UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Curso de Licenciatura em Matemática

TEOREMA DE FROBENIUS-PERRON PARA OPERADORES POSITIVOS

Autora: Heloísa Cristina da Silva
Orientador: Prof. Dr. Aldrovando Luís Azeredo Araújo

Florianópolis
Fevereiro 2007

Heloísa Cristina da Silva

Teorema de Frobenius-Perron para operadores positivos

Trabalho acadêmico de graduação apresentado
à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II,
do Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura,
do Centro Ciências Físicas e Matemáticas da
Universidade Federal de Santa Catarina

Professora: Carmem Suzane Comitre Gimenez

Florianópolis
Fevereiro 2007

Agradecimentos

A Deus, nos momentos mais difíceis, de desânimo, desespero, dúvida, aflição, angústia,quando mais ninguém conseguia me ajudar e me confortar, foi N'Ele que encontrei forças para levantar e seguir o caminho.
A minha família, especialmente, minha mãe Marília, meu pai Afonso e meu irmão Luiz Paulo, aos meus amigos, e a meu namorado Edson, por terem me dado apoio, pela paciência e por me compreenderem quando me fazia ausente para me dedicar aos estudos.
Ao meu orientador Aldrovando, por aceitar o convite de me orientar neste trabalho e pelo empenho durante a realização do mesmo.
Ao professor Pinho e aos alunos do PET e olimpíadas, pelo apoio e aprendizado durante o tempo em que trabalhamos juntos.

Teorema de Frobenius-Perron para operadores positivos
por
Heloísa Cristina da Silva

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 05/CMM/07.

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Aldrovando Luís Azeredo Araújo (Orientador)

Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva (UFSC)

Prof. Mestre José Luiz Rosas Pinho (UFSC)

Sumário

Introdução

No ano de 1907 o matemático Oskar Perron divulgou um resultado, que se revelaria de inúmeras aplicações até os dias de hoje, sobre o espectro das matrizes denominadas positivas, ou seja, matrizes cujas entradas são todas números positivos. Pouco tempo depois, Ferdinand Georg Frobenius estendeu o resultado para matrizes não-negativas que satisfizessem uma propriedade conhecida como irredutibilidade que definiremos a seguir. Uma matriz não negativa é dita redutível se existir uma partição do conjunto de índices $\{1, 2, \cdots, n\}$ em conjuntos disjuntos não - vazios I_1 e I_2 tal que $a_{ij} = 0$ sempre que $i \in I_1$ e $j \in I_2$. Caso contrário, A é dita irredutível. Este teorema conhecido como Teorema de Perron-Frobenius, afirma que uma matriz não-negativa irredutível tem um autovalor positivo dominante λ tal que $\lambda > |\alpha|$ para todo $\alpha \neq \lambda$ autovalor da matriz. Além disso o autovalor dominante tem multiplicidade geométrica e algébrica igual a 1, e associado a ele existem únicos autovetor à esquerda e autovetor à direita positivos, isto é, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ e $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ com $v_i > 0$ e $w_i > 0$ para todo $i = 1, 2..n$ tais que

$$A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v} \quad \overrightarrow{w}A = \lambda\overrightarrow{w}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Este teorema tem uma aplicação notável a matrizes estocásticas, a saber, matrizes com todas entradas positivas e cuja soma dos elementos da cada linha é 1. Neste caso o teorema de Perron garante que o autovalor dominante é de fato igual a 1 ($\lambda = 1$). Os autovetores positivos satisfazendo a condição

$$A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v} \quad \overrightarrow{w}A = \lambda\overrightarrow{w}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

podem ser utilizados na construção de uma medida de probabilidade conhecida como Medida de Markov. Outras aplicações existem deste teorema. No entanto, não é nosso objetivo apresentá-las, mas sim apresentar uma prova elegante e o mais elementar possível deste resultado. Mais precisamente, o objetivo de meu estudo é apresentar duas provas deste teorema, uma de caráter totalmente algébrico e bastante elementar, ainda que use a teoria da forma canônica de Jordan e outra, uma prova baseada na construção da métrica projetiva, técnica essa desenvolvida por Birkhoff. A segunda prova tem muita importância, pois se aplica ao caso de operadores positivos em espaços de dimensão infinita denominados de operadores de transferência, cujo resultado fundamental é conhecido como Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius. Os resultados e extensões associados ao teorema de Ruelle constituem uma área de pesquisa muito ativa e fértil na atualidade dentro da teoria ergódica e sistemas dinâmicos.

No primeiro capítulo apresentamos os conceitos básicos da teoria das matrizes necessários ao desenvolvimento de nosso trabalho, respectivamente espaços vetoriais, conceitos gerais sobre matrizes, autovalores e autovetores. No segundo capítulo apresentamos uma prova considerada entre as mais elementares, fáceis e curtas do teorema, prova esta que envolve apenas conceitos da teoria das matrizes. No terceiro capítulo exibimos uma introdução à prova que se aplica aos casos de dimensão infinita, mais especificamente, ao teorema de Ruelle-Perron para operadores de transferência em subshits de tipo finito. Esta prova introduz uma métrica chamada de métrica de Caley, cuja propriedade fundamental é ser contraída pelo operador induzido pela matriz A sobre o cone projetivo, permitindo-se encontrar o autovalor e autovetor positivo através de teoremas de contração bem conhecidos em espaços métricos.

