UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA

ORNAMENTOS E GRUPOS

GISLAINE TEIXEIRA BORGES

FLORIANÓPOLIS, 2003

Universidade Federal de santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

ORNAMENTOS E GRUPOS

Gislaine Teixeira Borges

Monografia de TCC apresentado ao curso de Matemática
Licenciatura da Universidade Federal de Santa Catarina
como requisito para obtenção do título de Licenciado
em Matemática, sob a orientação da Profª. Mestre
Carmem Suzane Comitre Gimenez

Florianópolis
2003

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 33 / SCG / 03

Prof. Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Carmem Suzane Comitre Gimenez
Orientadora

Jane de Oliveira Crippa

Albertina Zatelli

AGRADECIMENTOS

À Deus que esteve presente em todos os momentos, mesmo antes de começar a se desenvolver este trabalho, auxiliando-me com a orientadora, com o tema, criatividade, força de vontade e muito prazer ao produzi-lo.

À Carmem Suzane, que aceitou o convite e com sua paixão pelo tema do TCC me deixou também apaixonada. À sua grande sabedoria, organização, pontualidade, enfim, sua ótima orientação.

Ao Alcino, o meu muito obrigada pela ajuda na digitalização das fotografias**.**

Aos meus pais que sentiram muito a minha ausência (e eu a deles) durante todo esse tempo de faculdade, por todo amor e confiança a mim depositado.

Ao meu querido namorado, a sua dedicação, carinho e paciência.

A *matemática* tem sido freqüentemente comparada a uma árvore,
pois cresce numa estrutura acima da terra que se espalha e ramifica sempre mais,
ao passo que ao mesmo tempo suas raízes cada vez mais se aprofundam e
alargam, em busca de fundamentos sólidos.
(Carl B. Boyer)

A *Teoria dos Grupos* mostra, que os diferentes campos da matemática
têm grandes semelhanças e que é possível usar ferramentas e
métodos de um campo para resolver problemas de outro.
(Évariste Galois)

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

1 - INTRODUÇÃO

Este é um trabalho introdutório ao estudo de simetrias e grupos.

No primeiro capítulo tem-se um pouco de dados históricos sobre simetria e a teoria de grupos, assim como o marco inicial do estudo de simetria, sua importância na arquitetura, na arte, as áreas onde ela se sobressai e os matemáticos responsáveis pela concretização da idéia da teoria de Grupos.

No segundo capítulo é apresentado o conceito de simetria e suas operações simétricas: translação, rotação, reflexão de espelho, reflexão de ponto e reflexão deslizante, assim como as suas combinações, todas consideradas como movimentos rígidos no plano. Depois de conhecer os tipos de simetria identicamos as simetrias de uma figura e então chegamos ao fato de que o conjunto de simetrias de uma figura tem estrutura de grupo.

Depois da definição de grupo, parte-se para algumas definições importantes e necessárias vistas no terceiro capítulo, como: isometrias, grupos ornamentais, grupos equivalentes, etc – as quais permitirão a classificação do grupo que será estudado, o grupo roseta.

No estudo do grupo roseta tem-se a classificação de grupo poligonal e grupo diedral bem como suas respectivas particularidades. Apresentamos alguns exemplos através de figuras ilustrativas construidas com o auxílio do software Cabri - Géomètre II.

O reconhecimento da simetria como um instrumento facilitador em áreas como ciências (matemática, física e química) e arte (arquitetura, pintura) é grande e de muito valor. Na última parte deste trabalho encontram-se algumas aplicações da simetria em problemas matemáticos. Apresentamos também ilustrações interessantes de exemplos de grupos rosetas encontrados no nosso cotidiano, através de fotografias e figuras obtidas da internet.

2 - HISTÓRICO

2.1 - Simetria

O primeiro estudo de simetria realizado e registrado, começou a se desenvolver em 2205 a.C; apesar da simetria já ser usada pelo homem em suas realizações desde os tempos mais primitivos, como apontam os sinais arqueológicos de seus instrumentos e suas antigas amostras de arte. O livro chinês registrado historicamente é o I Ching (Livro das Mutações ou Livro dos Degraus), que provavelmente foi escrito pelo Rei Wen na dinastia Chu (1122 a 256 a.C)

Marcus Lucius V. Pollio, arquiteto romano, afirmava em 80 a.C que a simetria seria; "a harmonia apropriada que resulta dos membros da própria obra e a correspondência modular que resulta das partes separadas em relação à aparência de todo o corpo". Lembra-se que sua afirmação se aplica tanto a um edifício como ao corpo humano, à pintura, à qualquer obra de arte, etc.

Nessa época, a arquitetura clássica tinha como princípio absoluto a simetria de suas construções.

Plotino (205-270), filósofo neoplatônico romano, garantia que "praticamente todas as pessoas afirmam que a beleza visual é produzida pela simetria das partes em relação umas às outras e em relação ao todo".

Com o racionalismo a simetria sofre uma minimização; ("idade das trevas", 400-800), das suas opiniões estáveis e abertas, passa a ser conhecida por uma simples reflexão sobre um eixo ou plano. A palavra grega "simetria", foi depois traduzida pelo latim, como "proporção", aumentando mais a confusão. Portanto a arquitetura da época está menos simétrica e conseqüentemente se mostra mais rica em movimento.

Apenas em 1452-1519 voltam os estudos da simetria com Leonardo da Vinci, que deixou numerosos esquemas de objetos simétricos no Codex Madrid I, seus jogos geométricos de lúnulas, pesquisas de alguns grupos de simetrias cíclicas (rotatórias) e a verificação de todas as simetrias possíveis de um prédio bilateral com uso de enfeites sem destruir as simetrias. A partir de sua morte (1528) são publicados livros sobre a simetria, por Albreacht Dürer, Joachim L. Camerarius e Johann Kepler.

Galileu Galilei em 1615 destruía a Lua de vidro da igreja com as seguintes palavras: "... não é perfeitamente lisa, não é livre de desigualdade, nem exatamente esférica, como quer uma extensa escola de filósofos; ao contrário, é desigual, com concavidades e protuberâncias...". O mundo simétrico da igreja e sua complexa engrenagem motora começavam a ir por "água abaixo". A simetria então tornava a se manifestar com toda a sua relevância/elasticidade, sendo algo implícito na noção de desenho do Renascimento em diante.

A simetria nos séculos XVII e XVIII se desenvolve através dos seguintes estudiosos: Shubnikov, o pioneiro dos espaços simétricos estudados pelos grupos; Cnon de Condermoy, que diz "a simetria é a relação que o lado direito tem com o esquerdo, as partes inferiores com as superiores, e as da frente com as de trás", e Repton e Montesquieu que disseram "a simetria não é essencialmente visual: é intelectual" e que na pintura ela tornaria os quadros "imóveis e insípidos". Goelhe, poeta alemão que estudava minerais e plantas, observou a tendência da natureza à espiralização e simetria e deu a esse fenômeno o nome de "filotaxia".

No século XIX, Hessel foi o primeiro a descobrir e deduzir todos os tipos de simetria imagináveis nos cristais. E algumas décadas mais tarde Eugraf , Fedorov, Arthur e Willian definem e provam matematicamente a existência de apenas 230 grupos de simetria interna nos cristais.

A classificação dos animais foi dada pela primeira vez em relação a sua simetria, pelo zoólogo e evolucionista Ernst Haeckel. E segundo Haeckel, as normas usadas para os cristais podem também ser igualmente aplicadas aos animais.

Vários modelos de simetria em construções estéticas, crescimentos orgânicos e estruturas cristalinas foram expostos por Theodore Cook, somente no final do século dezenove.

No século XX (1932), Andréas Speiser publicou alguns elementos sobre simetria de padrão. E em 1950, Le Corbusier publica o Le Modulor; a partir da altura máxima de ocupação de espaço do corpo humano (distância que vai do chão às pontas dos dedos, com os braços levantados), no qual ele fixava em 216cm e da metade dessa altura (até o plexo solar), 108cm, criou duas séries de valores em relação áurea, obtidas através da divisão harmônica desses comprimentos. Com muitas conotações de simetria e livre de cálculos, o livro possui uma teoria baseada simetricamente em “tudo o que é uma parte também é um todo”.

Outra idéia de simetria que se tem “é a invariância de uma transformação na configuração de elementos submetida a um grupo de transformações automórficas”, dada pelo Hermann Weyl em 1952. Idéia esta, que marcou a volta ao ideal grego, trazendo uma boa novidade: que a dilatação é a última extensão da simetria real e que serviria para as transformações de crescimento, porém de difícil conceitualização.

Atualmente, o estudo da simetria através da tecnologia computacional de texturas avança principalmente nos Estados Unidos, na Alemanha e na Itália.

2.2 - Teoria de Grupos

A idéia de grupo é de importância fundamental na matemática. Milhares de livros, artigos e vidas foram dedicados a estudar os aspectos teóricos dos grupos. De fato, este assunto é chamado de “Teoria de Grupos”.

A história da Teoria de Grupos é bastante intrincada e é difícil separar o que realmente aconteceu antes da terminologia ser fixada.

Não houve uma pessoa responsável pelo surgimento da idéia de grupo, porém o sujeito que mais se sobressaiu nesse contexto foi o jovem Évariste Galois, pioneiro no uso (1830) da palavra “grupo” em seu sentido técnico.

A Teoria de Grupos é a abstração de idéias que eram comuns a áreas principais que eram estudadas necessariamente simultaneamente. As três áreas principais que levaram ao estudo da teoria de grupos foram [12]:

1. Geometria no início do século XIX,
2. Teoria de Números ao fim do século XVIII,
3. Teoria das equações algébricas ao fim do século XVIII, iniciando o estudo de permutações.

Évariste Galois dominou os grandes textos de matemática de seu tempo, percorreu os artigos de Legendre, Jacob e Abel para depois se dedicar à sua própria criação.

A vida dele foi curta e trágica, passou por frustrações de reprovações ao tentar ingressar na Escola Politécnica. Atacado por causa de intrigas clericais, seu pai sentiu-se perseguido e suicidou-se. E logo depois que entrou na Escola Normal em 1829, envolveu-se nas agitações da Revolução de 1830, quando foi expulso da escola ficando preso por vários meses. Pouco depois de sua libertação, envolveu-se com uma mulher e por causa dela foi desafiado a um duelo a pistola em que foi morto, com vinte e um anos incompletos. Na noite anterior do duelo, com pressentimentos de morte, escreveu um testamento científico na forma de uma carta a um amigo; esta carta apresentava notas de suas descobertas não-publicadas, as quais revelavam a Teoria de Grupos e uma teoria que mais tarde seria conhecida como Teoria de Galois.

Uma avaliação completa das realizações de Galois, encontrados após sua morte, foi feita apenas em 1870, quando Camille Jordan as expôs em seu livro e mais tarde quando Felix Klein e Saphus Lie brilhantemente fizeram uso delas na geometria. As pesquisas em Teoria de Grupos foram então levadas adiante por vários matemáticos; Augustin-Louis Cauchy, Arthur Carley, Otto Holder entre outros. Assim, o estudo de grupos assumiu sua forma abstrata independente e se desenvolveu rapidamente.

Essa teoria veio alcançar um papel muito importante na geometria; fornecer critérios para construções com régua e compasso e auxiliar na resolubilidade de equações por radicais. Em álgebra serviu como uma estrutura atômica de coesão, fator para ascensão da álgebra abstrata no século XX.

A Teoria de Grupos realmente chegou à idade adulta com o livro de Burnside “Theory of groups of finite order” publicado em 1897; também o livro de álgebra de dois volumes de Heinrich Weber publicado em 1895 e 1896 veio a ser um texto padrão. Estes livros influenciaram a próxima geração de matemáticos a fazer da Teoria de Grupos talvez a maior teoria do século XX na matemática.

3 - SIMETRIA E GRUPOS

Neste capítulo vamos descobrir que o conjunto das simetrias de uma figura tem características de uma estrutura, ou seja, que o conjunto das simetrias é um grupo.

Para isso veremos a definição de simetria como movimentos rígidos e suas operações simétricas, a classificação dos movimentos rígidos como simples e combinados através de figuras ilustrativas, o fato da combinação de simetrias ter características especiais como uma composição de funções e também a identificação das simetrias de algumas figuras.

3.1 - Simetrias como movimentos rígidos no plano

A expressão simetria procede do grego (sin: com e métron: medida). Como vimos no histórico, já foi traduzida como “proporção” ou também como “comensurável”, ambas sem uma correspondência de significado entre elas e por isso, motivo de confusão. Por exemplo, uma diagonal de um quadrado é simétrica, mas não é comensurável.

A simetria pode conservar as distâncias, pode conservar a forma, ou ambas. Uma forma com simetria possui, em conseqüência, uma relação das partes do todo entre si e com o próprio todo, possui também harmonia de posição, pontos similares e equivalentes e a existência da regularidade no espaço.

Simetria é a propriedade pela qual um objeto ou forma exibe partes equivalentes quando submetida a uma operação específica. A simetria é, deste modo, uma operação que mantém uma forma que não se altera e as suas operações particulares são denominadas operações simétricas ou operadores simétricos.

Têm-se as operações simétricas simples e as combinadas, as quais serão estudadas detalhadamente a seguir. São as seguintes: translação, rotação, reflexão de espelho, reflexão de ponto e reflexão deslizante.

- *Translação:* Essa simetria é também conhecida por “simetria de coincidência”. Numa translação tudo é movido pela mesma distância e na mesma direção, deslocando cada ponto pela mesma quantidade, tal como mostra a Figura 2.1.

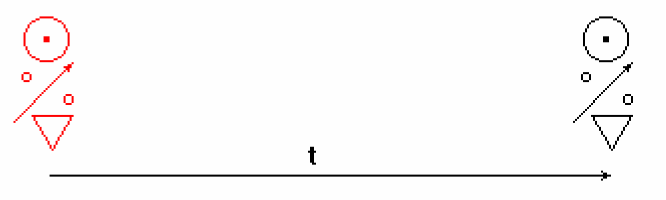


Figura 2.1 - Translação

Nota-se que há dois elementos nessa simetria, o comprimento ou período de translação e a repetição da forma. A translação pode ser feita com qualquer quantidade, ou seja, não é restrita aos números inteiros e ainda a quantidade pode ser para cima/baixo e para a esquerda/direita.

- *Rotação:* Essa simetria é também conhecida como "simetria rotatória" ou como "simetria cíclica". Na rotação, tudo gira a mesma quantidade em torno de um ponto fixo, o qual é chamado de **CENTRO DE ROTAÇÃO**. Para termos uma rotação, define-se qual o ponto a ser fixado e a quantidade pela qual o todo gira em torno desse ponto, sendo indiferente o sentido do giro. Há várias maneiras diferentes de medir a quantidade de uma rotação; trabalharemos com frações de uma volta completa. No exemplo abaixo tem-se uma rotação de $\frac{3}{8}$ de volta.

