

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**GIORGIO WILBERSTAEDT**

**AS FORMAS E OS NÚMEROS DA NATUREZA**

**Florianópolis (SC), 2004.**

**GIORGIO WILBERSTAEDT**

**AS FORMAS E OS NÚMEROS DA NATUREZA**

**Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática, como requisito à obtenção do título de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Santa Catarina.**

**Orientador: Mércles Thadeu Moretti**

**Florianópolis (SC), 2004.**

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 38/SCG/04.

---

Prof<sup>a</sup> Carmem Suzane Comitre Gimenez  
Professora da disciplina

**Banca Examinadora:**

---

Prof Méricles Thadeu Moretti  
Orientador

---

Prof Nereu Estanislau Burin

---

Prof<sup>a</sup> Rosemary Pereira

## RESUMO

Este trabalho trata de uma pesquisa intitulada: As formas e os números da natureza.

O estudo mostrou que a seqüência de Fibonacci está intimamente ligada com a natureza, seja na quantidade de pétalas, na quantidade de sépalas, na quantidade de flósculos raiados de flores compostas, na formação dos ramos de certas plantas, na filotaxia e em algumas outras situações.

Refere também que a seqüência de Fibonacci está relacionada com o número de ouro, no qual também aparece com bastante freqüência na natureza.

Apresentamos ainda o retângulo de ouro, como um padrão de simetria. Simetria esta que aparece na natureza e que por ser considerada bela o homem tenta copiá-la em várias situações, seja na arte, na arquitetura ou até mesmo para chamar a atenção em aspectos do cotidiano (cartão de crédito, propaganda e marketing). Buscando com isso tornar o aspecto dos objetos agradáveis.

Foi observado na natureza várias ocorrências da espiral logarítmica, como por exemplo na concha do náutilo, na disposição das sementes de inúmeras flores, nas escamas do abacaxi e das pinhas.

A matemática ficou também evidente na vida extraordinária das abelhas, pois esses insetos mostram um conhecimento muito forte sobre a geometria e cálculo infinitesimal.

Através da leitura deste relato verificou-se que a natureza por si só é perfeita e que o homem apenas verifica sua perfeição através da matemática.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Leopardo e Tigre .....	10
Figura 2 - Fibonacci.....	14
Figura 3 – Esboço do Número de casais de coelhos do problema de Fibonacci.....	16
Figura 4 – Número de Pétalas das Flores .....	18
Figura 5 – Arranjo Helicoidal de folhas em um caule.....	20
Figura 6 – Arranjo com duas rotações e cinco folhas.....	21
Figura 7 – Arranjo com três rotações e oito folhas.....	22
Figura 8 – Ramificações e a série de Fibonacci .....	23
Figura 9 – Desenhando um retângulo de ouro, dado um segmento dividido na secção áurea. ....	30
Figura 10 - Desenhando um retângulo de ouro sem o segmento dividido na secção áurea. ....	31
Figura 11 – O Parténon e o Retângulo de Ouro .....	33
Figura 12 – Desenho de Da Vinci para o livro de Luca Pacioli. ....	34
Figura 13 – Quadro “Os Banhistas” de George Seurat. ....	35
Figura 14 – “Composição em amarelo” de Pietter Mondrian. ....	35
Figura 15 – “Monalisa” de Leonardo Da Vincci.....	35
Figura 16 – Geometria do Zebu.....	36
Figura 17 – Simetria dinâmica na natureza. ....	36
Figura 18 – Definição de espiral logarítmica .....	38
Figura 19 – Triângulo de Ouro .....	39

Figura 20 – Formação da espiral logarítmica através de triângulos de ouro. ....	40
Figura 21 – Construção de vários retângulos de ouro sucessivos. ....	40
Figura 22 - Construção da espiral logarítmica através de retângulos de ouro.....	41
Figura 23 – A pinha e a espiral logarítmica. ....	42
Figura 24 – O girassol e a espiral logarítmica .....	42
Figura 25 – A couve-flor e a espiral logarítmica.....	42
Figura 26 – O abacaxi e a espiral logarítmica. ....	43
Figura 27 - Possibilidades matemáticas de dividir o espaço mediante prismas regulares. ....	45
Figura 28 – Colméia das abelhas.....	46
Figura 29 – Favo da Abelha. ....	47
Figura 30 – Favo da Abelha e o Ângulo Ótimo. ....	50
Figura 31 – Desenho do início da construção das colméias.....	53
Figura 32 – Foto do início da construção das colméias.....	54

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Número de Pétalas das Flores .....	17
Tabela 2 – Número de Flósculos Raiados .....	19
Tabela 3 – Variação do Consumo de Cera .....	45
Tabela 4 - Verificação do Ângulo Ótimo. ....	51

## SUMÁRIO

<b>RESUMO</b> .....	4
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	5
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	7
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	10
<b>2 A SEQÜÊNCIA DE FIBONACCI</b> .....	14
2.1 Biografia de Fibonacci.....	14
2.2 A origem e os números da seqüência de Fibonacci.....	15
2.3 A seqüência de Fibonacci e as pétalas das flores .....	17
2.4 A seqüência de Fibonacci e os flósculos de flores compostas. ....	18
2.5 A seqüência de Fibonacci e o arranjo das folhas.....	19
2.6 A seqüência de Fibonacci e algumas outras ocorrências na natureza. ....	23
<b>3 NÚMERO DE OURO</b> .....	24
3.1 Como chegar ao número de ouro.....	24
3.2 A relação do número de ouro com a seqüência de Fibonacci. ....	27
3.3 A razão de ouro em algumas ocorrências interessantes. ....	29
<b>4 O RETÂNGULO DE OURO</b> .....	30
4.1 Como desenhar um retângulo de ouro.....	30

4.2	Um breve histórico do retângulo de ouro. ....	31
4.3	O retângulo de ouro na arquitetura e na arte. ....	32
4.4	O retângulo de ouro na natureza. ....	36
<b>5</b>	<b>ESPIRAL LOGARÍTMICA. ....</b>	<b>38</b>
5.1	Definição. ....	38
5.2	A formação da espiral logarítmica através de triângulos de ouro. ....	39
5.3	A formação da espiral logarítmica através de retângulos de ouro. ....	40
5.4	A espiral logarítmica e sua ocorrência na natureza. ....	41
<b>6</b>	<b>ABELHAS. ....</b>	<b>44</b>
6.1	A divisão do espaço nas colméias. ....	44
6.2	O fechamento dos Alvéolos. ....	47
6.3	Resolução matemática do problema do fechamento dos alvéolos. ....	49
6.4	Outras curiosidades a respeito da construção dos alvéolos. ....	55
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS. ....</b>	<b>57</b>
	<b>REFERÊNCIAS. ....</b>	<b>59</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Vivemos num universo de padrões. Todas as noites as estrelas se movem em círculos no céu. As estações se sucedem em intervalos anuais. Dois flocos de neve nunca são exatamente iguais, mas todos têm uma simetria hexagonal. Os tigres e as zebras são cobertos por padrões de listras, leopardos e hienas são cobertos por padrões de manchas.



**Figura 1 – Leopardo e Tigre**

Fonte: Fibonacci e os números da natureza.

Grupos complexos de ondas cruzam os oceanos; grupos muito similares de dunas de areia cruzam o deserto. Arcos coloridos de luz enfeitam o céu na forma de arco-íris e um halo

circular brilhante algumas vezes envolve a lua nas noites de inverno. Gotas esféricas de água caem das nuvens.

A mente e a cultura humanas desenvolveram um sistema formal de pensamento para reconhecer, classificar e explorar padrões. Nós o chamamos de matemática. Usando a matemática para organizar e sistematizar nossas idéias a respeito de padrões, descobrimos um grande segredo: os padrões da natureza não existem somente para serem admirados. São pistas vitais para as regras que governam os processos naturais.

Há muita beleza nos indícios da natureza e todos nós podemos reconhecê-la sem qualquer treino em matemática. Mas é muito interessante ver as deduções matemáticas das regras e regularidades que provém desta natureza maravilhosa. Os padrões possuem beleza, assim como utilidade (STWART, 1996, p. 11).

Os objetos matemáticos mais simples são os números, e os padrões mais simples da natureza são numéricos. As fases da lua constituem um ciclo completo que se repete a cada 28 dias. A quantidade de pétalas das flores são na maioria das vezes 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ou 89, no qual tem um padrão definido para estes números. As pessoas têm duas pernas, os gatos quatro, os insetos seis e as aranhas oito. As estrelas-do-mar têm cinco braços (ou dez, 11, e mesmo 17, dependendo da espécie).

Além dos padrões numéricos, há os geométricos. Até recentemente, as formas principais que chamavam a atenção dos matemáticos eram muito simples: triângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos, círculos, elipses, espirais, cubos, esferas, cones e assim por diante. Todas estas formas podem ser encontradas na natureza, embora algumas sejam muito mais comuns, ou mais evidentes do que outras. O arco-íris, por exemplo, é uma coleção de círculos, um para cada cor. Nós normalmente não vemos o círculo completo, apenas um arco; mas, do alto, os arco-íris podem ser vistos como círculos completos. Você também pode ver círculos no olho humano, nas asas das borboletas e nas ondas que se propagam em um lago.

O amor da natureza pelas listras e manchas se estende ao reino animal, com os tigres e leopardos, as zebras e as girafas. As formas e os padrões encontrados nos animais e plantas constituem um solo fértil para os que têm uma mente matemática. Por exemplo, por que muitas conchas formam espirais? Por que as estrelas-do-mar são dotadas de um conjunto simétrico de braços? Por que muitos vírus adotam formas geométricas regulares, a mais espantosa sendo a de um icosaedro – um sólido regular formado a partir de vinte triângulos equiláteros? Por que muitos animais têm simetria bilateral? Por que a simetria é muitas vezes imperfeita, desaparecendo quando você examina detalhes como a posição do coração humano ou as diferenças entre os dois hemisférios do nosso cérebro? Por que a maioria de nós – não todos – é destra?

Finalmente, há uma outra categoria de padrões naturais que arrebatou a imaginação humana só muito recentemente mas de forma dramática. Somente nos últimos quarenta anos a humanidade se tornou explicitamente consciente dos dois tipos de padrão conhecidos agora como fractais e caos. Esta categoria abrange padrões que existem onde pensávamos que tudo era aleatório e destituído de forma. Pense, por exemplo, na forma de uma nuvem. Você não vê nuvens esféricas, cúbicas ou icosaédricas. As nuvens são aglomerados delicados, destituídos de forma, indistintos. Ainda assim há um padrão muito marcante para as nuvens, uma espécie de simetria, que está intimamente relacionado com a física da sua formação. Basicamente é assim: você não pode dizer o tamanho de uma nuvem somente pela observação da mesma. Se observar um elefante, será capaz de dizer, pelo menos de modo grosseiro, quão grande ele é: um elefante do tamanho de uma casa colapsaria sob o próprio peso e um do tamanho de um camundongo teria pernas inutilmente grossas. As nuvens não são de modo algum assim. Uma nuvem grande vista de longe e uma pequena vista de perto poderiam ter igualmente – e de modo plausível – os seus papéis trocados. Elas serão diferentes na forma, é claro, mas não de um modo que dependa sistematicamente do tamanho. Esta “independência de escala” da

forma das nuvens foi verificada experimentalmente com retalhos de nuvens cujos tamanhos variavam de um fator mil. Retalhos de nuvens de um quilômetro de extensão se pareciam exatamente com retalhos de nuvens de mil quilômetros de extensão. Podemos ainda, verificar este comportamento em muitas das formas da natureza, inclusive montanhas, rios que se interligam, árvores, e muito possivelmente com o modo pelo qual a matéria está distribuída por todo o universo. Usando um termo tornado famoso pelo matemático Benoit Mandelbrot, estas formas são todas fractais (STWART, 1996, p.17).

