


MODELOS EM GEOMETRIA: ASPECTOS  
AXIOMÁTICOS E SIMETRIAS

FÁBIO MARGOTTI

1 de Março de 2007

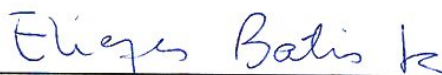
Esta Monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 14/CCM/07.

  
Prof<sup>a</sup> Carmem Suzane Comitre Gimenez  
Professora da disciplina

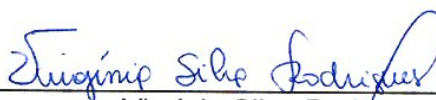
Banca Examinadora:



Ivan Pontual Costa e Silva  
Orientador



Eliezer Batista



Virgínia Silva Rodrigues

# Conteúdo

<b>AGRADECIMENTOS</b>	<b>iii</b>
<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>iv</b>
<b>I O PONTO DE VISTA CLÁSSICO</b>	<b>1</b>
<b>1 GEOMETRIA ABSTRATA</b>	<b>3</b>
1.1 O modelo vazio . . . . .	3
1.2 Geometria de 3 pontos . . . . .	4
1.3 O plano euclideo . . . . .	5
1.4 O plano hiperbólico . . . . .	7
1.5 A esfera de Riemann . . . . .	9
<b>2 GEOMETRIA DE INCIDÊNCIA</b>	<b>13</b>
<b>3 GEOMETRIA DE ORDEM</b>	<b>17</b>
<b>4 GEOMETRIA DE CONGRUÊNCIA</b>	<b>25</b>
4.1 Congruência no plano euclideo . . . . .	34
4.2 O modelo do plano racional . . . . .	36
4.3 Congruência no plano hiperbólico . . . . .	39
<b>5 GEOMETRIA DE CONTINUIDADE</b>	<b>45</b>
<b>6 GEOMETRIA EUCLIDEANA</b>	<b>52</b>
<b>7 GEOMETRIA HIPERBÓLICA</b>	<b>57</b>
<b>II O PONTO DE VISTA MODERNO</b>	<b>60</b>
<b>8 ISOMORFISMOS ENTRE MODELOS</b>	<b>62</b>
8.1 Categoricidade da geometria euclidea . . . . .	64

<b>9</b>	<b>AUTOMORFISMOS</b>	<b>70</b>
9.1	Automorfismos no plano euclideo . . . . .	75
9.1.1	Isometrias no plano euclideo . . . . .	79
9.1.2	O produto semi-direto . . . . .	81
9.2	Automorfismos no plano hiperbólico . . . . .	85
9.2.1	Transformações isométricas . . . . .	86
<b>10</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>97</b>
<b>A</b>	<b>ORDEM EM GEOMETRIA EUCLIDEANA</b>	<b>98</b>
<b>B</b>	<b>ORDEM EM GEOMETRIA HIPERBÓLICA</b>	<b>105</b>
<b>C</b>	<b>CONGRUÊNCIA EM GEOMETRIA EUCLIDEANA</b>	<b>116</b>
<b>D</b>	<b>RÉGUAS HIPERBÓLICAS</b>	<b>121</b>
D.1	Régua para uma reta do tipo II . . . . .	121
D.2	Régua para uma reta do tipo I . . . . .	122
<b>E</b>	<b>ORDENAÇÃO E BIJEÇÕES</b>	<b>123</b>
E.1	Bijeção entre os pontos de uma reta e os números reais . . . . .	123
E.1.1	A Função Comprimento . . . . .	123
E.1.2	A Função Ordenação . . . . .	124
E.2	Ordenação dos pontos de uma reta . . . . .	125
E.3	Bijeção entre os pontos de uma geometria de continuidade e o $\mathbb{R}^2$ . . . . .	131
<b>F</b>	<b>INVERSÃO</b>	<b>133</b>

# AGRADECIMENTOS

Gostaria de aqui prestar meus sinceros agradecimentos ao meu professor orientador, Dr. Ivan Pontual Costa e Silva, por toda a atenção e paciência a mim endereçadas.

Agradeço por não ter medido esforços e por ter sido tão prestativo em todos os momentos em que foi por mim solicitado. Sem sua grande ajuda, com certeza o presente trabalho não seria realizado nesse nível de detalhes e clareza.

# INTRODUÇÃO

Ao que sabemos, tudo começou com Tales (Mileto, 625 a.C. - 557 a.C.), mais tarde veio Pitágoras (Samos, 571a.C. - 497 a.C.) e então Euclides (Alexandria, 360 a.C - 295 a.C.).

Muito tempo antes de Cristo, o homem já havia formalizado grande parte de seu conhecimento geométrico com o suporte apenas da lógica, sendo que o método axiomático inventado pelos gregos, atinge seu ápice com Euclides.

Pela enorme genialidade do seu autor, durante mais de dois mil anos, o *Elementos* de Euclides reinou absoluto e somente no século XIX é que surgem rachaduras no magnífico edifício por ele construído.

O famoso *quinto postulado de Euclides*, o qual fazia uma afirmação equivalente a dizer que por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela a essa reta, era desde o início, considerado menos evidente que os quatro primeiros e durante muito tempo, matemáticos concentraram esforços para tentar demonstrá-lo sem a necessidade de colocá-lo em forma de postulado, no entanto, o máximo que conseguiram foi demonstrar a equivalência deste postulado e de algumas outras afirmações.

Surge mais tarde a idéia: seria possível provar sua negação? Ou seja, mostrar que por um ponto fora de uma reta não passa paralela alguma a essa reta ou passa mais de uma?

A primeira condição já havia sido descartada ainda nos tempos de Euclides e mesmo a segunda não pôde ser demonstrada, entretanto alguns avanços foram feitos nessa direção.

Girolamo Saccheri (Itália, 1667 - 1733) e Johann H. Lambert (Suíça, 1728 - 1777) foram dois matemáticos que dedicaram-se a tentar deduzir uma contradição assumindo a negação do quinto postulado e assumindo os quatro primeiros, porém eles conseguiram demonstrar uma série de teoremas sem chegar a contradição alguma.

Foi somente no século XIX que dois outros matemáticos conhecidos por Nikolai I. Lobachevski (Rússia, 1792 - 1856) e János Bolyai (Hungria, 1802 - 1860) desenvolveram independentemente e quase simultaneamente, uma geometria consistente assumindo os quatro primeiros postulados em conjunto com a negação do quinto postulado de Euclides, o que na prática prova a independência do quinto postulado, ou o que é o mesmo, prova que é impossível provar-se o quinto postulado de Euclides como decorrência dos quatro primeiros. Surgem então as geometrias não-euclidianas.

Tudo isso ocorreu de uma forma um tanto desorganizada e somente mais tarde, com o auxílio dos axiomas de David Hilbert (Alemanha, 1862 - 1943) para a geometria euclid-

eana, se pôde entender com mais clareza o caráter *arbitrário* dos axiomas da geometria e em particular do quinto postulado.

Hilbert desenvolveu uma teoria axiomática rigorosa para a geometria, onde cada uma das afirmações feitas deveria ser provada apenas com o apelo a axiomas, definições e teoremas previamente demonstrados.

A teoria axiomática de Hilbert dividia-se em cinco grandes grupos: axiomas de incidência, ordem, congruência, continuidade e paralelismo. Essa visão da geometria, devidamente atualizada, é tratada na primeira parte do presente trabalho e é denominada de *o ponto de vista clássico*.

Nesta primeira parte do trabalho, daremos uma definição precisa de geometria e incrementaremos ao longo do trabalho, novas estruturas, formando diferentes tipos de geometria.

Serão apresentados modelos a cada tipo de geometria, os quais servirão para obtermos uma visão mais intuitiva e para outros fins específicos que serão detalhadamente explicados no corpo do trabalho.

Dois modelos entretanto, merecerão especial atenção de nossa parte, pois servirão como “espinha dorsal” para o desenvolvimento do trabalho. O plano euclideo e o plano hiperbólico serão utilizados do início ao fim de todo o nosso percurso. Daremos uma caracterização axiomática completa desses modelos. De fato, esses dois modelos servirão para provarmos, agora na segunda parte do trabalho (denominada de *o ponto de vista moderno*), a categoricidade do conjunto de axiomas tanto da geometria euclidea quanto da hiperbólica.

Nesta segunda parte do texto, estudaremos a geometria de um ponto de vista um pouco diferente. Essa visão, desenvolvida por Felix Klein (Alemanha, 1849 - 1925), enxerga a geometria em termos de suas *simetrias*, ou transformações que preservam os objetos e relações geométricas.

Mostrar a categoricidade de uma determinada geometria é um resultado bastante importante, pois garante que dois modelos quaisquer desta geometria são isomorfos e do ponto de vista da geometria tornam-se indistinguíveis.

No espírito da visão de Klein, serão estudados os *isomorfismos entre modelos*. Também estudaremos, com certo nível de detalhes, o *grupo de automorfismos* de uma geometria, sendo este o conjunto de transformações que preservam determinadas características dentro de uma mesma geometria.

Finalmente, encontraremos as transformações que formam o grupo de automorfismos no modelo euclideo e no modelo hiperbólico, fazendo a caracterização completa desses dois modelos e indiretamente das geometrias euclideas e hiperbólicas.

## **Parte I**

# **O PONTO DE VISTA CLÁSSICO**



Faremos uma explanação nos mais diversos tipos de geometria, apresentando modelos que representam cada tipo, fazendo-se os comentários e explicações convenientes a cada modelo apresentado.

Utilizaremos uma abordagem com recursos da teoria de conjuntos. Nem todas as explicações a respeito dessa teoria serão feitas sendo que daremos ênfase apenas aos pontos mais pertinentes ao assunto.

A seguir daremos uma definição precisa do que consideraremos uma *geometria*.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>É pertinente porém explicarmos, que este trabalho trata apenas de geometrias planas.

# Capítulo 1

## GEOMETRIA ABSTRATA

**Definição 1** Uma *geometria abstrata* ou simplesmente uma *geometria* é um par ordenado  $\check{A} = (\Gamma, L)$ , onde  $\Gamma$  é um conjunto cujos elementos são chamados de **pontos** e  $L$  é uma coleção de subconjuntos de  $\Gamma$  chamados de **retas**, tais que:

A(1) Para quaisquer  $A$  e  $B$  distintos pertencentes a  $L$ , existe um elemento  $l$  de  $L$  tal que  $A$  e  $B$  pertencem a  $l$ ;

A(2) Para todo elemento  $l$  de  $L$ , existem  $A$  e  $B$  distintos pertencentes a  $L$  tais que  $A$  e  $B$  pertencem a  $l$ .

A primeira afirmação garante que dois pontos definem uma reta, enquanto que a segunda afirmação impõe a condição de que toda reta possua pelo menos dois pontos<sup>1</sup>.

Note que não está sendo imposta a condição de que dois pontos definam uma reta *unicamente*.

Diremos que um ponto  $P$  pertence a uma reta  $r$ , que  $P$  é *incidente* a  $r$  ou ainda que  $r$  *passa por*  $P$  para significar a mesma coisa.

A fim de manter um contato com a terminologia usual, chamaremos frequentemente os exemplos de geometria abstrata de *modelos de geometria* ou simplesmente de *modelos*.

### 1.1 O modelo vazio

**Proposição 1** Seja  $\Gamma = L = \emptyset$ , então o modelo  $\check{P} = (\emptyset, \emptyset)$  é uma geometria abstrata.

Demonstração:

Se a condição A(1) não fosse verdadeira, então deveriam existir  $A$  e  $B$  pertencentes a  $\emptyset$  tais que  $A$  e  $B$  não pertençam a  $l$ , para todo  $l$  pertencente a  $\emptyset$ , no entanto tais elementos obviamente não podem pertencer ao conjunto vazio e portanto a primeira condição é assegurada por vacuidade.

---

<sup>1</sup>Como deve estar claro no contexto, os termos "ponto" e "reta" são puramente formais, sem necessariamente possuir o significado intuitivo usual.

De maneira similar, garante-se a validade da segunda afirmação, pois se essa não ocorresse, teríamos que encontrar um elemento  $l$  pertencente ao segundo elemento de  $\mathbb{P}$  ( $l$  pertencente ao conjunto vazio) de tal maneira que para quaisquer  $A$  e  $B$  pertencentes a  $\emptyset$ ,  $A$  e  $B$  não pertencessem a  $l$ , mas tal elemento  $l$  com certeza não pode existir.

C.Q.D.

## 1.2 Geometria de 3 pontos

Sejam

$$\Gamma_3 = \{A, B, C\}$$

e

$$\mathbb{L}_3 = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}\}$$

Com isso, teremos a seguinte proposição:

**Proposição 2**  $\mathcal{G}_3 = (\Gamma_3, \mathbb{L}_3)$  é uma geometria abstrata (fig.1.1).

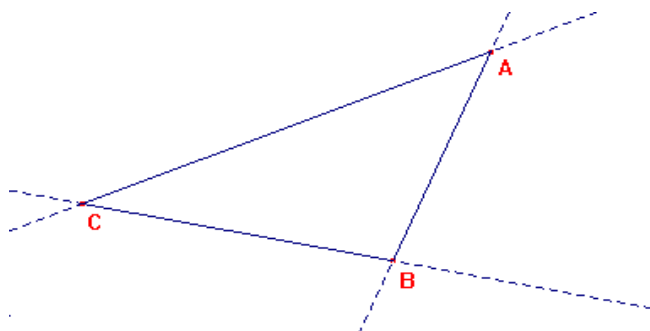


Figura 1.1: Geometria de 3 pontos

Demonstração:

$\Gamma_3$  é um conjunto e  $\mathbb{L}_3$  é uma coleção de subconjuntos de  $\Gamma_3$  como pede a definição. Além disso, vemos claramente que para quaisquer dois pontos distintos de  $\Gamma_3$  temos uma reta pertencente a  $\mathbb{L}_3$  que os contém. Conforme exige a segunda condição, vemos também que todo elemento de  $\mathbb{L}_3$  possui dois elementos de  $\Gamma_3$ .

C.Q.D.

**Definição 2** Numa geometria, dizemos que duas retas são **paralelas** se não possuem pontos comuns. Caso contrário, dizemos que estas são **concorrentes**.

Note que na geometria de três pontos não existem retas paralelas, pois as únicas 3 retas existentes nessa geometria ( $\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}$ ) possuem sempre um ponto comum quando tomadas duas a duas.

**Definição 3** *Sejam  $r \in L$  e  $P \in \Gamma : P \notin r$ . Dizemos que um modelo de geometria é uma geometria elíptica se toda reta que passar por  $P$  for concorrente a  $r$ .*

Facilmente podemos verificar que a geometria de 3 pontos e o modelo vazio são geometrias elípticas.

Vejam agora o caso de um dos dois principais modelos deste trabalho, o plano euclidiano<sup>2</sup>.

### 1.3 O plano euclidiano

Seja

$$\Gamma_E = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

e considere os seguintes subconjuntos de  $\Gamma_E$ :

$$L_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\}$$

onde  $a$  é uma constante;

$$L_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + b\}$$

onde  $m$  e  $b$  são constantes.

Defina  $L_E$  como sendo a coleção dos conjuntos da forma  $L_a$  e  $L_{m,b}$  para todos os possíveis  $a$ ,  $m$  e  $b$  pertencentes aos reais.

**Proposição 3** *O par ordenado  $\bar{E} = (\Gamma_E, L_E)$  é uma geometria abstrata (fig.1.2).*

Demonstração:

A(1) Sejam  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$ ,  $A \neq B$ . Se  $x_A = x_B = k$ , então  $A$  e  $B$  pertencem à reta  $L_k \in L_E$  e caso  $x_A \neq x_B$  tome  $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$  e  $b = y_A - mx_A$ , então teremos que  $y_A = mx_A + b$  e  $y_B = mx_B + b$ , logo  $A$  e  $B$  pertencem a reta  $L_{m,b} \in L_E$ .

A(2) Para toda reta do tipo  $L_k$ , tome os pontos  $A = (k, 1)$  e  $B = (k, 0)$ , então  $A$  e  $B$  pertencem a  $\Gamma_E$  e claramente pertencem a  $L_k$ .

Agora, para uma reta do tipo  $L_{m,b}$  considere duas situações:

Caso  $m = 0$ , teremos que  $A = (1, b)$  e  $C = (0, b)$  pertencem a  $L_{m,b}$  pois os dois pontos satisfazem a equação  $y = mx + b$  ou  $y = 0x + b = b$ .

Caso contrário, para  $m \neq 0$ , tome os pontos  $A = (0, b)$  e  $C = (-\frac{b}{m}, 0)$ . Assim, teremos que  $A$  e  $C$  pertencem a reta  $L_{m,b}$  uma vez que ambos satisfazem a equação  $y = mx + b$ .

C.Q.D.

Veja que no plano euclidiano existem retas paralelas.

---

<sup>2</sup>Este nome é dado em homenagem ao matemático grego Euclides de Alexandria (360 a.C. - 295 a.C.) que formalizou axiomáticamente em seus *Elementos*, todos os conhecimentos geométricos de sua época.

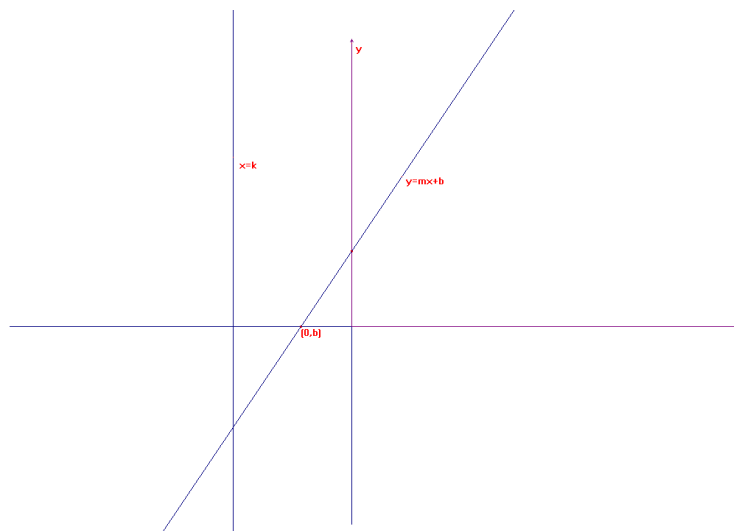


Figura 1.2: Plano Euclidiano

De fato, se considerarmos as retas  $L_1$  e  $L_2$  pertencentes a  $\mathbb{L}_E$ , vemos que estas não possuem ponto comum, já que todo ponto pertencente a reta  $L_1$  é do tipo  $(1, y)$  com  $y$  real e todo ponto pertencente a reta  $L_2$  é do tipo  $(2, z)$  com  $z$  pertencente aos reais. Assim sendo, nenhum ponto pode pertencer a  $L_1$  e  $L_2$  simultaneamente.

É importante observar que qualquer teorema a respeito da geometria abstrata deve ser provado sem qualquer apelo a modelos. Devemos demonstrá-los utilizando apenas as afirmações dadas na definição e nos axiomas  $A(1)$  e  $A(2)$ , uma vez que queremos que os teoremas sejam válidos em todos os modelos.

Os modelos têm grande importância para aplicações práticas dos mais diversos tipos de geometria, pois nos modelos, como já foi descrito acima, todos os axiomas serão válidos e por consequência os teoremas (provados apenas a partir desses axiomas) serão automaticamente mantidos para esses modelos.

Uma outra utilidade de modelos é a apresentação de *contra-exemplos*. Por exemplo, se encontrarmos um modelo de geometria abstrata onde não existam retas paralelas (é o caso da geometria de 3 pontos) podemos garantir que a partir apenas dos axiomas da geometria abstrata será impossível mostrarmos que existem retas paralelas, pois este modelo encontrado satisfaz todos os axiomas mas não possui tais tipos de retas. Como já argumentamos, os teoremas devem ser decorrência dos axiomas e valer para *todos* os modelos que satisfaçam esses axiomas.

Observação importante: Conseguimos encontrar um modelo de geometria abstrata que não possui retas paralelas (a geometria de 3 pontos, conforme argumentado acima) e um outro que possui (plano euclidiano). Com isso, vemos que os axiomas da geometria abstrata são *insuficientes* para provarmos a existência ou inexistência de tais tipos de retas.

**Definição 4** Seja  $\mathcal{G} = (\Gamma, L)$  uma geometria. Sejam  $r \in L$  e  $P \in \Gamma$  não incidente a

*r*. Diremos que  $\mathcal{G}$  é uma **geometria parabólica** se pelo ponto  $P$  passar uma única reta paralela a  $r$ .

O plano euclidiano (ou modelo euclidiano), a princípio é um modelo de geometria, enquanto que uma geometria parabólica é simplesmente uma geometria com determinada propriedade. Entretanto, veremos futuramente que o plano euclidiano é um modelo de geometria parabólica.

De um ponto de vista metodológico<sup>3</sup>, existem 3 propriedades que precisam ser analisados em qualquer conjunto de axiomas para a geometria. Elas são: *Independência*, *Consistência* e *Categoricidade*.

Um conjunto de axiomas será *independente* se for impossível provarmos qualquer um de seus axiomas a partir dos demais. Nesse caso, poderemos concluir que estamos fazendo um número mínimo de exigências, uma vez que cada uma dessas exigências tem particular importância e só é garantida através da imposição de um axioma.

Uma maneira de provarmos que um axioma é independente dos demais é exibindo um modelo no qual todos os axiomas são mantidos e outro modelo onde todos os axiomas, com exceção apenas do axioma em questão, são verdadeiros. Tal discussão será retomada com mais detalhes no decorrer do trabalho.

A *consistência* de um conjunto de axiomas diz respeito à impossibilidade de derivação de contradições, isto é, diremos que um conjunto de axiomas é *consistente* se conseguirmos provar que apenas assumindo esses axiomas é impossível deduzirmos uma afirmação e sua negação.

No nível em que trataremos nosso texto, consideraremos que um conjunto de axiomas é consistente se existir um modelo para este conjunto.

Por último, diremos que um certo conjunto de axiomas é *categorico*, se quaisquer dois modelos que satisfaçam esses axiomas forem *isomorfos*<sup>4</sup>, ou seja, se existir uma bijeção entre os pontos de cada um dos modelos de forma que todas as relações que são definidas entre os pontos do primeiro modelo, mantem-se invariantes em suas imagens no segundo modelo.

O próximo modelo será, assim como o plano euclidiano, um modelo bastante importante e será referido várias vezes no decorrer do trabalho, por isso devemos dar uma atenção especial a ele.

## 1.4 O plano hiperbólico

Seja

$$\Gamma_H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

<sup>3</sup>Esta discussão é um tanto informal. Uma discussão mais detalhada dessas questões está fora de nosso escopo.

<sup>4</sup>Discutiremos isomorfismo entre modelos na segunda parte desse trabalho.

Para definirmos  $\mathbb{L}_H$ , vejamos dois tipos especiais de retas:

$${}_aL = \{(x, y) \in \Gamma_H : x = a\}$$

onde  $a \in \mathbb{R}$  é uma constante (chamaremos este tipo de reta, de reta do tipo I);

$${}_cL_r = \{(x, y) \in \Gamma_H : (x - c)^2 + y^2 = r^2\}$$

onde  $c$  e  $r$  são números reais e  $r > 0$ . A este tipo de reta, chamaremos de reta do tipo II.

Finalmente,  $\mathbb{L}_H$  será a coleção de todas as retas do tipo  ${}_aL$  e  ${}_cL_r$ .

**Proposição 4**  $\mathbb{H} = (\Gamma_H, \mathbb{L}_H)$  é uma geometria abstrata. (fig.1.3)

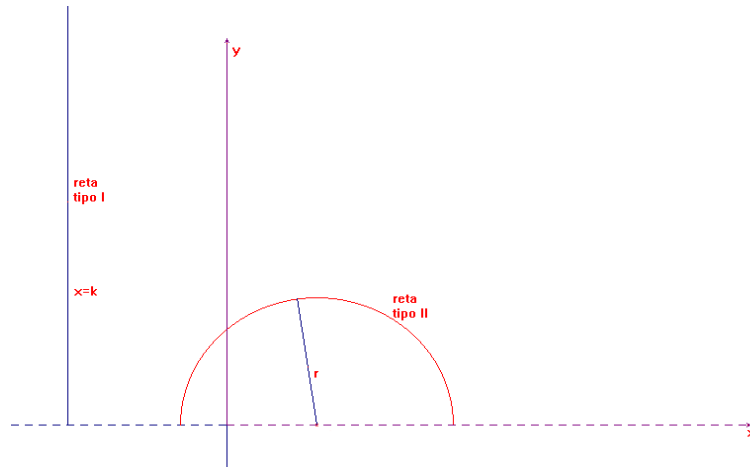


Figura 1.3: Plano Hiperbólico

Informalmente, o plano hiperbólico é a parte "superior" do plano euclidiano, suas retas são de 2 tipos que são representadas por semi-retas (no sentido euclidiano) com origem em um ponto no eixo  $x$ , todas num mesmo semi-plano  $x_A$  e por semi-circunferências (no sentido euclidiano), também contidas em  $x_A$ . Seguiremos com a verificação de que  $\mathbb{H} = (\Gamma_H, \mathbb{L}_H)$  é uma geometria abstrata.

Demonstração:

$\mathbb{L}_H$  é uma coleção de subconjuntos de  $\Gamma_H$ . Para mostrarmos que de fato  $\mathbb{H}$  é um modelo de geometria abstrata, temos que verificar os axiomas  $A(1)$  e  $A(2)$ .

Para mostrarmos  $A(1)$ , consideremos dois casos:

Sejam  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  pontos de  $\Gamma_H$ .

1º caso ( $x_A = x_B = c$ ): Nesse caso,  $A, B \in {}_cL$  pertencente a  $\mathbb{L}_H$ .

2º caso ( $x_A \neq x_B$ ): Tome então

$$c = \frac{y_B^2 - y_A^2 + x_B^2 - x_A^2}{2(x_A - x_B)} \text{ e } r = \sqrt{(x_A - c)^2 + y_A^2}$$

Com essas escolhas de  $c$  e  $r$ , podemos verificar que os pontos  $A$  e  $B$  satisfazem a equação  $(x - c)^2 + y^2 = r^2$  e portanto pertencem a reta  ${}_cL_r \in \mathbb{L}_H$ .

A afirmação  $A(2)$  é obviamente satisfeita para uma reta do tipo I. Para uma reta do tipo II ( ${}_cL_r$ ), precisaremos encontrar dois pontos  $(x, y) \in \Gamma_H$  que satisfaçam a equação  $(x - c)^2 + y^2 = r^2$ . Basta tomarmos  $y_0 < r$  uma vez que

$$y_0 < r \Rightarrow y_0^2 < r^2 \Rightarrow r^2 - y_0^2 > 0$$

com isso conseguiremos

$$(x_0 - c)^2 = r^2 - y_0^2 > 0 \Rightarrow x_0 = \pm \sqrt{r^2 - y_0^2} + c$$

e portanto os pontos

$$A = (\sqrt{r^2 - y_0^2} + c, y_0) \text{ e } B = (-\sqrt{r^2 - y_0^2} + c, y_0)$$

satisfazem a equação  $(x - c)^2 + y^2 = r^2$ , logo,  $A, B \in {}_cL_r$ .

C.Q.D.

**Definição 5** *Seja  $\mathcal{G} = (\Gamma, L)$  uma geometria. Sejam  $r \in L$  e  $P \in \Gamma$  não incidente a  $r$ . Diremos que  $\mathcal{G}$  é uma **geometria imaginária**<sup>5</sup> se pelo ponto  $P$  passar mais de uma reta paralela a  $r$ .*

O plano hiperbólico é um modelo de geometria imaginária, conforme será verificado posteriormente.

Veremos a seguir um quinto modelo de geometria abstrata, a esfera de Riemann<sup>6</sup>.

## 1.5 A esfera de Riemann

Considere o conjunto

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Apelando para conhecimentos da Geometria Analítica, vê-se que  $S^2$  é uma esfera de raio 1.

$$P_{a,b,c} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$$

onde  $a, b$  e  $c$  são constantes reais não todas nulas. Novamente pela Geometria Analítica, concluímos que  $P_{a,b,c}$  é um plano que passa pela origem do sistema.

<sup>5</sup>Normalmente nos referimos a este tipo de geometria como *geometria hiperbólica*, no entanto evitamos aqui o uso desse termo porque o mesmo será utilizada mais tarde para outro fim.

<sup>6</sup>Este nome é dado em homenagem ao matemático alemão George F. B. Riemann (1826 - 1866) que apresentou este modelo de geometria.



Considere

$$G_{a,b,c} = S^2 \cap P_{a,b,c}$$

$G$  é chamado de *grande círculo* (fig.1.4).  $L_R$  é a coleção de todos os grandes círculos existentes. Dessa maneira, temos a seguinte proposição

**Proposição 5**  $\acute{R} = (S^2, L_R)$  é uma geometria abstrata.

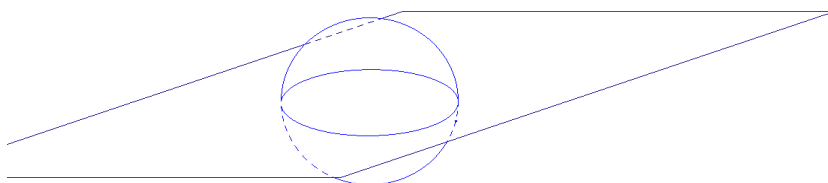


Figura 1.4: Grande círculo

Demonstração:

É claro que  $L_R$  é uma coleção de subconjuntos de  $S^2$ , pois  $L_R$  é a coleção de todos os grandes círculos, subconjuntos de  $S^2$ .

A(1) Dados  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$  distintos e pertencentes a  $S^2$ , temos que encontrar um grande círculo que passe por  $A$  e  $B$ . Para isso, pensaremos em  $\mathbb{R}^3$  como um espaço vetorial. Nesse caso, os pontos  $A$  e  $B$  representam vetores não nulos e desde que não sejam múltiplos um do outro (esse caso é tratado na observação dada abaixo) podemos encontrar um vetor normal a ambos através do produto vetorial entre eles.

Concluimos então que o vetor

$$\vec{n} = (y_A z_B - y_B z_A, x_B z_A - x_A z_B, x_A y_B - x_B y_A)$$

é normal a esses vetores e portanto, normal ao plano formado por eles em conjunto com a origem. Verifiquemos esse fato:

Os pontos  $A$  e  $B$  pertencerão ao plano

$$P_{a,b,c} : ax + by + cz = 0$$

se tomarmos  $(a, b, c) = \vec{n}$ .

De fato, a equação

$$(y_A z_B - y_B z_A)x + (x_B z_A - x_A z_B)y + (x_A y_B - x_B y_A)z = 0$$

é verificada para  $(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) = A$  e para  $(x, y, z) = (x_B, y_B, z_B) = B$ .

Concluimos então que  $A$  e  $B$  pertencem a  $P_{a,b,c}$ , e como são pontos de  $S^2$ , pertencem à interseção de  $P_{a,b,c}$  com  $S^2$ , logo, existe um grande círculo ( $G_{a,b,c}$ ) que passa por  $A$  e  $B$ .

Obs.: Caso os vetores  $A$  e  $B$  sejam múltiplos um do outro (diremos então que  $A$  e  $B$  são pontos *antipodais*), seu produto vetorial será igual ao vetor nulo e teremos que  $a = 0$ ,  $b = 0$  e  $c = 0$ , no entanto, precisamos que um desses seja diferente de zero para encontrarmos um plano bem definido.

Um plano que passe pela origem e por  $A$ , automaticamente passará por  $B$ , pois  $A$  e  $B$  são múltiplos um do outro (fig.1.5). Precisamos então encontrar um plano que passe por  $A$  e pela origem. Para isso temos que encontrar  $a$ ,  $b$  e  $c$  não todos nulos, satisfazendo a equação  $ax_A + by_A + cz_A = 0$ .

Note que o ponto  $A$  precisa ter pelo menos uma coordenada diferente de zero, pois

$$x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = 1$$

já que  $A \in S^2$ . Suponha sem perda de generalidade que  $x_A$  seja diferente de zero, então

$$a = -b \frac{y_A}{x_A} - c \frac{z_A}{x_A}$$

enquanto  $b$  e  $c$  podem assumir valores reais quaisquer e isso implicará que existe não apenas um, mas infinitos planos que passam pela origem e por  $A$  (e conseqüentemente por  $B$ ). Dessa forma, também existirão infinitos grandes círculos que passam por  $A$  e  $B$ .

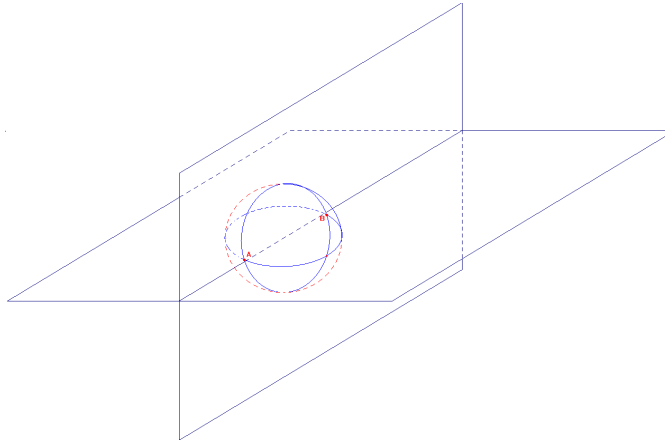


Figura 1.5:  $A$  e  $B$  são pontos antipodais

Para mostrar  $A(1)$ , precisávamos apenas encontrar um grande círculo passando por  $A$  e  $B$ , no entanto para um caso especial (onde  $A$  e  $B$  são pontos *antipodais*), encontramos infinitos grandes círculos passando por eles. Esse resultado será utilizado futuramente.

$A(2)$  Seja  $P_{a,b,c}$  um plano passando pela origem. Mostraremos que  $G_{a,b,c}$  possui dois pontos.

$$P_{a,b,c} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes não todas nulas. Suponha sem perda de generalidade, que  $a$  seja não nulo. Nesse caso temos que:

$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z$$

Como

$$G_{a,b,c} = S^2 \cap P_{a,b,c}$$

precisamos que  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Substituindo a primeira equação na segunda:

$$\left(-\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z\right)^2 + y^2 + z^2 = 1$$

e então:

$$\left(\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1\right)y^2 + \left(\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 1\right)z^2 - 2\frac{bc}{a^2}yz = 1.$$

Para  $y = 0$  a equação reduz-se para

$$\left(\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 1\right)z^2 = 1$$

logo

$$z = \pm \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 1}}.$$

Conclui-se que os dois pontos  $A = (x, y, z)$  e  $B = (x, y, -z)$  pertencem ao grande círculo  $G_{a,b,c}$  com as escolhas

$$z = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 1}}, \quad y = 0 \quad \text{e} \quad x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z = -\frac{c}{a}z.$$

C.Q.D.

Uma análise cuidadosa pode verificar que a esfera de Riemann é um modelo de geometria elíptica.

Entraremos agora numa nova parte do assunto, onde discutiremos um caso especial de geometria abstrata, o qual chamaremos de *geometria de incidência*.

## Capítulo 2

# GEOMETRIA DE INCIDÊNCIA

**Definição 6** Numa geometria, 3 pontos distintos são **colineares** se são todos incidentes a uma mesma reta. Caso contrário, eles serão **não colineares**.

**Definição 7** Seja  $\check{A} = (\Gamma, L)$  uma geometria abstrata. Diremos que  $\check{A}$  é uma **geometria de incidência** se:

*I(1)* Para quaisquer pontos  $A$  e  $B$  distintos pertencentes a  $l \in L$ , se  $A, B \in l'$ , então  $l' = l$ ;

*I(2)* Existem 3 pontos não colineares.

O axioma *I(1)* impõe que por dois pontos distintos deve passar uma *única* reta e evita situações como esta ilustrada na figura abaixo, onde duas "retas" passam pelos mesmos dois pontos.

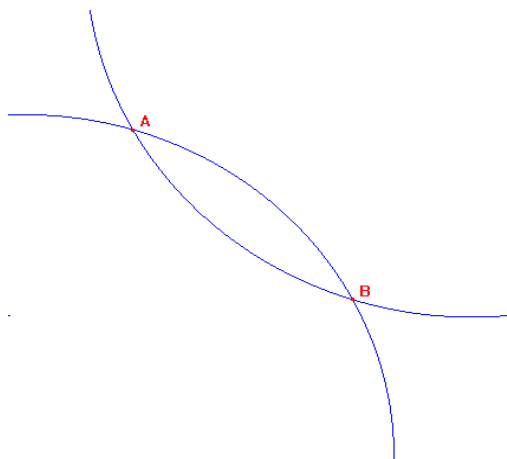


Figura 2.1:  $A$  e  $B$  definem mais de uma reta

Observe que para 3 pontos distintos serem não colineares, é suficiente que se verifique a não incidência do terceiro ponto numa reta definida pelos dois primeiros, uma vez que esta reta é única por *I(1)*.

Uma vez que por dois pontos distintos  $A$  e  $B$  passa uma única reta (axioma  $I(1)$ ) denotaremos essa reta por  $\overleftrightarrow{AB}$ . Veremos a seguir, quais dos modelos expostos anteriormente são modelos de geometria de incidência.

O modelo vazio, obviamente não pode ser um modelo de geometria de incidência, pois o axioma  $I(2)$  exige que existam 3 pontos não colineares, o que não ocorre nesse modelo onde nem se quer existem pontos.

É fácil verificar que a geometria de 3 pontos satisfaz todas as condições necessárias para ser um modelo de geometria de incidência.

Já foi observado anteriormente que na esfera de Riemann existem pontos distintos que definem mais de uma reta e portanto este modelo de geometria abstrata não é um modelo de geometria de incidência em vista do axioma  $I(1)$ . Pensando num contra-exemplo explícito, podemos pensar nos pontos *antipodais*  $A = (1, 0, 0)$  e  $B = (-1, 0, 0)$  pertencentes a  $S^2$ . Considere os planos  $P_{0,1,0}$  ( $y = 0$ ) e  $P_{0,0,1}$  ( $z = 0$ ). Os grandes círculos

$$G_{0,1,0} = S^2 \cap P_{0,1,0} = \{(x, y, z) \in S^2 : x^2 + z^2 = 1\}$$

e

$$G_{0,0,1} = S^2 \cap P_{0,0,1} = \{(x, y, z) \in S^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

contêm os pontos  $A$  e  $B$ . Portanto existem pontos na esfera de Riemann que definem mais de uma reta. (fig.1.5)

Os modelos do plano euclideano e do plano hipérbólico são modelos de geometria de incidência. Eles possuem especial importância para nosso estudo e por isso os estudaremos com maior cuidado.

**Proposição 6** *O plano euclideano é um modelo de geometria de incidência.*

Demonstração:

$I(1)$  Sejam  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  pontos distintos pertencentes a  $\Gamma_E$ . Se  $x_A = x_B = k$ , então estes pontos são incidentes a reta  $L_k$ , conforme já foi constatado anteriormente. Suponha agora que uma outra reta  $L_j$  passe por  $A$  e  $B$ . Nesse caso,  $j = x_A = x_B = k$ , donde  $L_j = L_k$ . Uma reta do tipo  $L_{m,b}$  não pode passar por  $A$  e  $B$ , pois nesse caso teríamos

$$y_A = mx_A + b = mx_B + b = y_B$$

e então  $A = B$ , o que contraria a hipótese.

Por outro lado, se  $x_A \neq x_B$ , teremos uma reta do tipo  $L_{m,b}$  que passa por  $A$  e  $B$ , conforme já foi mostrado. É óbvio que toda reta do tipo  $L_k$  não pode passar por esses pontos, uma vez que suas primeiras coordenadas são distintas. Suponha então que uma reta  $L_{c,d}$  passe por  $A$  e  $B$ . Nesse caso

$$y_A = mx_A + b \text{ e } y_B = mx_B + b$$

pois  $A$  e  $B$  são incidentes a  $L_{m,b}$ , mas então

$$b = y_B - mx_B = y_A - mx_A.$$

Com isso,

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Analogamente, seremos capazes de concluir que

$$c = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

e por consequência,  $c = m$ . Com esse resultado, obtemos  $d = b$  e então  $L_{c,d} = L_{m,b}$  e mostramos com isso, que a reta que passa por  $A$  e  $B$  é única.

*I(2)* Os pontos  $P = (1, 0)$ ,  $Q = (1, 1)$  e  $R = (2, 2)$  são três pontos não colineares pois  $P$  e  $Q$  são incidentes a reta  $L_1$ , enquanto que o ponto  $R$  não é.

C.Q.D.

**Proposição 7** *O plano hiperbólico é um modelo de geometria de incidência.*

Demonstração:

*I(1)* Sejam  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  pontos distintos pertencentes a  $\Gamma_H$ .

Se  $x_A = x_B = k$ , então já provamos que existe a reta  ${}_kL$  que passa por  $A$  e  $B$ . Mostraremos que esta é a única reta que passa por esses dois pontos. De fato, uma reta do tipo II ( ${}_cL_r$ ) não pode passar por  $A$  e  $B$ , pois nesse caso teríamos:

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 = r^2 \text{ e } (x_B - c)^2 + y_B^2 = r^2$$

e como  $x_A = x_B$ , viria que

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 = r^2 = (x_B - c)^2 + y_B^2 = (x_A - c)^2 + y_B^2$$

e então  $y_A^2 = y_B^2$  e por consequência,  $y_A = y_B$  porque  $y_A > 0$  e  $y_B > 0$ , de onde teríamos que  $A = B$ , o que leva a uma contradição. Por outro lado, se uma reta do tipo I ( ${}_mL$ ) passar por  $A$  e  $B$ , teremos  $m = x_A = x_B = k$  e então  ${}_mL = {}_kL$ .

*I(2)* Os pontos  $A = (1, 0)$ ,  $B = (1, 1)$  e  $C = (2, 1)$  são três pontos de  $\Gamma_H$  não colineares pois  $A$  e  $B$  pertencem a  ${}_1L$ , mas  $C$  não pertence.

C.Q.D.

Utilizando os axiomas de geometria abstrata e geometria de incidência, podemos demonstrar alguns teoremas básicos válidos para as geometrias de incidência.