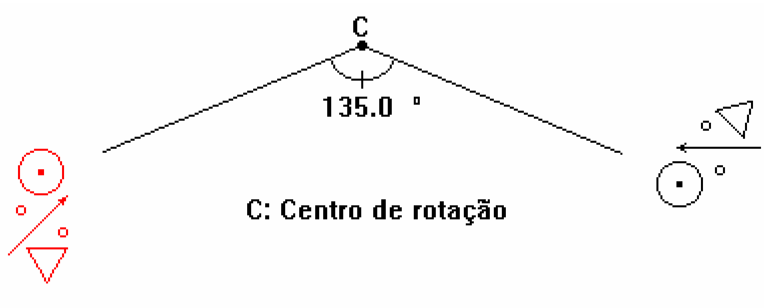


Figura 2.2 - Rotação

Observa-se que o ponto fixo atua como um eixo e os dois segmentos indicam a rotação como se fossem os raios de um círculo. Assim, a distância da figura inicial e da figura final ao centro de rotação é a mesma.

- *Reflexão de espelho:* Essa simetria é obtida colocando-se um objeto diante de um espelho e considerando sua forma e sua imagem. É determinada por uma linha quebrada que indica o espelho; seus pontos não se movem por efeito da reflexão. A distância de um ponto ao espelho é igual à distância da imagem desse ponto ao espelho.

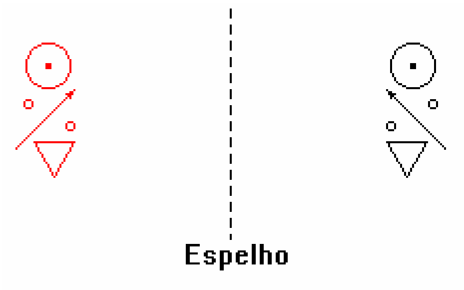


Figura 2.3 - Reflexão de espelho

É visto que os dois lados são realmente "imagens de espelho" um do outro, pois, ao dobrar a folha ao longo da linha de espelho, a figura original e a sua imagem irão cair uma sobre a outra.

- *Reflexão de ponto:* É a simetria construída da seguinte maneira: para cada ponto P da figura, encontramos o simétrico $\overline{P}$ de P, em relação a um ponto fixo O, ou seja, o simétrico de P sobre a reta PO. Assim, $|PO| = |\overline{P}O|$. Por exemplo, na Figura 2.4, a operação leva o ponto P da figura ao ponto $\overline{P}$ e o ponto Q ao $\overline{Q}$ (ambos pontos quaisquer da figura).

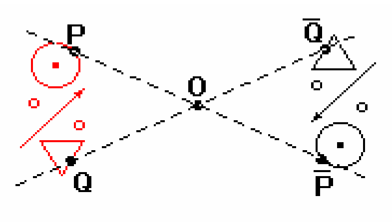


Figura 2.4 - Reflexão de ponto

- *Reflexão deslizante:* Essa simetria é uma combinação de uma reflexão seguida de uma translação paralela ao espelho. Exemplifica-se uma reflexão deslizante desenhando um espelho, chamado **LINHA DESLIZANTE** com uma seta tracejada ao lado para indicar a direção de translação. O fato de a figura inicial e a figura final se encontrarem à mesma distância da linha deslizante, deixa claro a semelhança entre as simetrias reflexão de espelho e reflexão deslizante.

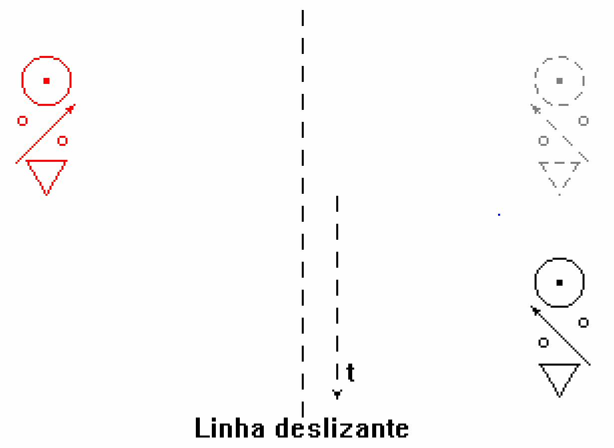


Figura 2.5 - Reflexão deslizante

Percebe-se que a figura tracejada não faz parte da reflexão deslizante, ela apenas ajuda, como um esboço, a desenhar corretamente a figura desejada.

Portanto, essas SIMETRIAS OU MOVIMENTOS PERMITIDOS são todas as maneiras possíveis de deslocar uma figura, ou seja, para cima/baixo, para a esquerda/direita, ou algumas combinações dessas direções, de modo que a figura pareça exatamente a mesma antes e depois do movimento. A maneira aleatória de mover todos os pontos do plano de modo que a distância e a posição relativa dos pontos permaneça a mesma é chamada de MOVIMENTO RÍGIDO.

Logo, tem-se os movimentos rígidos e suas combinações de simetrias, combinações estas, identificadas como composição de funções, devido ao fato de se aplicar primeiro uma simetria e depois a outra e também pelo fato das simetrias serem identificadas como funções que deslocam pontos no plano seguindo um padrão definido.

Exemplos:

1) Translação: t: Plano $\rightarrow$ Plano

$$F \rightarrow F + d$$

Cada ponto F da figura A é deslocado de uma distância *d*, na mesma direção. A translação depende da distância *d* e da direção definida.

2) Rotação: r: Plano $\rightarrow$ Plano

$$F \rightarrow F(\phi)$$

Cada ponto F da figura A é rotacionado de um ângulo ϕ a partir de um ponto fixo (centro de rotação). A rotação depende do centro de rotação e do ângulo.

3) Composição: $r \circ t$: Plano$\rightarrow$ Plano

$$F \rightarrow r \circ t\,(F) = r\,(t\,(F))$$

A composta $r \circ t$, rotaciona de um ângulo ϕ a figura transladada.

Os movimentos rígidos podem ser classificados como:

a) *Movimentos rígidos simples:*

- Translação, Rotação, Reflexão de espelho, Reflexão de ponto e Reflexão deslizante (já visto anteriormente)

b) *Movimentos rígidos combinados.* <u>Exemplos</u>:

- Translação seguida de outra translação.

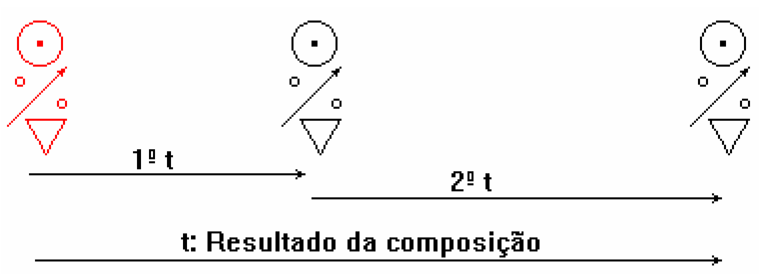


Figura 2.6 - Translação seguida de uma outra translação

- Translação seguida de uma rotação.

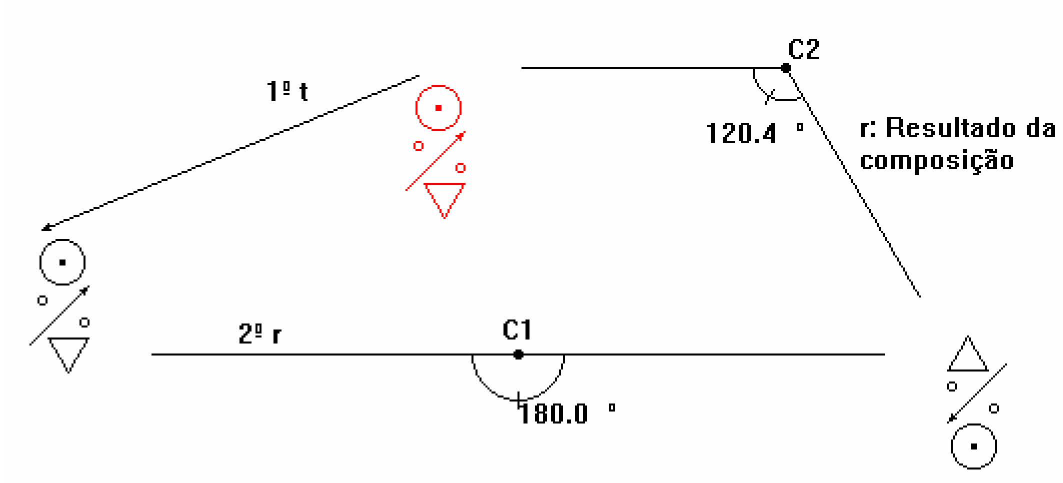


Figura 2.7 - Translação seguida de uma rotação

- Rotação seguida de uma translação.

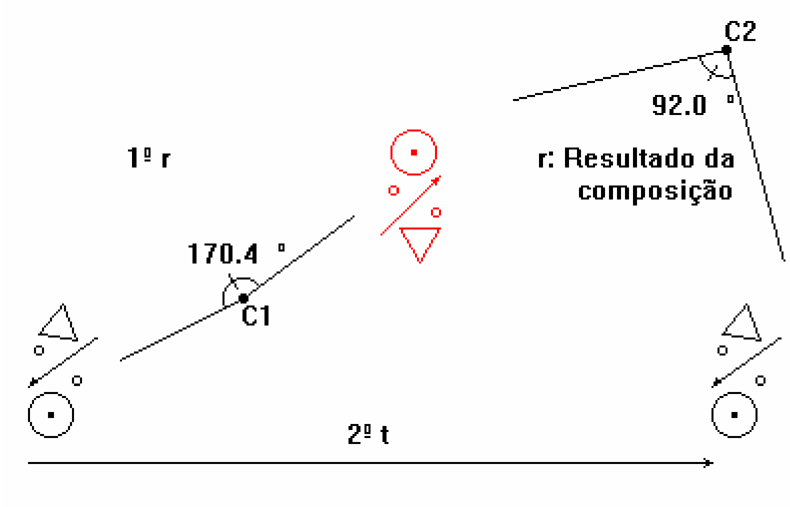


Figura 2.8 - Rotação seguida de uma translação

- Rotação seguida de outra rotação.

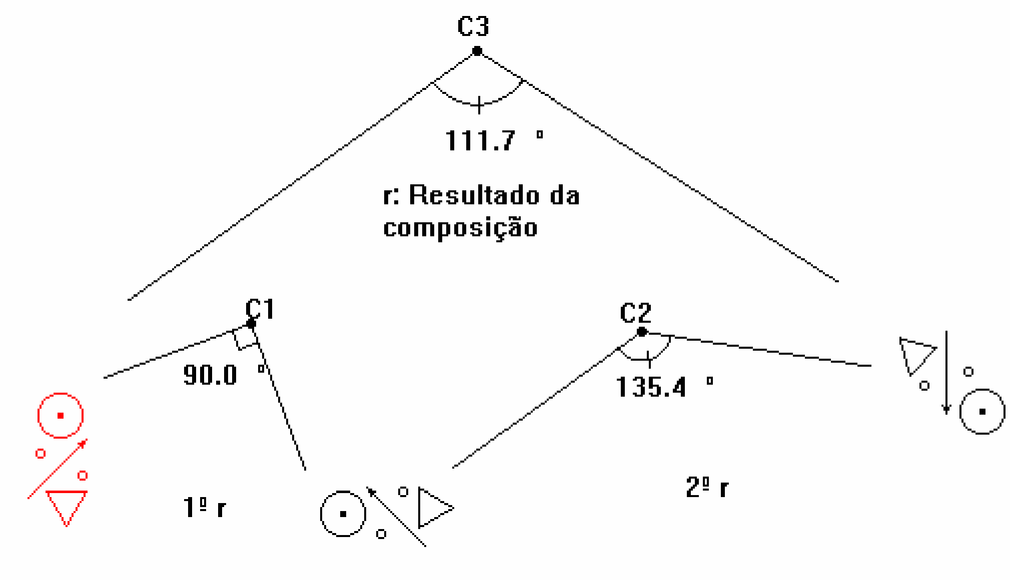


Figura 2.9 - Rotação seguida de outra rotação

- Reflexão seguida de outra reflexão. (Espelhos paralelos, m1 e m2)

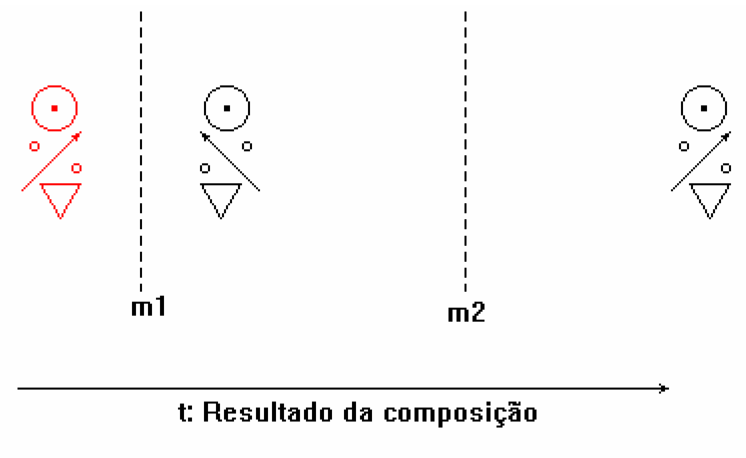


Figura 2.10 - Reflexão seguida de outra reflexão (Espelhos Paralelos)

Observe que o resultado da composição é uma translação.