Capítulo 1

Noções Básicas

Como referência para os resultados deste capítulo o leitor pode ver em [2], [4] e [5].
Durante todo este documento, trabalharemos no corpo $K = \mathbb{C}$. As definições aqui apresentadas devem ser consideradas em dimensão finita.

Definição 1.1. Seja um corpo K. Sejam n e m dois inteiros ≥ 1. Um arranjo de números de K

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

é denominado uma matriz mxn em K.

Denotaremos o conjunto das matrizes nxn por $M_n(K)$.

Definição 1.2. Seja V um espaço vetorial sobre K. Um escalar $\lambda \in K$ tal que $(A - \lambda I)$ não é inversível denomina-se de autovalor do operador $A : V \to V$. Ao conjunto

$$Ker(A - \lambda I) = \{v \ / \ (A - \lambda I)v = 0\} \tag{1.1}$$

denomina-se de autovetores de A associados a λ.

Definição 1.3. Seja $A \in M_n(K)$. Definimos o polinômio característico $P(\lambda)$ de A como sendo o determinante

$$P(\lambda) = Det(A - \lambda I), \tag{1.2}$$

ou escrito por extenso

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

A matriz A também pode ser vista como uma aplicação linear de K^n em K^n, e também podemos dizer que $P(\lambda)$ é o polinômio característico desta aplicação linear.

Exemplo 1. Encontre os autovalores e autovetores associados da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Temos que

$$(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

calculando o polinômio característico temos,

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 12$$

Logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -3$.
Para encontrar os autovetores associados a $\lambda_1 = 4$, precisamos resolver a equação $(A - 4I)x = 0$, obtemos $x = (2x_2, x_2)^T$. Analogamente, para encontrar os autovetores associados a λ_2, precisamos resolver $(A + 3I)x = 0$. Nesse caso $x = (-x_1, 3x_1)^T$.

Definição 1.4. O espectro de A é o conjunto dos autovalores de A, ou seja

$$\sigma(A) = \{\lambda \in K \quad / \quad A - \lambda I \ \text{ não é inversível}\} \tag{1.4}$$

Definição 1.5. O raio espectral de A é o número real $\rho(A)$, tal que

$$\rho(A) = sup\{|\lambda| \quad / \quad \lambda \in \sigma(A)\} \tag{1.5}$$

Definição 1.6. Denomina-se de multiplicidade geométrica de λ ao número

$$m_\lambda = dim(Ker(A - \lambda I)) \tag{1.6}$$

Definição 1.7. Dado um autovalor c, a multiplicidade algébrica deste autovalor é o numero de vezes que o fator $(x - c)$ aparece na fatoração do polinômio característico sobre o corpo dos complexos.

Exemplo 2. Seja o operador

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos que

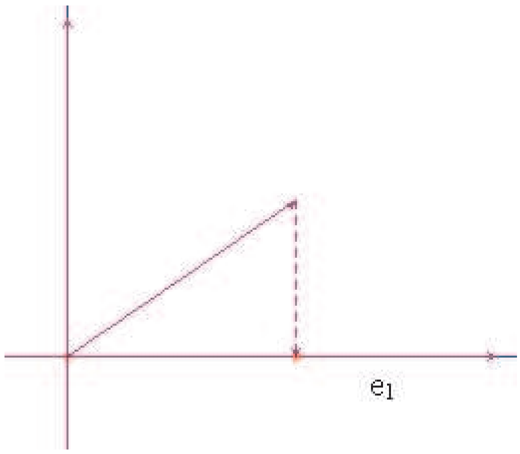
$$(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$ é autovalor de A.

$$Ker(A - I) = Ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \ < e_1 >$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, $m_\lambda(A) = dim \ \ Ker(A - I) = 1$.



Definição 1.8. Dizemos que v é um autovetor generalizado associado a λ se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$(A - \lambda I)^k v = 0 \tag{1.7}$$

Exemplo 3. Seja o operador

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Ker(A - I) = \ < e_1 >$

$Ker(A - I)^2 = \mathbb{R}^2$

Todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ é autovalor generalizado associado a 1.

Definição 1.9. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dizemos que A é positiva se $a_{ij} > 0$, $\forall \ \ 1 \leq i, j \leq n$.

Exemplo 4. Seja a matriz $A = (a_{ij})$, onde $a_{ij} = i + j, \ \ \forall i, j$.

Definição 1.10. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dizemos que A é não negativa se $a_{ij} \geq 0, \quad \forall\ 1 \leq i, j \leq n.$

Exemplo 5. Seja a matriz $A = (a_{ij})$, onde $a_{ij} = |i - j|, \ \ \forall i, j.$

Definição 1.11. O módulo de uma matriz e de um vetor são, respectivamente,

$$|A| = |a_{ij}| \qquad |v| = |v_i| \tag{1.8}$$

ou seja,

$$|A| = \begin{pmatrix} |a_{11}| & \cdots & |a_{1j}| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |a_{i1}| & \cdots & |a_{ij}| \end{pmatrix} \qquad |v| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_i| \end{pmatrix}$$

Definição 1.12. Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$ dizemos que:
$v \geq w$ se $v_i \geq w_i, \quad \forall\ 1 \leq i \leq n;$
$v > w$ se $v_i > w_i, \quad \forall\ 1 \leq i \leq n;$

Definição 1.13. Dizemos que uma matriz B é uma matriz semelhante a uma matriz A se existe uma matriz invertível M tal que $B = M^{-1}AM$.