É bom lembrar que as demonstrações dos teoremas devem ser feitas sem qualquer apelo a modelos específicos, pois queremos que estes sejam decorrência apenas dos axiomas da geometria de incidência e portanto válidos para todos os modelos deste tipo de geometria.

Pelo resto deste capítulo, suponhamos fixada arbitrariamente uma geometria de incidência a qual faremos referência nos próximos teoremas.

**Teorema 8** *Duas retas distintas são paralelas ou possuem um único ponto comum.*

Demonstração:

Se duas retas distintas não tiverem ponto comum, então serão paralelas (pela definição de reta paralela), mas se tiverem algum ponto comum, este será único, uma vez que o axioma  $I(1)$  garante que dois pontos distintos não podem ser incidentes a mais de uma reta.

C.Q.D.

Note que o único axioma usado nessa demonstração foi o  $I(1)$ , então qualquer modelo de geometria que verifique esse axioma terá a propriedade enunciada nesse teorema.

Listaremos agora, alguns teoremas da geometria de incidência mas não faremos suas demonstrações, por serem estas bastante elementares e não estarem nos objetivos do presente trabalho<sup>1</sup>.

**Teorema 9** *Para toda reta  $r$ , existe um ponto não incidente a  $r$ .*

**Teorema 10** *Para todo ponto  $P$ , existe uma reta que não passa por  $P$ .*

**Teorema 11** *Existem 3 retas distintas, não todas passando por um mesmo ponto.*

Exemplificaremos a independência dos axiomas da geometria de incidência (provaremos apenas a independência de um axioma em relação aos demais) provando que o axioma  $I(1)$  é independente de  $I(2)$  e dos axiomas de geometria abstrata.

Com efeito, a esfera de Riemann como já foi verificado, satisfaz os axiomas da geometria abstrata mas não satisfaz o axioma  $I(1)$ . Podemos também verificar que esse modelo de geometria satisfaz o axioma  $I(2)$  tomando por exemplo os pontos

$$A = (1, 0, 0), \quad B = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{e} \quad C = (0, 1, 0).$$

Vemos que os 3 pontos pertencem a  $S^2$ , uma vez que a soma dos quadrados de suas coordenadas é igual a 1, mas  $A$  e  $B$  pertencem ao plano  $P_{0,1,0}$  ( $y = 0$ ) pois possuem a segunda coordenada nula. No entanto o ponto  $C$  não pertence a esse plano porque sua segunda coordenada é diferente de zero. Com isso, concluímos que os pontos  $A$  e  $B$  são incidentes a reta  $G_{0,1,0} = S^2 \cap P_{0,1,0}$  mas  $C$  não é, portanto existem 3 pontos não colineares, conforme determina o axioma  $I(2)$ .

Iniciaremos agora uma terceira etapa do trabalho, onde discutiremos as chamadas *geometrias de ordem* que serão formadas por uma geometria de incidência munida de uma certa relação entre os pontos de suas retas.

<sup>1</sup>Se o leitor estiver interessado nestas demonstrações, poderá consegui-las na referência bibliográfica [1], que utiliza uma axiomática equivalente para a geometria de incidência.

## Capítulo 3

# GEOMETRIA DE ORDEM

Para conseguirmos uma geometria de ordem, precisaremos de uma certa noção de "ordenação" dos pontos em uma reta. Futuramente, chamaremos esta noção de "estar entre", a qual seguirá os axiomas listados abaixo, que capturam formalmente a idéia intuitiva de um ponto estar entre outros dois.

**Definição 8** *Seja  $\mathcal{I} = (\Gamma, L)$  uma geometria de incidência. Uma **relação de ordem em  $\mathcal{I}$**  (denotada por  $*$ ) é uma relação ternária no conjunto  $\Gamma$  ( $* \subset \Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ ) satisfazendo as propriedades  $O(1)$  a  $O(4)$ .*

*$O(1)$  Se  $A * B * C$ , então  $A, B$  e  $C$  são pontos distintos, colineares e  $C * B * A$ ;*

*$O(2)$  Se  $A$  e  $B$  são pontos distintos, então existe  $C$  tal que  $A * B * C$ ;*

*$O(3)$  Se  $A, B$  e  $C$  são pontos distintos e colineares, então uma e apenas uma das 3 opções ocorre:  $A * B * C$  ou  $B * A * C$  ou  $A * C * B$ .*

*$O(4)$  Axioma de Pasch (ver abaixo).*

O axioma  $O(3)$ , de certa maneira, exige que a reta não seja circular, uma vez que utilizando nossa visão intuitiva, vemos que na figura 3.1 não conseguimos decidir se  $A * B * C$ ,  $B * A * C$  ou  $A * C * B$ , pois nos parece que qualquer um dos três pontos está entre os outros dois.

Para enunciar explicitamente o quarto axioma, precisaremos de uma definição.

**Definição 9** *Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos em uma geometria de incidência  $\mathcal{I} = (\Gamma, L, *)$  onde  $*$  é uma relação ternária em  $\Gamma$  satisfazendo  $O(1)$ ,  $O(2)$  e  $O(3)$ . Chamaremos de **segmento  $AB$**  (denotado simplesmente por  $AB$ ) ao conjunto  $AB = \{C \in \Gamma : C = A \text{ ou } C = B \text{ ou } A * C * B\}$ . (fig.3.2)*

Note que pela definição e pela propriedade  $O(1)$ , temos que  $AB = BA$  e além disso,  $AB$  é um subconjunto de pontos contidos na reta  $\overleftrightarrow{AB}$ . Até aqui, não podemos concluir que o segmento  $AB$  possui pontos diferentes de  $A$  e  $B$ . Isso será provado como um teorema posteriormente e com o auxílio da quarta propriedade da relação de ordem, dada explicitamente a seguir:



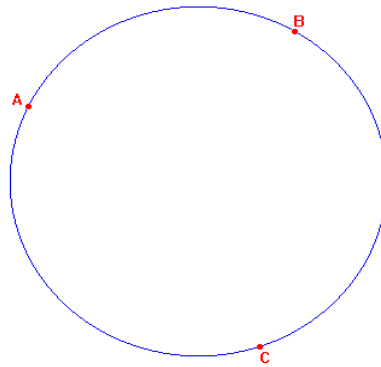


Figura 3.1: Retas "Circular"

Figura 3.2: Segmento  $AB$ 

$O(4)$  (axioma de Pasch)<sup>1</sup> Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$ , pontos distintos e não colineares e seja  $l$  uma reta que não passa por nenhum dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Se a reta  $l$  passa por algum ponto do segmento  $AB$ , então ela também passará por algum ponto do segmento  $BC$  ou do segmento  $AC$ . (fig.3.3)

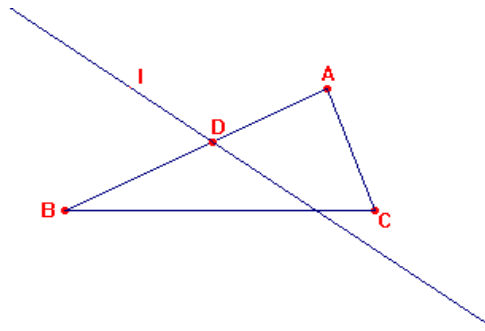


Figura 3.3: Axioma de Pasch

Repare que este axioma não exclui a possibilidade da reta  $l$  passar por um ponto do segmento  $BC$  e outro de  $AC$  simultaneamente. Isso ocorre porque podemos mostrar esse fato sem a necessidade de colocá-lo como axioma, conforme veremos posteriormente.

Na realidade, o axioma  $O(3)$  não necessita ser *tão forte*, em vista de que está exigindo mais do que realmente é necessário. Bastaria apenas exigir que uma das 3 opções ocorresse

<sup>1</sup>O axioma acima foi enunciado pela primeira vez pelo matemático alemão Moritz Pasch (1843-1931) que reparou que Euclides utilizou esse fato sem considerá-lo um axioma ou utilizar qualquer tipo de prova para demonstrá-lo.

( $A * B * C$  ou  $B * A * C$  ou  $A * C * B$ ) e o fato de que esta opção é a única, poderia ser provada em forma de teorema.

Observação: Dizemos que uma reta *intersecta* um segmento para significar que esta reta e este segmento possuem um ponto comum.

**Definição 10** *A tripla ordenada  $\mathcal{O} = (\Gamma, L, *)$  é chamada uma **geometria de ordem** se  $\mathcal{I} = (\Gamma, L)$  for uma geometria de incidência e  $*$  for uma relação de ordem em  $\mathcal{I}$ .*

Podemos demonstrar muitos fatos importantes sobre as geometrias de ordem. Enunciaremos a seguir, alguns teoremas importantes e novamente não demonstraremos todos.<sup>2</sup>

**Teorema 12** *Dados  $A$  e  $B$  distintos, existe um ponto  $C$  tal que  $A * C * B$ .*

O teorema acima garante que existem pontos no segmento  $AB$  diferentes de  $A$  e  $B$ . Tais pontos, serão chamados de *pontos interiores do segmento  $AB$* , enquanto os próprios pontos  $A$  e  $B$  serão chamados de *pontos extremos do segmento  $AB$* .

**Teorema 13** *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos distintos e não colineares. Se uma reta não passar por nenhum desses três pontos mas intersectar dois dos três segmentos  $AB$ ,  $AC$  ou  $BC$ , então essa reta não intersectará o terceiro.*

Este último teorema nos dá um resultado já comentado anteriormente, onde explicamos que esse fato poderia ser demonstrado e portanto não seria incrementado ao axioma  $O(4)$ .

**Teorema 14** *Entre quaisquer dois pontos distintos, existem infinitos pontos.*

Conforme o teorema acima, vemos que numa geometria de ordem existem infinitos pontos e portanto é óbvio que a geometria de 3 pontos não pode ser um modelo deste tipo de geometria. Podemos concluir que nesse modelo, não existe relação de ordem conforme a definição que atribuímos a ela.

**Teorema 15** *Se um ponto  $B$  está entre  $A$  e  $C$  ( $A * B * C$ ), então o único ponto comum aos segmentos  $AB$  e  $BC$  é o ponto  $B$ .*

Em linguagem de conjuntos, este teorema nos diz que:  $A * B * C \Rightarrow AB \cap BC = \{B\}$ .

**Teorema 16** *Se  $A * C * D$  e  $A * B * D$  com  $C \neq B$  então  $CB \subset AD$ .*

**Teorema 17** *Se  $A * C * B$  então  $AC \subset AB$ .*

---

<sup>2</sup>Deixaremos mais uma vez o item [1] das referências bibliográficas, já citado anteriormente para aqueles leitores que por elas se interessarem.

Para introduzirmos uma relação de ordem no plano euclidiano  $\bar{E} = (\Gamma_E, \mathbf{L}_E)$ , vamos apresentá-lo de uma forma ligeiramente diferente. Para isso usaremos as noções de vetores e levaremos em consideração o fato de que  $\mathbb{R}^2$  é um espaço vetorial.

Sejam  $A$  e  $B$  distintos pertencentes a  $\mathbb{R}^2$ . Defina

$$\overleftrightarrow{AB} = \{C \in \mathbb{R}^2 : C = A + t(B - A), t \in \mathbb{R}\}$$

Um vetor múltiplo de  $(B - A)$  é um *vetor diretor da reta*  $\overleftrightarrow{AB}$ . (fig.A.1)

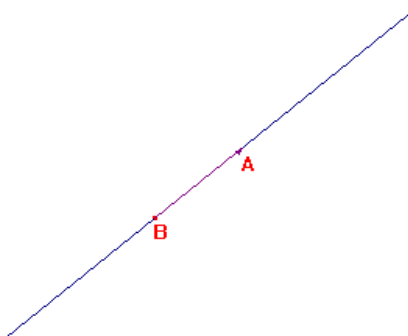


Figura 3.4: Reta  $\overleftrightarrow{AB}$  com o vetor diretor  $(B - A)$

Chame de  $R_E$  à coleção de todos os conjuntos  $\overleftrightarrow{AB}$  onde  $A$  e  $B$  são distintos e pertencem ao  $\mathbb{R}^2$ . Veremos que  $R_E = \mathbf{L}_E$ .

De fato, escreva  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  com  $A \neq B$ , se  $x_A = x_B = k$ , então

$$\overleftrightarrow{AB} = \{(k, y_A + t(y_B - y_A)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Observe que  $y_A + t(y_B - y_A)$  pode ser qualquer número real, pois se  $m$  é um número real então basta tomarmos

$$t = \frac{m - y_A}{y_B - y_A}$$

e teremos

$$m = y_A + t(y_B - y_A).$$

Com isso, podemos concluir que

$$\overleftrightarrow{AB} = \{(k, y_A + t(y_B - y_A)), t \in \mathbb{R}\} = \{(k, m), m \in \mathbb{R}\} = L_k.$$

Em contrapartida, se  $x_A \neq x_B$ , então

$$\overleftrightarrow{AB} = \{(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Já mostramos anteriormente que se  $x_A \neq x_B$ , então existe uma única reta  $L_{m,b}$  que passa por  $A$  e  $B$ . Além disso, conseguimos verificar que

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Agora, para todo  $t$  real, temos:

$$t \cdot 0 = 0 \Rightarrow t \left[ (y_B - y_A) - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x_B - x_A) \right] = 0 = -y_A + mx_A + b$$

porque  $A \in L_{m,b}$  e então

$$t[(y_B - y_A) - m(x_B - x_A)] = -y_A + mx_A + b \Rightarrow y_A + t(y_B - y_A) = m(x_A + t(x_B - x_A)) + b.$$

Então se denotarmos  $x_A + t(x_B - x_A) = r$  obtemos

$$\overleftrightarrow{AB} = \{(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A)), t \in \mathbb{R}\} = \{(r, mr + b), r \in \mathbb{R}\} = L_{m,b}.$$

Conclui-se que  $R_E = \mathbf{L}_E$ .

Essa nova maneira de ver as retas no plano euclideo nos dá algumas vantagens e por isso passaremos a usá-la daqui em diante.

**Definição 11** *Diremos que  $B$  está entre  $A$  e  $C$  no plano euclideo (notação  $A *_E B *_E C$ ) se  $A \neq B$  e  $C = A + t(B - A)$  para algum  $t$  real entre zero e um ( $0 < t < 1$ ).*

Esta definição nos dá a visão geométrica da figura 3.2, mostrada anteriormente.

Veremos que  $\mathcal{O}_E = (\Gamma_E, \mathbf{L}_E, *_E)$  é uma geometria de ordem, onde  $\bar{E} = (\Gamma_E, \mathbf{L}_E)$  é o plano euclideo e  $*_E$  é a relação ternária “estar entre no plano euclideo” citada na definição acima.

Para isso, precisamos verificar os axiomas  $O(1)$  até  $O(4)$  utilizando a relação estar entre no plano euclideo, entretanto essa verificação é bastante longa e por isso a incluiremos em forma de apêndice<sup>3</sup>.

Muitos autores não utilizam exatamente a axiomática que estamos utilizando, ao invés disso, utilizam uma axiomática logicamente equivalente, onde o axioma de Pasch é substituído pelo ASP (Axioma da Separação do Plano), o qual enunciaremos em forma de teorema após a definição que segue:

**Definição 12** *Numa geometria de ordem, sejam  $r$  uma reta e  $A$  e  $B$  pontos não incidentes a  $r$ . Se  $A = B$  ou se  $r$  não passa por ponto nenhum do segmento  $AB$ , então dizemos que  $A$  e  $B$  estão do mesmo lado de  $r$  (notação  $A, B | r$ ). Caso contrário, se  $A \neq B$  e a reta  $r$  passa por algum ponto de  $AB$ , dizemos que  $A$  e  $B$  estão em lados opostos de  $r$  (notação  $A | B, r$ ). (fig.A.2)*

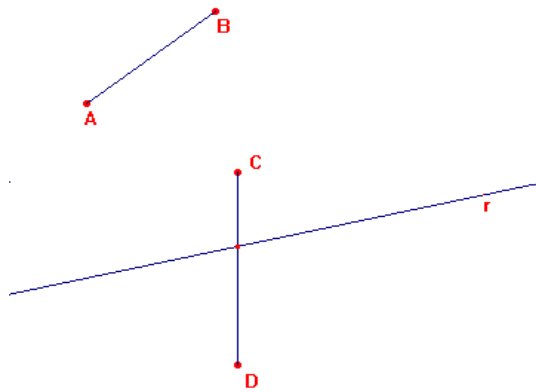


Figura 3.5:  $A, B|r$  enquanto  $C|D, r$

Observe que se  $A$  e  $B$  são pontos não incidentes a  $r$ , precisamos que uma das duas opções ocorra ( $A|B, r$  ou  $A, B|r$ ) não havendo meio-termo.

**Teorema 18 (ASP)** <sup>4</sup>Para toda reta  $r$  e para quaisquer pontos  $A, B$  e  $C$  não incidentes a  $r$ :

- (1) Se  $A, B|r$  e  $B, C|r$ , então  $A, C|r$ . (fig.3.6)
- (2) Se  $A|D, r$  e  $B|D, r$ , então  $A, B|r$ . (fig.3.6)

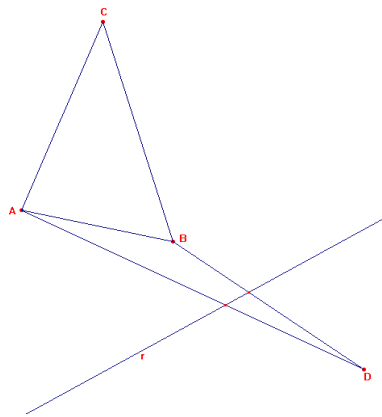


Figura 3.6:  $A, C|r$  e  $A, B|r$

Com o auxílio do Teorema ASP vemos que a axiomática que utilizamos implica no ASP, uma vez que este fato pode ser demonstrado a partir dos axiomas que assumimos. Para mostrarmos a equivalência entre as duas axiomáticas citadas, precisamos mostrar ainda um último teorema.

**Teorema 19** Se assumirmos os axiomas  $A(1), A(2), I(1), I(2), O(1), O(2), O(3)$  e ASP então vale o axioma de Pasch.

<sup>3</sup>Veja as demonstrações no Apêndice A

<sup>4</sup>Para demonstração, veja ref. [2].

Demonstração:

Seja  $r$  uma reta e sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  pontos distintos e não colineares, nenhum deles incidentes a  $r$ . Suponha que  $r$  passe por um ponto do segmento  $AB$ .

$A$  e  $B$  não estão em  $r$  e como  $r$  passa por um ponto do segmento  $AB$ , temos que  $A|B, r$ ;

$C$  não é incidente a  $r$ , portanto teremos  $A|C, r$  ou  $A, C|r$  (o primeiro caso diz que  $r$  passa por um ponto de  $AC$ ).

Se  $A, C|r$  ocorre, então  $B|C, r$  (isso se justifica pelo fato de que se tivéssemos  $B, C|r$ , como temos  $A, C|r$  resultaria, pelo ASP, em  $A, B|r$  o que contraria a hipótese) e portanto  $r$  passa por um ponto de  $BC$ .

C.Q.D.

Com esse teorema, provamos a equivalência entre o teorema de Pasch e do ASP quando utilizados com os axiomas da geometria abstrata de incidência e os três primeiros axiomas de ordem.

**Definição 13** *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  pontos colineares pertencentes ao plano hiperbólico. Define a relação **estar entre no plano hiperbólico** (denotada por  $*_H$ ) entre os pontos desse plano da seguinte maneira:*

$A *_H B *_H C$  se e somente se

$(y_A < y_B < y_C$  ou  $y_C < y_B < y_A)$  caso  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertençam a uma reta do tipo I;

$(x_A < x_B < x_C$  ou  $x_C < x_B < x_A)$  caso  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertençam a uma reta do tipo II.

Mostraremos que a tripla ordenada  $\mathcal{H} = (\Gamma_H, \mathbb{L}_H, *_H)$  é uma geometria de ordem, onde  $\mathbb{H} = (\Gamma_H, \mathbb{L}_H)$  é o modelo hiperbólico e  $*_H$  é a relação dada na definição acima.

A demonstração desse fato exige uma certa dose de paciência por parte do leitor, pois requer a separação em diversos casos e vários lemas serão usados principalmente para mostrarmos o axioma de Pasch.

Essa verificação também é apresentada em forma de apêndice<sup>5</sup>.

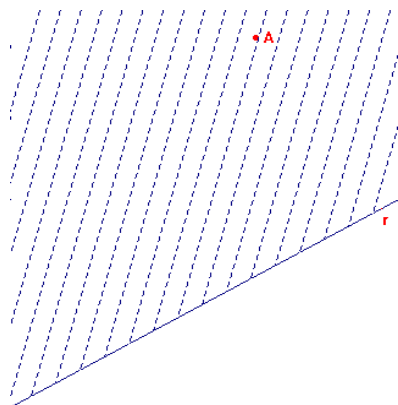
**Definição 14** *Sejam  $r$  uma reta e  $A$  um ponto não incidente a  $r$  numa geometria de ordem  $\mathcal{O} = (\Gamma, L, *)$ . Chamaremos de **semi-plano**  $r_A$  ao conjunto de pontos  $r_A = \{C \in \Gamma : A, C|r\}$ . (fig.3.7)*

**Teorema 20** <sup>6</sup>*Sejam  $\mathcal{O} = (\Gamma, L, *)$  uma geometria de ordem,  $r \in L$  uma reta e  $A$  e  $B$  pontos tais que  $A|B, r$ . Então*

$$\Gamma = r_A \cup r_B \cup r \text{ e } r_A \cap r_B = r_A \cap r = r_B \cap r = \emptyset.$$

<sup>5</sup>As referidas demonstrações encontram-se no Apêndice B.

<sup>6</sup>Demonstração pode ser obtida na ref. [2].

Figura 3.7: Semi-plano  $r_A$ 

**Definição 15** *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  pontos não colineares. O **triângulo**  $ABC$  é o conjunto de pontos  $ABC = AB \cup BC \cup CA$ . Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são chamados de **vértices do triângulo**  $ABC$  e os segmentos  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$  são os **lados do triângulo**  $ABC$ .*

Repare que pela definição decorre que  $ABC = CBA = BAC = CAB = ACB = BCA$ .

Definiremos na próxima seção, uma nova relação que ampliará o número de restrições impostas a geometria que estudaremos.

## Capítulo 4

# GEOMETRIA DE CONGRUÊNCIA

**Definição 16** *Sejam  $\mathcal{O} = (\Gamma, L, *)$  uma geometria de ordem e  $A$  e  $B$  pontos distintos. Chamaremos de **semi-reta**  $\overrightarrow{AB}$  (denotada simplesmente por  $\overrightarrow{AB}$ ) ao conjunto de pontos*

$$\overrightarrow{AB} = AB \cup \{C \in \Gamma : A * B * C\}.$$

Note que pela definição, todos os pontos do segmento  $AB$  pertencem à semi-reta  $\overrightarrow{AB}$  e portanto  $AB \subset \overrightarrow{AB}$ .

Pela definição que demos a relação de *estar entre* no modelo euclideo ( $*_E$ ), podemos constatar que se tomarmos dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , a semi-reta  $\overrightarrow{AB}$  será:

$$\overrightarrow{AB} = \{C \in \Gamma_E : C = A + t(B - A), t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Observe que a diferença entre a semi-reta  $\overrightarrow{AB}$  e a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  no modelo euclideo, está no fato de que na semi-reta, a variável  $t$  pode variar apenas nos números reais não-negativos, enquanto que na reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , esta pode variar nos reais. Como decorrência desse fato, vemos que a semi-reta  $\overrightarrow{AB}$  está contida na reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .<sup>1</sup>

Da mesma forma, levando-se em consideração a definição dada à relação de *estar entre* no plano hiperbólico ( $*_H$ ), podemos concluir que se  $C = (x_C, y_C)$  e  $D = (x_D, y_D)$  são pontos distintos pertencentes ao plano hiperbólico, então:

$x_C = x_D = k$  decorre que

$$\overrightarrow{CD} = \{A = (x_A, y_A) \in {}_kL : (y_A \geq y_C \text{ se } y_D > y_C) \text{ ou } (y_A \leq y_C \text{ se } y_D < y_C)\}.$$

Diremos para esse caso que a semi-reta  $\overrightarrow{CD}$  é do tipo I. (fig.B.1)

$x_C \neq x_D$  vem que

$$\overrightarrow{CD} = \{A = (x_A, y_A) \in {}_cL_r : (x_C < x_A \text{ se } x_D < x_A) \text{ ou } (x_A < x_C \text{ se } x_D < x_C)\}$$

---

<sup>1</sup>Esse fato é verdadeiro para qualquer geometria de ordem e sua demonstração pode ser obtida na ref. [2].



onde  $C, D \in {}_cL_r$ . Para esse caso, diremos que  $\overrightarrow{CD}$  é uma semi-reta do tipo II.(fig.B.1)

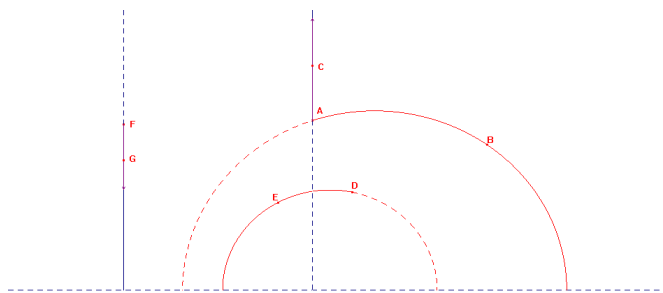


Figura 4.1:  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{FG}$  são semi-retas do tipo I enquanto que  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{DE}$  são semi-retas do tipo II

**Definição 17** *Sejam  $A, B$  e  $C$  pontos não colineares em uma geometria de ordem. O ângulo  $\angle CAB$  é o conjunto  $\angle CAB = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$ . Além disso, o ponto  $A$  é chamado de vértice do ângulo  $\angle CAB$ .*

Pela nossa definição de ângulo, as duas semi-retas que o formam são definidas por três pontos não colineares e por isso não pertencem ambas a mesma reta. Quando tivermos 3 pontos colineares  $A, B$  e  $C$  de forma que  $A * B * C$ , diremos que as semi-retas  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{BC}$  são *semi-retas opostas*. Na figura B.1 podemos ver um exemplo de ângulo. O ângulo  $\angle BAC$  é formado por uma semi-reta do tipo I em união a uma outra semi-reta do tipo II.

**Definição 18** *Sejam  $\mathcal{O} = (\Gamma, L, *)$  uma geometria de ordem,  $\mathcal{S}$  o conjunto dos segmentos de  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{A}$  o conjunto dos ângulos de  $\mathcal{O}$ . Uma **relação de congruência em  $\mathcal{O}$**  (denotada por  $\equiv$ ) é uma relação binária em  $\mathcal{S}$  ( $\equiv \subset \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ ) ou em  $\mathcal{A}$  ( $\equiv \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ ) tal que as propriedades C(1) a C(6) abaixo são satisfeitas.*

C(1) Para todo segmento  $AB$  e para toda semi-reta  $\overrightarrow{CD}$ , existe um único ponto  $E \in \overrightarrow{CD}$  tal que  $E \neq C$  e  $CE \equiv AB$  (fig.B.2);

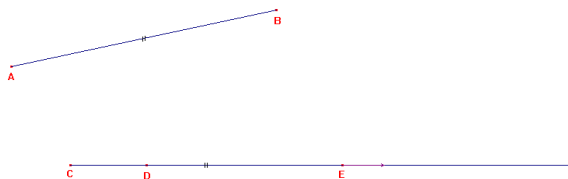


Figura 4.2:  $E \in \overrightarrow{CD}$ ,  $E \neq C$  e  $CE \equiv AB$

C(2) Se  $AB \equiv CD$  e  $AB \equiv EF$  então  $CD \equiv EF$ . Além disso,  $AB \equiv AB$ ;

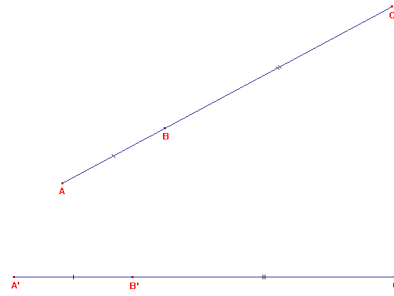


Figura 4.3:  $AC \equiv A'C'$

C(3) (Soma de segmentos) Se  $A * B * C$ ,  $A' * B' * C'$ ,  $AB \equiv A'B'$  e  $BC \equiv B'C'$  então  $AC \equiv A'C'$  (fig.B.3);

C(4) Se  $\angle BAC$  é um ângulo,  $r_D$  um semi-plano e  $B'$  e  $C'$  pontos distintos incidentes a  $r$ , então existe uma única semi-reta  $\overrightarrow{B'A'}$  em  $r_D$  tal que  $\angle BAC \equiv \angle A'B'C'$  (fig.B.4);

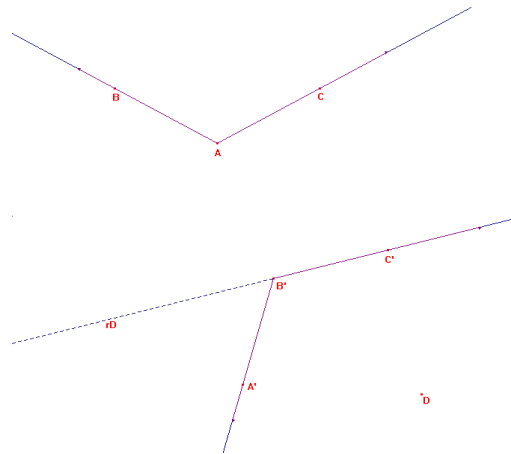


Figura 4.4:  $\angle BAC \equiv \angle A'B'C'$

C(5) Se  $\angle BAC \equiv \angle DEF$  e  $\angle BAC \equiv \angle GHI$  então  $\angle DEF \equiv \angle GHI$ . Além disso,  $\angle BAC \equiv \angle BAC$ .

Para enunciarmos a sexta propriedade, precisaremos da definição que segue:

**Definição 19** Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  triângulos. Diremos que  $ABC \equiv A'B'C'$  ( $ABC$  é congruente a  $A'B'C'$ ) se:

$AB \equiv A'B'$ ,  $BC \equiv B'C'$ ,  $CA \equiv C'A'$ ,  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ ,  $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$  e  $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ .

C(6) (LAL) Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  triângulos. Se  $BA \equiv B'A'$ ,  $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$  e  $AC \equiv A'C'$ , então os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são congruentes. (fig.B)

A última propriedade é abreviada por LAL para enfatizar que os dois triângulos dados serão congruentes se possuírem Lado, Ângulo e Lado congruentes nessa ordem.

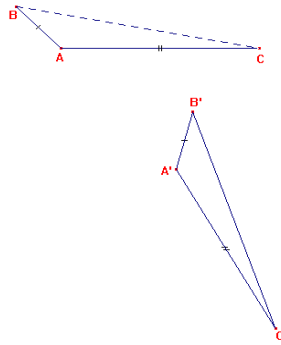


Figura 4.5:  $ABC \equiv A'B'C'$  pelo caso LAL

É importante destacar que a relação  $\equiv$  é usada para denotar congruência entre segmentos, ângulos e triângulos, no entanto as 3 relações são distintas, mesmo sendo representadas pelo mesmo símbolo.

Observe que não existe um axioma que garanta que ângulos possam ser somados (análogo ao axioma C(3) para segmentos). Isto deve-se ao fato de que esta propriedade pode ser demonstrada como decorrência dos axiomas enunciados e por isso não é necessário que seja imposta em forma de axioma.

Daremos agora uma definição precisa do tipo de geometria que estamos estudando neste momento.

**Definição 20** Fixada uma geometria de ordem  $\mathcal{O} = (\Gamma, L, *)$ , dizemos que a quádrupla ordenada  $\mathcal{C} = (\Gamma, L, *, \equiv)$  é uma **geometria de congruência**, onde  $\equiv$  é uma relação de congruência em  $\mathcal{O}$ .

Enunciaremos a seguir alguns teoremas de fundamental importância para nosso estudo.

**Teorema 21 (Simetria)**  $AB \equiv CD \Rightarrow CD \equiv AB$ .

Demonstração:

$AB \equiv CD$  por hipótese e  $AB \equiv AB$  pelo axioma C(2), então pelo mesmo axioma decorre que  $CD \equiv AB$ .

C.Q.D.

**Teorema 22** <sup>2</sup>Se num triângulo  $ABC$ ,  $AB \equiv AC$  então  $\angle B \equiv \angle C$ .

Demonstração:

<sup>2</sup>Num triângulo  $ABC$ , o ângulo  $\angle ABC$  será simplesmente representado por  $\angle B$ , uma vez que essa notação não deixa dúvidas em um triângulo.

Este teorema garante que um *triângulo isósceles* (triângulo com dois lados congruentes) sempre possui ângulos congruentes em sua base.

Considere um triângulo  $ABC$  tal que  $AB \equiv AC$  (fig.4.6) (para facilitar o entendimento, desenhamos uma cópia deste com os vértices  $B$  e  $C$  em lugares trocados). Analisando o triângulo  $ABC$  e o triângulo  $ACB$  (mesmo triângulo com os vértices em posição diferente) vemos que  $AB \equiv AC$  (hipótese),  $AC \equiv AB$  (hipótese e teorema 21) e como  $\angle A \equiv \angle A$  (axioma C(5)) então pelo axioma C(6) decorre  $ABC \equiv ACB$ , donde concluímos (pela definição de congruência de triângulos) que  $\angle B \equiv \angle C$ .

C.Q.D.

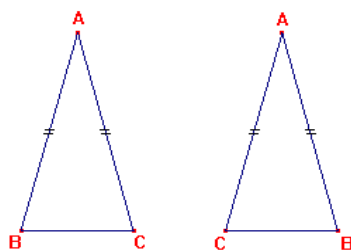


Figura 4.6:  $ABC \equiv ACB$

**Teorema 23 (Subtração de segmentos)** <sup>3</sup>Se  $A * B * C$ ,  $D * E * F$ ,  $AB \equiv DE$  e  $AC \equiv DF$  então  $BC \equiv EF$ . (fig.4.7)

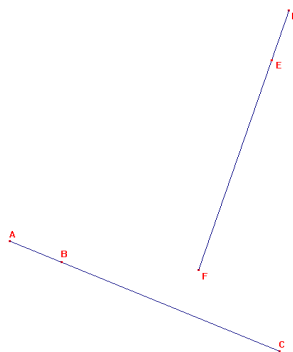


Figura 4.7:  $BC \equiv EF$

**Teorema 24** Se  $AC \equiv DF$ , então para qualquer ponto  $B$  entre  $A$  e  $C$  ( $A * B * C$ ), existe um único ponto  $E$  entre  $D$  e  $F$  ( $D * E * F$ ) tal que  $AB \equiv DE$ .

Veja que pelo teorema da subtração de segmentos, imediatamente decorre que teremos também  $BC \equiv EF$ .

Para enunciarmos o próximo teorema, precisaremos de uma definição.

<sup>3</sup>Serão apresentados alguns teoremas sem demonstração, as quais podem ser obtidas na ref. [2].

**Definição 21** *Numa geometria de congruência sejam dados dois segmentos  $AB$  e  $CD$ . Dizemos que o segmento  $AB$  é **menor que**  $CD$  (denotado por  $AB < CD$ ) se existir um ponto  $E$  tal que  $C * E * D$  e além disso,  $AB \equiv CE$ . Nesse caso também diremos que  $CD$  é **maior que**  $AB$  (denotado por  $CD > AB$ ). (fig.4.8)*

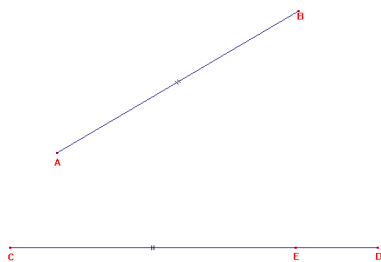


Figura 4.8:  $C * E * D$  e  $AB \equiv CE \Rightarrow AB < CD$

**Teorema 25 (Tricotomia de segmentos)** *Para quaisquer  $AB$  e  $CD$  segmentos, uma e somente uma das seguintes condições ocorre:*

$$AB < CD, \quad CD < AB \text{ ou } AB \equiv CD$$

**Teorema 26** *Se  $AB < CD$  e  $CD \equiv EF$  então  $AB < EF$ .*

**Teorema 27 (Transitividade de segmentos)**  *$AB < CD$  e  $CD < EF \Rightarrow AB < EF$ .*

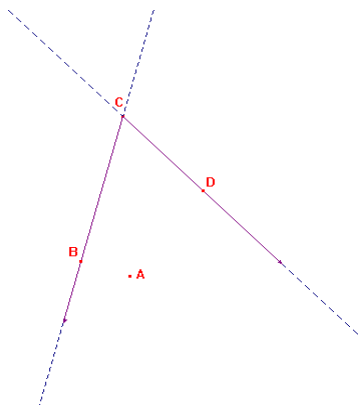
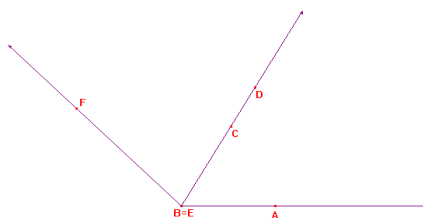
Observe que a relação  $<$  é uma relação de ordem total entre segmentos.

**Definição 22** *Um ponto  $A$  é **interior ao ângulo**  $\angle BCD$  se  $A, B | \overleftrightarrow{CD}$  e  $A, D | \overleftrightarrow{BC}$ . (fig.4.9)*

**Teorema 28 (LLL)** *Dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes se  $AB \equiv DE$ ,  $BC \equiv EF$  e  $AC \equiv DF$ .*

**Teorema 29 (ALA)** *Dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes se  $\angle B \equiv \angle E$ ,  $BC \equiv EF$  e  $\angle C \equiv \angle F$ .*

**Definição 23** *Dois ângulos  $\angle ABC$  e  $\angle DEF$  são ditos serem **ângulos adjacentes** se  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}$ ,  $\overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{EF}$ ,  $A$  não é ponto interior ao ângulo  $\angle DEF$ , bem como  $F$  não é ponto interior ao ângulo  $\angle ABC$ . (fig.4.10)*

Figura 4.9: O ponto  $A$  é interior ao ângulo  $\angle BCD$ Figura 4.10:  $\angle ABC$  e  $\angle DEF$  são ângulos adjacentes

**Definição 24** Dois ângulos  $\angle ABC$  e  $\angle CBF$  são **suplementares** se são adjacentes e  $A * B * F$ . Nesse caso, diremos que o ângulo  $\angle CBF$  é o **suplemento de**  $\angle ABC$  e reciprocamente. (fig.4.11)

**Teorema 30** Dois ângulos são congruentes se e somente se seus suplementos são congruentes.

**Definição 25** Se um ângulo for congruente ao seu suplemento, então diremos que este será um **ângulo reto**. (fig.4.12)

**Definição 26** Uma reta  $r$  é **perpendicular a** reta  $s$  (denotado por  $r \perp s$ ) se  $r$  e  $s$  forem concorrentes num ponto  $P$  e para pontos quaisquer  $A \in r$  e  $B \in s$ ,  $A \neq P \neq B$ , tivermos  $\angle APB$  reto. (fig.4.12)

**Teorema 31** Para toda reta  $r$  e todo ponto  $P$ , existe uma única reta  $s$  passando por  $P$  tal que  $s \perp r$ .

**Teorema 32** Todos os ângulos retos são congruentes entre si.

**Definição 27** Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos. O ponto  $O$  é chamado de **ponto médio do segmento**  $AB$  se  $O$  pertence a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $AO \equiv OB$ .

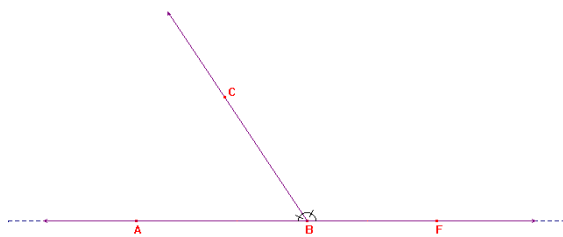


Figura 4.11:  $\angle ABC$  e  $\angle CBF$  são suplementares

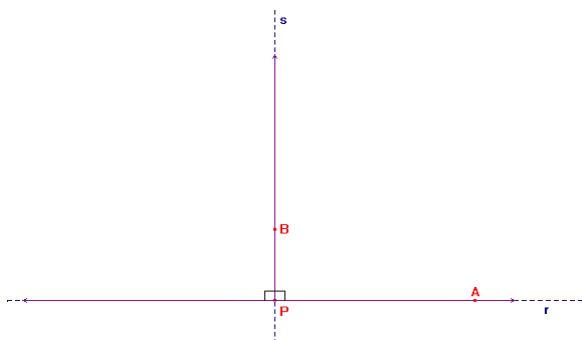


Figura 4.12:  $\angle APB$  é reto

**Teorema 33** *Todo segmento  $AB$  possui um único ponto médio  $O$ . Além disso,  $A * O * B$ .*

**Definição 28** *Uma reta  $\overleftrightarrow{AB}$  é uma **bissetriz do ângulo**  $\angle CDE$  se  $D$  pertence a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $B$  é ponto interior a este ângulo e  $\angle EDB \equiv \angle BDC$ .*

**Teorema 34** *Todo ângulo possui uma única bissetriz.*

**Definição 29** *Sejam  $A, B, C$  e  $D$  pontos tais que  $A * B * C$  e  $D \notin \overleftrightarrow{AB}$ . Consideremos o triângulo  $BCD$ . Os ângulos  $\angle BDC$  e  $\angle BCD$  são chamados de **ângulos remotos relativos ao ângulo**  $\angle ABD$ , enquanto que este último é dito um **ângulo exterior ao triângulo**  $BCD$ . (fig.4.13)*

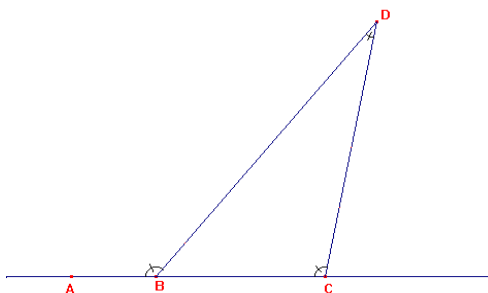


Figura 4.13: Ângulo exterior e ângulos remotos

**Teorema 35** *Um ângulo exterior a um triângulo é sempre maior que cada um de seus dois ângulos remotos.*

**Teorema 36** *Duas retas distintas e perpendiculares a uma mesma reta são retas paralelas.*

**Definição 30** *Um ângulo menor que um ângulo reto é dito ser um **ângulo agudo**, enquanto que um ângulo maior que um ângulo reto é chamado de **ângulo obtuso**.*

**Teorema 37** *Qualquer triângulo possui dois ângulos agudos.*

**Teorema 38** *Em qualquer triângulo, o maior lado é oposto ao maior ângulo e reciprocamente.*

**Teorema 39** *Em todo triângulo um lado qualquer é menor do que a soma e maior do que a diferença entre os outros dois lados.*

**Teorema 40 (LAA)** *Se  $AC \equiv DF$ ,  $\angle A \equiv \angle D$  e  $\angle B \equiv \angle E$ , então os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes.*

**Corolário 1** *Se  $r$  é uma reta e  $P$  é um ponto não incidente a  $r$  então existe pelo menos uma reta  $m$  tal que  $m$  é paralela a  $r$ .*

Vemos nesse corolário um resultado particularmente importante que garante a existência de retas paralelas. Através dele, chegamos ao resultado de que *nenhum modelo de geometria elíptica pode ser uma geometria de congruência*, uma vez que neste tipo de geometria (elíptica) não existem retas paralelas.

