Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática
Graduação em Licenciatura Matemática

Polinômios

De "Saber a Ensinar" a "Saber Ensinado" em 7ª Série

Um estudo didático

Orientanda **Karina Zolia Jacomelli**

Orientadora **Neri Terezinha Both Carvalho**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado por Karina Zolia Jacomelli
Curso de Matemática – Habilitação em Licenciatura
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Polinômios

De "Saber a Ensinar" a "Saber Ensinado" em 7ª Série

Um estudo didático

Composição da Banca: Neri Terezinha Both Carvalho (Orientadora)
Carmem Suzane Comitre Gimenez (Mestre)
Joana Benedita de Oliveira Quandt (Doutora)

Florianópolis
25/02/2003

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 05/SCG/03.

Prof. Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Profa. Neri Terezinha Both Carvalho
Orientadora

Profa. Carmem Suzane Comitre Gimenez

Profa. Joana Benedita de Oliveira Quandt

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse mas a aquisição, não é a presença mas o ato de atingir a meta."

Carl Friedrich Gauss

Dedico este trabalho
aos meus pais, Augustinho e Maria Bernardete,
às minhas irmãs, Karla e Karise,
aos meus sobrinhos, Jorge Luiz e Fernando,
e ao meu noivo, Alexandre.

Agradecimentos

À Deus, por ter me dado a vida e por ter me acompanhado durante todo o curso.

Aos meus pais, Augustinho e Maria Bernardete, por me oferecerem a oportunidade de estudar e por terem me apoiado até hoje.

Ao meu noivo, Alexandre, por estar ao meu lado em todos os momentos e por me apoiar nas difícies decisões.

À professora Neri, que além de uma professora paciente, perseverante e realizadora foi uma amiga compreensível. Meu agradecimento especial por ter se empenhado tanto neste trabalho e por ter ajudado a realizar um sonho.

Às professoras Carmem e Joana, por terem aceitado o convite de participarem da Banca Examinadora aceitando prontamente as exigências desta missão.

Aos professores, que se dedicaram o que puderam para esta realização.

Aos meus amigos e amigas, pelas palavras de incentivo e de afeto.

A todos aqueles que de certa forma incentivaram e desejaram esta conclusão.

Sumário

Introdução

Em um estudo de livros acadêmicos conforme o Trabalho de Conclusão de Curso de Koerich (2000), "Polinômios" como objeto matemático é estudado no contexto da Álgebra e envolve outros objetos como seqüência, anel, etc.

Nosso objetivo neste trabalho é conhecer como o objeto "Polinômio" se apresenta como saber a ensinar, a nível de Graduação, e como saber ensinado, a nível de Ensino Fundamental. Fizemos para isto, um breve estudo de Transposição Didática. Também, buscamos evidenciar elementos da concepção dos alunos de 7ª série do Ensino Fundamental sobre "Polinômios", bem como identificar dificuldades no tratamento algébrico de situações problemas.

Nosso estudo tem como referencial teórico elementos da Teoria Antropológica do Saber da Didática da Matemática. Esta teoria permite identificar como o conteúdo é trabalhado em uma Instituição.

No desenvolvimento do nosso trabalho temos no capítulo:

I. Um estudo dos Parâmetros Curriculares Nacionais, da Proposta Curricular de Santa Catarina e dos Planejamentos das Escolas para verificar a presença ou não do saber "Polinômio".
II. De forma simples, apresentamos elementos da Teoria Antropológica de Chevalhard, para podermos ter um referencial teórico quando trabalharmos com os livros escolhidos.
III. Um estudo do saber "Polinômio" como saber a ensinar. Neste capítulo trabalhamos com um dos livros da coleção Fundamentos da Matemática Elementar, estudamos a sua abordagem e seus exercícios.
IV. Um estudo do saber "Polinômio" como saber ensinado. Trabalhamos com dois livros didáticos tentando buscar os elementos da teoria de Chevalhard estudando a abordagem e os exercícios destes livros.
V. Uma experimentação. Neste capítulo procuramos identificar o que é este objeto "Polinômio" uma turma em fim de 7ª série do Ensino Fundamental.

Capítulo I

O Saber Polinômio no Ensino Fundamental segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Proposta Curricular de Santa Catarina e o Planejamento das Escolas

Neste primeiro capítulo, procuramos elementos sobre o saber "Polinômio", o que propõem os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), a Proposta Curricular de Santa Catarina (1998) e os Planejamentos anuais de escolas.

I.1. Polinômios nos Parâmetros Curriculares Nacionais

O ensino e aprendizagem de Matemática nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), relativo ao Ensino Fundamental, está dividido em quatro ciclos. O primeiro é destinado às 1ª e 2ª séries; o segundo, às 3ª e 4ª séries; o terceiro, às 5ª e 6ª séries; e o quarto e último ciclo são destinados às 7ª e 8ª séries.

Os PCNs apresentam os objetivos da Matemática do Ensino Fundamental. Em particular, eles apresentam os objetivos referente ao Ensino e Aprendizagem do quarto ciclo e, mais precisamente, os objetivos da Matemática deste ciclo:

> "*Neste ciclo, o ensino de matemática deve visar ao desenvolvimento:*
> [...]
> • *Do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levam o aluno a:*
> - *Produzir e interpretar diferentes escritas algébricas – expressões, igualdades e desigualdades –, identificando as equações, inequações e sistemas;*
> - *Resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;*
> - *Observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.*" (pág. 81)

Temos nestes objetivos uma intenção de trabalhar o pensamento algébrico.

Sob a rubrica "Conteúdos propostos para o ensino de Matemática no quarto ciclo" a álgebra tem seu lugar assegurada explicitamente:

> "*[...] a Álgebra é fundamental a compreensão dos conceitos como o de variável e o de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação.*" (pág. 84)

Mas é sob a rubrica "Conceitos e procedimentos" que recuperamos traços mais explícitos sobre "Polinômios":

- *"Construção de procedimentos para calcular o valor numérico e efetuar operações com expressões algébricas, utilizando as propriedades conhecidas.*
- *Obtenção de expressões equivalentes a uma expressão algébrica por meio de fatorações e simplificações."* (pág. 88)

Destacamos que no ensino do quarto ciclo, segundo os PCN, **Valor numérico**, **Operações com expressões algébricas**, **Fatoração de expressões algébricas** e **Simplificação de expressões algébricas**, são objetos de estudo seja como conceito matemático e ou como procedimento na 7ª ou 8ª série do Ensino Fundamental, pois o quarto ciclo, na organização dos PCNs, corresponde às 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental.

É importante notar que uma ênfase quanto a abordagem é dada para trabalhar com situações problemas, pois, segundo os PCN, temos:

> *"O ensino de álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e às idéias matemáticas."* [...] (pág. 84)

Notemos que o termo "Polinômios" não aparece nos PCNs. Mas, poderá ele ser neste nível visto simplesmente como uma expressão algébrica?

I.2. Polinômios na Proposta Curricular de Santa Catarina

A Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC) divide o ensino de Matemática do Ensino Fundamental em quatro campos de conhecimento: Campo Algébrico, Campo Geométrico, Campo Numérico e Estatística e Probabilidades.

Relativo ao Campo Algébrico, a PCSC da ênfase a representação genérica de uma situação e ao tratamento desta situação através da representação algébrica:

> *"O desenvolvimento do pensamento algébrico e de sua linguagem exige atividades ricas em significados que permitam ao aluno pensar genericamente, perceber regularidades e explicitar estas regularidades matematicamente, pensar analiticamente e estabelecer relações entre grandezas variáveis. A Álgebra, portanto contribui com uma forma especial de pensamento e de leitura da realidade.* [...] (pág. 111)

Vejamos quais os conteúdos que compõem o Campo Algébrico:

		ENSINO FUNDAMENTAL								ENSINO MÉDIO		
CAMPO ALGÉBRICO	PRÉ	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	1ª	2ª	3ª
1. ÁLGEBRA												
• Produção histórico cultural												
• Seqüências												
• Conceitos												
• Operações com expressões algébricas (cálculo algébrico, produtos notáveis e fatoração)												
• Expressões polinomiais de uma ou mais variáveis.												
2. RELAÇÕES E FUNÇÕES												
3. EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES												
4. MATRIZES E SISTEMAS LINEARES												

Relativo a "Polinômios", podemos destacar que na rubrica "Álgebra" operações com expressões algébricas tem lugar no Ensino Fundamental a partir da 7ª série, conforme os PCNs.

A PCSC explicita "Produtos notáveis" e "Expressões polinomiais de uma ou mais variáveis" como conteúdo a ser estudado. Porém, "Expressões polinomiais de uma ou mais variáveis" tem lugar somente na 3ª série do Ensino Médio.

Podemos ver que, segundo a PCSC, o conteúdo algébrico no Ensino Fundamental está distribuído nas séries: 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries. Destacamos que **Cálculo algébrico**, **Produtos notáveis** e **Fatoração** devem ser abordados a partir da 7ª série do Ensino Fundamental.

Considerando que, segundo os PCNs, o estudo com expressões algébricas é proposto no quarto ciclo, ou seja, nas 7ª e 8ª séries e que, segundo a PCSC, as operações com expressões algébricas tem lugar no Ensino Fundamental a partir da 7ª série, delimitaremos nosso estudo a classe de 7ª série.

I.3. Polinômios nos Planejamentos anuais de escolas de 7ª série

Para este estudo, optamos por analisar somente dois Planejamentos.

Após freqüente buscas em escolas da Grande Florianópolis, conseguimos um Planejamento anual de 7ª série de uma escola no Continente, a qual denominaremos por Planejamento A e outro de uma escola do Centro de Florianópolis, a qual denominaremos de Planejamento B.

Contrariamente aos PCNs e PCSC, no estudo dos dois Planejamentos anuais de 7ª série, identificamos a palavra "Polinômios" no contexto de Expressões Algébricas conforme apresentamos:

Planejamento A: Introdução ao cálculo algébrico – monômios e polinômios; Produtos notáveis – produto de dois binômios, quadrado da soma e da diferença, produto da soma de dois termos pela diferença dos mesmos dois termos, produto do tipo $(x + a).(x + b)$; Fatoração – comum, por agrupamento, diferença de quadrados.

Planejamento B: Expressões Algébricas em R – valor numérico, monômios e polinômios, termos semelhantes, redução, operações com monômios e polinômios; Produtos notáveis – 3 casos; Fatoração – 4 casos.

Notemos que o Planejamento B diferentemente do Planejamento A, pontua "Polinômios" como uma sub-rubrica de Expressões Algébricas explicitamente, o que nos leva a supor que "Polinômios" será estudado como uma expressão algébrica particular. O Planejamento A, na rubrica "Introdução ao cálculo algébrico" também explicita a palavra "Polinômio", mas não deixa claro se "Polinômio", ele mesmo, será objeto de estudo.

Em conclusão, este estudo nos dá uma incerteza sobre a presença do objeto "Polinômio" no ensino da 7ª série. Segundo os PCNs e PCSC, "Polinômio" poderá não ser objeto de estudo em 7ª séries. Já os Planejamentos estudados deixam entender "Polinômio" como uma "Expressão Algébrica" no ensino da 7ª série do Ensino Fundamental.

Capítulo II

Problemática e Quadro Teórico

Levando em conta que tanto nos Parâmetros Curriculares Nacionais quanto na Proposta Curricular de Santa Catarina a classe de 7ª série é a Instituição onde é feita a primeira abordagem sobre as "Expressões Algébricas", considerando mais precisamente que a abordagem da "Álgebra" é feita a partir da 5ª série do ensino fundamental e também considerando a presença de "Polinômios" na rubrica "Expressões Algébricas" nos Planejamentos anuais de escolas do Ensino Fundamental, questionamos:

- Como este saber se apresenta como saber a ensinar?
- Que objeto matemático é este, "Polinômios", na 7ª série do ensino fundamental?
- Com que saberes ele se relaciona? Qual seu habitat?
- O que é este objeto para os alunos em fim da 7ª série?
- O aluno em fim de 7ª série tem dificuldades de usar uma representação em linguagem simbólica numa situação geral?
- Os alunos operam com expressões algébricas de maneira natural?

Buscaremos repostas (parciais) a estas questões estudando o livro da coleção Fundamentos da Matemática Elementar[1] e dois livros didáticos da 7ª série do Ensino Fundamental. Faremos também, uma breve experimentação, em uma classe de 7ª série, a qual será composta de alguns exercícios sobre "Polinômios".

Nosso questionamento bem como o estudo dos livros didáticos e do livro da coleção Fundamentos, têm como referência a "Teoria Antropológica do Saber"[2] de Yves Chevalhard, mais precisamente sobre alguns aspectos da "Organização Praxiológica"[3].

A problemática ecológica é um meio de questionar a realidade do ensino. No contexto desta problemática buscamos conhecer onde e como um saber matemático vive: O que existe e por que? O que não existe e por que? etc, o que nos assegura que nossas questões se inserem no referencial teórico da "Teoria Antropológica do Saber".

---

[1] Iezzi, G., Fundamentos de Matemática Elementar 6, Atual Editora, 1993/São Paulo.
[2] Teoria Antropológica do Saber (Chevalhard 1992) faz uma analogia com a Biologia e trata o saber Matemático como um ser que tem um habitat (lugar) e um nicho (função).
[3] Organização Praxiológica: segundo a Teoria Antropológica, podemos identificar, relativo a um objeto Matemático em uma instituição específica (Exemplo: livro, classe), uma organização em termos de tarefa, técnica e tecnologia.

De uma maneira mais restrita, como nós buscaremos entender como vive o saber "Polinômio" na 7ª série, é importante considerarmos o 1° postulado da Teoria Antropológica do Saber:

> *"[...] Toda prática institucional se deixa analisar, de diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em sistemas de tarefas relativamente bem circunscritas, que se desdobram de acordo com o desenvolvimento da prática"*[4] (Tradução livre, pág. 84)

No estudo dos livros didáticos e do livro da coleção Fundamentos usaremos como referência o conceito de "Organização Praxiológica". Consideraremos neste estudo as noções de tipos de Tarefa, Técnicas e Tecnologia, pois segundo Chevalhard, estas noções permitem modelizar as práticas sociais em geral e a atividade matemática em particular. Vejamos com mais detalhe a seguir:

Técnica

De acordo com Chevalhard, a noção de técnica é dada como "maneira de fazer" particular, por exemplo, existe técnica para resolver equações do 2° e do 3° grau, para fazer demonstrações, etc.

Segundo Chevalhard,

> *"A vida institucional é então feita de um grande inventário de tarefas executadas segundo diferentes "maneiras de fazer" institucionalizadas"*[5] (pág. 84)

Tecnologia

Ainda em uma "Organização praxiológica", segundo Chevalhard, a tecnologia é o discurso teórico que garante a consistência da técnica na execução da tarefa.

Assim, para Chevalhard,

> *"Um complexo de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas em torno de um tipo de "tarefa" forma uma organização praxiológica pontual"*[6] (pág. 86)

---

[4] "[...] Toute pratique institutionnelle se laisse analyser, de differents points de vie et des differents façons, en un systeme de taches relativament bien circunscrites, qui se decompent dans le flux de la pratique" Chevalhard, 1999 (pag. 84)

[5] "La vie institutionnalle est donc faite d'um largo eventail de taches accomplies selon dês "maneies de faire" institutionnalisees". Chevalhard, 1999 (pág. 84)

[6] "Um complexe de techniques, de technologies et de theories organisees autour d'um type de taches forne uma organisation praxiologique ponctuelle". Chevalhard, 1999 (pag. 86)

Também, em nosso estudo, buscamos identificar elementos de Transposição Didática. Segundo Chevalhard (1992):

> *"Um contexto do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transposição adaptativas que vão torna-lo apto a tomar lugar entre os "objetos de ensino". O "trabalho" que de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática "*[7] (tradução livre, pág. 39)

A transposição que sofre um saber se passa em níveis diferentes:

- No nível científico (ou saber dos sábios): aquele produzido pelo matemático normalmente nas universidades ou institutos de pesquisa;
- Nível do saber a ensinar: o saber acadêmico e/ou aquele que é produzido na noosfera[8]. Exemplo: livros para-didáticos, brochuras, compilações, etc;
- Nível do saber ensinado: aquele produzido nos livros didáticos e/ou de classes propriamente ditas.

Este será nosso referencial teórico para o estudo dos livros didáticos e do livro da coleção Fundamentos da Matemática Elementar.

---

[7] "Um complexe de techniques, de technologies et de theories organisees autour d'um type de taches forne uma organisation praxiologique ponctuelle". Chevalhard, 1999 (pag. 86)

[8] Noosfera: Chevalhard designa como tudo o que interfere na seleção dos conteúdos que comporão os programas escolares e que determina as abordagens dos conteúdos e métodos, objetivos e formas de *Sistemas Didáticos* que conduzem o processo de ensino. Fazem parte da noosfera: cientistas, professores, especialistas, políticos, autores de livros, associações de pais e outros agentes da educação.

Sistemas Didáticos: segundo Brousseau, um sistema didático é descrito pelas relações que se estabelecem entre o professor, aluno e objeto matemático, onde existe a intenção de ensinar.

Capítulo III

Polinômios como Saber a Ensinar

Introdução

Neste capítulo colocamos em evidência o saber "Polinômios" como saber a ensinar[9].

Um estudo detalhado sobre Polinômios como saber a ensinar foi feito por Koerich (2000) com base, principalmente, no livro de Domingues e Iezzi (1995), por isso consideraremos somente a definição de "Polinômios" como referência.

Neste livro, onde o saber sobre "Polinômios" é formalizado teoricamente, nós identificamos dois aspectos de tratamento: "Polinômios como uma seqüência de um anel" e "Polinômios como função polinomial".

Polinômio como uma seqüência[10] de elementos de um anel[11]:

> *"Dado um anel A, uma seqüência (a_0, a_1, a_2, ...) sobre A recebe o nome de polinômio sobre A se existe um índice $r \in N$ tal que $a_m = 0$ para todo $m > r$". Neste caso a_i indica a imagem do elemento genérico $i \in N$, que são os termos da seqüência e $a_i \in A$.* (Domingues e Iezzi, 1995).

[9] Restringiremos nosso estudo aos livros Domingues e Iezzi (1995) e Iezzi (1993).

