Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática - Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº. 27/scg/04.

Profª. Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca examinadora:

Nereu Estanislau Burin
Orientador

Antonio Vladimir Martins

Lício Hernanes Bezerra

Cleidemar dos Santos Teixeira

Um Estudo Sobre Funções Geradoras

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Nereu Estanislau Burin

Florianópolis
Julho 2004

Agradecimentos

À Deus, pelo dom da vida e sonhos realizados.

Aos meus pais, pelo amor, educação e por me fazerem acreditar que tudo é possível.

A minha esposa Luíza por compartilhar momentos de angústia e pela compreensão.

Aos meus filhos Lucas e Júlia Carolina pela energia positiva que vocês emanam.

Aos meus irmãos Carlinhos e Márcio que mesmo a distância acreditam em mim.

Aos amigos Fusão, Jorge Henrique, Neimar, Wilson e Zeferino pelo apoio fundamental, compreensão e ajuda extra classe.

Aos amigos Antônio, Claunei, Edson, João Nilton, Jussara, Kely e Lidiani, pela colaboração durante todo o curso.

Ao meu orientador Nereu Burin pelo apoio, ajuda e ensinamentos adquiridos em suas aulas.

Aos professores Lício e Vladimir por fazerem parte da banca.

Aos professores, com referência especial ao professor Rubens Starke por sua dedicação ao ensinar e ao professor Pinho por sua dedicação e positivismo.

Aos funcionários da secretaria do curso, Alcino, Sílvia e em especial a amiga Iara pela atenção e amizade.

“Dedico este trabalho à minha esposa
e filhos, aos meus pais, em especial a minha
mãe(in memorian), de quem sinto infinitas saudades
e a todos que me apoiaram e incentivaram.”

Sumário

Introdução

O presente trabalho tem por objetivo principal explorar as funções geradoras, que fazem parte das ferramentas da Combinatória e apresentam enorme versatilidade na resolução de problemas e são de grande interesse.

A utilidade de uma função geradora surge quando adotamos interpretações combinatórias aos coeficientes e expoentes de sua expansão em série formal.

Existem diversas espécies, em uma ou mais variáveis, que obviamente dependem do tipo de solução procurada.

Primeiramente, com o objetivo de facilitar a compreensão, faremos um breve estudo sobre equações lineares, coeficientes binomiais e séries formais.

Será dada ênfase especial às funções geradoras ordinárias e às funções geradoras exponenciais, bem como algumas aplicações.

Veremos alguns exemplos simples que podem ser resolvidos por métodos mais difundidos, mas resolveremos por funções geradoras. Assim, poderemos verificar que além do resultado procurado, obteremos outras possibilidades.

Na seção de aplicações selecionamos alguns problemas clássicos, onde resolvemos por dois métodos: o primeiro, utilizando as fórmulas de recorrências, o segundo, utilizando as versáteis funções geradoras.

Nossa intenção é proporcionar uma leitura prazerosa e de fácil compreensão. Realizaremos algumas demonstrações e utilizaremos bastante esta poderosa ferramenta em vários exemplos.

Capítulo 1

Equações Lineares

Entenderemos por equação linear nas variáveis (incógnitas) $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, como sendo a equação da forma $a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 + ... + a_n.x_n = b$ onde $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ e b são números reais ou complexos. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são denominados coeficientes e b, termo independente.

Nota: se o valor de b for nulo, diz-se que temos uma equação linear homogênea.

Exemplos de equações lineares:

1. $4x_1 + 2x_2 = 8$ (x_1 e x_2 são as variáveis ou incógnitas, 4 e 2 são coeficientes e 8, o termo independente).

2. $-2x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 = 1$ (x_1, x_2, x_3 e x_4, variáveis;-2, 4, -7 e 1, coeficientes; e 1, termo independente).

3. $3x + 5y + z - 6t = 0$ (x, y, z e t, variáveis; 3, 5, 1, -6, coeficientes; e 0, termo independente). Logo, este é um exemplo de equação linear homogênea.

Solução de uma equação linear com coeficientes unitários

Equações lineares com uma única variável já estamos acostumados a resolver. Por exemplo: $3x + 1 = 22$, leva-nos à solução única $x = 7$. Já, uma equação com duas incógnitas (variáveis), por exemplo $x + y = 11$, a solução não é única, já que podemos ter um número infinito de pares ordenados que satisfazem à equação, por exemplo, para $x \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{lccccccc} \text{x} = \ldots & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \ldots \\ \text{y} = \ldots & 3 & 2 & 1 & 0 & \text{-1} & \text{-2} & \text{-3} \ldots \end{array}$$

De uma forma geral, as soluções de uma equação linear de duas variáveis são pares ordenados; de três variáveis são ternos ordenados; de quatro variáveis, são quadras ordenadas; e assim por diante. Quando a equação linear tem n variáveis, dizemos que as soluções são n - uplas (lê-se ênuplas) ordenadas.

