UFSC – UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA – HABILITAÇÃO EM LICENCIATURA

Marcos Celima

UM MÉTODO PARA A CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS EM MATEMÁTICA

Florianópolis
2009

MARCOS CELIMA

UM MÉTODO PARA A CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS EM MATEMÁTICA

Trabalho de conclusão de curso junto ao curso de matemática licenciatura, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador: Marcelo Ferreira Lima de Carvalho

Florianópolis
2009

CURSO no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela portaria nº 45/CCM/09.

Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Marcelo Ferreira Lima de Carvalho
Orientador

Sonia Elena Palomino Bean

Félix Pedro Quispe Gómez

AGRADECIMENTOS

Pelas experiências vividas ao longo destes quatro anos e meio na graduação do curso de matemática tenho a honra de agradecer:

A minha família, pela paciência, compreensão e ajuda nas horas mais difíceis.

Aos amigos de curso que me apoiaram. Em especial os amigos Anderson Marcio da Silva e Renato da Silva Alves.

As meninas da secretaria.

E finalmente aos professores Adriano L. dos Santos Né, Antonio Vladimir Martins, Carmem S.C. Gimenez, Fabio Margotti Jr., Félix P. Q. Gomez, Marcelo F. L. de Carvalho, Milton Braitt, Nereu E. Burin, Sonia E. P. Bean, que foram peculiares na forma de ensinar e que de alguma maneira puderam contribuir para meu crescimento como aluno da Graduação em Matemática.

DEDICATÓRIA

Dedico meu esforço, compromisso e responsabilidade aos meus pais, ai miei nonni, mia moglie, minha avó e em especial ao meu filho Kó.

E La Radio?

Ah La radio! Bei tempi quelli in cui Le notizie non Le vedevi, soltanto ascoltavi. Dovevi impiegare tutta l’imagginazione e le cose ti apparevano più reali.

Di queste, mio nonno nè ha fatto un’inifinità che ha perso pure Il conto.

Generoso com’è, Le ha regalato anche a chi non teneva condizione per comprarli. E cosi, ha dato tutto Il suo sudore ed amore per questo mestiere, apparso dal nulla, realmente fu un dono.

Ma come scambio, Il mestiere Le ha “regalato” tutto Il suo patrimonio, incluse sua malatia.

L’ho ammiro per tutto quel che ha fatto.

(La Radio, Macchiagodena)

Resumo

Neste trabalho expõe-se um método para o ensino de conceitos matemáticos, presentes nos níveis fundamental e médio. O método se baseia nas estratégias de ensino desenvolvidas por Hilda Taba e enfatiza o uso de questões elucidativas e situações práticas que permitem ao aluno chegar à construção do conceito. A aplicação deste método visa modificar uma tendência do ensino da matemática onde os conceitos são expostos de uma forma já pronta e sem nenhuma participação do aluno.

Palavras chave: conceitos matemáticos; subconceitos; construtivista e questões elucidativas.

Abstract

In this work we present a method for teaching mathematical concepts of the primary and secondary levels. The method is based on the teaching strategies developed by Hilda Taba and emphasizes the use of eliciting questions as a way to engage the students in the construction of the concept. The method intends to offer a different way of teaching mathematics that oppposes the common trend of presenting pre-established concepts without the participation of the students

Keywords: mathematical concepts, subconcepts, constructive and eliciting questions.

Resumen

En este trabajo se presenta un método para la enseñanza de conceptos matemáticos presentes en los niveles primário y secundário. El método se basa en las estrategias de enseñanza desarrollado por Hilda Taba y enfatiza el uso de cuestiones deductivas y situaciones prácticas que permiten a los estudiantes para llegar a la construcción del concepto. La aplicación de este método tiene como objetivo cambiar una tendencia en la enseñanza de las matemáticas en donde los conceptos se muestran en uma forma ya estabelecida y sin ninguna participación de los estudiantes.

Palabras clave: los conceptos matemáticos, subconceptos, constructivismo y cuestiones deductivas.

Riassunto

In questo lavoro presentiamo un metodo per insegnare i concetti matematici presenti nel livello primario e secondario. Il metodo è basato sulle strategie di insegnamento sviluppate da Hilda Taba ed enfatizza l'uso delle questioni deduttive e delle situazioni pratiche che consentono agli studenti di raggiungere la costruzione del concetto. L'applicazione di questo metodo cerca di modificare la tendenza in materia di insegnamento della matematica con cui i concetti vengono visualizzati in una forma già costruita e senza nessun coinvolgimento degli studenti.

Parole chiave: concetti matematici, sottoconcetti, costruzione, questioni deduttive.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O ensino da matemática, principalmente nos níveis fundamental e médio, repete em grande parte o conteúdo de livros didáticos, e o faz com pouca ou quase nenhuma inovação no que diz respeito à forma de ensinar. É comum então que as aulas sejam uma mera reprodução do que já está exposto nos livros didáticos apresentando uma sequência de tópicos já prontos o que torna o processo de aprendizagem uma experiência estática e de mera absorção de conteúdos.

Com o propósito de corrigir esta tendência expomos nesta monografia um método de ensino que tenta colocar o aprendizado como uma experiência dinâmica onde os alunos são co-participantes do processo de aprendizagem. O método a ser apresentado se baseia nos estudos de Hilda Taba [2], curricularista no distrito de Contra-Costa (EUA), que desenvolveu uma série de estratégias de ensino com a finalidade de desenvolver processos mentais indutivos. Uma vez que o método de Hilda Taba foi originalmente desenvolvido para o ensino de estudos sociais, sua aplicação ao ensino da matemática não é imediato e requer, portanto, algumas modificações. Este é o objetivo deste trabalho.

Neste trabalho, enfatizamos que o método a ser apresentado se baseia em certos princípios: *objetividade, não-ambiguidade e generalidade*, que visam garantir uma exposição onde os conceitos são apresentados de forma clara e objetiva usando ou não uma situação concreta, e onde os alunos o compreendem sem ambiguidades, sendo no fim capazes de generalizá-lo a situações distintas das que foram inicialmente apresentadas. A forma com que o método é apresentado é tipicamente construtivista no sentido de usar o que Hilda Taba chama de *questões elucidativas* que visam engajar os alunos na construção do conceito. Assim, ao ensinar um certo conceito o professor apresenta uma situação inicial aos alunos junto com algumas questões elucidativas. A partir das respostas que os alunos dão as questões elucidativas o professor prossegue na construção do conceito colocando outras situações e propondo outras questões elucidativas. Neste processo, o professor auxilia os alunos na fixação do conceito, esclarecendo pontos importantes e eliminando as dúvidas conceituais que os alunos venham a ter. Ao apresentar as situações o professor deve atentar para que a mesma seja uma situação onde o conceito que se deseja ensinar seja o ponto central e esteja exposto de forma clara e objetiva (princípio da objetividade). Como resultado, os alunos devem ser levados a fixar o conteúdo sem ambiguidades referentes a aspectos subjetivos, ou seja, todos devem ter a mesma compreensão do conceito de modo que partindo dele as conclusões que os alunos obtêm devem ser as mesmas . Este aspecto, embora não seja necessário no estudo de outras disciplinas, se mostra importante no estudo das disciplinas das ciências exatas (física, química e matemática) onde o caráter subjetivo não desempenha nenhuma função no conceito em si (princípio da não-ambiguidade). Uma vez que o professor apresenta o conceito utilizando situações específicas, faz-se necessário, no fim, que o conceito seja generalizado de modo a ser apresentado de forma abstrata e assim possa ser utilizado em situações mais gerais (princípio da generalidade).