[10] Seqüência: "Chamamos de seqüência toda função definida no conjunto dos N^*. Uma função $f : N \rightarrow A$ também é chamada seqüência de elementos de A, sendo A um anel. Se a_i indica a imagem do elemento genérico $i \in N$, através da aplicação (seqüência) f, tal seqüência é indicada por $f = (a_0, a_1, a_2, ..., a_i, ...)$
Os elementos $a_0, a_1, a_2, ..., a_i, ...$ são chamados termos da seqüência." (Domingues e Iezzi, 1995)

[11] Anel: Um conjunto não vazio R é dito um *anel associativo* se em R estão definidas duas operações, indicadas por + e · respectivamente, tais que para todos *a*, *b* e *c* em R:

(1) $a + b$ está em R.
(2) $a + b = b + a$.
(3) $(a + b) + c = a + (b + c)$
(4) Existe um elemento 0 em R tal que $a + 0 = a$ (para cada a em R).
(5) Existe um elemento $-a$ em R tal que $a + (-a) = 0$.
(6) $a.b$ está em R.
(7) $a.(b.c) = (a.b).c$.
(8) $a.(b + c) = a.b + a.c$ e $(b + c).a = b.a + c.a$ (as duas leis distributivas) – Herstein, I.N. (1970)

Uma função polinomial $f_A : A \to A$, sendo A um anel:

> *"Seja A um anel comutativo com unidade. Para cada $f \in A[x]$ é possível definir a função $f_A : A \to A$, dada por $f_A(u) = f(u)$, para todo $u \in A$. Logo f_A associa a cada $u \in A$ o valor de f em u". Neste caso A[x] é o conjunto dos polinômios sobre o anel A.* (Domingues e Iezzi, 1995).

É interessante comentarmos que, neste nível de estudo o conceito de Equação Polinomial não é estudado.

Nós consideraremos que o livro da coleção "Fundamentos de Matemática Elementar 6" desenvolve um saber a ensinar mais perto do professor que ensina no Ensino Fundamental e Médio, enquanto que o livro acima citado é mais utilizado a nível de graduação em Matemática. Faremos então, um estudo do livro da coleção Fundamentos da Matemática Elementar usando como referência teórica, elementos da teoria apresentada no capítulo anterior. Mais precisamente, limitaremos este estudo a parte do desenvolvimento do conteúdo, para identificar os objetos e, aos exercícios, dos quais colocaremos em evidência os tipos de tarefas.

III.1. Estudo do livro nº 6 da coleção Fundamentos de Matemática Elementar

Este livro é composto de cinco capítulos, sendo que o 2º capítulo trata do objeto de nosso interesse: "Polinômios".

A seguir, um estudo da abordagem e dos exercícios do capítulo 2 deste livro.

Estudo da abordagem

O capítulo "Polinômios" é subdividido em seis partes: Polinômios, Igualdade, Operações, Grau, Divisão e Divisão por binômios do 1º grau.

Vejamos cada uma dessas partes:

a) Polinômios

Nesta primeira parte são apresentados dois conceitos:

- Função polinomial ou polinômio;
- Valor numérico – raiz.

A abordagem destes conceitos é feita dando diretamente a definição e, em seguida, alguns exemplos resolvidos.

Definição de função polinomial ou polinômio:

> *"Dada a seqüência de números complexos $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$, consideremos a função $f: C \to C$ dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. A função f é denominada função polinomial ou polinômio associado a seqüência dada." (pág. 54)*

Temos a concepção de polinômio como uma função complexa $f: C \to C$, onde os escalares são elementos de uma seqüência de números complexos.

Definição de valor numérico:

> *"Dados o número complexo a e o polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, chama-se valor numérico de f em a a imagem de a pela função f, isto é: $f(a) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + ... + a_na^n$ " (pág. 55)*

Notemos que, conseqüentemente da definição, o "valor numérico" do polinômio é a imagem de um número complexo por f.

A raiz do polinômio é o numero complexo a que tem por imagem o zero:

> *"[...] se a é um número complexo e f um polinômio tal que f(a)=0, dizemos que a é uma raiz ou um zero de f."* (pág. 55)

Temos que a concepção de polinômio aqui, é o de função polinomial definida em um anel particular, ou seja, os números complexos.

Com isto temos um primeiro ponto de transposição (passa o uso de um anel qualquer A para um anel particular C)

b) Igualdade

Sob a rubrica Igualdade são apresentados quatro conceitos: Polinômio nulo, Coeficientes do polinômio nulo, Polinômios idênticos e Coeficientes de polinômios idênticos.

Polinômio nulo:

> *"Dizemos que um polinômio f é nulo (ou identicamente nulo) quando f assume o valor numérico zero para todo x complexo. Em símbolos indicamos: $f = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,\ \forall x \in C$ " (pág. 55)*

Temos assim, que um polinômio *f* é nulo se $f: C \to \{0\}$, ou seja, se *f* é nulo então todos os seus coeficientes são nulos.

Teorema:

> *"Um polinômio f é nulo se, e somente se, todos os seus coeficientes forem nulos."* (pág. 56)

Polinômios idênticos:

"Dizemos que dois polinômios f e g são iguais (ou idênticos) quando assumem valores numéricos iguais para todo x complexo. Em símbolos indicamos: $f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in C$ *" (pág. 56)*

Teorema:

"Dois polinômios f e g são iguais se, e somente se, os coeficientes de f e g forem ordenadamente iguais." (pág. 57)

Observação: O teorema sobre os coeficientes de um polinômio nulo e este último são demonstrados.

c) Operações

Sob esta rubrica três operações são apresentadas: Adição, Subtração e Multiplicação de polinômios.

Quanto a Soma de polinômios, Diferença de polinômios e o Produto de polinômios, a abordagem é feita apenas apresentando as definições e, com exceção da diferença de polinômios, são apresentados alguns exemplos numéricos.

Vejamos, primeiramente, a definição da Soma de polinômios:

"Dados dois polinômios $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ *e* $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$, *chama-se soma de* f *com* g *o polinômio* $(f + g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_n + b_n)x^n$ *" (pág. 60)*

Deve ser feita aqui uma observação para dizer que, nesta definição encontrada no livro estudado, apresenta-se também em forma de somatório.

Notemos a particularidade que os dois polinômios dados *f* e *g* tem mesmo grau. Podemos pensar que é conseqüência de que podemos completar o polinômio com coeficientes nulos, sempre que necessário.

Após esta definição as seguintes Propriedades da adição são objetos de estudo através de um teorema: Associativa, Comutativa, Existência de elemento neutro e Existência de inverso aditivo.

A Diferença de polinômios é deduzida considerando a existência do inverso aditivo e a definição de soma:

> *"Tendo em vista o teorema anterior e dados dois polinômios* $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ *e* $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n$*, definimos diferença entre* f *e* g *como o polinômio* $f-g=f+(-g)$*, isto é:*
> $(f-g)(x)=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+...+(a_n-b_n)x^n$ *" (pág. 62)*

Definição do produto de polinômios:

> *"Dados dois polinômios* $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_mx^m$ *e* $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n$*, chama-se o produto* fg *o polinômio*
> $(fg)(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)x^2+...+a_mb_nx^{m+n}$ *" (pág. 62)*

As propriedades da Multiplicação: Associativa, Comutativa, Existência do elemento neutro e a Distributiva são apresentadas através de um teorema não demonstrado.

d) Grau de polinômio

Neste tópico são apresentadas: Definição, Grau da soma e Grau do produto.

Definição de grau de polinômio:

> *"Seja* $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_mx^m$ *um polinômio não nulo. Chama-se grau de* f*, e representa-se por* ∂f *ou gr f o número natural* p *tal que* $a_p \neq 0$ *e* $a_i=0$ *para todo* $i>p$*." (pág. 66)*

O grau da soma e do produto de polinômios são apresentados como teoremas.

Teorema do grau da soma:

> *"Se f, g e f + g são polinômios não nulos, então o grau de f + g é menor ou igual ao maior dos números* ∂f *e* ∂g*. Simbolicamente:* $\partial(f+g)\leq \max\{\partial f, \partial g\}$ *"* (pág. 67)

Teorema do grau do produto:

> *"Se f e g são dois polinômios não nulos, então o grau de fg é igual a soma dos graus de f e g. Simbolicamente:* $\partial(fg)=\partial f+\partial g$ *"* (pág. 68)

Esses dois teoremas são demonstrados e ilustrados por exemplos.

e) Divisão

Neste tópico encontramos cinco sub-itens: Definição, Divisões imediatas, Método de Descartes, Existência e unicidade do quociente e do resto e Método da chave.

Vejamos brevemente cada um deles:

Definição dada a Divisão:

"Dados dois polinômios f (dividendo) e $g \neq 0$ (divisor), dividir f por g é determinar dois outros polinômios q (quociente) e r (resto) de modo que se verifiquem as duas condições seguintes:

I) $q.g + r = f$

II) $\delta r < \delta g$ *(ou $r = 0$, caso em que a divisão é chamada exata)." (pág. 70)*

Divisões imediatas: duas situações de divisão imediata são apresentadas, isto é, o quociente e o resto são encontrados sem precisar efetuar cálculos.

No primeiro caso temos: o polinômio dividendo é um polinômio nulo, então tanto o quociente quanto o resto são também nulos.

No segundo caso temos: o polinômio dividendo não nulo e o seu grau menor que o grau do polinômio divisor, então o quociente é nulo e o resto é o próprio polinômio dividendo.

Método de Descartes: para este método da divisão precisa-se conhecer o grau do polinômio quociente e o do resto, conseguindo assim, construir esses polinômios genericamente. Com isso basta impor a primeira condição da definição de divisão, $q.g + r = f$, encontrando assim, uma igualdade de polinômios que permite achar seus coeficientes.

Exemplo:

"Dividir $f = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$ *por* $g = x - 2$.

Temos:

$$\partial q = 3 - 2 = 1 \Rightarrow q = ax^2 + bx + c$$

$$\partial r < 1 \Rightarrow \partial r = 0 \Rightarrow r = d$$

$$qg + r = f \Rightarrow (ax^2 + bx + c)(x - 2) + d = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$$

Desenvolvendo, temos para todo x:

$$ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x + (d - 2c) = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$$

Então, resulta:

$$\begin{cases} a = 5 \\ b - 2a = 1 \Rightarrow b = 2a + 1 \Rightarrow b = 11 \\ c - 2b = -10 \Rightarrow c = 2b - 10 \Rightarrow c = 12 \\ d - 2c = -24 \Rightarrow d = 2c - 24 \Rightarrow d = 0 \end{cases}$$

Resposta:

$q = 5x^2 + 11x + 12$ *e* $r = 0$ " (pág. 73)

Existência e unicidade do quociente e do resto: é apresentada através de um teorema demonstrado.

Teorema:

"Dados os polinômios

$$f = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_m \neq 0)$$
$$g = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0 \quad (b_n \neq 0)$$

existem um único polinômio q e um único polinômio r tais que $qg + r = f$, $\partial r < \partial g$ (ou $r = 0$)" (pág. 73)

Método da chave: é apresentado através de uma explicação de como encontrar os polinômios quociente e resto. Este método consiste em regras para efetuar a divisão.

Exemplo:

"Dividir $f = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ por $g = x^2 - 2x + 3$.

Resolução:

$$\begin{array}{rl}
3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1 & \underline{/x^2 - 2x + 3} \\
\underline{-3x^5 + 6x^4 - 9x^3} \qquad\qquad\qquad & 3x^3 + 4x - 1 \\
4x^3 - 9x^2 + 11x - 1 & \\
\underline{-4x^3 + 8x^2 - 12x} \quad & \\
-x^2 - x - 1 & \\
\underline{x^2 - 2x + 3} & \\
-3x + 2 &
\end{array}$$

Resposta: $q = 3x^3 + 4x - 1$ *e* $r = -3x + 2$

f) Divisão por binômios do 1º grau

Neste tópico são apresentadas várias maneiras de se efetuar uma divisão. Aqui temos, dentre as seis diferentes situações, teoremas que facilitam a busca do quociente e/ou resto. Veja os três teoremas os quais são demonstrados neste livro:

Teorema do resto:

"O resto da divisão de um polinômio f por $x - a$ é igual ao valor numérico de f em a." (pág. 82)

Teorema de D'Alembert:

"Um polinômio f é divisível por $x - a$ se, e somente se, a é a raiz de f." (pág. 82)

Teorema:

"Se um polinômio f é divisível separadamente por $x-a$ e $x-b$, com $a \neq b$, então f é divisível pelo produto $(x-a)(x-b)$." (pág. 85)

Ainda temos outras três diferentes situações. Vejamos indiretamente cada uma delas:

Divisão por binômios do 1° grau unitários[12]:

Nesta divisão podemos encontrar com grande facilidade o polinômio resto. Se um polinômio dividendo f que tem o grau maior ou igual a 1 está sendo dividido por $x-a$, então o resto r desta divisão será: $r = f(a)$

Algoritmo de Briot-Ruffini:

Este algoritmo é uma regra para a divisão de dois polinômios que se encontra na página 83 deste livro (Anexo 1).

Divisão por binômios do 1° grau quaisquer.

Este algoritmo é também uma regra para a divisão de dois polinômios e que encontra-se na página 93 deste livro (Anexo 2).

Em conclusão, identificamos neste livro a presença da definição de "Polinômio", considerado também como "Função Polinomial", associado a uma seqüência dada[13]. O "Valor numérico" é definido como a imagem de um número complexo por uma função f.

Além destas definições temos a de "Raiz" de um polinômio, "Polinômio nulo", "Polinômios idênticos" e "Grau" de polinômios.

Não podemos deixar de destacar a forte presença das operações com polinômios, pois neste livro encontramos as definições de "Adição", "Subtração", "Multiplicação" e muitas diferentes formas de se efetuar a "Divisão".

Para a divisão de polinômios foram identificadas a própria "Definição", as chamadas "Divisões imediatas" que é onde encontramos o quociente e o resto sem precisar efetuar cálculos, o "Método de Descartes", o "Método das chaves" e o "Algoritmo de Briot-Ruffini". Além destas divisões temos outras que particularizam o divisor para um binômio: "Divisões por binômio do 1° grau", "Divisões por binômio do 1° grau unitários" e "Divisões por binômios do 1° grau quaisquer".

---

[12] Binômio do 1° grau unitário é um binômio de grau e coeficiente dominante iguais a 1.

[13] Na abordagem do livro (Domingues e Iezzi), Polinômios e Função polinomial tem uma concepção diferente.

A presença de muitos teoremas demonstrados também enriquecem a abordagem deste capítulo, "Polinômios", do livro da coleção Fundamentos da Matemática Elementar.

Estudo dos exercícios

Para o estudo dos exercícios neste livro da coleção Fundamentos, explicitamos uma tipologia de exercícios baseado na "tarefa", como elemento da Organização Praxiológica.

Estudamos um total de 201 exercícios[14] neste livro, dos quais, segundo as tarefas, identificamos 14 tipos diferentes. Particularidades de cada tipo nos permitiu identificar sub-tipos.

Apresentamos a seguir, os tipos seguidos dos sub-tipos. Nesta apresentação ilustraremos somente cada tipo, pois os sub-tipos ficam caracterizados pelas condições particulares dadas.

Tipos de exercícios segundo a tarefa:

Tipo 1: Identificar um polinômio.

Exemplo

"*Quais das expressões representam um polinômio na variável x?*

a) x^5+x^3+2 *b)* $0x^4+0x^2$ *c)* 3 *d)* $x^{\frac{5}{2}}+3x^2$ *e)* $\left(\sqrt{x}\right)^4+x+2$

f) $x\sqrt{x}+x^2$ *g)* x^{15} *h)* $x+2$ *i)* x^2+2x+3 *j)* $\frac{1}{x^4}+x$

k) $x+x^3+x^6+x^4$ *l)* $(3x^2-5x+3)(7x^3+2)$" (pág. 57)

Tipo 2: Calcular o valor numérico.

Exemplo

"*Seja a função polinomial* $f(x)=x^{15}+x^{14}+x^{13}+\ldots+x^2+x+1$. *Calcule* $f(0), f(1), f(2)$." (pág. 58)

Sub-tipos:

- **De uma função num ponto dado**
- De uma função genérica num ponto dado conhecendo o conjunto de suas raízes
- De uma função num ponto dado conhecendo seu grau e algumas imagens de alguns pontos

---

[14] Nesta contagem, cada item dos exercícios que os continham foram contados como um exercício independente.

- De uma função num ponto dado que seja o resto de uma divisão
- Da soma dos coeficientes de um polinômio
- Para que um polinômio seja quadrado perfeito
- De um somatório dado

Tipo 3: Determinar valores reais.

Exemplo

"Determine os valores reais a e b de modo que o polinômio $f = x^4 - 3ax^3 + (2a - b)x^2 + 2bx + (a + 3b)$ *seja divisível por* $g = x^2 - 3x + 4$. *"* (pág. 79)

Sub-tipos:

- Para que uma função dada seja um polinômio nulo
- Para que a expressão quociente dada assuma um valor sem depender da variável x
- Para satisfazer a igualdade de polinômios envolvendo as operações
- Referente a um dos coeficientes de um polinômio
- **Para que os polinômios sejam divisíveis**[15]
- Para que o resto de uma divisão não dependa de x
- Para que o resto de uma divisão seja diferente de zero
- Para que os restos de duas divisões sejam iguais
- Que seja o coeficiente de um termo de um polinômio que satisfaça algumas condições
- Para que o quociente seja de um determinado grau
- Satisfazendo algumas condições de divisão

Tipo 4: Calcular uma expressão.

Exemplo

"Calcule h(x) tal que: $h(x) = (x + 2)^2 + (2x - 1)^3$. *"* (pág. 64)

Sub-tipos:

- Sabendo que o polinômio dado é nulo
- Resultante de uma soma ou uma subtração de polinômios
- Resultante da multiplicação de polinômios

---

[15] Dois polinômios são divisíveis: estamos nos referindo a um polinômio que divide outro ou a um polinômio que é divisível pelo outro.

- **Aplicando as operações e reduzindo os termos semelhantes**
- Satisfazendo a igualdade de polinômios envolvendo as operações
- Para que duas funções sejam divisíveis
- Resultante de uma divisão utilizando Briot-Ruffini
- Que seja o resto de uma divisão

Tipo 5: Determinar uma condição ou uma relação.

Exemplo

"Dado o polinômio $f = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$*, determine a condição para que f seja um cubo perfeito."* (pág. 80)

Sub-tipos:

- Para que dois polinômios dados sejam iguais
- Para que a expressão quociente dada assuma um valor sem depender da variável x
- Para que um polinômio seja quadrado perfeito
- Para que a divisão seja exata
- **Para que um polinômio seja um cubo perfeito**
- Do que se pode dizer sobre o grau de um polinômio

Tipo 6: Determinar um polinômio ou função polinomial.