- Reflexão seguida de outra reflexão. (Espelhos concorrentes na medida que são prolongados)

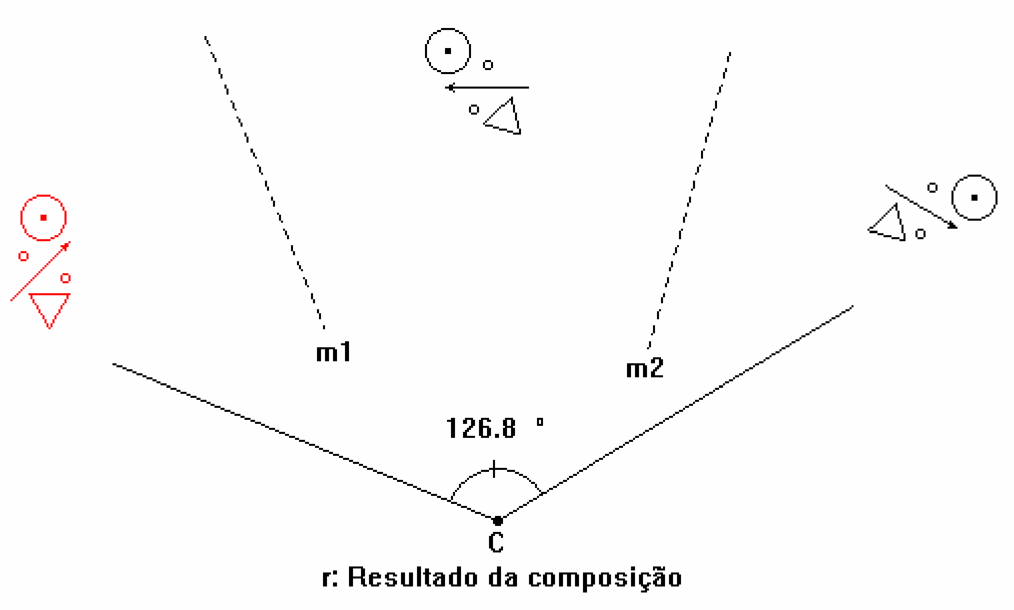


Figura 2.11 - Reflexão seguide de outra reflexão (Espelhos concorrentes)

Observe que o resultado da composição é uma rotação.

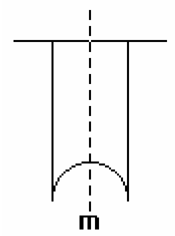
Nota 1: A operação de “não fazer nada” pode ser considerada um movimento rígido do plano que apenas leva todos os pontos para a mesma posição inicial. Será útil classificar o “não fazer nada” como uma translação de uma distância nula ou uma rotação de um ângulo nulo.

Nota 2: Um conjunto é dito fechado para a operação se o resultado desta operação estiver novamente dentro do conjunto. Por exemplo: o conjunto de translações e rotações “é fechado”, ou seja, uma translação ou rotação após uma translação ou rotação é uma translação ou uma rotação. Vale ressaltar que o estudo aqui será realizado apenas com este tipo de conjunto, conjunto fechado de movimentos rígidos. Caso contrário estaria condenado a falhar.

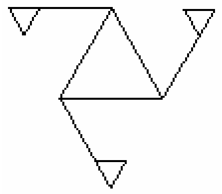
Como se percebe, uma **SIMETRIA** de uma figura é um movimento rígido que deixa a figura inicial igual a final. Dada uma figura, pode-se identificar os tipos de simetria que ela contém.

<u>Exemplos</u>:

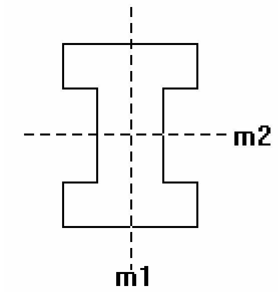
1)



2)



3)



1- Não fazer nada
2- Reflexão no espelho m

1- Não fazer nada
2- Rotação de $\frac{1}{3}$ de volta
3- Rotação de $\frac{2}{3}$ de volta

1- Não fazer nada
2- Reflexão no espelho m1
3- Reflexão no espelho m2
4- Rotação de $\frac{1}{2}$ volta

Figura 2.12 - Simetrias de figuras

Nota 3: Todas as rotações serão medidas no sentido anti-horário, uma vez que se pode ter ambigüidade. Isto já é feito em todas as figuras anteriores.

4)

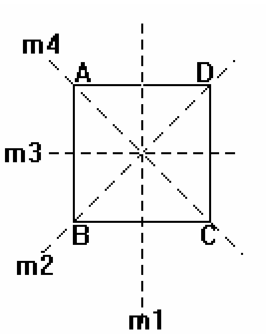


Figura 2.13 - Simetrias do quadrado- Ex: 1

1- Não fazer nada
2- Rotação de $\frac{1}{4}$ de volta
3- Rotação de $\frac{1}{2}$ de volta
4- Rotação de $\frac{3}{4}$ de volta
5- Reflexão no espelho m1
6- Reflexão no espelho m2
7- Reflexão no espelho m3
8- Reflexão no espelho m4

Nota 4: A identificação das simetrias de uma figura é única, porém podem ser descritas de formas diferentes através da composição de simetrias. Nas simetrias do quadrado, podemos identificar a reflexão no espelho m3 (A vai em B e D em C) como uma rotação de $\frac{1}{4}$ de volta seguida de uma reflexão no espelho m2.

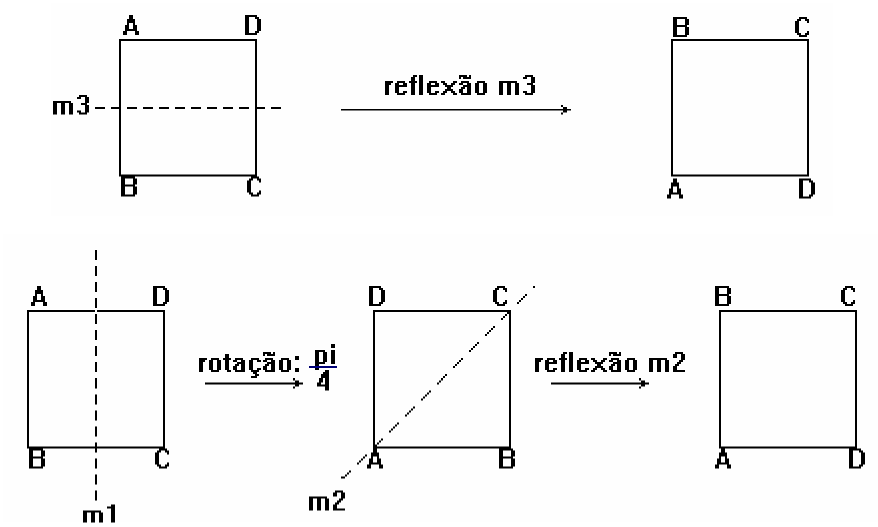


Figura 2.14 - Composição de simetrias- Ex: 1

<u>Notações</u>:

- *e* é a simetria de não fazer nada e também será chamada como "simetria trivial".
- r é a menor simetria de rotação da figura no sentido anti-horário. Para o quadrado r é $\frac{1}{4}$ de volta, para o pentágono $\frac{1}{5}$ de volta e assim por diante.
- r^2 é como operar r duas vezes (r seguida de r), r^3 equivale a operar r três vezes e assim por diante. Por exemplo, para o quadrado, r^2 é $\frac{1}{2}$ de volta e para o hexágono $\frac{1}{3}$ de volta.;

  $r \circ r = r^2$, $r \circ (r \circ r) = r^3$, etc.
- r^{-1} é a menor simetria de rotação da figura no sentido horário. Isto é, r^{-1} é a rotação simétrica à rotação r, r^{-2} é a rotação simétrica à rotação r^2 e assim por diante. Observe-se que $r \circ r^{-1} = e$ $r^2 \circ r^{-2} = e$, etc.
- m é a simetria de reflexão de espelho da figura. (Normalmente é necessário fazer um desenho para mostrar que reflexão de espelho se tem em mente)
- rm é a simetria de reflexão de espelho seguida de uma rotação. Significa aplicar uma rotação numa figura que já foi refletida. Portanto, as combinações de simetrias são lidas da direita para a esquerda, como a composição de funções.

3.2 - O conjunto das simetrias de uma figura como um grupo

Simplificando e resumindo o que foi descrito no sub-item anterior, tem-se:

- Dada uma figura plana, pode-se identificar suas simetrias;
- Estas simetrias se identificam com um conjunto de funções;
- É possível operar estas simetrias (funções), segundo a operação composição de funções;
- A operação composição de funções é fechada no conjunto das simetrias da figura;
- Para cada simetria existe também uma simetria inversa.

Por exemplo, nas simetrias do quadrado, se r é a simetria de rotação de $\frac{1}{4}$ de volta, r^{-1} é a simetria de rotação de $\frac{3}{4}$ de volta:

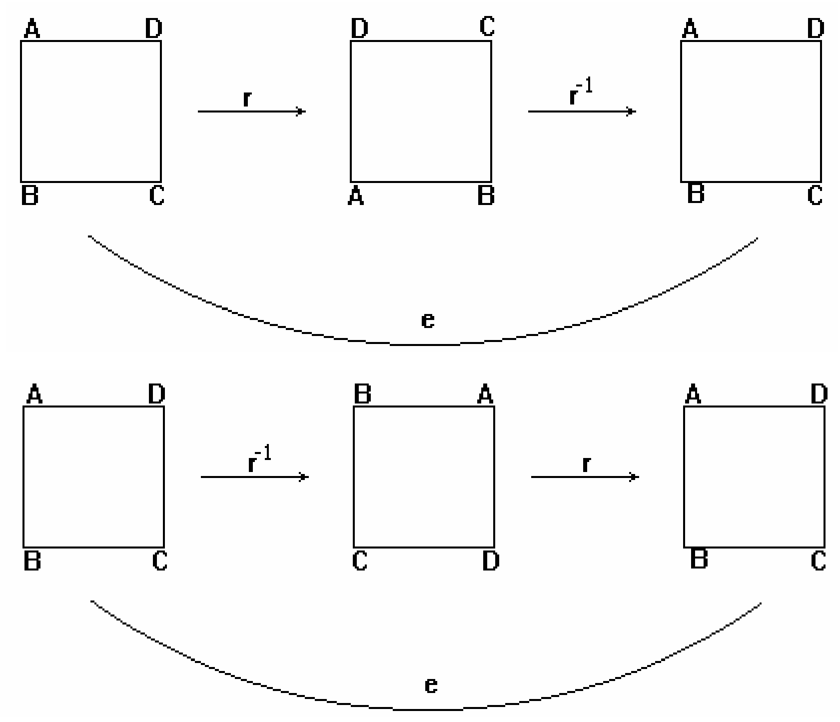


Figura 2.15 - Composição de simetrias - Ex 2

Isto sugere a idéia de uma “estrutura”: um conjunto (simetrias) equipado com uma operação (composição), com algumas propriedades específicas em relação à esta operação. Com as propriedades abaixo citadas pode-se verificar que o conjunto de simetrias de uma figura é um **GRUPO**.

Um **GRUPO** consiste num conjunto não vazio G, equipado com uma operação, que goza das seguintes propriedades:

G1) Associativa: $\forall$ a, b e c$\in$G, $a * (b * c) = (a * b) * c$

G2) Elemento Neutro: $\exists\, e \in G$ / $a * e = a$ e $e * a = a$, $\forall$ a $\in$G

G3) Elemento Simétrico: $\forall$ a $\in$ G, $\exists$ a'$\in$ G / $a * a' = a' * a = e$

Notemos que a composição de simetrias é também um simetria e portanto, a composição de função é uma operação no conjunto das simetrias. Considerando o conjunto $S \neq \varnothing$ (pois $e \in S$) das simetrias de uma figura, equipado da operação composição de funções, verificam-se as propriedades anteriores.

G1) Se verifica, pois a operação composição de função é associativa.

<u>De fato</u>:

$f: A \to A$, $g: A \to A$, $h: A \to A$ (A, um conjunto não vazio)

$[f \circ (g \circ h)](x) =$ | $[(f \circ g) \circ h](x) =$
$f[(g \circ h)(x)] =$ | $(f \circ g)(h(x)) =$
$f(g(h(x)))$ | $f(g(h(x)))$

Logo, vale a associativa na composição de funções, em particular vale para àquelas que são simetrias.

G2) Se verifica, pois e é a simetria "não fazer nada" ($e \circ f = f$ e $f \circ e = f$)

G3) Se verifica, pois para cada simetria existe a simetria inversa, que ainda é uma das simetrias da figura.

Assim o conjunto das simetrias de uma figura, equipado com a operação composição de funções tem estrutura de GRUPO. Como tal, goza ainda das seguintes propriedades de grupo:

<u>PROPOSIÇÃO 1</u>: Seja $(G, *)$, um grupo. Então:

(1) O elemento neutro de $(G, *)$ é único.

<u>De fato</u>: Sejam e, e' elementos neutros de $(G, *)$.

Então, $\forall$ x $\in$ G temos;

$$x * e = x \quad e \quad e * x = x \quad (1)$$
$$x * e' = x \quad e \quad e' * x = x \quad (2)$$

Logo, por (1) tomando $x = e'$, temos que, $e' * e = e'$ e por (2) tomando $x = e$, obtemos que $e * e' = e$

Portanto, $e = e'$

(2) Existe um único simétrico para cada elemento s $\in$ G.

<u>De fato</u>: Sejam s, s' simétricos de s.

$$s * s' = e \quad e \quad s' * s = e$$
$$s * s'' = e \quad e \quad s'' * s = e$$

Logo, $s' = s' * e = s' * (s * s'') = (s' * s) * s'' = e * s'' = s''$

(3) Indicando por x' o simétrico de um elemento genérico x $\in$ G:

$(\forall\, a, b)\ (a, b \in G \Rightarrow (a * b)' = b' * a')$.

<u>De fato</u>:

$$(a * b) * (b' * a') = a * (b * b') * a' = a * e * a' = a * a' = e$$

Assim como,

$$(b' * a') * (a * b) = b' * (a' * a) * b = b' * e * b = b' * b = e$$

Assim pela unicidade do simétrico segue $(a * b)' = b' * a'$.

(4) $(\forall\, a)\ (a \in G \Rightarrow (a')' = a)$

<u>De fato</u>: $a' * a = e = a * a'$.

Novamente pela unicidade do simétrico temos que $(a')' = a$.

(5) Todo elemento de G é regular em relação à operação $*$.

Obs: $x \in A$ é regular se $x * a = x * b \Rightarrow a = b$ e $a * x = b * x \Rightarrow a = b$

De fato:

$$\forall\, a, b \in G,\ x * a = x * b \Rightarrow x' * (x * a) = x' * (x * b) \Rightarrow$$

$$(x' * x) * a = (x' * x) * b \Rightarrow e * a = e * b \Rightarrow a = b$$

De modo análogo $\forall\, a, b \in G$, $a * x = b * x \Rightarrow a = b$

(6) Se $a, b \in G$, então a equação $x * a = b$, onde x é variável em G, admite uma única solução em G, a saber $b * a'$.

De fato: $b * a'$ é uma solução, pois $(b * a') * a = b * (a' * a) = b * e = b$; por outro lado se c é uma solução de $x * a = b$, então temos $c * a * a' = b * a'$, e portanto $c = b * a'$. Analogamente, podemos provar que $a * x = b$ tem uma única solução em G, a saber $a' * b$.

Os conceitos de subgrupo, grupo cíclico e ordem de um grupo também são importantes no estudo das simetrias.

Subgrupo:

Seja $(G, *)$ um grupo e H um subconjunto não vazio de $(G, *)$. Dizemos que H é um **SUBGRUPO** de G se H for ele próprio um grupo com a mesma operação $*$ de G.