Na implementação deste método o aluno deve ser motivado e levado pelo professor a participar ativamente do processo de aprendizagem respondendo as questões elucidativas propostas. É importante então que o professor faça um planejamento cuidadoso do conteúdo que ele deseja apresentar desenvolvendo previamente várias situações e questões elucidativas que ele selecionará de forma apropriada no momento em que estiver na sala de aula de modo a otimizar o processo de aprendizado. Assim, neste método, o professor não deve esperar apresentar um plano de aula fixo mas sim algo dinâmico, sendo a sequência de situações e questões elucidativas que ele apresenta determinadas pelas respostas que os alunos dão as questões elucidativas.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No capítulo 2 descrevemos o método de construção conceitual proposto por Hilda Taba e os estágios que a autora utiliza. Fazemos então uma análise sobre a aplicabilidade destes estágios no ensino da matemática.

No capítulo 3 descrevemos o nosso método a partir das modificações que devem ser feitas para se aplicar o método de Hilda Taba ao ensino da matemática.

No capítulo 4 damos um exemplo da utilização do nosso método na construção da aritmética dos números inteiros, iniciando com a construção do conceito de números negativos e assumindo de antemão que os alunos já estavam familiarizados com o conceito de números positivos.

No capítulo 5 apresentamos a conclusão do trabalho. E por último a bibliografia utilizada para elaboração do mesmo.

2. O MÉTODO DE CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS DE HILDA TABA: "UM MODELO DESIGNADO PARA A FORMAÇÃO DE PROCESSOS MENTAIS E CONSTRUÇÃO DE TEORIAS"

Fazemos aqui uma breve exposição e análise do método de Hilda Taba conforme descrito em [2].

2.1 O Processo de pensamento

Muitos educadores acreditam que é possível ensinar a pensar, o que se verifica pelos vários métodos criados com esta finalidade. Analisaremos aqui o método desenvolvido por Hilda Taba que consiste essencialmente em uma série de estratégias de como estabelecer um processo mental indutivo [3]. O modelo de Taba tem por objetivo ajudar os alunos a categorizar e a usar categorias, agrupando objetos que possuam atributos comuns.

A autora pode ser considerada a maior responsável pela popularização do termo “estratégia de ensino”, desenvolvido pela mesma quando exercia o cargo de curricularista no Distrito de Contra Costa (EUA). Seu objetivo era de aumentar a capacidade dos alunos em usar informações, especificamente em situações relativas à disciplina de Estudos Sociais.

Taba analisou então o processo de pensamento a partir de um ponto de vista lógico e psicológico, chegando à conclusão de que o conteúdo e o resultado de um processo de pensamento devem ser abordados por critérios lógicos. Ela identificou três postulados no processo de pensamento:

1. O primeiro postulado assume que é possível ensinar a pensar.

2. O segundo postulado considera o pensamento como constituído de um processamento ativo de informações e coleta de dados, realizado pelo indivíduo, informações e dados referentes a objetos e processos que o indivíduo tem acesso. Esse acesso tanto pode ser oriundo de uma experiência real vivida pelo indivíduo como também pode ser obtido a partir de uma experiência não objetiva, por exemplo, a leitura de um livro, a imaginação ao se visualizar mentalmente uma imagem nunca vista antes, etc.

Na prática, em sala de aula, o conteúdo que se deseja ensinar será compreendido pelo aluno quando este efetuar certas operações cognitivas, por exemplo:

i) Observar dados;
ii) Organizar dados em sistemas conceituais;
iii) Identificar relações entre os mesmos e generalizar tais relações;
iv) Fazer inferências e hipóteses a fim de prever e explicar fenômenos.

Essas operações cognitivas não podem ser ensinadas diretamente, no sentido de ser fornecido pelo professor, tampouco podem ser adquiridas pela absorção do pensamento de outra pessoa. No entanto, o professor pode auxiliar o processo de interiorização e conceitualização, estimulando os alunos a efetuarem operações mentais complexas ao mesmo tempo em que gradativamente reduz sua intervenção.

3. O terceiro e último postulado assume que o processo de pensamento segue uma sequência ordenada. Assim, no intuito de consolidar certas habilidades o indivíduo precisa adquirir formas de raciocínio preliminares e a sequência com a qual o pensamento evolui não pode ser alterada. Assim, as estratégias de ensino a serem utilizadas devem respeitar a sequência pela qual o pensamento evolui. Em outras palavras, Taba conclui que cada forma de raciocínio necessita de uma estratégia de ensino específica, além disso, essas estratégias precisam ser aplicadas sequencialmente, pois as mesmas surgem sequencialmente.

Aplicabilidade no ensino da matemática

Fazemos aqui uma análise destes postulados tendo em vista sua utilização na matemática.

Observação 1:

Em matemática entendemos o ato de pensar como qualquer atividade mental criativa que leve a obtenção de novos resultados que se expressam na forma de novas definições, conceitos e no estabelecimento de teoremas . Assim, o que o postulado 1 se refere como possibilidade de ensinar um indivíduo a pensar deve ser entendido dentro desta perspectiva. Sendo o pensamento matemático uma atividade criativa, ele foge da aplicação pura e simples da utilização de algoritmos bem como da ênfase excessiva dada à contextualização dos conceitos. O papel do professor é então unicamente o de dar direções aos alunos para que os mesmos possam executar esse pensamento matemático. Já o aluno deverá, gradativamente, desenvolver métodos e estratégias específicas de como lidar com problemas matemáticos.

Observação 2:

No contexto da matemática vemos que o processamento de informações e dados a que o postulado 2 se refere deve ser oriundo de uma experiência objetiva que se apresenta da mesma forma para todos, i.e, não pode haver espaço para subjetividades. Assim, duas pessoas ao serem apresentadas com um triângulo concluirão que o mesmo é uma figura geométrica com três lados.

Observação 3:

Em relação ao item (iv) do postulado 2: “Fazer inferências e hipóteses a fim de prever e explicar fenômenos”, entendemos pelo estabelecimento de teoremas e definições.

2.2 O processo de aprendizagem

Taba identifica no processo de aprendizagem um ***conjunto de tarefas cognitivas*** a serem seguidas.

Com o objetivo de induzir os alunos a executá-las, ela utiliza as chamadas *estratégias de ensino* e identifica três estágios a serem percorridos sequencialmente que são: *a formação do conceito, a interpretação das informações e dados, e a aplicação dos princípios.*

Em cada um desses estágios, espera-se que o estudante expanda sua capacidade de lidar com a informação, inicialmente desenvolvendo novos conceitos e posteriormente utilizando-os em novas situações.

A execução de cada um desses estágios se dá mediante uma *estratégia de ensino*, entendidas aqui como sendo ações estruturadas em atividades explícitas e que são designadas a levar os alunos à execução de atividades mentais implícitas motivadas por certas questões elucidativas.

Nota: Devemos notar que na exposição do método de Hilda Taba descrito em [2], os autores Joyce e Weil identificam o termo estratégia de ensino como sendo as ações referentes apenas às questões elucidativas e suas respectivas respostas. Em nosso trabalho entendemos estratégia de ensino em um contexto mais amplo que envolve ações estruturadas em atividades explícitas, atividades mentais implícitas e nas questões elucidativas.

(I) Primeiro estágio: *formação do conceito*.

As tarefas cognitivas envolvem:

i) Identificar e enumerar os dados que são significativos para a resolução do problema;
ii) Agrupar estes dados conforme suas características comuns e segundo aspectos que os tornem similares;
iii) Estabelecer categorias e nomear os grupos assim formados.