Os fractais são formas geométricas que repetem sua estrutura em escalas cada vez menores e o caos é um tipo de aleatoriedade aparente cujas origens são inteiramente determinísticas. A natureza já sabia a respeito destes padrões, pois as nuvens são fractais e o tempo meteorológico é caótico. Levou muito tempo para que a humanidade percebesse isso.

Neste trabalho, procuramos mostrar algumas ligações da matemática com a natureza com o propósito de despertar a curiosidade do leitor para um tema que pode ainda ser muito explorado.

No capítulo 2 escrevemos sobre Fibonacci. Sua biografia, a origem do problema que gerou a famosa seqüência que leva seu nome e a relação desta sucessão com a natureza.

No capítulo 3 comentamos a respeito do número de ouro. Como chegar a esse número e a relação que ele possui com a seqüência de Fibonacci.

No capítulo 4 descrevemos o retângulo de ouro. Sua construção, sua utilização na arquitetura, arte e sua ocorrência na natureza.

No capítulo 5 são apresentadas algumas considerações sobre a espiral logarítmica. Sua construção e ocorrência na natureza.

No capítulo 6 utilizamos o exemplo das abelhas. A forma espantosa como é salientada a matemática na construção de sua colméia.

E por fim, nas considerações finais, sintetizamos os resultados desta pesquisa.

## 2 A SEQÜÊNCIA DE FIBONACCI

### 2.1 Biografia de Fibonacci



**Figura 2 - Fibonacci**

Fonte: Fibonacci e os números da natureza

Fibonacci é considerado o matemático mais original e criativo da Idade Média, foi um dos mais importantes matemáticos daquela época, e prestou valiosas contribuições para os campos da aritmética, da álgebra e da geometria. O seu nome de batismo era Leonardo de Pisa (1175-1250), filho de um mercador italiano que morava em Boudie, no norte da África. A profissão do pai exigia que este viajasse por diversas cidades entre o Próximo e o Médio Oriente nas quais Fibonacci se familiarizou com o sistema decimal hindu-arábico, que tinha valor posicional e usava o símbolo zero. Nesta época, na Itália, ainda era usada a numeração romana nas operações de cálculo. Fibonacci apercebeu-se do valor e da beleza dos numerais hindu-arábicos e defendeu fortemente a sua adoção. Em 1202, escreveu o *Liber Abaci* (*Livro do Ábaco*), um manual completo explicando como utilizar aqueles numerais nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, indicando como resolver problemas e abordando ainda diversos temas de álgebra e de geometria. Os mercadores italianos mostraram-se relutantes em modificar os seus processos tradicionais mas, através de um contato permanente com os Árabes e dos trabalhos de Fibonacci e de outros matemáticos, o sistema hindu-arábico acabou por ser introduzido e progressivamente aceito na Europa (PAPPAS, 1998, p. 28).

## **2.2 A origem e os números da seqüência de Fibonacci**

É irônico que Fibonacci seja hoje famoso devido a uma seqüência numérica que resultou de um obscuro problema existente no seu livro, o *Liber Abaci*. Na altura em que escreveu o problema, considerou-o apenas como um exercício mental. No entanto, no século XIX, quando o matemático francês Edouard Lucas editou um trabalho em quatro volumes sobre matemática recreativa, ligou o nome de Fibonacci à seqüência numérica que era a solução do problema do *Liber Abaci*. O problema que dá origem à sucessão de Fibonacci é o seguinte:

Suponhamos que um casal de coelhos com um mês de idade (macho e fêmea) são ainda muito jovens para se reproduzir, mas que, com dois meses de idade, já têm maturidade suficiente para o fazer. Admitamos igualmente que todos os meses, a partir dos dois meses de idade, dão origem a um novo casal de coelhos (macho e fêmea).

Se todos os casais de coelhos se reproduzirem da mesma forma que o primeiro, quantos casais de coelhos haverá no princípio de cada mês?

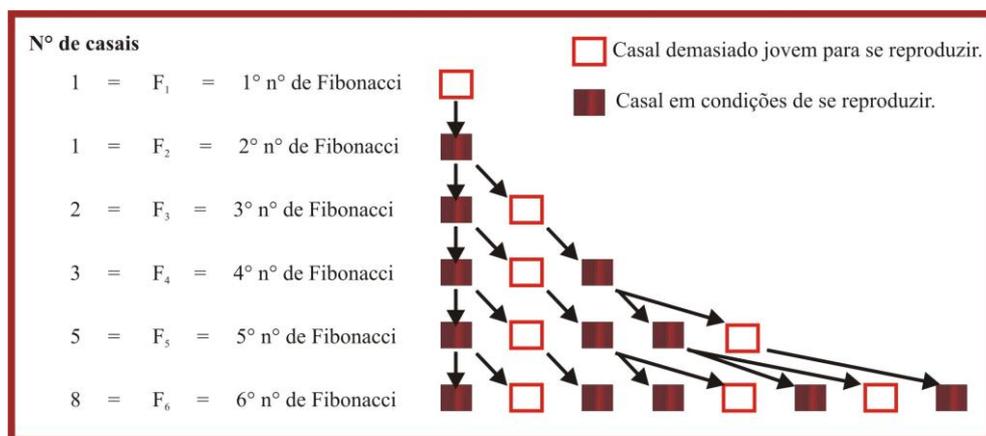


Figura 3 – Esboço do Número de casais de coelhos do problema de Fibonacci

Cada termo da sucessão de Fibonacci é igual a soma dos dois termos imediatamente precedentes. Em linguagem matemática sucinta, esta propriedade pode ser representada pela fórmula:

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad , \quad \text{onde } n = 3, 4, \dots$$

Por volta da mesma época (século XIX) em que Edouard Lucas escrevera seu livro e falara da referida seqüência de números, alguns matemáticos já se mostravam intrigados com ela, com suas propriedades e com as áreas onde surge, como por exemplo nos seguintes campos:

- Triângulo de Pascal, fórmula binomial e cálculo de probabilidade.

- Identidades matemáticas.
- Curiosos truques matemáticos.
- Natureza e plantas.
- Razão de ouro, retângulo de ouro, triângulo de ouro, pentagrama e espiral logarítmica.

Desses cinco campos, nos deteremos a comentar sobre os dos dois últimos, pelo fato de terem aplicações mais palpáveis e dentro do nosso objetivo.

### 2.3 A seqüência de Fibonacci e as pétalas das flores

Considere a lista das seguintes flores que apresentam como número de pétalas um número de Fibonacci: jarro, rosa selvagem, tormentilha, cosmo, rainúnclo amarelo, columbina, flor-de-lis, e íris.

Os seguintes números de Fibonacci são freqüentemente associados com as pétalas de:

1	Jarros
3	Lírios, íris, e açucenas
5	Columbinas, rainúnclos amarelos e esporas
8	Delfínios
13	Crisântemos e margaridas azuis
21	Asteráceas, margaridas inglesas, olhado preto e chicória.
34	Dálias e malmequeres
55	Margaridas africanas e malmequeres
84	Malmequeres

**Tabela 1 – Número de Pétalas das Flores**



**Figura 4 – Número de Pétalas das Flores**

Fonte: Fibonacci e os números da natureza

#### **2.4 A seqüência de Fibonacci e os flósculos de flores compostas.**

Os números de Fibonacci também são encontrados nos números de flósculos de flores compostas. A tabela seguinte é tirada de um trabalho de Wagner, 1957 (BATSCHELET, 1978, p. 210), que contou o número de flósculos raiados nas flores compostas de plantas alpinas:

Tabela 2 – Número de Flósculos Raiados

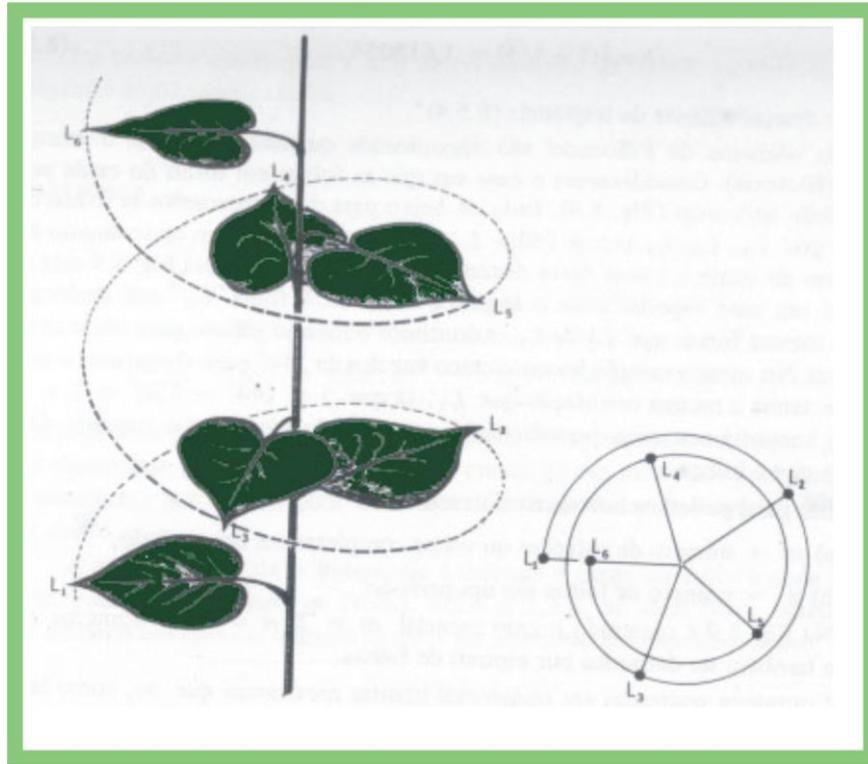
Espécies	Número de Flósculos Raiados	
	Média	Extensão
<i>Achillea macrophylla</i>	5	4-7
<i>Achillea atrata</i>	8	6-13
<i>Rudbeckia nitida</i>	8	6-10
<i>Arnica Montana</i> (flores laterais)	11	7-17
<i>Rudbeckia speciosa</i> 1	13	13-30
<i>Centaurea montana</i>	13	10-17
<i>Senecio doronicum</i> 1	13	11-21
<i>Senecio uniflorus</i>	13	5-24
<i>Senecio doronicum</i> 2	17-18	11-22
<i>Arnica Montana</i> (flores apicais)	18-19	10-29
<i>Chrysanthemum leucanthemum</i>	21	13-33
<i>Rudbeckia speciosa</i> 2	21	13-30
<i>Senecio doronicum</i> 3	21	11-22
<i>Doronicum clusii</i>	34	16-47

Fonte: BATSCHELET, 1978, p. 210.

Como vemos na tabela, o número de flósculos raiados está sujeito à flutuação ocasional. Entretanto, os valores médios recaem freqüentemente nos números de Fibonacci. As exceções são *Arnica montana* e *Senecio doronicum*.

### 2.5 A seqüência de Fibonacci e o arranjo das folhas.

Encontramos, ainda, os números de Fibonacci quando estudamos o arranjo de folhas (filotaxia). Consideramos o caso em que as folhas em torno do caule seguem um padrão helicoidal.