Uma observação importante cabe aqui. Note que conseguimos mostrar a *existência* de retas paralelas, no entanto, veremos posteriormente que o modelo euclideano e o hiperbólico satisfazem todos os axiomas de congruência utilizando as definições que daremos para congruência em cada um desses modelos. Podemos concluir portanto que é impossível provarmos para uma geometria de congruência que *por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela a esta reta* (no plano hiperbólico isso não ocorre). Da mesma maneira, também não é possível mostrarmos apenas com os axiomas que anunciamos até aqui, que por um ponto fora de uma reta passa mais de uma paralela a esta reta, uma vez que o modelo euclideano satisfaz todos os axiomas vistos até aqui e no entanto não verifica essa propriedade. Assim, podemos ver que a unicidade (ou não) de paralelas é uma propriedade *independente* dos axiomas de congruência.



## 4.1 Congruência no plano euclidiano

Usaremos daqui em diante as propriedades do produto interno e norma canônica para o espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ . Daremos a seguir sua definição e algumas de suas propriedades básicas:

Sejam  $\vec{v} = (x_v, y_v)$  e  $\vec{w} = (x_w, y_w)$  vetores pertencentes ao  $\mathbb{R}^2$ . O produto interno canônico  $\vec{v}$  por  $\vec{w}$  (denotado por  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ ) é definido como  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = x_v x_w + y_v y_w$ .

Algumas propriedades<sup>4</sup>:

P(i)  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$  para quaisquer  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores pertencentes a  $\mathbb{R}^2$ ;

P(ii)  $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle > 0$  para todo  $\vec{w}$  não nulo;

P(iii)  $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 0$  se e somente se  $\vec{w}$  é o vetor nulo;

P(iv)  $\langle K\vec{v}, \vec{w} \rangle = K\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$  onde  $K$  é um número real e  $\vec{w}$  e  $\vec{v}$  vetores pertencentes ao  $\mathbb{R}^2$ .

A norma canônica de  $\vec{v}$  (denotada por  $\|\vec{v}\|$ ) é definida da seguinte maneira:  $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$ .

Vejamos algumas propriedades básicas:

N(i)  $\|\vec{v}\| \geq 0$  e  $\|\vec{v}\| = 0$  se e somente se  $\vec{v} = (0, 0)$ ;

N(ii)  $\|K\vec{v}\| = |K| \cdot \|\vec{v}\|$  para qualquer  $K$  real e  $\vec{v}$  vetor.

O plano euclidiano e o plano hiperbólico são os dois principais modelos de nosso estudo. Constataremos a seguir que ambos satisfazem todos os axiomas de congruência, conforme as definições que daremos a congruência de ângulos e segmentos em cada um destes modelos. Porém, precisaremos antes de tudo mostrar o teorema que segue:

**Teorema 41** *Sejam  $A, B$  e  $C$  pontos distintos em  $\mathbb{R}^2$ . Se  $D$  e  $E$  são pontos distintos de  $B$ , tais que  $D \in \overrightarrow{BA}$  e  $E \in \overrightarrow{BC}$ , então*

$$\frac{\langle A - B, C - B \rangle}{\|A - B\| \cdot \|C - B\|} = \frac{\langle D - B, E - B \rangle}{\|D - B\| \cdot \|E - B\|}$$

Veja figura 4.14.

Demonstração:

Como  $D \in \overrightarrow{BA}$  e  $D \neq B$  teremos

$$D = B + t_0(B - A), t_0 > 0 \Rightarrow D - B = t_0(B - A), t_0 > 0.$$

Mas  $E \in \overrightarrow{BC}$  e  $E \neq B$  então

$$E = B + t_1(B - C), t_1 > 0 \Rightarrow E - B = t_1(B - C), t_1 > 0$$

<sup>4</sup>Para as demonstrações detalhadas dessas propriedades, sugerimos como bibliografia a ref. [3].

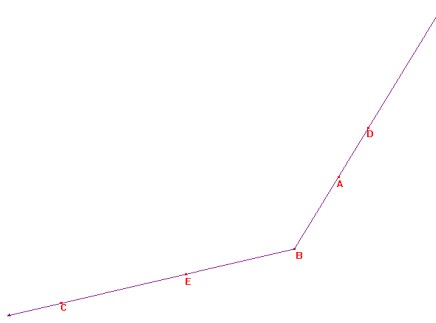


Figura 4.14:  $D \in \overrightarrow{BA}$  e  $E \in \overrightarrow{BC}$

Além disso, temos

$$\frac{\langle D - B, E - B \rangle}{\|D - B\| \cdot \|E - B\|} = \frac{\langle t_0(B - A), t_1(B - C) \rangle}{\|t_0(B - A)\| \cdot \|t_1(B - C)\|} = \frac{t_0 t_1 \langle (B - A), (B - C) \rangle}{t_0 t_1 \|B - A\| \cdot \|B - C\|}$$

pelas propriedades P(iv), N(i) e por serem  $t_0$  e  $t_1$  positivos. Logo

$$\frac{\langle A - B, C - B \rangle}{\|A - B\| \cdot \|C - B\|} = \frac{\langle D - B, E - B \rangle}{\|D - B\| \cdot \|E - B\|}$$

C.Q.D.

O teorema acima mostra que se as semi-retas  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$  e  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE}$  (e portanto o ângulo  $\angle ABC$  "coincide" com o ângulo  $\angle DBE$ ) então teremos

$$\frac{\langle A - B, C - B \rangle}{\|A - B\| \cdot \|C - B\|} = \frac{\langle D - B, E - B \rangle}{\|D - B\| \cdot \|E - B\|}$$

isto é, este número mantém-se constante, independente do ponto que escolhemos em cada uma das semi-retas que formam o ângulo. Intuitivamente, vemos que esse número depende somente da "abertura" existente entre essas semi-retas.

É importante reparar que o vetor  $A - B$  tem a mesma direção da semi-reta  $\overrightarrow{AB}$  (veja figura 4.14), assim como  $B - C$  possui a mesma direção da semi-reta  $\overrightarrow{BC}$ .

Este teorema é necessário para que tenhamos a próxima definição:

**Definição 31** A relação de *congruência para ângulos no modelo euclidiano* (denotada por  $\equiv_E$ ) é definida da seguinte forma:

$$\angle EFG \equiv_E \angle HIJ \Leftrightarrow \frac{\langle E - F, G - F \rangle}{\|E - F\| \cdot \|G - F\|} = \frac{\langle I - H, J - I \rangle}{\|I - H\| \cdot \|J - I\|}.$$

**Definição 32** A relação de *congruência para segmentos no modelo euclidiano*

(também denotada por  $\equiv_E$ ) é definida da seguinte forma:

$$AB \equiv_E CD \Leftrightarrow \|A - B\| = \|C - D\|.$$

Apelando para conhecimentos de álgebra linear, pode-se notar que o número  $\|A - B\|$  (norma do vetor  $A - B$ ) representa o comprimento do segmento  $AB$ .

Até aqui, chamamos a tripla ordenada  $\bar{E} = (\Gamma_E, \mathbf{L}_E, *_E)$  de plano euclidiano ou modelo euclidiano. Para evitarmos confusão e não termos necessidade de mudar o nome para cada relação incrementada, a partir desse momento usaremos esses nomes para a quádrupla ordenada  $\mathcal{E} = (\Gamma_E, \mathbf{L}_E, *_E, \equiv_E)$ , onde  $\equiv_E$  é a relação de *congruência no modelo euclidiano* definida acima.

Raciocínio análogo será aplicado ao plano hiperbólico.

A verificação de que o plano euclidiano é uma geometria de congruência é posta em forma de apêndice devido a sua grande extensão<sup>5</sup>.

**Teorema 42**  $AB < CD$  no plano euclidiano se e somente se  $\|A - B\| < \|C - D\|$ .

Com as verificações, concluímos que o plano euclidiano é uma geometria de congruência e como consequência disso, todos os teoremas até aqui demonstrados são assegurados para este modelo. Em especial, o corolário 1 confirma a afirmação que havíamos feito ainda em geometria abstrata, onde dissemos que nesse modelo existiam retas paralelas.

Apenas a nível de ilustração e para verificarmos a independência do primeiro axioma de congruência ( $C(1)$ ) em relação aos axiomas de geometria abstrata, incidência, ordem e os demais axiomas de congruência, daremos o exemplo do plano racional, o qual satisfazerá todos os axiomas enunciados até aqui, com exceção apenas do axioma  $C(1)$ .

## 4.2 O modelo do plano racional

Seja

$$\Gamma_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\}$$

e considere os seguintes subconjuntos de  $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ :

$$L_A^{\mathbb{Q}} = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x = a\}$$

onde  $a$  é uma constante pertencente aos racionais;

$$L_{m,b}^{\mathbb{Q}} = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : y = mx + b\}$$

onde  $m$  e  $b$  são números racionais fixados.

---

<sup>5</sup>Veja Apêndice C.

Defina  $L_{\mathbb{Q}}$  como sendo a coleção dos conjuntos  $L_a^{\mathbb{Q}}$  e  $L_{m,b}^{\mathbb{Q}}$  para todos os possíveis  $a$ ,  $m$  e  $b$  pertencentes aos racionais.

Defina também a relação  $*$  da seguinte maneira:  $A * B * C$  no plano racional se e somente se  $A$  e  $C$  são distintos e  $B = A + t(C - A)$  para algum  $t$  racional entre zero e um ( $0 < t < 1$ ).

**Proposição 43** *A tripla ordenada  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = (\Gamma_{\mathbb{Q}}, L_{\mathbb{Q}}, *)$  é uma geometria de ordem.*

Demonstração:

Repare a grande semelhança entre o plano racional e o plano euclidiano.

As verificações de  $A(1)$  e  $A(2)$  são idênticas àquelas feitas no plano euclidiano. É importante observarmos que  $m$  e  $b$  que escolhemos para mostrar  $A(1)$  são números racionais. Para mostrarmos  $A(2)$  no plano euclidiano, encontramos dois pares ordenados. Repare que suas coordenadas são números racionais.

As propriedades  $I(1)$  e  $I(2)$  também são mostradas de maneira idêntica aquela feita no plano euclidiano.

Para verificarmos as propriedades de ordem ( $O(1)$  a  $O(4)$ ) precisaremos de um pouco mais de cuidado. Devemos notar que  $\mathbb{Q}^2$  não é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , no entanto podemos definir retas com sendo  $\overleftrightarrow{AB} = \{C \in P_E : C = A + t(B - A), t \in \mathbb{Q}\}$ , de maneira análoga a que fizemos no plano euclidiano e se chamarmos de  $R_{\mathbb{Q}}$  a coleção de todos os conjuntos  $\overleftrightarrow{AB}$  onde  $A$  e  $B$  são distintos e pertencem a  $\Gamma_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^2$ , podemos mostrar também da mesma forma que  $R_{\mathbb{Q}} = L_{\mathbb{Q}}$ .

Repare que as retas no plano racional são subconjuntos das retas do plano euclidiano, assim como o próprio plano racional é um subconjunto do plano euclidiano.

Podemos fazer todas as demonstrações para provarmos que  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$  é uma geometria de ordem de maneira análoga ao que foi feito no plano euclidiano, tomando-se apenas o cuidado de colocarmos números racionais no lugar de reais onde for pertinente e reparar que encontraremos sempre números racionais onde for necessário. Não faremos essas demonstrações por serem elas muito parecidas àquelas feitas no plano euclidiano.

Com essas verificações análogas as verificações feitas no plano euclidiano, vemos que  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$  é de fato uma geometria de ordem.

C.Q.D.

Agora, se definirmos congruência entre segmentos e entre ângulos no plano racional exatamente como definimos no plano euclidiano e utilizando as mesmas demonstrações que fizemos nesse modelo, podemos concluir que todas as propriedades de geometria de congruência são satisfeitas, com exceção apenas de  $C(1)$ . Observe que na demonstração dessa propriedade, tomamos um número

$$t_0 = \frac{\|A - B\|}{\|A' - B'\|}$$

e concluímos que

$$C = A' + t_0(B' - A')$$

é o ponto que procuramos, no entanto não podemos ter certeza de que  $C$  é um ponto pertencente ao plano racional, uma vez que também não temos a certeza de que  $t_0$  é um número racional.

Como um contra-exemplo para a propriedade C(1), podemos tomar os pontos  $A = (0, 1)$ ,  $B = (1, 0)$  e  $O = (0, 0)$  pertencentes ao plano racional (fig.4.15). Veja que

$$\|A - B\| = \|(-1, 1)\| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}.$$

Se tentarmos encontrar um ponto  $C = (x_C, y_C)$  na semi-reta  $\overrightarrow{OB}$  (eixo  $x$ ), tal que o segmento  $OC$  seja congruente a  $AB$ , teremos forçosamente que

$$\|A - B\| = \|O - C\| \Rightarrow \sqrt{2} = \|(-x_C, -y_C)\| \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{(-x_C)^2 + (-y_C)^2}$$

o que implica que

$$\sqrt{2} = \sqrt{(-x_C)^2}$$

uma vez que  $C$  está sobre o eixo  $x$  (semi-reta  $\overrightarrow{OB}$ ) e então teremos que  $|x_C| = \sqrt{2} \Rightarrow x_C = \sqrt{2}$  porque  $C$  está sobre o eixo  $x$  no sentido positivo (semi-reta  $\overrightarrow{OB}$ ) e com isso vemos que o ponto  $C$  não pertence ao plano racional, pois sua primeira coordenada não é um número racional ( $\sqrt{2}$ ), donde conclui-se que o plano racional, com a definição de congruência entre ângulos e segmentos dada da mesma maneira que o plano euclideo, satisfaz todos os axiomas para ser uma geometria de congruência, com exceção do axioma C(1), logo, este axioma é independente de todos os outros colocados até este ponto, conforme queríamos mostrar.

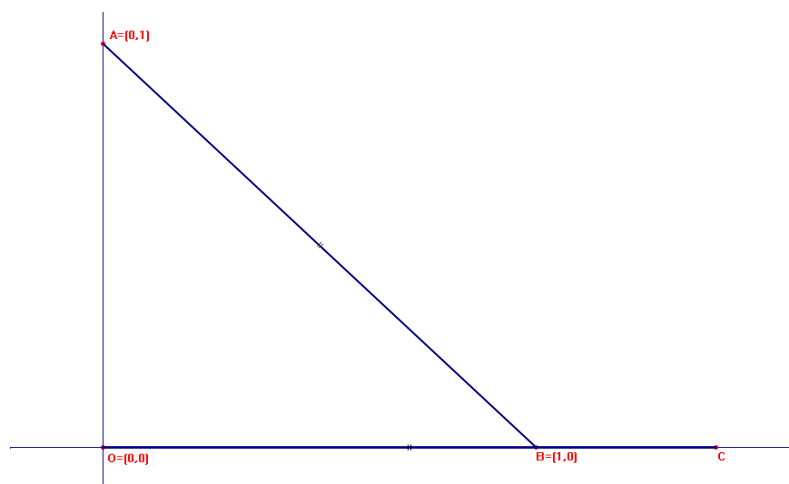


Figura 4.15:  $C = (\sqrt{2}, 0)$

### 4.3 Congruência no plano hiperbólico

Veremos agora, como podemos definir ângulo no plano hiperbólico.

Primeiramente, repare que o conjunto de pontos do plano hiperbólico está contido no conjunto de pontos do plano euclideoano

$$\Gamma_E = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \text{ e } \Gamma_H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}.$$

Informalmente, mediremos o *coseno de um ângulo*  $\angle ABC$  no plano hiperbólico (no sentido da Geometria Analítica euclidea), encontrando um vetor tangente às semi-retas  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{BC}$ . Após isso, faremos o mesmo processo feito no plano euclideoano para encontrarmos o ângulo entre vetores. (fig.4.16)

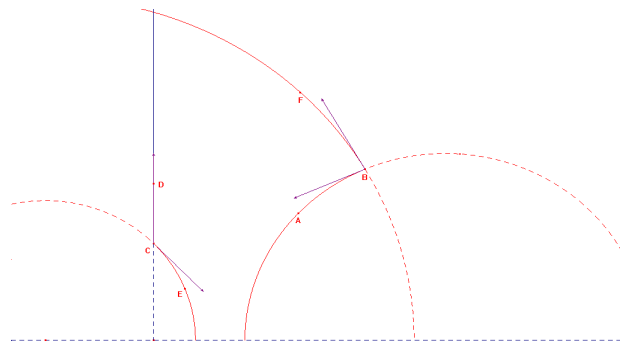


Figura 4.16:  $\angle DCE$  e  $\angle ABF$  são ângulos no plano hiperbólico

Numa semi-reta  $\overrightarrow{CD}$  do tipo I (que geometricamente é traçada numa linha reta) podemos escolher o próprio vetor vertical  $D - C$  tangente a semi-reta e com o mesmo sentido da semi-reta  $\overrightarrow{CD}$ .

Numa semi-reta do tipo II, a escolha é mais difícil, no entanto podemos aplicar o seguinte raciocínio:

Geometricamente, uma reta do tipo II é uma semi-circunferência (no sentido euclideoano) e podemos utilizar sua equação, diferenciando-a implicitamente para encontrarmos um vetor tangente no ponto A de uma semi-reta  $\overrightarrow{AB}$ .

A equação de uma reta do tipo II ( ${}_cL_r$ ) é  $(x - c)^2 + y^2 = r^2$ . Diferenciando-se implicitamente teremos:

$$2(x - c) + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c - x}{y}$$

é a inclinação da reta tangente (no sentido euclideoano) em um ponto  $(x, y)$  pertencente a  ${}_cL_r$ . Podemos então concluir que o vetor  $(y, c - x)$  é um vetor tangente a reta  ${}_cL_r$  no ponto  $(x, y)$ . Como queremos um vetor partindo do ponto A, encontraremos então o vetor  $(y_A, c - x_A)$ , no entanto temos um inconveniente. O vetor dado não respeita

o sentido da semi-reta, pois o encontramos levando-se em conta apenas o ponto  $A$  e “esquecendo” o ponto  $B$ , por isso, o vetor correto deverá ser o vetor  $(y_A, c - x_A)$  ou  $-1(y_A, c - x_A) = (-y_A, x_A - c)$ . (fig.4.17)

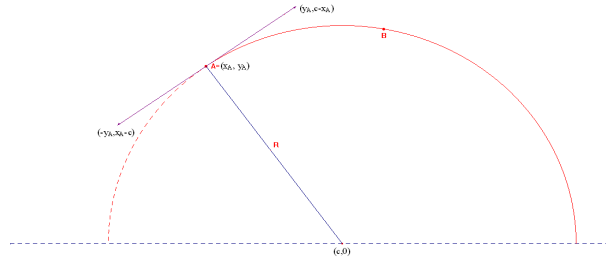


Figura 4.17:  $(y_A, c - x_A)$  e  $(-y_A, x_A - c)$  são vetores tangentes

Repare na figura acima, que se  $B''$  está "a direita de"  $A''$ , então o vetor que devemos tomar para que ele tenha o mesmo sentido da semi-reta  $\overrightarrow{AB}$  é o vetor que possui a primeira coordenada positiva (aponta para direita) o qual só poderá ser o vetor  $(y_A, c - x_A)$ . Caso contrário, devemos tomar o vetor  $(-y_A, x_A - c)$ .

Assim sendo, mediremos (no sentido da geometria analítica euclideana) o cosseno do ângulo entre duas semi-retas no plano hiperbólico da seguinte maneira:

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

onde  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são os vetores tangentes às semi-retas que formam o ângulo, calculados da seguinte maneira para uma semi-reta  $\overrightarrow{AB}$ :

- $\vec{u} = B - A$  caso  $\overrightarrow{AB}$  seja do tipo I;
- $\vec{u} = (y_A, c - x_A)$  caso  $\overrightarrow{AB}$  seja do tipo II e  $x_A < x_B$ ;
- $\vec{u} = (-y_A, x_A - c)$  caso  $\overrightarrow{AB}$  seja do tipo II e  $x_B < x_A$ .

O vetor  $\vec{v}$  é encontrado da mesma maneira. Este método motiva as seguintes definições:

**Definição 33** No plano hiperbólico, dizemos que o vetor  $U \in \mathbb{R}^2$  é **um vetor tangente a uma semi-reta  $\overrightarrow{AB}$**  se:

- $U = B - A$  caso  $\overrightarrow{AB}$  seja do tipo I;
- $U = (y_A, c - x_A)$  caso  $\overrightarrow{AB}$  seja do tipo II e  $x_A < x_B$ ;
- $U = (-y_A, x_A - c)$  caso  $\overrightarrow{AB}$  seja do tipo II e  $x_B < x_A$ .

Essa definição serve como suporte para a próxima:

**Definição 34** A relação de **congruência entre ângulos no modelo hiperbólico** (denotada por  $\equiv_H$ ) é definida da seguinte forma:

$$\angle ABC \equiv_H \angle A'B'C' \Leftrightarrow \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\langle \vec{u}', \vec{v}' \rangle}{\|\vec{u}'\| \cdot \|\vec{v}'\|}$$

onde onde  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{u}'$  e  $\vec{v}'$  são vetores tangentes respectivamente às semi-retas  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{B'A'}$  e  $\overrightarrow{B'C'}$ .

Para definirmos como será a congruência entre segmentos no plano hiperbólico, precisamos pensar um pouco, pois veja que uma medida no sentido euclidiano não verificará os axiomas necessários. Por exemplo, para uma reta do tipo I, se tomarmos um ponto  $A = (x_A, y_A)$  e tomarmos um segmento  $CD$  que tenha uma medida euclidiana maior do que o valor de  $y_A$ , então o axioma  $C(1)$  não será satisfeito, uma vez que não conseguiremos encontrar um ponto  $E$  na semi-reta  $\overrightarrow{AB}$  ( $B = (x_A, y_B)$  e  $y_B < y_A$ ) tal que  $AE \equiv CD$ , pois o segmento  $AE$  passará o “limite” do plano hiperbólico (eixo  $x$ ) e terá pontos com a segunda coordenada negativa. (fig.4.18)

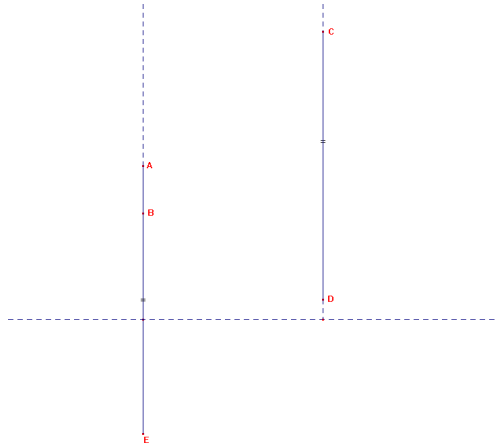


Figura 4.18:  $E \notin \Gamma_H$

Precisamos de uma medida para segmentos de forma que, ao nos aproximamos do eixo  $x$ , está medida se “dilata” e nos dê valores maiores, de modo que jamais possamos ultrapassar ou mesmo alcançar o eixo  $x$ . Intuitivamente, o eixo  $x$  faz o papel do “horizonte” para esse modelo de geometria.

Podemos resolver este problema utilizando a escala logarítmica, pois se por exemplo tomarmos dois pontos  $A = (k, y_A)$  e  $B = (k, y_B)$ , incidentes a reta  ${}_kL$ , poderemos definir como a *medida hiperbólica do segmento  $AB$*  o número

$$d_H(A, B) = |\ln(y_A) - \ln(y_B)| = \left| \ln \left( \frac{y_A}{y_B} \right) \right|.$$

Assim sendo, conseguiremos medidas tão grande quanto quisemos, bastando tomar o ponto  $B$  suficientemente próximo ao horizonte ( $y_B$  “pequeno”). Observe que se o ponto  $B$  aproxima-se do horizonte, o número  $y_B$  aproxima-se de zero, e então o número que representa a medida de  $AB$   $\left( \left| \ln \left( \frac{y_A}{y_B} \right) \right| \right)$  tende ao infinito, isto é,

$$\lim_{y_B \rightarrow 0} \left| \ln \left( \frac{y_A}{y_B} \right) \right| = \infty$$



Note que  $d_H(A, B) = 0$  se e somente se  $A = B$ . Repare ainda que  $d(A, B) \geq 0$ .

Esta justificativa nos sugere a seguinte definição:

**Definição 35** <sup>6</sup> *Seja  $\mathcal{O} = (\Gamma, L, *)$  uma geometria de ordem.  $d : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função distância em  $\mathcal{O}$  se para todo  $A, B \in \Gamma$  tivermos:*

- D(i)  $d(A, B) \geq 0$  para todos  $A$  e  $B$  pertencentes a  $\Gamma$ ;*
- D(ii)  $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ ;*
- D(iii)  $d(A, B) = d(B, A)$ .*

**Definição 36** *Sejam  $\mathcal{O} = (\Gamma, L, *)$  uma geometria de ordem e  $l$  pertencente a  $L$  uma reta. Diremos que  $\Psi : l \rightarrow \mathbb{R}$  é uma régua para  $l$  relativa à função distância  $d$  se:*

- R(i)  $\Psi$  é bijetiva;*
- R(ii)  $|\Psi(A) - \Psi(B)| = d(A, B)$  onde  $d$  é uma função distância em  $\mathcal{O}$ .*

**Definição 37** *Dados dois pontos  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  pertencentes ao plano hiperbólico, definimos a distância hiperbólica entre esses dois pontos da seguinte maneira:*

$$d_H(A, B) = |\ln(y_A) - \ln(y_B)| \text{ caso } A \text{ e } B \text{ pertençam a uma reta do tipo I } ({}_xL);$$

$$d_H(A, B) = \left| \ln\left(\frac{x_A - c - r}{y_A}\right) - \ln\left(\frac{x_B - c - r}{y_B}\right) \right| \text{ caso } A \text{ e } B \text{ pertençam a uma reta do tipo II } ({}_cL_r).$$

**Teorema 44** <sup>7</sup> *A distância hiperbólica é uma função distância.*

**Teorema 45 (Teorema da régua)** *Dados dois pontos  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  pertencentes ao plano hiperbólico, então as funções dadas por*

$$\Omega(x, y) = \ln(y)$$

e

$$\Psi(A) = \ln\left(\frac{x_A - c - r}{y_A}\right)$$

são régua respectivamente a uma reta do tipo I ( ${}_xL$ ) e uma do tipo II ( ${}_cL_r$ ) relativas à distância hiperbólica  $d_H$ .

Exibiremos agora dois teoremas a respeito de régua, no entanto não entraremos nos méritos de suas demonstrações.<sup>8</sup>

**Teorema 46 (Teorema da recolocação da régua)** *Se  $P$  e  $Q$  são pontos distintos incidentes a uma reta  $r$  numa geometria de ordem munida de uma função distância  $d$ , então existe uma régua  $f$  onde  $f(P) = 0$  e  $f(R) > 0$  para todo ponto  $R$  pertencente à semi-reta  $\overrightarrow{PQ}$ .*

<sup>6</sup>Comumente, a definição de distância exige uma quarta propriedade chamada de desigualdade triangular ( $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$  para quaisquer  $A, B$  e  $C$ ), mas no presente trabalho decidimos utilizar essa definição seguindo o padrão utilizado na ref. [6].

<sup>7</sup>A demonstração deste e do próximo teorema podem ser encontradas no Apêndice D.

<sup>8</sup>O leitor interessado nestas, deve consultar a ref. [6].

O teorema acima nos dá a idéia intuitiva que podemos escolher um ponto qualquer em uma reta para ser o “ponto de coordenada zero” e uma direção preferencial na qual um ponto terá uma “coordenada positiva”.

**Teorema 47** *No plano hiperbólico, se  $A *_H B *_H C$  então  $d_H(A, C) = d_H(A, B) + d_H(B, C)$ .*

**Definição 38** *A relação de congruência entre segmentos no modelo hiperbólico (denotada também por  $\equiv_H$ ) é definida da seguinte forma:*

$$AB \equiv_H A'B' \Leftrightarrow d_H(A, B) = d_H(A', B')$$

Com essas definições de congruências entre ângulos e segmentos no modelo hiperbólico, seremos capazes de mostrar que o plano hiperbólico, em conjunto com a relação de congruência nesse modelo, será uma geometria de congruência, conforme a próxima proposição.

**Proposição 48** *O plano hiperbólico  $\mathcal{H} = (\Gamma_H, \mathcal{L}_H, *_H, \equiv_H)$  é um modelo de geometria de congruência.*

Demonstração:

Os axiomas  $C(2)$  e  $C(5)$  são imediatamente verificados. Verifiquemos então os demais iniciando pelo axioma  $C(1)$ .

Seja  $\overrightarrow{AB}$  uma semi-reta e  $CD$  um segmento. Considere  $k = d_H(C, D)$ . Pelo teorema da recolocação da régua, podemos encontrar uma régua  $f$  para a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  tal que  $f(A) = 0$  e  $f(B) > 0$ . Dessa maneira vemos que um ponto  $E$  é pertencente a semi-reta  $\overrightarrow{AB}$  e  $AE \equiv_H CD$ , se e somente se

$$|f(A) - f(E)| = |f(C) - f(D)| = d_H(C, D) = k \Rightarrow |0 - f(E)| = k \Rightarrow f(E) = k$$

uma vez que  $f(E) > 0$ . Com isso, concluímos que  $AE \equiv_H CD$ , se e somente se  $E = f^{-1}(k)$ . Mas existe um único ponto  $f^{-1}(k)$ , logo  $E$  é o único ponto da semi-reta  $\overrightarrow{AB}$  tal que  $AE \equiv_H CD$ .

Para a verificação de  $C(3)$ , suponha que tenhamos  $A, B, C, A', B'$  e  $C'$  pontos pertencentes ao plano hiperbólico tais que

$$A *_H B *_H C, A' *_H B' *_H C', AB \equiv_H A'B' \text{ e } BC \equiv_H B'C'.$$

Pelo teorema último teorema decorre que

$$d_H(A, C) = d_H(A, B) + d_H(B, C) = d_H(A', B') + d_H(B', C') = d_H(A', C')$$

logo  $AC \equiv_H A'C'$ .

As propriedades  $C(4)$  e  $C(6)$  são de difícil verificação e não serão apresentadas.<sup>9</sup>

C.Q.D.

Veremos em seguida um importante conjunto de axiomas, os quais formarão o que futuramente chamaremos de geometria de continuidade.

---

<sup>9</sup>A ref. [6] apresenta uma verificação dessas propriedades mas com uma abordagem diferente da que estamos utilizando.

## Capítulo 5

# GEOMETRIA DE CONTINUIDADE

Este grupo de axiomas, resultará em importantes teoremas, uma vez que a partir deles, conseguiremos correlacionar pontos de uma reta a números reais e pontos em um plano com pares de números reais, permitindo-nos medir segmentos e ângulos em qualquer geometria que respeite estas propriedades.

**Definição 39** *Seja  $\mathcal{C} = (\Gamma, L, *, \equiv)$  uma geometria de congruência. Diremos que  $\mathcal{C}$  é uma geometria de continuidade se:*

*$K(1)$  (axioma de Arquimedes): Se  $A_1B$  e  $CD$  são segmentos, então existe um número finito de pontos  $A_2, A_3, \dots, A_n$  situados na reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , tais que  $A_1 * A_2 * A_3, A_2 * A_3 * A_4, \dots, A_{n-2} * A_{n-1} * A_n$ ,  $CD$  é congruente a cada um dos segmentos  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$  e  $A_1 * B * A_n$ . (fig.5.1)*

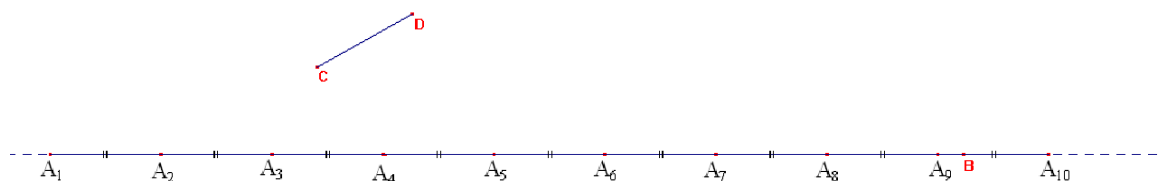


Figura 5.1: Axioma de Arquimedes

*$K(2)$  (axioma de Cantor): Seja  $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$  uma sequência infinita de segmentos contidos numa reta. Se  $A_{n+1}B_{n+1}$  está contido em  $A_nB_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e além disso, para todo segmento  $DE$  existir  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $A_kB_k$  é menor que  $DE$ , então existe um ponto  $C$  pertencente a cada um dos segmentos da sequência. (fig.5.2)*

O axioma  $K(2)$  é às vezes chamado de princípio dos intervalos encaixantes.

O axioma de Arquimedes assegura que em nossa geometria, se tomarmos dois segmentos  $CD$  ("pequeno") e  $AB$  ("grande"), independente de seus "comprimentos" poderemos

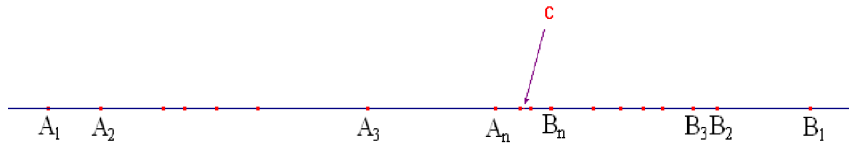


Figura 5.2: Axioma de Cantor

sempre construir um número finito de “cópias” lado a lado do segmento menor, de forma que o segmento resultante ultrapassa o maior.

Na propriedade  $K(2)$  não exigimos que o ponto  $C$  seja único, mas isto é um fato e pode ser provado, conforme faremos no teorema abaixo:

**Teorema 49** *Nas mesmas hipóteses do axioma de Cantor, existe um único ponto  $C$  pertencente a cada um dos segmentos da sequência dada.*

Dem.: Com efeito, se tomarmos um ponto  $C'$  distinto de  $C$ , então para algum número natural  $x$ , teríamos um segmento  $A_x B_x$  da sequência tal que  $A_x B_x$  é menor que  $CC'$ . Disso decorre que os pontos  $C$  e  $C'$  não podem ser simultaneamente pertencentes a  $A_x B_x$ . Como  $C$  pertence a todos os segmentos da sequência, conclui-se que  $C'$  não pode pertencer a cada um desses segmentos.

C.Q.D.

Posteriormente, veremos dois últimos e importantes axiomas que representam um dos alvos desse trabalho (o axioma das paralelas e sua negação). A geometria de continuidade, antes do estudo desses axiomas, é também chamada de *geometria neutra*.

Conforme fizemos até aqui, faremos agora a verificação de que o plano hiperbólico e o plano euclidiano são geometrias de continuidade. Essa será a última verificação feita paralelamente com os dois modelos.

**Proposição 50** *O plano euclidiano  $\mathcal{E} = (\Gamma_E, L_E, *_E, \equiv_E)$  é uma geometria de continuidade.*

Demonstração:

Para mostrarmos  $K(1)$ , usaremos o lema que segue:

**Lema 1**  $A *_E C *_E B \Rightarrow \|A - C\| + \|C - B\| = \|A - B\|.$

Demonstração:

$$A *_E C *_E B \Rightarrow C = A + t_0(B - A)$$

com

$$0 < t_0 < 1 \Rightarrow t_0 > 0 \text{ e } 1 - t_0 > 0. \text{ (I)}$$

Mas

$$C = A + t_0(B - A) \Rightarrow \|A - C\| + \|C - B\| = \|A - A - t_0(B - A)\| + \|A + t_0(B - A) - B\|$$

então

$$C = \|t_0(A - B)\| + \|A(1 - t_0) - B(1 - t_0)\| = (|t_0| + |1 - t_0|)\|A - B\|$$

logo,

$$\|A - C\| + \|C - B\| = (t_0 + 1 - t_0)\|A - B\| = \|A - B\|$$

por (I).

C.Q.D.

Observação: A recíproca desse lema também é verdadeira.<sup>1</sup>

Agora, para mostrar  $K(1)$  suponha que sejam dados os segmentos  $AB$  e  $CD$ . Sejam

$$x = \|A - B\| \text{ e } y = \|C - D\|.$$

Como  $x$  e  $y$  são números reais positivos, deve existir um número natural  $n$  tal que  $nx > y$ , uma vez que o conjunto  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  é ilimitado superiormente em  $\mathbb{R}$ . Tome na semi-reta  $\overrightarrow{CD}$  o único ponto  $C_1$  tal que  $CC_1 \equiv_E AB$  (este ponto existe pelo axioma  $C(1)$ ). Da mesma maneira, tome na semi-reta  $\overrightarrow{CC_1}$  o único ponto  $C_2$ , tal que  $C_1C_2 \equiv_E AB$ . Se repetirmos esse processo  $n$  vezes, teremos finalmente que  $C_{n-1}C_n \equiv_E AB$ . Mas então teremos  $C_{j-1}C_j \equiv_E AB$  para todo  $j$  variando de 1 até  $n$ , donde

$$nx = n\|A - B\| = \|C - C_1\| + \|C_1 - C_2\| + \dots + \|C_{n-1} - C_n\| = \|C - C_n\|$$

pelo lema acima, uma vez que  $C * C_1 * C_2, C_1 * C_2 * C_3, \dots, C_{n-2} * C_{n-1} * C_n$  por construção e de onde decorre que

$$nx = \|C - C_n\| > y = \|C - D\|.$$

Pelo teorema 42 concluímos que  $\overline{CC_n} > \overline{CD}$ . Com isso, deve existir um ponto  $X$  na semi-reta  $\overrightarrow{CC_n}$ , tal que  $C * X * C_n$  e  $CX \equiv CD$ , mas este ponto deve ser único pelo axioma  $C(1)$ , de onde teremos que  $X = D$  e então teremos  $C * D * C_n$  conforme queríamos.

$K(2)$  : Para demonstrarmos  $K(2)$ , utilizaremos alguns fatos estudados em análise, mas não faremos todas as demonstrações<sup>2</sup>.

assumiremos que o leitor esteja familiarizado com alguns termos e definições dessa teoria.

**Lema 2** *Um segmento de reta no plano euclídeo com a topologia usual em  $\mathbb{R}^2$  é um conjunto compacto.*

Demonstração:

Precisamos mostrar que um segmento é um conjunto limitado e fechado. Para isso, Tome um segmento qualquer  $AB$ . Seja  $k = d(A, B)$ , então o segmento  $AB$  está contido

<sup>1</sup>A demonstração pode ser obtida na ref. [2].

<sup>2</sup>Essas podem no entanto, ser obtidas na ref. [4].

numa bola de raio  $r = 2k$  e centro em  $A$ .

De fato,  $B$  pertence a essa bola, uma vez que

$$d(A, B) = k < 2k = r.$$

O ponto  $A$  é o centro da bola, portanto também pertence a ela. Por último, se um ponto  $C$  é tal que  $A * C * B$ , então

$$d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$$

pelo último lema, então

$$d(A, C) < d(A, B) = k < 2k$$

donde  $C$  é um ponto pertencente a referida bola. Com isso, concluímos que todo ponto do segmento  $AB$  pertence a bola de raio  $2k$  e centro  $A$ , portanto esse segmento é um conjunto limitado.

Consideraremos sem demonstração que todo segmento é um conjunto fechado (este não é um teorema de difícil demonstração).

C.Q.D.

Demonstração de  $K(2)$ :

Seja  $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$  uma sequência infinita de segmentos contidos numa reta  $\overleftrightarrow{AB}$ . Suponha que  $A_{n+1}B_{n+1}$  está contido em  $A_nB_n$  para todo número  $n$  e além disso, para todo segmento  $AB$  da sequência existir um número  $x$  tal que  $AxBx$  é menor que  $AB$ .

Os segmentos  $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$  são conjuntos compactos lema acima. Além disso,  $A_1B_1 \supset A_2B_2 \supset \dots A_nB_n \supset \dots$ . Uma vez que todos os segmentos são conjuntos não vazios, mostraremos que existe um ponto  $X$  contido em todos os segmentos da sequência.

De fato, para todo  $n$  natural escolha  $x_n$  pertencente a  $A_nB_n$ . Todos os pontos da sequência  $(x_n)$  assim obtida pertencem ao compacto  $A_1B_1$ , logo essa sequência possui uma subsequência convergente,  $x_{n_i} \rightarrow X$ . Mostraremos que  $X$  pertence a  $A_nB_n$  para todo  $n$  natural.

Com efeito, dado  $n$  arbitrariamente, deve existir  $n_{i_0} > n$  e para todo  $n_i > n_{i_0}$  temos que  $x_{n_i} \in A_{n_i}B_{n_i} \subset A_{n_{i_0}}B_{n_{i_0}} \subset A_nB_n$ . Isso é o mesmo que afirmar que a partir de um certo índice  $n_{i_0}$ , todos os termos da sequência  $(x_{n_i})$  pertencem ao fechado  $A_nB_n$ . Logo  $X = \lim x_{n_i}$  pertence a  $A_nB_n$  para qualquer  $n$  natural.

C.Q.D.