No intuito de forçar os estudantes a participarem de cada uma das atividades que constituem as tarefas da formação de conceito Taba elaborou uma *estratégia de ensino* na forma de questões, as quais ela denominou "*questões elucidativas*". Por exemplo, a questão: *"O que você vê?"* Induziria o estudante a fazer uma lista. A questão: *"O que esses objetos têm em comum?"* Levaria os estudantes a agrupar aquelas coisas que foram listadas. A questão: *"Como nós chamaríamos esse grupo?"* Levaria o estudante a estabelecer nomes ou categorias.

Uma ilustração da estratégia de ensino usada no estágio da formação de conceito pode ser vista a partir do seguinte exemplo. Suponha que desejamos desenvolver a seguinte idéia: "Um supermercado precisa de um lugar, equipamentos, mercadorias e serviços". A fim de introduzir uma discussão, é apresentada aos alunos a seguinte situação hipotética: *"Sr. Jonas deseja abrir um supermercado, do que ele precisará?"* Essa questão elucidativa pode ser reformulada da seguinte forma: *"O que você vê quando vai ao supermercado?"* Ou também: *"O que você vê nesta foto de um supermercado?"*

Dependendo da questão elucidativa espera-se que os estudantes identifiquem: produtos alimentícios, roupas, operadores de caixas, equipamentos, edifício, etc. Essas respostas podem ser anotadas, bem como outras listas de itens que os alunos venham a colocar até que tenhamos formado várias categorias. Após completar esta listagem, pede-se aos estudantes para agruparem os itens tendo por base a similaridade dos mesmos: *"O que os objetos têm em comum?"* Aqui, se a enumeração é suficientemente variada os estudantes identificarão: “O que o supermercado vende” e “coisas feitas para o proprietário do supermercado”. Esses conceitos podem ser enumerados como “mercadorias” e “serviços”.

O propósito do estágio da formação de conceito é induzir os alunos a expandir o sistema conceitual com o qual eles processam informação. Em outras palavras, ao trabalharem com as informações eles devem ser capazes de formar conceitos que poderão posteriormente ser utilizados em novas situações.

A tabela a seguir ilustra a relação entre as atividades explícitas, as operações mentais implícitas que os estudantes desenvolvem, e as questões elucidativas que os professores usam com o propósito de conduzir os estudantes nas atividades de formação de conceito.

Atividades explícitas	**Atividades mentais implícitas**	**Questões elucidativas**
1. Enumerar.	Diferenciar.	O que você vê? O que você escuta? O que você nota?
2. Agrupamento.	Identificar propriedades comuns, abstração.	O que há de comum?
3. Nomear, categorizar.	Determinam ordem hierárquica entre dados.	Como você chamaria esses grupos? O que pertence a cada grupo?

Fonte: Hilda Taba, Teacher’s Handbook for Elementary Social Studies, 1967, Addison – Wesley, Reading, Mass.

Aplicabilidade no ensino da matemática

Observação 1:

Em matemática, a formação de conceitos se dá pela apresentação não-subjetiva e logicamente consistente de objetos e atributos desses objetos. Tal apresentação utiliza-se de conceitos previamente estabelecidos. Assim, por exemplo, ao introduzirmos o conceito de função faz-se uso do conceito de conjunto necessário para especificarmos o que vem a ser domínio e contradomínio da função.

Vemos então que a formação de conceitos em matemática implica em organizarmos uma classe de conceitos matemáticos previamente estabelecidos. Esta organização deverá ser feita de forma gradativa e construtiva, i.e, o professor precisa providenciar um cronograma de ensino e desenvolvê-lo sequencialmente, ou seja, um conceito não poderá ser ensinado sem que os conceitos anteriores estejam devidamente compreendidos.

Por exemplo, ao ensinar radiciação, o professor precisa certificar se os alunos são capazes de lidar com potências. Com efeito, como os alunos simplificariam a expressão $\sqrt{6^{12}}$ caso não soubessem operar com divisão e as devidas propriedades de potências? Logo, neste caso, é necessário um conhecimento prévio sobre potenciação, para que seja possível realizar a simplificação proposta.

É importante observar que há propostas de ensino de matemática onde os conceitos não são apresentados necessariamente de forma sequencial no que é chamado em inglês de "spiral math method" [1].

Observação 2:

No que diz respeito à matemática, o item (i) da formação de conceito compreende o estágio inicial que se faz na resolução de exercícios ou prova de teoremas. Ao se deparar com um problema matemático, os alunos devem primeiramente organizar os dados significantes que constam no problema. Após listarem tais dados, os alunos deverão analisar as estratégias que poderão ser usadas para resolver o exercício ou provar o teorema.

Observação 3:

No que diz respeito aos itens (ii) e (iii), estes não tem aplicabilidade na matemática. Notamos que, no lugar de agrupar informações será necessário que os alunos apliquem os teoremas, definições e fórmulas que poderão auxiliá-los na solução de problemas e/ou corolários, além de novos teoremas.

II) Segundo estágio: *interpretação dos dados*

As tarefas cognitivas envolvem

i) Identificar aspectos comuns entre os dados;

ii) Explicar os aspectos comuns;

iii) Inferência e generalização.

Este estágio da interpretação de dados também utiliza questões elucidativas e envolve uma atividade de *discussão em grupo.*

Em uma primeira fase as questões elucidativas propostas pelo professor devem levar os alunos a identificar certos aspectos dos dados já coletados. Por exemplo, os alunos podem ser questionados a identificar aspectos do sistema econômico da África do Sul, Grã-Bretanha e Alemanha. Após uma leitura sobre as características econômicas de cada um dos países, o professor colocaria a seguinte questão elucidativa: *"O que você conclui sobre o sistema econômico dos três países?"*

Numa segunda fase, os alunos discutem as informações obtidas relacionando os aspectos comuns entre os sistemas de cada umas das nações. Aqui, o professor propõe questões que levem os alunos a estabelecer relações de causa e efeito. Por exemplo, *"você crê que o sistema econômico dos três países é muito parecido?" ,"Por que?", "Você conseguiria descrever um produto e mostrar os aspectos nos quais cada uma das nações o administraria de maneira semelhante ou diferenciada?", "São os sistemas econômicos do três países baseados no valor do mesmo metal precioso?"* Caso seja positiva a resposta, propõe-se ainda *"Como isto os torna semelhantes e diferentes uns dos outros?"*

Uma terceira fase envolve a atividade de inferir e generalizar. O professor inicia essa fase com questões que levam os estudantes a estender sua análise a situações mais amplas das que foram inicialmente propostas. Por exemplo, o professor poderia perguntar, *“que efeito tem o sistema econômico na posição de um país quanto a sua riqueza e bem estar?”* Ou *“se a moeda dos três países fosse baseada no valor do ouro, isso mudaria a relação econômica das nações em relação a sua riqueza?”* As discussões dessas questões levam os alunos a fazer conjecturas e inferências usando o conhecimento já consolidado nos dois estágios anteriores. Vemos então que esta terceira fase consiste em uma etapa de reflexão sobre a situação colocada, cujo resultado comporta, possivelmente, várias conclusões.

Tais atividades estão resumidas na tabela abaixo:

Atividades explícitas	**Atividades mentais implícitas**	**Questões elucidativas**
1. Identificar aspectos.	Diferenciá-los.	O que você observa? O que você vê? O que você encontra?
2. Explicando os aspectos.	Relacionando aspectos uns com os outros. Determinando relações de causa e efeito.	Por que isso e aquilo acontecem?
3. Inferindo.	Ir além do que é dado. Encontrar aplicações e fazer extrapolações.	O que isto significa? Que figura isto cria na sua mente? O que você concluiria?

Fonte: Hilda Taba, Teacher’s Handbook for Elementary Social Studies, 1967, Addison – Wesley, Reading, Mass.