**Figura 5 – Arranjo Helicoidal de folhas em um caule<sup>1</sup>.**

Fonte: BATSCHELET, 1978 p. 210

Indo de baixo para cima, marcamos as folhas consecutivas por  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ , etc. A folha  $L_2$  será encontrada a um certo ângulo de  $L_1$  em torno do caule e a uma certa distância ao longo do caule. Na figura anterior, está representado um caso especial onde o ângulo é de  $144^\circ$ . A folha  $L_3$  está deslocada de  $L_2$  da mesma forma que  $L_2$  de  $L_1$ . Admitimos o mesmo padrão para todas as folhas restantes, assumindo que nenhuma se partiu. No nosso exemplo teremos cinco ângulos de  $144^\circ$  até chegarmos a uma folha que tenha a mesma orientação que  $L_1$ , já que  $5 \times 144^\circ = 720^\circ = 2 \times 360^\circ$ . Então encontramos uma periodicidade com um “período” que consiste de duas voltas e cinco folhas.

<sup>1</sup> Arranjo Helicoidal de folhas em um caule. Na figura admitiu-se que o mesmo padrão com cinco folhas é repetido após duas voltas completas da espiral. Este é o caso em roseiras, alguns salgueiros e cerejeiras. Esquerda: vista lateral. Direita: Vista de cima

Em geral podemos introduzir dois números:

$m$  = número de rotações ou voltas completas em um período.

$n$  = número de folhas em um período.

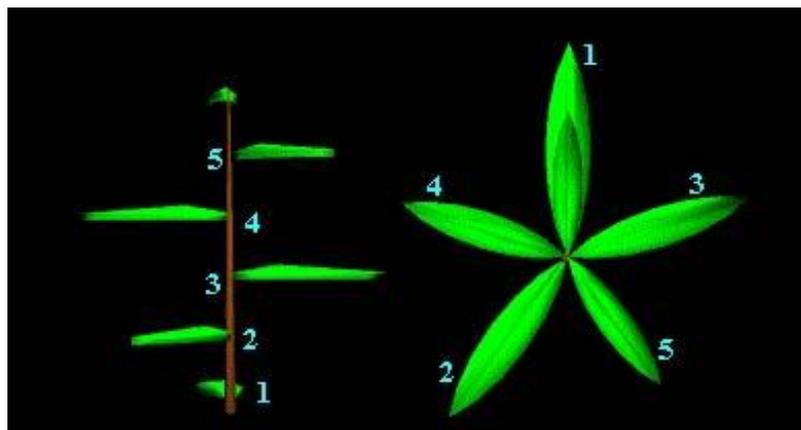
Na figura anterior é mostrado o caso especial  $m = 2$ ,  $n = 5$ . Os números  $m$  e  $n$  podem também ser definidos por espirais de folhas.

Contagens realizadas em numerosas plantas mostram que  $m$ , como também  $n$ , assumem mais freqüentemente valores tais como 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., isto é, números da seqüência de Fibonacci. De acordo com Schips, em 1922 (BATSCHULET, 1978, p. 209), encontramos os casos:

$m = 1$ ,  $n = 2$  na tília, na limeira, nas duas fileiras de folhas de várias plantas bulbosas assim como também nos ramos horizontais do elmo;

$m = 1$ ,  $n = 3$  na faia, na aveleira, na amora silvestre, nas ciperáceas, no amieiro e na videira;

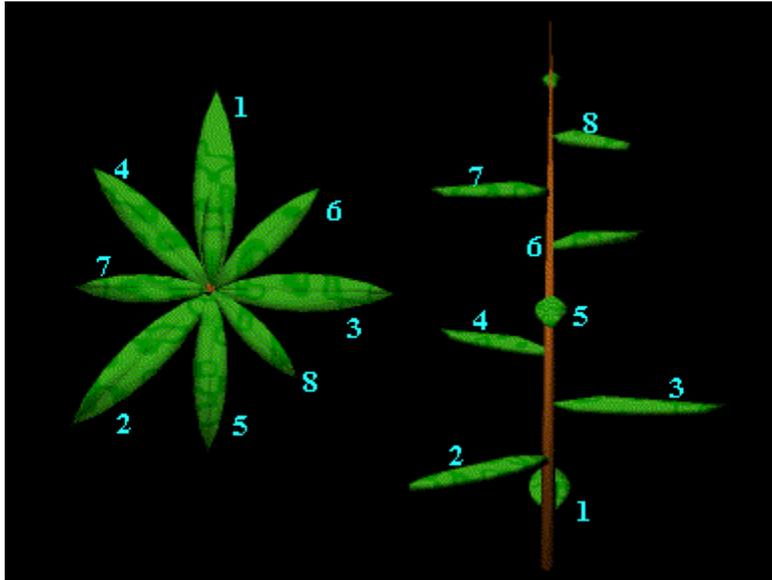
$m = 2$ ,  $n = 5$  no carvalho, na cerejeira, na macieira, no azevinho, na ameixeira, nas roseiras, nas árvores com frutos do tipo drupa e muito freqüentemente em salgueiros



**Figura 6 – Arranjo com duas rotações e cinco folhas.**

Fonte: Fibonacci Numbers and Nature

$m = 3$ ,  $n = 8$  no choupo, no álamo, na roseira, na pereira, no repolho, nas cardúceas e pilosela (plantas chicoriáceas do gênero *Hieracium*);



**Figura 7 – Arranjo com três rotações e oito folhas.**

Fonte: Fibonacci Numbers and Nature

$m = 5, n = 13$  no salgueiro e na amendoeira

$m = 8, n = 21$  nas escamas de abeto vermelho e das pinhas dos pinheiros;

$m = 13, n = 34$  nas escamas das pinhas de *Pinus laricio*.

Existem também exceções, mas os números de Fibonacci ocorrem tão freqüentemente que não podem ser explicados como casuais.

Os biólogos tentaram explicar a predominância peculiar dos números de Fibonacci na filotaxia. A simetria das folhas pode desempenhar um papel importante, porque essa simetria mantém o equilíbrio mecânico do caule, assegurando assim um máximo de luz e de ar à folha que está imediatamente abaixo, mantendo um fluxo regular de nutrientes. Entretanto, a ciência ainda está longe de uma explicação satisfatória.

## 2.6 A seqüência de Fibonacci e algumas outras ocorrências na natureza.

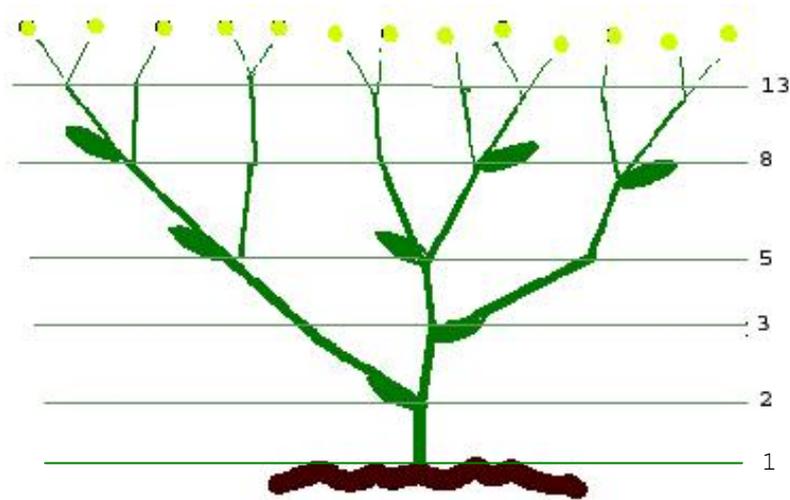
A ocorrência da sucessão de Fibonacci na natureza é tão freqüente que é difícil acreditar que seja acidental, tanto que já se tem um certo número de estudos que documentam sua persistente ocorrência.

Ela rege, por exemplo, as leis que entram em jogo nas múltiplas reverberações da luz nos espelhos, assim como as leis rítmicas do aumento e da perda na radiação da energia.

Considere as flores que apresentam como número de sépalos ou estames um número de Fibonacci: áster, cosmo e malmequer.

As ramificações constituem outro dos principais modelos funcionais de crescimento natural regido pela série de Fibonacci.

Veja um dos principais esquemas de ramificação que demonstra a série de Fibonacci.



**Figura 8 – Ramificações e a série de Fibonacci**

Fonte: Fibonacci Numbers and Nature

### 3 NÚMERO DE OURO

#### 3.1 Como chegar ao número de ouro.

A expressão secção de ouro é também referida como o termo de ouro ou a proporção de ouro. É um termo geométrico localizado num dado segmento da seguinte forma:

O ponto B divide o segmento  $\overline{AC}$  de modo que  $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$

A \_\_\_\_\_ B \_\_\_\_\_ C

O termo de ouro pode ser determinado da seguinte maneira:

Tomemos  $\overline{AC}$  como sendo a unidade. Então teremos  $AC = 1$  e  $BC = 1 - AB$ , e partindo da proporção acima, tentaremos determinar o valor de  $AB$ .

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{1}{AB} = \frac{AB}{1 - AB}, \text{ como } AB \neq 0, \text{ e } 1 - AB \neq 0, \text{ temos:}$$

$$AB \cdot AB = 1 \cdot (1 - AB)$$

$$AB^2 = 1 - AB$$

$$AB^2 + AB - 1 = 0$$

$$AB = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$AB = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como AB é a medida de um segmento, desconsideramos o número  $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  por ser negativo e tomemos para o valor de AB o número  $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ , que é um número irracional, denominado **secção áurea** aproximadamente igual a 0,6180399. AB é denominado a **secção áurea** do segmento  $\overline{AC}$ .

O número de ouro é o inverso da secção áurea. Então para determinarmos esse número, basta procedermos da seguinte maneira:

$$\frac{1}{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

O número  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , que é um número irracional, aproximadamente igual a 1,6180399 é então o desejado **número de ouro**. É representado pela letra grega  $\emptyset$ .

De acordo com Biembencut (1996, p.17–18), a razão de ouro, então, pode ser representada por  $\frac{1}{\emptyset}$ , já que é o inverso do número de ouro ( $\emptyset$ ), conforme podemos verificar abaixo:

$$\emptyset \cdot \frac{1}{\emptyset} = 1$$

ou

$$1,6180399 \cdot 0,6180399 = 1$$

O número de ouro tem algumas propriedades interessantes, tais como:

- Somando 1 ao número de ouro  $\varnothing$  obtém-se o seu quadrado.

$$\varnothing + 1 = \varnothing^2$$

$$1,618... + 1 = (1,618...) ^2 = 2,618...$$

- Subtraindo 1 de  $\varnothing$  , obtém-se o seu inverso.

$$\varnothing - 1 = \frac{1}{\varnothing}$$

$$1,618... - 1 = \frac{1}{1,618...} = 0,618...$$

- Subtraindo 2 de  $\varnothing^2$  , obtém-se o inverso de  $\varnothing$  .

$$\varnothing^2 - 2 = \frac{1}{\varnothing}$$

$$2,618... - 2 = 0,618...$$

### 3.2 A relação do número de ouro com a seqüência de Fibonacci.

É fascinante a maneira segundo a qual a razão de ouro se encontra ligada à sucessão de Fibonacci. Considere novamente o problema dos coelhos, proposto por Fibonacci. A população de casais no início de cada mês é : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...,  $F_{n-1} + F_{n-2}$ , ...

Como já foi visto anteriormente, podemos representar esses números através da fórmula

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \quad , \quad \text{onde } n = 2, 3, 4, \dots$$

Se formos estudar a taxa de crescimento do número de casais no início de cada mês, em relação ao mês anterior, formamos a seguinte seqüência de razões:

$$T_n = F_{n+1} / F_n$$

Então temos :

$$T_1 = F_2 / F_1 = 1 / 1 = 1$$

$$T_2 = F_3 / F_2 = 2 / 1 = 2$$

$$T_3 = F_4 / F_3 = 3 / 2 = 1,5$$

$$T_4 = F_5 / F_4 = 5 / 3 = 1,66\dots$$

$$T_5 = F_6 / F_5 = 8 / 5 = 1,6$$

$$T_6 = F_7 / F_6 = 13 / 8 = 1,625$$

$$T_7 = F_8 / F_7 = 21 / 13 = 1,615\dots$$

$$T_8 = F_9 / F_8 = 34 / 21 = 1,619\dots$$

Etc...