Exemplo

"Determine uma função polinomial f(x) de grau 2 tal que $f(x) = f(-x)$ *para todo* $x \in C$*."* (pág. 69)

Sub-tipos:

- Aplicando as operações e reduzindo os termos semelhantes
- Conhecendo seu grau e algumas imagens de alguns pontos
- **Satisfazendo condições de igualdades, divisibilidade, entre outras**
- Que seja o dividendo da divisão
- Que seja o divisor da divisão
- Que seja o quociente da divisão
- Que seja o resto da divisão

Tipo 7: Classificar os polinômios.

Exemplo

"*Dizemos que os polinômios* $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ *são linearmente independentes (L.I.) se a relação* $a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x) = 0$ *implica* $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, *em que* a_1, a_2, a_3 *são números reais. Caso contrário, dizemos que* $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ *são linearmente dependentes (L.D.). Classifique os polinômios* $p_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $p_2(x) = x^2 + 1$ *e* $p_3(x) = x^2 + 2x + 2$ *quanto à dependência linear.*" (pág. 65)

Tipo 8: Demonstrar, mostrar ou provar.

Exemplo

"*Prove que* $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ *é divisível por* $(x-1)^2$." (pág. 96)

Sub-tipos:

- Que a função dada é um polinômio nulo
- Que os polinômios dados são iguais
- Que uma expressão é divisível por um número real se obedecer a uma condição
- Uma igualdade sabendo que dois polinômios são divisíveis
- Que se dois polinômios são divisíveis então irá satisfazer a uma condição
- Se a soma dos coeficientes de um polinômio é nula então satisfaz a condição
- **Que dois polinômios são divisíveis**
- Que dois polinômios não são divisíveis

Tipo 9: Verificar

Exemplo

"*Verifique se existem valores de k para os quais o trinômio* $(k+1)x^2 + (k-3).x + 13$ *pode ser escrito como uma soma de quadrados do tipo* $(x+a)^2 + (x+b)^2$." (pág. 66)

Sub-tipos:

- **Se existem valores para que o polinômio possa ser escrito como uma soma de quadrados**
- Se existem valores para satisfazer uma condição entre polinômios
- Um polinômio divide outro

Tipo 10: Decompor um polinômio.

Exemplo

"Decomponha o trinômio $-6x^2+36x-56$ *em uma diferença de dois cubos do tipo* $(x-b)^3-(x-a)^3$*."* (pág. 66)

Sub-tipos:

- **Em uma diferença de dois cubos**
- Num produto de dois polinômios

Tipo 11: Determinar o grau

Exemplo

"Dados os polinômios P(x) de grau m e S(x) de grau n (n < m), o resto da divisão de P(x) por S(x) tem grau p. Determine os possíveis valores de p." (pág. 78)

Sub-tipos:

- De polinômios
- De uma soma de polinômios
- De um produto de polinômios
- De um polinômio conhecendo uma das variáveis desconhecidas
- Do polinômio dividendo
- **Do polinômio resto**
- Do polinômio quociente

Tipo 12: Resolver uma inequação.

Exemplo

"Seja $P(x)$ *um polinômio do 2º grau tal que* $P(0)=-20, P(1)+P(2)=-18$ *e* $P(1)-3P(2)=6$*. Resolva a inequação* $P(x)<0$*."* (pág. 69)

Tipo 13: Dividir polinômios.

Exemplo

"Divida f por g aplicando o método de Descartes:

a) $f = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 4x - 3$ *e* $g = x^3 - 2x + 1$

b) $f = x^4 - 2x + 13$ *e* $g = x^2 + x + 1$

c) $f = 2x^5 - 3x + 12$ *e* $g = x^2 + 1$ " (pág. 78)

Sub- tipos:

- **Aplicando o método de Descartes**
- Aplicando o método da chave
- Aplicando Briot-Ruffini
- Sem exigir o método

Tipo 14: Enunciar um teorema.

Exemplo

"Enuncie o teorema da existência e unicidade do quociente e do resto da divisão de dois polinômios de uma variável A(z) e B(z)." (pág. 98)

Apresentamos a seguir, a quantidade de exercícios no capítulo, referente a cada tipo e sub-tipo apresentados acima.

Dos 201 exercícios estudados, temos:

- Do tipo 1 (identificar um polinômio) 12 sobre 201, ou 6%.
- Do tipo 2 (calcular o valor numérico) 13 sobre 201, ou 6,5%. Dos quais temos:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
De uma função num ponto dado	4
De uma função genérica num ponto dado conhecendo o conjunto de suas raízes	1
De uma função num ponto dado conhecendo seu grau e algumas imagens de alguns pontos	3
De uma função num ponto dado que seja o resto de uma divisão	2
Da soma dos coeficientes de um polinômio	1
Para que um polinômio seja quadrado perfeito	1
De um somatório dado	1

- Do tipo 3 (determinar valores reais) 42 sobre 201, ou 21%. Dos quais temos:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Para que uma função dada seja um polinômio nulo	2
Para que a expressão quociente dada assuma um valor sem depender da variável x	3
Para satisfazer a igualdade de polinômios envolvendo as operações	6
Referente a um dos coeficientes de um polinômio	1
Para que os polinômios sejam divisíveis	23
Para que o resto de uma divisão não dependa de x	1
Para que o resto de uma divisão seja diferente de zero	2
Para que os restos de duas divisões sejam iguais	1
Que seja o coeficiente de um termo de um polinômio que satisfaça algumas condições	1
Para que o quociente seja de um determinado grau	1
Satisfazendo algumas condições de divisão	1

- Do tipo 4 (calcular uma expressão) 19 sobre 201, ou 9,5%. Dos quais temos:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Sabendo que o polinômio dado é nulo	1
Resultante de uma soma ou uma subtração de polinômios	3
Resultante da multiplicação de polinômios	4
Aplicando as operações e reduzindo os termos semelhantes	2
Satisfazendo a igualdade de polinômios envolvendo as operações	4
Para que duas funções sejam divisíveis	2
Resultante de uma divisão utilizando Briot-Ruffini	2
Que seja o resto de uma divisão	1

- Do tipo 5 (determinar uma condição ou uma relação) 10 sobre 201, ou 5%. Dos quais temos:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Para que dois polinômios dados sejam iguais	1
Para que a expressão quociente dada assuma um valor sem depender da variável x	1
Para que um polinômio seja quadrado perfeito	2
Para que a divisão seja exata	3
Para que um polinômio seja um cubo perfeito	2
Do que se pode dizer sobre o grau de um polinômio	1

- Do tipo 6 (determinar um polinômio ou função polinomial) 39 sobre 201, ou 19%. Dos quais temos:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Aplicando as operações e reduzindo os termos semelhantes	1
Conhecendo seu grau e algumas imagens de alguns pontos	2
Satisfazendo condições de igualdades, divisibilidade, entre outras	5
Que seja o dividendo da divisão	4
Que seja o divisor da divisão	2
Que seja o quociente da divisão	6
Que seja o resto da divisão	19

- Do tipo 7 (classificar os polinômios) 1 sobre 201, ou 0,5%.

- Do tipo 8 (demonstrar, mostrar ou provar) 14 sobre 201, ou 7%. Dos quais temos:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Que a função dada é um polinômio nulo	1
Que os polinômios dados são iguais	1
Que uma expressão é divisível por um número real se obedecer a uma condição	1
Uma igualdade sabendo que dois polinômios são divisíveis	1
Que se dois polinômios são divisíveis então irá satisfazer a uma condição	2
Se a soma dos coeficientes de um polinômio é nula então satisfaz a condição	1
Que dois polinômios são divisíveis	6
Que dois polinômios não são divisíveis	1

- Do tipo 9 (verificar) 3 sobre 201, ou 1,5%. Dos quais temos:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Se existem valores para que o polinômio possa ser escrito como uma soma de quadrados	1
Se existem valores para satisfazer uma condição entre polinômios	1
Um polinômio divide outro	1

- Do tipo 10 (decompor um polinômio) 2 sobre 201, ou 1%. Dos quais temos:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Em uma diferença de dois cubos	1
Num produto de dois polinômios	1

- Do tipo 11 (determinar o grau) 12 sobre 201, ou 6%. Dos quais temos:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
De polinômios	4
De uma soma de polinômios	1
De um produto de polinômios	1
De um polinômio conhecendo uma das variáveis desconhecidas	1
Do polinômio dividendo	1
Do polinômio resto	2
Do polinômio quociente	2

- Do tipo 12 (resolver uma inequação) 1 sobre 201, ou 0,5%.

- Do tipo 13 (dividir polinômios) 32 sobre 201, ou 16%. Dos quais temos

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Aplicando o método de Descartes	3
Aplicando o método da chave	5
Aplicando Briot-Ruffini	5
Sem exigir o método	19

- Do tipo 14 (enunciar um teorema) 1 sobre 201, ou 0,5%.

Se considerarmos a quantidade de exercícios do tipo 1 (Identificar um polinômio), tipo 3 (Determinar valores reais), tipo 6 (Determinar um polinômio ou função polinomial), tipo 11 (Determinar o grau), temos 105 sobre 201 exercícios, ou 52% dos exercícios que tem por objetivo trabalhar a expressão do "Polinômio".

Das operações com polinômios é a divisão que é dado ênfase: temos 32 de 201 exercícios. Ou ainda, 32 da Divisão de polinômios contra 7 exercícios que envolve explicitamente as operações de adição, subtração e multiplicação como sub-tipos do tipo 4 (calcular uma expressão).

Em conclusão, neste livro existe uma tendência de trabalhar o polinômio em si mesmo e entre as operações é a divisão que tem um lugar de destaque. Também, a partir deste estudo temos uma tipologia de exercícios no contexto do saber a ensinar.

Temos assim, uma amostra de como o saber "Polinômio" aparece como saber a ensinar. Notemos que ele já foi elementarizado se comparado com a abordagem do livro de Domingues – Iezzi (1995) tendo em vista, pensamos nós, em função do público alvo ou a instituição que se destina (Ensino Fundamental e Médio).

Remarcamos que neste livro "Polinômios" é o mesmo que "Função polinomial" e que o anel a ser trabalhado é particularizado para o conjunto dos números complexos, diferentemente de Domingues – Iezzi (1995), que tem uma definição para "Polinômios" e outra para "Função polinomial" além de que o anel a ser trabalhado pode ser qualquer.

Vejamos a seguir, como o objeto "Polinômio" é ensinado em 7ª série segundo a proposição dos livros didáticos.

Capítulo IV
Polinômios como Saber Ensinado

Introdução

Neste capítulo centraremos nosso estudo nos "livros didáticos". Consideraremos que estes são o habitat onde encontramos o objeto "Polinômio" na forma de saber ensinado no Ensino Fundamental, ou seja, enquanto saber escolar. Nosso objetivo neste capítulo é o de dar elementos de resposta as nossas questões:

- Que objeto matemático é este, Polinômios, na 7ª série do ensino fundamental?
- Com que saberes ele se relaciona?
- Qual a organização praxiológica segundo o tipo de tarefa?

Para isto, faremos um estudo de dois livros didáticos:

- Mori, J. e Onaga, D.S.; Matemática idéias e desafios, 7ª série, editora Saraiva, (2001). Capítulos: 2, 3, 4 e 5
- Jakubovic, J.; Lellis, M.; Centurión, M.; Matemática na medida certa, 7ª série – Ensino fundamental, editora Scipione, (1999). Capítulo 3

O primeiro livro, "Matemática idéias e desafios", foi escolhido porque é utilizado em escolas estaduais na região da Grande Florianópolis e por ser aprovado pelo MEC. Na escolha do segundo livro, "Matemática na medida certa", também usamos o critério de ser aprovado pelo MEC.

Na parte de abordagem do conteúdo, buscamos identificar os conceitos apresentados de maneira que nos permita fazer uma breve comparação com o estudo do livro da coleção Fundamentos, estudado no capítulo anterior.

Para o estudo dos exercícios, explicitamos, a priori, uma tipologia de exercícios, para a qual usaremos como referência de base a listagem feita por Koerich 2000 (Anexo 3). Nós, diferentemente de Koerich (2000), enfocaremos mais pontualmente o tipo de tarefa.

Apresentamos a seguir, uma tipologia de exercícios que pensamos a priori, contemplar as proposições dos exercícios dos livros didáticos.

IV.1. Tipologia definida a priori

Esta tipologia foi definida com base na listagem de Koerich (2000) como dito anteriormente e, com base no estudo dos exercícios segundo o tipo de tarefa.

Daremos para cada tipo um exemplo para esclarecer o leitor.

Tipo 1: Identificar expressões algébricas.

Exemplo

"Considere as expressões:

$A = x^2 - 7x + 12$
$B = x^2 - 4$
$C = 3x^3 - 7x^2 + 5x + 12$
$D = x^2 - 4x + 4$
$E = x^2 + 10x + 25$
$F = a^5 + 2ab + b^2$

Quais dessas expressões são trinômios?" (Matemática na medida certa, pág. 77)

Tipo 2: Traduzir frases de linguagem natural e simbólica para expressão algébrica.

Exemplo

"Traduza as frases usando uma expressão algébrica:

a) A soma do quadrado de um número x com um número y.
b) O quociente entre o quadrado de um número a e o quadrado de um número b, diferente de zero.
c) O produto de 2 por um número a e um número real b.
d) O quociente entre o quadrado de um número m e 2."

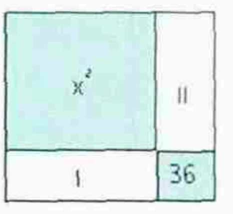
(Matemática – idéias e desafios, pág. 27)

Tipo 3: Determinar áreas.

Exemplo:

"Nesta figura, indicamos a área de dois quadrados: um tem área x^2, onde x é um número real positivo; o outro tem área 36.

a) Qual é a área do retângulo I? E do retângulo II?
b) Qual é a área total da figura?"



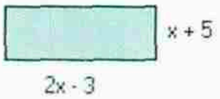
(Matemática na medida certa, pág. 68)

Tipo 4: Calcular perímetro.

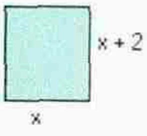
Exemplo

"A seguir, temos alguns retângulos. As medidas dos lados estão indicadas nas figuras. Obtenha os perímetros desses retângulos."

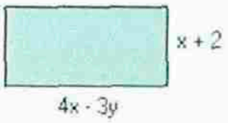
a)



b)



c)

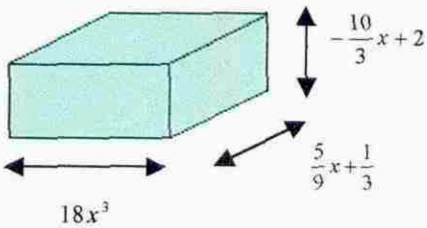


(Matemática na medida certa, pág. 56)

Tipo 5: Calcular volume.

Exemplo

"Determine uma expressão para o volume do bloco retangular da figura."



(Matemática – idéias e desafios, pág. 55)

Tipo 6: Calcular valor numérico.

Exemplo

"Qual é o valor numérico do binômio $\frac{a^3}{6} + 51b^2$ *para* $a = -4$ *e* $b = \frac{1}{3}$*?*

(Matemática – idéias e desafios, pág. 47)

Tipo 7: Deduzir expressão algébrica a partir de situação problema do cotidiano.

Exemplo

"A altura de Vareta é 3200 unidades a menos que um quinto do quadrado da altura de Cacá. Represente a altura de Cacá por x e use uma expressão algébrica para indicar a altura de vareta." (Matemática – idéias e desafios, pág. 27)

Tipo 8: Operar com polinômios.

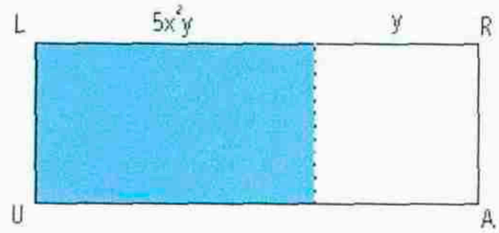
Exemplo

"A soma algébrica de dois monômios é o monômio $17bx^5$*. sabendo-se que um deles é igual a* $15bx^5$*, qual é o outro monômio?"* (Matemática – idéias e desafios, pág. 35)

Tipo 9: Calcular comprimentos

Exemplo

"Neste retângulo, as letras x e y representam números.



Responda:

a) Qual é o polinômio que representa o comprimento LR de LUAR?
[...]" (Matemática – idéias e desafios, pág. 53)

Tipo 10: Simplificar expressões algébricas.

Exemplo

"Simplifique as expressões:

a) $a.(2a+b+2)+b.(-a-b+12)-12.(a+b-1)$

b) $(3x-2).(2x+3)-6x.(x+1)$ " (Matemática – idéias e desafios, pág. 56)

Tipo 11: Identificar o valor das variáveis na expressão.

Exemplo

"Identifique o valor de x para o qual não existe o valor numérico das seguintes expressões algébricas:

a) $\frac{x-2}{2x-5}$ *b)* $\frac{2x-5}{8-x}$ *c)* $\frac{2x^2-1}{6x+1}$ *d)* $\frac{15x^2}{18x+36}$ "

(Matemática – idéias e desafios, pág. 28)

Tipo 12: Escrever expressão algébrica.

Exemplo

"Escreva três monômios que tenham como:

a) Parte literal ab^4

b) Coeficiente –3,5" (Matemática – idéias e desafios, pág. 31)

Tipo 13: Deduzir expressão algébrica

Exemplo

"Nas seguintes seqüências, indique o número que está na posição n, com $n \in N^*$.

a) 2; 4; 6; 8; ... *c) 7; 9; 11; 13; ...*

b) 1; 3; 5; 7; ... *d) 2; 4; 8; 16; ..."* (Matemática na medida certa, pág. 44)

Tipo 14: Comparar expressões algébricas

Exemplo

"Dados os polinômios $A = a^2 - 2ab + b^2$ e $B = (a - b)^2$, calcule os seus respectivos valores numéricos quando:

a) $a = 3$ e $b = -7$.

b) $a = -0{,}4$ e $b = \frac{3}{5}$.

c) Escolha um valor para a e outro para b.

d) Compare os valores numéricos dos polinômios A e B, em cada item anterior. O que você observou?" (Matemática – idéias e desafios, item d, pág. 47)

Tipo 15: Calcular produtos notáveis

Exemplo

"Utilizando a regra do produto notável, calcule:

a) $\left(\frac{x}{3} + y\right)^2$ *b)* $\left(\frac{y^2}{4} + y\right)^2$ " (Matemática – idéias e desafios, pág. 63)

Tipo 16: Fatorar polinômios

Exemplo

"Qual é uma forma fatorada da expressão $36ax^2 - 60axy + 25ay^2$?" (Matemática – idéias e desafios, pág. 83)

Tipo 17: Exercícios recreativos

Exemplo

" *Decifrando um enigma*

Você gosta de decifrar enigmas?