Aplicabilidade no ensino da matemática

Observação 1:

A interpretação de dados em matemática usualmente ocorre na solução de algum problema ou prova de um teorema e pode ser feita individualmente ou a partir de uma discussão em grupo. O professor ao expor um determinado problema aos alunos poderá fazê-lo na forma de uma discussão em grupo que tem o intuito de aguçar a percepção dos alunos no que diz respeito às informações contidas no próprio problema.

Entendemos por *identificar aspectos*, referente ao item (i) da interpretação de dados, a coleta das informações relevantes a solução do problema. Em alguns casos, os alunos precisarão considerar também determinadas definições ou teoremas já estabelecidos. Tal procedimento, sendo a primeira etapa da solução do problema, não é necessariamente motivado por questões elucidativas que poderão ser aplicadas num segundo estágio.

Observação 2:

O item (ii), *explicar aspectos*, fica evidente na demonstração de um teorema, quando se faz necessário identificar e compreender a hipótese e a tese do mesmo, i.e, de onde iremos partir *(hipótese)* e onde queremos chegar *(tese)* tomando essa hipótese. Por exemplo, consideremos o teorema do valor extremo de Weierstrass:

"Se $Z = f(x,y)$ é contínua em cada ponto de um conjunto fechado e limitado D de R^2, então f atinge um valor máximo absoluto $f(x_1,y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2,y_2)$, para algum ponto (x_1,y_1) e (x_2,y_2) de D".

Observamos que sem uma compreensão do conceito de função contínua não teremos como provar o teorema. Da mesma forma, apenas a continuidade não garante o resultado, pois o mesmo requer que a função esteja definida sobre uma região D que é fechada e limitada. A consideração destes dois aspectos constitui o ponto de partida para a prova do teorema. As direções a serem seguidas estão subordinadas a estes dois aspectos e são determinadas pelo resultado que desejamos obter, i.e, que a função assuma um valor máximo e mínimo absoluto em D.

Observação 3:

O item (iii), *inferência e generalização* descrito em [II], como uma etapa de reflexão sobre o problema é distinto daquele usado em matemática onde o mesmo corresponde a uma situação onde já se tem feita a solução do problema ou a prova do teorema e se analisa então sua aplicabilidade a outras situações, ou se as hipóteses podem ser relaxadas de modo a garantir um resultado que seja válido em situações mais gerais. Por exemplo, no caso anterior foi considerado o teorema do valor extremo para funções $Z = f(x, y)$ definido em um conjunto fechado e limitado de R^2. Uma generalização desse resultado é feita nos cursos de análise onde o resultado é estendido a um espaço métrico arbitrário ou mesmo a um espaço topológico com D sendo substituído por um conjunto compacto. Ele assume então um caráter distinto do usado na terceira fase *inferência e generalização* e será discutido mais adiante.

(III) Terceiro estágio: *aplicação do princípio*

Este estágio é desenvolvido com o intuito de explicar novos fenômenos ou prever consequências a partir de condições previamente estabelecidas.

As tarefas cognitivas envolvem:

i) Prever, explicar e fazer hipóteses;

ii) Defender as hipóteses;

iii) Verificar as predições e identificar as condições que garantem tais previsões.

Suponha que estejamos analisando as economias da África do Sul, Grã-Bretanha e Alemanha e mais uma vez precisemos lidar com a questão da moeda das três nações. Prosseguindo nosso estudo anterior poderíamos propor aos alunos que investigassem: *“O que mudaria na discussão anterior se o valor da moeda fosse baseado no ferro?”* Ou ainda: *“como estabilizar a situação monetária internacional tomando como exemplo a moeda corrente dos três países?”.*

Numa primeira fase, para responder tais perguntas, os alunos devem fazer novas hipóteses ajustando o conhecimento já adquirido às novas situações colocadas pelas questões.

Numa segunda fase, os alunos devem defender e expandir suas hipóteses. Por exemplo, se alguém acredita que deve ser estabelecida uma moeda única para todos os países e que a mesma deve ser mantida por um longo período, é necessário explicar porque ele julga que esse sistema funcionaria e como se tratariam fatores como as prosperidades relativas entre os países bem como as diferentes taxas de produção.

Numa terceira fase, os alunos devem estabelecer as condições nas quais as hipóteses feitas se mantêm e defendê-las das críticas de outros que eventualmente não as vêem passando nos testes de adequação a uma situação econômica mais complexa.

A tabela a seguir resume as atividades explícitas, as atividades mentais implícitas e as questões elucidativas:

Atividades explícitas	**Atividades mentais implícitas**	**Questões elucidativas**
1. Prever conseqüências. Explicar fenômenos. Fazer hipóteses.	Análise da natureza do problema ou situação. Adquirir conhecimento.	O que aconteceria se...?
2. Explicar e defender as previsões e hipóteses.	Determinar as relações causais que levam a previsão ou hipótese.	Por que você acredita que isso aconteceria?
3. Verificando as previsões.	Usando princípios lógicos para determinar condições necessárias e suficientes.	O que seria necessário para que isso ou aquilo fosse verdadeiro, no caso geral?

Fonte: Hilda Taba, Teacher's Handbook for Elementary Social Studies, 1967, Addison – Wesley, Reading, Mass.

Aplicabilidade no ensino da matemática

Observação 1:

Em matemática, entendemos por *prever, explicar e fazer hipóteses,* referente ao item (i) da aplicação do princípio, como o caminho que o aluno escolhe para solucionar um determinado problema.

Na resolução de um problema o aluno aplica uma sequência de argumentos que se estrutura na forma de conceitos, resultados já conhecidos e cálculos de modo a chegar a um resultado final. No decorrer deste processo, o aluno pode perceber que ao tomar determinado rumo ele não chegará à resposta apropriada, quer porque as tarefas envolvidas começam a ficar mais complicadas, quer porque a resposta final não é consistente com a qual ele esperava obter. Por exemplo, ao tratar com o movimento unidimensional de um bloco preso a uma mola sabemos que o mesmo ao ser deslocado de sua posição de equilíbrio passará a descrever um movimento oscilatório ao redor de sua posição inicial. Assim, o aluno *prevê* que a posição do bloco deverá ser uma função periódica do tempo. Esta observação permite ao aluno verificar a consistência de sua resposta.

Em alguns casos, a resolução do problema se resume na obtenção de vários problemas menores que em conjunto possibilitam obter o que se deseja. Um exemplo disso são os lemas associados a um determinado teorema.

Em outras situações faz-se necessário tratar com outras hipóteses. Por exemplo, ao se demonstrar um teorema pode ser mais fácil seguir a demonstração por *absurdo ou contradição* onde o aluno toma por hipótese a negação da tese e assim tenta chegar a uma contradição que, logicamente, indicará a veracidade da tese. Por exemplo, quando desejamos provar que $\sqrt{2}$ *é irracional* supomos por absurdo que $\sqrt{2}$ *é um número racional*. Desse modo, escrevemos $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ *; com* $(b \neq 0)$, *onde mdc* $(a,b) = 1 \rightarrow$ *a e b são primos entre si.* Ao elevarmos ambos os lados da igualdade ao quadrado temos que $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ $\Leftrightarrow$ $2.b^2 = a^2$ **(1)**. Note que $2.b^2$ é um número par, então a necessariamente tem que ser par.

Assim, podemos dizer que $a = 2k$; $k \in Z$. Substituindo em **(1)** teremos: $(2k)^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 2k^2 = b \Rightarrow$ que b também é um número par, o que é um absurdo pois, por hipótese, *mdc (a,b) = 1*. Portanto, podemos concluir que $\sqrt{2}$ *é irracional*.