Esta seqüência parece convergir para um certo limite que se situa entre 1,60 e 1,62. Isto significaria que a colônia de coelhos cresce de um mês para o próximo numa porcentagem que tende para um valor ligeiramente mais elevado que sessenta por cento.

Para calcularmos este limite exato admitamos que:

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \text{ existe.}$$

Isto implica em que a seqüência modificada  $P_n = T_n - T$  tende para zero.

Já que  $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ , dividindo ambos os termos da equação por  $F_n$ , temos:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_{n-1} + F_n}{F_n}$$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_{n-1}}{F_n} + 1$$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} + 1, \text{ como } T_n = F_{n+1} / F_n, \text{ temos também que } T_{n-1} = F_n / F_{n-1}, \text{ logo:}$$

$$T_n = \frac{1}{T_{n-1}} + 1, \text{ da equação } P_n = T_n - T, \text{ tiramos } T_n = P_n + T, \text{ e conseqüentemente}$$

$$T_{n-1} = P_{n-1} + T,$$

$$P_n + T = \frac{1}{T + P_{n-1}} + 1, \text{ como } P_n \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty, \text{ temos}$$

$$T = \frac{1}{T} + 1$$

$$\frac{T^2}{T} = \frac{1}{T} + \frac{T}{T}$$

$$T^2 - T - 1 = 0$$

$$T = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1}$$

$$T = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

Daí extraímos as duas soluções da equação, uma delas  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  e a outra  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ . Como neste caso só nos interessa a raiz positiva, temos que a taxa de crescimento dos coelhos do problema de Fibonacci é o desejado limite da seqüência  $T_n = F_{n+1} / F_n$ , que é  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , o próprio número de ouro.

Esta relação implica que sempre que a razão de ouro, o retângulo de ouro, o triângulo de ouro ou a espiral logarítmica aparecem nomeadamente nos fenômenos naturais, está também presente a sucessão de Fibonacci e vice-versa.

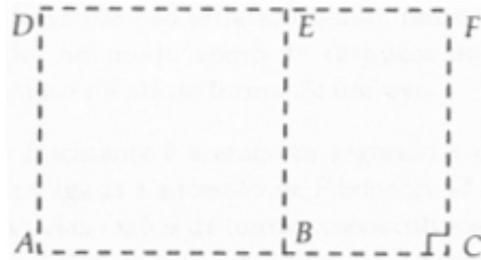
### 3.3 A razão de ouro em algumas ocorrências interessantes.

As relações áureas também estão presentes em algumas outras situações. Veja só:

- Qualquer peça que se quebre na metade poderá ser recomposta, mas se atingir a marca de  $\frac{1}{\phi}$  não terá conserto (você acredita?).
- O ciclo menstrual da mulher é de 28 dias. Portanto  $\frac{1}{\phi}$  de 28 será 17,5 dias, onde é a fase final de amadurecimento, sendo garantida a fertilização.
- Uma planta frutífera estará com as mais saborosas frutas exatamente quando atingir  $\frac{1}{\phi}$  de carga total.
- Entre os bovinos a desmama ocorre aos 8 meses. Sua alimentação é à base de leite. Mas quando atinge  $\frac{1}{\phi}$  deste período começa a procurar outros alimentos. (BIEMBENGUT, 1996, p. 47-48).

## 4 O RETÂNGULO DE OURO.

### 4.1 Como desenhar um retângulo de ouro.



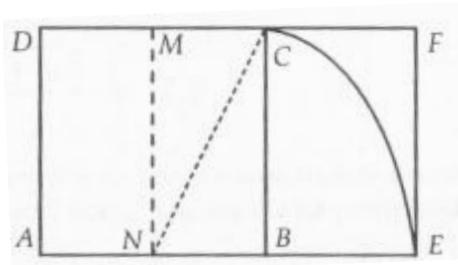
**Figura 9 – Desenhando um retângulo de ouro, dado um segmento dividido na secção áurea.**  
Fonte: PAPPAS, 1998, p. 104.

Dado um segmento  $\overline{AC}$ , tal que B divida o segmento de acordo com a proporção de ouro, constrói-se o quadrado [ABED].

Traça-se  $\overline{CF}$  perpendicular a  $\overline{AC}$ .

Prolonga-se o lado  $\overline{DE}$  de forma a que este intersecte  $\overline{CF}$  no ponto F. A figura [ACDF] é o retângulo de ouro.

Podemos também construir o retângulo de ouro sem ter previamente o segmento  $\overline{AC}$  dividido segundo a proporção de ouro, usando o seguinte processo:



**Figura 10 - Desenhando um retângulo de ouro sem o segmento dividido na secção áurea.**  
 Fonte: PAPPAS, 1998, p. 104.

Constrói-se um quadrado qualquer  $[ABCD]$ .

Bissecta-se a figura por meio do segmento  $\overline{MN}$ .

Com um compasso, traça-se o arco  $EC$ , tendo o ponto  $N$  como centro e o segmento  $\overline{CN}$  como raio.

Prolonga-se o lado  $\overline{AB}$  até que este intersecte o arco traçado no ponto  $E$ .

Prolonga-se o lado  $\overline{DC}$ .

Perpendicularmente ao lado  $\overline{AE}$ , traça-se o segmento  $\overline{EF}$ , que irá intersectar  $\overline{DC}$  no ponto  $F$ . O retângulo  $[ADFE]$  é um retângulo de ouro (PAPPAS, 1998, p. 104).

#### 4.2 Um breve histórico do retângulo de ouro.

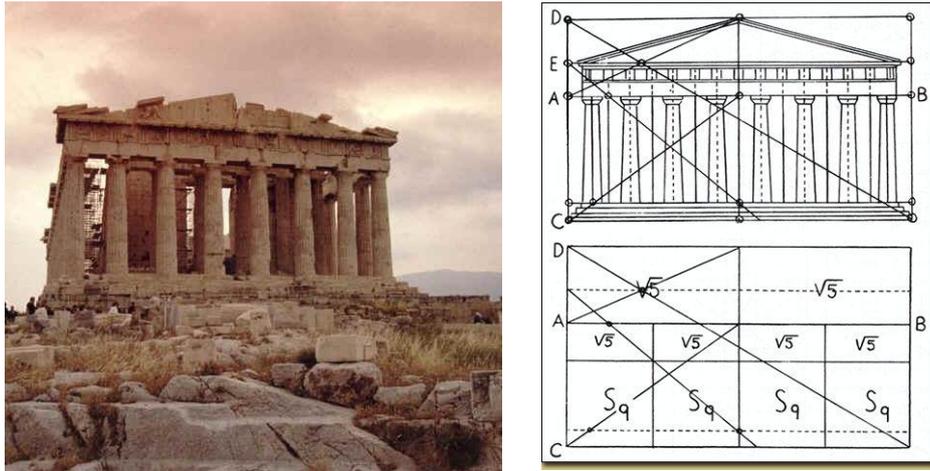
O retângulo de ouro é um objeto matemático muito interessante e de grande valor estético que existe para além do reino da matemática. Presente na arte, na arquitetura, na natureza e hoje em dia muito usado na publicidade e no marketing. A sua popularidade não é acidental. Muitos testes psicológicos demonstraram que o retângulo de ouro é um dos retângulos mais agradáveis à vista humana.

Muitas embalagens têm a configuração do retângulo de ouro, possivelmente no intuito de apelar ao sentido estético do público. Na verdade, o vulgar cartão de crédito tem um tamanho próximo ao do retângulo de ouro.

Além do mais, o retângulo de ouro está interligado com outros conceitos matemáticos, tais como séries infinitas, álgebra, o decágono regular, os sólidos platônicos, as espirais logarítmicas, limites, o triângulo de ouro e o pentagrama.

### **4.3 O retângulo de ouro na arquitetura e na arte.**

Os arquitetos e artistas da Grécia Antiga, no século V a.C., eram mestres na utilização da razão de ouro na concepção de seus monumentos e esculturas. Eles tinham consciência do seu efeito harmonioso e sentiam que a razão de ouro e o retângulo de ouro aumentavam a atração estética dos monumentos e das esculturas – tais como nas esculturas de Fídeas – nas obras arquitetônicas, no símbolo da escola pitagórica (um pentagrama), na demonstração de beleza do pentagrama (por processos geométricos feita por Euclides IIIa.C.). Estes exemplos comprovam a sua familiaridade a respeito das secções áureas. Eles conheciam a razão de ouro, como construí-la, como obter aproximações e como usá-la para construir o retângulo de ouro. Era-lhes tão familiar que não lhe atribuíram um nome especial. O nome especial – Número de Ouro – só surgiu 2000 anos depois. O Parténon é um exemplo de uma das primeiras utilizações do retângulo de ouro na arquitetura. A figura que se segue mostra como as suas dimensões se ajustam quase que exatamente às do retângulo de ouro.



**Figura 11 – O Parténon e o Retângulo de Ouro**

Fonte: : Fibonacci e os números da natureza

Não foi por acaso que a proporção de ouro,  $\phi$  (fi), foi designada segundo o nome de Fídias, famoso escultor grego. Julga-se que Fídias teria usado a proporção de ouro e o retângulo de ouro nos seus trabalhos.

É possível que a seita dos pitagóricos tenha escolhido o pentagrama como símbolo, devido à relação que este tem com a proporção de ouro.

Para além de influenciar a arquitetura, o retângulo de ouro surge também na arte. Leonardo da Vinci estudou exaustivamente as proporções do corpo humano e como a proporção de ouro se encontra relacionada com a sua estrutura. O desenho abaixo apresentado foi analisado detalhadamente, tendo-se constatado que ilustra a utilização da secção de ouro. Pertence ao livro que ele ilustrou para o matemático Luca Pacioli (um padre italiano), intitulado *De Divina Proportione*, publicado em 1509. Possivelmente o primeiro trabalho que descreve as divinas leis, cujas interpretações e demonstrações foram possivelmente deduzidas pelos gregos, antes de Cristo.



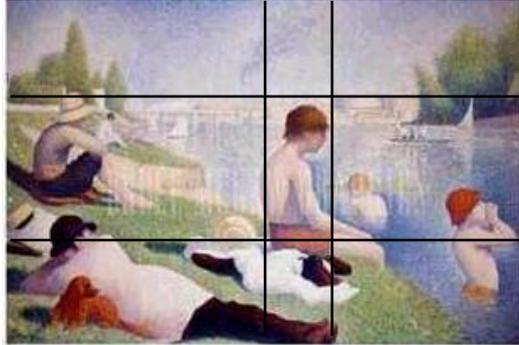
**Figura 12 – Desenho de Da Vinci para o livro de Luca Pacioli.**

Fonte: Geometria a várias dimensões

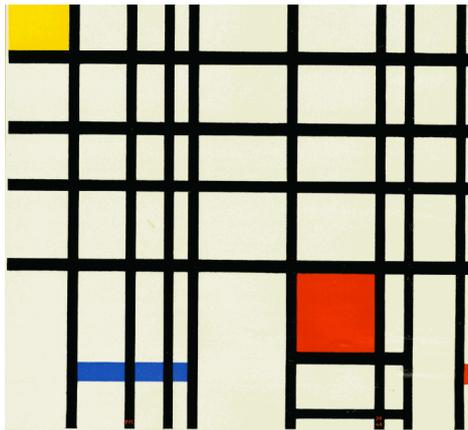
A secção de ouro encontra-se igualmente presente num trabalho inacabado de Leonardo da Vinci, S. Jerônimo, pintado por volta de 1483. A figura de S. Jerônimo inscreve-se perfeitamente num retângulo de ouro que pode ser sobreposto ao desenho. Admite-se que tal não tenha sucedido por acaso, mas porque Leonardo construiu a figura deliberadamente de acordo com a secção de ouro, devido ao seu grande interesse pela matemática e pela utilização desta em muitos dos seus trabalhos e idéias. Segundo as palavras do próprio Leonardo, “... nenhuma investigação humana pode ser considerada ciência se não abrir o seu caminho por meio da exposição e da demonstração matemática” (PAPPAS, 1998, p.33).