Proposição 2: Seja $(G, *)$ um grupo e H um subconjunto de G. As seguintes condições são equivalentes:

a) H é um subgrupo de G.

b) (i) $e \in H$

(ii) $\forall\, a, b \in H$ tem-se $a * b \in H$

(iii) $\forall\, a \in H$ tem-se $a^{-1} \in H$.

c) $H \neq \varnothing$ e $\forall\, a, b \in H$ tem-se $(a * b)^{-1} \in H$.

Grupos Cíclicos:

Seja (G, $*$) um grupo e $S \subset G$, $S \neq \varnothing$. A família (H_i) $i \in I$ de todos os subgrupos de G que contém S é não vazia (pois $S \subset G$ e G é subgrupo de G). A intersecção $\bigcap_{i \in I} H_i$ desta família é um subgrupo de G denominado "subgrupo gerado por S".

Denotamos: $\bigcap_{i \in I} H_i = [S]$

O conjunto S é chamado de um "sistema de geradores" de [S]. Em particular:

(1) Se $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, dizemos que $a_1, a_2, ..., a_n$ são os "geradores" do subgrupo [S].

(2) Se S = {a}, então [S] = [a], sendo [a] o menor subgrupo de G que contém {a}.

Dado um grupo (G, $*$) e um elemento $a \in G$, o subgrupo [a] gerado por "a" é o conjunto das "potências" de "a" em G, ou seja,

$$a^0 = e,\ a^1 = a,\ a^2 = a * a,\ a^3 = a * a * a, ...$$

e também $a^{-1} = a'$, $a^{-2} = (a^2)'$: simétrico de $a^2 = a * a$, ... e assim por diante. Usando uma notação multiplicativa para $*$ e conseqüentemente x^{-1} para o simétrico de x, teremos $[a] = \{a^n / n \in Z\}$, com $a^{-n} = (a^n)^{-1}$, $\forall\ n \in N^*$.

<u>De fato:</u> Seja H = [a] e $H_1 = \{a^n / n \in Z\}$; H é a intersecção de todos os subgrupos de G que contém {a}. Como $e = a^0 \in H_1$, $a^n . a^m = a^{n+m}$ e $a^{-n} = (a^n)^{-1}$, temos que H_1 é subgrupo de G.

Sabemos que $a \in H_1$ (pois $a^1 = a$). Assim, H_1 é um subgrupo de G que contém "a". Logo, $H \subset H_1$ (1).

Por outro lado, como $a \in H$, toda "potência" a^n de "a" está também em H, uma vez que H é grupo (um argumento de indução finita prova isso). Além disso, como $a^{-1} \in H$, então $(a^{-1})^n = a^{-n} \in H$ pelo mesmo argumento. Assim, para todo $n \in Z$, temos $a^n \in H$, ou seja, $H_1 \subset H$ (2)

De (1) e (2) temos $H_1 = H$, ou seja, $[a] = \{a^n / n \in Z\}$

Dizemos que um grupo G é cíclico se e somente se existe $a \in G$ tal que [a] = G.

Nota1: Se existe $n \in N^*$ tal que $a^n = e$, o grupo [a] é finito.

Exemplo: $G = \{x \in \mathbb{C} \mid x^4 = 1\}$, operação multiplicação dos números complexos.

Então $G = \{1, i, -1, -i\}$ e sabemos que $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$. O elemento i gera todos os outros : G = [i], logo, G é um grupo cíclico.

Nota 2: Um grupo $(G, *)$, cuja operação $*$ é comutativa é chamado um grupo abeliano; ou seja G é abeliano se e somente se $\forall$ x, y $\in$ G, $x * y = y * x$. Como num grupo cíclico todo elemento do grupo é potência do gerador, a propriedade $a^n . a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m . a^n$, $\forall$ m, n $\in$ Z nos garante que todo grupo cíclico é abeliano.

Ordem de um Grupo:

A ordem de um grupo $(G, *)$ é o número de elementos do conjunto G, se o conjunto G for finito. Caso contrário, se o conjunto G for infinito, dizemos que o grupo $(G, *)$ é infinito.

Exemplo: **As simetrias do quadrado como um grupo**

Chamamos de K, o conjunto das simetrias do quadrado. Através da operação de composição de funções, ou seja, da tabela de multiplicação desse conjunto de simetrias, chegaremos ao fato de que se trata de um grupo. Consideramos as seguintes notações; (correspondentes a Figura 2.13).

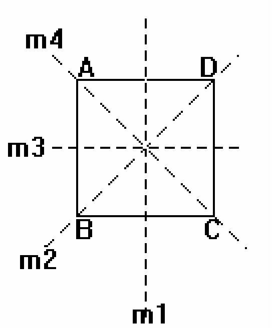


Figura 2.16 - Simetrias do quadrado- Ex: 2

1- Não fazer nada
2- Rotação de $\frac{1}{4}$ de volta
3- Rotação de $\frac{1}{2}$ de volta
4- Rotação de $\frac{3}{4}$ de volta
5- Reflexão no espelho m1
6- Reflexão no espelho m2
7- Reflexão no espelho m3
8- Reflexão no espelho m4

<u>Notações</u>:

Considera-se:

1) m, como o espelho m4.

2) Forma-padrão para escrever as simetrias.

- Não fazer nada corresponde ao *e*
- Rotação de $\frac{1}{4}$ de volta corresponde a r
- Rotação de $\frac{1}{2}$ de volta corresponde a r^2
- Rotação de $\frac{3}{4}$ de volta corresponde a r^3
- Reflexão no espelho m1 corresponde a mr (em relação ao m4)

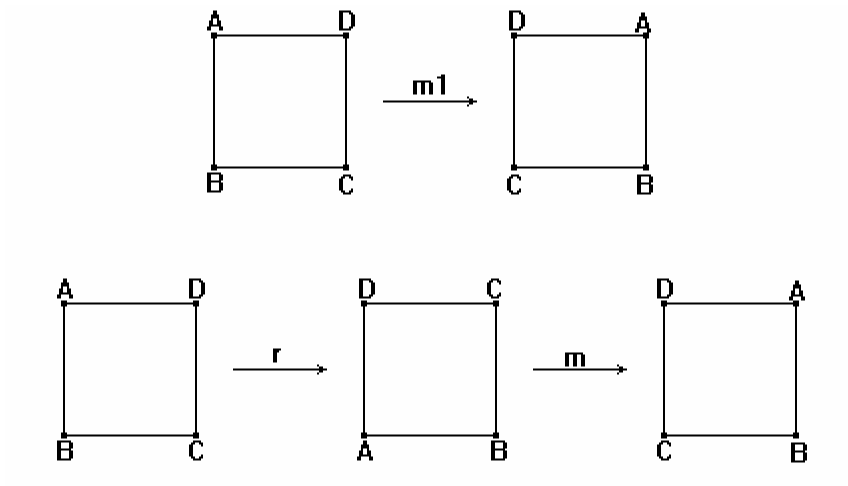


Figura 2.17 - Simetrias correspondentes

- Reflexão no espelho m2 corresponde a mr^2 (em relação ao m4)
- Reflexão no espelho m3 corresponde a mr^3 (em relação ao m4)
- Reflexão no espelho m4 corresponde a m (em relação ao m4)
- Forma-padrão para escrever as simetrias de um polígono regular, as rotações: *e*, r, r^2, etc, e as reflexões de espelho: m, mr, mr^2, etc, ou seja, m sempre à esquerda.

Exemplo:

$\square$	e	r	r^2	r^3	m	mr	mr^2	mr^3
e	e	r	r^2	r^3	m	mr	mr^2	mr^3
r	r	r^2	r^3	e	mr^3	m	mr	mr^2
r^2	r^2	r^3	e	r	mr^2	mr^3	m	mr
r^3	r^3	e	r	r^2	mr	mr^2	mr^3	m
m	m	mr	mr^2	mr^3	e	r	r^2	r^3
mr	mr	mr^2	mr^3	m	r^3	e	r	r^2
mr^2	mr^2	mr^3	m	mr	r^2	r^3	e	r
mr^3	mr^3	m	mr	mr^2	r	r^2	r^3	e

Observações:

1- Cada linha e cada coluna desta tabela estão associadas a uma simetria escrita na forma padrão, assim também como as entradas. Cada elemento da tabela representa o resultado da composição da simetria associada à linha pela simetria associada à coluna.

2- Os elementos da tabela nunca se repetem, apenas mudam de lugar.

3- A operação não é comutativa, pois mr ≠ rm = mr^3 (observe na tabela acima).

4- Qualquer elemento da tabela operado com o elemento e, resulta no próprio elemento, o que deixa claro que e é o elemento neutro do grupo.

5- Toda linha da tabela possui um elemento e, o que deixa claro a existência de elemento simétrico de cada um dos elementos.

6- Por último, a operação é associatividade nessa tabela, pois se trata de uma composição de funções. Assim o conjunto das simetrias do quadrado é um grupo com a operação composição de funções, o qual denotaremos por (K, $\circ$).

7- As rotações operadas com as rotações resultam em apenas rotações, logo, tem-se um subgrupo comutativo (R, $\circ$) de (K, $\circ$).

8- Já as reflexões operadas com as reflexões resultam em rotações, logo, o conjunto das reflexões não é um subgrupo de (K, $\circ$), pois não é fechado (também não é comutativo).

9- Para as verificações anteriores é irrelevante o fato do polígono escolhido ser um quadrado. Portanto, o conjunto de simetrias de qualquer figura sempre será um grupo.

10- Os geradores desse grupo são: r e m.

11- A ordem deste grupo é 2.4 = 8. Observe que $H_1 = \{e, r, r^2, r^3\}$ tem ordem 4 e $H_2 = \{e, m\}$ tem ordem 2.

4- GRUPO ROSETA

Neste capítulo será apresentado o que é um grupo ornamental. O estudo será restrito apenas a um tipo de grupo, o Grupo Roseta, com suas características, particularidades e respectivas relações com a teoria de grupos. Para tanto é necessário conhecer conceitos preliminares, alguns já abordados informalmente no capítulo 2.

4.1- Conceitos Importantes

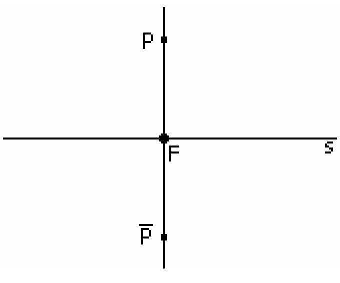
Isometria:

Uma aplicação que conserva distâncias chama-se **ISOMETRIA**, isto é, se J é uma isometria, P e Q dois pontos arbitrários e se $\overline{P}$ = J(P) e $\overline{Q}$ = J(Q), então: |PQ| = $|\overline{P}\,\overline{Q}|$.

A seguir tem-se os exemplos mais importantes de isometrias; as transformações estudadas no capítulo 3 são exemplos de isometrias. Relembrando:

- Reflexão em reta e em ponto;
- Reflexão deslizante (ou translação refletida);
- Translação;
- Rotação;

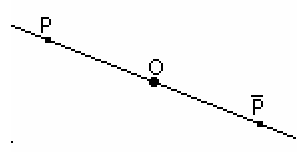
Reflexão numa reta: É a operação que leva cada ponto P ao ponto $\overline{P}$, simétrico em relação à reta s, ou seja, a reta é o eixo de reflexão (espelho). Indica-se esta operação por m_s e chama-se reflexão na reta s.



Temos: $|F\overline{P}|$ = |FP|

Figura 2.18 - Reflexão numa reta

<u>Reflexão num ponto:</u> É a operação que leva cada ponto P ao ponto $\overline{P}$, ou seja, passa-se uma reta pelo ponto arbitrário P e pelo ponto determinado O, achando assim sobre essa reta o simétrico de P em relação ao ponto O. Indica-se por $\mathbf{m_o}$.



Temos: $|PO| = |O\overline{P}|$

Figura 2.19 - Reflexão num ponto

<u>Reflexão deslizante (ou translação refletida)</u>: Esta operação chama-se translação refletida de eixo s e vetor $\vec{v}$ e indica-se por $g = (\vec{v}, s)$ com $s \mathbin{//} \vec{v}$.

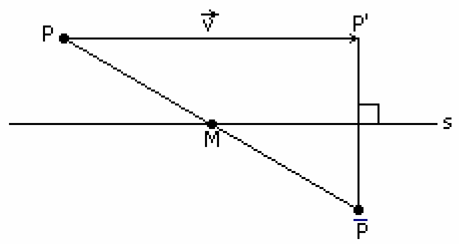
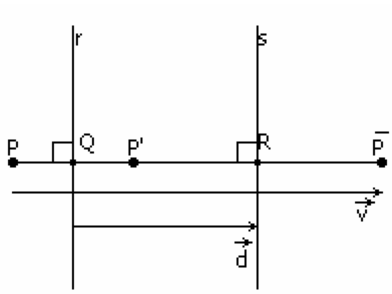


Figura 2.20 - Reflexão deslizante (ou translação refletida)

<u>Translação</u>: É a operação que leva o ponto P ao ponto P' e P' ao $\overline{P}$, ou seja, $P' = m_r(P)$, $\overline{P} = m_s(P')$ com r // s, (retas paralelas) de distância $\vec{d}$ e "Q" e "R" são as projeções ortogonais de P sobre as retas r e s. Indica-se esta operação por $t = m_s \circ m_r$



Temos: $|PQ| = |QP'|$

$|P'R| = |R\overline{P}|$

$t(P) = \overline{P}$

Figura 2.21 - Translação

Rotação: Esta operação se dá através de duas retas concorrentes, tem F como ponto fixo e ϕ um ângulo orientado. A operação leva todo ponto P $\neq$ F no ponto $\overline{P}$, tal que $(P\hat{F}\overline{P}) = \phi$ e $|FP| = |F\overline{P}|$ chama-se rotação de centro F e ângulo ϕ e é indicada por r (F, ϕ). $(P\hat{F}\overline{P} = \phi)$

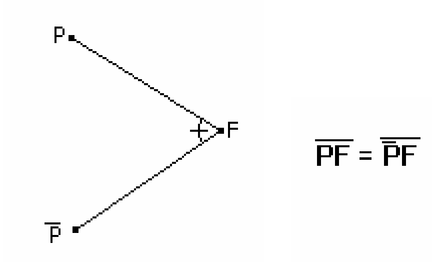


Figura 2.22 - Rotação

Trabalharemos com figuras, ou seja, com conjuntos não vazios de pontos no Plano Euclidiano "P.E" (isto é, o plano da Geometria Euclidiana); se F é uma figura no P.E., estaremos considerando o conjunto das isometrias que aplicam F sobre si mesmo, ou seja, que deixam F fixa (vide capítulo 3), as quais denominaremos de simetrias de figura F.