Observação 2:

Quanto ao item (ii), *defender as hipóteses*, Hilda Taba analisa situações flexíveis que comportam a colocação de hipóteses e sua consequente plausibilidade pela *verificação* dos resultados decorrentes. Em matemática, há menos flexibilidade na colocação das hipóteses que, logicamente, não devem ser premissas falsas. Assim, em matemática *defender as hipóteses* se refere à **aplicação apropriada de resultados já conhecidos**. Por exemplo, se desejamos mostrar que uma função $f\colon R \to R$ não é diferenciável em um ponto de seu domínio, é suficiente mostrar que a mesma não é contínua no referido ponto. No entanto, se a função for contínua ela pode ser diferenciável ou não, sendo necessário usar a definição de diferenciabilidade para se chegar à resposta. Assim, um erro que poderia surgir seria a aplicação equivocada de que sendo a função contínua em um ponto a mesma deveria ser diferenciável no referido ponto.

Observação 3:

Quanto ao item (iii), *Verificar as predições e identificar as condições que garantem tais previsões*, o sentido que Hilda Taba usa também é mais flexível do que em matemática e, como mencionamos anteriormente, se refere à verificação das hipóteses feitas pela plausibilidade dos resultados obtidos. Em matemática, usualmente, isto não ocorre. Uma vez feitas às hipóteses os resultados decorrentes não são falseados.

No entanto, há situações envolvendo problemas de modelagem onde se faz necessário a adoção de hipóteses e a consequente verificação das predições. Uma situação desta pode ser vista na análise de experimentos em Física. Tomemos, por exemplo, o caso da lei de Hooke onde se tem que a força exercida por uma mola em um corpo é diretamente proporcional a distensão da mola. Esta lei é válida dentro de um certo limite de distensão da mola. Assim, para uma certa mola poderíamos analisar para que valores da distensão a lei de Hooke permanece válida. Desse modo, num primeiro momento seriam feitas medições da força exercida no corpo para pequenas distensões da mola de modo a verificarmos a lei de Hooke. A partir de uma certa distensão procuramos então observar violações da lei de Hooke, isto é, valores de forças que não seriam diretamente proporcional a distensão da mola. Continuando a medir valores da força e a respectiva distensão poderíamos então investigar como a lei de Hooke é modificada. Pode-se pensar em variações devido à presença adicional de um termo quadrático, ou cúbico que constituiria a nossa hipótese, isto é:

$$f = k(x - x_0) + \alpha k(x - x_0)^2 + \beta k(x - x_0)^3 \qquad \textbf{(*)}$$

Onde,

x_0 = posição de equilíbrio;

x = posição do corpo.

De posse dos dados obtidos seria então testada a validade da lei **(*)**.

3. NOSSO MÉTODO

Uma diferença do nosso método em relação ao de Taba refere-se ao uso das questões elucidativas. Enquanto Taba trabalha com conceitos mais amplos que permitem ao aluno explorar diversos aspectos dos mesmos, na matemática nos deparamos com outra situação onde devemos chegar em conceitos específicos que devem ser compreendidos da mesma forma por todos os alunos. Tratamos assim com conceitos mais restritos e portanto mais difíceis de serem compreendidos. Uma forma de facilitar a compreensão de um conceito matemático é então dividi-lo em *subconceitos* com a finalidade de progressivamente levar o aluno a compreensão do conceito inicial. Na abordagem de cada subconceito também usaremos as questões elucidativas.

Nosso método constitui-se dos seguintes estágios:

(i) Análise do conceito

Esta etapa será desenvolvida pelo professor fora do ambiente escolar e consiste no que será ensinado e a consequente elaboração do conteúdo das aulas.

O professor deverá analisar o conceito a ser ensinado identificando os *aspectos* relevantes do mesmo. Nesta etapa não haverá a preocupação de se planejar a aula, o professor apenas se limita a pensar na forma apropriada de apresentar o conceito observando os princípios de *objetividade, não-ambiguidade e generalidade*. A objetividade consiste em se apresentar o conceito de modo que os alunos o percebam da mesma forma. Neste sentido é possível apresentar o conteúdo dentro de um certo contexto tendo o cuidado que a situação utilizada não produza imagens e percepções diversas nos alunos. A não-ambiguidade consiste em apresentar o conceito de forma precisa mesmo que isso introduza um grau de complexidade adicional. Por exemplo, ao introduzirmos números racionais é necessário que fique bem claro que $\frac{a}{b}$ e $\frac{c.a}{c.b}$ representam o mesmo número embora possam ser vistos de maneira distinta. Usualmente, isto é feito reduzindo $\frac{c.a}{c.b}$ a $\frac{a}{b}$ usando a lei do corte. No entanto, nessa argumentação não fica claro para o aluno onde $\frac{a}{b}$ e $\frac{c.a}{c.b}$ são distintos. Temos então uma ambiguidade, sendo conveniente utilizarmos a noção de que o número racional $\frac{a}{b}$ representa na verdade um conjunto de números denotado por $\left[\frac{a}{b}\right]$ e definido como sendo o conjunto de números do tipo $\frac{ca}{cb}$ com c inteiro não-nulo. A generalidade com que o conceito deve ser apresentado pode ser feita de duas maneiras. Ou se apresenta o conceito na sua forma mais geral e procede-se a sua análise em vários casos particulares, ou se apresenta o conceito em algumas situações particulares para, posteriormente, fazer uma síntese apresentando-o então na forma geral. Uma apresentação contextualizada deve necessariamente seguir esta segunda forma se desejamos que o conceito seja compreendido de forma geral.

Perceba que neste estágio o professor identificará vários *aspectos* associados ao conceito. Os aspectos julgados relevantes pelo docente deverão ser trabalhados no próximo estágio.

(ii) Plano de apresentação do conceito

Agora, o professor já tem em mente um esboço do que será ensinado e a forma de apresentação do mesmo. Segue-se então a implementação do que será feito em sala de aula tendo em vista a realidade dos alunos, os recursos disponíveis em sala de aula, e o tempo disponível. Este também é um estágio preparatório e constitui-se no plano de aula.

Aqui o princípio a ser utilizado é o de separar o conceito em *subconceitos,* tendo em vista os aspectos relevantes vistos anteriormente. Por subconceito entendem-se as partes "menores" constitutivas de um conceito e que de algum modo já são devidamente compreendidos pelos alunos. Por exemplo, no conceito de função podem ser tomados como subconceitos as noções de conjuntos e par ordenado. Os subconceitos devem então ser apresentados de forma sequencial de modo a se chegar à compreensão do conceito desejado.

Após identificar os subconceitos o professor elaborará um conjunto de questões elucidativas que poderão ser usadas na apresentação de cada subconceito. As questões elucidativas têm a mesma finalidade que as usadas por Taba, isto é, instigar a reflexão, esclarecer pontos e dúvidas. Como os subconceitos são expostos de forma sequencial as questões elucidativas devem ser cuidadosamente colocadas de forma a propiciar uma passagem gradual entre os vários subconceitos sendo possível, ou até mesmo necessário, adotar uma abordagem construtivista.

(iii) Exposição do conceito em sala de aula

Esta é a etapa de implementação do estágio (ii) e que constitui a aula em si. Na condução da aula o professor utilizará as questões elucidativas previamente elaboradas no estágio anterior. No entanto, a dinâmica da sala de aula por vezes apresenta situações inesperadas, onde um aluno poderá colocar uma questão que para ser respondida necessitará que o docente pense numa questão elucidativa que não foi elaborada previamente pelo mesmo.