Teorema 1.1. *Se uma matriz quadrada A tem s autovetores independentes, então ela é semelhante a uma matriz com s blocos*

$$J = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} J_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & J_s \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Cada bloco J_i(bloco de Jordan) é uma matriz com apenas um autovalor λ_i e um autovetor.

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Quando o bloco tem ordem $m > 1$, o autovalor λ_i é repetido m vezes e existem $m - 1$ $1's$ acima da diagonal. O mesmo autovalor λ_i pode aparecer em vários blocos se eles correspondem a autovetores independentes.

Definição 1.14. Seja E espaço vetorial, $F \subset E$ subespaço vetorial de E e $T : E \to E$ uma transformação linear. O subespaço vetorial F é invariante por T se $T(F) \subset F$

Exemplo 6. A matriz de rotação em $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz faz os pontos do eixo z ficarem parados e os vetores do plano xy serem rotacionados.

Definição 1.15. Se E é um espaço vetorial normado e $A : E \to E$ é um operador linear então a norma de E induz uma norma sobre A

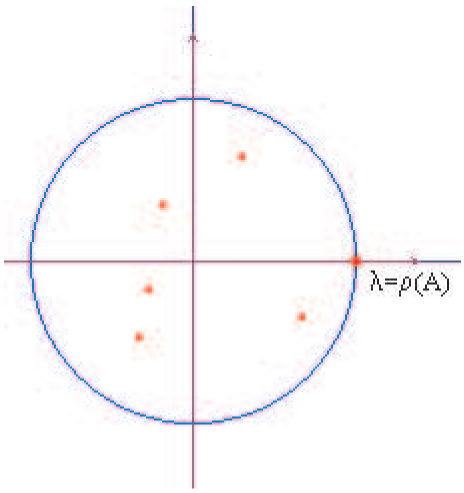
$$||A|| = sup_{||x||=1}||Ax||$$

que se denomina de norma induzida sobre A.

Capítulo 2

Demonstração do Teorema com álgebra linear

O Teorema de Perron trata de matrizes positivas e suas conclusões são de caráter espectral; como são os autovalores e como são os subespaços invariantes.
Fixamos A uma matriz positiva nxn, o teorema deixará claro que existe um único autovalor λ tal que $\lambda = max\{|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|\}$, em que λ_i são os autovalores da matriz A.



Considere o autovalor λ o autovalor dominante, fazendo a operação $\frac{1}{\lambda}A$. Chamando $A' = \frac{1}{\lambda}A$, a matriz A' terá 1 como autovalor dominante, assim todos os outros autovalores serão menores que 1.
Quando aplicamos a matriz A' ficamos com dois subespaços, um deles gerado pelo autovetor associado ao autovalor 1 e o outro gerado pelos autovetores associados aos autovalores menores que 1. Com isso, temos dois subespaços invariantes. A figura 2.2 ilustra esta situação.

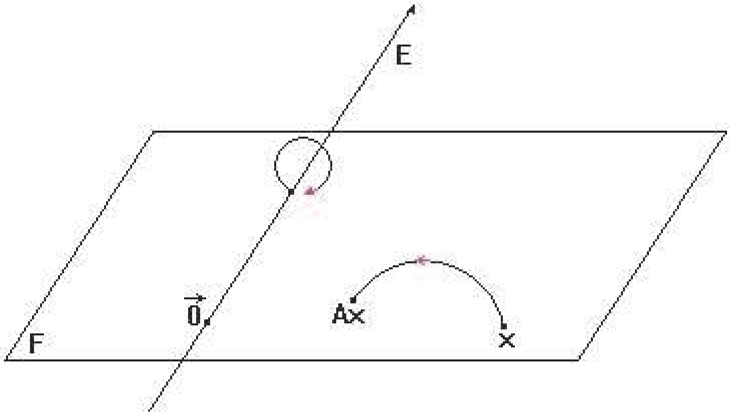


Figura 2.1: E é o subespaço gerado pelo autovetor associado a 1 e F é o subespaço gerado pelos autovetores associados aos autovalores menores que 1

2.1 Teorema de Perron

Se A é uma matriz real positiva, isto é, $a_{ij} > 0$ para $1 \leq i, j \leq n$, então:

i. existe um único $\lambda > 0$, $\lambda \in \sigma(A)$ e $x \in \mathbb{R}^n$ com $x > 0$ tal que $Ax = \lambda x$;

ii. para todo $\alpha \in \sigma(A)$, $\alpha \neq \lambda$, $|\alpha| < \lambda$;

iii. $\lambda = \rho(A)$;

iv. $dim \;\; Ker(A - \lambda I) = 1$ (multiplicidade geométrica);

v. $dim \;\; Ker(A - \lambda I)^n = 1$ (multiplicidade algébrica).