A utilização da razão de ouro e do retângulo de ouro na arte veio a ser designada como a técnica da simetria dinâmica.

Albrecht Dürer, George Seurat, Pietter Mondrian, Leonardo da Vinci, Salvador Dali e George Bellows utilizaram o retângulo de ouro em alguns de seus trabalhos para criarem a simetria dinâmica.



**Figura 13 – Quadro “Os Banhistas” de George Seurat.**  
Fonte: PAPPAS, 1998, p. 103.



**Figura 14 – “Composição em amarelo” de Pietter Mondrian.**  
Fonte: Fibonacci e os números da natureza

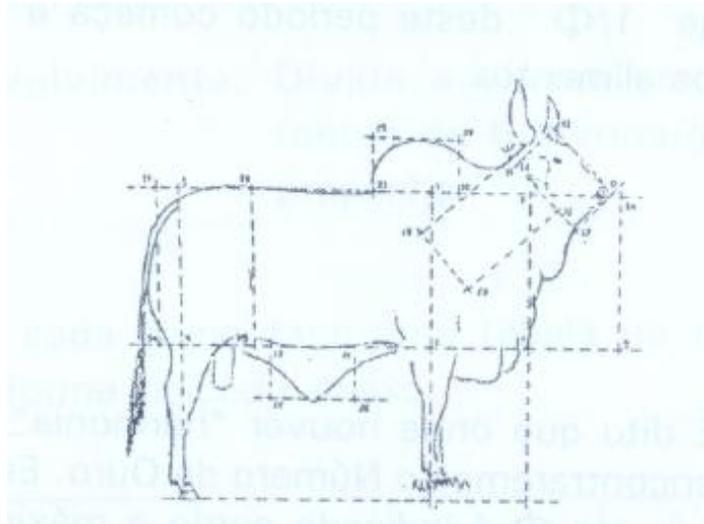


**Figura 15 – “Monalisa” de Leonardo Da Vincci.**  
Fonte: Fibonacci e os números da natureza

#### 4.4 O retângulo de ouro na natureza.

Existem ainda muitas formas naturais que também possuem esse equilíbrio harmonioso conhecido como simetria dinâmica.

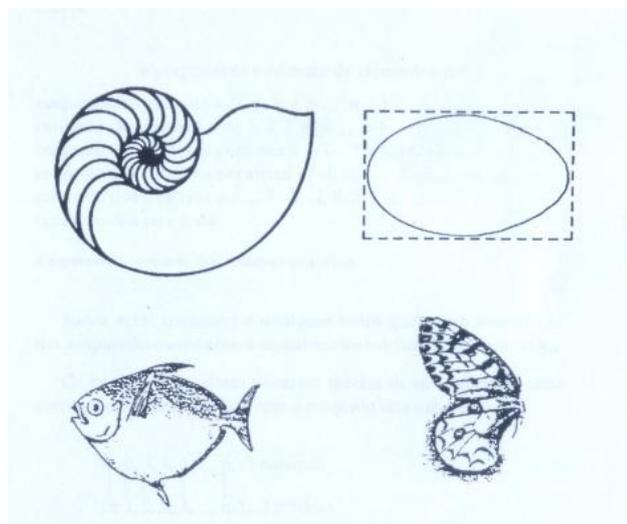
A cabeça do zebu, quando vista de perfil, está inscrita num retângulo de ouro.



**Figura 16 – Geometria do Zebu**

Fonte: BIEMBENGUT, 1996, p. 47.

Podemos considerar também a forma de um ovo, de uma asa de borboleta, a concha do náutilo ou um sargo.



**Figura 17 – Simetria dinâmica na natureza.**

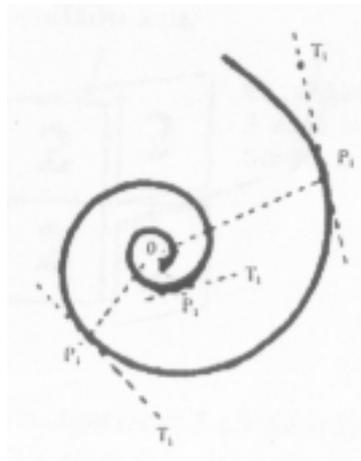
Fonte: PAPPAS, 1998, p.155.

Podem encontrar-se a forma do retângulo de ouro ou a proporção da razão de ouro em todas as formas que apresentam simetria dinâmica.

Na verdade, se procurarmos com carinho, onde houver harmonia com certeza lá encontraremos as relações áureas, pois o número de ouro é indicado como a máxima expressão da harmonia e equilíbrio.

## 5 ESPIRAL LOGARÍTMICA.

### 5.1 Definição.



**Figura 18 – Definição de espiral logarítmica**

Fonte: PAPPAS, 1998, p. 105.

O polo  $O$  é o centro da espiral.

Qualquer segmento que tenha extremos em  $O$  e num ponto da curva é um raio da espiral.

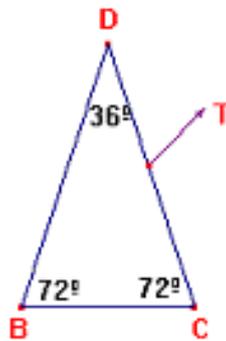
Todas as tangentes à curva formam ângulos com o correspondente raio da espiral no ponto de tangência, como por exemplo o ângulo  $T_1 \hat{P}_1 O$ . A espiral chama-se equiangular se todos esses ângulos forem congruentes.

Esta curva é também conhecida por espiral logarítmica porque aumenta numa razão geométrica, isto é, segundo as potências de uma dada constante (e potência ou expoente são outras designações de logaritmo).

A espiral equiangular é o único tipo de espiral que não altera sua forma à medida que aumenta de tamanho.

## 5.2 A formação da espiral logarítmica através de triângulos de ouro.

O triângulo de ouro, também conhecido como triângulo sublime, é um triângulo isósceles que tem na base ângulos de  $72^\circ$  e no vértice superior um ângulo com  $36^\circ$  de amplitude. Os lados congruentes estão para a base segundo a razão de ouro.



**Figura 19 – Triângulo de Ouro**

Fonte: Fibonacci e os números da natureza

Quando pegamos um triângulo de ouro e bissectamos o ângulo da base, a bissetriz divide o lado oposto de acordo com a razão de ouro e origina dois triângulos isósceles de menores dimensões.

Um destes triângulos é semelhante ao triângulo original, enquanto o outro pode ser utilizado para gerar uma espiral.

A continuação do processo de bissecção do ângulo da base, do novo triângulo de ouro obtido, provoca uma série de triângulos de ouro e a formação de uma espiral, que se chama espiral eqüiangular (também conhecida por espiral logarítmica).

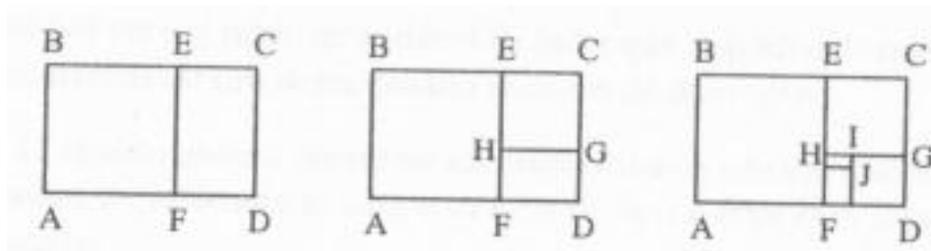


**Figura 20 – Formação da espiral logarítmica através de triângulos de ouro.**  
Fonte: Fibonacci e os números da natureza

### 5.3 A formação da espiral logarítmica através de retângulos de ouro.

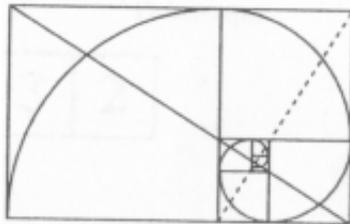
Também conseguimos construir a espiral logarítmica usando um número infinitamente grande de retângulos de ouro contidos uns nos outros.

O retângulo de ouro gera-se a si próprio. A partir do retângulo de ouro [ABCD], pode facilmente construir o retângulo de ouro [ECDF] a partir da construção do quadrado [ABEF] e o retângulo de ouro [DGHF] a partir do quadrado [ECGH], podendo este processo ser prolongado indefinidamente.



**Figura 21 – Construção de vários retângulos de ouro sucessivos.**  
Fonte: PAPPAS, 1998, p. 105.

Com um compasso e recorrendo aos quadrados construídos, traçam-se arcos que são quartos de circunferência contidos em cada um dos quadrados. Estes arcos dão origem à espiral equiangular.



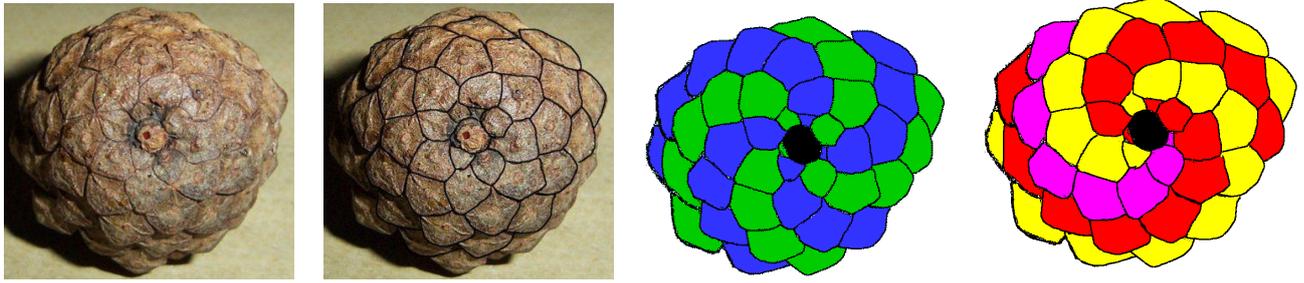
**Figura 22 - Construção da espiral logarítmica através de retângulos de ouro.**  
Fonte: PAPPAS, 1998, p. 105.

O retângulo de ouro circunscreve, assim, a espiral equiangular. A intersecção das diagonais desenhadas na figura é o polo ou centro da espiral (PAPPAS, 1998, p.105).

#### **5.4 A espiral logarítmica e sua ocorrência na natureza.**

A natureza apresenta muitas formas de associação – quadrados, hexágonos, círculos e triângulos. O retângulo de ouro e a espiral logarítmica são duas dessas formas esteticamente mais agradáveis. Há exemplos de espiral logarítmica nas estrelas-do-mar, nas conchas de moluscos, na amonite, no náutilo, no modo como se dispõem as sementes em girassóis e nos cactos, nas cascas dos ananases e dos abacaxis e nas escamas nas pinhas das coníferas.