Em resumo, este terceiro estágio envolve a seguinte dinâmica:

Situação inicial é exposta pelo professor $\rightarrow$ questões elucidativas $\rightarrow$ professor analisa as respostas dadas pelos alunos as questões elucidativas, tira dúvidas, e avalia se os objetivos desejados foram alcançados. A partir daí avalia qual será a próxima situação a ser apresentada e propõe uma nova situação entre as várias que ele dispõe no seu plano de aula do estágio (ii).

Repete-se para a nova situação a mesma sequência anterior até que o subconceito ou conceito a ser ensinado esteja consolidado.

4. EXEMPLOS

Em cada um dos exemplos a seguir discutiremos como se realiza os três estágios identificados anteriormente, enfatizando explicitamente o que se realiza em cada um deles. Convêm observar que o que apresentamos como estágio (ii), embora se constitua a elaboração do plano de aula, não tem o formato do plano de aula que será usado pelo professor. No apêndice, apresentamos um exemplo do que seria um plano de aula usando o método proposto.

4.1 A construção do conceito de número negativo

Como primeiro exemplo de aplicação do nosso método, propomos uma estratégia para a construção do conceito de número negativo para alunos do ensino médio que ainda não tiveram exposição ao mesmo.

Estágio (i):

Neste estágio o professor deve pensar numa situação que permita chegar à existência de números negativos. Não há uma forma única de fazê-lo. Ao pensar no conceito de número negativo, o professor identifica alguns aspectos que julga relevante, por exemplo, a noção de ausência, débito, gols sofridos por uma equipe de futebol, etc. No intuito de generalizar pode-se pensar em uma representação dos inteiros como pontos da reta.

Estágio (ii):

Neste estágio devemos pensar a preparação da aula em si, que consiste em identificar subconceitos (a partir dos aspectos relevantes levantados no estágio anterior) e propor questões elucidativas que permitam passar de um subconceito ao outro. Aqui o professor prepara seu plano de aula cujos elementos principais são estabelecidos a seguir.

Subconceito: Idéia de ausência .

Situção inicial: Seja um vendedor de frutas. Suponha que o vendedor possua apenas seis maçãs e que um cliente deseje comprar oito maçãs para fazer uma torta.

Questões elucidativas: *O número de maçãs que o vendedor possui é suficiente para fazer à torta?Quantas maçãs irão faltar para o cliente fazer sua torta?*

Objetivos: Apresentar aos alunos o subconceito de ausência. Não tendo o feirante o número necessário de maças que o comprador deseja, introduz-se o subconceito de ausência. Ou seja, não é possível que à torta seja feita, pois estão *faltando* maçãs. Ao perceberem este fato, os alunos irão chegar ao consenso de que faltam duas maças para completar as oito necessárias. Este número seria representado na forma (-2), onde o sinal negativo estaria, neste caso, associado à idéia de falta. Tem-se assim uma primeira apresentação do conceito de número negativo, embora ainda em uma forma muito incompleta.

O professor propõe então outro subconceito:

Subconceito: gols sofridos:

Situação inicial: Considere o saldo de gols de um time de futebol. Suponha que em duas partidas o time A tenha marcado 4 gols e sofrido 7.

Questão elucidativa: *O saldo da equipe A após esses dois jogos foi positivo ou negativo?*

Objetivos: A partir desse novo problema, os alunos já podem fazer uso do subconceito ausência. Eles devem perceber que o time A levou mais gols do que marcou e, assim, para que o ataque chegue ao número de gols que a defesa sofreu, faltarão 3 gols, isto é, a resposta procurada é: o time A possui um saldo negativo de 3 gols, que representamos por (-3).

Generalização: Feito a exposição dos subconceitos a partir dos exemplos contextualizados anteriormente, devemos generalizá-lo conforme mencionado no estágio (i).

Situação inicial: Seja uma reta *r* onde é selecionado o ponto *O* que, por sua vez, a divide em duas semi-retas.

--***O***---

Tomemos agora uma certa unidade de comprimento (1 cm, por exemplo), e solicitemos aos alunos que assinalem pontos distantes 1, 2, 3, ..., unidades de comprimento da origem, situados a direita e a esquerda da mesma.

------------------------.------.------.------***O***------.------.------.------------------------

Afim, de introduzir os números inteiros positivos e negativos na reta *r*, o professor propõe a seguinte questão:

Questão elucidativa: *Marque um ponto P que esteja distante 3 unidades da origem.*

Objetivos: Os alunos devem perceber que existem duas possibilidades de se assinalar um ponto satisfazendo a condição de estar distante 3 unidades da origem. O professor conduz a discussão de forma que a resposta possa ser qualquer uma das duas situações abaixo **(1)**:

--***O***------.------.------.------------------------

P

-------------------------•------•------•------*O*---

P'

Neste ponto o professor deve levar os alunos a observar que a resposta a questão proposta não é única, sendo necessário então um dado adicional a localização dos pontos na reta.

Deve-se convencionar que pontos situados a direita da origem terão sua localização dada por um número positivo (+1,+2,+3,....), enquanto pontos situados a esquerda da origem terão sua localização dada por um número negativo (-1,-2,-3,....).

Assim, a localização dos pontos afastados *3* unidades da origem seria:

P' *P*

-------------------------•------•------•------*O*------•------•------•-------------------------

-3 *3*

Nesta construção, introduzimos a partir da localização de pontos na reta em relação à origem, os conceitos de *negativo* e *positivo,* fazendo assim a generalização destes conceitos outrora introduzidos pela idéia de falta e presença.

O professor pode, se desejar, mencionar que a cada número inteiro positivo (por exemplo, situado a direita do zero) está relacionado um *único* número inteiro negativo (situado à esquerda do zero) ambos igualmente afastados em relação à origem. Tal fato serve para futuramente introduzirmos o conceito de módulo.

(1) Observação: Caso os alunos tivessem assumido apenas a condição de que o ponto P estivesse à direita da origem, o professor poderia propor a seguinte questão, afim de induzi-los a pensar sobre a localização de P:

Questão elucidativa: *Necessariamente o ponto P estará à direita de O ?*

O que motivaria a resposta adicional onde P estaria à esquerda da origem.

4.2 Aritmética dos números inteiros

Desejamos agora desenvolver as operações aritméticas envolvendo números inteiros que dividimos nos vários casos a seguir.

4.2.1 Adição

4.2.1.1 Adição de números inteiros positivos

Estágio (i)

O professor deve pensar numa maneira apropriada para se introduzir o conceito de soma. Para isto, pode-se pensar no saldo bancário de uma pessoa qualquer.

Estágio (ii)

Situação inicial: Certa pessoa possuía em sua conta no Banco A, a quantia de R$ 455,00. Num determinado dia, após comprar um bilhete de loteria, esta pessoa teve seu bilhete sorteado ganhando um prêmio total de R$ 25.000,00, que ele optou por depositar em sua conta.

Questão elucidativa: *Qual será o saldo do cliente do banco A, após esse depósito?*

Objetivo: Deixar claro o sentido do termo *depósito, como um acréscimo.* Entendido esta primeira parte e estando os alunos familiarizados com o conceito de ausência ou falta de algo, eles facilmente compreenderão que, nesse tipo de situação, o que está ocorrendo é o inverso do que já aprenderam anteriormente, isto é, basta somarmos os dois valores que foram dados no problema.

Simbolicamente, o problema é resolvido efetuando a seguinte operação:

(455,00) + (25.000,00) = (+25.455,00).

Portanto, o saldo total do cliente no banco A, após realizar o depósito, será de vinte e dois mil, quatrocentos e cinquenta e cinco reais.

4.2.1.2 Adição de número inteiro positivo e negativo

Estágio (i)

Mantêm-se a mesma situação do exemplo anterior.