Grupos de Simetrias:

É o conjunto de isometrias que deixam uma figura F fixa, com a operação composição de funções.

Grupo Discreto:

Um grupo de transformações definidas no P.E. chama-se GRUPO DISCRETO se qualquer ponto do P.E. possui um conjunto discreto de imagens pelas transformações do grupo.

Exemplo: Seja $\phi = \frac{2\pi}{n}$ um ângulo orientado e F um ponto do Plano Euclidiano. O conjunto das rotações r_0(F, 0º), r_1(F, ϕ), r_2(F, 2ϕ), ..., r_{n-1}(F, (n-1)ϕ) forma um conjunto discreto em relação à composição, pois, se P é um ponto arbitrário do Plano Euclidiano, os seus pontos imagens são r_0 (P), r_1 (P), ..., r_{n-1} (P). E portanto, estes pontos são eqüidistantes e estão numa circunferência de centro F. Por exemplo; para n = 16 e $\phi = \frac{\pi}{10}$, tem-se:

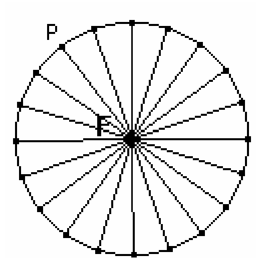


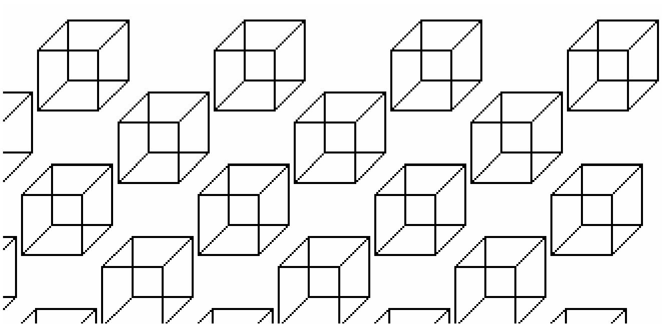
Figura 2.23 - Exemplo de Grupo Discreto

Ornamento, Grupo Ornamental:

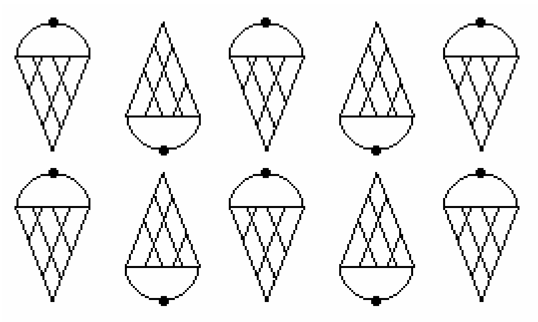
Chamamos **ORNAMENTO**, a uma figura do P.E. cujo grupo das simetrias é discreto. E ao grupo das simetrias de um ornamento damos o nome de **GRUPO ORNAMENTAL.**

Exemplos:

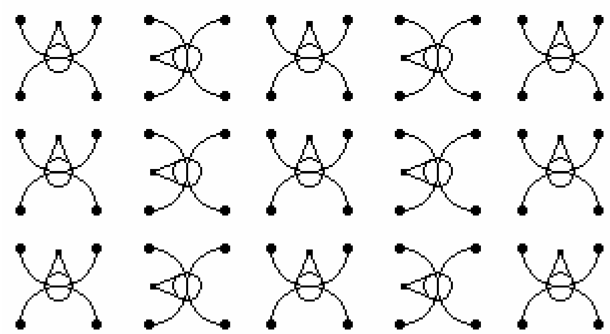
1-



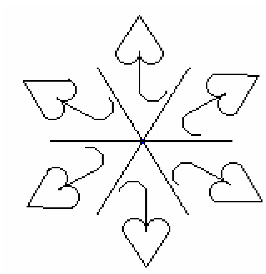
2-



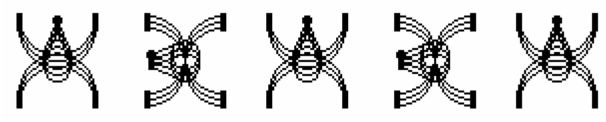
3-



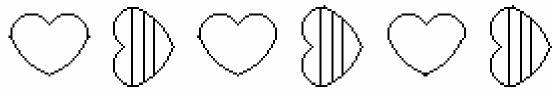
4-



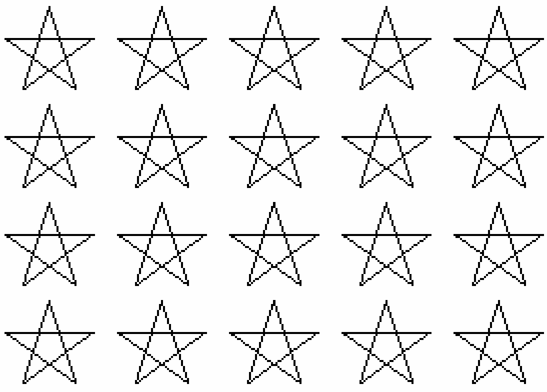
5-



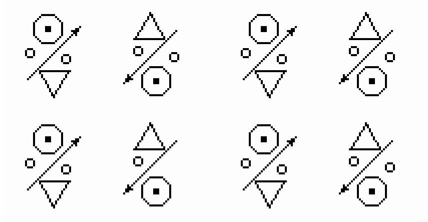
6-



7-



8-



9-

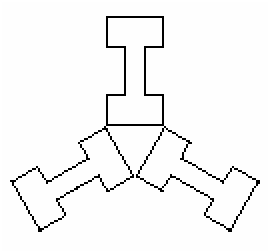


Figura 2.24 – Exemplos de ornamentos

<u>Ornamentos Equivalentes</u>:

Dois ornamentos são equivalentes se os seus grupos ornamentais contém o mesmo tipo de isometrias.

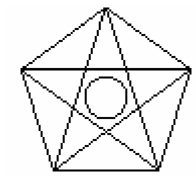
<u>Exemplos</u>: Em relação aos exemplos anteriores, os ornamentos equivalentes são: 1 e 7, 2 e 8 e 5 e 6.

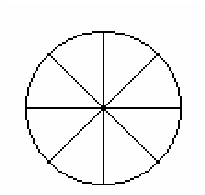
O conceito de equivalência de ornamentos define uma relação de equivalência no conjunto dos ornamentos. Segundo este conceito, têm-se três classes de ornamentos (classes de equivalência) classificados através dos tipos de isometria que seus grupos ornamentais contém:

A) <u>Grupo Roseta:</u> Grupos discretos que não possuem translações diferentes da identidade.

<u>Ex</u>:

a) b) c)





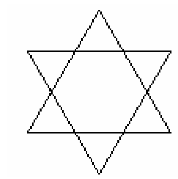
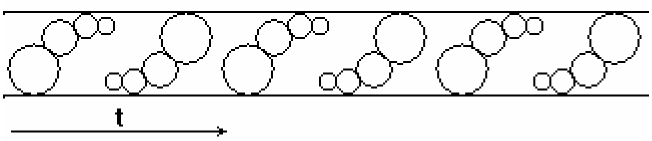


Figura 2.25 - Exemplos de Grupo Roseta

B) <u>Grupo de Fita:</u> Grupos discretos que têm translações diferentes da identidade, mas somente numa única direção.

<u>Ex</u>: a)



b)

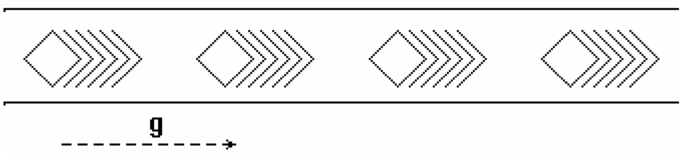
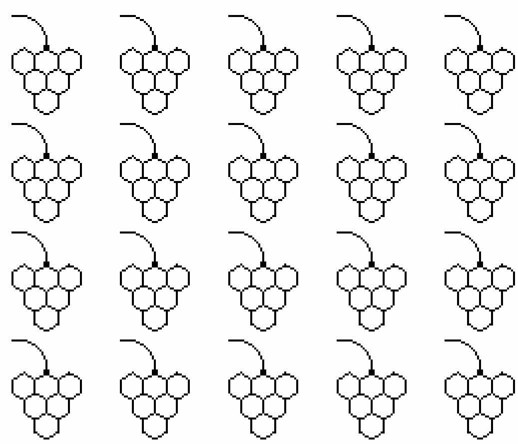


Figura 2.26 - Exemplos de Grupo de fita

C) <u>Grupo Cristalográfico de dimensão 2:</u> Grupos discretos que têm translações em duas direções diferentes.

<u>Ex</u>: a) b)



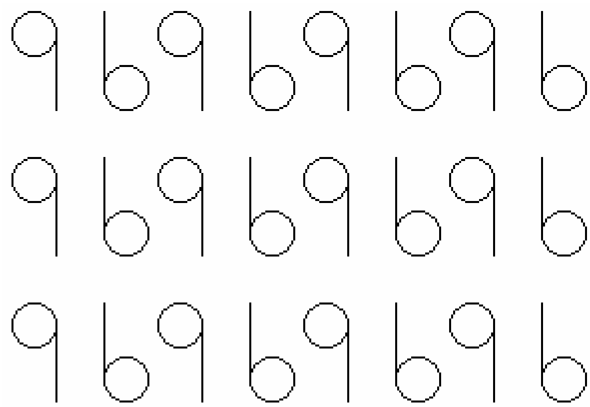


Figura 2.27 - Exemplos de Grupo Cristalográfico de dimensão 2

4.2- Grupo Roseta

O grupo roseta é o grupo discreto de isometrias que não possui translações diferentes da identidade, ou seja, não tem simetria de translação. Este grupo se classifica em dois tipos. Porém para prosseguir com o estudo destes é necessário o conceito de isometria própria e imprópria:

- *Isometria Própria:* Isometria composta de um número par de reflexões em retas.
- *Isometria Imprópria*: Isometria composta de um número ímpar de reflexões em retas.

Exemplos:

a) Isometria própria: (duas reflexões em retas)

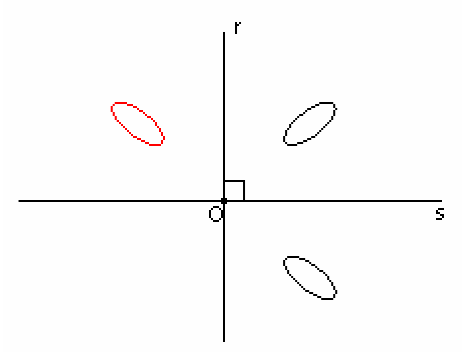


Figura 2.28 - Exemplo de isometria própria

Reflexão da elipse de cor vermelha em relação a reta r, em seguida refletir o resultado em relação a reta s. O resultado é a reflexão da elipse de cor vermelha em relação ao ponto O.

b) Isometria imprópria. (três reflexões em retas)

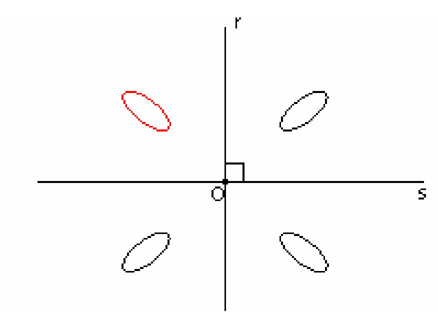


Figura 2.29 - Exemplo de isometria imprópria

Considerando o exemplo anterior, refletimos agora a elipse do 3º quadrante em relação a reta r. O resultado é a reflexão da elipse de cor vermelha em relação à reta s.

Alguns resultados importantes sobre isometrias próprias e impróprias:

TEOREMA-1: Toda isometria própria é a composta de 2 reflexões em retas e toda isometria imprópria é a composta de 3 reflexões em retas.

TEOREMA-2: A composta de duas isometrias próprias ou de duas isometrias impróprias é uma isometria própria. A composta de uma isometria própria e de uma isometria imprópria é uma isometria imprópria.

Observação importante: O conjunto de todas as isometrias se divide em 2 classes: as próprias e as impróprias. Com isto está se afirmando que toda isometria é igual a uma composta de um número par ou ímpar de reflexões em retas. E os outros tipos de isometrias, como se relacionam com as reflexões em retas? Observe a tabela abaixo:

Isometrias	**Relação das isometrias com as reflexões em retas**
Translação	Composta de duas reflexões em retas paralelas
Rotação	Composta de duas reflexões em retas concorrentes
Reflexão deslizante	Composta de uma translação seguida de uma reflexão em reta

Os Grupos Rosetas se classificam em 2 tipos:

a) Grupos Roseta contendo somente isometrias próprias, chamados ”*grupos poligonais*”.
b) Grupos Roseta contendo isometrias impróprias chamados ”*grupos diedrais*”.

4.2.1- Grupos Poligonais

Os grupos poligonais apresentam somente isometrias próprias, ou seja, isometrias determinadas por um número par de reflexões em retas. Isto significa que estes grupos contêm somente rotações, uma vez que a reflexão deslizante (composta de uma translação seguida de uma reflexão em reta) e a translação não aparecerão.

TEOREMA-3: Um grupo poligonal contém somente rotações de um único centro F.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que C seja um grupo poligonal e contenha as duas rotações $r_1(F_1, \phi_1)$ e $r_2(F_2, \phi_2)$, com $\phi_1, \phi_2 \neq 0^\circ$ e $F_1 \neq F_2$. Sabe-se que $r_2 \circ r_1 \circ r_2^{-1}$ é uma rotação r de centro $F'_1 = r_2(F_1)$

De fato: $r(F'_1) = (r_2 \circ r_1 \circ r_2^{-1})(F'_1) = r_2(r_1(r_2^{-1}(r_2(F_1)))) = r_2(r_1(F_1)) = r_2(F_1) = F'_1$

Além disso, $r = r_2 \circ r_1 \circ r_2^{-1}$ é uma rotação de ângulo $-\phi_2$, seguida da rotação de ângulo ϕ_1, seguida de outra rotação de ângulo ϕ_2 . Assim, $r_2 \circ r_1 \circ r_2^{-1}$ tem ângulo igual a: $-\phi_2 + \phi_1 + \phi_2 = \phi_1$ que pertence a C. Observamos que $F'_1 \neq F_1$, pois F_1 é distinto do centro F_2 de r_2 e $r_2 \neq I$.

Estes fatos nos permitem construir a isometria $r \circ r_1^{-1}$, que é também elemento do grupo poligonal. Mas esta composta é uma translação, uma vez que é a composta de 2 rotações de centro disdintos, cujos ângulos somam 0º.