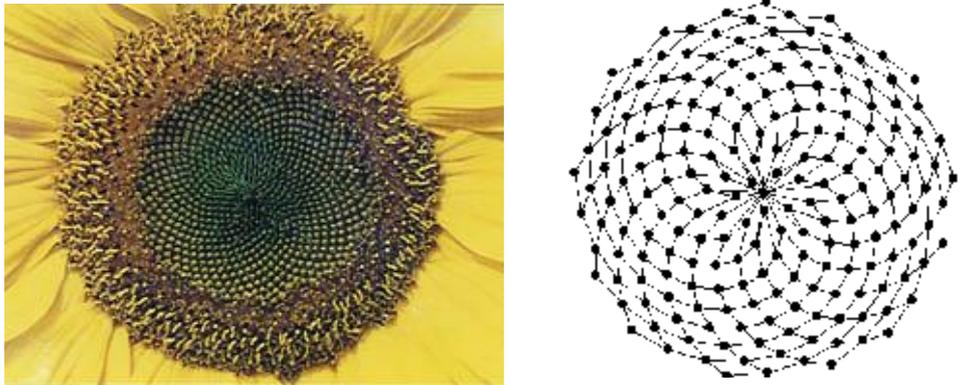
Esta ligação é tão marcante que os números de Fibonacci são por vezes apelidados de números das pinhas porque existe a tendência para o aparecimento nas pinhas, de termos consecutivos de Fibonacci nas espirais para o sentido horário e para o sentido anti-horário.



**Figura 23 – A pinha e a espiral logarítmica.**

Fonte: Fibonacci Numbers and Nature

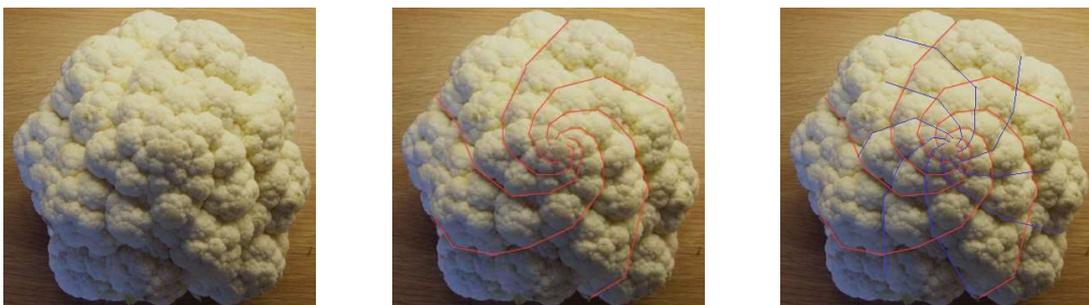
No capítulo do girassol acontece o mesmo fenômeno com as sementes.



**Figura 24 – O girassol e a espiral logarítmica**

Fonte: Fibonacci Numbers and Nature

Percebemos também a formação da espiral logarítmica na couve-flor, como mostra a figura a seguir.



**Figura 25 – A couve-flor e a espiral logarítmica.**

Fonte: Fibonacci Numbers and Nature

O ananás e abacaxis são outras plantas onde se observam números de Fibonacci. Para estes frutos basta contar o número de espirais formadas pelas escamas hexagonais da sua casca, tanto no sentido horário como no sentido anti-horário.



**Figura 26 – O abacaxi e a espiral logarítmica.**  
Fonte: Fibonacci e os números da natureza

## 6 ABELHAS

### 6.1 A divisão do espaço nas colméias

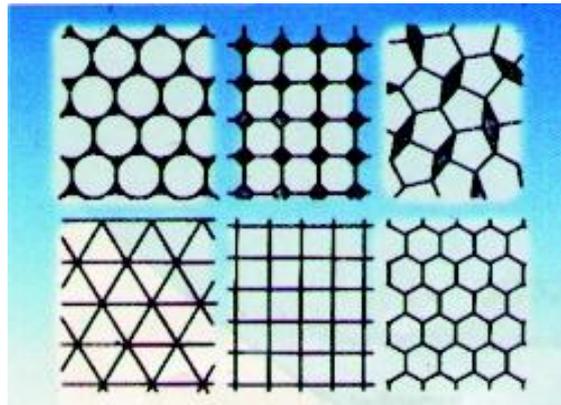
A série de Fibonacci aparece novamente quando estudamos a vida das abelhas, só que agora definindo perfeitamente a proporção entre machos e fêmeas nas colméias.

Mas quando se trata de abelhas, a relação que elas tem com os números de Fibonacci não chama tanta a atenção, pois nos deparamos com uma geometria de tão alto nível e precisão, que seria um desperdício não comentá-las neste relato.

As abelhas formam as faces utilizando cera. Os favos são construídos com a cera que as próprias abelhas fabricam. As abelhas devem construir o máximo de alvéolos, gastando o mínimo de cera. Para poupar espaço tiveram que recorrer a figuras geométricas que se pudessem justapor e que quando encostadas umas às outras não deixam espaços desperdiçados entre si.

Na arquitetura da colméia julgava-se existir o exemplo mais notável no mundo animal da resolução de um problema de máximo e mínimo.

Considerando que os alvéolos são construídos para armazenamento de pólen ou mel e também para abrigo das ninfas, parecia ser natural a escolha de uma forma que preenchesse todas as funções. Dentre as formas matematicamente possíveis, são destacadas na fig. 2 seis possibilidades.



**Figura 27 - Possibilidades matemáticas de dividir o espaço mediante prismas regulares<sup>2</sup>.**

Fonte: VASCONCELOS, 2002.

Para comparar o consumo de materiais nesses seis casos escolhemos como unidade o lado do hexágono e impusemos a condição de que todas as células possuíssem a mesma área. Resultaram os valores dos perímetros “p” que servem de base para a avaliação dos consumos de cera, que lhes são proporcionais. Nessa avaliação os lados das células não aproveitados na célula adjacente devem ser computados em dobro. Isto acontece nas soluções com círculos, octógonos e pentágonos, que deixam sempre espaços vazios entre as células. O resultado dessa comparação pode ser apreciado na seguinte tabela:

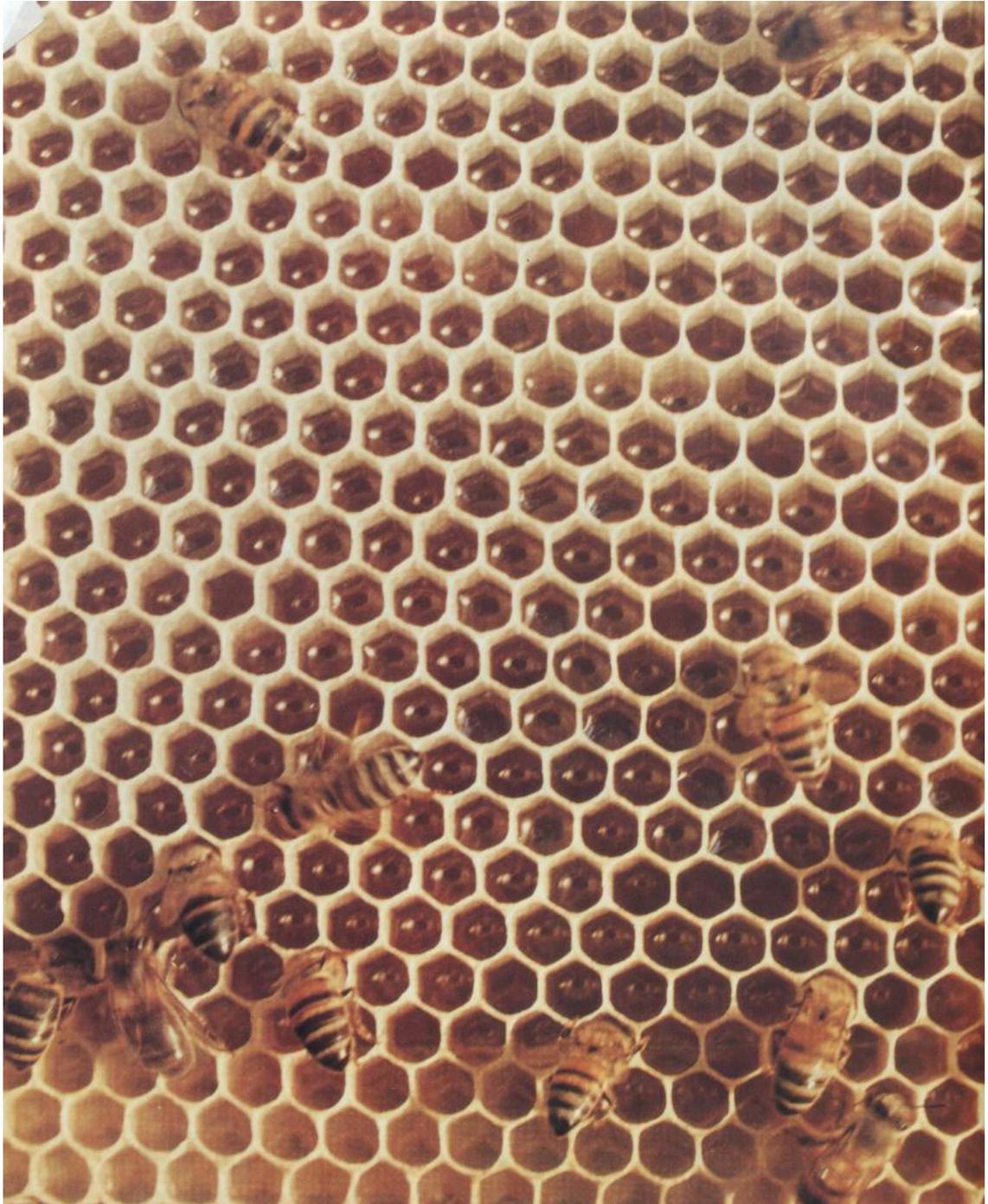
Forma geométrica	Perímetro p	Varição do consumo de cera
Hexágono	6	0
Quadrado	6,447	+7,5%
Triângulo	7,347	+22,5%
Pentágono	8,603	+43,4%
Octógono	8,802	+46,7%
Círculo	11,428	+90,5%

**Tabela 3 – Variação do Consumo de Cera**

Fonte: VASCONCELOS, 2002.

<sup>2</sup> As três primeiras soluções deixam espaços vazios entre as células. As três últimas, permitem o aproveitamento das mesmas paredes para duas células contíguas.

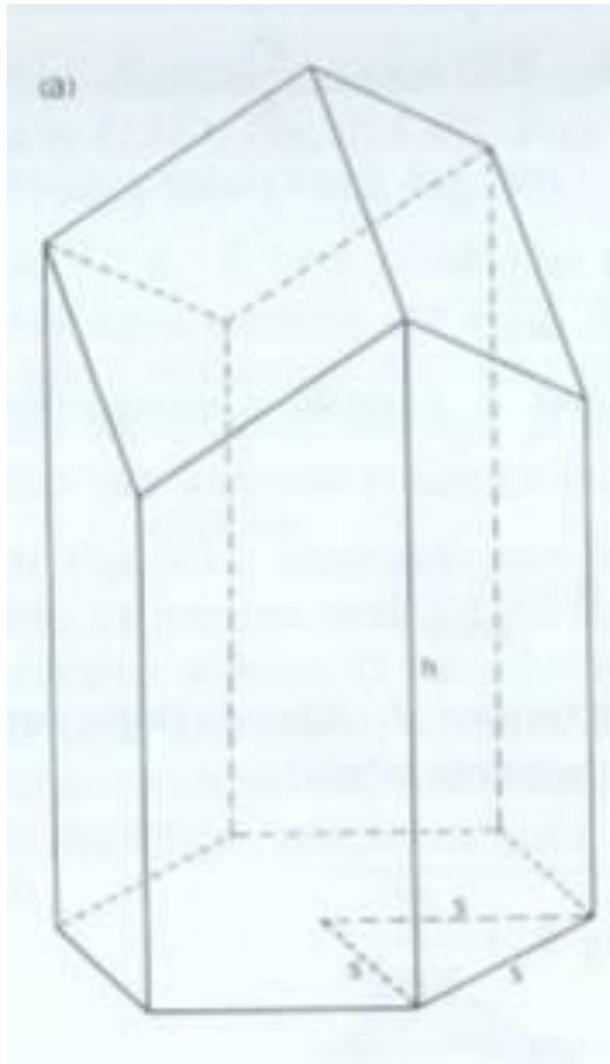
Por essa simples exposição constata-se que entre todas as formas geométricas possíveis a abelha escolheu aquela que lhe dá o menor consumo de cera.