Estágio (ii)

Situação inicial: Uma pessoa possui uma conta poupança no Banco B, cujo saldo é de R$ 455,00 e deseja comprar um livro cujo preço é de R$ 65,00. *Sabe-se que ela possui apenas R$ 10,00 em sua carteira.*

Questões elucidativas: *Quanto deverá sacar de sua conta para poder comprar o livro? Após esse saque, qual será seu saldo?*

Objetivos: Os alunos devem perceber que a quantia que a pessoa dispõe em sua carteira é insuficiente para a compra do livro. Concluindo que lhe falta R$ 55,00. Os alunos devem concluir então que será necessária a retirada desses 55 reais de sua conta que ficará com o valor.

Simbolicamente, o problema é resolvido efetuando a seguinte operação:

(455,00) + (-55,00) = (+400,00).

4.2.1.3 Adição de dois números negativos

Estágio (i)

Aqui pensamos numa situação referente a variações de temperatura durante o dia numa certa região.

Estágio (ii)

Situação inicial: Cynthia mora em São Joaquim. Ao sair de casa pela manhã para ir ao colégio, ela observou que o termômetro na praça perto de sua casa marcava (-2° C). Ao retornar do colégio no período da tarde, ela observou que o mesmo termômetro registrava uma temperatura de 3 graus Celsius menor em relação à temperatura registrada pela manhã.

Questão elucidativa: *Qual era a temperatura quando Cynthia voltou para casa no período da tarde?*

Objetivos: Os alunos devem perceber que a temperatura inicial já era negativa. Os alunos devem simular um termômetro marcando os pontos na reta numérica inteira (apresentada na generalização anterior), desse modo eles devem marcar o ponto 0, como se fosse o divisor entre as temperaturas positivas (a direita de zero) e negativas (a esquerda de zero). Em seguida irão marcar a primeira temperatura observada por Cynthia, isto é, -2° C (situado a duas unidades à esquerda do ponto 0). Por fim, devem marcar um novo ponto situado três unidades a esquerda do número -2.

A partir disto, espera-se que a resposta da questão elucidativa seja de -5° C.

Simbolicamente, o problema é resolvido efetuando a seguinte operação:

$$(-2°C) + (-3°C) = (-5°).$$

4.2.2 Subtração

Aqui, o professor ao invés de introduzir situações específicas pode definir a subtração da seguinte forma:

Dados dois números inteiros $x, y,$ entendemos pela subtração $x - y$, a adição do oposto $-y$ ao número x, que simbolicamente escrevemos $x + \ -y$.

Neste caso não seria necessário seguir os estágios 1 e 2, e proceder-se-ia diretamente a definição de subtração como uma operação que decorre naturalmente do que foi visto nos casos anteriores.

4.2.3 Generalizar as operações anteriores

O professor pode usar novamente a reta numérica dividida em duas semi-retas pelo ponto O, definido como origem. Entendemos a operação $x + y$ da seguinte forma: marca-se na reta numérica o primeiro número, neste caso x, em seguida efetua-se um deslocamento de y unidades para a esquerda ou direita conforme o sinal associado ao número y seja respectivamente negativo ou positivo.

Exemplo: Suponha a seguinte subtração (-5) + (-4). Usando a prescrição anterior marca-se na reta numérica o ponto -5. Em seguida, desloca-se 4 unidades para a esquerda, chegando-se ao número -9.

Ilustração do exemplo na reta numérica:

------.------.------.------.------.------.------.------.------.------*O*---------------------

-9 *-5*

4.2.4 Multiplicação

Estágio (i):

Nos casos a seguir utilizaremos uma situação envolvendo a evolução do peso de uma pessoa M ao longo de certos dias. Para isto, enfatizaremos o ganho ou a perda de peso de M, da seguinte forma: Se M ganha peso este ganho é representado por um número positivo e quando ela perde peso esta perda é representada por um número negativo.

Nossa análise será feita também em um determinado período de tempo onde convencionamos que um determinado número de dias que já passou é representado por um número negativo enquanto que um determinado número de dias que ainda não ocorreu é representado por um número positivo. Aqui seguimos as idéias expostas na referência [4]

Consideramos quatro casos possíveis.

4.2.4.1 Multiplicação de dois números positivos:

Estágio (ii)

Situação inicial: M ganha 2 quilos por semana.

Questão elucidativa: *Após 4 semanas quantos quilos M terá?*

Objetivo: Os alunos devem perceber que o tempo a ser analisado para constatarmos o ganho ou a perda de peso de M, se refere a um evento futuro. Uma vez que M ganha 2 quilos por semana após 4 semanas ele terá ganho 8 quilos. Simbolicamente a operação que deve ser efetuada é:

$$(+4) \times (+2) = +8.$$

Vemos então que o produto de dois números positivos é positivo.

4.2.4.2 Multiplicação de um número positivo por um número negativo.

Estágio (ii)

Situação inicial: M perde 2 quilos por semana.

Questão elucidativa: *Após 4 semanas quantos quilos M terá?*

Objetivo: Os alunos devem perceber que o tempo a ser analisado para constatarmos o ganho ou a perda de peso de M, novamente se refere a um evento futuro. Uma vez que M perde 2 quilos por semana após 4 semanas ele terá 8 quilos a menos. Simbolicamente a operação que deve ser efetuada é:

$$(+4) \times (-2) = -8.$$

Vemos então que o produto de um número positivo por um número negativo, é um número negativo.

4.2.4.3 Multiplicação de um número negativo por um número positivo.

Estágio (ii)

Situação inicial: M ganha 2 quilos por semana.

Questão elucidativa: *Qual era o peso de M há 4 semanas atrás?*

Objetivo: Os alunos devem perceber que o tempo a ser analisado para constatarmos o ganho ou a perda de peso de M, se refere a um evento passado. Uma vez que M ganha 2 quilos por semana, há 4 semanas atrás ele tinha 8 quilos a menos. Simbolicamente a operação que deve ser efetuada é:

$$(-4) \times (+2) = -8.$$

Vemos então que o produto de um número negativo por um número positivo, também é um número negativo.

4.2.4.4 Multiplicação de um número negativo por outro número negativo.

Estágio (ii)

Situação inicial: M perde 2 quilos por semana.

Questão elucidativa: *Quantos quilos M tinha há 4 semanas atrás?*

Objetivo: Os alunos devem perceber que o tempo a ser analisado para constatarmos o ganho ou a perda de peso de M, se refere a um evento passado. Uma vez que M perde 2 quilos por semana, há 4 semanas atrás ele tinha 8 quilos a mais. Simbolicamente a operação que deve ser efetuada é:

$$(-4) \times (-2) = +8.$$

Vemos então que o produto de dois números negativos é um número positivo.

5. CONCLUSÃO

Apresentamos um método de desenvolvimento conceitual para o ensino da matemática baseado nas estratégias de ensino propostas por Hilda Taba. O método segue uma linha construtivista onde a compreensão dos conceitos é feita de forma gradual e como resposta a questões elucidativas cuidadosamente postas pelo professor. O ambiente em sala de aula é o mais dinâmico possível e deve explorar as várias respostas e indagações que os alunos dão as questões elucidativas.

A aplicação deste método requer uma boa preparação do professor em relação ao conteúdo a ser ensinado. Isto se faz necessário pois, ainda que tenha preparado um plano de aula como guia do que será feito em sala de aula, muitas vezes a dinâmica em sala de aula forçará o professor a propor novas questões elucidativas mais apropriadas para a discussão e que não estão incluídas entre as que ele tem no seu plano de aulas.