Para verificarmos que o plano de hiperbólico  $\mathcal{H} = (\Gamma_H, \mathbb{L}_H, *_H, \equiv_H)$  é uma geometria de continuidade, basta fazermos demonstrações análogas àquelas feitas no plano euclideano, tomando-se apenas o cuidado de substituir o lema 1 pelo teorema 47 e notar que o último lema é válido para o plano hiperbólico.

Enunciaremos agora, uma série de teoremas dos quais demonstraremos apenas o de número 52.<sup>3</sup>

**Teorema 51** *Existe uma única maneira de associarmos um ângulo a um número real de tal forma que:*

i) *A medida de um ângulo  $\angle A$  (denotada por  $\overline{\angle A}$ ) é um número real entre 0 e 180, isto é,  $0^\circ < \overline{\angle A} < 180^\circ$*

ii)  $\overline{\angle A} = 90^\circ \Leftrightarrow \angle A$  *é reto*

iii)  $\overline{\angle A} = \overline{\angle B} \Leftrightarrow \angle A \equiv \angle B$

iv) *Se  $C$  é um ponto interior ao ângulo  $\angle ABD$ , então  $\overline{\angle ABD} = \overline{\angle ABC} + \overline{\angle CBD}$*

v) *Para qualquer número real  $x : 0 < x < 180$ , existe  $\angle A : \overline{\angle A} = x^\circ$ ;*

vi) *Se  $\angle A$  é suplementar a  $\angle B$  então  $\overline{\angle A} + \overline{\angle B} = 180^\circ$ ,*

vii)  $\angle A \prec \angle B$  *se e somente se  $\overline{\angle A} < \overline{\angle B}$ .*

A unidade padrão e natural para compararmos medidas de ângulos é o ângulo reto, uma vez que todos eles são congruentes dois a dois.

**Teorema 52** <sup>4</sup>*Existe uma única maneira de associarmos um segmento a um número real (a medida do segmento) de tal forma que:*

i) *A medida de um segmento  $AB$  (denotada por  $\overline{AB}$ ) é um número real positivo ( $\overline{AB} > 0$ );*

ii) *Existe um segmento  $OI$  tal que  $\overline{OI} = 1$  (este segmento é chamado de **segmento unitário** ou **unidade de medida**);*

iii)  $\overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow AB \equiv CD$ ;

iii)  $A * B * C \Leftrightarrow \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ ;

iv)  $AB \prec CD \Leftrightarrow \overline{AB} < \overline{CD}$ ;

v) *Para qualquer  $x \in \mathbb{R}_+$  existe  $AB : \overline{AB} = x$ .*

Os dois últimos teoremas nos permitem a associação de ângulos e segmentos com números reais e facilitam muitas demonstrações, além de nos fornecerem subsídios para conectarmos a geometria com diversas outras teorias matemáticas.

**Teorema 53 (Saccheri-Lambert)** *A soma da medida dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor ou igual a  $180^\circ$ .*

Este último teorema pode parecer estranho a quem costuma utilizar apenas a geometria euclídeana. Alguns outros teoremas da geometria neutra podem, à primeira vista, parecer estranhos e contraditórios. Isso deve-se principalmente ao fato de não termos ainda provado a unicidade (ou não) de retas paralelas.

De fato, posteriormente precisaremos de um axioma para garantirmos a unicidade de retas paralelas (no caso da geometria euclídeana).

<sup>3</sup>As demonstrações podem ser obtidas na ref. [2].

<sup>4</sup>Consulte o Apêndice E para obter a demonstração.



**Definição 40** *O defeito de um triângulo  $ABC$  é  $180^\circ$  menos a soma da medida dos ângulos internos deste triângulo.*

$$def(ABC) = 180^\circ - (\overline{ZA} + \overline{ZB} + \overline{ZC}).$$

Do teorema Saccheri-Lambert decorre que em qualquer triângulo  $ABC$ ,  $def(ABC) \geq 0$ .

**Teorema 54 (aditividade do defeito)** *Seja  $ABC$  um triângulo e  $D$  um ponto tal que  $A * D * B$ , então  $def(ABC) = def(ACD) + def(BCD)$ .*

**Definição 41** *Dados quatro pontos  $A, B, C$  e  $D$  (nunca três deles colineares), a união dos segmentos  $AB, BC, CD$  e  $DA$  é um **quadrilátero**. Os referidos segmentos são os **lados do quadrilátero**.*

**Definição 42** *Um **retângulo** é um quadrilátero cujos ângulos formados entre seus lados são todos retos.*

**Teorema 55** *Se o defeito de um triângulo é nulo, então retângulos existem e o defeito de qualquer triângulo é nulo.*

Repare que no teorema acima não estamos afirmando que existe um triângulo cujo defeito é nulo. Este teorema apenas garante um resultado na condição de tal triângulo existir.

**Teorema 56** *Se o defeito de um triângulo é positivo, então o defeito de qualquer triângulo é positivo.*

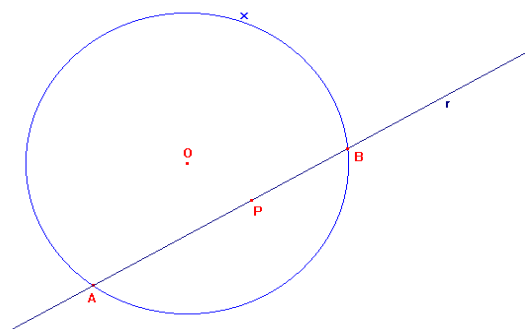
Veremos nos dois próximos capítulos que nas geometrias euclidianas, o defeito de qualquer triângulo é nulo, enquanto que nas geometrias hiperbólicas, este defeito é positivo.

**Teorema 57** <sup>5</sup> *Existe uma bijeção entre os pontos de uma reta e os números reais.*

**Teorema 58** *Numa geometria de continuidade, sempre existe uma bijeção entre os pontos desta geometria e o  $\mathbb{R}^2$ .*

**Definição 43** *Seja  $AB$  um segmento e  $O$  um ponto. A **circunferência de centro em  $O$  e raio  $AB$**  é conjunto de pontos  $Q$  tais que  $OQ \equiv AB$ . Além disso, um ponto  $E$  será um **ponto interior** a esta circunferência se  $E = O$  ou se  $EO$  não possui ponto algum da referida circunferência.*

**Teorema 59** *Se uma reta possui um ponto interior de alguma circunferência, então esta reta possui exatamente dois pontos em comum com a circunferência. (fig.5.3)*

Figura 5.3:  $P$  é ponto interior a  $x$ .

**Definição 44** Um ponto é um **ponto exterior a uma circunferência** se ele não pertencer a esta circunferência e nem for interior a ela.

**Teorema 60** Se uma circunferência possui um ponto interior e outro exterior a uma segunda circunferência, então essas duas circunferências possuem exatamente dois pontos em comum.

---

<sup>5</sup>As demonstrações desse teorema e do próximo, podem ser obtidas no apêndice E.

## Capítulo 6

# GEOMETRIA EUCLIDEANA

**Definição 45** *Seja  $\mathcal{C} = (\Gamma, L, *, \equiv)$  uma geometria de continuidade. Diremos que  $\mathcal{C}$  é uma geometria euclidiana, se:*

*P(1) Para toda reta  $r$  e para todo ponto  $P$  não incidente a  $r$ , existir uma única reta  $s$  passando por  $P$  e paralela a  $r$ .*

**Proposição 61** *O plano euclidiano é uma geometria euclidiana.*

Demonstração:

Seja  $L_k$  uma reta e  $P = (x_P, y_P)$  um ponto não incidente a  $L_k$ . Obviamente a reta  $L_{x_P}$  é paralela a  $L_k$ , pois a primeira coordenada de qualquer ponto incidente a  $L_{x_P}$  deve ser  $x_P$ , enquanto que a primeira coordenada de qualquer ponto incidente a  $L_k$  deve ser  $k$ . Mas como  $k$  é diferente de  $x_P$  ( $P$  não é incidente a  $L_k$ ) vem que  $L_k$  e  $L_{x_P}$  não possuem pontos comuns. É claro que  $P$  é incidente a  $L_{x_P}$ . Por outro lado, uma outra reta desse tipo ( $L_m$ ) não poderia passar por  $P$ , pois nesse caso teríamos  $m = x_P$  e então  $L_m = L_{x_P}$ .

Uma reta do tipo  $L_{a,b}$  nunca é paralela a uma reta do tipo  $L_k$ , pois o ponto  $(k, ak + b)$  pertence a ambas. Portanto  $L_{x_P}$  é a única reta paralela a  $L_k$  e que passa por  $P$ .

Agora, se tomarmos uma reta  $L_{m,b}$  e um ponto  $Q = (x_Q, y_Q)$  não incidente a  $L_{m,b}$ , vemos que tomando

$$b' = y_Q - mx_Q$$

decorre que a reta  $L_{m,b'}$  passa por  $Q$  e além disso,  $L_{m,b'}$  é paralela a  $L_{m,b}$  (se não fosse, teríamos para algum ponto  $(x, y)$  tal que

$$y = mx + b \text{ e } y = mx + b'$$

donde

$$b = b' = y_Q - mx_Q$$

e então  $L_{m,b}$  passaria por  $Q$ , o que contraria a hipótese). Vamos mostrar que  $L_{m,b'}$  é a única reta paralela a  $L_{m,b}$  que passa por  $Q$ .

Já vimos que uma reta do tipo  $L_k$  não pode ser paralela a uma reta do tipo  $L_{m,b}$ .

Se tivermos duas retas  $L_{m,b}$  e  $L_{a,c}$  com  $m \neq a$ , então  $L_{m,b}$  e  $L_{a,c}$  possuem um ponto comum. De fato, tome

$$x = \frac{c-b}{m-a} \text{ e } y = mx + b.$$

Claramente  $(x, y)$  pertence a  $L_{m,b}$ . Mas repare que

$$y = mx + b = m \frac{c-b}{m-a} + b = \frac{mc - mb + mb - ba}{m-a} = \frac{mc - ba}{m-a} = \frac{ac - ac + mc - ba}{m-a}$$

portanto

$$y = a \frac{c-b}{m-a} + c = ax + d.$$

Então  $(x, y)$  também pertence a reta  $L_{a,c}$ . Concluímos que duas retas  $L_{m,b}$  e  $L_{a,c}$  só podem ser paralelas se  $m = a$ . Portanto a reta  $L_{m,b'}$  é a *única* reta paralela a  $L_{m,b}$  que passa por  $Q$ , pois se existisse uma reta  $L_{m,z}$  com essa característica, teríamos que

$$z = y_Q - mx_Q = b'$$

logo  $L_{m,b'} = L_{m,z}$ .

Notamos então, que indiferente ao tipo de reta que tomarmos no plano euclidiano, se escolhermos um ponto não incidente a uma reta pré-fixada  $r$ , teremos uma única reta paralela a  $r$  passando por esse ponto.

C.Q.D.

Com esse resultado, mostramos uma afirmação feita no início desse trabalho, onde dissemos que esse modelo seria uma geometria euclidiana.

Através do corolário 1, podemos garantir que em qualquer geometria de continuidade, teremos a existência de retas paralelas, no entanto, não podemos provar que por um ponto não incidente a uma reta dada, passa uma *única* reta paralela a esta reta, uma vez que encontraremos um modelo onde isso não acontece (o modelo hiperbólico).

Em outras palavras, uma geometria de continuidade pode não ser uma geometria euclidiana. Nesse caso, diremos que esta será uma *geometria hiperbólica*.

Com o a propriedade  $P(1)$ , completamos a descrição axiomática da geometria mais comum e intuitiva que conhecemos, a geometria euclidiana. Conseguiremos com essa propriedade, mostrar uma série de teoremas que nos parecem bastante familiares. Listaremos abaixo alguns desses teoremas com os devidos comentários onde forem convenientes<sup>1</sup>.

**Teorema 62** *Se  $r$  e  $s$  são retas paralelas e  $t$  é uma reta tal que  $t$  é concorrente a  $r$  então  $t$  é também concorrente a  $s$ .*

**Definição 46** *Sejam  $r$  e  $s$  retas paralelas e  $t$  uma reta concorrente a ambas respectivamente nos pontos  $A$  e  $B$ . Se  $P \neq A$  e  $Q \neq B$  são pontos incidentes respectivamente a  $r$  e  $s$*

<sup>1</sup>As demonstrações são obtidas na ref. [2].

e além disso são tais que  $P|Q,t$  então dizemos que os ângulos  $\angle PAB$  e  $\angle SBA$  **ângulos alternos internos**.

**Teorema 63** Se duas retas paralelas são intersectadas por uma terceira, então os ângulos alternos formados são congruentes. (fig.6.1)

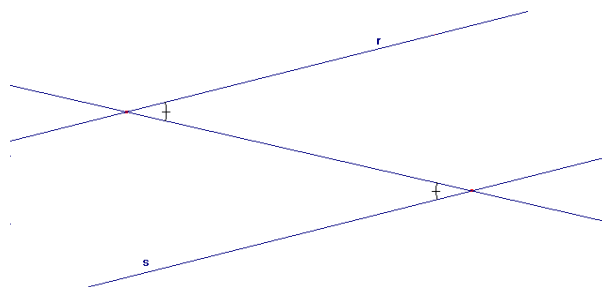


Figura 6.1:  $r$  e  $s$  são retas paralelas

**Teorema 64** Em geometria euclidiana, retângulos existem e o defeito de qualquer triângulo é nulo.

**Teorema 65** Se um quadrilátero é um retângulo, então seus lados opostos são paralelos e congruentes. (fig.6.2)

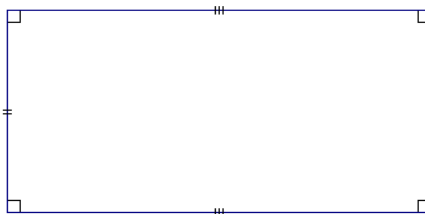


Figura 6.2: Retângulo

**Teorema 66 (Teorema de Tales)** Sejam  $r, m$  e  $n$  retas paralelas e considere  $s$  uma reta concorrente a  $r, m$  e  $n$  nos pontos  $A, B$  e  $C$  respectivamente. Considere ainda uma reta  $t$  concorrente as retas  $r, m$  e  $n$  nos pontos  $D, E$  e  $F$  respectivamente, então existem constantes  $K, J \in \mathbb{R}$  tais que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = K \text{ e } \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = J.$$

Veja figura 6.3.

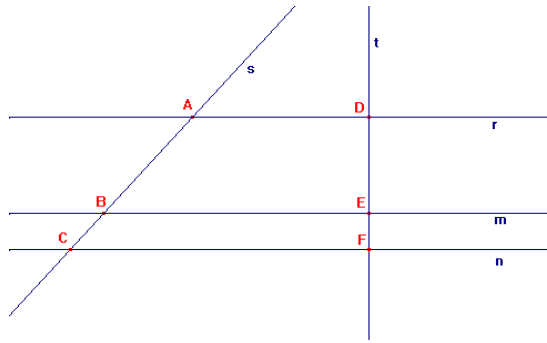


Figura 6.3: Teorema de Tales

**Definição 47** *Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  triângulos tais que  $\angle A \equiv \angle A'$ ,  $\angle B \equiv \angle B'$  e  $\angle C \equiv \angle C'$ . Além disso, assumamos que os lados homólogos sejam proporcionais, isto é,*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = K.$$

*Nessas hipóteses, diremos que os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes (notação  $ABC \sim A'B'C'$ ). (fig.6.4)*

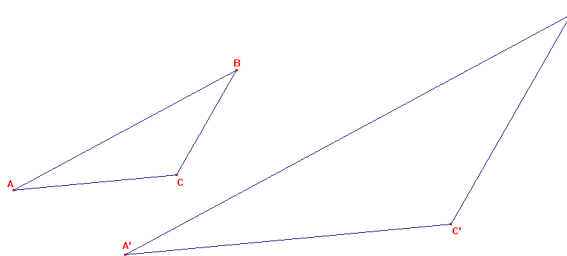


Figura 6.4:  $ABC \sim A'B'C'$

**Teorema 67** *Se em dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  tivermos*

$$\angle A \equiv \angle D \text{ e } \angle B \equiv \angle E$$

*então esses dois triângulos são semelhantes.*

**Teorema 68** *Se em dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  tivermos*

$$\angle B \equiv \angle E \text{ e } \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = K$$

*então esses dois triângulos são semelhantes.*

**Definição 48** *Um triângulo  $ABC$  é chamado de **triângulo retângulo** se  $\angle ABC$  é reto.*

**Teorema 69 (Teorema de Pitágoras)** *ABC é um triângulo retângulo com  $\angle ABC$  reto se e somente se*

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2.$$

Para o próximo teorema, lembre que o símbolo  $\perp$  representa perpendicularismo.

**Teorema 70** *Se  $a, b, c$  e  $d$  são retas distintas tais que  $a \perp b, b \perp c$  e  $c \perp d$  então  $a \perp d$ .*

Veja que pela definição de perpendicularismo decorre que esta relação é simétrica, isto é  $a \perp d \Rightarrow d \perp a$ .

# Capítulo 7

## GEOMETRIA HIPERBÓLICA

**Definição 49** *DEF.:* Seja  $\mathcal{C} = (\Gamma, L, *, \equiv)$  uma geometria de continuidade. Diremos que  $\mathcal{C}$  é uma **geometria hiperbólica** se:

$P(2)$  para toda reta  $r$  e para todo ponto  $P$  não incidente a  $r$ , existir mais de uma reta  $s$  passando por  $P$  e paralela a  $r$ .

Observe que  $P(2)$  é a precisamente a negação de  $P(1)$  (uma vez que já foi mostrado que retas paralelas existem) e portanto uma geometria hiperbólica jamais poderá ser uma geometria euclideana e vice-versa.

**Teorema 71** <sup>1</sup>Seja  $r$  uma reta e  $P$  um ponto não incidente a  $r$  em uma geometria de continuidade  $\mathcal{C}$ . Se por  $P$  passar mais de uma reta paralela a  $r$ , então  $\mathcal{C}$  é uma geometria hiperbólica.

O teorema acima garante que se por um ponto não incidente a uma reta qualquer passar mais de uma paralela a esta reta, então isso ocorrerá em toda reta  $r$  e todo ponto  $P$  não incidente a  $r$ .

Com esse teorema, torna-se muito simples verificar a próxima proposição.

**Proposição 72** *O plano de hiperbólico é uma geometria hiperbólica.*

Demonstração:

Considere a reta  ${}_0L$  e o ponto  $(2, 2)$  não incidente a  ${}_0L$ . Mostraremos que existem duas retas paralelas a  ${}_0L$  passando por  $(2, 2)$ . (fig.7.1)

Com efeito, a reta  ${}_2L$  claramente passa por  $(2, 2)$  e é paralela a  ${}_0L$  pois os pontos incidentes a  ${}_0L$  possuem a primeira coordenada nula enquanto que os pontos de  ${}_2L$  possuem a primeira coordenada igual a dois, portanto essas retas não podem ter ponto comum.

A reta  ${}_2L_2$  passa pelo ponto  $(2, 2)$  pois as coordenadas desse ponto satisfazem a equação  $(x - 2)^2 + y^2 = 2^2$ . No entanto, essa reta não possui interseção com a reta  ${}_0L$  pois se possuísse teríamos que  $(0 - 2)^2 + y^2 = 2^2$ , donde  $y = 0$  e o ponto de interseção das duas

---

<sup>1</sup>A demonstração desse teorema pode ser obtida na ref. [1].



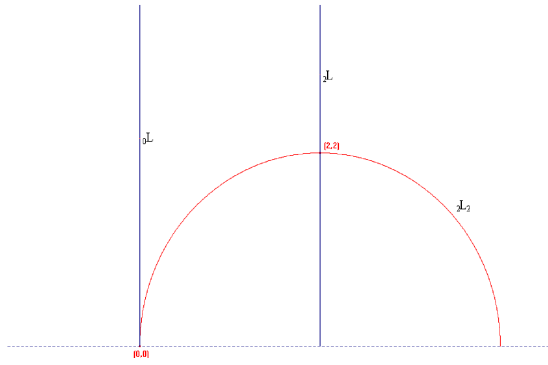


Figura 7.1: Duas retas paralelas à  ${}_0L$  passam pelo ponto  $(2, 2)$

retas não seria um ponto do plano hiperbólico. Logo as retas  ${}_2L_2$  e  ${}_2L$  são ambas paralelas a  ${}_0L$  e passam pelo ponto  $(2, 2)$  não incidente a  ${}_0L$ .

C.Q.D.

Da mesma maneira que fizemos com a geometria euclideana, listaremos agora uma série de teoremas que serão válidos a este tipo de geometria (geometria hiperbólica), os quais mais tarde auxiliarão na prova de outros fatos a respeito desse tipo de geometria<sup>2</sup>.

**Teorema 73** *Dada uma reta  $r$  e um ponto  $P$  não incidente a  $r$ , existem infinitas retas passando por  $P$  e paralelas a  $r$ .*

**Teorema 74** *Em geometria hiperbólica, retângulos não existem e todos os triângulos tem defeito positivo.*

**Teorema 75 (AAA)** *Se dois triângulos são semelhantes então eles são congruentes.*

Este teorema é chamado de AAA porque em geometria hiperbólica, se dois triângulos possuem três ângulos congruentes (são semelhantes) eles serão congruentes e portanto AAA é critério de congruência nesse tipo de geometria.

Diferente da geometria euclideana, a geometria hiperbólica possui uma unidade absoluta de comprimento pois todos os triângulos *equiláteros* (três lados e três ângulos congruentes) são semelhantes e portanto congruentes. Basta então construir um triângulo equilátero e teremos que a medida de seu lado será um constante, independente do triângulo que construímos.

**Teorema 76 (Paralelas limitantes)** *Para toda reta  $l$  e todo ponto  $P$  não incidente a  $l$ , considere  $Q$  o ponto de interseção entre as retas  $l$  e a única perpendicular a  $l$  passando por  $P$  ( $l \cap l_P^\perp = \{Q\}$ ) então existem exatamente duas semi-retas  $\overrightarrow{PX}$  e  $\overrightarrow{PX'}$  tais que  $X|X', \overleftarrow{PQ}, \overrightarrow{PX} \cap l = \overrightarrow{PX'} \cap l = \emptyset$  e além disso, apresentam a propriedade que qualquer semi-reta com origem em  $P$  possui ponto comum com  $l$  se e somente se esta semi-reta está entre  $\overrightarrow{PX}$  e  $\overrightarrow{PX'}$ . Ainda, essas paralelas limitantes estão situadas simetricamente em relação a  $\overleftarrow{PQ}$ , isto é,  $\angle XPQ \equiv \angle X'PQ$ . (fig.7.2)*

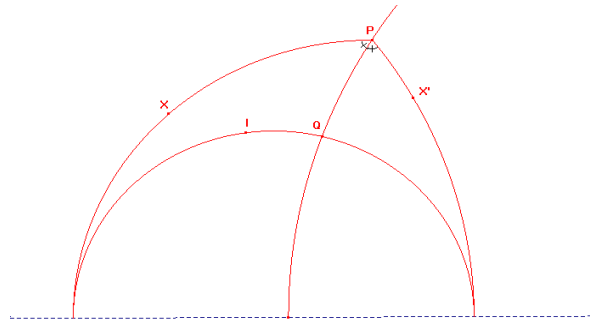


Figura 7.2:  $\overrightarrow{PX}$  e  $\overrightarrow{PX'}$  são paralelas limitantes

**Teorema 77** <sup>3</sup>Fixado um triângulo  $EFG$  e dado um segundo triângulo  $ABC$ , existe um único número real positivo chamado de **área do triângulo  $ABC$**  (denotada por  $\text{área}(ABC)$ ) que satisfaz as propriedades (i) até (iii)

- (i)  $\text{área}(EFG) = 1$ ;
- (ii) Triângulos congruentes possuem a mesma área;
- (iii) Se  $D$  é um ponto tal que  $A * D * B$  então  $\text{área}(ABC) = \text{área}(ADC) + \text{área}(DBA)$ .

**Teorema 78** Existe uma constante positiva  $k$ , tal que para qualquer triângulo  $ABC$ , a área de  $ABC$  é dada por

$$\text{área}(ABC) = \frac{\Pi}{180} k^2 \cdot \text{def}(ABC).$$

A constante  $k$  depende da escolha do segmento unitário ( $OI : \overline{OI} = 1$ )

**Corolário 2** A área de qualquer triângulo é no máximo  $\Pi k^2$ .

Entraremos a partir de agora numa nova etapa do trabalho. Estudaremos isomorfismos entre modelos e mostraremos através deles que o conjunto de axiomas tanto da geometria euclídeana quanto da geometria hiperbólica, são categóricos.

<sup>2</sup>Novamente sugerimos a ref. [2] para obter essas demonstrações.

<sup>3</sup>Na verdade este é um teorema da geometria neutra.

## **Parte II**

# **O PONTO DE VISTA MODERNO**

Estudaremos agora diversas geometrias sob um novo ponto de vista, em termos de seus *grupos de simetria*. Essa abordagem deve-se ao matemático alemão Felix Klein (1849 - 1925) que tratou o assunto em seu *Erlanger Programme* fazendo estudos sobre *grupos de transformação* e suas *características invariantes*, construindo assim, as bases de uma revolucionária visão das geometrias euclidianas e não-euclidianas, considerando-as casos particulares de uma variedade projetiva. Esta nova teoria dá sustentação para mostrar a equivalência da consistência entre esses dois tipos de geometria.

Daremos uma visão geral sobre este assunto, iniciando nosso trabalho tratando de isomorfismos entre modelos.

## Capítulo 8

# ISOMORFISMOS ENTRE MODELOS

Nesta parte do trabalho, enunciaremos um importante conceito matemático, o *isomorfismo entre modelos*. Através dele, poderemos relacionar dois modelos de uma mesma geometria de tal modo que todas as relações entre os pontos no primeiro modelo serão respeitadas no segundo e vice-versa.

Da mesma forma que ocorre com espaços vetoriais onde dois espaços isomorfos são idênticos (do ponto de vista da álgebra linear), dois modelos isomorfos de uma dada geometria devem ser pensados como indistinguíveis.

**Definição 50** *Sejam  $\mathcal{C} = (\Gamma, L, *, \equiv)$  e  $\mathcal{C}' = (\Gamma', L', *', \equiv')$  modelos de geometria de continuidade. Diremos que uma bijeção  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  é um **isomorfismo** se:*

$$IS(1) \quad A * B * D \Leftrightarrow f(A) * f(B) * f(D);$$

$$IS(2) \quad AB \equiv DE \Leftrightarrow f(A)f(B) \equiv f(D)f(E).$$

**Definição 51** *Se existe um isomorfismo  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ , diremos que os modelos  $\mathcal{C} = (\Gamma, L, *, \equiv)$  e  $\mathcal{C}' = (\Gamma', L', *', \equiv')$  são **isomorfos**.*

Um resultado obtido imediatamente da definição é que se  $f$  é um isomorfismo, então  $f^{-1}$  também será.

Repare que um isomorfismo "leva retas em retas", uma vez que três pontos colineares possuem imagens colineares. mais precisamente, veja que se  $B \in \overleftrightarrow{AD}$  com  $A \neq B \neq D$ , então  $B, A$  e  $D$  serão colineares e portanto,  $A * B * D$ ,  $A * D * B$  ou  $B * A * D$  pelo axioma  $O(3)$ , logo, por  $IS(1)$  decorre  $f(A) * f(B) * f(D)$  ou  $f(A) * f(D) * f(B)$  ou  $f(B) * f(A) * f(D)$  e então  $f(B) \in \overleftrightarrow{f(A)f(D)}$ . Reciprocamente  $f(B) \in \overleftrightarrow{f(A)f(D)} \Rightarrow B \in \overleftrightarrow{AD}$  utilizando o resultado que  $f^{-1}$  também é um isomorfismo. Obviamente este resultado também é válido para incidência de pontos em semi-retas, ou seja,  $f(B) \in \overrightarrow{f(A)f(D)} \Leftrightarrow B \in \overrightarrow{AD}$ .

**Teorema 79** *Se  $f$  for um isomorfismo, então  $f$  preserva ângulos.*

O teorema acima afirma que

$$\angle ABD \equiv \angle EFG \Leftrightarrow \angle f(A)f(B)f(D) \equiv f(E)f(F)f(G).$$

Demonstração:

De fato, suponha que  $\angle ABD \equiv \angle EFG$ . Tome os pontos  $H \in \overrightarrow{FE}$  e  $I \in \overrightarrow{FG}$  tais que  $FH \equiv BA$  e  $FI \equiv BD$  (axioma  $C(1)$ ), então teremos que  $\angle ABD \equiv \angle EFG = \angle HFI$ , uma vez que  $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FH}$  e  $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FI}$ . Logo,

$$\angle ABD \equiv \angle HFI, FH \equiv BA \text{ e } FI \equiv BD$$

e então  $ABD \equiv HFI$  pelo axioma  $C(6)$  (LAL). Dentre outros resultados, podemos concluir que  $AD \equiv HI$  e pelas propriedades do isomorfismo, vem que

$$f(A)f(D) \equiv f(H)f(I), f(F)f(H) \equiv f(B)f(A) \text{ e } f(F)f(I) \equiv f(B)f(D)$$

com isso,

$$f(A)f(B)f(D) \equiv f(H)f(F)f(I)$$

pelo teorema (LLL) e portanto

$$\angle f(A)f(B)f(D) \equiv \angle f(H)f(F)f(I).$$

Notemos agora que

$$\overrightarrow{f(F)f(H)} = \overrightarrow{f(F)f(E)} \text{ e } \overrightarrow{f(F)f(I)} = \overrightarrow{f(F)f(G)}$$

uma vez que  $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FE}$  e  $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FG}$  e  $f$  preserva semi-retas. Podemos finalmente concluir que

$$\angle f(A)f(B)f(D) \equiv \angle f(H)f(F)f(I) = \angle f(E)f(F)f(G)$$

logo

$$\angle f(A)f(B)f(D) \equiv \angle f(E)f(F)f(G).$$

C.Q.D.

Isso nos dá um resultado bastante importante. Todos os objetos definidos a partir das relações primitivas serão preservados por um isomorfismo. Por exemplo, como já havíamos discutido, teremos

$$f(B) \in \overrightarrow{f(A)f(D)} \Leftrightarrow B \in \overrightarrow{AD}$$

e além disso, os pontos da semi-reta  $\overrightarrow{f(A)f(D)}$  obedecem a ordem dos pontos da semi-reta  $\overrightarrow{AD}$  em vista da propriedade  $IS(1)$ , nos permitindo concluir que semi-retas são preservadas

por isomorfismos, já que estas são definidas com o auxílio apenas da relação de ordem  $*$ . Da mesma maneira, serão preservadas pelo isomorfismo as retas paralelas, concorrentes, perpendiculares, etc.

Intuitivamente, se um modelo for isomorfo a outro basta apenas estudarmos os aspectos geométricos num desses, pois podemos prever o que acontecerá para o outro, uma vez que todos os mesmos fenômenos se repetirão.

Faremos agora a construção de uma prova bastante importante para nosso estudo, na qual estabeleceremos que *quaisquer dois modelos de geometria euclídeana são isomorfos*.

## 8.1 Categoricalidade da geometria euclídeana

Primeiramente é importante que percebamos alguns fatos importantes. No Apêndice E, construímos uma bijeção entre os pontos de uma geometria de continuidade qualquer (em particular, uma geometria euclídeana é uma geometria de continuidade) e o espaço  $\mathbb{R}^2$ . Note que se considerarmos duas retas perpendiculares  $x$  e  $y$  ( $x \cap y = \{O\}$ ) num modelo de geometria euclídeana e tomarmos um ponto qualquer  $P$  podemos sem muita dificuldade mostrar que a bijeção construída no Apêndice E é equivalente a traçarmos a única reta perpendicular a  $x$  passando por  $P$  (denotada por  $x_P^\perp$ ) e a reta perpendicular a  $y$  passando por  $P$  (denotada por  $y_P^\perp$ ) (fig.8.1). Os pontos de interseção dessas perpendiculares com as retas  $x$  e  $y$  são denotados respectivamente por  $P_x$  e  $P_y$ . Se  $P \in y$ , então  $OP = OP_y$  e da mesma maneira se  $P \in x$ ,  $OP = OP_x$ . Caso  $P \notin x$  e  $P \notin y$ , então temos pelo teorema 65 que  $PP_x \equiv OP_y$  e  $PP_y \equiv OP_x$ , donde as coordenadas de  $P$  serão

$$\Phi(P) = (\varphi_x(P_x), \varphi_y(P_y))$$

onde  $\varphi_x$  é a bijeção entre os pontos da reta  $x$  e os números reais (construída no Apêndice E) e  $\varphi_y$  é a bijeção entre os pontos da reta  $y$  e os números reais<sup>1</sup>.

Lembre que para cada uma das funções  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$  temos que fixar um segmento unitário  $AB$  ( $\overline{AB} = \mu(AB) = 1$ ).

Construímos (também no Apêndice E), uma vez fixado um segmento  $AA'$ , a *função comprimento*  $\mu : S \rightarrow \mathbb{R}_+$  definida de tal modo a respeitar as propriedades:

$$(i) \ DE \equiv FG \Leftrightarrow \mu(DE) = \mu(FG)$$

$$(ii) \ D * E * F \Leftrightarrow \mu(DF) = \mu(DE) + \mu(EF)$$

$$(iii) \ \mu(AA') = 1.$$

Já dissemos que para cada geometria de continuidade, existe uma única função  $\mu$  com

<sup>1</sup>No Apêndice E, as bijeções são construídas fixando em  $x$  e  $y$  o ponto  $O$  e um ponto diferente de  $O$  em  $x$ , bem como um ponto diferente de  $O$  em  $y$ .

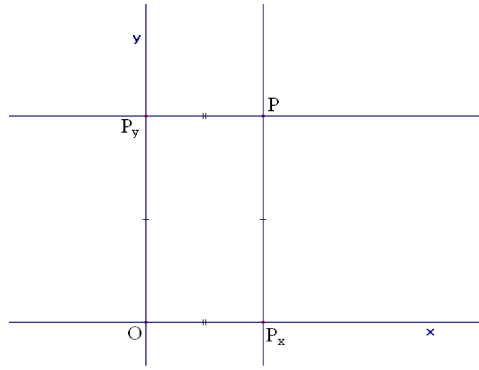


Figura 8.1:  $PP_x \equiv OP_y$  e  $PP_y \equiv OP_x$

essas características, uma vez fixado um segmento  $AA'$  para servir de unidade de medida. Daremos uma prova de que em qualquer geometria euclidiana, toda função comprimento ( $\mu$ ) deve ser igual ao comprimento em nosso modelo euclidiano, isto é,

$$\mu(AB) = \|\Phi(A) - \Phi(B)\|$$

onde  $\Phi$  representa a bijeção construída no Apêndice E (bijeção entre os pontos do plano com o espaço  $\mathbb{R}^2$ ), desde que para o segmento fixado  $AA'$ ,  $\mu(AA') = \|\Phi(A) - \Phi(A')\| = 1$ .

**Teorema 80** *Se  $\mathcal{E} = (\Gamma, L, *, \equiv)$  é uma geometria euclidiana, então*

$$\mu(AB) = \|\Phi(A) - \Phi(B)\|$$

para quaisquer  $A, B \in \Gamma$ , com  $A \neq B$ , onde  $\Phi$  é a bijeção, acima referida, entre  $\Gamma$  e o  $\mathbb{R}^2$ .

O teorema acima garante que a função  $\Phi$  preserva comprimentos.

Demonstração:

Seja  $\mathcal{E} = (\Gamma, L, *, \equiv)$  uma geometria euclidiana. Considere as retas  $x$  e  $y$  perpendiculares em um ponto  $O$ . Escolha um ponto  $A \in x$  diferente de  $O$ , tal que  $\mu(OA) = 1$  para a função  $\mu$  escolhida (isto é sempre possível através da bijeção  $\varphi_x$ ).

Para dois pontos distintos  $C$  e  $D$  temos 3 possibilidades:

- (i)  $\overleftrightarrow{CD} \perp x$ ;
- (ii)  $\overleftrightarrow{CD} \perp y$ ;
- (iii)  $\overleftrightarrow{CD}$  não é perpendicular a  $x$  e  $\overleftrightarrow{CD}$  não é perpendicular a  $y$ .

Caso (i) (Fig.8.2)

Como  $C_y C D D_y$  é retângulo então pelo teorema 65 decorre que

$$CD \equiv C_y D_y \Rightarrow \mu(CD) = \mu(C_y D_y) = |\varphi_y(C_y) - \varphi_y(D_y)|$$



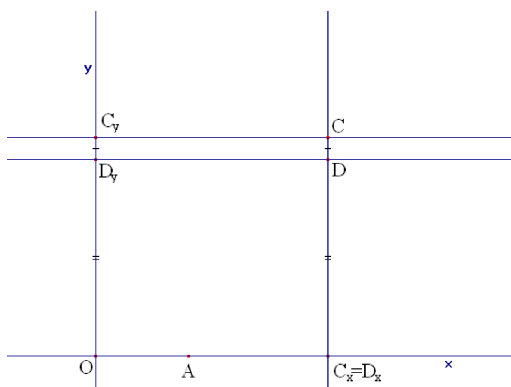


Figura 8.2:  $\overleftrightarrow{CD} \perp x$

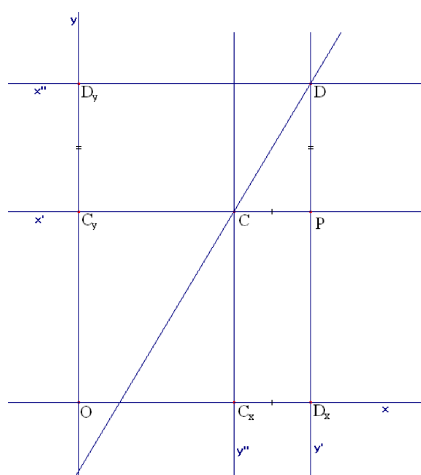


Figura 8.3:  $y' = x_D^\perp, y'' = x_C^\perp, x' = y_C^\perp$  e  $x'' = y_D^\perp$

uma vez que  $C_y, D_y \in y$ . Por outro lado

$$\|\Phi(C) - \Phi(D)\| = \|(\varphi_x(C_x), \varphi_y(C_y)) - (\varphi_x(D_x), \varphi_y(D_y))\|$$

então

$$\|\Phi(C) - \Phi(D)\| = \|(\varphi_x(C_x) - \varphi_x(D_x), \varphi_y(C_y) - \varphi_y(D_y))\|$$

e uma vez que  $\overleftrightarrow{CD}$  é a perpendicular passando por  $C$  e  $D$ ,  $C_x = D_x$  e temos

$$\|\Phi(C) - \Phi(D)\| = \|(0, \varphi_y(C_y) - \varphi_y(D_y))\| = \sqrt{0^2 + (\varphi_y(C_y) - \varphi_y(D_y))^2} = |\varphi_y(C_y) - \varphi_y(D_y)|$$

donde  $\mu(CD) = \|\Phi(C) - \Phi(D)\|$ .

Caso (ii) Análogo ao caso (i).

Caso (iii) (Fig.8.3)

Considere  $y' = x_D^\perp$  ( $y'$  é a única perpendicular a  $x$  passando pelo ponto  $D$ ), do mesmo modo,  $y'' = x_C^\perp$ ,  $x' = y_C^\perp$  e  $x'' = y_D^\perp$ . mas  $y' \perp x, x \perp y$  e  $y \perp x \Rightarrow x' \perp y'$  pelo teorema 70.

Chame de  $P$  o único ponto de interseção das retas  $x'$  e  $y'$  ( $\{P\} = x' \cap y'$ ). Com isso,  $DP = D_y C_y$  ou  $D_y D P C_y$  é retângulo e em qualquer caso

$$DP \equiv D_y C_y \Rightarrow \mu(DP) = \mu(D_y C_y)$$

e analogamente  $\mu(CP) = \mu(C_x D_x)$ .

Como  $\bar{E}$  é uma geometria euclideana, então pelo teorema de Pitágoras, teremos:

$$[\mu(CD)]^2 = [\mu(DP)]^2 + [\mu(PC)]^2 = [\mu(C_y D_y)]^2 + [\mu(C_x D_x)]^2$$

e portanto

$$[\mu(CD)]^2 = |\varphi_y(C_y) - \varphi_y(D_y)|^2 + |\varphi_x(C_x) - \varphi_x(D_x)|^2$$

uma vez que  $C_y, D_y \in y$  e  $C_x, D_x \in x$ .

Mas

$$\|\Phi(C) - \Phi(D)\|^2 = \|(\varphi_x(C_x), \varphi_y(C_y)) - (\varphi_x(D_x), \varphi_y(D_y))\|^2$$

logo,

$$\|\Phi(C) - \Phi(D)\|^2 = \|(\varphi_x(C_x) - \varphi_x(D_x), \varphi_y(C_y) - \varphi_y(D_y))\|^2$$

então

$$\|\Phi(C) - \Phi(D)\|^2 = (\varphi_x(C_x) - \varphi_x(D_x))^2 + (\varphi_y(C_y) - \varphi_y(D_y))^2$$

por isso,

$$\|\Phi(C) - \Phi(D)\|^2 = |\varphi_y(C_y) - \varphi_y(D_y)|^2 + |\varphi_x(C_x) - \varphi_x(D_x)|^2$$

e finalmente

$$[\mu(CD)]^2 = \|\Phi(C) - \Phi(D)\|^2 \Rightarrow \mu(CD) = \|\Phi(C) - \Phi(D)\|$$

já que  $\mu(CD) \geq 0$ .

C.Q.D.

Esse teorema nos permite enunciar o próximo, o qual consiste num dos focos deste trabalho

**Teorema 81** *O conjunto de axiomas da geometria euclideana é categórico.*

O teorema acima poderia também ser enunciado da seguinte maneira: todos os modelos de geometria euclideana são isomorfos dois a dois.

Uma terceira maneira seria a seguinte: todo modelo de geometria euclideana é isomorfo ao plano euclidiano.

A terceira afirmação é equivalente à segunda pelo fato de que a função inversa de um isomorfismo, bem como a composição de dois isomorfismos é um isomorfismo.

Demonstração:

Demonstraremos a terceira afirmação, que é equivalente à segunda e ao próprio enunciado do teorema.