2.2 Lemas

Como referência para os resultados deste capítulo o leitor pode ver em [1], [3], [6] e [7].
A prova será apresentada na forma de lemas, para uma melhor compreensão das linhas de raciocínio. Sempre que apresentarmos a matriz A, estaremos tratando de uma matriz real positiva.

Lema 2.1. Seja A positiva. Então:

i. se $v \geq 0$, $v \neq \overrightarrow{0}$, então $Av > 0$;

ii. se $v \geq w$, então $Av \geq Aw$;

iii. se $v \neq \overrightarrow{0}$ é um autovetor de A, com $v \geq 0$, então $v > 0$.

Prova. Os itens $i.$ e $ii.$ são imediatos.
$iii.$ se $v \neq \overrightarrow{0}$ e $v \geq 0$, então

$$Av > 0$$

por $i.$
Mas se v é autovetor, $Av = \lambda v > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 0$

$$v = \frac{1}{\lambda} Av$$

isto é, $v > 0$.

■

Lema 2.2. Seja $J = \{\lambda \geq 0 \ / \ \exists \ x \geq 0 \ \text{tal que} \ Ax \geq \lambda x\}$. Então J é um intervalo, $J \neq \emptyset$.

Prova. Seja $x \neq \overrightarrow{0}$, $x \geq 0$, então $Ax > 0$.
Tomando $\epsilon > 0$, temos:
$Ax \geq \epsilon x$, isto é $\epsilon \in J$.
Além disso, se $0 < \alpha < \epsilon$.

$$Ax \geq \epsilon x \geq \alpha x$$

Com isso, $\alpha \in J$.
Portanto, J é um intervalo não-degenerado.

■

Lema 2.3. Existe $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \overrightarrow{0}$ e $v \geq 0$ tal que $Av \geq rv$, onde $r = sup\ J$ e $r \in J$.

Prova. Seja $\lambda \in J, \ \ \lambda_n \to r$ e $x_n \geq 0$ com $||x_n|| = 1$ e tal que

$$Ax_n \geq \lambda_n x_n$$

Seja $K = \{x \geq 0 \ / \ ||x|| = 1\}$. O conjunto K é compacto.
Ou seja, qualquer seqüência de K admite uma subseqüência convergente para um ponto de K.
Logo, existe $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \to \infty$ tal que

$$x_{n_K} \to x \in K$$

Então $Ax_{n_k} \geq \lambda_{n_k} x_{n_k} \geq rx \Rightarrow Ax \geq rx$.
Portanto, $r \in J$.

■

Lema 2.4. Seja $A \in M_n$. Existe $x > 0$ tal que $Ax = rx$.

Prova. Seja $x \geq 0$, $x \neq \overrightarrow{0}$ tal que $Ax > rx$. Temos $Ax - rx > 0$.
Seja $w = Ax - rx$.
Logo, $Aw > 0$. Seja $\epsilon > 0$ tal que

$$Aw \geq \epsilon Ax$$

$$A(Ax - rx) \geq \epsilon Ax$$

$$A(Ax) \geq \epsilon Ax + rAx$$

$$A\underbrace{(Ax)}_{y} \geq (\epsilon + r)\underbrace{Ax}_{y}$$

$$Ay \geq (\epsilon + r)y$$

$\Rightarrow \epsilon + r \in J$, absurdo, pois $r = sup\ J$.
Logo, $Ax = rx$.
Do lema **2.1**, concluímos que $x > 0$

■

Lema 2.5. Seja $A \in M_n$, $x \geq 0$ e $x \neq \overrightarrow{0}$, autovetor de A e $r = sup\ J$. Então $r = \rho(A) = sup_{\lambda \in \sigma(A)}|\lambda|$.

Prova. Se x é autovetor de A então $Ax = \lambda x$.

$$|\lambda x| = |\lambda||x| \leq A|x|$$

Com isso, $|\lambda| \in J$ e assim $|\lambda| \leq r$.
Logo,

$$\rho(A) \leq r$$

Pelo lema **2.4**, existe $x > 0$ tal que $Ax = rx$.
Portanto, $\rho(A) = r$.

■

Lema 2.6. Seja $A \in M_n$. Se $\lambda \in \sigma(A)$ e $|\lambda| = \rho(A)$ então $\lambda = \rho(A)$.

Prova. Existe $x \neq \overrightarrow{0}$, $x > 0$, tal que $Ax = \lambda x$.
Logo, $|\lambda||x| \leq A|x|$.
Mas $|\lambda| = \rho(A)$.
$\vdash$: $\rho(A)|x| = A|x|$.
Por absurdo, $A|x| \geq \rho(A)|x|$. Usando o argumento do lema **2.4**, obtemos uma contradição.
Logo, $A|x| = \rho(A)|x|$.

Segue que $|x| > 0$ e que $x = e^{i\theta}y$ para algum $y > 0$.

$$|\lambda|e^{i\theta}y = |\lambda||x| = A|x| = Ae^{i\theta}y$$
$$|\lambda|e^{i\theta}y = Ae^{i\theta}y \quad \Rightarrow \quad |\lambda|y = Ay$$

com $y > 0$.
Logo, $\lambda > 0$ e portanto $\lambda = \rho(A)$.

■

Lema 2.7. Seja $A \in M_n$ e $\rho(A) = r$ autovalor associado ao autovetor x. Então a multiplicidade geométrica é 1, ou seja, $m_g(\rho(A)) = 1$.