Outro ponto importante é o uso de situações concretas e contextualizadas apenas como um primeiro passo no desenvolvimento do conceito. No nosso método todo conceito deve ser generalizado, o que nos leva a sair do contexto inicialmente utilizado. A ênfase em um ensino contextualizado da matemática, além de eliminar a abstração, não encontra eco na proposta de Hilda Taba de desenvolver processos mentais indutivos nos alunos, que é o que pretendemos contribuir com esta dissertação.

Alguns pontos estão obviamente omissos. Não nos preocupamos em fazer nenhuma análise mais detalhada do construtivismo em matemática, nem tampouco tivemos oportunidade de testar este método em sala de aula o que daria elementos valiosos para aperfeiçoá-lo. Acreditamos, contudo, ser uma proposta sólida que resgata as particularidades mais marcantes da matemática: a abstração e a generalidade.

6. BIBLIOGRAFIA

[1] DRESSLER Isidore, ***Algebra I***, AMSCO School Publications, Inc., New York, N.Y. (1966).

[2] JOYCE Bruce, WEIL Marsha , ***Models of Teaching***, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1972).

[3] TABA Hilda, ***Teaching Strategies and Cognitive Functioning in Elementary School Children***, San Francisco State College, Coop Research Project N0. 2404 (San Francisco, 1966).

[4] http://www.nychold.com/em-spiral.html - acesso em 17/07/2009.

ANEXO

PLANO DE AULA

ESCOLA: Simão José Hess (por exemplo)

SÉRIE: 6ª série do Ensino Fundamental

1. ASSUNTO

- Números Inteiros.

2. CONTEÚDOS:

- Apresentar a existência dos números negativos.

3. OBJETIVOS:

- Expor a idéia de ausência e falta;
- Generalizar o conteúdo a partir do uso da reta numérica.

4. LINHAS DE AÇÃO:

4.1. Desenvolvimento Metodológico:

Aula expositiva e dialogada.

Vou fornecer condições para que seja possível construirmos o conceito de números negativos Para facilitar a aplicação do conceito, irei dividi-lo em subconceitos, onde irei enfatizar que aos números negativos normalmente estará atrelado à ausência de algo. Para finalizar, vou generalizar o conceito fazendo uso da reta numérica.

4.2. Desenvolvimento do Conteúdo: Página 33.

4.3. Recursos Utilizados: Quadro negro, giz, livros didáticos.

4.4. Avaliação: Observação da participação e interesse dos alunos nas atividades propostas.

4.5. Conteúdo da aula posterior: Efetuar operações de aritmética, usando números inteiros.

5- BIBLIOGRAFIA:

GIOVANNI, José Ruy, CASTRUCCI, Benedito. **A Conquista da Matemática.** 6ª série, São Paulo: Editora FTD, 1985.

Florianópolis, de de 2009.

<u>Desenvolvimento do Conteúdo Aula</u>

Darei início à aula propondo uma estratégia para que cheguemos à construção dos números inteiros negativos. Para isto, vou promover a “quebra” do conceito números negativos em dois subconceitos, tomando a seguinte estratégia:

i) Idéia de ausência;

Irei apresentar a seguinte situação:

Seja um vendedor de frutas. Suponha que o vendedor possua apenas seis maçãs e que um cliente chegue para comprá-las com a intenção de levar oito maças para fazer uma torta.

O objetivo principal da situação acima é levar os alunos a perceberem que o número de maçãs disponíveis pelo vendedor de frutas, é insuficiente no que diz respeito à intenção de compra do cliente, i.e, estão faltando maçãs.

Para chegar a tal objetivo, preparei as seguintes **questões elucidativas**: *O número de maçãs que o vendedor possui é suficiente para fazer à torta? Quantas maçãs irão faltar para o cliente fazer sua torta?*

Ao aplicar as questões acima, espero obter como resposta que o número de maçãs é menor, insuficiente, etc.. e que irão faltar 2 maçãs para que seja possível que o cliente faça sua torta. Vale lembrar, que o papel que devo desempenhar não é o de fornecer a resposta previamente e sim o de orientar os alunos a chegarem na resposta desejada por sua própria iniciativa. Portanto, caso as respostas iniciais não sejam as desejadas, irei providenciar novas questões elucidativas (elaboradas no momento da aula), que os levem a resposta esperada.

Dessa maneira, percebido este fato (a falta de maçãs), poderei exibir a idéia de ausência, ou seja, o primeiro subconceito.

ii) *Saldo de Gols.*

Irei apresentar a seguinte situação:

Considere o saldo de gols de um time de futebol. Suponha que em duas partidas o time A tenha marcado 4 gols e sofrido 7.

Aqui o objetivo principal é fazer com que os alunos percebam que a equipe em questão fez menos gols em comparação com seu adversário. Vale lembrar que nesta etapa, os alunos já podem utilizar o que foi apresentado no item (i), ou seja, já definimos ausência.

Para isto, elaborei a seguinte **questão elucidativa:** *O saldo da equipe A após esses dois jogos foi positivo ou negativo?*

Ao serem questionados, os alunos deverão fornecer a resposta de que o time A possui um saldo negativo, pois faltam 3 gols para que eles cheguem ao número de gols feitos pelo seu adversário. Portanto, o saldo de gols do time A é (-3). Novamente, caso a resposta dos alunos não seja a esperada, fornecerei novas questões elucidativas que poderei elaborar na própria aula.

Dessa maneira, percebido que o saldo do time é negativo, posso apresentar o conceito de números negativos.

Para finalizar, irei generalizar o conceito de números negativos:

Inicialmente irei solicitar que os alunos desenhem em seus cadernos uma reta *r* qualquer. Em seguida vou pedir marquem um ponto O (que denominarei como origem), o qual dividirá a reta *r* em duas semi-retas. Irei definir uma unidade de comprimento (1 cm, por exemplo), para logo após, solicitar-lhes que assinalem pontos distantes 1, 2 ,3 unidades à esquerda de O e a direita de O.

Assim, teremos a seguinte situação:

------------------------.------.------.------*O*------.------.------.------------------------

Para introduzir os números inteiros positivos e negativos na reta *r*, elaborei a seguinte **questão elucidativa:** *Marque um ponto P que está distante 3 unidades da origem.*

A idéia principal desta questão é fazer com que os alunos percebam que existirão duas possibilidades para se assinalar o ponto solicitado. Contudo, nesta fase, penso que a maioria das respostas dadas pelos estudantes irá situar o ponto P à direita de O, ou seja:

--*O*------.------.------.------------------------

P

Caso isto realmente ocorra, posso aplicar a seguinte **questão elucidativa:** *Necessariamente o ponto P estará à direita de O?*

O que motivaria a resposta adicional onde P estaria à esquerda da origem, ou seja:

------------------------.------.------.------*O*--

P'

Neste ponto, farei com que os alunos percebam que a resposta da **questão elucidativa:** *Marque um ponto P que está distante 3 unidades da origem,* não é única.

Desse modo, irei fornecer um dado adicional a localização dos pontos na reta, i.e, convencionarei que os pontos situados a direita de O terão sua localização dada por um número positivo (+1,+2,+3,....), enquanto que os pontos situados a esquerda da origem terão sua localização dada por um número negativo (-1,-2,-3,....).

Assim, a localização dos pontos afastados 3 unidades da origem será:

P' *P*

------------------------.------.------.------***O***------.------.------.------------------------

-3 *3*

Portanto, a partir da localização de pontos na reta em relação à origem pude introduzir os conceitos de números *negativos* e *positivo,* fazendo assim a generalização destes conceitos outrora introduzidos pela idéia de falta e presença.

Na próxima aula, irei apresentar como iremos efetuar operações de aritmética usando os números positivos e negativos.