Então, tente este!

Renato é o irmão caçula de Júlia. Os dois bolaram um enigma e o passaram para um amigo.

$3j^2 + jr^2 - 3jr - r^3$
QUAL É O NÚMERO?
Pense!
Observe as "dicas"
... e pense...

DICAS
j – idade de Júlia r – idade de Renato Renato é sete anos mais novo do que Júlia e $3j + r^2$ é igual a 57.

E então?

Você já encontrou o número?" (Matemática – idéias e desafios, pág. 79)

IV.2. Estudo dos Livros Didáticos

IV.2.1. Estudo do livro didático "Matemática – idéias e desafios"[16]

O livro é composto de 14 capítulos dos quais 4 deles tratam de alguma forma do objeto de nosso interesse: Introdução ao Cálculo Algébrico, Polinômios, Produtos Notáveis e Fatoração.

Optamos estudar estes itens para podermos visualizar como estes objetos se relacionam e, em particular, a inserção do objeto "Polinômio" no ensino.

Neste livro, conforme a Proposta Curricular de Santa Catarina, é o campo da Álgebra o habitat de "Polinômios". Mori e Onaga definem Álgebra como "*um conjunto de conceitos e procedimentos matemáticos que permite representar diversas situações e problemas numa linguagem própria*". (pág. 23)

Na seqüência, faremos um estudo da abordagem e dos exercícios de cada um dos tópicos mencionados acima.

Estudo do desenvolvimento do conteúdo

Apresentamos resumidamente a abordagem que é dada e a ilustramos com alguns exemplos. Este estudo nos dá uma visão panorâmica de como os temas são estudados.

Estudo do capítulo: Cálculo Algébrico

Este capítulo é subdividido em três partes:

A. Expressões algébricas;
B. Monômios;
C. Operações com monômios.

Vejamos cada uma destas partes:

A. Expressões Algébrica

Dois conceitos são apresentados:

- Expressão algébrica
- Valor numérico da expressão algébrica.

[16] Mori, J. e Onaga, D.S.; Matemática idéias e desafios, 7ª série, editora Saraiva, (2001).

A abordagem é feita através da modelagem de uma situação problema do cotidiano. Uma letra (variável) é introduzida para representar o valor desconhecido.

Exemplo:

"Em um parque de diversões a entrada custa R$ 2,00 e cada brinquedo custa R$ 0,50. Se Joana entrar nesse parque, qual será o seu gasto se ela for em 1 brinquedo? E em 2 brinquedos? E em 5 brinquedos? E em 13 brinquedos?". (pág. 24)

Como uma informação complementar são apresentadas:

- Expressão algébrica racional fracionária: tem variável no denominador. Exemplo: $\frac{x}{x^2-4}$
- Expressão algébrica irracional: tem variável no radicando. Exemplo: $2m-\sqrt{10m^3-n^3}$
- Expressão algébrica racional inteira: não tem variáveis nem no denominador nem no radicando. Exemplo: $\frac{30.a^4.b}{7}$

Temos ainda, que a concepção atribuída ao valor numérico de uma expressão é: valor numérico é o valor obtido quando substituímos a variável de uma expressão algébrica por números.

Exemplo:

Voltando ao exemplo do parque de diversões citado acima, diga qual o preço que Joana deverá pagar para brincar em 5 brinquedos. E para brincar em 10?

O descrito acima nos dá uma "organização didática"[17] que consiste de uma abordagem através de uma situação problema onde a variável é introduzida como valor desconhecido e num momento de institucionalização[18] onde os tipos de expressões algébricas são destacadas e o valor numérico é estudado através de exemplos onde a situação problema de abordagem de expressão algébrica foi retomado.

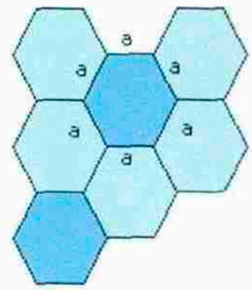
B. Monômios

A abordagem é feita através de um problema de geometria envolvendo a noção de perímetro. A letra ou a variável da expressão algébrica, representa comprimento, ou seja, uma medida da figura geométrica utilizada.

[17] "Organização didática" expressa uma maneira de abordagem de um conteúdo de matemática.
[18] Institucionalização: o professor atribui um estatuto ao tema estudado em classe.

Exemplo:

"Na figura dada todos os hexágonos são iguais.



A letra a representa a medida de um lado de um deles. Qual é a expressão algébrica que representa o perímetro de um dos hexágonos?". (pág. 30)

Analisando esta situação problema, verificamos que a expressão algébrica será definida como uma expressão do perímetro do hexágono: $6a$. Esta expressão é designada monômio, o qual é definido como segue:

> *"monômios são expressões algébricas inteiras que envolvem apenas o produto de números reais por letras. As letras são as variáveis e representam números reais".* (pág. 30)

Também, um certo destaque foi dado a "monômios semelhantes", através de um exemplo e pela concepção de que são semelhantes quando possuem partes literais[19] iguais.

Temos assim, uma abordagem através de uma situação problema que mostra uma expressão algébrica, em particular, "os monômios", que se dividem em monômios semelhantes e não semelhantes.

C. Operações com Monômios

As operações estudadas nesta parte são:

- Adição e subtração;
- Multiplicação;
- Divisão;
- Potenciação de monômios com expoentes inteiros positivos.

Com exceção da multiplicação, o estudo destas operações foi feito através de exemplos e em seguida é apresentada uma generalização, isto é, uma definição das operações:

[19] Parte literal é a parte do monômio expressa em letras.

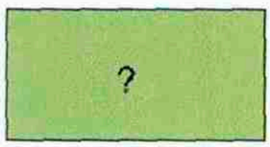
- *Adição e subtração: "A soma ou a diferença de dois monômios semelhantes é um monômio com:*
  Coeficiente – igual à soma algébrica dos coeficientes;
  Parte literal – igual à desses monômios". (pág. 33)

- *Divisão: "O quociente de dois monômios, com o divisor diferente de zero, tem:*
  Coeficiente – igual ao quociente dos coeficientes desses monômios;
  Parte literal – igual ao quociente das partes literais desses monômios". (pág. 37)

- *Potenciação de monômios com expoentes inteiros positivos: "A potência de um monômio é um monômio com:*
  Coeficiente – igual à potência do coeficiente desse monômio;
  Parte literal – igual à potência da parte literal desse monômio". (pág. 41)

Na multiplicação a abordagem é feita através de uma situação problema envolvendo geometria, onde a expressão algébrica resultante da operação representa um valor desconhecido. Exemplo:

> *"Na figura, a medida da altura é dois terços da medida da base. Se x representa um número que é a medida da base, qual é a expressão algébrica que representa a área desse retângulo?".* (pág. 36)



Percebemos neste exemplo que duas tarefas devem ser realizadas: Tarefa 1 – Determinar a expressão algébrica que indica a medida da altura; Tarefa 2 – Determinar a expressão algébrica que representa a área do retângulo.

Notemos que para resolver este problema é necessário saber a definição de área do retângulo. A partir do cálculo da área, base vezes altura, a multiplicação de monômios é definida por:

> *"O produto de dois ou mais monômios é um monômio com:*
> *Coeficiente – igual ao produto dos coeficientes desses monômios;*
> *Parte literal – igual ao produto das partes literais desses monômios".* (pág. 36)

Temos assim, uma organização didática onde três das operações: *Adição e subtração, Divisão e Potenciação de monômios com expoentes inteiros positivos* são abordadas através de exemplos que ilustram a definição e a *Multiplicação* que é abordada através de uma situação problema onde a definição de multiplicação é formalizada na resolução do problema.

Estudo do capítulo: Polinômios

Remarcamos que nosso objeto de estudo é, aqui, título do capítulo. Este capítulo está dividido em duas partes:

A. Polinômios;

B. Polinômios: operações.

Centramos nossa atenção sobre estes tópicos, pois buscamos conhecer o que é este objeto "Polinômios" na 7ª série do Ensino Fundamental.

Vejamos a abordagem de cada um dos tópicos:

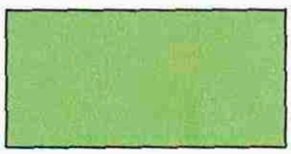
A. Polinômios

Sob esta rubrica identificamos os três itens seguintes:

- Introdução ao estudo de polinômios;
- Redução de termos semelhantes;
- Polinômios com uma variável.

Introdução ao estudo de polinômios: a abordagem é feita através de uma situação problema. Vejamos o exemplo dado:

"O jardim da casa de Décio é retangular, sendo o comprimento o dobro da largura.



Aumentando em x metros o comprimento como ficará a área? (pág. 44)

Podemos perceber que esta situação problema trabalha a passagem da linguagem natural para a simbólica. Será necessário identificar e representar as medidas do jardim retangular apresentado em linguagem simbólica e usar o conceito de área.

Acrescentando a área inicial com a nova área teremos uma expressão algébrica que é denotada por "Polinômio". O conceito de polinômios é, então, apresentado por:

"Polinômios é uma soma algébrica de monômios" (pág. 45)

Outras informações complementam o estudo de polinômios:

- Os "termos" de um polinômio são "monômios";

- Um polinômio com dois termos pode ser chamado de "binômio" assim como um polinômio com três termos pode ser chamado de "trinômio";

Como uma observação é dada a seguinte informação:

"Polinômios são expressões algébricas racionais e inteiras; portanto, as expressões seguintes não são polinômios:

- $\sqrt{2x+1} - x^2 y$
- $\dfrac{3x^3}{4y - xy}$ " (pág. 45)

Desta forma, temos uma abordagem de "Polinômios" através de uma situação problema envolvendo um conceito já conhecido (área de retângulos).

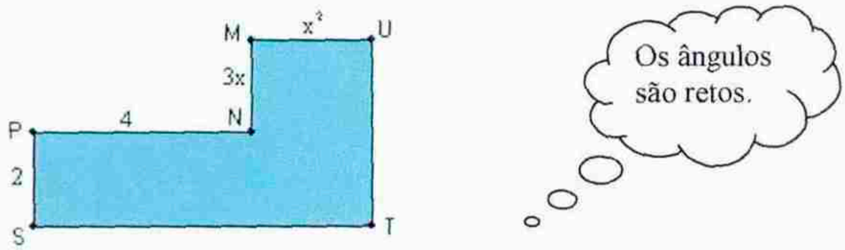
Redução de termos semelhantes: um exemplo algébrico mostra que a tarefa de reduzir um polinômio a termos semelhantes, consiste em adicionar os monômios semelhantes do polinômio.

Polinômios com uma variável: foi definido da seguinte forma:

> *"Chamamos de polinômio com uma variável os polinômios cujos termos têm uma só letra na parte literal"* (pág. 48)

Este conceito é apresentado através de uma situação problema envolvendo geometria. Veja o exemplo:

"Nesta figura a letra x representa um número. Qual é a expressão algébrica que representa a área desta figura?



(pág. 48)

Resolução do exemplo: decompor a figura em três retângulos e usar a definição de área. A fórmula para o cálculo da área é a ferramenta primeira a ser mobilizada, depois a adição de monômios resultando em um polinômio.

Uma vez definido polinômio com uma variável, a seguinte definição de grau de polinômio é dada:

O grau de um polinômio é o maior expoente da variável deste polinômio, com coeficiente diferente de zero.

Ainda nesta mesma rubrica, temos as noções de Polinômios completos e de Polinômios incompletos. Vejamos como informação complementar:

- "Polinômios completos

  $y^2 - 2y - 8$ $\quad 8y^0$

  Este é um polinômio de grau 2 completo, porque nele aparecem termos com todas as potências da variável y.

- Polinômios incompletos

  $2x^3 - 9$

  Este é um polinômio de grau 3 incompleto, porque nele não aparecem termos com expoente 2 e 1." (pág. 49)

B. Polinômios: Operações

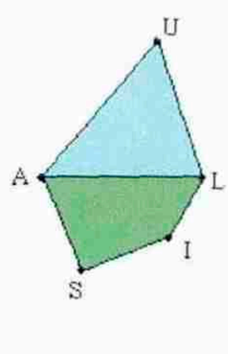
Sob esta rubrica são apresentados:

- Adição e subtração;
- Multiplicação: monômio por polinômio;
- Multiplicação: polinômio por polinômio;
- Divisão: polinômio por monômio;
- Divisão: polinômio por polinômio.

A abordagem da adição e subtração foi feita através de duas situações problemas envolvendo geometria. Vejamos:

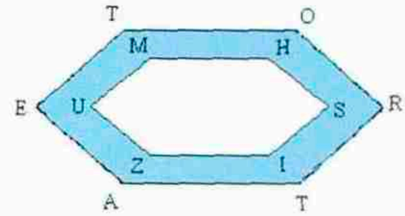
Exemplo 1 – Introdução da adição de polinômios

"*Nesta figura a área de LUA é representada por* $(x^2 + 3xy)$ *e de LISA, por* $(5x^2 - xy - 1)$. *Escreva um polinômio que represente a área de LISAU.*" (pág. 50)



Exemplo 2 – Introdução a subtração de polinômios

"Nesta figura, a área de TEATRO é representada por $7a^3+4a^2-9$ *e a área de MUZISH, por* $9a^2-6$. *Que polinômio poderá representar a área da parte pintada de azul, nesta figura?"* (pág. 50)



A subtração é definida como soma com o oposto do polinômio dado.

Podemos notar que as figuras dadas completam o enunciado e ajudam na resolução do problema.

Notemos ainda que, no exemplo 1 os polinômios que representam as áreas estão apresentados dentro dos parênteses enquanto, que no exemplo 2, isso não ocorre. Mas é no exemplo 2 que os parênteses são importantes para efetuar a operação de subtração.

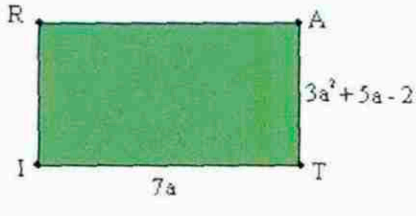
Ainda temos, para estas operações, um terceiro exemplo, desta vez algébrico.

Exemplo 3

"As letras A, B e C representam polinômios. Sendo $A = x-2xy+y^2$, $B = 3x-4y^2$ *e* $C = -x+6xy-y^2$, *determine* $A - B + C$*."* (pág. 51)

Multiplicação de monômio por polinômio: também é abordada através de um exemplo que envolve geometria. Vejamos:

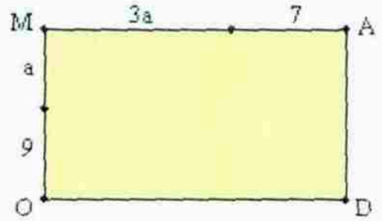
"Neste retângulo o comprimento é representado por 7a, e a largura, por $(3a^2+5a-2)$. *Como podemos representar a área da figura?"* (pág.52)



Resolução: ao multiplicar o monômio pelo polinômio temos a propriedade distributiva assimilada por flechas.

Multiplicação de polinômio por polinômio: a seguir o problema apresentado.

"Nesta figura, a representa um número. Escreva um polinômio que represente a área do retângulo MODA." (pág. 54)



Este exemplo permite decompor esta figura em quatro outros retângulos. Calculando a área de cada um deles e somando os resultados, obtemos a área do retângulo MODA. Soma de polinômios já foi estudado, então os alunos tem condições para resolver.

Notemos aqui como a apreensão operatória da figura é importante.

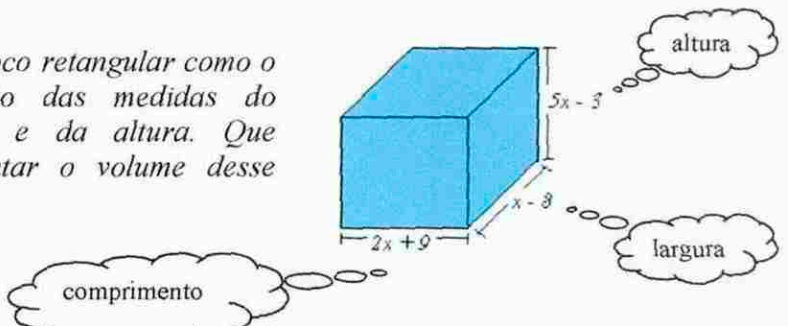
Aproveitando este processo já conhecido, considerando somente a decomposição da figura em dois retângulos e mostrando o procedimento do produto termo a termo, deduz-se, por analogia com a 1ª resolução, um procedimento para calcular a multiplicação de dois polinômios.

Formalizando temos:

> *"Calculamos o produto de dois polinômios multiplicando cada termo de um deles por todos os termos do outro e reduzindo os termos semelhantes."* (pág. 54)

Um outro exemplo é dado através de uma situação problema envolvendo geometria, mas desta vez envolve o volume de uma figura:

"O volume de um bloco retangular como o desta figura é o produto das medidas do comprimento, da largura e da altura. Que polinômio poderá representar o volume desse bloco retangular?" (pág. 55)



Resolução: multiplicando o comprimento pela largura para então, multiplicar o resultado obtido pela altura.

Destacamos que nesta resolução temos um algoritmo para efetuar a multiplicação dos polinômios. A propriedade distributiva não é utilizada.

Divisão de polinômio por monômio: neste caso são dados dois exemplos algébricos:

a. *O produto de um polinômio pelo monômio $2x$ é $-2x^3 + 4x^2 - 10x$. Qual é esse polinômio?* (pág. 56)

b. *Qual o quociente* $\left(-\frac{3}{5}x^4 + \frac{9}{20}x^3\right) : \left(-\frac{3}{5}x^2\right)$*?* (pág. 56)

Na resolução do exercício a., as autoras exploram a idéia de que o polinômio a determinar é o quociente de $(-2x^3 + 4x^2 - 10x)$ por $2x$. O procedimento dado é a divisão de cada termo do polinômio pelo monômio: $-(2x^3):(2x) + (4x^2):(2x) - (10x):(2x)$.