Prova. Se $dim \ \ Ker(A - \lambda I) > 1$, então existe $y \neq 0$ autovetor associado a λ e linearmente independente com x. Tomando $\epsilon > 0$ adequado obtemos que

$$x - \epsilon y \geq 0$$
$$x - \epsilon y \neq \overrightarrow{0}$$

e existe j tal que
$$(x - \epsilon y)_j = 0.$$

Mas
$$A(x - \epsilon y) = \lambda(x - \epsilon y).$$

Segue do lema **2.1** que
$$x - \epsilon y > 0$$

uma contradição com $(x - \epsilon y)_j = 0$.
Portanto, $dim \ \ Ker(A - \lambda I) = 1$

■

Lema 2.8. Seja $A \in M_n$ e $\rho(A) = r$ o autovalor associado ao autovetor x. Então a multiplicidade algébrica é 1.

Prova. Dividindo A por λ obtemos $\frac{A}{\lambda}$ cujo raio espectral é 1. Podemos supor que $\rho(A) = 1$.
Seja $m = m_a(1)$. Suponhamos, por absurdo, que $m > 1$. Então na forma de Jordan real de A teríamos um bloco de Jordan

$$J_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$J = P^{-1}AP \quad \text{e} \quad J^k = P^{-1}A^kP$$

Mas $||J_m^k||_\infty \to \infty$, portanto $||J^k|| = ||P^{-1}AP|| \leq ||P^{-1}||\ ||A^k||\ ||P||$,
isto é, $||A^k|| \to \infty$, quando $k \to \infty$
Seja x tal que $Ax = x$. Seja $A^k = (a_{ij})$. Denotamos por i_k o índice da linha de A^k tal que

$$||A^k|| = \sum_{j=1}^{n} a_{i_k j}^k$$

Como $x = A^k x$, temos

$$x_{i_k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_k j}^k x_j \geq \sum_{j=1}^{n} a_{i_k j}^k (inf_j x_j) = ||A^k (inf x_j)|| \to \infty$$

o que é um absurdo. Segue que $m = 1$.

■

Capítulo 3

Prova dos Cones

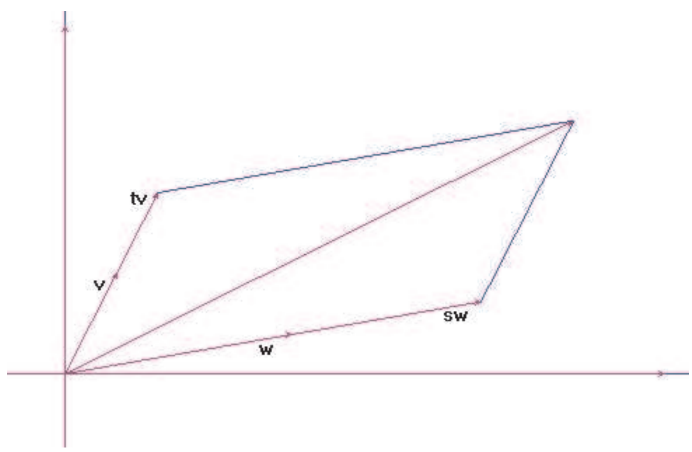
A prova dos cones que será apresentada neste capítulo, não demonstra por completo o Teorema de Perron, pois para demonstrar por completo o teorema precisaríamos de mais algumas teorias matemáticas, as quais não são abordadas a nível de graduação. Entretanto, a importância dessa prova dá-se pela sua utilidade na demonstração do teorema quando tratamos de dimensão infinita, o que não é o caso apresentado neste trabalho.

3.1 Definições

Seja E um espaço vetorial normado.

Definição 3.1 (*Cone*). O conjunto $C \subset E$ é um cone se para todo $v \in C$ e $t > 0$, $tv \in C$.

Definição 3.2. O conjunto $C \subset E$ é convexo se dado $v, w \in C$ e $t, s > 0$ então $tv + sw \in C$.



Definição 3.3. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Para que $a \in \overline{X}$ em M, é necessário e suficiente que a seja limite de uma seqüência de pontos $x_n \in X$.

Definição 3.4. O elemento $w \in \overline{C}$ se, e somente se, existe $v \in C$ e uma seqüência de números reais t_n, em que $t_n \to 0$ e $t_n > 0$ tal que $w + t_n v \in C$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3.5. Seja C convexo e $\overline{C} \cap (-\overline{C}) = 0$. Definimos dois conjuntos :