**Figura 28 – Colméia das abelhas.**  
Fonte: Revista Globo Rural Economia.

## 6.2 O fechamento dos Alvéolos

Mas o realmente interessante acontece no fechamento dos alvéolos. Em vez de construir um hexágono (plano) para cobrir o fundo elas economizam cerca de um alvéolo em cada cinquenta, utilizando três losangos iguais colocados inclinadamente. Pode parecer pouco, mas a economia de 2 por cento no fechamento de milhões de alvéolos representa uma grande quantidade (BARCO, 1993).



**Figura 29 – Favo da Abelha.**

Foto: Fonte: BATSCHELET, 1978, p. 253.

O problema dos alvéolos das abelhas despertou a curiosidade dos sábios desde a mais remota antigüidade. O primeiro a se interessar por esse estudo parece ter sido Pappus de Alexandria, matemático grego (320 DC). Ele chegou a estudar alvéolos em forma de prismas de seção hexagonal, triangular e quadrada e deixou transparecer que os prismas hexagonais podiam armazenar mais mel do que os outros dois.

Johannes Kepler também deduziu a partir do estudo da ocupação do espaço com simetria total que todos os ângulos diedros, inclusive os do fechamento, deveriam ser de  $120^\circ$ . René Antoine Ferchault, Seigneur de Réaumur, famoso físico francês, por volta de 1700 observou que o ângulo agudo e, conseqüentemente seu suplemento (obtusos) não variavam, isto é, suas medidas eram constantes. Intrigado, Réaumur mandou buscar alvéolos em várias partes do mundo, como a Alemanha, Suíça, Inglaterra, Canadá e Guiana. Um contemporâneo de Réaumur, o astrônomo francês Giovanni Domenico Cassini, cuja família toda de astrônomos se tomou célebre pelas numerosas descobertas no Observatório de Paris, tinha um sobrinho, Jean Dominique Maraldi, também astrônomo, que efetuou as medições dos ângulos agudos para Réaumur e encontrou o mesmo valor em todos eles,  $70^\circ 32'$ . Maraldi interessou-se vivamente pelo problema das abelhas. Ele fazia na época a apologia da simplicidade e facilidade da construção pelo fato de serem usados apenas dois tipos de ângulos, um de  $109^\circ 28'$  e outro, seu suplemento, de  $70^\circ 32'$  e enaltecia a beleza matemática. Maraldi chegou às suas conclusões depois de observar colméias com capas de vidro transparente.

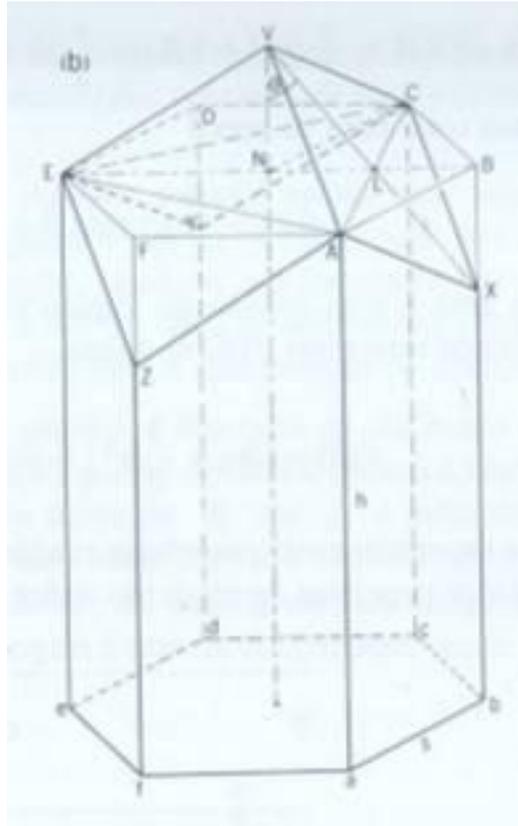
Curiosamente, observações análogas já haviam sido feitas por Sir Christopher Wren, o arquiteto da Catedral de St. Paul em Londres. Réaumur percebeu que se tratava de um problema matemático de máximo e mínimo e que as abelhas resolviam com o intuito de economizar cera. Por esse caminho é que deveriam ser orientados, todos os estudos matemáticos (VASCONCELOS, 2002).

Este simples problema foi na época de Réaumur de tão grande dificuldade que ele apelou para o amigo Samuel König, matemático alemão. Com o intuito de conseguir uma solução teórica exata, Réaumur propôs a König que resolvesse o seguinte problema: dado um prisma de base hexagonal, devemos fechá-lo em uma das extremidades com três losangos iguais, colocados inclinadamente, para obter o maior volume com um gasto mínimo de material. Qual é o ângulo dos losangos que satisfaz a condição?

Sem saber a origem do problema, König calculou o ângulo como sendo  $109^{\circ} 26'$ . Embora a diferença fosse insignificante, de apenas dois minutos em relação aos cálculos efetuados por Maraldi ( $109^{\circ} 28'$ ), concluiu-se que as abelhas estavam erradas. Outros por sua vez afirmavam que as abelhas estavam mais corretas do que os matemáticos com seus cálculos aproximados. Isto provocou um verdadeiro rebuliço entre os cientistas que tentavam explicar a questão. O fato chegou ao conhecimento do matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746), que utilizando os recursos do cálculo diferencial recalculou o ângulo e encontrou  $70^{\circ} 32'$ . (VASCONCELOS, 2002).

### **6.3 Resolução matemática do problema do fechamento dos alvéolos.**

Quando o volume é dado é econômico se poupar cera e, portanto, se escolher o ângulo de inclinação,  $\theta = \widehat{NVX}$ , de tal forma que a superfície do favo da abelha seja minimizada.



**Figura 30 – Favo da Abelha e o Ângulo Ótimo.**

Fonte: BATSCHELET, 1978, p. 253.

O problema pode ser resolvido matematicamente. Seja  $L$  a intersecção de  $\overline{CA}$  e  $\overline{VX}$ . Então,  $L$  divide em partes iguais o segmento  $\overline{NB}$  e, conseqüentemente,  $NL = s / 2$ . O segmento  $\overline{CL}$  é a altura do triângulo equilátero  $BCN$ . Portanto,

$$CL = \frac{s\sqrt{3}}{2}.$$

No triângulo  $NLV$  temos a relação

$$VL = \frac{s}{2\sin\theta}.$$

O losango  $AXCV$  tem seu centro em  $L$  e consiste de quatro triângulos retângulos congruentes com lados iguais a  $CL$  e  $VL$ . Portanto temos

$$\text{área } AXCV = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{s\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{s}{2\sin\theta} = \frac{s^2\sqrt{3}}{2\sin\theta}.$$

A superfície do favo da abelha contém três destas áreas.

As seis faces laterais do favo da abelha, tal como  $abXA$ , são trapezóides congruentes. Já que  $BX = VN$ , obtemos o triângulo  $VNL$

$$BX = \frac{s}{2} \cotg \theta .$$

Conseqüentemente,

$$\text{Área } abXA = \frac{s}{2} (aA + bX) = \frac{s}{2} (h + h - BX) = hs - \frac{s^2}{4} \cotg \theta$$

A área total feita de cera é

$$6hs - \frac{3}{2} s^2 \cotg \theta + \frac{3}{2} \frac{s^2 \sqrt{3}}{\text{sen } \theta} .$$

Esta área é uma função do ângulo variável  $\theta$  e, então, a representamos por  $f(\theta)$ . Podemos reescrever  $f(\theta)$  na forma

$$f(\theta) = 6hs + \frac{3}{2} s^2 \left( -\cotg \theta + \frac{\sqrt{3}}{\text{sen } \theta} \right) .$$

Somente a expressão entre parênteses contém a variável  $\theta$ . Alguns valores numéricos arredondados para duas casas decimais são dados na seguinte tabela:

**Tabela 4 - Verificação do Ângulo Ótimo.**

$\theta$	$-\cotg \theta + \frac{\sqrt{3}}{\text{sen } \theta}$
10°	4,30
20°	2,32
30°	1,73
40°	1,50
50°	1,42
60°	1,42
70°	1,48
80°	1,58
90°	1,73

Fonte: BATSCHLET, 1978, p. 254.

O mínimo de  $f(\theta)$  é alcançado em algum valor compreendido entre  $\theta = 50^\circ$  e  $\theta = 60^\circ$ . Para termos o ângulo ótimo, digamos  $\theta_0$ , derivamos  $f(\theta)$ :

$$f'(\theta) = \frac{3}{2} s^2 \left( \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} - \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{\text{sen}^2 \theta} \right).$$

A derivada se anula se, e somente se,

$$1 = \sqrt{3} \cos \theta$$

Conseqüentemente,  $\cos \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,57735$  e  $\theta_0 = 54,7^\circ$ . Observemos que o ângulo ótimo

$\theta_0$  é independente da escolha de  $s$  e  $h$ .

Vale a pena compararmos o resultado com o ângulo escolhido pelas abelhas. É difícil medirmos este ângulo. Entretanto, a média de todas as medidas não difere significativamente do valor teórico  $\theta = 54,7^\circ$ . Portanto, as abelhas preferem o ângulo ótimo. É improvável que o resultado obtido seja devido ao acaso (BATSCHULET, 1978, p. 253-254).

Para este ângulo ótimo, os três losangos necessários precisam ter ângulos obtusos de  $109^\circ 28'$  e agudos de  $70^\circ 32'$ .

Uma tentativa de retirar das abelhas a sua matemática.

Contraoendo a idéia de que a abelha utiliza-se da matemática para seu próprio bem foi escrito:

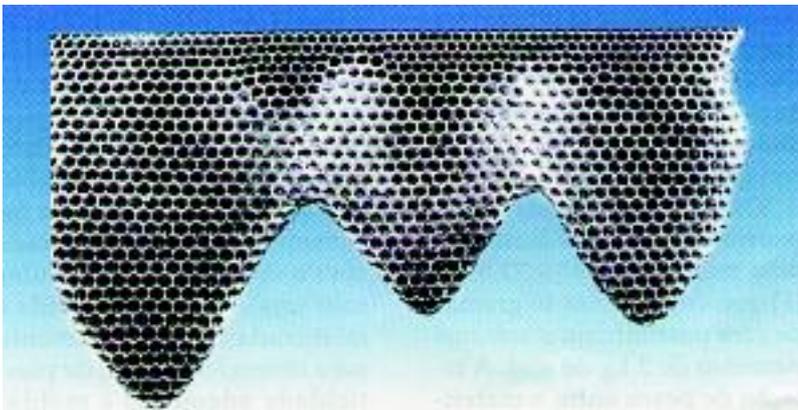
Na verdade tudo isto não passa de mera elucubração mental. As abelhas não resolveram problema matemático algum. Seu modo de trabalhar em conjunto, como Bartholin já havia percebido, fabricando agrupadas e simultaneamente as células hexagonais, não permitia realizar células cilíndricas como acontecia quando trabalhavam isoladamente na construção de alvéolos maiores. Na execução dos alvéolos para a rainha e os zangões, que são maiores, as abelhas trabalham isoladamente. As células saem cilíndricas e seu fechamento é esférico. Quando trabalham em conjunto, apertando-se entre si, por ação da compressão mútua, as células cilíndricas se transformam em hexagonais e os fechamentos esféricos em três losangos. Os ângulos diedros de  $120^\circ$  entre as faces dos prismas hexagonais se repetem entre as faces em losangos de fechamento. Nessa superfície poliédrica com três faces em forma de losango, impondo os diedros de  $120^\circ$ , resultam ângulos obtusos de  $109^\circ 28'$ . Nada mais simples e natural. O mesmo processo se verifica na formação dos prismas de basalto e nas formações de coral. O resultado é conseqüência física e não matemática.