Na resolução do exemplo b., outro procedimento é dado: $+\dfrac{\frac{3}{5}x^4}{\frac{3}{5}x^2} - \dfrac{\frac{9}{20}x^3}{\frac{3}{5}x^2}$.

Assim, a conclusão dada:

> *"Dividimos um polinômio por um monômio, não nulo, dividindo cada termo desse polinômio pelo monômio."* (pág. 56)

Divisão de polinômio por polinômio: esta divisão é apresentado através de dois exemplos algébricos resolvidos detalhadamente, a cada passagem nova tem uma explicação do que aconteceu (Anexo 4).

Para realizar a divisão temos anteriormente, os polinômios na forma escrita ordenada. Esta ordem deixa o polinômio na ordem decrescente dos expoentes da variável utilizada.

Informação complementares:

- "quociente . divisor + resto = dividendo;
- efetua-se a divisão até que o grau do polinômio resto seja menor que o grau do polinômio divisor;
- os polinômios, dividendo e divisor, devem estar escritos na forma ordenada;
- quando o resto é zero, temos uma divisão exata e, quociente . divisor = dividendo;
- quando o resto é zero podemos dizer que o dividendo é divisível ao divisor" (pg.59)

Estudo do capítulo: Produtos Notáveis

Segundo Mori e Onaga, alguns produtos são resultados da multiplicação de binômios por binômios, já visto em capítulos anteriores, são chamados de Produtos Notáveis por serem muito utilizados nos cálculos algébricos. Por isso, neste capítulo, são apresentados esses produtos com suas regras práticas denominadas de definição.

Neste capítulo são apresentados os Produtos de dois binômios, denominados com os seguintes produtos notáveis:

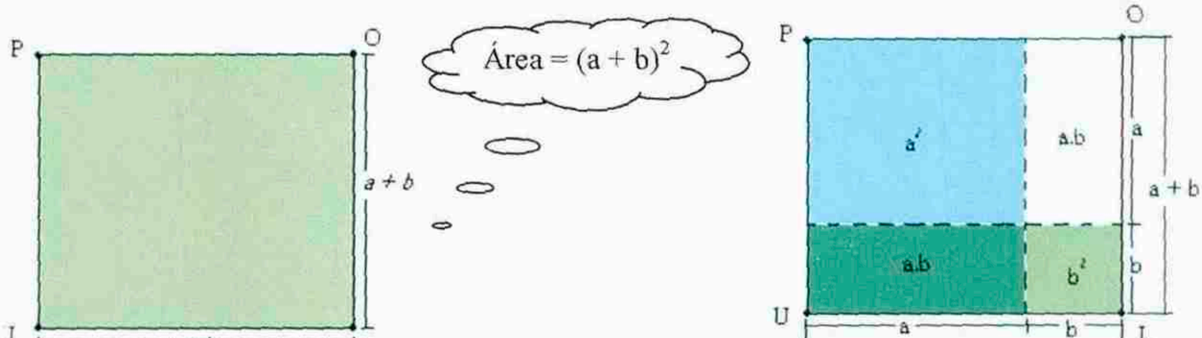
A. Quadrado da soma de dois termos;
B. Quadrado da diferença de dois termos;
C. Produto da soma de dois termos pela diferença dos mesmos dois termos;
D. Cubo da soma de dois termos;
E. Cubo da diferença de dois termos;
F. Produtos do tipo $(x+a).(x+b)$.

Vejamos o que diz cada um deles:

Quadrado da soma de dois termos: a abordagem matemática é feita através de um exemplo geométrico (área de um quadrado).
Exemplo:

"*Qual é a expressão algébrica que é o quadrado do binômio* $a + b$*?*" (pág. 62)

Percebemos que o cálculo da área de um quadrado não é pedido através do enunciado. Na verdade, na resolução desta situação problema é que foi induzido para o cálculo de áreas, sendo apresentados estes dois quadrados para podermos depois, fazer as comparações e assim, chegar a regra deste produto notável:



Mesmo já tendo utilizado a área de quadrados, Mori e Onaga ainda apresentam, antes da definição, a resolução através da propriedade distributiva, utilizando o quadrado da mesma soma $a + b$.

A definição dada é a seguinte:

> *"O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo."* (pág. 62)

Como informação complementar é dito que, a expressão encontrada recebe o nome de trinômio quadrado perfeito.

Após esta informação temos dois outros exemplos, mas desta vez são algébricos.

No caso do Quadrado da diferença de dois termos, do Produto da soma de dois termos pela diferença dos mesmos dois termos, do Cubo da soma de dois termos e do Cubo da diferença de dois termos, temos uma mesma abordagem.

Esta abordagem é feita apresentando a resolução de um exemplo através da propriedade distributiva, apresentando em seguida a definição acompanhada de alguns exemplos algébricos.

A definição dada a cada uma são:

> *"O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo."* (pág. 65)

> *"O produto da soma de dois termos pela diferença dos mesmos dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo"* (pág. 67)

> *"O cubo da soma de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo mais três vezes o produto do quadrado do primeiro termo pelo segundo termo mais três vezes o produto do primeiro termo pelo quadrado do segundo termo mais o cubo do segundo termo"* (pág. 69)

> *"O cubo da diferença de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo menos três vezes o produto do quadrado do primeiro termo pelo segundo termo mais três vezes o produto do primeiro termo pelo quadrado do segundo termo menos o cubo do segundo termo"* (pág. 70)

No caso do Produto do tipo $(x+a).(x+b)$ a abordagem é parecida com a do quadrado da soma de dois termos, onde é apresentado um exemplo geométrico utilizando a área de um quadrado calculadas de duas formas diferentes e apresentando um exemplo na qual é usada a propriedade distributiva.

Neste caso não foi dada uma definição, foi simplesmente apresentada a seguinte regra:

> "$(x+a).(x+b)=x^2+Sx+P$, *onde S representa a + b e P representa a.b.*" (pág. 71)

Assim, o cálculo de cada um dos produtos notáveis é feito pela utilização de regras.

Estudo do capítulo: Fatoração

A fatoração é considerada como o "caminho de volta" de alguns produtos notáveis. Para este capítulo temos dois tópicos:

A. Fatoração;
B. Casos de fatoração;

Vejamos cada um deles:

A. Fatoração

Neste tópico é apresentada uma simples introdução do que é fatoração, sendo ainda, apresentada a seguinte definição:

> "*Fatorar um polinômio escrito na forma de uma soma algébrica é transformá-lo num produto de polinômios*" (pág. 74)

B. Casos de Fatoração

Neste tópico temos cinco casos de fatoração:

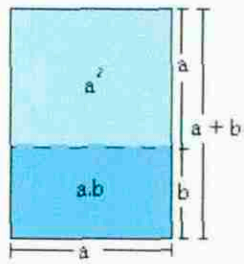
- Fator comum;
- Fatoração por agrupamentos;
- Diferença de quadrados;
- Trinômio quadrado perfeito;
- Trinômio do 2° grau.

O Fator comum é apresentado através de um exemplo ilustrado por uma situação geométrica.

Exemplo:

"Na figura, o polinômio 7x + 21 representa a sua área.

Como se escreve esse polinômio numa forma fatorada?" (pág. 75)



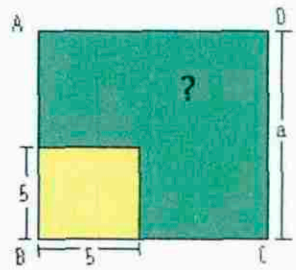
Além deste exemplo são apresentados mais dois outros, sendo cada um deles exemplos algébricos. Não temos uma definição ou regra que conclui os exemplos dados.

Na Fatoração por agrupamento e no Trinômio quadrado perfeito a abordagem matemática é feita através de exemplos diretos, mostrando detalhadamente como se fosse uma regra, como se fatora os determinados polinômios (Anexos 5 e 6).

Com a Diferença de quadrados é diferente. Nesta é apresentado, além de outros exemplos algébricos, um exemplo geométrico onde utilizamos diferença de áreas de quadrados.

Exemplo

*"Na figura, ABCD é um quadrado e **a** representa um número que é a medida do lado. Eliminando o canto amarelo, qual é a expressão que representa a área da parte restante?"* (pág. 79)



Com a resolução desta situação problema, temos a apresentação da fatoração da diferença de quadrados.

No último caso de fatoração que é o Trinômio do 2° grau temos a apresentação de um exemplo que pede a forma fatorada de um polinômio. Na resolução é indicado para utilizar áreas de quadrados e retângulos (Anexo 7).

Além deste exemplo temos dois outros que são algébricos e pedem diretamente a forma fatorada do polinômio dado.

Em conclusão, identificamos uma partição do objeto polinômio em: cálculo algébrico, polinômios, produtos notáveis e fatoração. Cada um destes tópicos é tema de um capítulo. Em cada capítulo a abordagem para as definições são através de exemplos que, em muitos deles, envolve geometria.

Destacamos que as equações polinomiais tem lugar em 7ª série como um objeto independente e particular: Equações do 1° grau com uma incógnita.

O objeto polinômio é concebido como uma expressão algébrica (soma de monômios) e ao apresentar as operações de multiplicação e de divisão as autoras distinguem monômios de polinômios. Questionamos: um monômio não é um polinômio? Em alguns momentos isto não parece ser verdade.

A seguir, um estudo dos exercícios segundo as tarefas.

Estudo dos exercícios

Neste livro temos os exercícios classificados em: Exercícios, Exercícios complementares, Problemas e Seção livre. Excluindo a Seção livre, um total de 194 foram estudados. Destes:

- 22 são geométricos;
- 169 são algébricos;
- 3 são do cotidiano.

Notemos aqui, que apesar de na abordagem dos conteúdos exemplos geométricos foram bastante utilizados, nos exercícios propostos são os algébricos que predominam, 169 de 194.

Nestes 194 exercícios não contamos os itens em função da variável que estávamos considerando (geométricos, algébricos ou do cotidiano), mas para o estudo das tarefas, passamos a ter 494 exercícios, incluindo agora, a Seção livre.

Nossa tipologia de exercícios, como apresentamos no início deste capítulo, é composta de 17 tipos diferentes de exercícios e, condições particulares nos permitiu sub-dividir cada tipo em sub-tipos.

Do total de 494 exercícios, temos que:

- **43, ou 8,7%, são do tipo 1**: Identificar expressões algébricas. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Que são racionais inteiras	4
Que são racionais fracionárias	2
Que são irracionais	2
Quanto aos coeficientes e partes literal	5
Quanto aos monômios semelhantes (fatores comuns)	7
Quanto as alternativas verdadeiras	2
Quanto aos termos dos polinômios	6
Quanto a binômio ou trinômio	1
Quanto ao grau do polinômio	2
Quanto a sua forma fatorada	4
Quanto ao produto que é igual a zero dado o valor da variável	8
Que são trinômios	0

- **8, ou 1,6%, são do tipo 2**: Traduzir frases de linguagem natural e simbólica para expressão algébrica. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
De expressão algébrica para linguagem natural	4
De linguagem natural para expressão algébrica	4

- **26, ou 5,2%, são do tipo 3**: Determinar áreas. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Representando-a por uma expressão algébrica	18
Representando-a por um valor numérico	8

- **8, ou 1,6%, são do tipo 4**: Calcular perímetro. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Representando-o por uma expressão algébrica	5
Representando-o por um valor numérico	3

- **4, ou 0,8%, são do tipo 5**: Calcular volume. Dos quais:

SUB-TIPO	QUANTIDADE
Representando-o por uma expressão algébrica	4

- **59, ou 11,9%, são do tipo 6**: Calcular valor numérico. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Para valores dados as variáveis	37
Verificando se realmente existe	9
Para valores dados a algumas expressões	13
Resultante de uma expressão numérica	0
A partir de algumas condições	0

- **7, ou 1,4%, são do tipo 7**: Deduzir expressão algébrica a partir de situação problema do cotidiano. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Para representar uma quantidade	5
Para representar um comprimento	1
Para representar uma distância	1

- **120, ou 24,2%, são do tipo 8**: Operar com polinômios. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Através da adição	8
Através da diferença	8
Para encontrar uma expressão desconhecida	33
Através da multiplicação	32
Através da divisão	21
Através da potenciação	15
Através da multiplicação utilizando uma figura	3

- **4, ou 0,8%, são do tipo 9**: Calcular comprimentos. Dos quais:

SUB-TIPO	QUANTIDADE
Referente ao lado de uma figura como expressão	4

- **59, ou 11,9%, são do tipo 10**: Simplificar expressões algébricas. Dos quais:

SUB-TIPO	QUANTIDADE
Que possui mais de uma operação	59

- **20, ou 4,0% são do tipo 11**: Identificar o valor das variáveis na expressão. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Para o qual não existe valor numérico	5
Para o qual o valor numérico seja um numero dado	5
Satisfazendo algumas condições	3
Para o qual o produto dado é zero	7
Fazendo tentativas e obedecendo as instruções	0

- **4, ou 0,8%, são do tipo 12**: Escrever expressão algébrica. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Que sejam monômios	2
Referente as sentenças falsas coretamente	1
Que seja um trinômio tal que para um número dado o valor numérico seja zero	1
Que seja o oposto de uma que foi dada	0

- **0 são do tipo 13**: Deduzir expressão algébrica. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Resultante de uma seqüência dada	0
Resultante de uma situação problema de geometria	0
Para representar números em que a unidade ou a dezena não são conhecidas	0

- **3, ou 0,5%, são do tipo 14**: Comparar expressões algébricas. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Quanto ao valor numérico	1
Quanto a áreas	1
Quanto a divisibilidade	1

- **32, ou 6,4%, são do tipo 15**: Calcular produtos notáveis. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Quadrado da soma de dois termos	7
Quadrado da diferença de dois termos	8
Produto da soma pela diferença dos mesmos dois termos	8
Cubo da diferença de dois termos	2
Cubo da soma de dois termos	1
Produto do tipo $(x + a).(x + b)$	6

- **88, ou 17,8%, são do tipo 16**: Fatorar polinômios. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Trinômio quadrado perfeito	12
Fator comum	12
Agrupamento	20
Diferença de quadrados	9
Utilizando mais de uma fatoração	24
Para verificar se é ou não trinômio quadrado perfeito	2
Trinômio do 2° grau	9

- **12, ou 2,4%, são do tipo 17**: Exercícios recreativos.

Notemos, através dos tipos de tarefas, que este livro dá ênfase as operações com polinômios, uma vez que 120 dos 494, ou 24,2%, são do tipo 8 (Operar com polinômios). Entre os sub-tipos deste tipo, temos 33 sobre 120 "Para encontrar uma expressão desconhecida", 32 sobre 120 "Através da multiplicação" e 21 sobre 120 "através da divisão", o que expressa uma grande importância dada a estes três sub-tipos se compararmos com, por exemplo, que somente 8 sobre 120 do sub-tipo "Através da adição" e 8 sobre 120 "Através da subtração".

Fatorar polinômios também são destaque: 88 sobre 494, ou 17,8%. Destes temos 24 sobre 88 do sub-tipo "Utilizando mais de uma fatoração" e 20 do sub-tipo "utilizando agrupamento", o que mostra uma preferência de fatoração destes dois sub-tipos.

Temos também, uma ênfase ao trabalhar com expressões algébricas, pois 43 sobre 494, ou 8,7%, são do tipo 1 (Identificar expressões algébricas) e 59 sobre 494, ou 11,9%, são do tipo 10 (Simplificar expressões algébricas), o que, se considerarmos os dois tipos, dá um total de 102 sobre 494, ou 20,6%, exercícios que exploram a manipulação com expressão algébrica.

Notemos ainda, que exercícios para calcular valor numérico bem como para calcular produtos notáveis, tem um lugar importante, pois 59 sobre 494, ou 11,9%, são do tipo 6 (Calcular valor numérico) e 32 sobre 494, ou 6,4%, são do tipo 15 (Calcular produtos notáveis).

Conclusão do livro "Matemática – idéias e desafios"

Segundo Iezzi (1995), "Polinômio" é o mesmo que "Função polinomial" e é definido utilizando seqüência. Para Mori e Onaga (2001), "Polinômio" é uma soma de monômios. Podemos perceber a transposição que foi apresentado do saber a ensinar para o saber ensinado de acordo com esses autores. Podemos pensar que, no ensino de 7ª série do Ensino Fundamental, seqüência seja um conteúdo não presente.

Segundo o nosso estudo, o ensino de 7ª série se centra principalmente nas operações com polinômios, estudo de expressões algébricas, fatoração de polinômios, cálculo de produtos notáveis e de valor numérico. O estudo dos exercícios deixam claramente estes dados.

IV.2.2. Estudo do livro didático "Matemática na medida certa[20]"

O livro é composto de 6 capítulos. Nós estudaremos o capítulo 3: "Álgebra: monômios e polinômios".

Este capítulo está dividido em 13 tópicos: Expressões algébricas; Usando variáveis: cálculo do número de diagonais; Adição e subtração de monômios; Multiplicação, divisão e potenciação de monômios; Adição e subtração de polinômios; Brincando... com álgebra; Multiplicação de polinômios; Casos simples de divisão de polinômios; Produtos notáveis; Quadrado da diferença. Produto da soma pela diferença; Fatoração; Fator comum; Agrupamento.

Após o desenvolvimento do conteúdo de cada um dos tópicos acima listados, uma série de exercícios são propostos.

Nós dividimos, também, este estudo em duas partes: Estudo do desenvolvimento do conteúdo e Estudo dos exercícios. Ainda, agrupamos os exercícios propostos no fim de cada tópico, pois buscamos uma visão geral da tipologia destes exercícios.

Estudo do desenvolvimento do conteúdo

Estudo do tópico: Expressões algébricas

Sob este título três conceitos são apresentados: A variável real; Expressões algébricas; e Valor numérico.

Variável real: é abordada por uma atividade de multiplicação de números reais por zero, depois a generalização:

"$x.0 = 0$, *para todo* $x \in \Re$ " (pág. 42)

[20] Jakubovic, J.; Lellis, M.; Centurión, M.; Matemática na medida certa, 7ª série – Ensino fundamental, editora Scipione, (1999).

Temos, com esta generalização, a observação: "*Todo número real, multiplicado por zero, dá zero*" (pág. 42)

Remarcamos ainda, que o autor esclarece a designação "variável real" é dada se $x \in \Re$.