$$\alpha(v, w) = \sup\{t > 0 / w - tv \in C\}$$

$$\beta(v, w) = \inf\{s > 0 / sv - w \in C\}$$

$$\sup \emptyset = 0 \ \text{ e } \ \inf \emptyset = \infty$$

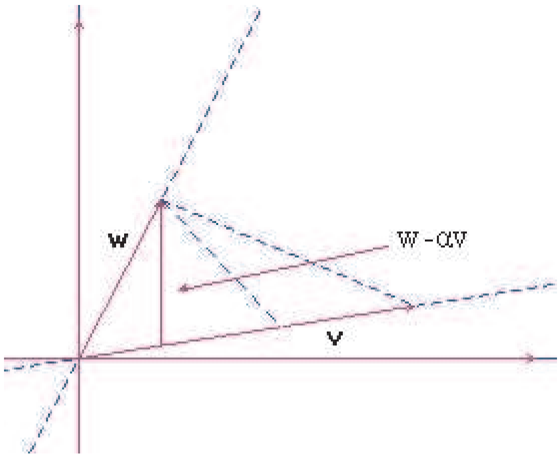


Figura 3.1: $\alpha(v, w)$

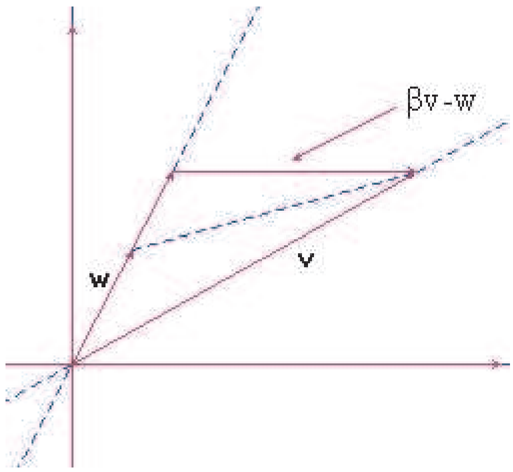


Figura 3.2: $\beta(v, w)$

Definição 3.6. Uma métrica num conjunto M é uma função $d : M\text{x}M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

d1. $d(x, x) = 0$;

d2. Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

d3. $d(x, y) = d(y, x)$;

d4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 3.7. O conjunto $\overline{C} \subset E$ é formado pelos elementos $-v$ tal que $v \in C$.

Uma pseudo-métrica num conjunto M é uma função real $d : M\text{x}M \to \mathbb{R}$ que cumpre as condições de uma métrica, salvo o fato de que pode ser $d(x, y) = 0$ com $x \neq y$.
Teremos como hipótese durante todo o trabalho que:
C é convexo;
$\overline{C} \cap (-\overline{C}) = \overrightarrow{0}$;
satisfaz os conjuntos definidos acima.

Definição 3.8. Uma relação R sobre um conjunto E não vazio é chamada relação de equivalência sobre E se, e somente se, R é reflexiva, simétrica e transitiva. Ou seja, R deve cumprir, respectivamente, as seguintes propriedades:

i. se $x \in E$, então xRx;

ii. se $x, y \in E$ e xRy, então yRx;

iii. se $x, y, z \in E$ e xRy e yRz, então xRz.

Definição 3.9. Seja R uma relação de equivalência sobre E. Dado a, com $a \in E$, chama-se classe de equivalência determinada por a, módulo R, o subconjunto $\overline{a}$ de E constituído pelos elementos x tais que xRa. Em símbolos:

$$\overline{a} = \{x \in E \ / \ xRa\}$$

Definição 3.10. Sejam $v, w \in C$. Chama-se quociente projetivo de C o conjunto

$$C_p = \{v \in C \ / \ v = tw, t > 0 \ \text{ e } \ w \in C\}$$

assim, $C_p = \{v \in C \ / \ [v]\}$, ou seja, C_p é uma classe de equivalência.

Definição 3.11. O conjunto das classes de equivalência módulo R é indicado por $\frac{E}{R}$ e chamado conjunto - quociente de E por R.

3.2 Lemas

Lema 3.1. Sejam E espaço vetorial e C um cone. Sejam α e β as métricas definidas anteriormente, então

$$\alpha(v, w) \leq \beta(v, w)$$

Prova. Sejam $t, s \in \mathbb{R}$ tais que $t < \alpha(v, w)$, $s > \beta(v, w)$ e $s \neq t$.
Como $t < \alpha$ e $s > \beta$, temos:

$$w - tv \in C \tag{3.1}$$

$$sv - w \in C \tag{3.2}$$

Somando (3.1) com (3.2):

$$sv - tv \in C$$

$$(s-t)v \in C$$

Para que $(s-t)v \in C$, precisamos que $(s-t) \geq 0$.
Suponha, por absurdo, que $(s-t) < 0$, então:

$$(t-s)(-v) \in C$$

$$(t-s)v \in C$$

$$-\underbrace{(t-s)v}_{u} \in C$$

$$(t-s)v \in C$$

Com isso, $u \in C$ e $-u \in C$.
Mas de $-u \in C$ temos que $u \in (-C)$.
Desse modo, $u \in C$ e $u \in (-C)$, assim $u \in \overline{C}$ e $u \in (-\overline{C})$.
Concluímos que $u \in \overline{C} \cap (-\overline{C}) = \{\overrightarrow{0}\}$, ou seja,

$$u = (t-s)v = \overrightarrow{0}$$

Então, sendo $v \neq \overrightarrow{0}$, $t = s$.
O que é absurdo, pois por hipótese, $t \neq s$.
Logo, $s - t \geq 0$, ou seja, $t \leq s$.
Portanto, $\alpha \leq \beta$.

■

Lema 3.2. Sejam α e β os conjuntos definidos anteriormente. Então $\beta(v,w) > 0$ e $\alpha(v,w) < +\infty$.