De fato, seja dado um modelo de geometria euclídeana  $\mathcal{E} = (\Gamma, L, *, \equiv)$  e considere também o plano euclídeano  $\bar{E} = (\Gamma_E, L_E, *_E, \equiv_E)$ . Seja dada a função  $\Phi : \Gamma \longrightarrow \Gamma_E = \mathbb{R}^2$  definida por  $\Phi(P) := (\varphi_x(P_x), \varphi_y(P_y))$  (é a mesma função definida no apêndice E) é um isomorfismo. Já mostramos neste Apêndice que  $\Phi$  é bijetiva. Mostraremos agora que esta função é respeita as propriedades  $IS(1)$  e  $IS(2)$  e portanto  $\Phi$  será um isomorfismo entre  $\mathcal{E}$  e o plano euclídeano  $\bar{E}$ .

Repare que  $\Phi(P) = (\varphi_x(P_x), \varphi_y(P_y))$  é exatamente a função construída no teorema 80 para provarmos que se  $\mu$  é uma função comprimento em alguma geometria de continuidade, então  $\mu(CD) = \|\Phi(C) - \Phi(D)\|$  para quaisquer  $C \neq D$  pontos dessa geometria de continuidade.

Podemos ver então que a função  $\Phi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^2$  mantém comprimentos invariantes. Com esse resultado é muito fácil mostrarmos que  $IS(1)$  e  $IS(2)$  são assegurados. Veja que:

$IS(1)$  é mantido pois

$$A * B * C \Leftrightarrow \mu(AC) = \mu(AB) + \mu(BC)$$

pela definição de  $\mu$ , mas

$$\mu(AC) = \mu(AB) + \mu(BC) \Leftrightarrow \|\Phi(A) - \Phi(C)\| = \|\Phi(A) - \Phi(B)\| + \|\Phi(B) - \Phi(C)\|.$$

Por último,

$$\|\Phi(A) - \Phi(C)\| = \|\Phi(A) - \Phi(B)\| + \|\Phi(B) - \Phi(C)\| \Leftrightarrow A *_E B *_E C$$

pelo lema 1 e então concluímos que

$$A * B * C \Leftrightarrow A *_E B *_E C.$$

$IS(2)$

$$AB \equiv CD \Leftrightarrow \mu(AB) = \mu(CD)$$

pela definição de  $\mu$ . Mas

$$\mu(AB) = \mu(CD) \Leftrightarrow \|\Phi(A) - \Phi(B)\| = \|\Phi(C) - \Phi(D)\|$$

e pela definição de congruência entre segmentos no plano euclídeano teremos que

$$\|\Phi(A) - \Phi(B)\| = \|\Phi(C) - \Phi(D)\| \Leftrightarrow AB \equiv_E CD$$

logo

$$AB \equiv CD \Leftrightarrow AB \equiv_E CD.$$

C.Q.D.

Conforme já explicitamos anteriormente, é suficiente estudarmos o que ocorre no plano euclideo para podermos prever o que ocorrerá com as outras geometrias euclideanas.

Um outro resultado, também anteriormente comentado, é que o sistema de axiomas da geometria euclidea é categórico, isto é, quaisquer dois modelos que pudermos encontrar satisfazendo esses axiomas, serão isomorfos entre si.

É também possível demonstrar que o sistema de axiomas da geometria hiperbólica é categórico e por decorrência disso, qualquer modelo de geometria hiperbólica será isomorfo ao plano hiperbólico, o qual demonstramos ser um modelo de geometria hiperbólica. Não apresentaremos entretanto essa demonstração<sup>2</sup>, uma vez que requer conhecimentos anteriores de alguns fatos relevantes não contemplados no presente trabalho. Consideraremos no entanto que existe um isomorfismo  $\vartheta : \Gamma \longrightarrow \Gamma_H$  entre qualquer modelo de geometria hiperbólica  $\mathcal{N} = (\Gamma, L, *, \equiv)$  e o plano hiperbólico  $\mathcal{H} = (\Gamma_H, L_H, *_H, \equiv_H)$ .

Estudaremos a partir de agora os isomorfismos que podem ocorrer num mesmo modelo, denominados de *automorfismos*. Tentaremos encontrar o grupo de funções que são isomorfismos dentro de um mesmo modelo e caracterizá-lo de acordo com suas propriedades.

---

<sup>2</sup>Uma demonstração de que todos os modelos de geometria hiperbólica são isomorfos a um mesmo modelo desta geometria (são isomorfos ao modelo de geometria hiperbólica de Klein), pode ser obtida na ref. [2].

# Capítulo 9

## AUTOMORFISMOS

**Definição 52** Um *automorfismo* é um isomorfismo cujo domínio e contradomínio coincidem.

Mais precisamente, se considerarmos  $\mathcal{C} = (\Gamma, L, *, \equiv)$  uma geometria de continuidade, então  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$  é um automorfismo se e somente se é um isomorfismo.

Os automorfismos de uma geometria de continuidade possuem naturalmente a estrutura matemática de um *grupo*. Daremos a seguir uma definição formal de grupo. A partir desta, continuaremos nosso trabalho com o auxílio desse importante conceito matemático.

**Definição 53** Seja  $M$  um conjunto e  $\circ$  uma operação binária em  $M$ . Diremos que o par ordenado  $(M, \circ)$  será um **grupo** se as propriedades  $G(1)$  a  $G(3)$  abaixo forem verificadas:

$G(1)$  (elemento neutro ou identidade) Existe  $e \in M$ , tal que  $e \circ t = t \circ e = t$  para todo  $t \in M$ ;

$G(2)$  (inverso) Para todo  $t \in M$ , existe  $t^{-1} \in M$  tal que  $t \circ t^{-1} = t \circ t^{-1} = e$ ;

$G(3)$  (associatividade)  $(s \circ t) \circ u = s \circ (t \circ u)$ , para todo  $s, t, u \in M$ .

Um grupo será chamado de grupo comutativo (ou abeliano) se além das três propriedades citadas acima tivermos a comutatividade, isto é se satisfizer:

$G(4)$  (comutatividade)  $s \circ t = t \circ s$ , para todo  $s, t \in M$ .

Algumas propriedades podem ser facilmente extraídas da definição de grupo. Por exemplo, podemos provar que para todo  $t \in M$ ,  $t^{-1} \in M$  é único (o inverso de um elemento de  $M$  é único). Também é possível mostrarmos que o elemento neutro dentro de um grupo é único.

Frequentemente chamaremos de grupo a um conjunto  $G$ , ao invés do par ordenado  $(G, \circ)$ . Isso é um abuso de notação comum, utilizado quando não há dúvidas sobre qual operação estamos descrevendo.

Daremos alguns exemplos de grupo para que o leitor se familiarize com a idéia. Alguns desses exemplos serão utilizados posteriormente.

**Exemplo 1:** Seja  $M$  um conjunto e considere  $F$  o conjunto de todas as funções bijetivas de  $M$  em  $M$ , isto é,  $f \in F \Leftrightarrow f : M \rightarrow M$  é bijetiva. Considere  $\circ$  a composição

de funções, isto é,  $f \circ g(x) := f(g(x))$  para todo  $x \in M$  e  $f, g \in F$ . Podemos provar que  $(F, \circ)$  é um grupo. De fato, vemos que:

$G(1)$  é verificada porque se definirmos a função identidade em  $M$  como  $e(x) = x$  para todo  $x \in M$ , vemos que  $e$  é claramente uma bijeção e portanto  $e \in F$ . Além disso, para todo  $g \in F$  teremos,  $g \circ e(x) = g(e(x)) = g(x)$  e além disso,  $e \circ g(x) = e(g(x)) = g(x)$  para todo  $x \in M$ , logo,  $g \circ e = e \circ g = g$ , donde  $e \in F$  é a identidade.

$G(2)$  pode ser provada observando-se que para todo  $f \in F$ ,  $f$  é bijetiva e portanto existe  $f^{-1}$  tal que

$$f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x = e(x)$$

para todo  $x \in M$  e então  $f$  possui inversa.

$G(3)$  é imediatamente observada, uma vez que estamos considerando funções e então

$$(f \circ g) \circ h(x) \text{ e } f \circ (g \circ h)(x)$$

representam a mesma função  $f(g(h(x)))$  para todo  $x \in M$ , logo  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$  e a propriedade associativa é verificada.

Observe que  $(F, \circ)$  não forma em geral um grupo abeliano, pois nem sempre teremos  $f \circ g(x) = g \circ f(x)$  com  $x \in M$ .

**Exemplo 2:** Seja  $O(2)$  o conjunto de todas as matrizes ortogonais  $2 \times 2$ , isto é

$$A \in O(2) \Leftrightarrow A \circ A^t = I$$

onde  $\circ$  denota o produto entre matrizes,  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$ ,  $A^t$  é sua transposta e  $I$  é a matriz identidade. Considere a operação  $\circ$  como sendo o produto entre matrizes, então o par ordenado  $(O(2), \circ)$  é um grupo.

Para verificarmos  $G(1)$  por exemplo, basta tomarmos a matriz  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e então teremos que para todo  $A \in O(2)$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  para uma certa escolha de  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Mas então

$$A \circ I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

além disso

$$I \circ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A.$$

Obviamente  $I \in O(2)$  pois  $I^t = I$  e então  $I \circ I^t = I^t \circ I = I$ . Logo a matriz  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  é a identidade em  $O(2)$ .

$G(2)$  pode ser verificada. Basta notarmos que para todo  $A \in O(2)$ ,  $A^t = A^{-1}$ . De fato  $A \in O(2) \Rightarrow A \circ A^t = I$ , além disso, é fácil notar que  $(A^t)^t = A$  e então teremos também

que

$$A^t \circ A = A^t \circ (A^t)^t = I.$$

$G(3)$  : É suficiente vermos que o produto de matrizes é sempre associativo e em particular o produto de matrizes ortogonais também deve ser associativo, logo

$$A, B, C \in O(2) \Rightarrow (A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C).$$

Precisamos ainda mostrar que a operação  $\circ$  é fechada para matrizes ortogonais, isto é, precisamos provar que o produto de duas matrizes ortogonais de ordem 2 por 2 é ainda uma matriz ortogonal da mesma ordem, ou seja,

$$A, B \in O(2) \Rightarrow (A \circ B) \circ (A \circ B)^t = I.$$

Mas veja que

$$A \circ A^t = I \Rightarrow B \circ A \circ A^t = B \circ I = B \Rightarrow B \circ A \circ A^t \circ B^t = B \circ B^t = I \Rightarrow B \circ A \circ (A^t \circ B^t) = I.$$

Basta então provarmos que  $(A^t \circ B^t) = (B \circ A)^t$ . Para isso, mostraremos um teorema válido para qualquer grupo.

**Teorema 82** *Seja  $(M, \circ)$  um grupo. Para quaisquer  $f, g \in M$  temos*

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Demonstração:

Precisamos mostrar que  $(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = e$  uma vez que a inversa é única e então teremos que  $(f \circ g)^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1})$ . De fato,  $(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ e \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = e$ . por outro lado,  $(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g = g^{-1} \circ e \circ g = g^{-1} \circ g = e$ .

C.Q.D.

Repare que para demonstrarmos o teorema acima, usamos apenas as propriedades  $G(2)$  e  $G(3)$ , então esse teorema deve ser válido para para nosso exemplo das matrizes ortogonais, pois já verificamos essas duas propriedades.

Mas se o teorema acima é válido para nosso exemplo, basta repararmos que

$$(A^t \circ B^t) = (A^{-1} \circ B^{-1}) = (B \circ A)^{-1} = (B \circ A)^t$$

C.Q.D.

Observe novamente que este grupo também não é abeliano, pois matrizes em geral não comutam.

Enunciaremos a seguir, um importante teorema para a respeito de automorfismos.

**Teorema 83** *Seja  $\mathcal{G}$  uma geometria. Chame de  $Aut(\Gamma)$  o conjunto de todos os automorfismos de  $\Gamma$ , onde  $\Gamma$  é o conjunto de pontos de  $\mathcal{G}$ . Então o par ordenado  $(Aut(\Gamma), \circ)$  é um grupo, onde  $\circ$  representa a composição de funções de  $\Gamma$  em  $\Gamma$ .*

Demonstração:

Precisamos verificar as propriedades  $G(1)$  a  $G(3)$ .

Observe que  $\circ$  é uma operação binária em  $Aut(\Gamma)$  pois se  $S : \Gamma \rightarrow \Gamma$  e  $T : \Gamma \rightarrow \Gamma$  são automorfismos no conjunto  $\Gamma$ , é fácil verificar que a composição de dois automorfismos é ainda um automorfismo, ou seja,  $S \circ T : \Gamma \rightarrow \Gamma$  é um automorfismo em  $\Gamma$ .

$G(1)$  A identidade de  $Aut(\Gamma)$  é a própria identidade em  $\Gamma$ , ou seja  $e(x) = x$  para todo  $x \in \Gamma$ . De fato,  $e$  é claramente um automorfismo e para qualquer  $T \in Aut(\Gamma)$  e para qualquer  $x \in \Gamma$ ,

$$T \circ e(x) = T(e(x)) = T(x) \text{ e } e \circ T(x) = e(T(x)) = T(x).$$

$G(2)$  Todo automorfismo é uma bijeção e por isso é inversível. Não é trabalhoso mostrar que a função inversa de um automorfismo ainda é um automorfismo e com isso ganhamos que para qualquer  $f \in Aut(\Gamma)$ ,  $f^{-1} \in Aut(\Gamma)$  e ainda, para todo  $x \in \Gamma$ ,  $f \circ f^{-1}(x) = x = e(x)$  e também,  $f^{-1} \circ f(x) = x = e(x)$ .

$G(3)$  Já vimos no primeiro exemplo de grupo que esta propriedade é sempre verificada quando estamos utilizando funções.

C.Q.D.

**Definição 54** *Sejam  $(G, \circ)$  e  $(H, \#)$  grupos. Diremos que  $f : G \rightarrow H$  é um **homomorfismo** se  $f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) \# f(g_2)$  para quaisquer  $g_1, g_2 \in G$ .*

Esta definição é bastante importante, pois nos permite relacionar grupos distintos. Podemos sem muita dificuldade provar que em todo homomorfismo  $f : G \rightarrow H$  ocorre:

$$f(e_G) = e_H, \text{ onde } e_G \text{ e } e_H \text{ são as identidades em } G \text{ e } H \text{ respectivamente;}$$

$$f(g^{-1}) = (f(g))^{-1} \text{ para qualquer } g \in G.$$

Definiremos agora importante conceito para o estudo da teoria dos grupos, que nos permitirá relacionar grupos de automorfismos de modelos isomorfos de geometria.

**Definição 55** *Sejam  $(G, \circ)$  e  $(H, \#)$  grupos. Diremos que  $f : G \rightarrow H$  é um **isomorfismo de grupos** se  $f$  for um homomorfismo e ao mesmo tempo bijetiva.*

Como já comentamos nos isomorfismos entre modelos, também aqui, os isomorfismos de grupos nos dão suporte para que em determinados casos, seja necessário estudarmos apenas propriedades de um único grupo, uma vez que torna-se previsível o que ocorrerá em outros que são isomorfos a este.

**Teorema 84** *Se  $f : G \rightarrow H$  é um isomorfismo de grupo então  $f^{-1} : H \rightarrow G$  também é.*



Demonstração:

Primeiramente repare  $f^{-1}$  existe e é bijetiva, uma vez que  $f$  é bijetiva. Resta apenas, mostrarmos que  $f^{-1}$  é um homomorfismo, mas isso decorre do fato que  $f$  é sobrejetiva, então para cada  $h_1, h_2 \in H$ , devem existir  $g_1, g_2 \in G$  tais que  $f(g_1) = h_1$  e  $f(g_2) = h_2$ . Além disso,  $f$  é um homomorfismo então, para quaisquer  $g_1, g_2 \in G$ ,

$$f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) \# f(g_2) \Rightarrow f^{-1}(f(g_1 \circ g_2)) = f^{-1}(f(g_1) \# f(g_2))$$

por isso,

$$f^{-1}(h_1) \circ f^{-1}(h_2) = g_1 \circ g_2 = f^{-1}(f(g_1) \# f(g_2)) = f^{-1}(h_1 \# h_2)$$

para quaisquer  $h_1, h_2 \in H$ .

C.Q.D.

**Teorema 85** *Se  $\varphi : C \rightarrow E$  é um isomorfismo entre geometrias, então a função  $\Psi : Aut(C) \rightarrow Aut(E)$  definida por  $f \mapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  é isomorfismo de grupos.*

Demonstração:

Primeiramente precisamos verificar que  $\Psi$  está bem definida, isto é,

$$f \in Aut(C) \Rightarrow \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \in Aut(E).$$

Isso ocorre porque  $f : C \rightarrow C$  é um automorfismo (e portanto isomorfismo). Como  $\varphi$  é um isomorfismo, podemos dizer que também  $\varphi^{-1}$  também é. Sabemos ainda que a composição de dois isomorfismos é um isomorfismo, portanto,  $f \circ \varphi^{-1} : E \rightarrow C$  é um isomorfismo. Mas  $\varphi$  é um isomorfismo por hipótese e então a composição  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : E \rightarrow E$  é um isomorfismo do conjunto  $E$  para  $E$  (automorfismo em  $E$ ), donde

$$\Psi(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \in Aut(E).$$

Afirmamos que  $\Psi$  é um homomorfismo pois para quaisquer  $f_1, f_2 \in Aut(C)$  temos que

$$\Psi(f_1) \circ \Psi(f_2) = (\varphi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ f_2 \circ \varphi^{-1}) = \varphi \circ f_1 \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ f_2 \circ \varphi^{-1}$$

logo

$$\Psi(f_1) \circ \Psi(f_2) = \varphi \circ f_1 \circ e \circ f_2 \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ f_1 \circ f_2 \circ \varphi^{-1} = \Psi(f_1 \circ f_2).$$

Falta apenas provar que  $\Psi$  é uma bijeção, mas para isso usaremos o fato de que qualquer função é bijetiva se e somente se possuir inversa. Mostraremos que  $\Psi$  possui inversa. Com efeito, para todo  $f \in Aut(E)$ , defina  $\Psi^*(f) = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$  (é fácil ver, por um raciocínio análogo ao que fizemos acima que  $\Psi^*$  está bem definida). Teremos com isso

que

$$\Psi \circ \Psi^*(f) = \Psi(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi) = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = e \circ f \circ e = e \circ f = e_{Aut(E)}(f).$$

onde  $e_{Aut(E)}$  denota a identidade em  $Aut(E)$ .

Analogamente, teremos que  $\Psi^* \circ \Psi(f) = e_{Aut(C)}(f)$  e portanto

$$\Psi^* \circ \Psi = e_{Aut(C)}$$

e

$$\Psi \circ \Psi^* = e_{Aut(E)}$$

donde  $\Psi^*$  é a inversa de  $\Psi$ , logo  $\Psi$  é bijetiva. Já mostramos que esta função é um homomorfismo, decorre então que ela é um isomorfismo de grupo.

C.Q.D.

O teorema acima tem importante significado porque ele prova que sempre que existir um isomorfismo entre dois modelos, os grupos de automorfismo dessas geometrias serão isomorfos. Em particular, mostramos no início dessa seção que quaisquer dois modelos de geometria euclidiana são isomorfos e como decorrência do último teorema que demonstramos, *o grupo de automorfismos de quaisquer duas geometrias euclidianas são isomorfos*.

Com essa observação, vemos que se torna desnecessário o estudo de automorfismos em *todos* os modelos de geometria euclidiana separadamente. Podemos apenas estudar o grupo de automorfismos em nosso plano euclidiano que indiretamente saberemos o que ocorre com o grupo de automorfismos de outros modelos deste mesmo tipo de geometria por intermédio do isomorfismo de grupos construído no último teorema.

A partir de agora, retornaremos à nossa análise geométrica e iniciaremos estudando o grupo de automorfismos do plano euclidiano. Tentaremos encontrar, quais tipo de transformações conservam incidência (levam retas em retas). Chamaremos estas transformações de *colineações*. Obviamente um isomorfismo deve ser uma colineação, pois já provamos que todo isomorfismo preserva retas. A partir do momento em que identificarmos as colineações, examinaremos o subconjunto dessas que preservam as relações de ordem (estar entre) e congruência, para finalmente chegarmos no grupo dos isomorfismos.

## 9.1 Automorfismos no plano euclidiano

Começemos nosso estudo através das colineações.

**Definição 56** *Sejam  $\mathcal{C} = (\Gamma, \mathbb{L}, *, \equiv)$  e  $\mathcal{C}' = (\Gamma', \mathbb{L}', *', \equiv')$  geometrias de continuidade. Uma função  $f: \Gamma \rightarrow \Gamma'$  é uma colineação se  $f$  preserva retas, isto é, se  $A, B$  e  $C$  são três pontos colineares em  $\Gamma$ , então  $f(A), f(B)$  e  $f(C)$  são colineares em  $\Gamma'$ .*

**Teorema 86** *Se uma colineação é uma bijeção, então sua inversa também será uma colineação*

Demonstração:

Sejam  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{G}'$  geometrias de continuidade,  $\Gamma_{\mathcal{G}}$  e  $\Gamma_{\mathcal{G}'}$  o conjunto de pontos de  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{G}'$  respectivamente e  $f : \Gamma_{\mathcal{G}} \rightarrow \Gamma_{\mathcal{G}'}$  uma colineação bijetiva. Fixe  $l'$  como sendo uma reta de  $\mathcal{G}'$  e  $x', y' \in l', x' \neq y'$ . Sejam  $x := f^{-1}(x'), y := f^{-1}(y')$ , então  $x \neq y$  e existe uma única reta de  $\mathcal{G}$ , digamos  $l$ , com  $x, y \in l$ . Afirmamos que  $l = f^{-1}(l')$ .

De fato, se  $z \in l$ ,  $x, y$  e  $z$  são colineares e pela unicidade da reta,  $l' = \overleftrightarrow{x'y'}$ ,  $f(z) \in l'$  e portanto  $l \subset f^{-1}(l')$ .

Agora, seja  $z \in f^{-1}(l')$ . Se  $z = x$  ou  $z = y$  então  $z \in l$ . Por outro lado, se  $z \neq x$  e  $z \neq y$  sejam  $l_1 = \overleftrightarrow{zx}$  e  $l_2 = \overleftrightarrow{zy}$ .  $f(l_1)$  e  $f(l_2)$  são retas em  $\mathcal{G}'$  e  $f(z) \in f(l_1) \cap f(l_2) \cap l'$ . Sendo  $f(z), x'$  e  $y'$  colineares,  $f(l_1) = f(l_2) = l'$ .

Se fosse  $l_1 \neq l_2$  existiria  $z'' \in l_1 \setminus l_2$  (ou  $l_2 \setminus l_1$ ). Se  $z'' \in l_1$ ,  $f(z'') \in f(l_1) = f(l_2)$ , donde existiria  $w \in l_2$  com  $f(z'') = f(w) \Rightarrow z'' = w$  e portanto  $z'' \in l_2$  o que é uma contradição. Resultado análogo se  $z'' \in l_2 \setminus l_1$ .

Logo,  $l_1 = l_2$  e  $x, y$  e  $z$  são colineares, donde  $z \in l$  e portanto  $f^{-1}(l') \subset l$ .

Com isso, temos que  $f^{-1}(l')$  é uma reta em  $\mathcal{G}$  e  $f^{-1}$  preserva retas.

C.Q.D.

Usaremos aqui, alguns fatos corriqueiros de álgebra linear para demonstrarmos os próximos teoremas.

É fácil vermos que a composição de duas colineações é ainda uma colineação. Existe ainda um teorema de geometria projetiva enunciado a seguir

**Teorema 87** *Se três pontos não-colineares se mantiverem fixos numa colineação, então essa colineação é a identidade e portanto todos os pontos mantêm-se fixos<sup>1</sup>.*

Enunciaremos a seguir um importante teorema

**Teorema 88** *Se  $\bar{E} = (\Gamma_E, \mathbb{L}_E, *_E, \equiv_E)$  é o plano euclidiano e  $f : \Gamma_E \rightarrow \Gamma_E$  definida por*

$$f(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$$

*é bijetiva e uma colineação, então  $g_1$  e  $g_2$  são funções afins, isto é*

$$g_1(x, y) = ax + by + e \text{ e } g_2(x, y) = cx + dy + f.$$

Demonstração:

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma colineação bijetiva.

Chame  $O' = f(0, 0)$ ,  $A' = f(1, 0)$  e  $B' = f(0, 1)$ . Como  $f^{-1}$  é colineação,  $O', A'$  e  $B'$  são não colineares e portanto  $(A' - O')$  e  $(B' - O')$  são linearmente independentes e

---

<sup>1</sup>Veja demonstração na ref. [1].

portanto formam uma base para o  $\mathbb{R}^2$ . Defina  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Como sendo,  $\varphi(x, y) := x(A' - O') + y(B' - O') + O'$ . Afirmamos que  $\varphi$  é uma colineação.

De fato, sejam  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  e  $(x_3, y_3)$  pontos distintos e colineares. Então existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $x_3 - x_1 = \lambda(x_2 - x_1)$  e  $y_3 - y_1 = \lambda(y_2 - y_1)$ . Mas então

$$\varphi(x_3, y_3) - \varphi(x_1, y_1) = (x_3 - x_1)(A' - O') + (y_3 - y_1)(B' - O')$$

e assim

$$\varphi(x_3, y_3) - \varphi(x_1, y_1) = \lambda(x_2 - x_1)(A' - O') + \lambda(y_2 - y_1)(B' - O')$$

e por fim

$$\varphi(x_3, y_3) - \varphi(x_1, y_1) = \lambda(\varphi(x_2 - y_2) - \varphi(x_1 - y_1))$$

donde,  $\varphi(x_3, y_3)$ ,  $\varphi(x_2, y_2)$  e  $\varphi(x_1, y_1)$  são colineares, provando nossa afirmação.

Afirmamos também que  $f = \varphi$ .

Com efeito, temos que

$$\varphi \circ f^{-1}(A') = \varphi(1, 0) = (A' - O') + O' = A'$$

ainda,

$$\varphi \circ f^{-1}(B') = \varphi(0, 1) = (B' - O') + O' = B'$$

além disso,

$$\varphi \circ f^{-1}(O') = \varphi(0, 0) = O'.$$

Como  $\varphi \circ f^{-1}$  fixa três pontos não-colineares, pelo último teorema decorre que  $\varphi \circ f^{-1} = I_{\mathbb{R}^2}$  (é a identidade em  $\mathbb{R}^2$ ) e portanto  $f = \varphi$ , conforme queríamos.

Finalmente se escrevermos  $A' - O' = (a, c)$ ,  $B' - O' = (b, d)$  e  $O' = (e, f)$ , então  $f(x, y) = x(a, c) + y(b, d) + (e, f)$  ou

$$f(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$$

C.Q.D.

Na forma matricial, o último teorema pode ser enunciado da seguinte forma:

**Teorema 89** *Se  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma colineação bijetiva, então*

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

O último teorema impõe uma grande restrição nas funções que podem ser colineações no plano euclideo, exigindo que estas sejam transformações afins. Sabemos que para uma transformação ser um isomorfismo é necessário ainda que essa mantenha as relações

de ordem e congruência. Estudaremos a partir de agora, o conjunto de transformações afins que respeitam essas relações.

**Definição 57** *Seja  $\mathcal{C} = (\Gamma, L, *, \equiv)$  uma geometria de continuidade. Uma transformação  $T : \Gamma \rightarrow \Gamma$  será chamada de **isometria** se para todo segmento  $AB$  dessa geometria,  $\mu(AB) = \mu(T(A)T(B))$ , onde  $\mu$  é uma função medida<sup>2</sup>.*

Uma isometria, portanto nada mais é que uma transformação que preserva medidas.

**Definição 58** *Se  $(G, \circ)$  é um grupo, então um grupo  $(H, \#)$  será um **subgrupo** de  $(G, \circ)$  se e somente se  $H \subset G$  e  $\#$  coincide com a restrição de  $\circ$  a  $H \times H$ .*

Como já comentamos e seguindo a prática usual, nos referimos a um grupo sem menção explícita à sua operação quando não houver risco de confusão. Podemos mostrar vários fatos a respeito de subgrupos, como por exemplo: "Se  $e \in G$  é a identidade no grupo  $G$  então também será a identidade no subgrupo  $H \subset G$ " mas não entraremos em muitos detalhes a respeito de subgrupos.

Uma definição equivalente para subgrupo é a seguinte: se  $H \subset G$ , com  $G$  um grupo,  $H \neq \emptyset$  e para quaisquer  $h_1, h_2 \in H$  tivermos que  $h_1 \circ h_2^{-1} \in H$  então  $H$  é subgrupo de  $G$ . Através dessa equivalência, torna-se mais simples verificarmos em alguns casos que um determinado subconjunto é um subgrupo de um dado grupo.

**Teorema 90** *Em qualquer geometria de continuidade, toda isometria é um automorfismo e além disso, as isometrias formam um subgrupo do grupo de automorfismos.*

A demonstração desse teorema é relativamente simples e não será feita<sup>3</sup>.

**Teorema 91** *Numa geometria de continuidade, se  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  são três pontos não-colineares tais que  $A' = T(A)$ ,  $B' = T(B)$  e  $C' = T(C)$ , onde  $T$  é um isomorfismo, então os triângulos  $A'B'C'$  e  $ABC$  são semelhantes.*

Demonstração:

Já mostramos que todo isomorfismo preserva ângulos e por isso,  $\angle A \equiv \angle A'$ ,  $\angle B \equiv \angle B'$  e  $\angle C \equiv \angle C'$  e disso decorre imediatamente a tese do teorema.

C.Q.D.

Por conta deste último teorema, diremos que todo automorfismo é uma *similaridade*.

**Teorema 92** *Uma transformação  $T$  com domínio e contradomínio iguais ao conjunto de pontos de um modelo de geometria euclídeana com a função medida  $\mu$  é uma similaridade se e somente se existe uma constante positiva  $k$ , tal que  $\mu(A'B') = k\mu(AB)$  para todo segmento  $AB$  (obs.:  $A' = T(A)$  e  $B' = T(B)$ ).*

<sup>2</sup>Veja definição precisa da função medida  $\mu$  no Apêndice E.

<sup>3</sup>Tanto essa quanto as próximas demonstrações consideradas "simples", podem ser obtidas na ref. [2].

A demonstração desse teorema também é simples e não será feita.

Podemos citar como exemplo de um automorfismo que não é uma isometria a *dilatação* com centro  $O$  e raio  $k \neq 0$ . Se  $k > 0$  (respectivamente  $k < 0$ ), a dilatação fixa o ponto  $O$  e mapeia um ponto  $P \neq O$  qualquer do plano no único ponto da semi-reta  $\overrightarrow{OP}$  (respectivamente  $\overrightarrow{OP^{op}}$ ) no ponto  $P'$  tal que  $\mu(OP') = |k|\mu(OP)$ .

**Teorema 93** *Em qualquer modelo de geometria hiperbólica, o conjunto das isometrias é igual ao conjunto de automorfismos.*

Demonstração:

Decorrencia do teorema 75 que garante que os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes se e somente se são congruentes, donde  $\mu(AB) = \mu(A'B')$ .

C.Q.D.

Apesar do grupo de isometrias não coincidir com o grupo de automorfismos nas geometrias euclidianas (ao contrário da geometria hiperbólica onde esses dois grupos são iguais de acordo com o último teorema), sabemos que as isometrias são um subgrupo do grupo dos automorfismos e além disso, sabemos que todo isomorfismo pode ser visto como uma isometria a menos de um fator multiplicativo (teorema 92). Iremos então, ao invés de estudar os isomorfismos no plano euclidiano, estudar as isometrias.

### 9.1.1 Isometrias no plano euclidiano

Para que uma transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  seja uma isometria, precisamos que para quaisquer  $A, B \in \mathbb{R}^2$  tenhamos,  $\|A - B\| = \|A' - B'\|$ , onde  $A' = T(A)$  e  $B' = T(B)$ . Mas sabemos pelo teorema 89 que  $T(A) = M(A) + G$ , onde  $M$  é uma matriz dois por dois e  $G$  é um vetor. Então precisamos que  $\|A - B\| = \|A' - B'\|$ . Com isso:

$$\|A - B\| = \|A' - B'\| = \|T(A) - T(B)\| = \|(M(A) + G) - (M(B) + G)\| = \|M(A) - M(B)\|$$

então

$$\|A - B\| = \|M(A - B)\|$$

Se denotarmos  $C = A - B$  conseguimos:

$$\|C\| = \|M(C)\| \Leftrightarrow \|C\|^2 = \|M(C)\|^2 = \langle C, C \rangle = \langle M(C), M(C) \rangle.$$

Chamemos  $C = (x_C, y_C)$  e  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Vemos que:

$$x_C^2 + y_C^2 = \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} \right\rangle$$

então,

$$x_C^2 + y_C^2 = \langle (ax_C + by_C, cx_C + dy_C), (ax_C + by_C, cx_C + dy_C) \rangle$$

ou

$$x_C^2 + y_C^2 = (a^2 + c^2)x_C + 2(ab + cd)x_C y_C + (b^2 + d^2)y_C.$$

Mas isso deve ser válido para todo  $(x_C, y_C)$  e portanto temos que

$$x_C^2 + y_C^2 = (a^2 + c^2)x_C + 2(ab + cd)x_C y_C + (b^2 + d^2)y_C \Leftrightarrow a^2 + c^2 = 1$$

com  $ab + cd = 0$  e  $b^2 + d^2 = 1$ .

Repare que para  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , e a matriz transposta de  $M$  será  $M^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  e por isso,

$$MM^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

e então teremos que

$$MM^t = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = MM^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz identidade.

Segue da dedução feita acima o seguinte teorema:

**Teorema 94** *No plano euclidiano, uma isometria  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , é da forma:  $T(A) = M(A) + G$ , onde  $M$  é uma matriz ortogonal dois por dois e  $G$  é um vetor do espaço  $\mathbb{R}^2$ .*

Já mostramos no exemplo 2 de grupos, que o conjunto das matrizes ortogonais ( $O(2)$ ) forma um grupo com respeito ao produto usual entre matrizes.

Enunciamos um teorema anteriormente onde afirmamos que o conjunto das isometrias é um grupo. Podemos por simples ilustração, mostrar por exemplo que a inversa de uma isometria  $T(A) = M(A) + G$  é a isometria  $T^{-1}(A) = M^t(A) + (-M^t(G))$ .

Com efeito,

$$T \circ T^{-1}(A) = M((M^t(A) + (-M^t(G))) + G) = M \circ M^t(A) - MM^t(G) + G$$

e disso,

$$T \circ T^{-1}(A) = I(A) - I(G) + G = A - G + G = A.$$

**Definição 59** *Uma transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma **translação** se  $T(x, y) = (x, y) + (a, b)$  onde  $(a, b)$  é pré-fixado. Indicaremos que **T** é uma **translação relativa a  $(a, b)$**  por*

$$T_{(a,b)}(x, y) = (x, y) + (a, b).$$

**Teorema 95** *O conjunto  $T$  de todas as translações é um grupo abeliano (ou comutativo) com respeito a composição.*

Demonstração:

$G(1)$   $T_{(0,0)} \in T$  e além disso, para qualquer  $T_{(a,b)} \in T$ ,

$$T_{(a,b)} \circ T_{(0,0)} = T_{(a+0,b+0)} = T_{(a,b)} = T_{(0+a,0+b)} = T_{(0,0)} \circ T_{(a,b)}.$$

$G(2)$  Para todo  $T_{(a,b)} \in T$ , tome  $T_{(-a,-b)} \in T$  e então,

$$T_{(a,b)} \circ T_{(-a,-b)} = T_{(a+(-a),b+(-b))} = T_{(0,0)} = T_{(-a+a,-b+b)} = T_{(-a,-b)} \circ T_{(a,b)}.$$

$G(3)$

$$(T_{(a,b)} \circ T_{(c,d)}) \circ T_{(e,f)} = (T_{(a+c,b+d)}) \circ T_{(e,f)} = T_{(a+c+e,b+d+f)} = T_{(a,b)} \circ (T_{(c+e,d+f)})$$

logo,

$$(T_{(a,b)} \circ T_{(c,d)}) \circ T_{(e,f)} = T_{(a,b)} \circ (T_{(c,d)} \circ T_{(e,f)}).$$

$G(4)$  Para quaisquer  $T_{(a,b)}, T_{(c,d)} \in T$  teremos,

$$T_{(a,b)} \circ T_{(c,d)} = T_{(a+c,b+d)} = T_{(c+a,d+b)} = T_{(c,d)} \circ T_{(a,b)}.$$

C.Q.D.

O espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$  é um grupo abeliano em relação à soma de vetores pela própria definição dada a espaço vetorial. Essa observação nos permite enunciar o próximo teorema.

**Teorema 96** *A função  $I : (\mathbb{R}^2, +) \rightarrow (T, \circ)$  definida por  $I(x, y) = T_{(x,y)}$  é um isomorfismo de grupos.*

Demonstração:

$I$  é um homomorfismo pois

$$I((a, b) + (c, d)) = I((a + c, b + d)) = T_{(a+c,b+d)} = T_{(a,b)} \circ T_{(c,d)} = I(a, b) \circ I(c, d).$$

Além disso, claramente  $I$  é bijetiva.

C.Q.D.

Sabemos que o conjunto de todas as isometrias é um subgrupo do grupo dos automorfismos e portanto as próprias isometrias formam um grupo.

### 9.1.2 O produto semi-direto

**Definição 60** *Sejam  $(N, \circ)$  e  $(H, *)$  grupos. Seja dado um homomorfismo:*



$$\begin{aligned} \varphi : H &\rightarrow \text{Aut}(N)^4 \\ h &\longmapsto \varphi_h : N \rightarrow N \end{aligned}$$

Define-se **produto semi-direto indexado por**  $\varphi$  como o par ordenado  $(G, \#) := N \rtimes_{\varphi} H$ , onde  $G = N \times H = \{(x, y) : x \in N \text{ e } y \in H\}$  e  $\#$  é uma operação definida da seguinte maneira:

$$(n, h)\#(n', h') := (n \circ \varphi_h(n'), h * h') \text{ para quaisquer } (n, h), (n', h') \in G.$$

A verificação de que o produto semi-direto é de fato um grupo, será feita mais adiante.

**Definição 61** Seja  $(B, \circ)$  um grupo. Diremos que o grupo  $A \subset B$  é um **subgrupo normal de B** se para todo  $n \in A$  e para todo  $m \in B$ ,  $m \circ n \circ m^{-1} \in A$ .

Vejamos agora alguns exemplos de produto semi-direto.

**Exemplo 1:**

Seja  $A$  um grupo e  $N, H \subset A$  subgrupos com  $N$  normal. Defina a seguinte função:

$$\begin{aligned} i : H &\rightarrow \text{Aut}(N) \\ h &\longmapsto \varphi_h : N \rightarrow N \\ &h \longmapsto h \circ n \circ h^{-1} \end{aligned}$$

Repare que  $i$  está bem definida pois se  $h \in H$  então para  $n_1, n_2 \in N$  temos:

$$i_h(n_1 \circ n_2) = h \circ (n_1 \circ n_2) \circ h^{-1} = (h \circ n_1 \circ h^{-1}) \circ (h \circ n_2 \circ h^{-1}) = i_h(n_1) \circ i_h(n_2).$$

Além disso, para todo  $n \in N$ ,  $i_h(n) \in N$  uma vez que  $N$  é normal. Logo  $i_h$  é homomorfismo de  $N$  em  $N$ . Dado  $n' \in N$  ponha  $n := h^{-1} \circ n' \circ h$  então  $n \in N$  ( $n = h^{-1} \circ n' \circ (h^{-1})^{-1}$ ) e  $i_h(n) = n'$ . Portanto  $i$  é sobrejetiva. Por outro lado, se  $i_h(n_1) = i_h(n_2)$  então

$$h \circ n_1 \circ h^{-1} = h \circ n_2 \circ h^{-1} \Rightarrow n_1 = n_2$$

e portanto  $i_h$  é injetiva e então, um automorfismo de  $N$ .

Agora, verificaremos que a função  $i$  é um homomorfismo entre os grupos  $H$  e  $\text{Aut}(N)$ .

De fato, sejam  $h, h' \in H$ . Para todo  $n \in N$ ,

$$i_{hh'}(n) = h \circ h' \circ n \circ h'^{-1} \circ h^{-1} = h \circ i_{h'}(n) \circ h^{-1} = i_h \circ i_{h'}(n).$$

Este é um importante exemplo e por isso daremos uma notação especial para essa função, definindo  $i_h(n) := h \circ n \circ h^{-1}$  para quaisquer  $n \in N$  e  $h \in H$ .

**Exemplo 2:**

Seja  $O(2) \subset M$  (o grupo das matrizes ortogonais é um subgrupo do grupo das isometrias euclidianas) e  $\mathbb{R}^2 \subset M$  (já mostramos que  $\mathbb{R}^2$  forma um grupo em relação a soma. Além disso, este grupo é isomorfo ao grupo das translações e portanto podemos concluir que  $\mathbb{R}^2$  é um subgrupo normal ao grupo das isometrias  $M$ ). Defina a função:

---

<sup>4</sup>Lembre que  $\text{Aut}(N)$  representa o grupo de automorfismos de  $N$ .

$$\begin{aligned} \varphi : O(2) &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^2) \\ A &\longmapsto \varphi_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ &v \longmapsto Av \end{aligned}$$

Veja que  $\varphi$  está bem definida, porque  $\varphi_A$  é um automorfismo em  $\mathbb{R}^2$  ( $\varphi_A$  na verdade é uma isometria pois toma o vetor  $v$  e aplica a matriz ortogonal  $A$  e como já sabemos, toda isometria é um automorfismo).

$\varphi$  é um homomorfismo, uma vez que para qualquer  $v \in \mathbb{R}^2$  temos:

$$\varphi_{AA'}(v) = AA'v = A\varphi_{A'}(v) = \varphi_A \circ \varphi_{A'}(v)$$

então

$$\varphi_{AA'} = \varphi_A \circ \varphi_{A'}$$

para quaisquer  $A, A' \in O(2)$ .

Portanto, podemos concluir que  $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\varphi} O(2) = (G, \#)$  ( $G = \mathbb{R}^2 \times O(2)$ ) é um produto semi-direto indexado por  $\varphi$ .