A forma do fechamento que as abelhas realizam são conseqüência física do trabalho que elas exercem em conjunto. Portanto existe explicação física que corresponde

matematicamente a uma solução de problema de máximo e mínimo. Mas as abelhas não sabem disso, nem mesmo geneticamente. (VASCONCELOS, 2002).

Mas por outro lado, veremos o que realmente acontece ao estudarmos um pouco mais sobre como são construídos os alvéolos.

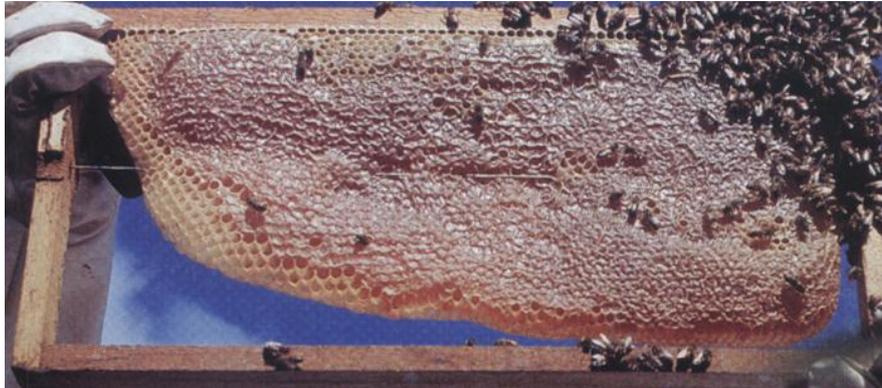
A construção é feita de cima para baixo. Quando existe uma moldura de madeira, inicia-se junto à borda superior dessa moldura. Na ausência dela, inicia-se junto à borda superior da cavidade escolhida dentro de um tronco ou de uma gruta. As abelhas atacam inicialmente diversos pontos de partida e progridem para baixo formando trechos afunilados (fig.31). Por fim esses trechos acabam se unindo. Ao mesmo tempo em que são construídas novas células ao lado das que já estão prontas, a colméia progride também para baixo. Portanto não são completadas camada por camada. Quando as laterais dos trechos afunilados se tocam, as camadas ficam tão perfeitamente ajustadas que dificilmente se distinguem os pontos de junção.



**Figura 31 – Desenho do início da construção das colméias<sup>3</sup>.**

Fonte, VASCONCELOS, 2002.

<sup>3</sup> Início da construção das colméias, partindo de três pontos diferentes. Inicialmente os trechos eram totalmente separados, mas acabaram por se fundirem no topo. Note-se que as três camadas superiores são de células menores, próprias para as larvas de obreiras. As camadas seguintes são de células maiores para zangões. Existe uma perfeita união na transição, onde foi necessário modificar o número de alvéolos na camada.



**Figura 32 – Foto do início da construção das colméias.**

Fonte: Revista Globo Rural.

Lembre-se aqui que as abelhas se revezam e que, portanto, as ligações são geralmente feitas por abelhas diferentes, pois elas trocam de posição a cada 30 segundos – provavelmente para reabastecimento de cera. As sucessoras parecem compreender perfeitamente em que ponto o trabalho foi interrompido e continuam a construção de maneira idêntica. Chama-se aqui a atenção de que a forma regular, pensada como sendo devida às pressões mútuas, é exatamente a mesma desde o começo, quando essa pressão não existe. Isto confunde aquela afirmativa anterior de que a regularidade só surge quando o trabalho é executado simultaneamente por muitas abelhas...

O primeiro passo é a construção do fundo. Quando o apicultor coloca a moldura com a placa de cera prensada imitando com precisão o formato dos losangos do fundo, isto apenas acelera a produção, pois a demanda de cera se reduz. Depois de pronto um losango do fundo, são executados os começos de duas paredes entre células contíguas. Em seguida é executado outro losango de fundo e mais o começo de duas novas paredes. Só então é completado o fundo com a execução do terceiro losango. Sempre as paredes e também os losangos se encontram sob diedros de  $120^\circ$ . Até então não houve coação de outras abelhas para forçar a forma hexagonal. O mistério continua, portanto!(VASCONCELOS, 2002).

#### **6.4 Outras curiosidades a respeito da construção dos alvéolos**

As paredes de todas as células possuem espessura de 73 microns, sendo a tolerância de execução de apenas 2 microns o que é realmente espantoso. Como pode ser alcançada tal precisão e qual o instrumento biológico capaz de controlar essa medida?

Os apicultores costumam padronizar os favos dentro de uma moldura de 37 x 22,5 em que, com apenas 40 gramas de cera possibilitam o armazenamento de 2 kg de mel. A relação de pesos entre o material armazenado e o material de construção é da ordem de 50. Nos silos usuais feitos pelo homem essa relação é quase sempre inferior a 5.

Convém chamar a atenção de que a construção pode mudar no decorrer da execução, modificando o tamanho das células. As células para as obreiras possuem abertura de 5,2mm ao passo que as dos zangões são de 6,2mm.

Ao iniciarem a construção, as abelhas freqüentemente se agrupam em filas. Após pouco tempo formam uma densa bola viva constituindo um cacho dentro do qual a temperatura é mantida constante e igual a 35°C. Esta temperatura é necessária para que a cera se torne moldável. Quando a temperatura diminui, as abelhas vibram fortemente as asas para que a energia de movimento se transforme em calor. Se a temperatura ficar acima do limite aconselhável, o trabalho é paralisado e as abelhas deixam o ar passar em rajadas para que a temperatura volte ao normal.

Os alvéolos são ligeiramente inclinados de aproximadamente 13° sobre a horizontal, diminuindo assim a tendência de vazamento do mel na temperatura constante dos alvéolos, com a viscosidade correta do produto fabricado.

Do lado oposto os alvéolos não estão situados nos mesmos eixos e sim defasados. As reentrâncias dos fundos dos primeiros alvéolos dariam fechamentos côncavos se os alvéolos fossem co-lineares. Como, entretanto os alvéolos do lado oposto ficam defasados, o que é reentrante de um lado torna-se convexo do outro. Dessa maneira, com as mesmas paredes de fundo, todos os alvéolos ficam com seus fundos convexos.

Os apicultores aprenderam a colocar uma folha de cera, com os fundos exatos dos alvéolos, prensados com a forma de três losangos com ângulos de  $109^{\circ} 28'$  e seu suplemento, reunidos de tal modo que formam entre si diedros de  $120^{\circ}$ . Dessa maneira as abelhas podem começar seu trabalho a partir de superfícies perfeitas já configuradas da mesma maneira que elas as fariam. Parece que isto funciona satisfatoriamente em alguns casos. (VASCONCELOS, 2002).

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A natureza tem incitado o estudo dos homens durante milhares de anos. É uma fonte inesgotável de conhecimento. Cada criatura que vive, desde as grandes sequóias até o minúsculo inseto que flutua no raio solar, os mundos inumeráveis em suas ordenadas revoluções, o equilíbrio das grossas nuvens, os mistérios da luz e do som, do dia e da noite, em cada folha na floresta, ou pedra nas montanhas, em cada estrela brilhante, na terra, no ar, e no céu.

A ordem e harmonia da natureza fala-lhes de sabedoria. Estão sempre a descobrir alguma atração que lhes enche o coração de satisfação, e provoca novos interesses nessa pesquisa. Enquanto permanecem fiéis na observação da mesma, sua capacidade para compreendê-la aumenta continuamente, estão constantemente a adquirir novos tesouros de saber, a descobrir novas fontes de conhecimento e a obter concepções cada vez mais claras da incomensurável, infalível regularidade da natureza.

Muitos dos pensadores, desde os mais antigos vêem a necessidade da observação da natureza. Galileu foi um deles, e abaixo reescrevo um texto seu:

“...o Universo permanece continuamente aberto à nossa contemplação, mas nunca poderá ser compreendido a não ser que se aprenda primeiro a entender a sua linguagem e a interpretar os signos em que se encontra escrito. Encontra-se expresso na linguagem da matemática, e os seus signos são triângulos, circunferências e outras figuras geométricas sem as quais é humanamente impossível compreender uma única das suas palavras; sem esses signos, ficamos a vaguear num escuro labirinto.”(LAWLOR,, 1996).

Após o término desse trabalho pude comprovar que o homem está começando a entender alguns desses padrões de simetrias que regem a natureza, ora pela observação direta ; ora de forma indireta, mas depois comprovando sua ocorrência na mesma. Com o auxílio da matemática ele consegue relacionar algumas dessas regras da natureza com números ou formas, ou seja, consegue explicar o porquê que certas flores sem aparente simetria podem ser consideradas tão perfeitas, por que as colméias têm aquele formato característico, por que certos ramos são de uma forma e não de outras.

O ser humano está usando essas relações em outros ramos da vida cotidiana, obtendo concepções cada vez mais claras da importância desse assunto no dia a dia, quer seja na arte, na arquitetura ou em outro ponto onde se deseja beleza e harmonia.

Contudo isso, o homem não conseguiu ainda imitar a natureza e nunca conseguirá. Pois a natureza é milimetricamente perfeita. Possui uma harmonia e beleza inefável, e isto é do conhecimento de qualquer criatura capaz de olhar, ouvir, tocar e sentir.

## REFERÊNCIAS

APICULTURA: Passeio de Estrelas. **Globo Rural**, São Paulo: Globo, n. 157, nov 1998.

BARCO, Luiz. **2 + 2 A Aventura de Um Matemático no Mundo da Comunicação**, São Paulo: Thema Editorial, 1993.

BATSCHELET, Edward, **Introdução à Matemática para Biocientistas**, Rio de Janeiro: Interciência Ltda, 1978,.

BIEMBENGUT, Maria Salett, **Número de Ouro e Secção Áurea**, Blumenau: FURB, 1996.

KNOTT, Ron. **Fibonacci Numbers and Nature**, BOLTON, 2003. disponível em:  
<<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html>>. Acesso em:  
25/06/2004.

LAWLOR, Robert. **Geometria Sagrada**, Madrid : del Prado, 1996.

LISBOA, Faculdade de Ciências da Universidade de. **Fibonacci e os números da natureza**, 2002. Disponível em:  
<<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/numeros.htm#Outras%20curiosidades%20Matemáticas%20na%20Natureza>>. Acesso em : 27/06/2004.

LISBOA, Faculdade de Ciências da Universidade de. **Geometria à várias dimensões**, 1999. disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/rectouro.htm>. Acesso em:  
27/06/2004.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e a Língua Materna**. São Paulo: Cortez/Autores Associados, 1991.

MEL: Reforço no caixa do pequeno produtor. **Globo Rural Economia**, São Paulo: Globo, n. 70, ago 1991.

PAPPAS, Theoni. **Fascínios da Matemática**, Lisboa: Replicação, 1998.

STEWART, Ian. **Os Números da Natureza**, Rio de Janeiro: Rocco, 1996.

VASCONCELOS, Dr. Augusto Carlos de. **A matemática dos alvéolos**, 2002. Disponível em: <<http://panda.fat.org.br/pipermail/beebr/2002-June/000564.html>>. Acesso em: 25/06/2004.