Observamos a situação no triângulo ABC

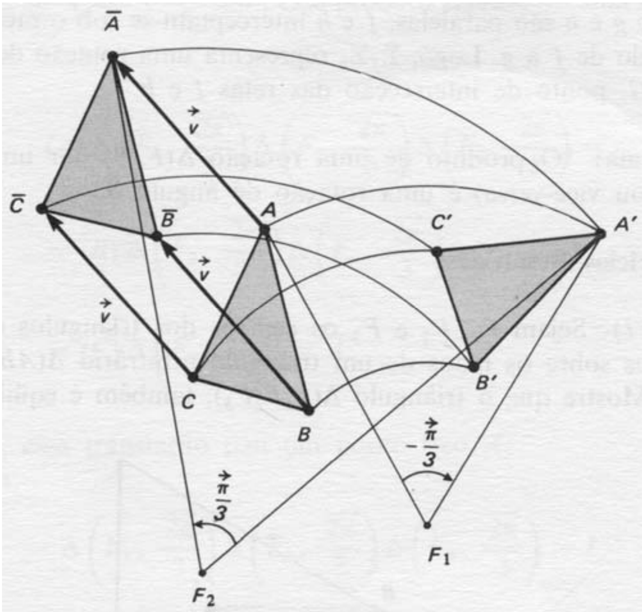


Figura 2.30 – Translação e Rotação de triângulos

Seja $\bar{F}_1 = t(F_1) = r \circ r_1^{-1}(F_1) = r(F_1)$.

$\bar{F}_1$ é diferente de F_1, pois F_1 é diferente do centro F'_1 de r, e $r \neq I$. Portanto, $t \neq I$, o que é absurdo, pois o grupo não contém translações diferentes da identidade. Logo, $F_1 = F_2$, e o grupo C contém somente rotações de um único centro F.

TEOREMA-4: Um grupo poligonal é finito.

Demonstração: Seja C um grupo poligonal e F o centro das rotações de C. Seja P um ponto arbitrário, $P \neq F$. As imagens de P, pelas rotações de C, estão numa circunferência de centro F e formam um conjunto discreto B (pois o grupo C é discreto).

Pelo teorema de Bolzano- Weierstrass; “Todo conjunto infinito, limitado, tem um ponto de acumulação.”; logo este conjunto B é finito. Pois, se um conjunto não tem ponto de acumulação então ele é finito ou ilimitado. Como B é discreto e limitado, portanto B é finito. Como uma rotação de centro F é determinada por um único ponto P ($P \neq F$) e sua imagem, a cada ponto de B corresponde uma, e somente uma, rotação do grupo C.

Logo, o grupo C contém somente um número finito de rotações.

TEOREMA-5: Todo grupo poligonal é um grupo cíclico de ordem finita n, gerado por uma rotação de ângulo $\frac{2\pi}{n}$. Este tipo de grupo é indicado por C_n.

Demostração: Seja C um grupo poligonal e F o centro das rotações de C. Seja P, P $\neq$ F, um ponto arbitrário, e sejam os pontos $P_0 = P, P_1, ..., P_{n-1}$, imagens de P pelas rotações de C, enumerados de modo que eles apareçam na ordem cíclica na circunferência que os contém:

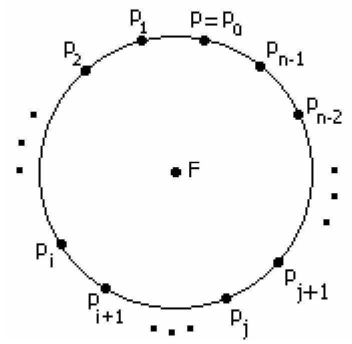


Figura 2.31 - Exemplo de Grupo Cíclico

Indicamos por r_i a rotação do grupo C que aplica P em P_i , i = 0, 1, ..., n-1. Sejam P_i e P_{i+1} dois pontos de distância minimal e ϕ o ângulo $P_i \hat{F} P_{i+1}$ (esta distância mínima existe pois o conjunto dos pontos $P_0 = P, P_1, ..., P_n$ é finito). A rotação $r = r_{i+1} \circ r_i^{-1}$ pertence ao grupo C e aplica P_i em P_{i+1}, pois

$$r(P_i) = r_{i+1} \circ r_i^{-1}(P_i) = r_{i+1}(P) = P_{i+1}.$$

Vamos mostrar que a rotação r é um gerador do grupo C. Para isso mostraremos primeiramente que os pontos $P, P_1, ..., P_{n-1}$ são eqüidistantes na circunferência de centro F.

Seja r_j uma rotação arbitrária do grupo C; $r \circ r_j$ também pertence ao grupo C, logo, existe um ponto P_s, $0 \leq s \leq n-1$, tal que $r \circ r_j(P) = P_s$ e portanto, tal que

$$(r \circ r_j)(P) = r(r_j(P) = r(P_j) = P_s$$

Os dois triângulos $P_i F P_{i+1}$ e $P_j F P_s$ são congruentes pois $|FP_i| = |FP_{i+1}| = |FP_j| = |FP_s|$ e o ângulo central é o mesmo ângulo ϕ.

<u>De fato</u>: Como $r(P_j) = P_s$ e r é a rotação de ângulo ϕ correspondente aos dois pontos da distância mínima, temos que $P_j \hat{F} P_s = \phi$

Logo, $P_s = P_{j+1}$ e $|P_i P_{i+1}| = |P_j P_{j+1}|$ e como j é arbitrário, teremos que os pontos P, $P_1, P_2, ..., P_n$ são eqüidistantes.

Ainda: $r(P_j) = P_{j+1}$ e $r \circ r_j(P_j) = P_{j+1}$, $j \equiv 0, 1, 2, ..., (n-1) \pmod n$, o que significa que $r_{j+1} = r \circ r_j$, ou seja,

$r_1 = r \circ r_0 = r \circ e = r$, ângulo ϕ

$r_2 = r \circ r_1 = r \circ r = r^2$, ângulo 2ϕ

$r_3 = r \circ r_2 = r \circ r^2 = r^3$, ângulo 3ϕ

.
.
.

$r_{n-1} = r^{n-1}$

$r_n = r \circ r_{n-1} = r^n = e$, ângulo $n\phi = 2\pi$

Logo, o ângulo ϕ é $\pm\dfrac{2\pi}{n}$ e o gerador do grupo é a rotação r de ângulo $\dfrac{2\pi}{n}$. Com isso, o grupo poligonal é cíclico, de ordem n.

Tem-se a seguir exemplos de ornamentos cujos grupos simétricos são grupos do tipo C_n, cíclicos com rotação de um ângulo $\dfrac{2\pi}{n}$.

Exemplos:

1- As figuras abaixo têm simetria de tipo $C_1 = \{e\}$

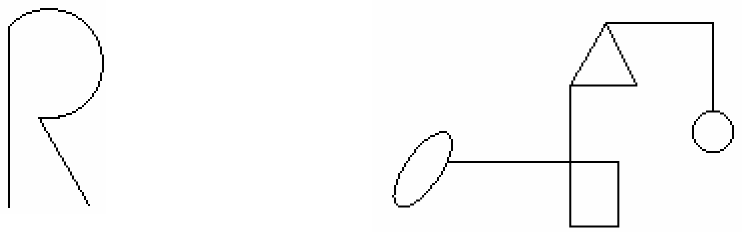


Figura 2.32 - Ornamentos do tipo C_1

Nota: Nessas figuras, de tipo C_1, o correto é dizer que contém a operação de não fazer nada como a sua única simetria, em vez de dizer que não possui simetrias; seu grupo ornamental corresponde ao grupo G = {e}

2- As figuras abaixo têm simetria de tipo C_2 :

Figura 2.33 - Ornamentos do tipo C_2

Seu grupo ornamental corresponde ao grupo G = {r, *e*}

3- As figuras abaixo têm simetria de tipo C_3 :

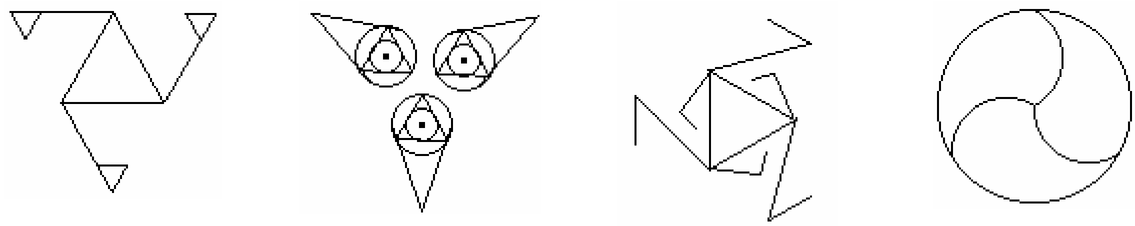


Figura 2.34 - Ornamentos do tipo C_3

Seu grupo ornamental corresponde ao grupo G = {r, r^2, *e*}

4.2.2- Grupos Diedrais

Os grupos diedrais são grupos ornamentais do tipo roseta, que apresentam além das isometrias impróprias, também as próprias; pois o produto de duas isometrias impróprias do grupo é uma isometria própria. Portanto o conjunto das isometrias próprias contidas num grupo diedral “D” forma um subgrupo de “D”. Este subgrupo é o grupo cíclico C_n, para qualquer n $\in$ N(naturais).

Se uma figura finita tem exatamente n simetrias de rotação e n simetrias de reflexão de espelho, diz-se que o grupo ornamental da figura é do tipo D_n, diedral, para qualquer n $\in$ N. Porém, vamos considerar apenas uma reflexão (vide exemplo 4, capítulo 1) e as outras reflexões serão combinações desta reflexão com as rotações.

Exemplos:

1- As figuras seguintes têm simetria de tipo D_1, uma reflexão m e uma rotação de $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$ (ângulo nulo):

Figura 2.35 - Ornamentos do tipo D_1

É comum referir-se a uma figura com simetria de tipo D_1 como tendo **SIMETRIA BILATERAL.** Seu grupo ornamental corresponde a D = {*e*,m}

2- As figuras seguintes têm simetria de tipo D_2, uma reflexão m e duas rotações de ângulo $\frac{2\pi}{2} = \pi$:

Figura 2.36 - Ornamentos do tipo D_2

Seu grupo ornamental corresponde D = {*e*, m, r, rm}

3- As figuras seguintes têm simetria de tipo D_3, uma reflexão m e três rotações de ângulo $\frac{2\pi}{3}$:

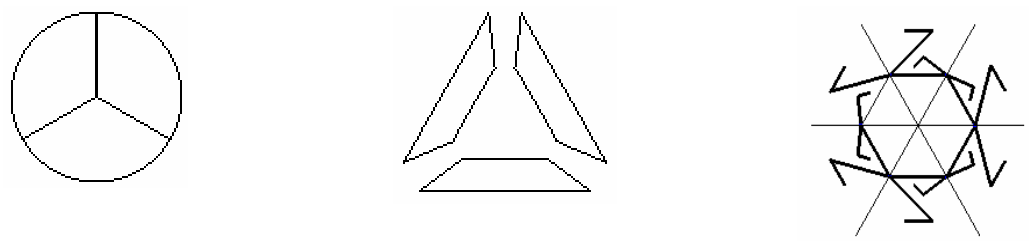
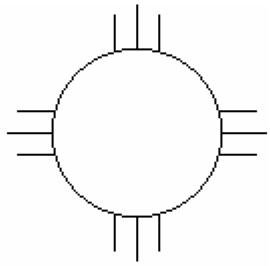


Figura 2.37 - Ornamentos do tipo D_3

Seu grupo ornamental corresponde D = {*e*, m, r, r^2, rm, r^2m}

4- As figuras seguintes têm simetria de tipo D_4, uma reflexão e quatro rotações de ângulo $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$:



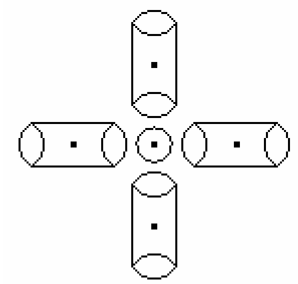


Figura 2.38 - Ornamentos do tipo D_4

Seu grupo ornamental corresponde a D = {*e*, r, r^2, r^3, m, rm, r^2m, r^3m}

Nota: Os grupos diedrais são gerados pela reflexão m e pela rotação r.

TEOREMA-6: O subgrupo das isometrias próprias de um poligono regular é um grupo cíclico C_n, gerado por uma rotação $r\left(F, \frac{2\pi}{n}\right)$.

LEMA: Toda isometria imprópria é uma reflexão deslizante (translação refletida).

TEOREMA-7: As isometrias impróprias contidas num grupo diedral são reflexões em retas que passam pelo centro das rotações do grupo.

Demonstração: Suponhamos que D seja um grupo diedral e que J $\in$ D seja uma isometria imprópria. Pelo lema anterior, J é uma reflexão deslizante g ($\vec{v}$, f) e g^2 é uma translação de vetor $(2\vec{v})$ de D. Como D não contém translações diferentes da identidade, segue $2\vec{v} = \vec{0}$ e logo, $\vec{v} = \vec{0}$ o que implica J = g (v) = m. As isometrias impróprias do grupo D são então, reflexões em retas.

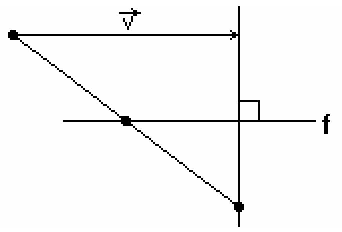


Figura 2.39 – Exemplo de isometrisa impróprias como reflexões em retas

Mostraremos agora que estas reflexões são reflexões em retas que passam pelo centro F da rotação do grupo.

Seja m_f uma reflexão de D e seja $r = r\left(F, \frac{2\pi}{n}\right) \in$ D. A transformada $m_f \circ r \circ m_f$ é uma rotação de D, de centro m_f (F). Como toda rotação de D tem o centro F, segue m_f (F) = F, isto é, F $\in$ f.

<u>TEOREMA-8</u>: Um grupo diedral contém o mesmo número de reflexões em retas como de rotações. Um grupo diedral é, portanto, um grupo finito de ordem par.

5. Aplicações

A palavra simetria encontrada nas mais diferentes formas da natureza, vivas e inanimadas sugere equilíbrio e proporção, padrão e regularidade, harmonia e beleza, ordem e perfeição. Por exemplo, temos simetria nas formas dos planetas ou

das pérolas das ostras, nos flocos de neve, nas borboletas, nas estrelas-do-mar, nos ouriços, nas criações artísticas, escultura, arquitetura, poesia, pintura, música, etc.