O produto semi-direto  $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\varphi} O(2)$  faz o seguinte "trabalho":

$$(b, A)\#(b', A') \longmapsto (b + Ab', AA')$$

para quaisquer  $b, b' \in \mathbb{R}^2$  e  $A, A' \in O(2)$  (observe a semelhança entre a primeira coordenada do par  $(b + Ab', AA')$  e uma isometria no plano euclídeano aplicado ao ponto  $b'$ ).

**Teorema 97** *Sejam  $N, H$  e  $\varphi$  dados conforme a definição 60. O produto semi-direto  $(G, \#) := N \rtimes_{\varphi} H$  é um grupo.*

Demonstração:

$G(1)$  Defina  $e = (e_N, e_H)$  ( $e_N$  é o elemento neutro do grupo  $N$ , bem como  $e_H$  é o elemento neutro do grupo  $H$ ) Com isso, tem-se que  $e = (e_N, e_H) \in G$  e além disso, para qualquer  $(n, h) \in G$ ,

$$(n, h)\#e = (n, h)\#(e_N, e_H) = (n \circ \varphi_h(e_N), h \circ e_H) = (n \circ e_N, h \circ e_H)$$

porque  $\varphi_h$  é um automorfismo. Portanto

$$(n, h)\#e = (n, h).$$

Similarmente,

$$e\#(n, h) = (e_N, e_H)\#(n, h) = (e_N \circ \varphi_{e_H}(n), e_H \circ h) = (e_N \circ n, e_H \circ h)$$

donde

$$e\#(n, h) = (n, h).$$

$G(2)$  Para todo  $(n, h) \in G$ , tome  $(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}) \in G$ . Além disso,

$$(n, h)\#(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}) = (n \circ \varphi_h(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1})), h \circ h^{-1}) = (n \circ \varphi_{hh^{-1}}(n^{-1})) \circ h^{-1}, h \circ h^{-1})$$

assim:

$$(n, h)\#(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}) = (n \circ \varphi_{e_H}(n^{-1}), h \circ h^{-1}) = (n \circ n^{-1}, h \circ h^{-1}) = (e_N, e_H) = e.$$

Similarmente, provamos que

$$(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})\#(n, h) = (e, e) = e$$

$G(3)$  A associatividade é bastante simples e depende apenas da aplicação da operação  $\#$ .

C.Q.D.

**Teorema 98** *O grupo das isometrias no plano euclideano é isomorfo a  $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\varphi} O(2)$ .*

Demonstração:

Seja  $M$  o conjunto de todas as isometrias no plano euclideano. Sabemos que  $M = \{T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ definidas por } T(u) = Au + v, \text{ onde } A \in O(2) \text{ e } v \in \mathbb{R}^2\}$ . Considere agora a função

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^2 \rtimes_{\varphi} O(2) &\rightarrow M \\ (v, A) &\mapsto \Psi_{(v,A)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ &u \mapsto Au + v. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que  $\Psi$  é um isomorfismo de grupo.

Primeiramente repare que  $\varphi$  é definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varphi : O(2) &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^2) \\ A &\longmapsto \varphi_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ &v \longmapsto Av \end{aligned}$$

Afirmamos que  $\Psi$  é um homomorfismo.

De fato, para qualquer  $u \in \mathbb{R}^2$  e para quaisquer  $(v, A), (v', A') \in \mathbb{R}^2 \rtimes_{\varphi} O(2)$  temos

$$\Psi_{(v,A)(v',A')}(u) = \Psi_{(v\varphi_A(v'), AA')}(u) = \Psi_{(v+Av', AA')}(u) = AA'(u) + v + Av'.$$

Por outro lado,

$$(\Psi_{(v,A)}\Psi_{(v',A')})(u) = (\Psi_{(v,A)})(A'u + v') = A(A'u + v') + v = AA'u + Av' + v'.$$

Logo

$$\Psi_{(v,A)(v',A')} = \Psi_{(v,A)}\Psi_{(v',A')}$$

e  $\Psi$  é um homomorfismo. Resta provarmos que  $\Psi$  é bijetiva.

Para isso, tome  $\Psi_{(v,A)} = \Psi_{(v',A')}$  então para todo  $u \in \mathbb{R}^2$  teremos

$$\Psi_{(v,A)}(u) = \Psi_{(v',A')} (u) \Rightarrow Au + v = A'u + v' \Rightarrow Au - A'u = v' - v \Rightarrow (A - A')u = v - v'.$$

Mas isso deve ocorrer para qualquer  $u \in \mathbb{R}^2$  então, em particular deve ocorrer para  $u = (0, 0)$  e com isso teremos que

$$(A - A')(0, 0) = v - v' \Rightarrow (0, 0) = v - v' \Rightarrow v = v'$$

e disso decorre que

$$(A - A')u = v - v' = v - v = (0, 0)$$

para qualquer  $u \in \mathbb{R}^2$  e portanto  $A - A'$  deve ser a matriz nula, o que é o mesmo que afirmar que  $A = A'$ . Logo  $(v, A) = (v', A')$  e  $\Psi$  é injetiva.

$\Psi$  é sobrejetiva trivialmente e portanto bijetiva. Logo  $\Psi$  é um isomorfismo de grupos, donde decorre que o produto semi-direto  $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\varphi} O(2)$  é isomorfo ao conjunto das isometrias euclidianas.

C.Q.D.

Com esse último teorema, atingimos nosso objetivo de caracterizarmos completamente o grupo das isometrias no plano euclidiano. A partir de agora, nossos esforços se concentrarão na última parte desse trabalho, onde estudaremos o grupo de automorfismos no plano hiperbólico.

## 9.2 Automorfismos no plano hiperbólico

Comentamos anteriormente (apesar de não termos demonstrado) que todos os modelos de geometria hiperbólica são isomorfos ao plano hiperbólico (o sistema de axiomas da geometria hiperbólica é categórico) e por isso torna-se relevante estudarmos apenas esse modelo.

Mostramos que o grupo de automorfismos de qualquer geometria hiperbólica é isomorfo ao grupo de automorfismos no plano hiperbólico (teorema 85) e então estudaremos apenas o grupo de automorfismos desse modelo.

No teorema 93, verificamos que o grupo de isometrias em qualquer modelo de geometria hiperbólica coincide com o grupo de automorfismos desse mesmo modelo, portanto basta caracterizarmos as isometrias e então teremos uma caracterização dos automorfismos.

Faremos aqui uma abordagem distinta da que fizemos no plano euclidiano. Estudaremos algumas isometrias em geometrias de continuidade (chamadas de transformações

isométricas) e a partir delas, encontraremos uma caracterização para as isometrias no plano hiperbólico.<sup>5</sup>

### 9.2.1 Transformações isométricas

Fixemos uma geometria de continuidade.

#### Reflexões

Dada uma reta  $m$  e um ponto  $A$  não incidente a  $m$ , considere a reta  $r$ , perpendicular a  $m$  passando por  $A$  ( $r = m_{\perp}^A$ ). Seja  $M$  o ponto de interseção das retas  $m$  e  $r$ . Na semi-reta oposta a  $\overrightarrow{MA}$ , existe um único ponto  $A'$  tal que  $MA'$  é congruente a  $MA$ . O ponto  $A'$  é chamado de *reflexão* do ponto  $A$  pela reta  $m$  (denotado por  $R_m(A)$ ). (fig.9.1)

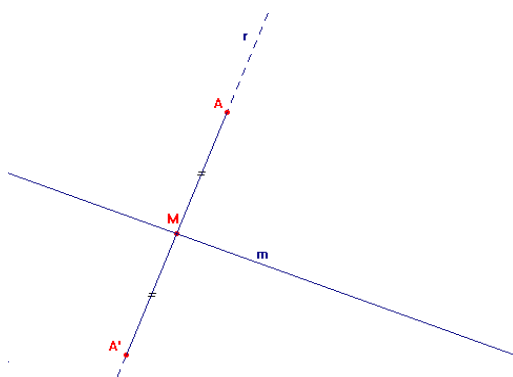


Figura 9.1:  $A' = R_m(A)$

Sem muito esforço podemos mostrar que de fato uma reflexão é uma isometria.

**Teorema 99** *Toda isometria é uma composição de no máximo 3 reflexões.*

#### Translações

Define-se *translação ao longo da reta  $r$* , como sendo a composição de duas reflexões por retas  $l$  e  $m$  distintas e ambas perpendiculares a  $r$ , isto é,  $T_r = R_l \circ R_m$  ( $l$  e  $m$  são distintas e são ambas perpendiculares a  $r$ ). (fig.9.2)

Obviamente uma translação é uma isometria, uma vez que esta é a composição de duas isometrias.

**Teorema 100** *Dada uma reta  $r$ , o conjunto de todas as translações ao longo de  $r$  formam um grupo comutativo.*

#### Deslizamentos

Por último, apresentamos um tipo de transformação também definida através da composição de duas outras transformações.

Um *deslizamento ao longo da reta  $r$* , é a composição de uma translação ao longo de  $r$  com uma reflexão na mesma reta  $r$ . Mais precisamente:  $D_r = R_r \circ T_r$  onde  $D_r$  denota um deslizamento ao longo da reta  $r$ . (fig.9.3)

<sup>5</sup>Nem todos os teoremas serão demonstrados. Indicamos novamente a ref. [2] para eventuais consultas.

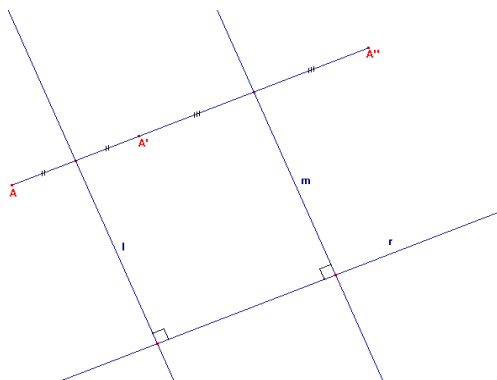


Figura 9.2:  $A'' = T_r(A) = R_l R_m(A)$

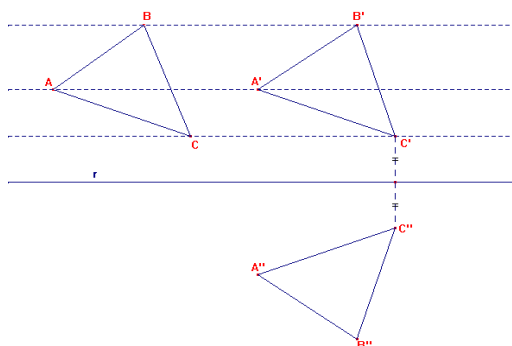


Figura 9.3:  $A'' = D_r(A) = R_r \circ T_r(A)$

Como um exemplo de deslizamento, poderíamos pensar numa pessoa andando na praia. Duas pegadas consecutivas de seus pés na areia formariam um deslizamento.

Por argumento similar dado às translações, vemos que um deslizamento também é uma isometria.

Existem outros tipos de isometrias, como rotações e deslocamentos paralelos (para geometrias hiperbólicas), no entanto não discutiremos estes.

**Definição 62** Uma isometria é chamada de **isometria direta** se é o produto de duas reflexões e é chamada de **isometria oposta** (ou **indireta**), se é uma reflexão ou um deslizamento.

**Teorema 101** Toda isometria é direta ou oposta e nunca ambas. O conjunto das isometrias diretas forma um grupo em relação à composição. A composição de duas isometrias opostas é direta, enquanto que a composição de uma oposta e uma direta é oposta.

A partir desse momento tentaremos encontrar as transformações que preservam as relações básicas entre os pontos (automorfismos) na geometria hiperbólica. Será conveniente, no entanto, utilizarmos coordenadas complexas e assumiremos daqui em diante

fatos básicos sobre essa teoria. Também utilizaremos inversões em circunferência<sup>6</sup>.

**Teorema 102** *Reflexões no plano hiperbólico são dadas através de inversão em circunferência.*

No plano hiperbólico, as retas como já comentamos, são representadas por semi-circunferências euclidianas e semi-retas euclidianas. Para evitarmos discussões separadamente, chamaremos também as reflexões em retas euclidianas de inversão, assim como fizemos com circunferências euclidianas. Dessa maneira, todas as reflexões em retas do plano hiperbólico serão dadas pelo que chamamos de inversão.

Faremos o desenvolvimento das fórmulas que devem representar as reflexões no plano hiperbólico.

No que segue, será conveniente trabalharmos com coordenadas complexas  $z = x + iy$  e  $\bar{z} = x - iy$ .

Uma inversão numa reta do tipo I ( ${}_kL$ ), é dada pela transformação  $T(x, y) = (2k - x, y)$  (fig.9.4), que em coordenadas complexas torna-se  $T(z) = -\bar{z} + b$ , onde  $b = 2k$ .

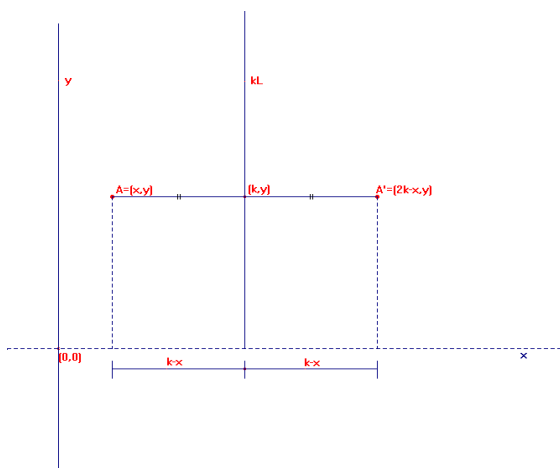


Figura 9.4:  $T(x, y) = (2k - x, y)$

Para uma reta do tipo II ( ${}_cL_r$ ), podemos fazer uma mudança de variáveis  $x' = x - c$  e  $y' = y$  (isto equivale a trasladarmos o centro da circunferência euclideana de centro  $(c, 0)$  para a origem). Em coordenadas complexas resulta:  $z' = z - c$ . Então se  $w'$  é a imagem de  $z'$  por inversão, teremos pelas propriedades de inversão que:

$$\|z'\| \cdot \|w'\| = r^2 e^{\frac{z'}{\|z'\|}} = \frac{w'}{\|w'\|}.$$

Resolvendo esse sistema e considerando que  $z'\bar{z}' = \|z'\|^2$ , temos:  $w' = \frac{r^2}{\bar{z}'}$  e voltando ao

<sup>6</sup>Para uma melhor idéia sobre a teoria de inversão em circunferência, recomendamos a leitura do apêndice F.

sistema de coordenadas originais  $w = w' + c$ , vem:  $w = \frac{r^2}{\bar{z}-c} + c$  ou

$$w = \frac{c\bar{z} + r^2 - c^2}{\bar{z} - c}.$$

Para facilitar essa apresentação, chamaremos  $C = \frac{1}{r}$ ,  $A = cC$  e  $B = r(1 - A^2)$  e então a inversão  $T$ , apresenta-se da seguinte maneira:

$$T(z) = \frac{A\bar{z} + B}{C\bar{z} - A}.$$

Note que o caso em que estudamos inversão em uma reta do tipo I, está incluído nesse tipo de transformação para  $C = 0$  e  $A = -1$ .

Repare ainda que

$$A^2 + BC = A^2 + r(1 - A^2) \left(\frac{1}{r}\right) = A^2 + (1 - A^2) = 1$$

o que pode ser resumido no próximo teorema.

**Teorema 103** *No plano hiperbólico, reflexões são representadas em coordenadas complexas pela seguinte transformação:*

$$T(z) = \frac{A\bar{z} + B}{C\bar{z} - A} \text{ e } A^2 + BC = 1, \text{ onde } A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Note que a condição  $A^2 + BC = 1$  é equivalente a afirmarmos que o determinante da matriz  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}$  é  $-1$ .

Sabemos que isometrias diretas são representadas pela composição de duas reflexões. Podemos então encontrar o tipo de transformações que representam isometrias diretas compondo duas reflexões, dada pela fórmula apresentada no último teorema, no entanto achamos mais conveniente voltarmos um pouco à teoria de grupos e darmos algumas definições que facilitarão nossos cálculos.

**Definição 63** *Chamamos de  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$  ao conjunto de todas as matrizes dois por dois com entradas reais e determinante não nulo.*

**Teorema 104**  *$GL(2, \mathbb{R})$  é um grupo em relação ao produto de matrizes.*

Demonstração:

Veja que se  $M_1, M_2 \in GL(2, \mathbb{R})$  então  $M_1 \circ M_2 \in GL(2, \mathbb{R})$  pois  $\det(M_1 \circ M_2) = \det(M_1)\det(M_2) \neq 0$ .

$G(1)$  A matriz identidade possui determinante igual a 1 e portanto, diferente de zero.

$G(2)$  Toda matriz que possui determinante não nulo é inversível.

$G(3)$  A associatividade é válida para quaisquer matrizes.

C.Q.D.



**Definição 64** *Sejam  $M_1, M_2 \in GL(2, \mathbb{R})$ . Diremos que  $M_1$  é semelhante a  $M_2$  (denota-se  $M_1 \sim M_2$ ) se e somente se existir uma constante real não-nula  $\lambda$ , tal que  $M_1 = \lambda M_2$ .*

**Teorema 105**  *$\sim$  é uma relação de equivalência.*

Demonstração:

Precisamos provar que esta relação é simétrica, reflexiva e transitiva.

Simetria:  $M_1 \sim M_2 \Rightarrow \exists \lambda \neq 0 : M_1 = \lambda M_2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} M_1 = M_2 \Rightarrow M_2 \sim M_1$ .

Reflexividade:  $M_1 = 1M_1 \Rightarrow M_1 \sim M_1$ .

Transitividade: Se  $M_1 \sim M_2$  e  $M_2 \sim M_3$  então devem existir constantes  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$  tais que  $M_1 = \lambda_1 M_2$  e  $M_2 = \lambda_2 M_3$ , donde  $M_1 = \lambda_1 \lambda_2 M_3$ . Logo,  $M_1 \sim M_3$ .

C.Q.D.

**Definição 65** *Seja  $M_1 \in GL(2, \mathbb{R})$ . Definimos a classe de equivalência de  $M_1$  (denotada por  $[M_1]$ ) como sendo o conjunto*

$$[M_1] = \{M \in GL(2, \mathbb{R}) : M \sim M_1\}.$$

Veja que se  $M_1 \sim M_2$  então  $[M_1] = [M_2]$ .

**Definição 66** *O produto entre classes de equivalência é definido da seguinte maneira:*

$$[M_1] \circ [M_2] = [M_1 \circ M_2].$$

Observe que este produto está bem definido, pois se  $X \in [M_1]$  e  $Y \in [M_2]$  então existem  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$  tais que  $X = \lambda_1 M_1$  e  $Y = \lambda_2 M_2$  e então  $X \circ Y = (\lambda_1 M_1) \circ (\lambda_2 M_2) = \lambda_1 \lambda_2 (M_1 \circ M_2)$  uma vez que  $M_1$  e  $M_2$  são lineares e portanto,  $X \circ Y \in [M_1 \circ M_2]$ . Podemos concluir que o produto entre classes de equivalência independe do representante que tomarmos dessa classe.

Podemos agora formar um conjunto com todas as classes de equivalência das matrizes de  $GL(2, \mathbb{R})$ . Definimos o seguinte conjunto:

$$PGL(2, \mathbb{R}) = \{[M] : M \in GL(2, \mathbb{R})\}.$$

**Teorema 106** *O conjunto  $PGL(2, \mathbb{R})$  é um grupo em relação ao produto entre classes de equivalência.*

Demonstração:

$G(1)$  Para qualquer  $[M] \in PGL(2, \mathbb{R})$  temos,

$$[M] \circ [I] = [M \circ I] = [M] = [I \circ M] = [I] \circ [M].$$

Além disso  $[I] \in PGL(2, \mathbb{R})$  porque  $I \in GL(2, \mathbb{R})$ .

$G(2)$  Para qualquer  $[M] \in PGL(2, \mathbb{R})$ ,  $[M^{-1}] \in PGL(2, \mathbb{R})$  e além disso,

$$[M^{-1}] \circ [M] = [M^{-1} \circ M] = [I] = [M \circ M^{-1}] = [M] \circ [M^{-1}].$$

$G(3)$

$$([M_1] \circ [M_2]) \circ [M_3] = ([M_1 \circ M_2]) \circ [M_3] = [M_1 \circ M_2 \circ M_3] = [M_1] \circ ([M_2 \circ M_3]) = [M_1] \circ ([M_2] \circ [M_3]).$$

C.Q.D.

Faremos agora a composição entre duas reflexões no plano hiperbólico, afim de encontrarmos as isometrias diretas nesse modelo.

Sabemos que uma reflexão no plano hiperbólico é dada pela transformação:

$$T(z) = \frac{A\bar{z} + B}{C\bar{z} - A} \text{ e } A^2 + BC = 1$$

onde  $A, B, C \in \mathbb{R}$ , faremos  $T_1 \circ T_2(z)$  onde  $T$  é uma reflexão.

Sejam

$$U = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ e } X = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$$

onde  $U$  e  $V$  representam matrizes com entradas reais e  $X$  representa uma matriz com entradas complexas.

$$U(VX) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} az + b \\ cz - a \end{pmatrix} \right)$$

assim,

$$U(VX) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix} \left( (cz - a) \begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz-a} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (cz - a) \left( \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz-a} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

uma vez que  $U$  e  $V$  são lineares. Com isso, vem que

$$U(VX) = (cz - a) \begin{pmatrix} a' \left( \frac{az+b}{cz-a} \right) + b' \\ c' \left( \frac{az+b}{cz-a} \right) - a' \end{pmatrix} = (cz - a) \left( c' \left( \frac{az+b}{cz-a} \right) - a' \right) \begin{pmatrix} \frac{a' \left( \frac{az+b}{cz-a} \right) + b'}{c' \left( \frac{az+b}{cz-a} \right) - a'} \\ 1 \end{pmatrix}$$

portanto

$$U(VX) = [(ac' - a'c)z + bc' + aa'] \begin{pmatrix} \frac{a' \left( \frac{az+b}{cz-a} \right) + b'}{c' \left( \frac{az+b}{cz-a} \right) - a'} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, temos que

$$(UV)X = \left( \left( \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b - ab' \\ ac' - a'c & bc' + aa' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$$

decorrendo

$$(UV)X = \begin{pmatrix} (a'a + b'c)z + (a'b - ab') \\ (ac' - a'c)z + (bc' + aa') \end{pmatrix} = [(ac' - a'c)z + (bc' + aa')] \begin{pmatrix} \frac{(a'a + b'c)z + (a'b - ab')}{(ac' - a'c)z + (bc' + aa')} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como o produto de matrizes é associativo, podemos concluir que

$$U(VX) = (UV)X \Rightarrow [(ac' - a'c)z + bc' + aa'] \begin{pmatrix} \frac{a' \left( \frac{az+b}{cz-a} \right) + b'}{c' \left( \frac{az+b}{cz-a} \right) - a'} \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde

$$U(VX) = [(ac' - a'c)z + (bc' + aa')] \begin{pmatrix} \frac{(a'a + b'c)z + (a'b - ab')}{(ac' - a'c)z + (bc' + aa')} \\ 1 \end{pmatrix}$$

e então concluímos que

$$\begin{pmatrix} \frac{a' \left( \frac{az+b}{cz-a} \right) + b'}{c' \left( \frac{az+b}{cz-a} \right) - a'} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(a'a + b'c)z + (a'b - ab')}{(ac' - a'c)z + (bc' + aa')} \\ 1 \end{pmatrix}$$

e finalmente,

$$\frac{a' \left( \frac{az+b}{cz-a} \right) + b'}{c' \left( \frac{az+b}{cz-a} \right) - a'} = \frac{(a'a + b'c)z + (a'b - ab')}{(ac' - a'c)z + (bc' + aa')}.$$

Agora, em poder desse resultado, note que se tivermos duas reflexões

$$T_1(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} - a} \text{ e } T_2(z) = \frac{a'\bar{z} + b'}{c'\bar{z} - a'}$$

então

$$T_2 \circ T_1(z) = \frac{a' \overline{\left( \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} - a} \right)} + b'}{c' \overline{\left( \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} - a} \right)} - a'}$$

porém,  $\overline{\left( \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} - a} \right)} = \left( \frac{az + b}{cz - a} \right)$  (utilizando aqui as propriedades  $\overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ ,  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$  e  $\bar{\bar{a}} = a$  se  $a \in \mathbb{R}$ ). Temos então

$$T_2 \circ T_1(z) = \frac{a' \overline{\left( \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} - a} \right)} + b'}{c' \overline{\left( \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} - a} \right)} - a'} = \frac{a' \left( \frac{az + b}{cz - a} \right) + b'}{c' \left( \frac{az + b}{cz - a} \right) - a'} = \frac{(a'a + b'c)z + (a'b - ab')}{(ac' - a'c)z + (bc' + aa')} = \frac{Az + B}{Cz + D}.$$

Note ainda que  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = (UV)$  e então

$$AD - BC = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(UV) = \det(U)\det(V) = (-1)(-1) = 1.$$

Por fim, podemos resumir nosso resultado com o seguinte teorema:

**Teorema 107** *No plano hiperbólico, as isometrias diretas são representadas por transformações do tipo*

$$T(z) = \frac{Az + B}{Cz + D} \text{ e } AD - BC = 1$$

Podemos agora obter as isometrias indiretas compondo todas as isometrias diretas com uma isometria indireta fixada. Podemos por exemplo usar a reflexão em torno do eixo  $y$ , dado por  $T_1(z) = -\bar{z}$  o que resulta em  $T(z) = \frac{-A\bar{z}+B}{-C\bar{z}+D}$  o que pode ser melhor escrito conforme o próximo teorema:

**Teorema 108** *No plano hiperbólico, as isometrias indiretas são representadas por transformações do tipo*

$$T(z) = \frac{A\bar{z} + B}{C\bar{z} + D} \text{ e } AD - BC = -1$$

Definiremos agora o conjunto de todas as isometrias (e por consequência, todos automorfismos) no plano hiperbólico:

$$T_{\mathbb{C}} = \{T_{a,b,c,d} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ definida por } T_{a,b,c,d}(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1\} \cup \{T_{A,B,C,D} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ definida por } T_{A,B,C,D}(z) = \frac{A\bar{z}+B}{C\bar{z}+D}, A, B, C, D \in \mathbb{R} \text{ e } AD - BC = 1\}.$$

**Teorema 109**  $T_{\mathbb{C}}$  é um grupo em relação a composição.

Demonstração:

$G(1)$  Tome a transformação

$$I(z) = \frac{Az + B}{Cz + D} \text{ com } A = 1, B = 0, C = 0 \text{ e } D = 1.$$

Observe que  $AD - BC = 1$  e então  $T$  é uma isometria direta. Note ainda que para qualquer  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$I(z) = \frac{1z + 0}{0z + 1} = \frac{z}{1} = z$$

é a identidade.

$G(2)$  Para cada isometria direta  $T(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$ ,  $AD - BC = 1$  tome

$$T'(z) = \frac{Dz + B}{Cz + A}$$

assim como para cada isometria oposta  $T(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ ,  $ad - bc = -1$  basta tomar

$$T'(z) = \frac{d\bar{z} + b}{c\bar{z} + a}.$$

Em ambos os casos temos que  $T \circ T'(z) = z = I(z)$ . Além disso,  $DA - BC = AD - BC = 1$  e  $da - bc = ad - bc = -1$  e portanto  $T'$  é uma isometria em qualquer um dos dois casos.

G(3) Essa propriedade é de fácil verificação e exige apenas o trabalho de desenvolvê-la, por isso não a faremos explicitamente.

C.Q.D.

Demonstraremos agora o último teorema de nosso trabalho, similar a um outro que já demonstramos no plano euclideo.

**Teorema 110** *Os grupos  $T_{\mathbb{C}}$  e  $PGL(2, \mathbb{R})$  são isomorfos.*

Demonstração:

Considere a função  $\Delta : T_{\mathbb{C}} \rightarrow PGL(2, \mathbb{R})$  definida por

$$\Delta(T_{a,b,c,d}) = \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right].$$

Mostraremos que  $\Delta$  é um isomorfismo de grupos.

Observação:  $\Delta$  está bem definida porque

$$T_{a,b,c,d} \in T_{\mathbb{C}} \Rightarrow ad - bc = \pm 1 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1 \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$$

logo,  $\left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \in PGL(2, \mathbb{R})$ .

$\Delta$  é um homomorfismo pois para quaisquer  $T_{a,b,c,d}, T_{a',b',c',d'} \in T_{\mathbb{C}}$ , vemos que  $\Delta(T_{a,b,c,d} \circ T_{a',b',c',d'}) = \Delta(T_{aa'+bc', ab'+bd', a'c+cd, b'c+dd})$  (veja a composição de duas reflexões feita logo acima) e então

$$\Delta(T_{a,b,c,d} \circ T_{a',b',c',d'}) = \Delta(T_{aa'+bc', ab'+bd', a'c+cd, b'c+dd}) = \left[ \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + cd & b'c + dd \end{pmatrix} \right]$$

o que é o mesmo que

$$\Delta(T_{a,b,c,d} \circ T_{a',b',c',d'}) = \Delta(T_{aa'+bc', ab'+bd', a'c+cd, b'c+dd}) = \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right]$$

podemos por isso concluir que

$$\Delta(T_{a,b,c,d} \circ T_{a',b',c',d'}) = \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \circ \left[ \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right] = \Delta(T_{a,b,c,d}) \circ \Delta(T_{a',b',c',d'}).$$

$\Delta$  também é bijetiva.

Podemos ver que esta função é injetiva da seguinte maneira:

$$\Delta(T_{a,b,c,d}) = \Delta(T_{a',b',c',d'}) \Rightarrow \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right] \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

portanto,  $\exists \lambda \neq 0$  tal que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \Rightarrow a = \lambda a', b = \lambda b', c = \lambda c' \text{ e } d = \lambda d'$$

e com isso, para qualquer número complexo  $z$ , se  $T$  é uma isometria direta teremos:

$$T_{a,b,c,d}(z) = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(\lambda a')z + (\lambda b')}{(\lambda c')z + (\lambda d')} = \frac{\lambda(a'z + b')}{\lambda(c'z + d')} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'} = T_{a',b',c',d'}(z).$$

Também, por raciocínio análogo, podemos concluir o mesmo para  $T$  sendo uma isometria oposta.

Para mostrarmos  $\Delta$  que é sobrejetiva, devemos tomar um elemento qualquer  $\left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \in PGL(2, \mathbb{R})$  e repararmos que:  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PGL(2, \mathbb{R}) \Rightarrow ad - bc \neq 0 \Rightarrow ad - bc < 0$  ou  $ad - bc > 0$ . Analisemos os dois casos.

Caso 1)  $ad - bc > 0$ . Tome

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{ad - bc}}$$

e como

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

podemos ver que

$$\left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = \left[ \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right]$$

e com isso conseguimos que

$$\Delta(T_{\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d}) = \left[ \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \right] = \left[ \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right].$$

Agora observe que  $T_{\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d} \in T_{\mathbb{C}}$  pois

$$(\lambda a \lambda d) - (\lambda b \lambda c) = \lambda^2(ad - bc) = \left( \frac{1}{\sqrt{ad - bc}} \right)^2 (ad - bc) = \frac{1}{ad - bc} (ad - bc) = 1$$

e  $T_{\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d}$  é uma isometria direta.

Caso 2)  $ad - bc < 0$ . Aplicando-se o mesmo raciocínio para  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{-(ad - bc)}}$  concluiremos

que  $T_{\lambda a \lambda, b, \lambda c, \lambda d}$  será uma isometria oposta com  $(\lambda a \lambda d) - (\lambda b \lambda c) = -1$ .

Como é um homomorfismo e uma bijeção, concluímos que esta mesma função é um isomorfismo de grupos, conforme queríamos.

C.Q.D.

Com este último teorema, atingimos nosso último objetivo, obtendo o grupo de automorfismos do plano hiperbólico.

# Capítulo 10

## CONCLUSÕES

A principal motivação para este trabalho foi com certeza a dificuldade de encontrar em livros o ponto de vista aqui abordado.

Após muitos esforços despendidos e inúmeras pesquisas bibliográficas, conclui que praticamente não existem livros que façam verificações rigorosas com o intuito de demonstrar que determinados modelos satisfazem o conjunto de axiomas específicos de uma geometria. A maioria dos livros pesquisados apenas afirmam que determinado modelo pertence a certa geometria, sem literalmente ocupar-se com as demonstrações.

A motivação pessoal e o interesse pelo assunto com certeza também contribuíram para a escolha do tema.

A idéia inicial consistia apenas em descrever um modelo de geometria hiperbólica (O semi-plano superior de Poincaré) com o auxílio da Geometria Analítica e então verificar que este modelo satisfaz o conjunto de axiomas da geometria hiperbólica, no entanto os objetivos foram largamente ampliados e o resultado final está impresso neste trabalho.

Apesar de termos aqui um trabalho de conclusão de curso um tanto extenso, penso que cada um dos capítulos é importante e possui sua função, por isso, são todos eles necessários para que o trabalho esteja realmente completo e justamente por isso é que acredito que todos os objetivos foram alcançados sintindo-me bastante satisfeito com o resultado final.



# Apêndice A

## ORDEM EM GEOMETRIA EUCLIDEANA

Aqui, verificaremos que o plano euclideo verifica os quatro axiomas da geometria de ordem.

O(1) Suponha que tenhamos  $A *_E B *_E C$ , então:

$$A \neq C \text{ e } B = A + t(C - A)$$

para algum  $t$  real ( $0 < t < 1$ ). Obviamente  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares, em vista de que  $B$  pertence a reta  $\overleftrightarrow{AC}$  pela definição que demos a reta. Agora tome  $s = 1 - t$ . Com isso, teremos que

$$B = A + t(C - A) \Rightarrow B = A + (1 - s)(C - A) \Rightarrow B = A + (1 - s)C - (1 - s)A = A + C - sC - A + sA$$

e por isso,  $B = C + s(A - C)$ . Além disso,

$$0 < t < 1 \Rightarrow 0 < 1 - s < 1 \Rightarrow -1 < s < 0 \Rightarrow 0 < s < 1 \Rightarrow C *_E A *_E B.$$

O(2) Sejam  $A \neq B$  pertencentes a  $\Gamma_E$ .

$$\overleftrightarrow{AB} = \{C \in \Gamma_E : C = A + t(B - A), t \in \mathbb{R}\}.$$

Tome  $C = A + 2(B - A)$ . Mas

$$C = A + 2(B - A) \Rightarrow C \in \overleftrightarrow{AB}$$

e

$$C = A + 2B - 2A = A + 2B \Rightarrow B = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C = A - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C = A + \frac{1}{2}(C - A) \Rightarrow A *_E B *_E C.$$

O(3) Seja  $l \in \mathbb{L}_E$  e sejam  $A, B$  e  $C$  pontos distintos incidentes a  $l$ .

$$l = \{D \in \Gamma_E : D = A + t(B - A), t \in \mathbb{R}\}$$

pois  $A$  e  $B$  pertencem a  $l$ . Mas  $C$  também pertence a  $l$ , então deve existir  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $C = A + t_0(B - A)$ . Para  $t_0 = 0$ , teremos  $C = A$  (contradição). Da mesma maneira, para  $t_0 = 1$ , teremos  $C = B$ , o que leva a outra contradição. Então precisamos ter  $t_0 < 0$  ou  $0 < t_0 < 1$  ou  $t_0 > 1$  (exclusivamente).

Se  $0 < t_0 < 1$ , então imediatamente teremos  $A *_E C *_E B$  (I);

Se  $t_0 < 0$ , então como  $C = A + t_0(B - A)$ , vem que

$$C = A + t_0B - t_0A(1 - t_0)A = C - t_0B \Rightarrow A = \frac{1}{1 - t_0}C - \frac{t_0}{1 - t_0}B$$

note que  $1 - t_0 > 0$  pois

$$t_0 < 0 - t_0 > 0 \Rightarrow 1 - t_0 > 1 > 0$$

e então

$$A = C - C + \frac{1}{1 - t_0}C - \frac{t_0}{1 - t_0}B \Rightarrow A = C + \frac{t_0}{1 - t_0}C - \frac{t_0}{1 - t_0}B \Rightarrow A = C + \frac{t_0}{1 - t_0}(B - C).$$

Falta mostrar que  $0 < \frac{t_0}{1 - t_0} < 1$ . Mas

$$-1 < 0 \Rightarrow t_0 - 1 < t_0 < 0$$

Como

$$t_0 < 0 \Rightarrow t_0 - 1 < -1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{t_0 - 1} < 0$$

então

$$t_0 - 1 < t_0 < 0 \Rightarrow \frac{1}{t_0 - 1}(t_0 - 1) > \frac{1}{t_0 - 1}t_0 > 0 \Rightarrow 1 > \frac{t_0}{t_0 - 1} > 0$$

donde teremos  $C *_E A *_E B$  (II);

Por último, se tivermos que  $t_0 > 1$ , prova-se de maneira similar que

$$B = A + \frac{1}{t_0}(C - A) \text{ e } 0 < \frac{1}{t_0} < 1$$

e por consequência,  $A *_E B *_E C$  (III).

Como os casos (I), (II) e (III) devem ocorrer e além disso deve ocorrer exclusivamente, teremos que um e somente um dos casos ocorre:  $A *_E B *_E C$  ou  $C *_E A *_E B$  ou  $A *_E C *_E B$ , conforme queríamos.

O(4) Para mostrarmos esta propriedade, precisaremos de um lema, no qual utilizaremos fatos de álgebra linear para sua demonstração.

**Lema 3** *Se duas retas são paralelas no plano euclidiano, então elas possuem um mesmo vetor diretor.*

Demonstração

Sejam

$$r = A + tB \text{ e } s = C + mD$$

retas paralelas no plano euclidiano (esta é uma notação simplificada, na verdade quando dizemos que  $r = A + tB$  queremos significar que  $r = \{F \in \Gamma_E : F = A + tB, t \in \mathbb{R}\}$ ). Então teremos que

$$A + tB \neq C + mD$$

para todos  $t$  e  $m$  pertencentes aos reais. Com isso, vem:

$$(x_A + tx_B, y_A + ty_B) \neq (x_C + mx_D, y_C + my_D)$$

para todos  $t$  e  $m$  reais, ou ainda, na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_D & -x_B \\ y_D & -y_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_A - x_C \\ y_A - y_C \end{pmatrix}$$

Para qualquer vetor  $\begin{pmatrix} m \\ t \end{pmatrix}$  pertencente ao  $\mathbb{R}^2$ .

Mas isso em particular, significa que a transformação linear não é sobrejetiva e portanto, os seus vetores-coluna  $(x_D, y_D)$  e  $(-x_B, -y_B)$  são L.D., com isso, terá que existir um número real  $k$  tal que

$$(x_D, y_D) = k(-x_B, -y_B)$$

ou

$$D = -kB$$

daí

$$s = C + mD = C + m(-k)B = C + nB \text{ onde } n = -km.$$

Com isso,

$$s = C + nB \text{ e } r = A + tB$$

e decorre que  $s$  e  $r$  possuem um mesmo vetor diretor.

C.Q.D.

Passemos agora para a verificação de  $O(4)$ . Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  pontos distintos e não colineares pertencentes ao plano euclidiano. Seja  $l$  uma reta não incidente a nem um desses três pontos e que passe por um ponto  $D$ , tal que  $A *_E D *_E C$ . Separaremos em dois casos: (a)  $l$  é paralela a  $\overleftrightarrow{AB}$  (fig.A.1) ou (b)  $l$  não é paralela a  $\overleftrightarrow{AB}$ .

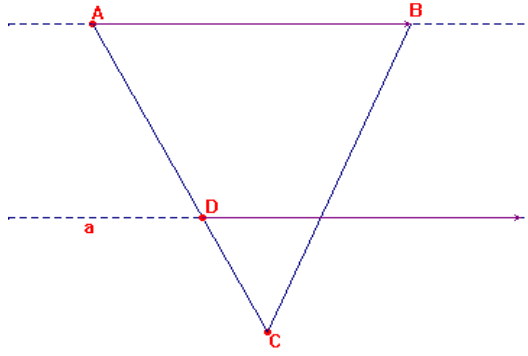


Figura A.1:  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $a$  possuem um mesmo vetor diretor

Caso (a)

$$l = D + t(B - A), t \in \mathbb{R}$$

pelo último lema, uma vez que  $l$  é incidente a  $D$  e paralela a  $\overleftrightarrow{AB}$ . Mas

$$A * D * C \Rightarrow D = C + s(A - C) \text{ e } 0 < s < 1$$

então

$$l = [C + s(A - C)] + r(B - A)$$

para  $s$  fixo e  $r$  variando nos reais. Agora se tomarmos  $r = s$ , teremos

$$l = [C + s(A - C)] + s(B - A) = C + s(A - C + B - A) = C + s(B - C) = E.$$

$E$  é incidente a  $l$ , pois para  $r = s$  temos que  $l = E$ , além disso,  $B *_e E *_e C$  pois

$$E = C + s(B - C) \text{ e } 0 < s < 1$$

donde  $l$  passa por um ponto do segmento  $BC$ , conforme queríamos.

Caso (b) Como  $l$  não é paralela a  $\overleftrightarrow{AB}$ , então é necessário que exista um ponto  $F$  incidente a ambas as retas.  $F$  é distinto de  $A$  e de  $B$  pois  $l$  não passa por esses pontos por hipótese. Então os pontos  $A$ ,  $B$  e  $F$  são 3 pontos distintos e colineares e pela propriedade  $O(3)$  já verificada teremos:

(b<sub>1</sub>)  $A *_E B *_E F$  (fig.A.2);

(b<sub>2</sub>)  $A *_E F *_E B$  ou

(b<sub>3</sub>)  $F *_E A *_E B$ .