Prova. Seja $v \neq \overrightarrow{0}$. Se $\alpha(v,w) = \infty$ então existe a seqüência $t_n \in \mathbb{R}$, $t_n > 0$, $t_n \to \infty$ tal que

$$w - t_n v \in C \tag{3.3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.
Multiplicando (3.3) por $\dfrac{1}{t_n}$, temos:

$$\frac{1}{t_n}(w - t_n v) \in C$$

$$\frac{w}{t_n} - v \in C$$

$$\left(\frac{1}{t_n}\right)w + (-v) \in C$$

Com isso, $-v \in \overline{C}$ e conseqüentemente $v \in -C$, e por isso $v \in (-\overline{C})$, com $v \neq \overrightarrow{0}$
Logo, $v \in \overline{C} \cap (-\overline{C}) = \overrightarrow{0}$, ou seja, $v = \overrightarrow{0}$
O que é absurdo, pois $v \neq \overrightarrow{0}$.
Seja $w \neq \overrightarrow{0}$. Se $\beta(v, w) = 0$ então existe $s_n > 0$, $s_n \to 0$ tal que

$$s_n w - v \in C \tag{3.4}$$

Multiplicando (3.4) por $-\dfrac{1}{s_n}$, temos:

$$-\frac{1}{s_n}(s_n w - v) \in C$$

$$-w + \frac{1}{s_n} v \in C$$

$$\left(\frac{1}{s_n}\right) v + (-w) \in C$$

Com isso, $-w \in \overline{C}$ e conseqüentemente $w \in (-\overline{C})$.
Logo, $w \in \overline{C} \cap (-\overline{C}) = \overrightarrow{0}$, ou seja, $w = \overrightarrow{0}$.
Absurdo, pois $w \neq \overrightarrow{0}$.
Portanto, $\beta(v, w) > 0$ e $\alpha(v, w) < \infty$.

$\blacksquare$

Lema 3.3. Sejam α e β métricas. Então

$$\alpha(v, w) = (\beta(w, v))^{-1}$$

Prova. Suponha $\alpha(v, w) > 0$.
Mas $\alpha(v, w) = \sup\{t > 0 \ / \ w - tv \in C\}$.
Escreva t na forma $t = \dfrac{1}{s}$, assim,
$\alpha(v, w) = \sup\Big\{\dfrac{1}{s} > 0 \ / \ \dfrac{1}{s}w - v \in C\Big\} = (\inf\{t > 0 \ / \ tw - v \in C\})^{-1} =$
$= \beta^{-1}(v, w)$.
Suponha, agora, que $\alpha(v, w) = 0$

$$w - tv \notin C, \ \ \forall \ t > 0$$

$$sw - v \in C, \ \ \forall s > 0 \Leftrightarrow \beta(v, w) = \infty$$

Logo, $\alpha(v, w) = \beta^{-1}(w, v)$.

$\blacksquare$

Definição 3.12. Definimos para todo $v, w \in C$:

$$\theta(v,w) = log\frac{\beta(v,w)}{\alpha(v,w)}$$

$$\theta(v,w) = 0, \text{se } \ \alpha(v,w) = 0$$

$$\theta(v,w) = \infty, \text{se } \ \beta(v,w) = \infty$$

Lema 3.4. Seja θ definido acima, satisfaz:

i) $\theta(v,w) = \theta(w,v), \forall v, w \in C$

ii) $\theta(v,w) + \theta(w,u) \geq \theta(v,u)$ para todo $u, v, w \in C$

iii) $\theta(v,w) = 0 \Leftrightarrow$ existe $t > 0$ tal que $v = tw$

Prova. i) $\theta(v,w) = \log\dfrac{\beta(v,w)}{\alpha(v,w)} = \log\dfrac{\alpha(v,w)^{-1}}{\beta(v,w)^{-1}} = \log\dfrac{\beta(w,v)}{\alpha(w,v)} = \theta(w,v)$
Logo, $\theta(v,w) = \theta(w,v), \ \forall \ v, w \in C$

ii) Para provar que

$$\theta(v,w) + \theta(w,u) \geq \theta(v,u)$$

precisamos mostrar que

$$\alpha(v,w).\alpha(w,u) \leq \alpha(v,u)$$

$$\beta(v,w).\beta(w,u) \geq \beta(v,u)$$

Seja $\alpha(v,w) = 0$ ou $\alpha(w,u) = 0$ é trivial. Podemos, então, supor que $\alpha(v,w) > 0$ e $\alpha(w,u) > 0$.
Seja $t < \alpha(v,w)$ e $s < \alpha(w,u)$ então

$$w - tv \in C \tag{3.5}$$

$$u - sw \in C$$

Multiplicando s por (3.5), temos:

$$sw - stv \in C \tag{3.6}$$

$$u - sw \in C \tag{3.7}$$

Somando (3.6) com (3.7), temos:

$$u - stv \in C$$

Então $st \leq \alpha(v,w)$.
Tomando supremos sucessivamente obtemos

$$\alpha(v,w).\alpha(w,u) \leq \alpha(v,u)$$

Provemos que
$$\beta(v,w).\beta(w,u) \geq \beta(v,u)$$

Sejam $t > \beta(v,w)$ e $s > \beta(w,u)$.
Assim,
$$tv - w \in C \tag{3.8}$$
$$sw - u \in C$$