Expressões algébricas: uma característica do objeto matemático da álgebra é atribuído as expressões que tem variáveis: "*As expressões que tem variáveis são estudadas numa parte da Matemática chamada álgebra*" (pág. 42)

Veja a frase:

> "*Expressões que apresentam uma ou mais variáveis e, ainda, as expressões que só têm números são chamadas de expressões algébricas.*" (pág. 42)

Sabemos que, tradicionalmente, expressões que só tem números são chamadas expressões numéricas. Será um equívoco dos autores?

Também o fato de a expressão ter uma ou mais variáveis não é explorado. A partir da noção de variável, o conceito de expressão algébrica é tratado como rotineiro.

Valor numérico: é feita uma descrição do procedimento para obter o valor numérico da expressão seguido de exemplos com expressões de uma e de duas variáveis.

> "*Substituindo as variáveis de uma expressão algébrica por números, e efetuando os cálculos indicados, obtemos o valor numérico da expressão.*" (pág. 43)

Estudo do tópico: Usando variáveis: cálculo do número de diagonais

Estudo de uma expressão algébrica particular: $\frac{n(n-3)}{2}$. É um exemplo de como resolver um problema de geometria usando álgebra.

A dedução da expressão $d = \frac{n(n-3)}{2}$ é feita a partir do estudo de casos particulares seguido da generalização para o polinômio de n lados.

Estudo do tópico: Adição e subtração de monômios

Sob este título temos quatro rubrica: Monômios; Monômios semelhantes; Adição e subtração; e Uso da adição de monômios.

Uma primeira observação do autor: "*As operações como a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão, também podem ser efetuadas com expressões algébricas.*" (pág. 48)

Monômios são tratados como expressões algébricas simples: "*Para iniciar o estudo dessas operações, vamos considerar expressões algébricas bem simples, chamadas de monômios*" (pág. 48)

Uma definição de Monômios é dada seguida de exemplos:

> "*Monômios são expressões algébricas que apresentam apenas um número, apenas uma variável ou multiplicações entre números e variáveis.*" (pág. 48)

Em seguida, também são definidos "coeficiente" e "parte literal" de um monômio e depois identificados em exemplos dados: "*[...] um monômio é formado por duas partes: um número, que é o seu coeficiente, e uma multiplicação de variáveis, que é sua parte literal*" (pág. 48)

Monômios semelhantes: esta noção é apresentada por definição seguida de exemplos:

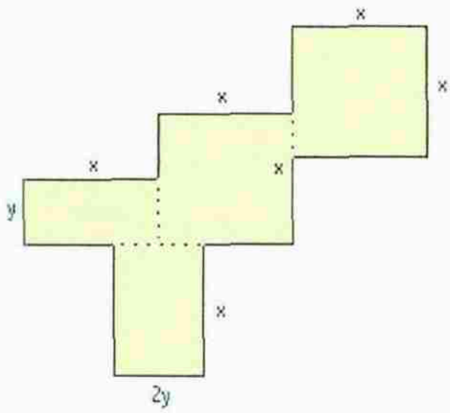
> "*Monômios que têm a mesma parte literal são chamados de monômios semelhantes.*" (pág. 48)

Adição e subtração de monômios: um procedimento é apresentado para a adição de monômios semelhantes através de um exemplo seguido de uma justificativa: "*[...] considerar uma adição de monômios semelhantes*" (pág. 48)

Procedimento proposto (adição e subtração): uso da propriedade distributiva como justificativa do procedimento: $7x^3y^2 + 5x^3y^2 = (7+5)x^3y^2 = 12x^3y^2$. "*A subtração de monômios semelhantes também é feita dessa maneira*" (pág. 49)

Uso da adição de monômios: uma aplicação para cálculo de áreas de figuras planas. Exemplo

"*A figura a seguir é formada de quadrados e retângulos. As medidas estão indicadas em cm. Vamos encontrar a expressão algébrica que representa a área A, em cm².*" (pág. 49)



$$A = (2y)x + xy + x^2 + x^2$$

$$A = \underbrace{2xy + xy}_{\text{monômios semelhantes}} + \underbrace{x^2 + x^2}_{\text{monômios semelhantes}}$$

$$A = 3xy + 2x^2$$

A tarefa é de encontrar a expressão algébrica que representa a área A, em cm^2.

Estudo do tópico: Multiplicação, divisão e potenciação de monômios

Para cada uma dessas três operações a abordagem é feita através de exemplos simples. A multiplicação e divisão de monômios é associada a multiplicação e divisão de potencias de mesma base.

Exemplo

a) "$x^4 . x^3 = \underbrace{x.x.x.x}_{4\,fatores}.\underbrace{x.x.x}_{3\,fatores} = \underbrace{x.x.x.x.x.x.x}_{7\,fatores} = x^7$"

"*[...] mantemos a base e somamos os expoentes*"

b) $x^5 : x^3 = \dfrac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$ (pág. 51)

Estudo do tópico: Adição e subtração de polinômios

Associado as operações já estudadas com monômios, considerando expressões algébricas simples, anuncia o autor o estudo de polinômios.

Sob este sub-título e antes de um lembrete[21], uma definição de polinômio é dada:

> "*Polinômio é qualquer monômio ou qualquer adição algébrica (isto é, adição ou subtração) de monômios*" (pág. 54)

Onde "*os monômios são chamados de termos do polinômio.*" (pág. 54)

A forma reduzida de um polinômio é estudada através de exemplos algébricos seguida da seguinte definição:

> "*Um polinômio está na sua forma reduzida quando não tem monômios semelhantes.*" (pág. 54)

Adição de polinômios: "*é a adição de todos os seus monômios*" (pág. 55)

Dois dispositivos para realizar a adição:

a) usando a propriedade comutativa;
b) um algoritmo: escrever cada polinômio a ser somado em uma linha, colocando os termos semelhantes um embaixo do outro.

Subtração de polinômios: é apresentada como uma soma pelo oposto. O conceito de oposto de um polinômio é dado por um exemplo particular.

[21] "*Mono* significa um só e *poli* significa muitos. Apesar disso, lembre que um polinômio pode ser simplesmente um monômio." (pág. 54)

Vejamos a definição:

> *"Para efetuar a subtração de dois polinômios, somamos o minuendo com o oposto do subtraendo."* (pág, 55)

Estudo do tópico: Multiplicação de polinômios

Uma abordagem seqüencial e um procedimento em forma de algoritmo, onde este, as operações são associadas com as operações de números reais em particular, com a propriedade distributiva.

- Multiplicação de monômio por polinômio;
- Multiplicação de dois polinômios.

Multiplicação de monômio por polinômio: é abordada com números reais. Vejamos:

"*4.32 = 4.(30 + 2) = 4.30 + 4.2 = 120 + 8 = 128*" (pág. 60)

A *multiplicação de polinômios* é abordada de maneira análoga:

"*12.24 = (10 + 2).(20 + 4) = 200 + 40 + 40 + 8 = 288*" (pág. 61)

"*[...] multiplicamos cada monômio do primeiro polinômio pelos monômios do segundo, e somamos os resultados*" (pág. 61)

Estudo do tópico: Casos simples de divisão de polinômios

Sob esta rubrica temos um procedimento de como efetuar a divisão: de polinômio por monômio; e de polinômios.

Como a multiplicação, a divisão de polinômios é apresentada fazendo uma analogia com a divisão de números reais.

Exemplo

$$\text{“}(70+20):10 = 90:10 = 9 \qquad ou \qquad (70+20):10 = (70+20).\frac{1}{10} = \frac{70}{10}+\frac{20}{10} = 7+2 = 9\text{”}$$

(pág. 64)

"*É possível fazer dessa maneira porque dividir por 10 é o mesmo que multiplicar por $\frac{1}{10}$. Ao multiplicar usamos a propriedade distributiva.*" (pág. 64)

No caso da divisão de polinômios, o autor restringe seu estudo a casos simples:

a) $(x^2+5x):(x^2+5x) = \dfrac{x^2+5x}{x^2+5x} = 1$

b) $(x^2+5x)(3x-2):(x^2+5x)=\dfrac{(x^2+5x)(3x-2)}{(x^2+5x)}=3x-2$ (pág. 64)

Segundo esta abordagem e uma sondagem dos exercícios, os autores tratam somente a divisão de polinômios onde a simplificação elimina o denominador, isto é, evita o confronto da divisão propriamente dita.

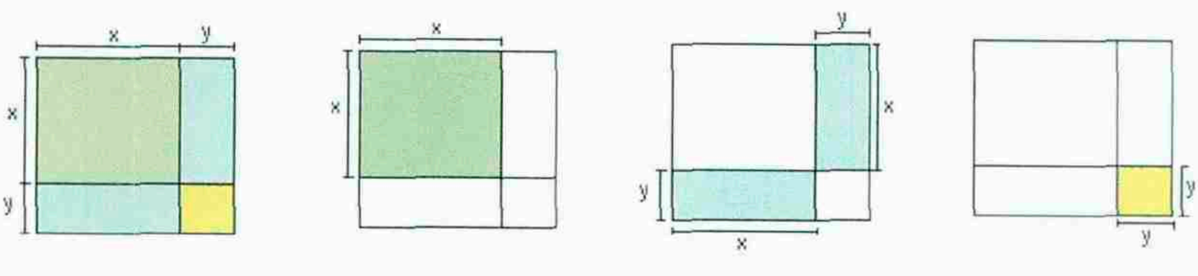
Estudo do tópico: Produtos notáveis

A abordagem *Quadrado da soma* é feita comparando o quadrado da soma de números reais com o quadrado da soma de uma expressão algébrica : $(4 + 3)^2$ e $(x + y)^2$, onde a propriedade distributiva é aplicada. Depois, o resultado é formalizado como uma regra:

> *"O quadrado da soma é o quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo"* (pág. 66)

É interessante ressaltar a seguinte observação feita por Jakubo, Lellis e Centurión: *"Este produto será muito usado e, por isso, os professores de Matemática recomendam que seja decorado."* (pág. 66)

Ainda como ilustração geométrica através da área de um quadrado de lado x + y: (pág. 67)



$$(x+y)^2 \quad = \quad x^2 \quad + \quad 2xy \quad + \quad y^2$$

De maneira análoga são abordados: *O quadrado da diferença* e *O quadrado da soma pela diferença.*

G. Fatoração

Como nas operações anteriores, a fatoração é abordada através de um exemplo com números reais. Por comparação de exemplos, temos:

> *"Fatorar um polinômio é escreve-lo como uma multiplicação de polinômios"* (pág. 75)

Fatorações que resultam de multiplicações conhecidas:

- Diferença de quadrados. Uma regra estabelecida:

  "*A diferença de dois quadrados é o produto da soma das bases pela diferença delas*" (pág. 75)

- Trinômio quadrado perfeito. Generalização:

  "*A soma de dois quadrados mais duas vezes o produto de suas bases é igual ao quadrado da soma dessas bases.*

  A soma de dois quadrados menos duas vezes o produto de suas bases é igual ao quadrado da diferença dessas bases." (pág. 76)

Estudo do tópico: Fator comum

Nós remarcamos que "Fator comum" não é apresentado como um caso particular de fatoração. Ele é apresentado como um novo título. Este, diferente dos casos anteriores, é apresentado primeiramente o caso fatorado.

Exemplo

"$\underbrace{3x(y+3z+2)}_{forma\ fatorada} = \underbrace{3xy+9xz+6x}_{forma\ não\ fatorada}$" (pág. 79)

Retomando o mesmo exemplo, os autores exploram a presença do 3x em todos os termos, o qual pode ser colocado em evidência[22], isto é: $3x(y+3z+2)$. Ainda, como um procedimento, é mostrado que a expressão $y+3z+2$ é obtida se dividirmos a expressão inicial por 3x.

Estudo do tópico: Agrupamento

O exemplo de estudo é uma expressão numérica: 49 . 227 + 64 . 227 + 72 . 73 + 41 . 73. A identificação do fator comum diferentes as duas primeiras parcelas e as duas últimas, leva a separação da expressão em dois grupos: 227.(49 + 64) + 73.(72 + 41). Efetuando as operações temos: 227 . 113 + 73 . 113 = 113.(227 + 73) = 113 . 300

Este procedimento é transposto para expressões algébricas: "*existem expressões algébricas que podem ser fatoradas dessa maneira, por agrupamento*" (pág. 82)

[22] Nos chamou a atenção que os autores esclarecem que, colocar em evidência significa "destacar, sobressair ou salientar" e não o relaciona com a propriedade distributiva.

Temos então, segundo este livro didático, que "Polinômio" é estudado na 7ª série do Ensino Fundamental como *"[...] qualquer monômio ou qualquer adição algébrica (isto é, adição e subtração) de monômios"*.

O estudo de polinômio abrange: forma reduzida de polinômios, adição, subtração, multiplicação, divisão, produtos notáveis e fatoração. Na fatoração os casos de fator comum e agrupamento são considerados.

Remarcamos que a divisão de polinômios é reduzida ao caso simples de divisão evitando um confronto com a divisão propriamente dita.

Este manual busca trabalhar exemplos geométricos onde o algébrico aparece como ferramenta de resolução. Também usa bastante a analogia com as operações nos reais (em geral restringe os exemplos aos naturais).

Estudo dos exercícios

No estudo dos exercícios usaremos a mesma tipologia que foi utilizada no livro anterior, até mesmo para podermos fazer um estudo comparativo do dois manuais.

Neste livro os exercícios são classificados em: Exercícios, Para casa e Superlegal. Excluindo os exercícios propostos sob a rubrica Superlegal, temos um total de 174 exercícios, dos quais:

- 19 são geométricos;
- 146 são algébricos;
- 9 são do cotidiano.

Destes 174 exercícios não contamos os itens, mas a partir de agora, considerando as propostas do enunciado, a contagem segundo as tarefas nos dá um total de 569 exercícios.

Nossa tipologia de exercícios, que apresentamos neste capítulo, é composta de 17 tipos diferentes de exercícios e, diferentes condições particulares nos permitiu sub-dividir cada tipo em sub-tipos.

Assim, do total de 569 exercícios temos:

- **14, ou 2,5%, do tipo 1**: Identificar expressões algébricas. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Que são racionais inteiras	0
Que são racionais fracionárias	0
Que são irracionais	0
Quanto aos coeficientes e partes literal	8
Quanto aos monômios semelhantes (fatores comuns)	0
Quanto as alternativas verdadeiras	0
Quanto aos termos dos polinômios	0
Quanto a binômio ou trinômio	0
Quanto ao grau do polinômio	0
Quanto a sua forma fatorada	0
Quanto ao produto que é igual a zero dado o valor da variável	0
Que são trinômios	6

- **12, ou 2,1%, do tipo 2**: Traduzir frases de linguagem natural e simbólica para expressão algébrica. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
De expressão algébrica para linguagem natural	0
De linguagem natural para expressão algébrica	12

- **13, ou 2,3%, do tipo 3**: Determinar áreas. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Representando-a por uma expressão algébrica	11
Representando-a por um valor numérico	2

- **7, ou 1,2%, do tipo 4**: Calcular perímetro. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Representando-o por uma expressão algébrica	4
Representando-o por um valor numérico	3

- **0 do tipo 5**: Calcular volume. Dos quais:

SUB-TIPO	QUANTIDADE
Representando-o por uma expressão algébrica	0

- **61, ou 10,7%, do tipo 6**: Calcular valor numérico. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Para valores dados as variáveis	26
Verificando se realmente existe	0
Para valores dados a algumas expressões	2
Resultante de uma expressão numérica	32
A partir de algumas condições	1

- **16, ou 2,8%, do tipo 7**: Deduzir expressão algébrica a partir de situação problema do cotidiano. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Para representar uma quantidade	16
Para representar um comprimento	0
Para representar uma distância	0

- **148, ou 26%, do tipo 8**: Operar com polinômios. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Através da adição	8
Através da diferença	7
Para encontrar uma expressão desconhecida	30
Através da multiplicação	43
Através da divisão	41
Através da potenciação	19
Através da multiplicação utilizando uma figura	0

- **0 do tipo 9**: Calcular comprimentos. Dos quais:

SUB-TIPO	QUANTIDADE
Referente ao lado de uma figura como expressão	0

- **76, ou 13,4%, do tipo 10**: Simplificar expressões algébricas. Dos quais:

SUB-TIPO	QUANTIDADE
Que possui mais de uma operação	76

- **6, ou 1,0%, do tipo 11**: Identificar o valor das variáveis na expressão. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Para o qual não existe valor numérico	0
Para o qual o valor numérico seja um numero dado	5
Satisfazendo algumas condições	0
Para o qual o produto dado é zero	0
Fazendo tentativas e obedecendo as instruções	1

- **2, ou 0,4%, do tipo 12**: Escrever expressão algébrica. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Que sejam monômios	0
Referente as sentenças falsas coretamente	0
Que seja um trinômio tal que para um número dado o valor numérico seja zero	0
Que seja o oposto de uma que foi dada	2

- **30, ou 5,3%, do tipo 13**: Deduzir expressão algébrica. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Resultante de uma seqüência dada	21
Resultante de uma situação problema de geometria	5
Para representar números em que a unidade ou a dezena não são conhecidas	4

- **2, ou 0,4%, do tipo 14**: Comparar expressões algébricas. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Quanto ao valor numérico	2
Quanto a áreas	0
Quanto a divisibilidade	0

- **65, ou 11,4%, do tipo 15**: Calcular produtos notáveis. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Quadrado da soma de dois termos	32
Quadrado da diferença de dois termos	17
Produto da soma pela diferença dos mesmos dois termos	16
Cubo da diferença de dois termos	0
Cubo da soma de dois termos	0
Produto do tipo $(x + a).(x + b)$	0

- **111, ou 19,5%, do tipo 16**: Fatorar polinômios. Dos quais:

SUB-TIPOS	QUANTIDADE
Trinômio quadrado perfeito	16
Fator comum	28
Agrupamento	33
Diferença de quadrados	15
Utilizando mais de uma fatoração	15
Para verificar se é ou não trinômio quadrado perfeito	4
Trinômio do 2° grau	0

- **6, ou 1,0%, do tipo 17**: Exercícios recreativos.

Se olharmos a quantidade de exercícios segundo o tipo, temos que este livro didático centra os exercícios sobre operações com polinômios, pois 148 sobre 569, ou 26%, são exercícios deste tipo. Em segundo lugar, a ênfase é dada a fatoração de polinômios: 111 sobre 569, ou 19,5%. Em seguida simplificar expressões algébricas com 76 sobre 569, ou 13,4%, calcular produto notável com 65 sobre 569, ou 11,4%, e 61 sobre 569, ou 10,7%, para calcular valor numérico.