Figura 5.1 - Borboleta

Figura 5.2 - Tours Cathedral, France

5.1- Simetria na Resolução de Problemas

A simetria é considerada como um grande instrumento que muitas vezes facilita cálculos e conduz à previsão de novos fatos científicos. Um problema matemático geralmente consiste em um enunciado verbal, no qual resume as informações dadas. Um aspecto interessante da simetria é seu grau de visibilidade, ou seja, ela pode estar nitidamente presente na representação, poderá necessitar de alguma alteração até encontrá-la, ou ainda, pode estar oculta.

Problemas Matemáticos

Problema 1- (Exemplo de simetria nítida) O nosso "velho" conhecido quadrado mágico. (vide **Figura 5.3**). As simetrias de rotação fornecem outras representações da solução. A menos destas simetrias a solução é única.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Figura 5.3 - Quadrado Mágico

Problema 2- O objetivo do puzzle-15- (quebra-cabeça), quadrado 4 X 4 contendo peças móveis com os números de 1 a 15 e um espaço livre, é misturar os números fazendo deslizar as peças, tentando depois repô-las na ordem inicial. Um fato surpreendente é que, se pegar em duas peças e as trocar, se torna impossível resolver o puzzle. E é justamente este detalhe que pode ser analisado usando a teoria de grupos.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Figura 5.4 - Puzzle 15

Problema 3- (Exemplo de simetria em uma representação modificada) Um vídeo game mostra que a competidora deve correr de sua posição inicial de partida

A para uma mesa longa CD que está coberta com tortas de chocolate. A mesa tem 13 metros de extensão e está colocada a 5 metros de A. Após apanhar uma torta na mesa, a competidora corre para seu parceiro, que está a 8 metros da mesa, em B, e lhe esfrega a torta no rosto. Qual é a menor distância para ela poder realizar essa proeza?

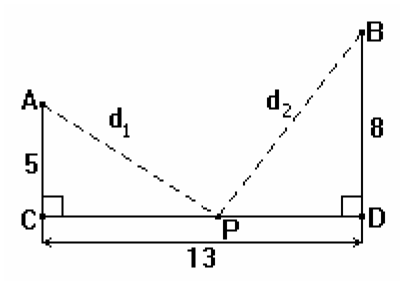


Figura 5.5 - Exemplo de simetria em uma representação modificada- Ex: 1

O cálculo fornece uma estratégia grosseira de resolução desse problema. Fazendo $x = CP$ e $y = d_1 + d_2$ na figura 5.5, temos, pelo teorema de Pitágoras, $y = \left(5^2 + x^2\right)^{\frac{1}{2}} + (8^2 + [13 - x]^2)^{\frac{1}{2}}$. Agora é questão de calcular a primeira derivada $\frac{dy}{dx}$, igualá-la a zero e resolver para x. Trata-se de um excelente exemplo de como resolver um problema sem lucidez, por meio de um procedimento algorítmico.

Uma estratégia mais interessante e que não depende do cálculo é experimentar uma abordagem de tentativa-e-erro ou uma abordagem de aproximações sucessivas. O quadro seguinte contém alguns dados deduzidos das condicionantes do problema com uma calculadora manual.

CP	PD	d_1	d_2	$d_1 + d_2$
0	13	5,000 00	15,264 34	20,264
2	11	5,385 16	13,601 47	18,986 63
4	9	6,403 12	12,041 59	18,444 71
6	7	7,810 25	10,630 15	18,440 40*
8	5	9,433 98	9,433 98	18,867 96
10	3	10,440 31	8,544 00	18,984 31
13	0	13,928 39	8,000 00	21,928 39

A quase igualdade dos valores de $d_1 + d_2$, quando se tomam 4 e 6 como medidas de CP, sugere que a aproximação seguinte poderia ser, adequadamente, CP = 5. Isso realmente gera um valor menor para $d_1 + d_2$, a saber, 18,384 78. Mas não foi provado que essa é a distância mínima, e a simetria intrínseca ao problema ainda não foi explorada.

A questão de calcular a menor distância APB pode sugerir finalmente que se transforme esse trajeto em linha reta; uma transformação que pode, certamente, ser consumada refletindo-se o ponto B em torno da reta CD, para o ponto B', simetricamente conjugado. Uma vez que tal reflexão preserva as distâncias, o comprimento do trajeto APB deve ser o mesmo do trajeto APB', e esse comprimento é minimizado pela linha reta AB', como se vê na figura 5.6. Agora é fácil notar, usando triângulos semelhantes, que CP = 5. Dessa forma, o problema original tem uma solução extremamente simples e elegante, uma vez usado o conceito de simetria; se a mesa de tortas for recoberta por um espelho, a competidora do vídeo corre na direção da imagem de seu parceiro no espelho, até poder apanhar uma torta, sem usar matemática nenhuma.

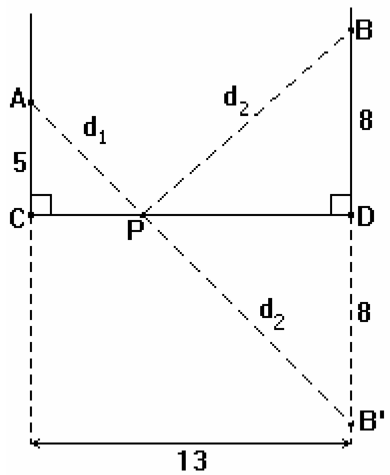


Figura 5.6 - Exemplo de simetria em uma representação modificada- Ex: 2

Essa construção pode parecer apenas um truque, mas, na verdade, é um resultado profundo, aplicável à física na determinação da trajetória de uma bola de bilhar que bate e volta ou na de um raio de luz refletido. Como conseqüência tem-se a lei de que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

A simetria pode auxiliar a resolver com lucidez problemas de álgebra e de geometria. Os dois problemas anteriores incorporaram a simetria de reflexão; o próximo problema introduzirá a simetria de rotação.

<u>Problema 4</u>: (Exemplo de simetria oculta) Calcule a soma da série infinita

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+...$$

Naturalmente, é bem sabido que se x é um número real com valor absoluto menor do que 1, a soma da progressão geométrica infinita $x + x^2 + x^3 + x^4 +...$ é igual a x/(1-x). Essa equação, ou uma como essa, aparece muitas vezes no estudo da álgebra, e espera-se que os alunos se lembrem da fórmula pelo menos até a próxima prova. Dessa forma, este problema pode ser resolvido fazendo x = ¼ na fórmula, e assim obtemos que a soma da série é 1/3. No entanto, isso certamente não é resolver um problema com lucidez. Pode a soma ser visualizada sem ser com a manipulação de símbolos algébricos?

Para x = ½, temos a série infinita relacionada $\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}\right)+....$ É possível imaginar essa soma como uma seqüência de passos que atravessam um intervalo de comprimento unitário. Percorrendo ½ do intervalo, depois ½ da distância restante e novamente ½ da distância restante, infinitamente, chega-se cada vez mais perto do extremo 1 do intervalo. Assim, a soma da série é igual a 1. Infelizmente esse método não funcionará para x = ¼. Realmente, é quase impossível para a maioria dos alunos (ou para a maioria dos professores!) imaginar o ponto limite da soma $\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{64}\right)...$ em um intervalo de comprimento unitário.

Outra maneira de proceder é chamar a soma procurada de y. Observemos que todos os termos de y figuram na soma $\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}\right)...$, que totaliza 1. Se subtrairmos esses termos de 1, o resultado é 1 - y = $\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{32}\right)+...$. Mas essa série resulta de dobrar cada termo da série cuja soma é procurada; isto é, $\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{32}\right)+...=2.\left[\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{64}\right)+...\right]$. Então, 1 – y = 2y, e y = 1/3.

Assim, obtivemos a resposta sem fazer uso da fórmula algébrica. Ademais, o fato de termos relacionado a série dada com uma mais conhecida aumentou nossa satisfação. Contudo, esse método não se generaliza para fornecer a soma de uma série como $\left(\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{25}\right)+\left(\frac{1}{125}\right)+\dots$. Logo, recomenda-se procurar outra abordagem.

Estando-se motivado pelo desejo de usar simetria, pode-se construir uma representação concreta da série infinita como na Fig. 6. Imagine três pessoas comendo um bolo. O bolo está cortado em quatro pedaços congruentes, cada pessoa pega um pedaço (1/4 do bolo) e há um pedaço sobrando. Por cortesia, ninguém quer pegar o último pedaço; assim, este é cortado em quatro pedaços congruentes. Cada pessoa pega um pedaço (¼ de ¼ ou 1/16 do bolo), deixando sobrar um pedaço que é cortado em quatro pedaços congruentes. Repete-se esse processo até que sobre uma migalha microscópica. Então cada pessoa comeu $\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{64}\right)\dots$ do bolo. Mas havia três pessoas e, pela simetria do processo, cada pessoa comeu uma quantidade igual de bolo; logo, essa quantidade deve ser $1/3$.

Facilmente se generaliza esse método para o caso de n-1 pessoas partilharem o bolo.

É importante olhar para o enunciado do problema, particularmente seus dados, para ter indícios de que a simetria pode estar presente. Aqui, o primeiro termo da série dada, ¼ , pode ser representado assimetricamente como um quarto da distância ao longo de um intervalo unitário, ou simetricamente como cada uma de quatro porções equivalentes de uma quantidade unitária. Estar predisposto para o uso de simetria estimula a última escolha, e desenvolver essa idéia leva à representação da Figura 5.7.

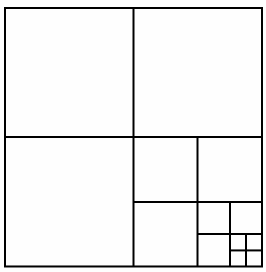


Figura 5.7 - Exemplo de simetria oculta

A importância da simetria está diretamente ligada ao fato de estar presente em muitos ramos diferentes da matemática, assim também como na física, química, música e arte.

Uma aplicação de onde a simetria é superútil é na física. Èla é vista como um importante princípio ordenador que permite a classificação de sistemas físicos. Por exemplo, a conservação da energia, do momento angular, da massa, da carga elétrica, etc; leis estas, avaliadas hoje, como manifestações de propriedades de simetria dos sistemas físicos.

A conservação de energia encontra-se associada à homogeneidade do tempo. Afirmar que o tempo é homogêneo equivale a admitir que os sistemas físicos apresentam hoje precisamente o mesmo comportamento que apresentavam ontem e que apresentarão amanhã. Em outras palavras, esse comportamento possui simetria de translação no tempo.

O estudo das relações entre leis de conservação e princípios de simetria assume uma importância crucial em física, uma vez que conduz a uma classificação natural dos fenômenos conhecidos e permite prever novos fenômenos.

A análise de certas estruturas elétricas pode ser bastante simplificada com a existência de um ou mais eixos de simetria de reflexão contidos nos seus planos, pois o cálculo das resistências equivalentes fica mais simples com a estrutura simétrica, uma vez que há superposição de equações.

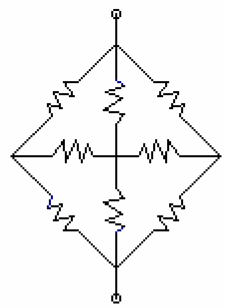


Figura 5.8 - Exemplo de estrutura elétrica simétrica

5.2. *Ilustração do Grupo Roseta no Cotidiano*

Serão exibidas algumas fotografias para mostrar onde são encontradas as simetrias e com certeza para também identificar e reconhecer sua beleza. Na arquitetura, pintura, por exemplo em azulejos, em portões de ferro de residências, enfim no nosso cotidiano, encontramos figuras, as quais podem ser classificadas como um grupo roseta.

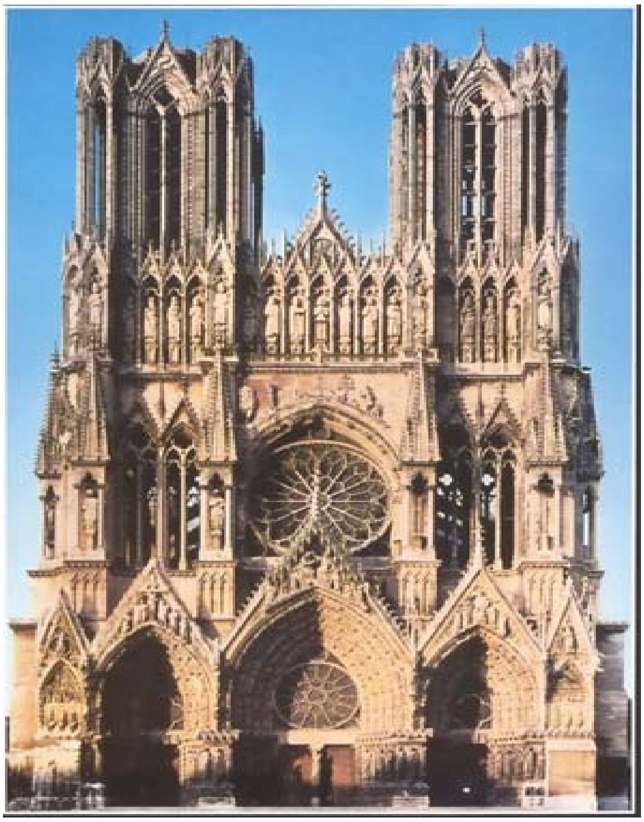


Figura 5.9 - Catedral de Reims-França
[10] pág: 131 (D_1-Diedral 1)

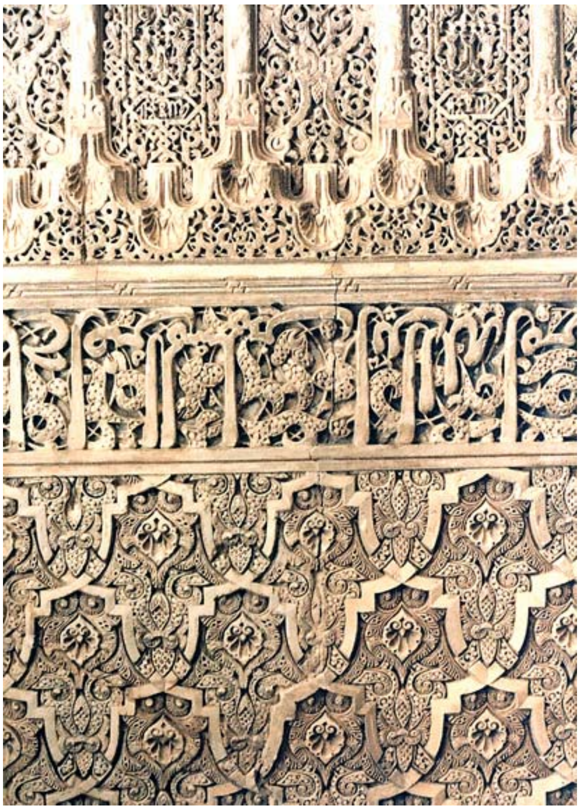


Figura 5.10 - Alhambra-Espanha
(Grupo Cristalográfico de dimensão 2)

