\lambda_n}) \neq \varnothing$. Como X é compacto, existe um ponto $x \in \bigcap_{\lambda \in L} p_1(F_\lambda)$. Ou seja, para todo $\lambda \in L, F_\lambda \cap (x \times Y) \neq \varnothing$.

Os conjuntos $F_\lambda \cap (x \times Y), \lambda \in L$ constituem uma família de fechados em $x \times Y$, com a propriedade da interseção finita, pois $[F_{\lambda_1} \cap (x \times Y)] \cap ... \cap [F_{\lambda_n} \cap (x \times Y)] = (F_{\lambda_1} \cap ... \cap F_{\lambda_n}) \cap (x \times Y) \neq \varnothing$, pois $F_{\lambda_1} \cap ... \cap F_{\lambda_n}$ pertence à família (F_λ). Portanto, como $x \times Y$ é homeomorfo a Y então é compacto. Logo existe em $x \times Y$ um ponto (x, y) pertencente a todos os $F_\lambda \cap (x \times Y)$. Em particular, (x, y) pertence a todos os F_λ, como queríamos demonstrar.

Definição 25 *Um espaço topológico X diz-se localmente compacto quando todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança compacta.*

Um espaço de Hausdorff X é localmente compacto se todo ponto $x \in X$ esteja contido num aberto A cujo fecho $\overline{A}$ é compacto. De fato, se X é um espaço de Hausdorff localmente compacto, então todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança compacta V a qual, por ser X de Haurdorff, é fechada en X. Pela definição de vizinhança, existe um aberto A em X tal que $x \in A \subset V$. Como V é fechado, $\overline{A} \subset V$ e portanto $\overline{A}$ é compacto, por ser um subconjuto fechado do compacto V.

Uma vizinhança de um subconjunto X de um espaço topológico é um conjunto V tal que $X \subset intV$. Ou seja, existe um aberto A com $S \subset A \subset V$.

Definição 26 *Um sistema fundamental de vizinhaças do conjunto X é a coleção $\mathcal{G}$ de vizinhaças de X tal que, dada qualquer vizinhança V de X, existe $U \in \mathcal{G}$ com $X \subset U \subset V$.*

Teorema 47 *Num espaço de Hausdorff localmente compacto X, as vizinhanças compactas de cada ponto constituem um sistema fundamental.*

Demonstração: Seja $x \in X$. Considere o aberto U tal que $\in U$. Sendo X localmente compacto, x possui uma vizinhança compacta V. Como $U \cap V$ é uma vizinhança compacta de x, existe um aberto A em X com $x \in A \subset U \cap V$. O ponto x é um subconjunto fechado do espaço de Hausdorff X. Pelos Teoremas 39 e 40, existe um aberto B tal que $x \in B$ e $\overline{B} \subset A$. Em particular, $\overline{B} \subset U$. O conjunto B é aberto em V. Mas, como $B \subset A, B$ é aberto em A

e, sendo A aberto em X, B é aberto em X. Seja $\overline{B} \subset V$. Mas como X é um espaço de Hausdorff, o compacto V é fechado em X e portanto $\overline{B}$ coincide com o fecho de B em X. Assim, $\overline{B}$ é uma vizinhança de x, a qual está contida em U, e é compacta por ser um subconjunto fechado de um espaço de espaço compacto V.

Teorema 48 *Num espaço de Hausdorff localmente compacto, as vizinhanças compactas de um subconjunto compacto K constituem um sistema fundamental de vizinhanças de K.*

Demonstração: Seja $K \subset V$ uma vizinhança qualquer de K. Pelo teorema anterior, podemos obter, para cada ponto $x \in K$, uma vizinhança aberta A_x, tal que $\overline{A_x}$ é compacto e $\overline{A_x} \subset V$. Da cobertura $K \subset \cup A_x$, extraímos uma subcobertura finita $K \subset A_{x_1} \cup ... \cup A_{x_m}$. Pondo, $W = \overline{A_{x_1}} \cup ... \cup \overline{A_{x_m}}$. Portanto W é uma vizinhança compacta de K, com $K \subset W \subset V$.