Temos assim, que o trabalho sobre polinômios (fatorar e operar) é dominante no ensino com 259 sobre 569, ou 45,5%.

Se considerarmos os tipos 1 (Identificar expressões algébricas), 2 (Traduzir frases de linguagem natural e simbólica para expressão algébrica), 7 (Deduzir expressão algébrica a partir de situação problema do cotidiano), 10 (Simplificar expressões algébricas), 12 (Escrever expressão algébrica), 13 (Deduzir expressão algébrica) e 14 (Comparar expressões algébricas), onde a "Expressão algébrica" é objeto de estudo, temos 152 sobre 569, ou 26,9%, dos exercícios. Este número indica um ensino que trabalha bastante com a expressão algébrica propriamente dita.

Conclusão do livro "Matemática na medida certa"

Como comentamos na conclusão do livro anterior, segundo Iezzi (1995), "Polinômio" é o mesmo que "Função polinomial" e é definido utilizando seqüência. Para Jakubo, Lellis e Centurión (2001), "Polinômio" é qualquer monômio ou qualquer adição algébrica (isto é, adição e subtração) de monômios. Podemos perceber que aqui também acontece uma transposição que foi apresentado do saber a ensinar para o saber ensinado de acordo com esses autores. Podemos pensar em afirmar que, no ensino de 7ª série do Ensino Fundamental, realmente seqüência seja um conteúdo não presente.

Segundo o nosso estudo, o ensino de 7ª série se centra principalmente nas operações com polinômios, estudo de expressões algébricas, fatoração de polinômios, cálculo de produtos notáveis e de valor numérico. O estudo dos exercícios deixam claramente estes dados.

IV.3. Comparação dos livros "Matemática – idéias e desafios" e "Matemática na medida certa"

Em comparação com o saber "Polinômio", ambos os livros o definem como uma adição de monômios. Também apresentam uma abordagem seqüencial na qual primeiro trabalham o Monômio, e a partir desse conhecimento o Polinômio.

O livro "Matemática – idéias e desafios" trabalha mais com exemplos e exercícios geométricos do que o livro "Matemática na medida certa" (Anexo 8).

Apesar de um livro oferecer uma quantidade maior de exercício do que o outro, ambos valorizam, de acordo com os exercícios, os mesmos tipos de tarefas: operações com polinômios, estudo de expressões algébricas, fatoração de polinômios, cálculo de produtos notáveis e de valor numérico, destacando, principalmente, as operações com polinômios (Anexo 9).

Em conclusão, podemos dizer que o ensino de 7ª série oferece o saber "Polinômios" que faz parte da álgebra, segundo o nosso estudo no capítulo I.

Capítulo V

Experimentação

Esta experimentação tem por objetivo verificar qual o conceito conhecido pelos alunos, de "Polinômio", em fim da 7ª série do Ensino Fundamental. Também pretendemos identificar elementos que possam mostrar como um aluno de 7ª série trabalha as questões de passagem de linguagem natural para linguagem simbólica e como opera com expressões algébricas simples.

Tentaremos buscar respostas parciais a nossa problemática:

- *O que é este objeto para os alunos em fim da 7ª série?*
- *O aluno em fim de 7ª série tem dificuldades de usar uma representação em linguagem simbólica numa situação geral?*
- *Os alunos operam com expressões algébricas de maneira natural?*

A experimentação é composta dos três exercícios seguintes:

1º Exercício: Defina polinômio.

2º Exercício: Preencha, seguindo as instruções, a tabela abaixo:

Instruções	**Dê um exemplo**	**Expresse as instruções usando a álgebra**
Pense em um número		
Ache o seu dobro		
Some 3 ao resultado		
Triplique o que você obteve		
Subtraia 9 do resultado		
Divida tudo por 6		

O que você pode concluir em relação ao resultado obtido e ao número pensado? Explique por que isto acontece.

3º Exercício: Tenho 23 peças de dominó cujas dimensões são:
Altura = c
Largura = a
Comprimento = 2a + 3c

Quero guardá-las num estojo de madeira com as seguintes dimensões internas:

Altura = 5c
Largura = 2a + 3c
Comprimento = 7a

Sabendo que o volume de um paralelepípedo é comprimento x largura x altura, diga se sobrará espaço no estojo. Se sobrará, qual o polinômio que representa este espaço?

V.1. Análise a priori dos exercícios

Faremos a análise a priori dos três exercícios. Nossa análise tem por base o desenvolvimento dos conteúdos nos livros didáticos estudados.

Análise do 1º exercício: Defina polinômio.

Pensamos, a priori, que as seguintes respostas podem ser dadas pelos alunos:

a) Polinômio é uma expressão algébrica.
b) Polinômio é uma soma de monômios.
c) Polinômios é uma expressão que possui letras e números.
d) Polinômio é uma soma de expressões que possui letras e números.
e) Polinômio é qualquer monômio ou qualquer adição algébrica de monômios.
f) Polinômio é $2x^2 + 3x - 9$.

Temos assim, respostas em função de monômios, expressões algébricas gerais e/ou por meio de exemplos particulares.

Análise do 2º exercício: Preencha, seguindo as instruções, a tabela abaixo:

Instruções	**Dê um exemplo**	**Expresse as instruções usando a álgebra**
Pense em um número		
Ache o seu dobro		
Some 3 ao resultado		
Triplique o que você obteve		
Subtraia 9 do resultado		
Divida tudo por 6		

O que você pode concluir em relação ao resultado obtido e ao número pensado? Explique por que isto acontece.

Como neste exercício tanto o número pensado quanto a representação algébrica são arbitrários, o exercício tem infinitas soluções. Porém, as expressões algébricas obtidas e as operações realizadas ao longo da resolução são sempre do mesmo tipo.

Instruções	**Dê um exemplo**	**Expresse as instruções usando a álgebra**
Pense em um número	5	y
Ache o seu dobro	10	$2y$
Some 3 ao resultado	13	$2y + 3$
Triplique o que você obteve	39	$3.(2y + 3) = 6y + 9$
Subtraia 9 do resultado	30	$6y + 9 - 9 = 6y$
Divida tudo por 6	5	$6y/6 = y$

Podemos concluir que depois de efetuado os cálculos voltamos ao número pensado. Isso acontece porque: A 3ª instrução nos pede para somarmos o número 3, mas na 4ª instrução esta soma passa a ser o número 9 quando triplicada por 3, com isso, anulamos um dos termos do binômio na 5ª instrução ao subtraímos o número 9; Ao chegarmos na 4ª instrução temos o número pensado multiplicado por 6 (multiplicar por 2 na 2ª instrução e depois por 3 na 4ª instrução é o mesmo que multiplicar por 6) e na 6ª instrução temos esse mesmo número pensado dividido por 6, deixando assim, o coeficiente igual a 1.

Na verdade, as duas últimas instruções faz com que tudo que foi somado e multiplicado seja retirado e dividido, e isso acontece porque a subtração desfaz a adição e a divisão desfaz a multiplicação.

Como tanto as expressões dadas em linguagem natural para serem expressas em linguagem simbólica quanto as operações a serem efetuadas algebricamente são simples, pensamos a priori, que os alunos não tem dificuldades ao resolvê-las.

Análise do 3º exercício: Tenho 23 peças de dominó cujas dimensões são:

Altura = c
Largura = a
Comprimento = 2a + 3c

Quero guardá-las num estojo de madeira com as seguintes dimensões internas:

Altura = 5c
Largura = 2a + 3c
Comprimento = 7a

Sabendo que o volume de um paralelepípedo é comprimento x largura x altura, diga se sobrará espaço no estojo. Se sobrará, qual o polinômio que representa este espaço?

Solução possível:

Cada peça tem volume $c.a.(2a + 3c) = 2a^2c + 3c^2a$, assim as 23 peças terá um volume de $23.(2a^2c + 3c^2a) = 46\ a^2c + 69\ c^2a$

O estojo tem volume $5c.(2a + 3c).\ 7a = 70\ a^2c + 105\ c^2a$ ou seja, o estojo tem maior volume do que as peças e por isso sobrará espaço.

O espaço que sobrou é $(70\ a^2c + 105\ c^2a) - (46\ a^2c + 69\ c^2a) = 24\ a^2c + 36\ c^2a$

Esta resolução envolve produto de monômios por binômios, produto de um escalar por um polinômio e subtração de binômios. Assim, três operações deveram ser realizadas.

V.2. Análise a posteriori dos exercícios

Como previsto, nossa experimentação foi realizada em uma turma de 7ª série do ensino fundamental no final do ano letivo em um colégio das redondezas da Universidade. A aplicação dos exercícios se deu no próprio colégio em uma turma de 21 alunos.

Procedimento:

- Cada aluno recebeu uma Ficha de atividades contendo os três exercícios (Anexo 10);
- A resolução foi individual e sem consulta;
- Foi solicitado ao professor para não ajudar os alunos na interpretação e nem na resolução dos exercícios;
- Solicitamos aos alunos a resolução com caneta para não apagarem as resoluções equivocadas. Queríamos ter registro dos possíveis erros;
- No final, foi recolhido as fichas dos alunos.

Análise do 1º exercício: Defina polinômio.

Dos 21 alunos somente 2 não responderam este exercício.

Das 19 respostas dadas, temos:

a) "*É uma sentença (expressão algébrica) com letras e números*": 2 alunos
b) "*Mais de um (dois) monômio*": 2 alunos
c) "*Conjunto de dois ou mais monômios*": 1 aluno
d) "*É número com letra misturadas*": 7 alunos

e) "*É a parte literária*": 1 aluno

f) "*Somar os que tem parte literal igual*": 1 aluno

g) "*Soma de dois monômios*": 2 alunos

h) "*É uma figura rígida de três lados*": 1 aluno

i) "*Vários números*": 1 aluno

j) "*São vários monômios num só resultado*": 1 aluno

Notemos que:

- 6 dos 19 alunos tem uma noção de polinômio como uma soma de monômios, dos quais dois alunos restringem a compreensão para soma de dois monômios (itens b, c, g, j);
- 2 dos 19 alunos vê o polinômio como uma expressão algébrica (item a);
- 7 dos 19 alunos simplesmente vêem o polinômio como uma mistura de letras e números: "é número com letras misturadas" (item d). Esta compreensão de polinômio não havia sido prevista por nós a priori.

Entre os 4 alunos restantes nem formulamos uma possível concepção de "Polinômio". Caberia aqui um estudo mais detalhado que não realizamos.

Análise do 2º exercício:

A. Quanto ao preenchimento da tabela

Dos 21 alunos, 19 seguiram as instruções corretamente na coluna do exemplo, ou seja, resolveram o exemplo numérico.

Já na coluna que pedia para expressar as instruções usando a álgebra, nenhum deles conseguiu resolver. Veja o que ocorreu:

a) 11 dos 21 alunos pensaram em um número algébrico como um monômio tendo coeficiente igual ao que foi pensado no exemplo e a parte literal uma letra qualquer. Se no exemplo o número pensado foi 2, ocorreu o seguinte:

Instruções	Dê um exemplo	Expresse as instruções usando a álgebra
Pense em um número	2	2x
Ache o seu dobro	4	4x
Some 3 ao resultado	7	7x
Triplique o que você obteve	21	21x
Subtraia 9 do resultado	12	12x
Divida tudo por 6	2	2x

Com esses cálculos feitos incorretamente, o aluno chega ao número algebricamente pensado acreditando que acertou e, com isso, não pensa no que fez. O erro não aparece como obstáculo para provocar a revisão da resolução.

Esta resolução ilustra que é problemático para os alunos a tarefa: passar de linguagem natural para a linguagem simbólica.

b) 1 dos 21 alunos fez a mesma situação mostrada acima, com exceção do número pensado. No exemplo pensou o número 5 e, usando a álgebra, representou o número pensado por a. Mas ao realizar a terceira instrução, ele realizou a seguinte adição: $2a + 3 = 5a$.

c) 3 dos 21 alunos conseguiram montar corretamente a expressão resultante sendo que, um deles não desenvolveu o que não permitiu perceber o que sempre acontece; outro tentou desenvolver, mas falhou na propriedade distributiva, ou seja, escreveu que $3.(2x + 3) - 9 = 6x + 3 - 9 = 6x - 6$ e isso dividido por 6 disse que era x (número pensado); o terceiro na verdade não errou, simplesmente deixou incompleto, pois pensou em um número y, seguiu as instruções e chegou em $6y/6$ não percebendo que isso era na verdade y.

Notemos aqui, erros cometidos quanto a multiplicação de um escalar por um binômio e a divisão do binômio $6x - 6$ por 6. Quanto a este último, não sabemos se ele não sabe efetuar a divisão de 6y por 6. Uma entrevista com o aluno poderia esclarecer, mas não a realizamos.

d) 1 único aluno teria montado a expressão correta se não pensasse que o dobro de um número a fosse a^2 e, assim, o triplo do dobro mais três sendo $(a^2 + 3)^3$.

Este aluno mostra uma dificuldade na representação simbólica de dobro e triplo, possível de estar presente no ensino médio.

e) Os últimos 5 alunos fizeram algo que não tem como entender no que eles pensaram, são letras e números misturadas sem qualquer seqüência, mesmo sendo analisadas sem considerar as instruções.

B. Quanto a resposta a pergunta: O que você pode concluir em relação ao resultado obtido e ao número pensado? Explique por que isto acontece[23].

Para explicar o por que do que acontece quando encontramos, no resultado, o mesmo número pensado, diferentes respostas foram dadas, as quais tentamos agrupar:

[23] Lista com todas as respostas no Anexo 11.

- 9 dos 19 alunos que responderam, perceberam que entre as operações realizadas as últimas são inversas das primeiras, ou pelo menos, que as operações realizadas são responsáveis pelo resultado.
- 7 dos 19 alunos simplesmente constataram igualdade do número pensado e do número obtido.
- 1 dos 19 alunos revela a não realização da divisão por 6.
- 1 dos 19 alunos não sabe explicar.
- 1 dos 19 alunos: "porque é lógica".

Podemos perceber que alguns deste alunos realmente pensaram em uma certa lógica matemática. Outros simplesmente contaram o resultado.

Análise do 3ª exercício:

Tenho 23 peças de dominó cujas dimensões são:

Altura = c
Largura = a
Comprimento = 2a + 3c

Quero guardá-las num estojo de madeira com as seguintes dimensões internas:

Altura = 5c
Largura = 2a + 3c
Comprimento = 7a

Sabendo que o volume de um paralelepípedo é comprimento x largura x altura, diga se sobrará espaço no estojo. Se sobrará, qual o polinômio que representa este espaço?

Dos 21 alunos 18 não tentaram ou desistiram no meio do caminho, apenas 3 fizeram algo que podemos observar. Veja os resultados:

Aluno A: $(2a + 3c)\ (a)\ (c) = 2a^2 + 3c^2$
$7a\ (2a + 3c)\ 5c = 14a^2 + 15c^2$
O polinômio que representa este espaço é $12a^2 + 12c^2$

Erro na multiplicação

Aluno B: $c\ .\ a\ .\ 2a + 3c$
$(ca).(2a + 3c)$
$23\ (2a^2c + 3ac^2) = 46a^2c + 69ac^2$
$5c\ .\ 7a\ .\ 2a + 3c$
$(35ac).(\ 2a + 3c) = 70a^2c + 105ac^2$
$R = 24a^2c + 36ac^2$

Resolução correta

Aluno C: $(2a + 3c)(a)(c)$ – dominó
$(2a^2 + 3ca)(c)$
$2a^2c + 3c^2a$
$23.(2a^2c + 3c^2a) = 46a^2c + 69c^2a$

$(7a)(2a + 3c)(5c)$ – estojo
$14a^2 + 21ac\ (5c)$
$70a^3c + 105ac^2$

Não efetuou a diferença de volumes.
Não sabemos como chegou a conclusão dada.
Vejamos que uma análise dos resultados volume dos dominós X volume do estojo, já evitaria a resposta dada.

Não, nem terá espaço para todas as peças.

Dos 3 alunos que resolveram ao exercício somente 1 obteve solução. Evidenciamos uma dificuldade no produto.

O que será que levou os alunos nesta questão a nem tentarem fazer o que se pedia? Será que a idéia de usar volume os perturbou? Ou será que foi porque não valia nota?

Conclusão

Quanto a concepção de "Polinômios" notemos que é como soma de monômios a mais forte (6 de 19 alunos). Somente dois alunos concebem polinômio como expressão algébrica.

Na passagem da linguagem natural para linguagem simbólica assim como nas operações, os alunos tem dificuldades.

Uma situação problema onde polinômio é a ferramenta de resolução é problemática. Será porque envolveu volume?

Conclusão

Retomamos primeiramente as questões que, neste trabalho, buscamos elementos de resposta:

- Como este saber se apresenta como saber a ensinar?
- Que objeto matemático é este, "Polinômios", na 7ª série do ensino fundamental?
- Com que saberes ele se relaciona? Qual seu habitat?
- O que é este objeto para os alunos em fim da 7ª série?
- O aluno em fim de 7ª série tem dificuldades de usar uma representação em linguagem simbólica numa situação geral?
- Os alunos operam com expressões algébricas de maneira natural?

O estudo realizado sobre "Polinômio" como saber a ensinar, nos permite concluir que, como saber matemático (acadêmico), ele é definido como uma seqüência de elementos de um anel e como uma função polinomial $f_A : A \rightarrow A$, sendo A um anel (Domingues e Iezzi).

Segundo o livro da coleção Fundamentos da Matemática Elementar 6, onde o conteúdo é mais elementar, "Polinômio" é considerado como uma função polinomial associada a uma seqüência de números complexos (Iezzi).

Podemos então observar, que do livro de Domingues e Iezzi para o livro de Iezzi acontece uma transposição, tanto em diferenciar "Polinômio" de "Função Polinomial" quanto de particularizar o anel para os números complexos.

Identificamos também, que as "Expressões Algébricas" são objeto de estudo na 7ª série do Ensino Fundamental, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Proposta Curricular de Santa Catarina. Esta última apresenta "Polinômio de uma ou mais variáveis" somente na 3ª série do Ensino Médio. Nos Planejamentos anuais de escolas, "Polinômio" é explicitamente um saber a ensinar na 7ª série do Ensino Fundamental.