(b<sub>1</sub>)

**Lema 4** Se  $t < 0$  e  $0 < u < 1$ , então  $\frac{t}{t+u-1}$  pertence aos reais e  $0 < \frac{ut}{t+u-1} < 1$ .

Demonstração:

$$u < 1 \Rightarrow u - 1 < 0.$$

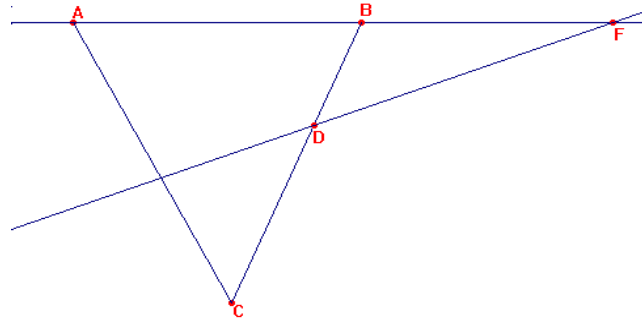


Figura A.2: Caso  $(b_1)$   $A * B * F$

Como  $t < 0$  então teremos:

$$t < 0 \Rightarrow (u - 1)t > 0 > u - 1 \Rightarrow ut - t > u - 1 \Rightarrow ut > t + u - 1 \text{ (I)}$$

Mas

$$u > 0 \text{ e } t < 0 \Rightarrow ut < 0$$

e de (I) decorre:

$$t + u - 1 < ut < 0 \text{ (II)}$$

$$t < 0 \Rightarrow t - 1 < -1 \Rightarrow t + u - 1 < u - 1 < 0$$

pois  $u < 1$ , então  $t + u - 1 < 0$  (III)

De (II) e (III) vem:

$$\frac{t + u - 1}{t + u - 1} > \frac{ut}{t + u - 1} > \frac{0}{t + u - 1} \Rightarrow 0 < \frac{ut}{t + u - 1} < 1.$$

De (III) temos também que

$$t + u - 1 < 0 \Rightarrow t + u - 1 \neq 0$$

donde  $\frac{t}{t+u-1} \in \mathbb{R}$ .

C.Q.D.

Demonstração do caso  $(b_1)$ :

$$A *_E B *_E F \Rightarrow F = B + t(A - B)$$

para algum  $t < 0$ .

$$A *_E D *_E C \Rightarrow D = A + u(C - A)$$

para algum  $0 < u < 1$ .

$$l = F + r(D - F), r \in \mathbb{R}$$

já que  $l$  passa por  $F$  e  $D$ . Mas então

$$l = [B + t(A - B)] + r[(A + u(C - A)) - (B + t(A - B))]$$

Com isso,

$$l = B + B(-t + r(t - 1)) + A(r(1 - u - t) - t) + C(ur).$$

Tome

$$r = \frac{t}{t + u - 1}.$$

$r$  pertence aos reais pelo último lema. Então

$$l = B + B\left(-t + \frac{t(t - 1)}{t + u - 1}\right) + A\left(-t\frac{t + u - 1}{t + u - 1} + t\right) + C\frac{ut}{t + u - 1}$$

Logo

$$l = B + B\left(\frac{-ut}{t + u - 1}\right) + 0 + C\frac{ut}{t + u - 1} = B + \frac{ut}{t + u - 1}(C - B) = E.$$

$E$  é incidente a  $l$  pois  $l = E$  para  $r = \frac{t}{t+u-1}$  e além disso,  $C *_E E *_E B$  pois  $0 < \frac{ut}{t+u-1} < 1$  novamente pelo último lema. Conclui-se que  $l$  passa pelo ponto  $E$  pertencente ao segmento  $BC$ .

( $b_2$ ) Não temos nada a provar, pois  $A *_F F *_B B$  garante que  $l$  passa por um ponto do segmento  $AB$  (a saber, o ponto  $F$ ).

( $b_3$ )

**Lema 5** *Se  $t > 1$  e  $0 < u < 1$ , então a tese do lema 7 é assegurada.*

Essa demonstração é muito similar àquela do último lema e por isso não a faremos explicitamente.

C.Q.D.

Demonstração do caso ( $b_3$ ):

$$F *_E A *_E B \Rightarrow F = B + t(A - B)$$

para algum  $t > 1$ ;

$$A *_E D *_E C \Rightarrow D = A + u(C - A)$$

para algum  $0 < u < 1$ .

$$l = F + r(D - F), r \in \mathbb{R}.$$

Novamente se tomarmos

$$r = \frac{t}{t + u - 1}$$

encontraremos

$$l = B + \frac{ut}{t + u - 1}(C - B) = E$$

idêntico ao que ocorreu em  $(b_1)$ .

C.Q.D.

Conseguimos verificar as propriedades de  $O(1)$  até  $O(4)$  para o plano euclideo, de onde vemos que este modelo é uma geometria de ordem, quando incluímos nele a relação  $*_E$  e automaticamente, todos os teoremas da geometria de ordem serão assegurados para esse modelo.

## Apêndice B

# ORDEM EM GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Nesse apêndice, verificaremos que o plano hiperbólico verifica as quatro propriedades da geometria de ordem.

$O(1)$   $A *_H B *_H C \Rightarrow A, B$  e  $C$  são pontos colineares pela definição. Caso estes pontos pertençam a uma reta do tipo I, então teremos também pela definição:

$$y_A < y_B < y_C \text{ ou } y_C < y_B < y_A$$

então  $A, B$  e  $C$  são distintos e além disso teremos

$$y_C < y_B < y_A \text{ ou } y_A < y_B < y_C \Rightarrow C *_H B *_H A.$$

Caso os 3 pontos pertençam a uma reta do tipo II, teremos então pela definição que

$$x_A < x_B < x_C \text{ ou } x_C < x_B < x_A$$

e então  $A, B$  e  $C$  são distintos e além disso,

$$x_C < x_B < x_A \text{ ou } x_A < x_B < x_C \Rightarrow C *_H B *_H A.$$

$O(2)$  Sejam  $B = (x_B, y_B)$  e  $C = (x_C, y_C)$  pontos distintos. Separaremos em 2 casos:

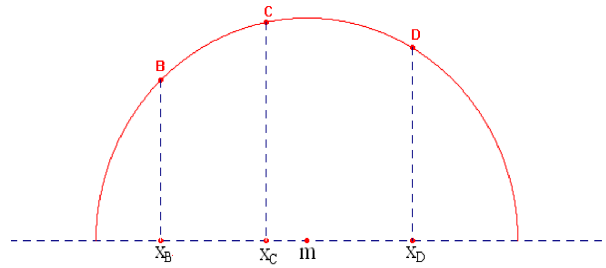
Caso 1)  $x_B = x_C = k$ . Nesse caso teremos que  $y_B$  e  $y_C$  são distintos, uma vez que  $B$  e  $C$  são distintos, então  $y_B > y_C$  ou  $y_C > y_B$ . Se  $y_B > y_C$ , tome

$$y_D = \frac{y_C}{2}.$$

Como  $y_C > 0$  decorre

$$y_C > 0 \Rightarrow y_D = \frac{y_C}{2} > 0$$




 Figura B.1:  $x_B < x_C \leq m$ 

então para  $D = (k, y_D)$ , vemos que  $D$  pertence ao plano hiperbólico.  $B, C$  e  $D$  pertencem a  ${}_kL$  e como teremos  $y_B > y_C > y_D$  e decorre que  $B *_H C *_H D$ . Em contrapartida, se tivermos  $y_C > y_B$ , tome  $y_D > y_C$ , assim teremos que para  $D = (k, y_D)$ ,  $B, C$  e  $D$  pertencem a  ${}_kL$  e  $B *_H C *_H D$  pois  $y_D > y_C > y_B$ .

Caso2)  $x_B \neq x_C$ . Para esse caso, deve existir  ${}_mL_r$  tal que  $B$  e  $C$  pertençam a  ${}_mL_r$  e temos  $x_B > x_C$  ou  $x_C > x_B$ . Separaremos nesses dois possíveis casos:

Caso2)a)  $x_B < x_C$ . Nesse caso, como  $C \in {}_mL_r$  vem

$$C \in {}_mL_r \Rightarrow (x_C - m)^2 + y_C^2 = r^2 \Rightarrow (x_C - m)^2 = r^2 - y_C^2 \Rightarrow |x_C - m| = \sqrt{r^2 - y_C^2} < \sqrt{r^2}$$

em vista que  $y_C > 0$ . Então

$$|x_C - m| < |r| = r.$$

Caso  $x_C \leq m$  (fig.B.1), tome  $x_D = m + \frac{r}{2}$ ,

$$x_D = m + \frac{r}{2} \Rightarrow x_B < x_C \leq m < m + \frac{r}{2} = x_D$$

e tome  $y_D = r\sqrt{\frac{3}{4}}$ ,

$$y_D = r\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow y_D = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - (x_D - m)^2} \Rightarrow (x_D - m)^2 + y_D^2 = r^2.$$

Se  $D = (x_D, y_D)$  então  $D \in {}_mL_r$  e  $B *_H C *_H D$  pois  $x_B < x_C < x_D$ .

Ainda considerando-se o caso2)a) mas agora para  $x_C > m$  tem-se  $x_C - m > 0$  e então

$$|x_C - m| < r \Rightarrow x_C - m < r \Rightarrow x_C < m + r$$

Veja figura B.2. Nesse caso, devemos tomar

$$x_D : x_C < x_D < m + r$$

a existência de tal número é propriedade dos números reais. Com isso,

$$x_C - m < x_D - m < r.$$

Como  $x_C - m > 0$ , então

$$0 < x_C - m < x_D - m < r \Rightarrow (x_D - m)^2 < r^2.$$

Basta tomarmos

$$y_D = \sqrt{r^2 - (x_D - m)^2} > 0$$

e com isso,

$$(x_D - m)^2 + y_D^2 = r^2$$

de onde  $D = (x_D, y_D)$  pertencerá a  ${}_mL_r$  e como  $x_B < x_C < x_D$ , teremos  $B *_H C *_H D$ .

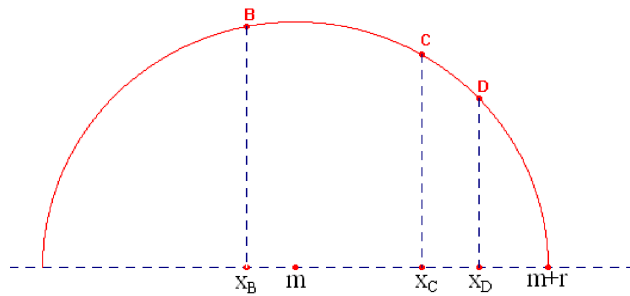


Figura B.2:  $x_B < x_C < x_D < m + r$

Caso2)b)  $x_B > x_C$ . Se  $x_C \geq m$ , tome

$$x_D = m - \frac{r}{2} \text{ e } y_D = r\sqrt{\frac{3}{4}} > 0.$$

Por justificativas similares as dadas acima, teremos  $B *_H C *_H D$ . Mas se  $x_C < m$ , é suficiente tomar

$$x_D : x_C > x_D > m - r \text{ e } y_D = \sqrt{r^2 - (x_D - m)^2} > 0.$$

Podemos verificar a existência de  $x_D$  de forma semelhante ao caso2)a) e similarmente a demonstração acima, teremos  $B *_H C *_H D$ .

$O(3)$  Se  $A, B$  e  $C$  pertencem a  ${}_kL$ , então  $x_A = x_B = x_C = k$ . Como  $A, B$  e  $C$  são distintos por hipótese vem que  $y_A, y_B$  e  $y_C$  são números distintos e pela propriedade da tricotomia dos números reais temos que:

$$y_A < y_B \text{ (i) ou } y_B < y_A \text{ (ii)}$$

e

$$y_A < y_C \text{ (iii) ou } y_C < y_A \text{ (iv)}$$

e

$$y_B < y_C \text{ (v) ou } y_C < y_B \text{ (vi)}.$$

Os 8 possíveis casos serão:

- (i) e (iii) e (v)  $\Rightarrow y_A < y_B < y_C \Rightarrow A *_H B *_H C$ ;
- (i) e (iii) e (vi)  $\Rightarrow y_A < y_C$  e  $y_C < y_A \Rightarrow$  Absurdo;
- (i) e (iv) e (v)  $\Rightarrow y_A < y_C < y_B \Rightarrow A *_H C *_H B$ ;
- (i) e (iv) e (vi)  $\Rightarrow y_C < y_A < y_B \Rightarrow C *_H A *_H B$ ;
- (ii) e (iii) e (v)  $\Rightarrow y_B < y_A < y_C \Rightarrow B *_H A *_H C$ ;
- (ii) e (iii) e (v)  $\Rightarrow y_B < y_C < y_A \Rightarrow B *_H C *_H A$ ;
- (ii) e (iv) e (v)  $\Rightarrow y_C < y_A$  e  $y_A < y_C \Rightarrow$  Absurdo;
- (ii) e (iv) e (vi)  $\Rightarrow y_C < y_B < y_A \Rightarrow C *_H B *_H A$ .

Como deve ocorrer apenas um dos 6 possíveis casos, vemos que teremos  $A *_H B *_H C$  ou  $B *_H A *_H C$  ou  $A *_H C *_H B$  (exclusivamente) conforme queríamos.

Considerando agora que  $A, B$  e  $C$  pertencem a uma reta do tipo II ( ${}_cL_r$ ). Decorre que  $x_A, x_B$  e  $x_C$  são números distintos (se  $x_A = x_B$  então  $(x_A - c)^2 + y_A^2 = r^2 = (x_B - c)^2 + y_B^2 = (x_A - c)^2 + y_B^2$  e com isso:  $y_A = y_B$ , donde  $A = B$ , o que contradiz a hipótese) e pelos mesmos motivos citados acima, veremos que um e somente um dos casos ocorre.

O(4) Para essa demonstração, precisaremos dos 2 lemas anunciados e demonstrados abaixo:

**Lema 6**  $x_B < x_C < x_A$  ou  $x_A < x_C < x_B$  se e somente se existe  $y_C$  tal que  $C = (x_C, y_C)$  pertence a  $\overleftrightarrow{AB} = {}_mL_r$  e  $A *_H C *_H B$ . (fig.B.3)

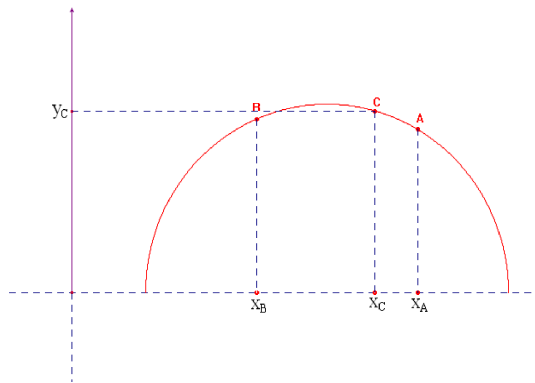


Figura B.3:  $C \in \overleftrightarrow{AB} = {}_cL_r$  e  $A *_H C *_H B$

Demonstração:

( $\Rightarrow$ ) Suponha  $x_B < x_C < x_A$  (o caso  $x_A < x_C < x_B$  é análogo). Existe  $k > 1$  tal que

$$x_C = x_B + \frac{x_A - x_B}{k}$$

por propriedade dos números reais (fig.B.4). Logo

$$x_C = \frac{x_A + x_B(k-1)}{k}.$$

Mas

$$r^2 = y_A^2 + (x_A - m)^2 \Rightarrow r^2 > (x_A - m)^2 \Rightarrow r > |x_A - m|$$

(analogamente  $r > |x_B - m|$ ).

$$r = \frac{r}{k} + \frac{r(k-1)}{k} > \frac{|x_A - m|}{k} + \frac{|x_B - m|(k-1)}{k} = \left| \frac{x_A - m}{k} \right| + \left| \frac{(x_B - m)(k-1)}{k} \right|$$

pois se  $k > 1$  teremos

$$r \geq \left| \frac{x_A - m}{k} + \frac{(x_B - m)(k-1)}{k} \right| = \left| \frac{x_A + x_B(k-1) - m - m(k-1)}{k} \right|$$

logo

$$r \geq \left| \frac{x_A + x_B(k-1) - m(1+k-1)}{k} \right| = \left| \frac{x_A + x_B(k-1) - m(1+k-1)}{k} \right|$$

e então

$$r \geq \left| \frac{x_A + x_B(k-1)}{k} - m \right| = |x_C - m|$$

donde

$$r > |x_C - m| \Rightarrow r^2 > (x_C - m)^2 \Rightarrow r^2 - (x_C - m)^2 > 0.$$

Tome  $y_C = \sqrt{r^2 - (x_C - m)^2} > 0$ . Assim,

$$(x_C - m)^2 + y_C^2 = r^2$$

e  $C = (x_C, y_C)$  pertence a reta  ${}_cL_r = \overleftrightarrow{AB}$ . Como  $x_B < x_C < x_A$  vem  $B * C * A$ .

A implicação no sentido contrário é imediata.

C.Q.D.

**Lema 7** *Sejam  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  pontos do plano hiperbólico e seja  $l = {}_cL_r$  uma reta do tipo II. Então*

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 < r^2 < (x_B - c)^2 + y_B^2 \text{ ou } (x_B - c)^2 + y_B^2 < r^2 < (x_A - c)^2 + y_A^2 \Leftrightarrow A|B, l.$$

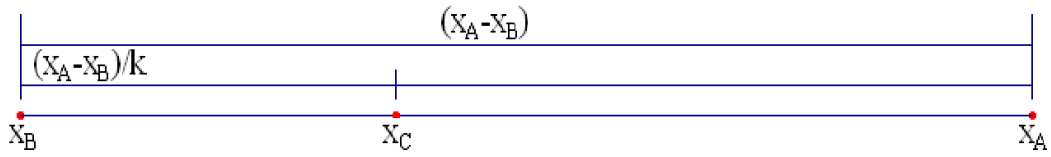


Figura B.4:  $x_C = x_B + \frac{x_A - x_B}{k}$

Demonstração:

Caso a)  $x_A = x_B = k$ .

( $\Rightarrow$ ) Se  $x_A = x_B = k$  então  $A$  e  $B$  pertencem a  ${}_kL$ . Mas

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 < r^2 \Rightarrow y_A^2 < r^2 - (x_A - c)^2 \Rightarrow 0 < y_A < \sqrt{r^2 - (x_A - c)^2}.$$

Tome

$$y_C = \sqrt{r^2 - (x_A - c)^2} > 0$$

então  $C = (x_A, y_C)$  pertence a  $l$  pois

$$(x_A - c)^2 + y_C^2 = (x_A - c)^2 + \left(\sqrt{r^2 - (x_A - c)^2}\right)^2 = r^2.$$

Mas  $C$  também pertence a  ${}_kL$  pois  $x_A = k$ . Além disso,

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 < r^2 < (x_B - c)^2 + y_B^2$$

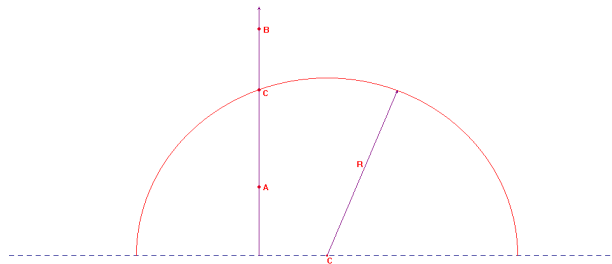
concluimos

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 < (x_A - c)^2 + y_C^2 < (x_B - c)^2 + y_B^2 = (x_A - c)^2 + y_B^2$$

e então

$$y_A^2 < y_C^2 < y_B^2 \Rightarrow y_A < y_C < y_B$$

e assim,  $A *_H C *_H B$ . Como a reta  $l$  passa por  $C$ , temos então  $A|B, l$ . (fig.B)



Obs.: se tomarmos como hipótese

$$(x_B - c)^2 + y_B^2 < r^2 < (x_A - c)^2 + y_A^2$$

chegaremos a mesma conclusão por uma demonstração análoga.

Reciprocamente, suponha que  $A|B, l$ , então existe  $C$  tal que  $A * C * B$  e  $l$  passa por  $C$ .

$$A * C * B \Rightarrow y_A < y_C < y_B \text{ ou } y_B < y_C < y_A$$

$l$  passa por  $C$ . Com isso,

$$(x_C - c)^2 + y_C^2 = r^2.$$

Suponha que  $y_A < y_C < y_B$ . Logo,

$$y_A < y_C < y_B \Rightarrow y_A^2 < y_C^2 < y_B^2$$

pois são todos números positivos. Com isso vem que

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 < (x_A - c)^2 + y_C^2 < (x_A - c)^2 + y_B^2$$

então

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 < (x_C - c)^2 + y_C^2 < (x_B - c)^2 + y_B^2$$

e com isso,

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 < r^2 < (x_B - c)^2 + y_B^2.$$

Analogamente, se supormos  $y_B < y_C < y_A$  teremos

$$(x_B - c)^2 + y_B^2 < r^2 < (x_A - c)^2 + y_A^2.$$

Caso b)  $x_A \neq x_B$ . Devem existir  $m$  e  $n$  reais ( $n$  positivo), tais que  $\overleftrightarrow{AB} = {}_mL_n$ .

( $\Rightarrow$ ) Tome

$$x_K = \frac{r^2 - n^2 + m^2 - c^2}{2(m - c)}$$

e suponha

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 < r^2 < (x_B - c)^2 + y_B^2$$

o outro caso é análogo.

Então das hipóteses

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 < r^2 \text{ e } (x_A - m)^2 + y_A^2 = n^2$$

concluimos que

$$2x_A(m - c) < r^2 - n^2 + m^2 - c^2$$

e das hipóteses

$$(x_B - c)^2 + y_B^2 > r^2 \text{ e } (x_B - m)^2 + y_B^2 = n^2$$

concluimos que

$$2x_B(m - c) > r^2 - n^2 + m^2 - c^2.$$

Desses dois resultados e considerando que  $m - c$  deve ser maior ou menor que zero, vem:

$$x_A < \frac{r^2 - n^2 + m^2 - c^2}{2(m - c)} = x_K < x_B \text{ ou } x_B < \frac{r^2 - n^2 + m^2 - c^2}{2(m - c)} = x_K < x_A$$

então pelo lema 6, deve existir  $y_K$  tal que  $K = (x_K, y_K)$  pertence a  ${}_mL_n$  e  $A *_E K *_E B$ .

Falta provar que

$$(x_K - c)^2 + y_K^2 = r^2.$$

Mas

$$x_K = \frac{r^2 - n^2 + m^2 - c^2}{2(m - c)} \Rightarrow -2mx_K + m^2 - n^2 = -2cx_K + c^2 - r^2$$

donde

$$x_K^2 - 2mx_K + m^2 - n^2 = x_K^2 - 2cx_K + c^2 - r^2 \Rightarrow (x_K - m)^2 - n^2 = (x_K - c)^2 - r^2$$

e então

$$-y_K^2 = (x_K - c)^2 - r^2 \Rightarrow (x_K - c)^2 + y_K^2 = r^2$$

e então  $K$  pertence a  $l$  e como já constatamos que  $A *_E K *_E B$ , vem que  $A|B, l$ .

Reciprocamente, suponha  $A|B, l$ . Então existe  $K$  pertencente a  $l$ , tal que  $A *_E K *_E B$ .

Como  $K \in l = {}_cL_r$  temos

$$(x_K - c)^2 + y_K^2 = r^2$$

Mas

$$A *_H K *_H B \Rightarrow K \in \overleftarrow{AB} = {}_mL_n \Rightarrow (x_K - m)^2 + y_K^2 = n^2$$

e então temos por esses dois resultados que

$$x_K = \frac{r^2 - n^2 + m^2 - c^2}{2(m - c)}.$$

Suponha por absurdo que

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 < r^2 \text{ e } (x_B - c)^2 + y_B^2 < r^2.$$

Como

$$(x_A - m)^2 + y_A^2 = n^2 \text{ e } (x_B - m)^2 + y_B^2 = n^2$$

teremos

$$x_A > \frac{r^2 - n^2 + m^2 - c^2}{2(m - c)} = x_K \text{ e } x_B > \frac{r^2 - n^2 + m^2 - c^2}{2(m - c)} = x_K$$

ou

$$x_A < x_K \text{ e } x_B < x_K$$

o que leva a uma contradição, pois por hipótese temos

$$x_A < x_K < x_B \text{ ou } x_B < x_K < x_A$$

decorrendo,  $A *_H K *_H B$ . Portanto

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 < r^2 \text{ e } (x_B - c)^2 + y_B^2 < r^2$$

não pode ocorrer. Similarmente, conseguimos provar que

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 > r^2 \text{ e } (x_B - c)^2 + y_B^2 > r^2$$

também não pode ocorrer.  $A$  e  $B$  não são pontos incidentes a  $l$  e portanto teremos:

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 \neq r^2 \text{ e } (x_B - c)^2 + y_B^2 \neq r^2.$$

Então obrigatoriamente vemos que deve acontecer

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 < r^2 < (x_B - c)^2 + y_B^2 \text{ ou } (x_A - c)^2 + y_A^2 > r^2 > (x_B - c)^2 + y_B^2$$

conforme queríamos.

C.Q.D.

Com esses 2 lemas e com o ASP, seremos capazes de demonstrar  $O(4)$ .

Demonstração:

Sejam  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  e  $C = (x_C, y_C)$  pontos distintos pertencentes ao plano hiperbólico e seja  $l$  uma reta que não passa por nenhum desses pontos. Temos dois possíveis casos:

Caso 1)  $l$  é do tipo I ( $l = {}_kL$ ). Nesse caso suponha que tenhamos  $A, B|l$  e  $B, C|l$ . Teremos então pelo lema  $O_3$  :

$$x_A < k \text{ e } x_B < k \text{ e } x_C < k$$

ou

$$x_A > k \text{ e } x_B > k \text{ e } x_C > k$$

Então não ocorre  $x_A < k < x_C$ ,  $x_C < k < x_A$  nem  $x_C = k = x_A$ , portanto  $A$  e  $C$  não podem estar em lados opostos a  $l$ . Levando-se em consideração o fato de que  $A$  e  $C$  são



pontos não incidentes a  $l$ , decorre que  $A$  e  $C$  estão do mesmo lado de  $l$ .

Suponha agora que tenhamos  $A|B, l$  e  $B|C, l$ . Teremos então que

$$x_A < k < x_B \text{ ou } x_B < k < x_A$$

e

$$x_C < k < x_B \text{ ou } x_B < k < x_C$$

pelo lema 6. Os possíveis casos são:

$$x_A < k < x_B \text{ e } x_C < k < x_B \Rightarrow x_A < k \text{ e } x_C < k \Rightarrow A, C|l;$$

$$x_A < k < x_B \text{ e } x_B < k < x_C \Rightarrow k < x_B \text{ e } x_B < k \Rightarrow \text{Absurdo};$$

$$x_B < k < x_A \text{ e } x_B < k < x_C \Rightarrow x_A > k \text{ e } x_C > k \Rightarrow A, C|l;$$

$$x_A < k < x_B \text{ e } x_B < k < x_C \Rightarrow k < x_B \text{ e } x_B < k \Rightarrow \text{Absurdo}.$$

Vemos então que é necessário termos  $A, C|l$  e portanto o ASP é satisfeito e decorre que o axioma de Pasch é satisfeito.

Caso 2)  $l$  é do tipo II ( $l = {}_cL_r$ )

Se tivermos  $A, B|l$ , então teremos

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 < r^2 \text{ e } (x_B - c)^2 + y_B^2 < r^2$$

ou

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 > r^2 \text{ e } (x_B - c)^2 + y_B^2 > r^2$$

pelo lema 7. Caso tenhamos também a hipótese  $B, C|l$  então

$$(x_B - c)^2 + y_B^2 < r^2 \text{ e } (x_C - c)^2 + y_C^2 < r^2$$

ou

$$(x_B - c)^2 + y_B^2 > r^2 \text{ e } (x_C - c)^2 + y_C^2 > r^2$$

também pelo lema 7. Com esse dois resultados ocorrendo simultaneamente, obrigatoriamente ocorrerá:

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 < r^2 \text{ e } (x_B - c)^2 + y_B^2 < r^2 \text{ e } (x_C - c)^2 + y_C^2 < r^2$$

ou

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 > r^2 \text{ e } (x_B - c)^2 + y_B^2 > r^2 \text{ e } (x_C - c)^2 + y_C^2 > r^2$$

decorrendo  $A, C|l$  novamente pelo lema 7.

Agora se supormos que  $A|B, l$  e  $B|C, l$ , utilizando argumentos similares aos descritos acima, conseguiremos provar que

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 < r^2 \text{ e } (x_B - c)^2 + y_B^2 > r^2 \text{ e } (x_C - c)^2 + y_C^2 < r^2$$

ou

$$(x_A - c)^2 + y_A^2 > r^2 \text{ e } (x_B - c)^2 + y_B^2 < r^2 \text{ e } (x_C - c)^2 + y_C^2 > r^2$$

e então  $A, C|l$  pelo lema 7.

Com esse último resultado, conseguimos concluir que o ASP é satisfeito e automaticamente temos que o axioma de Pasch também será.

C.Q.D.

# Apêndice C

## CONGRUÊNCIA EM GEOMETRIA EUCLIDEANA

Verificaremos agora que o plano euclidiano é uma geometria de congruência.

Para verificarmos a propriedade  $C(1)$ , precisamos mostrar duas coisas: que existe um ponto com as características exigidas e que este é único. Começemos com a demonstração de sua existência:

Sejam  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  pontos distintos pertencentes ao plano euclidiano. Considere uma semi-reta qualquer  $\overrightarrow{A'B'}$ . Precisamos mostrar que existe um ponto  $C \neq A'$  pertencente a semi-reta  $\overrightarrow{A'B'}$  tal que  $AB \equiv_E A'C$ .

$$\overrightarrow{A'B'} = \{C \in \Gamma_E : C = A' + t(B' - A'), t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Tome

$$t_0 = \frac{\|A - B\|}{\|A' - B'\|}.$$

Repare que  $\|A' - B'\|$  é não nulo pela propriedade  $N(i)$ , uma vez que  $A'$  e  $B'$  são distintos. Mas então  $t_0 > 0$  e  $t_0 = |-t_0|$  e então

$$\|A - B\| = t_0\|A' - B'\| = |t_0| \cdot \|A' - B'\| = \|t_0(A' - B')\|$$

pela propriedade  $N(ii)$ . Com isso:

$$\|A - B\| = \|-t_0(B' - A')\| \Rightarrow \|A - B\| = \|A' - A' - t_0(B' - A')\| = \|A' - (A' + t_0(B' - A'))\| \quad (\text{I}).$$

Tome agora

$$C = A' + t_0(B' - A').$$

Como  $t_0 > 0$ ,  $C$  é um ponto da semi-reta  $\overrightarrow{A'B'}$  e  $C$  é distinto de  $A'$  pois se fossem iguais,

teríamos forçosamente que  $t_0 = 0$  o que não ocorre. De (I) vem:

$$\|A' - C'\| = \|A' - (A' + t_0(B' - A'))\| = \|A - B\| \Rightarrow A'C' \equiv_E AB.$$

Mostraremos agora que este ponto é único. Para isso suponha que existam dois pontos  $C$  e  $C'$  distintos de  $A'$ , pertencentes a semi-reta  $\overrightarrow{A'B'}$  e tais que  $A'C' \equiv_e AB$  e  $A'C \equiv_E AB$ .

$$C \in \overrightarrow{A'B'} \text{ e } C \neq A' \Rightarrow C = A' + t_0(B' - A')$$

para algum  $t_0 > 0$ ;

$$C' \in \overrightarrow{A'B'} \text{ e } C' \neq A' \Rightarrow C' = A' + t_1(B' - A')$$

para algum  $t_1 > 0$ . Como  $A'C \equiv_e AB$  decorre

$$\|A' - (A' + t_0(B' - A'))\| = \|A - B\| \Rightarrow t_0 = \frac{\|A - B\|}{\|B' - A'\|}.$$

Analogamente, concluímos que

$$t_1 = \frac{\|A - B\|}{\|B' - A'\|} = t_0$$

implicando em  $C = C'$ .

A afirmação  $C(2)$  é obviamente satisfeita.

Para mostrarmos  $C(3)$  suponha que tenhamos

$$A *_E B *_E C, A' *_E B' *_E C', AB \equiv_E A'B' \text{ e } BC \equiv_E B'C'.$$

Mas

$$A *_E B *_E C \Rightarrow B = A + t_0(C - A) \text{ com } 0 < t_0 < 1;$$

Analogamente,

$$A' *_E B' *_E C' \Rightarrow B' = A' + t_1(C' - A') \text{ com } 0 < t_1 < 1;$$

Então

$$AB \equiv_E A'B' \Rightarrow \|A - B\| = \|A' - B'\| \Rightarrow \|A - (A + t_0(C - A))\| = \|A' - (A' + t_1(C' - A'))\|$$

daí,

$$\| -t_0(C - A) \| = \| -t_1(C' - A') \| \Rightarrow t_0 \|C - A\| = t_1 \|C' - A'\| \Rightarrow \frac{\|C - A\|}{\|C' - A'\|} = \frac{t_1}{t_0} \text{ (I).}$$

Ainda,

$$BC \equiv_E B'C' \Rightarrow \|B - C\| = \|B' - C'\| \Rightarrow \|A + t_0(C - A) - C\| = \|A' + t_1(C' - A') - C'\|$$

implicando

$$\|(1 - t_0)(A - C)\| = \|(1 - t_1)(A' - C')\| \Rightarrow (1 - t_0)\|(A - C)\| = (1 - t_1)\|(A' - C')\|$$

e com isso,

$$(1 - t_0)\|(A - C)\| = \frac{\|A - C\|}{\|A' - C'\|} = \frac{1 - t_1}{1 - t_0} \quad (\text{II}).$$

De (I) e (II) decorre:

$$\frac{t_1}{t_0} = \frac{1 - t_1}{1 - t_0} \Rightarrow t_1 - t_1 t_0 = t_0 - t_1 t_0 \Rightarrow t_1 = t_0$$

e novamente por (I) concluímos que

$$\|A - C\| = \|A' - C'\| \Rightarrow AC \equiv_E A'C'.$$

A propriedade C(5) é imediatamente verificada.

Para verificarmos C(6), suponha que tenhamos dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  tais que  $BA \equiv_E B'A'$ ,  $BAC \equiv_E B'A'C'$  e  $AC \equiv_E A'C'$ .

$$BA \equiv_E B'A' \Rightarrow \|A - B\| = \|A' - B'\| \quad (\text{I})$$

Da mesma forma,

$$AC \equiv_E A'C' \Rightarrow \|A - C\| = \|A' - C'\| \quad (\text{II})$$

Por último,

$$\angle BAC \equiv_E \angle B'A'C' \Rightarrow \frac{\langle B - A, C - A \rangle}{\|B - A\| \cdot \|C - A\|} = \frac{\langle B' - A', C' - A' \rangle}{\|B' - A'\| \cdot \|C' - A'\|}$$

Utilizando (I) e (II) vem:

$$\langle B - A, C - A \rangle = \langle B' - A', C' - A' \rangle \quad (\text{III}).$$

Mas

$$\|B - C\|^2 = \|B - A - C + A\|^2 = \|(B - A) - (C - A)\|^2 = \langle (B - A) - (C - A), (B - A) - (C - A) \rangle$$

então

$$\|B - C\|^2 = \langle (B - A), (B - A) \rangle + \langle (C - A), (C - A) \rangle - 2\langle (B - A), (C - A) \rangle$$

e com isso,

$$\|B - C\|^2 = \|B - A\|^2 + \|C - A\|^2 - 2\langle (B' - A'), (C' - A') \rangle \text{ por (III)}$$

então

$$\|B - C\|^2 = \|B - A\|^2 + \|C - A\|^2 - 2\langle (B' - A'), (C - A) \rangle$$

logo

$$\|B - C\|^2 = \|B' - A'\|^2 + \|C' - A'\|^2 - 2\langle (B' - A'), (C - A) \rangle$$

por (I) e (II) e por isso temos que

$$\|B - C\|^2 = \|B' - C'\|^2$$

e como a norma é um número não negativo, decorre que

$$\|B - C\| = \|B' - C'\| \text{ (IV)}$$

Ainda,

$$\langle A' - C', B' - C' \rangle = \langle A' - C', B' - C' - A' + A' \rangle = \langle (A' - C'), (B' - A') + (A' - C') \rangle$$

e com isso,

$$\langle A' - C', B' - C' \rangle = \langle (A' - C'), (B' - A') \rangle + \langle (A' - C'), (A' - C') \rangle = \langle (A' - C'), (B' - A') \rangle + \|A' - C'\|^2$$

donde,

$$\langle A' - C', B' - C' \rangle = \langle (A - C), (B - A) \rangle + \|A - C\|^2 \text{ por (II) e (III)}$$

mas então

$$\langle A' - C', B' - C' \rangle = \langle A - C, B - A \rangle + \|A - C\|^2 = \langle A - C, B - A \rangle + \langle A - C, A - C \rangle$$

logo

$$\langle A' - C', B' - C' \rangle = \langle A - C, B - A + A - C \rangle = \langle A - C, B - C \rangle$$

e por (II) e (IV) decorre que

$$\frac{\langle A' - C', B' - C' \rangle}{\|A' - C'\| \cdot \|B' - C'\|} = \frac{\langle A - C, B - C \rangle}{\|A - C\| \cdot \|B - C\|} \quad (\text{V})$$

De maneira análoga, mostramos que

$$\frac{\langle A' - B', C' - B' \rangle}{\|A' - B'\| \cdot \|C' - B'\|} = \frac{\langle A - B, C - B \rangle}{\|A - B\| \cdot \|C - B\|} \quad (\text{VI})$$

De (IV), (V) e (VI) vem:  $BC \equiv_E B'C'$ ,  $\angle ACB \equiv_E \angle A'C'B'$  e  $\angle ABC \equiv_E \angle A'B'C'$ . Juntando esses resultados com as hipóteses, resulta que os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são congruentes.

Resta apenas verificar o axioma C(4), o que não será feito<sup>1</sup>.

C.Q.D.

---

<sup>1</sup>Mesmo o enorme esforço despendido pelo autor não foi suficiente para verificar essa propriedade.

# Apêndice D

## RÉGUAS HIPERBÓLICAS

### D.1 Régua para uma reta do tipo II

Seja  $\mathcal{H} = (\Gamma_H, \mathbf{L}_H, *_H)$  o plano hiperbólico. Mostraremos que a função  $\Psi : {}_cL_r \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\Psi(x, y) = \ln\left(\frac{x-c+r}{y}\right)$  é uma régua para  ${}_cL_r$ .

Para isso comecemos mostrando que  $d_H : \Gamma_H \times \Gamma_H \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por  $d_H(A, B) = |\Psi(A) - \Psi(B)|$  onde  $\Psi(x, y) = \ln\left(\frac{x-c+r}{y}\right)$  é uma função distância para uma reta do tipo II no plano hiperbólico.

**Teorema 111** *Sejam  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  e  $d_H(A, B) = |\Psi(A) - \Psi(B)|$ . Se  $\Psi(x, y) = \ln\left(\frac{x-c+r}{y}\right)$ , então  $d_H$  é uma função distância.*

Demonstração:

As propriedades  $D(i)$  e  $D(iii)$  de distância são obviamente satisfeitas. Para mostrarmos  $D(ii)$ , utilizaremos o seguinte lema:

**Lema 8** *Se uma função  $\Psi$  é injetiva, então temos que  $|\Psi(A) - \Psi(B)| = 0 \Leftrightarrow A = B$ .*

Demonstração:

De fato, se  $\Psi$  é injetiva então para mostrarmos a implicação da esquerda para a direita suponha que tenhamos  $A \neq B$ . Teremos então  $\Psi(A) \neq \Psi(B)$  pois  $\Psi$  é injetiva, mas  $\Psi(A) \neq \Psi(B) \Rightarrow \Psi(A) - \Psi(B) \neq 0 \Rightarrow |\Psi(A) - \Psi(B)| \neq 0$ . Com isso  $A \neq B \Rightarrow |\Psi(A) - \Psi(B)| \neq 0$ , o que é a contrapositiva da afirmação que queríamos provar.

Para mostrar a implicação no outro sentido, suponha  $A = B \Rightarrow \Psi(A) = \Psi(B) \Rightarrow \Psi(A) - \Psi(B) = 0 \Rightarrow |\Psi(A) - \Psi(B)| = 0$ .

C.Q.D.

Para mostrarmos o teorema, resta apenas provarmos que  $\Psi : {}_cL_r \longrightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\Psi(x, y) = \ln\left(\frac{x-c+r}{y}\right)$  é injetiva. Mostraremos mais que isso. Constataremos que  $\Psi$  é bijetiva, para utilizar esse resultado mais tarde.

Para demonstrarmos que  $\Psi$  é bijetiva, precisamos mostrar que para qualquer  $t$  real, existe um único par ordenado  $(x, y)$  que satisfaz  $(x - c)^2 + y^2 = r^2$ ,  $y > 0$  e  $\Psi(x, y) = t$ .



Resolveremos  $\Psi(x, y) = \ln\left(\frac{x-c+r}{y}\right) = t$ . Com isso vem:

$$\frac{x-c+r}{y} = e^t \Rightarrow e^{-t} = \frac{y}{x-c+r} = \frac{y(x-c-r)}{(x-c+r)(x-c-r)} = \frac{y(x-c-r)}{(x-c)^2 - r^2} = \frac{y(x-c-r)}{y^2}$$

uma vez que  $(x, y) \in {}_cL_r$ . Então  $e^{-t} = \frac{x-c-r}{y}$ , donde:

$$e^t + e^{-t} = \frac{x-c+r}{y} - \frac{x-c-r}{y} = \frac{2r}{y} \Rightarrow y = r \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right) \Rightarrow y = r \operatorname{sech}(t)$$

também

$$\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{\frac{x-c+r}{y} + \frac{x-c+r}{y}}{\frac{2r}{y}} = \frac{2(x-c)}{2r} = \frac{x-c}{r}$$

ou

$$x-c = r \left( \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \right) \Rightarrow x-c = r \operatorname{tanh}(t)$$

Com esse desenvolvimento, podemos concluir que a *única* solução da equação  $\Psi(x, y) = t$  é  $x = c + r \operatorname{tanh}(t)$  e  $y = r \operatorname{sech}(t)$ . Vemos também que

$$(x-c)^2 + y^2 = (r \operatorname{tanh}(t))^2 + (r \operatorname{sech}(t))^2 = r^2(\operatorname{tanh}^2(t) + \operatorname{sech}^2(t)) = r^2$$

ou  $(x-c)^2 + y^2 = r^2$ . Como  $y = r \operatorname{sech}(t)$ , então  $y > 0$ . Com isso, concluímos que existe um único par  $(x, y)$  que satisfaz  $(x-c)^2 + y^2 = r^2$ ,  $y > 0$  e  $\Psi(x, y) = t$  para qualquer  $t$  real, donde  $\Psi : {}_cL_r \rightarrow \mathbb{R}$  é bijetiva, logo  $D(ii)$  é satisfeito e  $\Psi$  é uma função distância.