Definição 27 *Um subconjunto S de um espaço topológico X diz-se localmente fechada em X quando todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U em X tal que $U \cap S$ é fechado em U. Isto significa que existe um subconjunto fechado F em X, tal que $U \cap F = U \cap S$.*

O subconjunto S é localmente fechado em X se S é um subconjunto fechado de um conjunto A, aberto em X. De fato, se S é localmente fechado, cada ponto $x \in S$ possui uma vizinhança aberta A_x, tal que $A_x \cap S$ é fechado em A_x, isto é, $A_x - (A_x \cap S)$ é aberto (em A_x ou em X). Seja $A = \bigcup\limits_{x \in S} A_x$. A é aberto em X e contém S. Afirmamos que S é fechado em A. De fato, dado $y \in A - S$, existe $x \in S$ tal que $y \in A_x(A_x \cap S)$. Como $A_x \cap S$ é fechado em A_x, y possui uma vizinhança V em A_x (que é também uma vizinhaça de y em A), que não contém pontos de $A_X \cap S$, isto é, $V \cap S = \varnothing$.

Teorema 49 *Num espaço de Hausdorff localmente compacto X, todo subconjunto localmente fechado S é localmente compacto. Reciprocamente, em qualquer espaço de Hausdorff X todo subcojunto localmente compacto S é localmente fechado em X*

Demonstração: Seja S localmente fechado em X. Todo ponto $x \in S$ possui uma vizinhança U em X tal que $U \cap S = U \cap F$, onde F é fechado em X. Pelo Teorema 48, x possui uma vizinhança compacta V em X tal que $V \subset U$, isto é, $V \cap U = V$. Então, $V \cap S$ é uma vizinhança de x em S e, como $V \cap S = V \cap U \cap S = V \cap U \cap F = V \cap F$ é um subconjunto fechado do compacto V. Daí, $V \cap S$ é compacta e portanto S é localmente compacto.
Reciprocamente, seja, S um subespaço compacto do espaço de Hausdorff X, Todo ponto $x \in S$ possui vizinhança compacta $V \cap S$, onde V é uma vizinhança de x em X. Como X é um espaço de Hausdorff, o subconjunto compacto $V \cap S$ deve ser fechado em X. Em particular, $V \cap S$ é fechado em V e, portanto, S é localmente fechado.

Definição 28 *Um subconjunto S de um espaço topológico X é denso em X quando $\overline{S} = X$.*

Teorema 50 *Todo subconjunto localmente compacto S, denso num espaço de Hausdorff X, é aberto em X.*

Demonstração: Pelo teorema acima, S é um subconjunto localmente fechado em X, Portanto, existe um aberto A em X tal que $S \subset A$ e S é fechado em A. Mas S, sendo denso em X, é também denso no aberto A. Logo, $S = A$.

Teorema 51 *O produto cartesiano $X \times Y$ é localmente compacto se, e somente se, cada um dos fatores X, Y é localmente compacto.*

Demonstração: Sejam X e Y subconjuntos localmente compactos. Dado um ponto $(x, y) \in X \times Y$, x possui uma vizinhança compacta U em X e, y possui uma vizinhança compacta V em Y, Então, $U \times V$ é vizinhança de $(x, y) \in X \times Y$, que é compacta, pelo Teorema 46.
Reciprocamente, seja $X \times Y$ localmente compacto. Dado $x \in X$, tomemos $y \in Y$ qualquer, e uma vizinhança compacta V do ponto (x, y) em $X \times Y$. Como a projeção $p_1 : X \times Y \to X$ é uma aplicação contínua, $p_1(V)$ é um subconjunto compacto de X. E como p_1 é aberta, $p_1(V)$ é uma vizinhaça de x. Logo, X é localmente compacto. Analogamente mostramos que Y é localmente compacto.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, Elon Lages, *Espaços Métricos.* Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977.

[2] LIMA, Elon Lages, *Curso de Análise.* Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976.

[3] LIMA, Elon Lages, *Elementos de Topologia Geral.* Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1970.

[4] DOMINGUES, Higino Hugueros, *Espaços Métrico e Introdução à Topologia.* São Paulo, Atual, 1982.

[5] KUELKAMP, Nilo, *Introdução à Topologia Geral.* Florianópolis, UFSC, 1988.

[6] LIPSCHUTZ, Seymour, *Topologia Geral*; tradução de Alfredo Alves de Farias. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil; Brasília, INL, 1973.