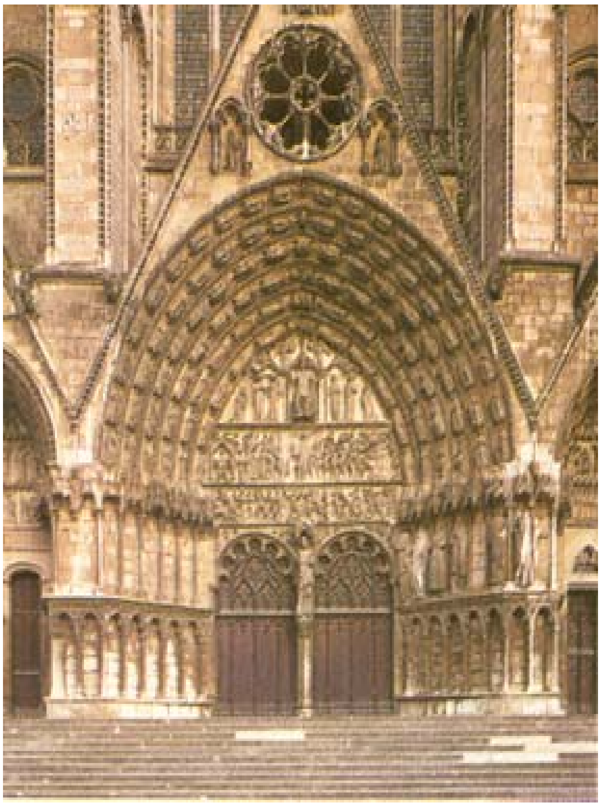


Figura 5.11 - Catedral de Bourges-França
[10] pág: 130 (D_1-Diedral 1)

Figura 5.12 - Altar lateral da Catedral de Florianópolis
(D_1-Diedral 1)

Figura 5.13 - Porta lateral da Catedral de Florianópolis
(Grupo de Fita)

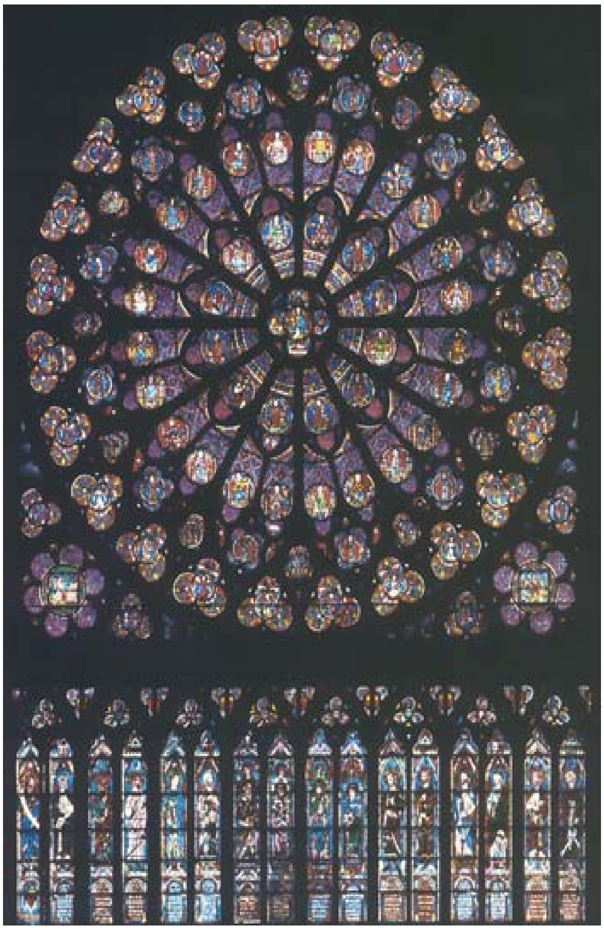


Figura 5.14 - Rosácea da Catedral de Notre Dame-França (1)
[10] pág: 137 (D_{12}-Diedral 12)

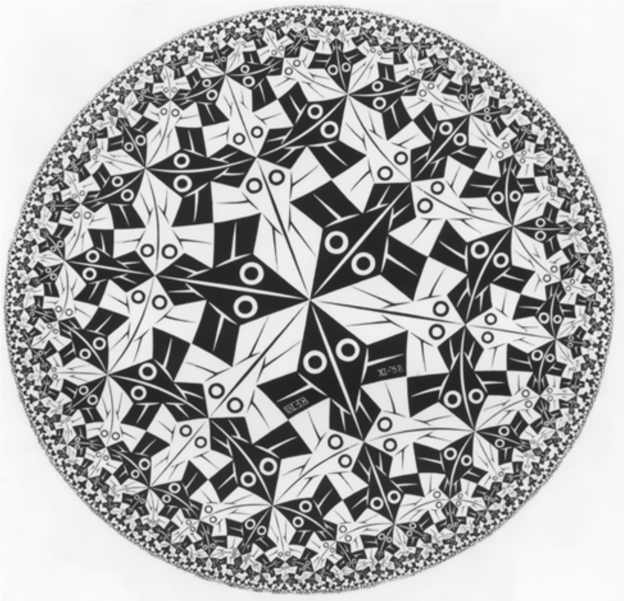


Figura 5.15- Círculo Limite I [11] pág: 22

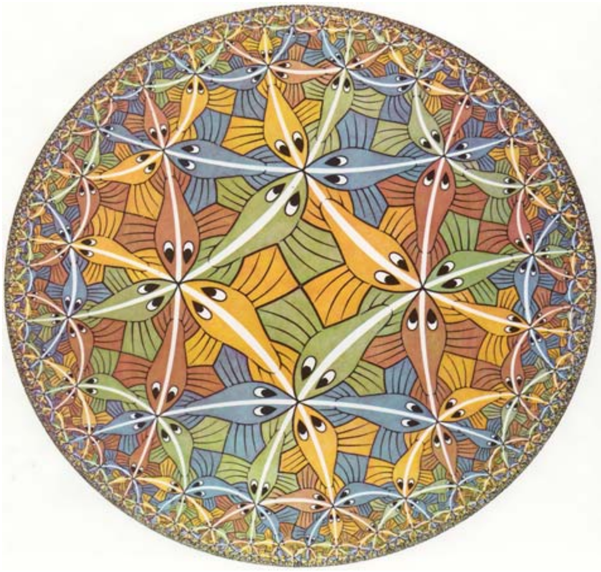


Figura 5.16- Círculo Limite III [11] pág: 24

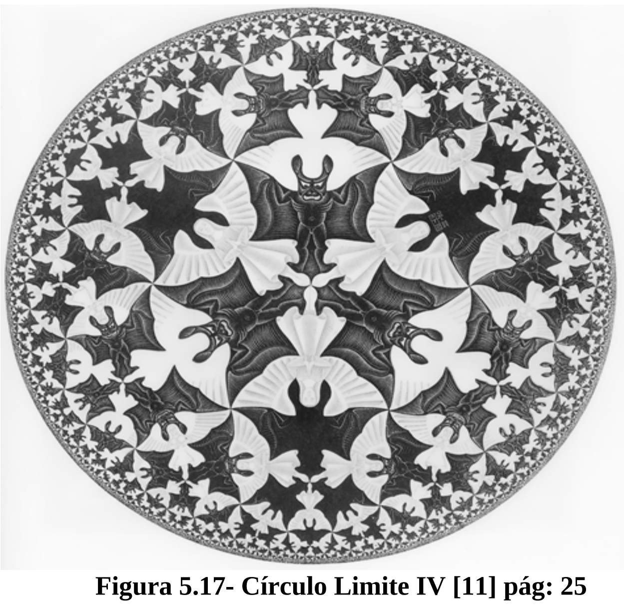


Figura 5.17- Círculo Limite IV [11] pág: 25

Figura 5.18 - Residência do bairro Trindade de Florianópolis
(Grupo de Fita onde a figura transladada (unidade básica) é um D_4-Diedral 4)

Figura 5.19- Residência do bairro Trindade de Florianópolis
(Grupo de Fita com unidade básica igual a D_1-Diedral 1)

Figura 5.20 - Residência do bairro Trindade de Florianópolis
(Grupo de Fita com unidade básica igual a D_2-Diedral 2)

Figura 5.21- Residência do bairro Trindade de Florianópolis
(Grupo de Fita com unidade básica igual a D_1-Diedral 1)

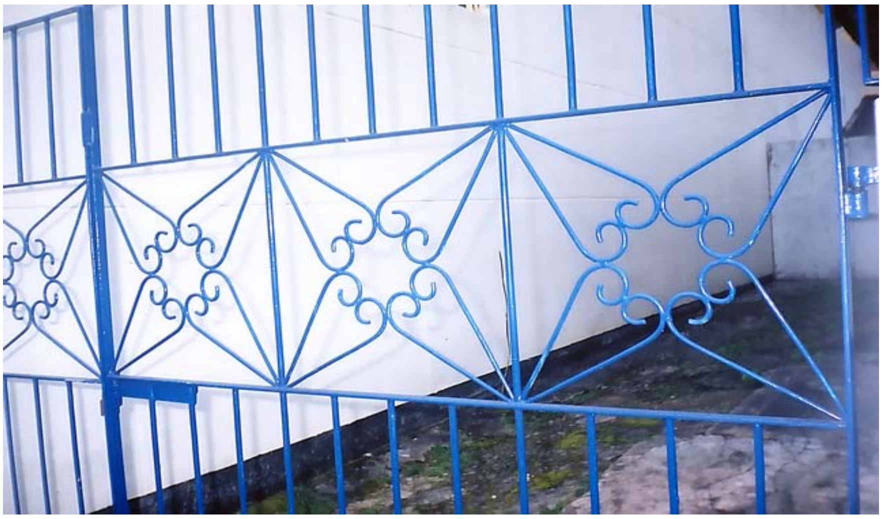


Figura 5.22 - Residência do bairro Trindade de Florianópolis
(Grupo de Fita com unidade básica igual a D_4-Diedral 4)

Figura 5.23 - Azulejo de banheiro de um apartamento
(Grupo de Fita com unidade básica igual a D_1-Diedral 1)

Figura 5.24 - Residência do bairro Trindade de Florianópolis
(D_2-Diedral 2)

Figura 5.25 - Residência do bairro Trindade de Florianópolis
(Grupo de Fita com unidade básica igual a D_1-Diedral 1)

Figura 5.26 - Parede interna da igreja matriz de Sombrio
(Grupo Cristalográfico de dimensão 2 com unidade básica igual a D_4-Diedral 4)

Figura 5.27 - Residência no centro de Sombrio
(Grupo Cristalográfico de dimesão 2 com unidade básica igual a D_4-Diedral 4)

Figura 5.28 - Rosácea da Catedral de Notre Dame-França (2)
(D_{16}- Diedral 16)

Mandalas

Mandalas são símbolos ancestrais que representam o universo e possuem um campo energético de muita força. É ilustrada frequentemente como um palácio com as quatro portas, enfrentando os quatro cantos da terra. São desenhos sagrados que abrigam, no seu interior, forças da natureza representadas no seu simbolismo perfeito.

Figura 5.29 - Mandalas [16]

Símbolos Comerciais

Mitsubishi (D_3 - Diedral 3)

Mercedez-Benz (D_3 - Diedral 3)

New Holland (D1- Diedral 1)

McDonalds (D1- Diedral 1)

Figura 5.30 - Símbolos Comerciais

6. Conclusão

Devido ao fato do currículo do curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal de Santa Catarina ter apenas uma disciplina de álgebra, surgiu o interesse de conhecer mais esta área, principalmente pela dificuldade de perceber alguma aplicação concreta da mesma.

Esta pesquisa sobre simetria e a teoria de grupos é um assunto realmente muito interessante e curioso, pois não se tendo muito conhecimento de álgebra perguntaria-se “qual a relação entre figuras simétricas ou simetrias de uma figura com a teoria de grupos?”. E neste trabalho é demonstrada a relação que existe entre ambos: um conjunto de simetrias de uma figura tem características de um grupo, ou melhor, um conjunto de simetrias de uma figura é um grupo.

O incentivo ao uso das simetrias no processo de resolução de problemas é muito importante, uma vez que as simetrias são grandes instrumentos para visualizar, esclarecer, enfim solucionar muitos problemas.

O estudo mais direcionado ao Grupo de Fita e ao Grupo Cristalográfico de dimensão 2, que por limitação de tempo não foi possível ser realizado, fica em aberto para aqueles que se apaixonarem pelo tema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BOYER, Carl Benjamin. - *História da Matemática* - Ed. Edgard Blücher Ltda, 1974, São Paulo.

[2] LEDERGERBER-RUOFF, Erika Brigitta. - *Isometrias e Ornamentos no Plano Euclidiano* - Atual Editora, 1982, São Paulo.

[3] DOMINGUES, Hygino Hugueros e IEZZI, Gelson. - *Álgebra Moderna* - Atual Editora, 2ª Edição, 1982, São Paulo.

[4] FARMER, David W. - *Grupos e Simetria* - Ed. Gradiva, 1996, Portugal.

[5] GARDING, Lars. - *Encontro com a Matemática* - Ed. UnB, 2ª Edição, 1997, Brasília.

[6] HOWARD, Eves. - *Introdução a História da Matemática* - Ed. da Unicamp, 2ª Edição, 1997, São Paulo.

[7] PROVIDÊNCIA, Natália B. - *Matemática ou mesas, cadeiras e canecas de cerveja* - Ed. Gradiva, 2000, Lisboa.

[8] ROHDE, Geraldo Mario. - *Simetria* - Hemus Editora, 1982, São Paulo.

[9] STEPHEN, Krulik e REYS, Robert E. Organizadores - *A Resolução de Problemas na Matemática Escolar* - Atual Editora, 1998, São Paulo.

[10] História em revista - *Conquistas Mongólicas 1200-1300* - Editores de Time-Life livros, Editora Cidade Cultural, 1991, Rio de Janeiro.

[11] ESCHER M. C.. - *M. C. Escher - Gravura e Desenhos* - Editora Taschen, 1994, Alemanha.

[12] Site: http:://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Development_group_theory.html - Acesso: 01/10/2002

[13] Site: http://www.eliacy.hpg.com.br/regrastcc1 - Acesso: 05/10/2002

[14] Site: http://www.mosaicos-usa.com - Acesso: 05/05/2003

[15] Site: www.furb.br/redemat/claudio/galois/galois.htm - Acesso: 18/06/2003

[16] Site: http://www.geomatrix.co.uk/sufi.html - Acesso: 18/06/2003

[17] Site: http://www.jyh.dk/indengl.htm - Acesso: 06/07/03