C.Q.D.

Já mostramos que  $\Psi$  é uma bijeção e que  $d_H(A, B) = |\Psi(A) - \Psi(B)|$  onde  $\Psi(x, y) = \ln\left(\frac{x-c+r}{y}\right)$  é uma função distância. Podemos então concluir pela definição de régua que  $\Psi$  é uma régua para  ${}_cL_r$ .

## D.2 Régua para uma reta do tipo I

**Teorema 112** A função  $d_H : \Gamma_H \times \Gamma_H \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $d_H(A, B) = |\Omega(A) - \Omega(B)|$  onde  $\Omega(x, y) = \ln(y)$  é uma função distância na reta do tipo I  ${}_xL$  no plano hiperbólico.

Demonstração:

Novamente as propriedades  $D(i)$  e  $D(iii)$  são trivialmente satisfeitas.  $D(ii)$  decorre do lema 8 e do fato da função  $\Omega(x, y) = \ln(y)$  ser bijetiva para  $x$  constante ( $x$  é constante, uma vez que  $\Omega$  usa apenas pontos de uma reta do tipo I  $({}_xL)$ ).

C.Q.D.

Decorre imediatamente do teorema acima que  $\Omega(x, y) = \ln(y)$  é uma régua para uma reta do tipo I.

# Apêndice E

## ORDENAÇÃO E BIJEÇÕES

### E.1 Bijeção entre os pontos de uma reta e os números reais

Nos dispomos aqui a mostrar que em qualquer geometria de continuidade, existe uma função bijetiva entre o conjunto dos pontos de uma reta e o conjunto dos números reais. Além disso, mostraremos que é possível determinarmos uma relação de ordem total entre os pontos desta reta e que a função dada, mantém essa relação para os números reais.

Observação importante: Não devemos confundir a relação de ordem total com os axiomas ou propriedades da geometria de ordem. Estas duas coisas são distintas, sendo que posteriormente daremos uma definição formal sobre o que é *ordem total*.

#### E.1.1 A Função Comprimento

Com o auxílio dos axiomas de continuidade, poderemos definir uma função sobrejetiva que "levará" um segmento em um número real positivo (esta função, geometricamente representará o *comprimento* desse segmento). Daremos a seguir sua definição:

**Definição 67** *Seja  $\mathcal{C} = (\Gamma, \mathbb{L}, *, \equiv)$  uma geometria de continuidade e  $\mathcal{S}$  o conjunto de todos os segmentos de  $\mathcal{C}$ . Fixado o segmento  $AA'$ , considere a função  $\mu : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  tal que:*

$$(i) DE \equiv FG \Leftrightarrow \mu(DE) = \mu(FG);$$

$$(ii) D * E * F \Leftrightarrow \mu(DF) = \mu(DE) + \mu(EF);$$

$$(iii) \mu(AA') = 1.$$

$\mu$  é chamada de **função comprimento**.

$AA'$  é chamado de **segmento unitário**.

Enunciaremos a seguir dois teoremas importantes, no entanto não faremos suas demonstrações<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Quem eventualmente tiver interesse nas demonstrações, poderá conseguí-las na ref. [1].

**Teorema 113** *Fixado um segmento  $AA'$ , existe uma única função comprimento satisfazendo as condições da função  $\mu$  dada acima.*

**Teorema 114** *A função  $\mu$  é sobrejetiva.*

## E.1.2 A Função Ordenação

Com o auxílio da função  $\mu$ , já seremos capazes de definir uma função bastante importante para nossas demonstrações, a *função ordenação*. O próximo teorema é o ponto principal dessa seção e por isso iremos demonstrá-lo com todos os detalhes.

**Teorema 115** *Existe uma bijeção entre os pontos de uma reta fixada e os números reais.*

Demonstração:

Seja  $r$  uma reta e sejam  $A$  e  $A'$  pontos distintos incidentes a  $r$ . Fixe  $\mu(AA') = 1$  ( $\mu$  é a função comprimento para o segmento unitário  $AA'$ ). Vamos mostrar que a função  $\varphi: r \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\begin{aligned} & 0 \text{ se } X = A \\ \varphi(X) = & \begin{cases} \mu(AX) & \text{se } X \neq A \text{ e } X \in \overrightarrow{AA'} \\ -\mu(AX) & \text{se } X \neq A \text{ e } X \notin \overrightarrow{AA'} \end{cases} \end{aligned}$$

é bijetiva.

Obs.:  $\varphi$  é chamada de *função ordenação*.

$\varphi$  é injetiva pois se  $\varphi(X) = \varphi(Y) = c$  para  $X$  e  $Y$  incidentes a  $r$ , então teremos  $c = 0$ ,  $c < 0$  ou  $c > 0$  pela tricotomia dos números reais.

Se  $c = 0$  então  $\varphi(X) = \varphi(Y) = 0 \Rightarrow X = Y = A$  pela definição de  $\varphi$ ;

Se  $c < 0$  então  $\varphi(X) < 0 \Rightarrow \varphi(X) = -\mu(AX)$  e  $X$  pertence a *semi-reta oposta* a  $\overrightarrow{AA'}$  (denotada por  $\overrightarrow{AA'}^{op}$ ). Mas se  $c < 0$  então  $\varphi(Y) < 0 \Rightarrow \varphi(Y) = -\mu(AY)$  e  $Y \in \overrightarrow{AA'}^{op}$ . Como  $\varphi(X) = \varphi(Y)$  por hipótese, temos que  $\mu(AX) = \mu(AY) \Rightarrow AX \equiv AY$  (pela definição de  $\mu$ ), mas como  $X$  e  $Y$  pertencem a mesma semi-reta de origem  $A$ , então pelo primeiro axioma de congruência  $C(1)$  decorre que  $X = Y$ .

Para  $c > 0$  temos que  $\varphi(X) > 0 \Rightarrow \varphi(X) = \mu(AX)$ ,  $X \in \overrightarrow{AA'}$  e  $X \neq A$ . Mas como  $c > 0$  temos também que  $\varphi(Y) > 0 \Rightarrow \varphi(Y) = \mu(AY)$ ,  $Y \in \overrightarrow{AA'}$  e  $Y \neq A$ . Como  $\varphi(X) = \varphi(Y)$  vem:  $\mu(AX) = \mu(AY) \Rightarrow AX \equiv AY$  e como  $X \neq A$  e  $Y \neq A$  pertencem a mesma semi-reta de origem  $A$ , então novamente pelo axioma  $C(1)$  conclui-se que  $X = Y$ .

Então em qualquer um dos casos teremos que  $X = Y$ , donde  $\varphi$  é injetiva.

Agora, para mostrarmos que  $\varphi$  é sobrejetiva, tome  $a \in \mathbb{R}$ . Novamente pela lei da tricotomia dos números reais, temos que  $a > 0$ ,  $a < 0$  ou  $a = 0$ .

Para  $a = 0$ , tome o ponto  $A \in r$ , teremos então que  $\varphi(A) = 0 = a$ .

Se  $a > 0$ , deve existir  $OO'$  tal que  $\mu(OO') = a$  pois  $\mu$  é sobrejetiva pelo teorema 114. Mas pelo axioma  $C(1)$ , deve existir um único ponto  $X \neq A$  tal que  $X \in \overrightarrow{AA'}$  e  $AX \equiv OO'$ . Conclui-se então que  $\mu(AX) = \mu(OO')$ , donde  $\varphi(X) = \mu(AX) = \mu(OO') = a$ .

Por último, se tivermos  $a < 0$ , então  $-a > 0$  e por isso existe  $OO'$  tal que  $\mu(OO') = -a$  ou, o que é o mesmo,  $-\mu(OO') = a$  por ser  $\mu$  sobrejetiva. Mas pelo C(1) deve existir um único ponto  $X \neq A$  tal que  $X \in \overrightarrow{AA'}^{top}$  e  $AX \equiv OO'$ . Conclui-se então que  $-\mu(AX) = -\mu(OO')$ , donde  $\varphi(X) = -\mu(AX) = -\mu(OO') = a$ .

Conclui-se que  $\varphi$  é sobrejetiva e portanto  $\varphi$  é uma bijeção.

C.Q.D.

## E.2 Ordenação dos pontos de uma reta

Fixe uma reta  $r$  e dois pontos distintos  $O$  e  $A$  incidentes a  $r$ . Sejam  $C$  e  $D$  pontos distintos incidentes a  $r$ . Diremos que **C está a esquerda de D** (denotado por  $C \prec D$ ) se  $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{OA}$  ou  $\overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{CD}$ . A semi-reta  $\overrightarrow{OA}$  é chamada de **sentido positivo da reta r**.

Intuitivamente, a semi-reta  $\overrightarrow{OA}$  dará um sentido preferencial para percorrermos a reta  $r$ , de modo que se a semi-reta  $\overrightarrow{CD}$  tiver o *mesmo sentido* de  $\overrightarrow{OA}$ , teremos que  $C \prec D$ , conforme nossa definição (fig.E.1).

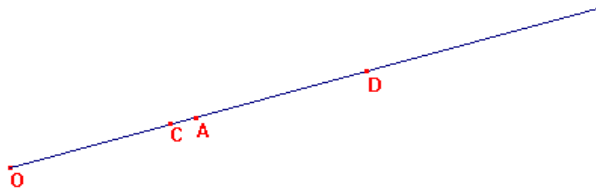


Figura E.1:  $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{OA} \Rightarrow C \prec D$

**Definição 68** *Seja  $R$  um conjunto. Dizemos que uma relação  $\ll$  é uma **relação de ordem total em  $R$**  se dados  $C$  e  $D$  pertencentes a  $R$ , tivermos a propriedade da tricotomia, onde uma e só uma das seguintes possibilidades ocorre:  $C \ll D$  ou  $C = D$  ou  $D \ll C$ . Além disso se requer a transitividade, isto é: se  $A \ll B$  e  $B \ll C$  então  $A \ll C$  para quaisquer  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertencentes a  $R$ .*

Apresentaremos agora alguns teoremas que nos fornecerão recursos para posteriormente mostrarmos que a relação “ $\prec$ ” dada na definição E.2 é uma relação de ordem total. Esses teoremas muitas vezes terão demonstrações um pouco longas e divididas em vários casos, mas está análise é necessária para atingirmos nossos objetivos e por isso as faremos com os detalhes necessários.

**Teorema 116** *Seja  $r$  reta e sejam  $C \neq D$  e  $O \neq A$  pontos de  $r$ , então  $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{DC} \not\subset \overrightarrow{OA}$ .*

Demonstração:

Tome  $Y \neq O$  tal que  $Y \in \overrightarrow{OA}^{op} \Rightarrow Y \notin \overrightarrow{OA}$  pois  $\overrightarrow{OA} \cap \overrightarrow{OA}^{op} = \{O\}$ . Basta mostrar que  $Y \in \overrightarrow{DC}$ . Como  $Y \notin \overrightarrow{OA} \Rightarrow Y \notin \overrightarrow{CD}$  (pois  $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{OA}$  por hipótese). Mas  $Y \in r$  e então  $Y \in \overrightarrow{DC}$  pois  $\overrightarrow{DC} \cup \overrightarrow{CD} = r$ .

C.Q.D

**Teorema 117** *Seja  $r$  reta e sejam  $C \neq D$  e  $O \neq A$  pontos de  $r$ , então  $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \not\subset \overrightarrow{DC}$ .*

Demonstração:

Tome  $X \in r$  tal que  $C * D * X \Rightarrow X \notin \overrightarrow{DC}$  e  $X \in \overrightarrow{CD} \Rightarrow X \notin \overrightarrow{DC}$  e  $X \in \overrightarrow{OA}$ .

C.Q.D.

**Teorema 118** *Seja  $r$  reta e sejam  $C \neq D$  e  $O \neq A$  pontos de  $r$ , então  $\overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{DC} \not\subset \overrightarrow{OA}$ .*

Demonstração:

Tome  $X \in r$  tal que  $D * C * X \Rightarrow X \in \overrightarrow{DC}$  e  $X \notin \overrightarrow{CD} \Rightarrow X \in \overrightarrow{DC}$  e  $X \notin \overrightarrow{OA}$ .

C.Q.D.

**Teorema 119** *Seja  $r$  reta e sejam  $C \neq D$  e  $O \neq A$  pontos de  $r$ , então  $\overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \not\subset \overrightarrow{DC}$ .*

Demonstração:

Suponha por absurdo que  $\overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{DC}$ . Mas  $\overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{CD}$  por hipótese, então  $\overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{CD} \cap \overrightarrow{DC} = DC$  o que é um absurdo.

C.Q.D.

**Teorema 120** *Seja  $r$  reta e sejam  $C \neq D$  e  $O \neq A$  pontos de  $r$ , então  $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{OA}$  ou  $\overrightarrow{DC} \subset \overrightarrow{OA}$  ou  $\overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{CD}$  ou  $\overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{DC}$ .*

Demonstração:

**Lema 9** *Se a semi-reta  $\overrightarrow{CD}$  está contida em alguma semi-reta pertencente a  $r$  com origem  $O$ , então a tese do teorema 120 é assegurada.*

Demonstração:

Existem exatamente duas semi-retas de origem  $O$  contidas em  $r$ . Como  $O \neq A$ , então essas duas semi-retas são  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OA}^{op}$ .

Se  $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{OA}$ , não temos nada a mostrar. Suponha então que  $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{OA}^{op}$ .

Se  $C = O$  então:  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OA}^{op} \Rightarrow \overrightarrow{CD}^{op} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{CD}^{op} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{CD}^{op} \cup CD = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{DC}$ .

Se  $C \neq O$  então: (Seja  $X \in \overrightarrow{CD} \Rightarrow X \in \overrightarrow{OA^{op}} \setminus \{O\} \Rightarrow X \notin \overrightarrow{OA^{op}} \setminus \{O\} \Rightarrow X \notin \overrightarrow{CD} \Rightarrow (X \in \overrightarrow{OA} \Rightarrow X \in \overrightarrow{CD^{op}} \Rightarrow X \in \overrightarrow{CD^{op}} \cup CD \Rightarrow X \in \overrightarrow{DC})$  .

Obs.: Para a semi-reta  $\overrightarrow{DC}$ , consegue-se um resultado análogo, onde a tese do teorema 120 é mantida.

C.Q.D.

Demonstração do teorema 120:

Se  $C = O$ , como  $D \in r$  então  $D \in \overrightarrow{OA}$  ou  $D \in \overrightarrow{OA^{op}}$ .

$D \in \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{OA}$  (I)

$D \in \overrightarrow{OA^{op}} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OA^{op}} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{OA^{op}}$  (II)

Por (I) e (II) e pelo último lema conclui-se que a tese é assegurada. Se  $D = O$ , o resultado é análogo.

Suponha então que  $C \neq O$  e  $D \neq O$ . Como  $C \neq D$ , então um e somente um dos três seguintes casos deve ocorrer pelo axioma O(iii) :

(i)  $D * C * O$ ;

(ii)  $C * D * O$ ;

(iii)  $D * O * C$ .

Se (i) ocorre, então tome  $X \in \overrightarrow{CD}$ . Nesse caso:

a)  $X = C \Rightarrow O * X * D$  (por hipótese)  $\Rightarrow X \in \overrightarrow{OD}$  (I)

b)  $X = D \Rightarrow O * C * X$  (por hipótese)  $\Rightarrow X \in \overrightarrow{OC}$  (II)

c)  $C * X * D \Rightarrow C * X * D$  e  $O * C * D$  (por hipótese)  $\Rightarrow O * C * X \Rightarrow X \in \overrightarrow{OC}$  (III)

d)  $C * D * X \Rightarrow C * D * X$  e  $O * C * D$  (por hipótese)  $\Rightarrow O * C * X \Rightarrow X \in \overrightarrow{OC}$  (IV)

Por (I), (II), (III) e (IV) teremos que  $X$  pertence a uma semi-reta de origem  $O$ . Como as duas únicas semi-retas com origem em  $O$  pertencentes a  $r$  são  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OA^{op}}$ , então  $X$  pertence a alguma dessas semi-retas. Logo, teremos que  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OA}$  ou  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OA^{op}}$  e pelo lema A<sub>2</sub>, teremos que a tese é alcançada.

Se (ii) ocorre, tome então  $X \in \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OA}$  ou  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OA^{op}}$  pelas mesmas justificativas dadas em (i). Então a tese é assegurada pelo último lema.

Se (iii) ocorre:  $C * O * D \Rightarrow C$  e  $D$  estão em semi-retas opostas contidas em  $r$  e de origem  $O$ , donde  $C \in \overrightarrow{OA}$  ou  $C \in \overrightarrow{OA^{op}} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}$  ou  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}$ .

Se  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} \subset \overrightarrow{DC}$  (pela hipótese  $C * O * D$ ). Mas então  $\overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{DC}$ .

Similarmente, se  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{CD}$  (pela hip.  $C * O * D$ ). Com isso,  $\overrightarrow{OD} \subset \overrightarrow{CD}$ . Em qualquer caso teremos então que  $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{OA}$  ou  $\overrightarrow{DC} \subset \overrightarrow{OA}$  ou  $\overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{CD}$  ou  $\overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{DC}$ .

C.Q.D.

**Teorema 121 (Tricotomia)** Fixada a reta  $r$  e os pontos  $O$  e  $A$  distintos incidentes a  $r$ , então se  $C$  e  $D$  são pontos incidentes a  $r$ , teremos que  $C \prec D$  ou  $D \prec C$  ou  $C = D$  (exclusivamente).

Demonstração:

$C = D$  ou  $C \neq D$ .

Se  $C = D$  então não existe  $\overrightarrow{CD}$  e não existe  $\overrightarrow{DC}$ . Então não ocorre  $D \prec C$  e não ocorre  $C \prec D$ .

Se  $C \neq D \Rightarrow (\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{OA}$  ou  $\overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{CD})$  ou  $(\overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{DC}$  ou  $\overrightarrow{DC} \subset \overrightarrow{OA})$  pelo teorema 120.

Mas se  $(\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{OA}$  ou  $\overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{CD})$  então pela definição de  $\prec$ ,  $C \prec D$  e  $[\overrightarrow{OA} \not\subset \overrightarrow{DC}]$  (Teorema 119) e  $\overrightarrow{OA} \not\subset \overrightarrow{CD}$  (Teorema 118)  $\Rightarrow C \prec D$  e não ocorre  $D \prec C$ .

De maneira similar, se tivermos  $(\overrightarrow{OA} \subset \overrightarrow{DC}$  ou  $\overrightarrow{DC} \subset \overrightarrow{OA})$ , teremos então que  $D \prec C$  (definição de  $\prec$ ) e teremos que não ocorre  $C \prec D$  pelos teoremas 113 e 114.

Note que em ambos os casos  $C \neq D$  por hipótese.

C.Q.D.

**Teorema 122 (Transitividade)** *Fixe a reta  $r$  e os pontos  $O$  e  $D$  distintos incidentes a  $r$ . Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  pontos incidentes a  $r$  tais que  $A \prec B$  e  $B \prec C$ , então  $A \prec C$ .*

Demonstração:

$A \prec B \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{OD}$  (i) ou  $\overrightarrow{OD} \subset \overrightarrow{AB}$  (ii)] e  $B \prec C \Leftrightarrow [\overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{OD}$  (iii) ou  $\overrightarrow{OD} \subset \overrightarrow{BC}$  (iv)].

Para que  $A \prec B$  e  $B \prec C$ , teremos as seguintes possibilidades: [(i) e (iii)] ou [(i) e (iv)] ou [(ii) e (iii)] ou [(ii) e (iv)].

Se [(i) e (iii)] teremos que  $A \neq C$ , pois  $A = C \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = r \subset \overrightarrow{OD}$  o que não pode ocorrer. Mas se  $A \neq C$  então um dos três casos ocorre:

- a)  $A * B * C \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{OD}$
- b)  $A * C * B \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{OD}$
- c)  $C * A * B$

Este último caso não pode ocorrer pois se ocorresse teríamos que  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{AB}$  seriam semi-retas opostas e portanto  $\overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AB} = r \Rightarrow r \subset \overrightarrow{OD}$  o que é um absurdo.

Portanto para qualquer caso, teremos que  $\overrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{OD}$ , logo  $A \prec C$ .

[(i) e (iv)] não podem ocorrer, pois se tivermos [(i) e (iv)] então  $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{OD}$  e  $\overrightarrow{OD} \subset \overrightarrow{BC}$  o que implica em  $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{BC}$ , então se [(i) e (iv)] ocorressem, teríamos uma contradição pois:

Se  $A = C$  então  $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{BA}$  (absurdo pois se considerarmos  $X : A * B * X$  teremos que  $X \in \overrightarrow{AB}$  mas  $X \notin \overrightarrow{BA}$ ).

Em contrapartida, se  $A \neq C$ , como  $A \neq B$  e  $B \neq C$ , então uma das três seguintes possibilidades deveria ocorrer:

- (I)  $A * B * C$
- (II)  $A * C * B$
- (III)  $C * A * B$

(I) Se tomarmos  $X : A * X * B$ , então  $X \in \overrightarrow{AB}$ . Mas  $A * X * B$  e  $A * B * C \Rightarrow X * B * C \Rightarrow X \notin \overrightarrow{BC}$ , o que contraria o fato de  $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{BC}$ .

(II) Se tomarmos  $X : A * B * X$ , então  $X \in \overrightarrow{AB}$ . Mas  $A * B * X$  e  $A * C * B \Rightarrow X * B * C \Rightarrow X \notin \overrightarrow{BC}$ , o que contradiz o mesmo fato citado acima.

(III) Se tomarmos  $X : A * B * X$ , então  $X \in \overrightarrow{AB}$ . Mas  $A * B * X$  e  $C * A * B \Rightarrow C * B * X \Rightarrow X \notin \overrightarrow{BC}$  (contradição).

Conclui-se que (i) e (iv) não podem ocorrer simultaneamente.

Para [(ii) e (iii)] teremos:  $\overrightarrow{OD} \subset \overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AB}$  (\*\*).

Note que  $A \neq C$ , pois se  $A = C$  teremos  $\overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{CB}$  o que não pode ocorrer, pois se tomarmos  $X : B * C * X$  teremos que  $X \in \overrightarrow{BC}$  e  $X \notin \overrightarrow{CB}$ .

Então  $A$  deve ser diferente de  $C$ . Como  $A \neq B$  e  $B \neq C$ , teremos uma das três possibilidades:

(I)  $A * B * C \Rightarrow \overrightarrow{OD} \subset \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{OD} \subset \overrightarrow{AC} \Rightarrow A \prec C$

(II)  $A * C * B$  não pode ocorrer pois se tomarmos  $X : X * A * B$  então  $X \in \overrightarrow{BC}$  e  $X \notin \overrightarrow{AB}$ , o que contraria (\*\*).

(III)  $C * A * B$  também não pode ocorrer, pois se tomarmos  $X : C * X * A$  teremos novamente  $X \in \overrightarrow{BC}$  e  $X \notin \overrightarrow{AB}$ , o que contraria (\*\*)

Então a única situação possível é (I) e portanto  $A \prec C$ .

Por último considere o caso em que acontece [(ii) e (iv)]

Primeiramente note que  $A \neq C$ , pois se tivéssemos  $A = C$ , teríamos pela hipótese que  $\overrightarrow{OD} \subset \overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{OD} \subset \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{OD} \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$ , o que não pode ocorrer.

Sendo  $A \neq C$ , ( $A \neq B$  e  $B \neq C$  por hipótese) teremos 3 possibilidades:

(I)  $A * B * C \Rightarrow \overrightarrow{OD} \subset \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow A \prec C$ .

(II)  $B * A * C \Rightarrow \overrightarrow{OD} \subset \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow A \prec C$ .

(III)  $A * C * B \Rightarrow \overrightarrow{OD} \subset \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow A \prec C$ .

Conclui-se que  $A \prec C$  para qualquer uma das possibilidades.

C.Q.D.

Com os teoremas 121 e 122, podemos concluir que a relação “ $\prec$ ” definida anteriormente é uma relação de ordem total no conjunto dos pontos de uma reta pré-fixada, pois da maneira como esta relação foi definida, podemos concluir que ela irá satisfazer a transitividade e a tricotomia.

Mostraremos no teorema a seguir que a função  $\varphi$  (função ordenação) conserva a relação de ordem.

**Teorema 123** *Seja  $r$  uma reta,  $O$  e  $D$  pontos distintos incidentes a  $r$  onde  $OD$  é o segmento unitário através da função comprimento  $\mu$ . Sejam  $A$  e  $B$  incidentes a  $r$ . Então  $A \prec B \Rightarrow \varphi(A) < \varphi(B)$  onde  $\varphi$  é a função ordenação.*

Demonstração:

$A \prec B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{OD}$  (i) ou  $\overrightarrow{OD} \subset \overrightarrow{AB}$  (ii).

Para (i) vem:  $A \in \overrightarrow{OD}$  e  $B \in \overrightarrow{OD}$ .



Se  $A = O$  então  $\varphi(A) = 0$  pela definição de  $\varphi$ . Mas  $B$  deve ser distinto de  $A$  (caso contrário não existiria a semi-reta  $\overrightarrow{AB}$  e não teríamos então  $A \prec B$ ) e como  $A = O$ , temos que  $B \neq O$  e como  $B \in \overrightarrow{OD}$  então  $\varphi(B) = \mu(AB) > 0 = \varphi(A)$  (onde  $\mu$  é a função comprimento) e portanto,  $\varphi(A) < \varphi(B)$ .

Se  $A \neq O$  então  $B \neq O$  (caso contrário, se  $B$  fosse igual a  $O$ , poderíamos tomar um ponto  $X$  tal que  $X * O * A$  e então teríamos  $X * B * A$  e por isso,  $X \notin \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD}$  porque  $A \in \overrightarrow{OD}$  e  $X \in \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \not\subset \overrightarrow{OD}$ ), então como  $B \in \overrightarrow{OD}$ , teremos que um dos dois seguintes casos deve ocorrer:

(I)  $O * A * B \Rightarrow \varphi(B) = \mu(OB) = \mu(OA) + \mu(AB) = \varphi(A) + \mu(AB)$ , donde  $\varphi(A) < \varphi(B)$  pois  $\mu(AB) > 0$ .

(II)  $O * B * A$

A segunda possibilidade não pode ocorrer, pois se tomarmos um ponto  $X$  tal que  $X * O * A$  então  $X \notin \overrightarrow{OA}$ . Mas  $X * O * A$  e  $O * B * A$  (por hipótese) implicam em  $X * B * A$  e portanto  $X \in \overrightarrow{AB}$ . Concluiríamos que  $\overrightarrow{AB} \not\subset \overrightarrow{OD}$  o que contraria a hipótese). Temos então que os únicos casos possíveis levam em  $\varphi(A) < \varphi(B)$ .

Para o caso (ii) temos:  $\overrightarrow{OD} \subset \overrightarrow{AB}$ .

Se  $A = O$  teremos  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB}$  e este caso foi examinado acima, o qual decorre que  $\varphi(A) < \varphi(B)$ .

Pelas mesmas justificativas citadas acima, teremos que a única situação possível para termos  $A \neq O$  será:  $A * O * D$ , donde  $A \notin \overrightarrow{OD}$  e então  $\varphi(A) = -\mu(OA) < 0$ . Teremos para o ponto  $B$  duas opções:

Opção 1:  $B \in \overrightarrow{OD} \Rightarrow \varphi(B) = 0$  ou  $\varphi(B) = \mu(OB) > 0 \Rightarrow \varphi(A) < \varphi(B)$  pois  $\varphi(A) < 0$ ;

Opção 2:  $B \notin \overrightarrow{OD} \Rightarrow B \neq O$  e  $A \neq O \Rightarrow O * B * A$  ou  $O * A * B$  ou  $A * O * B$ .

Note que o segundo caso é impossível, pois  $O * A * B \Rightarrow O \notin \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OD} \not\subset \overrightarrow{AB}$  o que contraria a hipótese. O terceiro caso também é impossível de ocorrer pois  $A * O * B \Rightarrow A$  e  $B$  pertencem a semi-retas opostas com origem  $O$  e portanto  $A \in \overrightarrow{OD}$  ou  $B \in \overrightarrow{OD}$ , mas ambas as suposições contrariam as hipóteses. Temos então que a única possibilidade será:  $O * B * A$  e como  $A \notin \overrightarrow{OD}$  e  $B \notin \overrightarrow{OD}$  teremos que  $\varphi(A) = -\mu(OA) = -[\mu(OB) + \mu(BA)] = -[-\varphi(B) + \mu(BA)] = \varphi(B) - \mu(BA)$ , donde  $\varphi(A) < \varphi(B)$  pois  $\mu(BA) > 0$ .

C.Q.D.

Uma observação importante a se fazer é que para mostrarmos o teorema 123, bem como o teorema 115, usamos apenas os axiomas de geometria abstrata, incidência, ordem, congruência e continuidade, não apelando para nenhum axioma que cite algo a respeito de retas paralelas.

Concluimos então que é possível construir uma função bijetiva entre os pontos de uma reta fixada e os números reais, sendo também possível definirmos uma relação de ordem total entre esses pontos de modo que esta ordem será mantida através dessa função, utilizando apenas axiomas da geometria neutra.

De maneira semelhante e com o apoio das funções  $\varphi$  e  $\mu$  já definidas, mostraremos na próxima seção um teorema de enorme importância para a matemática moderna, uma vez que este serve de base para a Geometria Analítica.

Nosso teorema será, no entanto, mais forte do que o necessário para a utilização em Geometria Analítica, uma vez que o demonstraremos sem qualquer utilização de axiomas a respeito de retas paralelas, utilizando novamente apenas as ferramentas da geometria de continuidade.

### E.3 Bijeção entre os pontos de uma geometria de continuidade e o $\mathbb{R}^2$

Como mencionamos no final da seção anterior, usaremos aqui os axiomas da geometria de continuidade para construirmos uma função que "leva" cada um dos pontos do plano de uma geometria de continuidade num par ordenado de números reais, de forma que esta função seja bijetora e por consequência, tenhamos uma relação biunívica entre os pontos do plano e o espaço  $\mathbb{R}^2$ .

Sejam  $\mathcal{C} = (\Gamma, L, *, \equiv)$  uma geometria de continuidade,  $x = \overleftrightarrow{AB}$  uma reta e  $D$  um ponto não incidente a  $x$ .

Se  $P$  é um ponto qualquer pertencente a  $\Gamma$ , então chame de  $P_x$  o ponto de interseção entre a reta  $x$  e a única perpendicular a  $x$  conduzida através do ponto  $P$  (denotada por  $x_P^\perp$ ).

Fixe  $\mu(AB) = 1$  onde  $\mu$  é a função comprimento. Podemos definir uma função ordenação ( $\varphi_y$ ) nos pontos da reta  $x_P^\perp$  da seguinte forma: Para todo  $Q \in x_P^\perp$ ,  $\varphi_y(Q) = \mu(P_xQ)$  se  $Q, D|x$ ,  $\varphi_y(Q) = -\mu(P_xQ)$  se  $Q|D, x$  ou  $\varphi_y(Q) = 0$  se  $Q \in x$ . (fig.E.2)

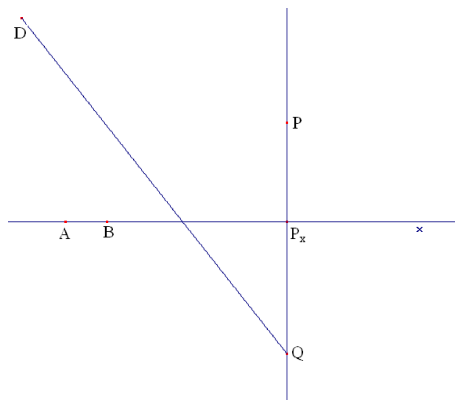


Figura E.2:  $P|D, x \Rightarrow \varphi_y(P) = -\mu(P_xP)$

Para a reta  $x$  tomemos como sentido positivo, a semi-reta  $\overrightarrow{AB}$ . Considere a seguinte função:  $\Phi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\Phi(P) \mapsto (\varphi_x(P_x), \varphi_y(P))$  onde  $\varphi_x$  é a função ordenação

que dá a bijeção entre os pontos da reta  $x$  e os reais com  $\varphi_x(A) = 0$  e  $\varphi_x(B) = 1$  ( $\varphi_y$  dá a bijeção entre os pontos de  $x_P^\perp$  e os números reais). Veremos que a função  $\Phi$  é bijetiva.

De fato, se  $\Phi(P) = \Phi(Q)$  então  $(\varphi_x(P_x), \varphi_y(P)) = (\varphi_x(Q_x), \varphi_y(Q)) \Rightarrow \varphi_x(P_x) = \varphi_x(Q_x)$  e  $\varphi_y(P) = \varphi_y(Q) \Rightarrow P_x = Q_x$  uma vez que  $\varphi_x$  é injetiva. Com esse resultado, teremos que as perpendiculares a reta  $x$  conduzidas através dos pontos  $P$  e  $Q$  coincidem, isto é  $x_P^\perp = x_Q^\perp$ . Mas então  $P = Q$  porque  $\varphi_y(P) = \varphi_y(Q)$  e a função ordenação  $\varphi_y$  é injetiva na reta  $x_P^\perp = x_Q^\perp$ . Conclui-se com essa argumentação que  $\Phi$  é injetiva.

Para mostrarmos que  $\Phi$  é sobrejetiva, tome  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Como a função ordenação  $\varphi_x$  é sobrejetiva, deverá existir um ponto  $S_x \in x$  tal que  $\varphi_x(S_x) = a$ . Teremos uma única perpendicular a reta  $x$  passando pelo ponto  $S_x$  (a reta  $x_{S_x}^\perp$ ). Mas na reta  $x_{S_x}^\perp$  deve existir uma função ordenação  $\varphi_y$  (construída da mesma maneira que foi feita acima para  $x_P^\perp$ ). Dessa forma, deverá existir um ponto  $S \in x_{S_x}^\perp$  tal que  $\varphi_y(S) = b$  uma vez que  $\varphi_y$  é sobrejetiva. A perpendicular em relação a reta  $x$  conduzida através do ponto  $S$  obviamente intersectará a reta  $x$  no ponto  $S_x$ , donde podemos concluir que  $\Phi(S) = (\varphi_x(S_x), \varphi_y(S)) = (a, b)$  pela definição da função  $\Phi$ . Conclui-se então que  $\Phi$  é sobrejetiva e portanto uma bijeção.

C.Q.D.

Observação:  $\varphi_x(P_x)$  é a *primeira coordenada do ponto  $P$*  e  $\varphi_y(P)$  é sua *segunda coordenada*. Através da bijeção  $\Phi$ , podemos concluir que essas coordenadas são dadas de maneira única, fixados  $D$ ,  $A$  e  $B$  como acima.

A função  $\Phi$  possui grande importância, pois através dela temos garantidos todos os fundamentos da Geometria Analítica, que serve como modelo de *geometria euclídeana*. É importante repararmos que esta bijeção independe do modelo de geometria que tomarmos. A única imposição que temos é que esta geometria deve ser uma geometria de continuidade.

# Apêndice F

## INVERSÃO

**Definição 69** *Seja  $x$  uma circunferência euclídeana com centro  $O$  e raio  $r$ . Considere um ponto  $A$  distinto de  $O$ . Diremos que  $A'$  é a imagem de  $A$  pela inversão na circunferência  $x$  se  $O, A$  e  $A'$  forem colineares, não tivermos  $A * O * A'$  e  $\|O - A\| \cdot \|O - A'\| = r^2$ .*

Uma decorrência imediata da definição é que se  $A'$  é a imagem de  $A$  por inversão, então também  $A$  será a imagem de  $A'$  por inversão.

Podemos, facilmente verificar que se  $O = (0, 0)$  então  $\|A\| \cdot \|A'\| = r^2$  e  $\frac{A}{\|A\|} = \frac{A'}{\|A'\|}$ .

Também é verdade que um ponto  $A$  no interior da circunferência ( $\|O - A\| < r$ ) é "mapeado" pela inversão num ponto  $A'$  no exterior dessa circunferência ( $\|O - A'\| > r$ ) e vice-versa, assim como pontos sobre a circunferência mantêm-se fixos ( $\|O - A\| = r \Rightarrow A = A'$ ).

Apenas com régua e compasso, é possível encontrarmos a imagem de um ponto qualquer do plano por inversão em uma circunferência (desde que esse ponto não seja o centro da circunferência).

Observe a figura abaixo:

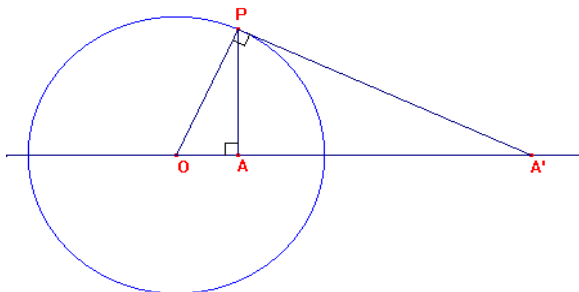


Figura F.1:  $\|O - A\| \cdot \|O - A'\| = r^2$

Os triângulos  $OPA$  e  $OA'P$  são semelhantes (ângulo  $\angle O$  é comum e  $\angle A$  e  $\angle P$  são retos). Decorre da semelhança que  $\frac{r}{r} = \frac{r}{x}$  ou,  $xc = r^2$ , equação que em coordenadas vetoriais é representada por  $\|O - A\| \cdot \|O - A'\| = r^2$ , além de termos  $O * A * A'$  que

pela definição de inversão numa circunferência de raio  $r$  e centro em  $O$  temos que  $A'$  é a imagem de  $A$  por inversão.

Se um ponto  $A$  pertence à circunferência, sabemos que  $A' = A$ . Caso o ponto  $A$  seja interior a essa circunferência basta seguirmos o seguinte processo para encontrarmos  $A'$ :

Trace a reta  $\overleftrightarrow{OA}$ ;

Erga a perpendicular a  $\overleftrightarrow{OA}$ , passando por  $A$  e chame de  $P$  um dos dois pontos de interseção desta reta com a circunferência;

Trace a mediatriz dos ponto  $O$  e  $P$  e chame de  $C$  o ponto de interseção entre esta mediatriz e a reta  $\overleftrightarrow{OA}$ ;

A circunferência com centro em  $C$  e raio igual a medida do segmento  $OC$ , passa por  $O$  e por  $P$ . O ponto  $A'$  será a interseção dessa circunferência com a reta  $\overleftrightarrow{OA}$ , uma vez que o ângulo  $\angle OPA$  deve ser reto, já que  $OA'$  é o diâmetro de uma circunferência. (fig.F.2)

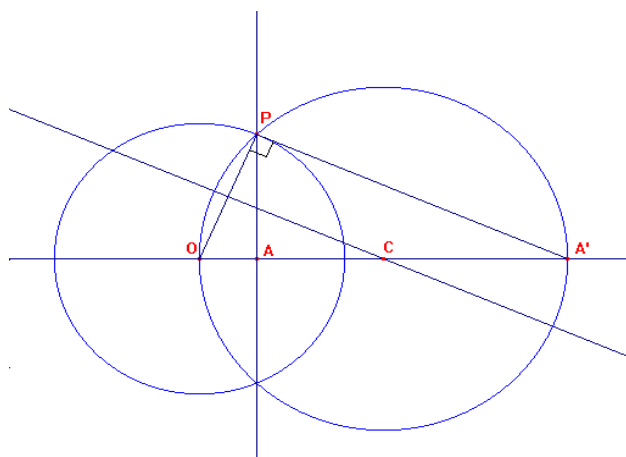


Figura F.2: Ponto  $A$  é interior à circunferência

Mas se  $A$  é um ponto exterior à circunferência, podemos encontrar  $A'$  utilizando o seguinte método:

Trace a reta  $\overleftrightarrow{AO}$ ;

Chame de  $M$  o ponto médio do segmento  $AO$ ;

Trace a circunferência de centro em  $M$  e raio igual a medida de  $MA$ ;

Chame de  $P$  a qualquer um dos pontos de interseção dessa circunferência com a circunferência dada;

Trace a perpendicular a reta  $\overleftrightarrow{AO}$  passando por  $P$ . A interseção dessas retas será o ponto  $A'$ , pois teremos que  $\angle OPA$  é reto. (fig.F.3)

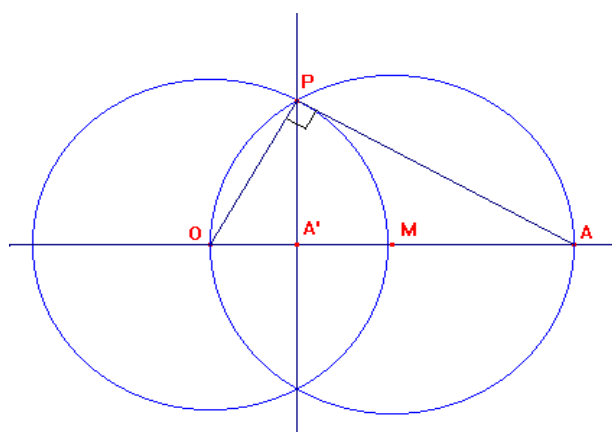


Figura F.3: Ponto  $A$  é exterior à circunferência

# Bibliografia

- [1] EFIMOV, Nikolai V. *Higher geometry*. Moscow, Mir, 1980.
- [2] GREENBERG, Marvin J. *Euclidean non-Euclidean geometries: development and history*. 2.ed., San Francisco, W. H. Freeman, 1980.
- [3] LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear*. 6.ed., Rio de Janeiro, IMPA, 2003.
- [4] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*. 11 ed., Rio de Janeiro, IMPA, 2004.
- [5] MESCHKOWSKI, Hebert. *Noneuclidean Geometry*. 3.ed., Berlin, 1972.
- [6] MILLMAN, Richard S.. PARKER, George D. *Geometry: a metric approach with models*. 2.ed., New York, Springer-Verlag, 1991.
- [7] MOISE, Edwin E. *Elementary geometry from an advanced standpoint*. 3.ed., Addison-Wesley, 1990.