Nos livros didáticos estudados, identificamos dois tipos de organização:

No livro 1, "Matemática – idéias e desafios", "Polinômios" tem por habitat um capítulo dividido em duas partes: "Polinômios" e "Polinômios: operações". Os conteúdos com que ele se relaciona (Expressões algébricas, Produtos notáveis e Fatoração) tem lugar cada um, também, em um capítulo.

No livro 2 "Matemática na medida certa", "Polinômio" é estudado no capítulo: "Álgebra: monômios e polinômios". Os conteúdos com que ele se relaciona (Expressões algébricas; Usando variáveis: cálculo do número de diagonais; Adição e subtração de monômios; Multiplicação, divisão e potenciação de monômios; Adição e subtração de polinômios; Multiplicação de polinômios; Casos simples de divisão de polinômios; Produtos notáveis; Quadrado da diferença. Produto da soma pela diferença; Fatoração; Fator comum; Agrupamento) são estudados como tópicos deste mesmo capítulo.

De acordo com os exercícios propostos (Anexo 9), os dois livros centram seus estudos sobre: operações com polinômios, estudo de expressões algébricas, fatoração de polinômios, cálculo de produtos notáveis e de valor numérico, destacando, principalmente, as operações com polinômios.

Quanto a concepção de "Polinômios" dos alunos de 7ª série do Ensino Fundamental, segundo a classe em que realizamos a experimentação, "Polinômio" é algo que possui letras e números misturados (resposta de 7 dentre os 19 alunos). Podemos questionar, que objeto matemático é este?

Destes 19 alunos 6 concebem o "Polinômio" como uma soma de monômios (conforme os livros didáticos). Mas, se perguntássemos o que é monômio? Será que obteríamos que é um termo do polinômio formado de "letras e números"? Se considerarmos essa hipótese como verdade teríamos então, 13 dos 19 alunos com a mesma concepção.

Considerando agora, a passagem da linguagem natural para a linguagem simbólica, nosso estudo revelou uma grande dificuldade que os alunos possuem para representar simbolicamente situações elementares. Muitos erros ocorrem com as operações, como por exemplo, o dobro de um número representado por x que é escrito como x^2.

Além da dificuldade de representar simbolicamente, nosso estudo mostrou também, uma grande dificuldade de operar com expressões algébricas. As três resoluções obtidas de um problema proposto na experimentação, nos mostrou dificuldade em multiplicação, divisão e, também, na comparação de polinômios ($70a^2c$ é maior ou menor que $46a^2c$?).

Nosso estudo não nos permite tirar conclusões com apenas estas três resoluções apresentadas, mas podemos nos perguntar: que motivo tiveram muitos dos alunos para nem mesmo tentar resolver este problema?

O estudo por nós realizado, nos permitiu conhecer um pouco da transposição efetuada sobre "Polinômios" de objeto a ensinar a objeto ensinado e de conhecer, mais precisamente, como este objeto é ensinado em 7ª série do Ensino Fundamental e com que outros conteúdos matemáticos ele se relaciona.

Referência Bibliográfica

BROUSSEAU, G., *Thórie dês situations didactiques,* éditions La pensée sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 12(1), éditions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 73-111;

CHEVALHARD, Y., *La transposition Didactique du savoir savant au savoir enseingé,* éditions La pensée souvage, Grenoble;

CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 19(2), éditions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 221-266;

DOMINGUES, H.H. e IEZZI, G., *Álgebra Moderna*, Atual editora, 1982/São Paulo, 3ª edição;

IEZZI, G., *Fundamentos de Matemática Elementar 6*, Atual editora, 1993/São Paulo;

JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. e CENTURIÓN, M., *Matemática na Medida Certa*, editora Scipione, 1999/São Paulo, 7ª série – Ensino fundamental, 6ª edição, aprovado pelo MEC;

KOERICH, A.C., *Um estudo sobre polinômios e sua abordagem no ensino,* Trabalho de conclusão de curso, UFSC, 2000;

MORI, I. e ONAGA, D.S., *Matemática – idéias e desafios*, editora Saraiva, 1999/São Paulo, 7ª série, 8ª edição, aprovado pelo MEC;

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN) – 1998, Matemática – 5ª à 8ª série;

PROPOSTA CURRICULAR DE SANTA CATARINA – 1998, Educação infantil – Educação fundamental e médio;

Anexo 1

Regra para o "Algoritmo de Briot-Ruffini"

Dados os polinômios

$f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$ e

$g = x - a,$

vamos determinar o quociente q e o resto r da divisão de f por g.

Façamos:

$$q = q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \ldots + q_{n-1}$$

e apliquemos o método dos coeficientes a determinar:

$$\begin{array}{l}
q_0x^{n-1} + q_1n^{n-2} + q_2x^{n-3} + \ldots + q_{n-2}x + q_{n-1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{x - a} \quad \times \\
q_0x^n + q_1x^{n-1} + q_2x^{n-2} + \ldots + q_{n-2}x^2 + q_{n-1}x \\
\quad - aq_0x^{n-1} - aq_1x^{n-2} - \ldots - aq_{n-3}x^2 - aq_{n-2}x - aq_{n-1} \\
\hline
q_0x^n + (q_1 - aq_0)x^{n-1} + (q_2 - aq_1)x^{n-2} + \ldots + (q_{n-1} - aq_{n-2})x - aq_{n-1}
\end{array}$$

Impondo a condição $q \cdot (x - a) + r = f$, resultam as igualdades:

$$\begin{array}{lll}
q_0 = a_0 & & \\
q_1 - aq_0 = a_1 & \Longrightarrow & q_1 = aq_0 + a_1 \\
q_2 - aq_1 = a_2 & \Longrightarrow & q_2 = aq_1 + a_2 \\
\vdots & & \vdots \\
q_{n-1} - aq_{n-2} = a_{n-1} & \Longrightarrow & q_{n-1} = aq_{n-2} + a_{n-1} \\
r - aq_{n-1} = a_n & \Longrightarrow & r = aq_{n-1} + a_n
\end{array}$$

Os cálculos para obter q e r indicados acima tornam-se mais rápidos com a aplicação do seguinte dispositivo prático de Briot-Ruffini.

$$\begin{array}{cccccc|c}
a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n & a \\
\hline
a_0 & aq_0 + a_1 & aq_1 + a_2 & \ldots & aq_{n-2} + a_{n-1} & aq_{n-1} + a_n & \\
q_0 & q_1 & q_2 & & q_{n-1} & r &
\end{array}$$

Anexo 2

Regra para a "Divisão por binômios do 1º grau quaisquer"

Para obtermos rapidamente o quociente q e o resto r da divisão de um polinômio f, com $\partial f \geq 1$, por $g = bx - a$, em que $b \neq 0$, notemos:

$$(bx - a)q + r = f \qquad \text{então} \qquad \left(x - \frac{a}{b}\right).\underbrace{(bq)}_{q'} + r = f$$

Do que decorre a seguinte regra prática:

1°) divide-se f por $x - \frac{a}{b}$ empregando o algoritmo de Briot-Ruffini;

2°) divide-se o quociente q' encontrado pelo número b, obtendo q.

Anexo 3

Listagem das idéias identificadas por Koerich (2000)
em seu estudo de alguns livros didáticos

1. Identificar expressões algébricas;
2. Traduzir frases de linguagem natural e simbólica para expressão algébrica;
3. Determinar áreas;
4. Calcular perímetro;
5. Calcular volumes;
6. Calcular valor numérico;
7. Deduzir expressão algébrica a partir de situação problema do cotidiano;
8. Operar com polinômios;
9. Calcular comprimentos;
10. Simplificar expressões algébricas;

Anexo 4

Um dos exemplos dado a "divisão de polinômios" na página 58

Estudaremos a divisão de polinômios com uma só variável e com o dividendo e o divisor tendo a mesma variável.

1º exemplo: *Qual é o quociente da divisão do polinômio $5x^2 - 3x - 18$ pelo binômio $x - 2$?*

Resolução: Usamos um esquema semelhante àquele utilizado para os números.

$$\begin{array}{r|l} 5x^2 - 3x - 18 & x - 2 \\ \hline & \end{array}$$

$5x$ — Divide-se o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor ——— $5x^2 : x$.

$$\begin{array}{r|l} 5x^2 - 3x - 18 & x - 2 \\ \cline{2-2} -5x^2 + 10x & 5x \\ \cline{1-1} 0x^2 + 7x - 18 & \end{array}$$

Calcula-se $5x \cdot (x - 2)$ e subtrai-se o resultado do dividendo (ou adiciona-se o oposto).

$$\begin{array}{r|l} 5x^2 - 3x - 18 & x - 2 \\ \cline{2-2} -5x^2 + 10x & 5x + 7 \\ \cline{1-1} +7x - 18 & \end{array}$$

Divide-se $7x$ por x.

$$\begin{array}{r|l} 5x^2 - 3x - 18 & x - 2 \\ \cline{2-2} -5x^2 + 10x & 5x + 7 \\ \cline{1-1} +7x - 18 & \\ -7x + 14 & \\ \cline{1-1} 0x - 4 & \end{array}$$

Calcula-se $7 \cdot (x - 2)$ e adiciona-se o oposto do resultado obtido a $7x - 18$.

Em resumo:

$$\begin{array}{r|l} 5x^2 - 3x - 18 & x - 2 \\ \cline{2-2} -5x^2 + 10x & 5x + 7 \\ \cline{1-1} +7x - 18 & \\ -7x + 14 & \\ \cline{1-1} -4 & \end{array}$$

Resposta: $(5x^2 - 3x - 18) : (x - 2)$ tem quociente $5x + 7$ e resto -4.

Anexo 5

Exemplo de fatoração apresentada na página 77 deste livro.

Fatoração por agrupamento

"O polinômio que está no quadro ao lado não tem fatores comuns a todos os seus termos, mas é possível fatorá-lo. Qual é sua forma fatorada?

ax + 2a + bx + 2b

Resolução

Observando os termos de "dois em dois":

ax e 2a

fator comum: **a**

fatoração: ax + 2a = a.(x + 2)

bx e 2b

fator comum: **b**

fatoração: bx + 2b = b.(x + 2)

Fatorando a expressão:

$$\underbrace{ax + 2a}_{a.(x+2)} + \underbrace{bx + 2b}_{b.(x+2)} = a.(x + 2) + b.(x + 2)$$

x + 2 é fator comum

Colocando x + 2 em evidência:

$$\underbrace{ax + 2a + bx + 2b}_{polinômio} = \underbrace{(x + 2).(a + b)}_{forma \quad fatorada}$$

Dizemos que fatoramos o polinômio ax + 2a + bx + 2b por agrupamento dos seus termos.

Anexo 6

Exemplo de fatoração apresentada na página 82 deste livro.

Fatoração de um trinômio quadrado perfeito

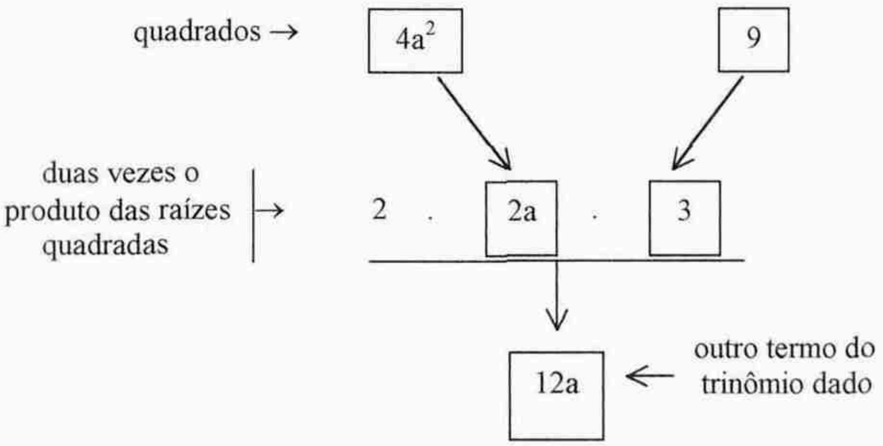
"O polinômio escrito ao lado é um trinômio quadrado perfeito e pode ser fatorado. Qual é sua forma fatorada?"

$\boxed{4a^2 + 12a + 9}$

Resolução

Na prática:

Observamos os termos da expressão $4a^2 + 12a + 9$ para verificar se é um trinômio quadrado perfeito.



Portanto, $4a^2 + 12a + 9$ é um trinômio quadrado perfeito.
Fatorando, temos:

$$\underbrace{4a^2 + 12a + 9}_{polinômio} = \underbrace{(2a+3)^2}_{forma\ fatorada}$$

Anexo 7

Exemplo de fatoração apresentada na página 84 deste livro.

Fatoração de um trinômio do 2º grau

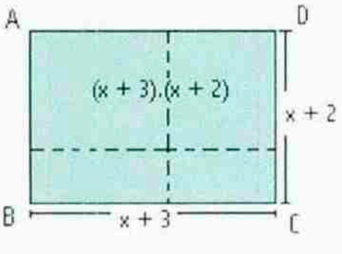
"O polinômio dado é um trinômio do 2º grau e pode ser fatorado. Qual é sua forma fatorada?"

$x^2 + 5x + 6$

Resolução

Observando os termos de $x^2 + 5x + 6$, x^2 é um quadrado e 6 é o produto 3 . 2.

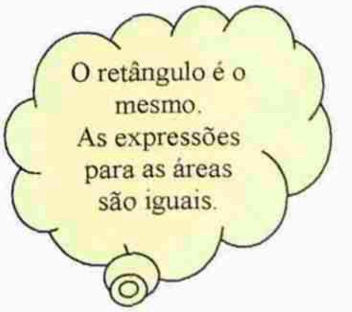
$$\text{área ABCD} = x^2 + 3x + 2x + 3.2$$
$$\textbf{área ABCD} = \mathbf{x^2 + 5x + 6}$$



Podemos, também, escrever:
Área ABCD = lado . lado

Área ABCD = (x + 3).(x + 2)

$$\underbrace{x^2 + 5x + 6}_{polinômio} = \underbrace{(x+3)(x+2)}_{forma\ fatorada}$$



Dizemos que $x^2 + 5x + 6$ é um trinômio do 2º grau e $(x + 3).(x + 2)$ é sua forma fatorada.

Anexo 8

Quanto a sua natureza		
	Quantidade	
Exercícios	**Livro: Matemática – idéias e desafios**	**Livro: Matemática na medida certa**
1. Geométricos	22	19
2. Algébricos	169	146
3. Do cotidiano	3	9
Total	**194**	**174**

ou

Quanto a sua natureza		
	Quantidade	
Exercícios	**Livro: Matemática – idéias e desafios**	**Livro: Matemática na medida certa**
1. Geométricos	11%	11%
2. Algébricos	87%	84%
3. Do cotidiano	2%	5%

Anexo 9

Tipos de exercícios		
	Quantidade	
Tipos	**Livro: Matemática – idéias e desafios**	**Livro: Matemática na medida certa**
1. Identificar expressões algébricas	43	14
2. Traduzir frases de linguagem natural e simbólica para expressão algébrica	8	12
3. Determinar áreas	26	13
4. Calcular perímetro	8	7
5. Calcular volumes	4	0
6. Calcular valor numérico	59	61
7. Deduzir expressão algébrica a partir de situação problema do cotidiano	7	16
8. Operar com polinômios	120	148
9. Calcular comprimentos	4	0
10. Simplificar expressões algébricas	59	76
11. Identificar o valor das variáveis na expressão	20	6
12. Escrever expressão algébrica	4	2
13. Deduzir expressão algébrica	0	30
14. Comparar expressões algébricas	3	2
15. Calcular produtos notáveis	32	65
16. Fatorar polinômios	88	111
17. Exercícios recreativos	12	6
Total	**494**	**569**

Anexo 10

Ficha de atividade entregue para os alunos realizarem a experimentação

FICHA DO ALUNO

Escola:..

Aluno (a):..

1ª Questão: Defina polinômio.

2ª Questão: Preencha, seguindo as instruções, a tabela abaixo:

Instruções	Dê um exemplo	Expresse as instruções usando a álgebra
Pense em um número		
Ache o seu dobro		
Some 3 ao resultado		
Triplique o que você obteve		
Subtraia 9 do resultado		
Divida tudo por 6		

O que você pode concluir em relação ao resultado obtido e ao número pensado? Explique por que isto acontece.

3ª Questão: Tenho 23 peças de dominó cujas dimensões são:

Altura = c
Largura = a
Comprimento = 2a + 3c

Quero guardá-las num estojo de madeira com as seguintes dimensões internas:
Altura = 5c
Largura = 2a + 3c
Comprimento = 7a

Sabendo que o volume de um paralelepípedo é comprimento x largura x altura, diga se sobrará espaço no estojo. Se sobrará, qual o polinômio que representa este espaço?

Anexo 11

Respostas a questão relativa ao 2º exercício aplicado para 21 alunos

1. Os números são congruentes porque as operações "se anulam"
2. Concluímos que voltamos ao numero inicial. Isto acontece porque adicionamos mas números ao numero inicial pela multiplicação e adição e depois, por meio da subtração e divisão retiramos os números adicionados, voltando então para o numero inicial.
3. Porque agente multiplica e soma os mesmos resultados que vamos subtrair é por isso que no final ficou o mesmo resultado.
4. É o mesmo número.
5. Que tudo que eu fiz deu o resultado que eu pensei.
6. Eu pude observar que o número inicial e o último são iguais.
7. Que depois desta conta acabamos no mesmo número porque 1º ele multiplica, logo ele divide, e subtrai e soma depois levando sempre ao mesmo lugar.
8. Que o mesmo número que eu escolhi no começo deu no resultado.
9. O resultado é igual ao número que eu pensei. Não sei porque aconteceu mas gostaria de saber.
10. Que é igual, eu acho que isso acontece porque ele manda fazer uma conta e depois aos poucos você a desfaz com outras.
11. Porque você multiplica por 5 e depois diminui 6, isso.
12. É que o número pensado deu igual ao resultado final, isso acontece porque é uma lógica.
13. Achei o número que eu pensei. Os números adicionais são iguais aos que diminuem
14. O número que eu pensei, achei o dobro, somei mais 3, tripliquei subtrai e dividi por 6 é igual ao número que eu pensei.
15. Eu não consegui dividir por seis, não sei porque.
16. Eu realmente não consigo explicar.
17. O final foi igual ao número que eu pensei.
18. Eu pensei no 2 e depois de ter feito todas as operações o resultado foi o número 2. Eu acho que isso acontece porque usamos todas as operações.
19. Porque o número que eu imaginei é o mesmo que o resultado do processo.