Multiplicando (3.8) por s, temos:
$$stv - sw \in C \tag{3.9}$$
$$sw - u \in C \tag{3.10}$$

Somando (3.9) com (3.10):
$$stv - u \in C$$

Segue que
$$st \geq \beta(v,w)$$

Tomando ínfimos sucessivamente, obtemos:
$$\beta(v,w).\beta(w,u) \geq \beta(v,u)$$

Logo,
$$\alpha(v,w).\alpha(w,u) \leq \alpha(v,u) \tag{3.11}$$
$$\beta(v,w).\beta(w,u) \geq \beta(v,u) \tag{3.12}$$

Sabendo que (3.11) e (3.12) são válidas, provemos que
$$\theta(v,w) + \theta(w,u) \geq \theta(v,u)$$

De fato,
$$\theta(v,w)+\theta(w,u) = \log\frac{\beta(v,w)}{\alpha(v,w)}+\log\frac{\beta(w,u)}{\alpha(w,u)} = \log\frac{\beta(v,w).\beta(w,u)}{\alpha(v,w).\alpha(w,u)} \geq \log\frac{\beta(v,u)}{\alpha(v,u)} = \theta(v,u)$$

Portanto, $\theta(v,w) + \theta(w,u) \geq \theta(v,u)$.

iii) Seja $\theta(v,w) = 0 \Leftrightarrow \alpha(v,w) = \beta(v,w) = t$.
Sejam as seqüências de números reais t_n e s_n tais que, $t_n \nearrow t$ e $s_n \searrow t$, então $w - t_n v \in C$ e $s_n v - w \in C$.
Isto é,
$$w - t_n v = w - t_n v + tv - tv = w - tv + (t - t_n)v \in C$$

Mas se $w - tv + (t - t_n)v \in C$ então $w - tv \in \overline{(}C)$, pois $t - t_n \searrow 0$.
Do mesmo modo,

$$s_n v - w = tv - tv + s_n v - w = tv - w + (s_n - t)v \in C$$

Mas se $tv - w + (s_n - t)v \in C$ então $tv - w \in \overline{C}$, pois $s_n - t \searrow 0$.
Com isso $tv - w \in \overline{C}$ e $w - tv \in \overline{C} = \overrightarrow{0}$.
Então $w - tv = \overrightarrow{0}$, isto é, $w = tv$.
Portanto, θ satisfaz as propriedades *i, ii* e *iii*.

Definição 3.13. Sejam $v, w \in C$. Chama-se quociente projetivo de C o conjunto

$$C_p = \{v \in C \ / \ v = tw, t > 0 \ \text{ e } \ w \in C\}$$

assim, $C_p = \{v \in C \ / \ [v]\}$

OBS.: Obviamente θ não é uma métrica sobre C e sim uma pseudo - métrica sobre C, mas é uma métrica sobre o quociente projetivo de C.

Lema 3.5. Sejam $v, w, z \in C$, $t, r \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $r > 0$ e $\sim$ a relação definida da seguinte maneira:

$$v \sim w \Leftrightarrow v = tw$$

onde $t > 0$.
Provemos que $\sim$ é uma relação de equivalência.

i. Se $v \in C$ então $v \sim v$
   $v = tv \Rightarrow t = 1$
   Logo, $v \sim v$

ii. Se $v, w \in C$ e $v \sim w$ então $w \sim v$
   $v \sim w \Rightarrow v = tw$
   $w = \frac{1}{t}v$
   Chamando $r = \frac{1}{t} > 0$:
   $w = rv \Rightarrow w \sim v$
   Logo, $w \sim v$

iii. Se $v, w, z \in C$, $v \sim w$ e $w \sim z$

$$v \sim w \Rightarrow v = tw \tag{3.13}$$

$$w \sim z \Rightarrow w = rz \tag{3.14}$$

   Substituindo (3.14) em (3.13), temos: $v = trz$
   Chamando $s = tr > 0$:
   $v = sz \Rightarrow v \sim z$
   Logo, $v \sim z$

Portanto, $\sim$ é uma relação de equivalência.

Considerações Finais

A relevância deste trabalho está na simplicidade da prova do Teorema de Perron, apresentada de uma elegante e de fácil entendimento. Além disso, este trabalho apresenta uma outra prova que utiliza a teoria de cones, que não teve por objetivo demonstrar por completo o teorema, mas que é importante quando estendemos para o caso de dimensão infinita, o que não foi abordado aqui.

Durante a realização do trabalho encontrei algumas dificuldades, principalmente de encontrar bibliografias que utilizassem o mesmo enfoque que utilizamos.

Pode-se fazer, em trabalhos futuros, a generalização para dimensão infinita usando cones e trabalhar mais com as aplicações, apresentando-as e analisando-as detalhadamente.

Referências Bibliográficas

[1] Robert L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. 1989.

[2] F. R. Gantmatcher. *The Theory of Matrices*. 1960.

[3] Hygino H. Domingues; Gelson Iezzi. *Álgebra Moderna*. 2003.

[4] Serge Lang. *Álgebra Linear*. 2003.

[5] Steven J. Leon. *Álgebra Linear com Aplicações*. 1998.

[6] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. IMPA, 1977.

[7] S. Smale M. Hirsh. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.