Assim, se a n-upla ordenada $(r_1, r_2, r_3, ..., r_{n-1}, r_n)$ é solução da equação linear $a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 + ... + a_n.x_n = b$, isto significa que a igualdade é satisfeita para $x_1 = r_1, x_2 = r_2, x_3 = r_3, ..., x_n = r_n$ e poderemos escrever:

$$a_1.r_1 + a_2.r_2 + a_3.r_3 + ... + a_n.r_n = b.$$

O nosso objetivo de agora em diante é contar o número de soluções inteiras de uma equação linear.

Já vimos que uma equação da forma $x+y = m$ tem infinitas soluções inteiras. Para que tenhamos um número finito de soluções devemos restringir os possíveis valores que as variáveis podem assumir.

Exemplo 1.0.1 *Qual o número de soluções inteiras e positivas da equação*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \text{ ?}$$

As soluções inteiras e positivas são quádruplas ordenadas e para encontrarmos o número de soluções podemos escrever 9 como soma de nove 1's, ou seja:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$$

Como queremos separar 9 em quatro parcelas inteiras e positivas, basta introduzirmos 3 barras entre os 1's. conforme abaixo:

$$1 + 1 + 1 + 1| + 1| + 1 + 1| + 1 + 1$$

A escolha acima corresponde a $x_1 = 4$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 2$. Assim, cada maneira que escolhermos para inserir as barras dentre os 8 sinais de + nos dará uma quádrupla ordenada que será solução da equação.

Portanto, podemos concluir que o número total de soluções inteiras e positivas é igual ao número de maneiras de inserirmos as 3 barras entre os 8 sinais de +, e isto pode ser feito usando combinação simples. Isto é, C_8^3 que é o número de combinações de 8 elementos tomados 3 a 3, ou seja,

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!.(8-3)!} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 56.$$

O teorema abaixo considera o caso geral para obtermos o número de soluções inteiras positivas de uma equação linear com coeficientes unitários.

Teorema 1.0.1 *O número de soluções inteiras positivas da equação* $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_r = m$, *onde* $m > 0$, *é dado por* C_{m-1}^{r-1}.

Dem.:

Queremos expressar o inteiro positivo m como soma de r inteiros positivos. Então basta, como vimos no exemplo anterior, colocarmos $r-1$ barras separadoras entre os m 1's.

$$1 + 1| + 1 + 1 + 1 + 1| + 1... + 1| + 1 + ... + 1 = m.$$

O valor de x_1 será a soma dos 1's que antecedem a primeira barra, o valor de x_2 será a soma dos 1's que ficam entre a primeira e a segunda barra, o valor de x_3 será a soma dos 1's que ficam entre a segunda e terceira barra, e assim sucessivamente, até obtermos o valor de x_r que é a soma dos 1's à direita da barra $r-1$. Como a cada possível distribuição das barras corresponde uma única solução para equação, basta contarmos de quantas formas isto pode ser feito. Devemos selecionar $r-1$ dos $m-1$ possíveis locais para a colocação das $r-1$ barras divisoras. Isto pode ser feito de C_{m-1}^{r-1} maneiras diferentes. ■

Exemplo 1.0.2 *Encontrar o número de soluções inteiras positivas da seguinte equação:*

$$x + y = 7$$

temos $m = 7$ e $r = 2$, logo,

$$C_{m-1}^{r-1} = C_{7-1}^{2-1} = C_6^1 = 6.$$

Portanto, temos 6 soluções inteiras positivas.

Exemplo 1.0.3 *Encontrar o número de soluções inteiras positivas da seguinte equação:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$

temos $m = 15$ e $r = 4$, logo, pelo teorema 1.0.1:

$$C_{m-1}^{r-1} = C_{15-1}^{4-1} = C_{14}^3 = \frac{14.13.12}{3.2.1} = 364.$$

Portanto, temos 364 soluções inteiras positivas para esta equação.

E se quisermos o número de soluções inteiras não negativas de uma dada equação linear?

Nas soluções inteiras não negativas implica que as variáveis também podem assumir o valor zero.

Podemos obter uma fórmula para calcular o número de soluções não negativas de duas maneiras diferentes.

Consideremos a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$$

Escrevemos o 9 como sequência de nove 1's e três letras b's(no lugar das barras).

$$1111b1bb1111$$

Devemos contar o número de 1's antes do primeiro b, entre o primeiro e o segundo, entre o segundo e o terceiro e à direita do terceiro b. Assim teremos uma solução de inteiros não negativos, ou seja $(4, 1, 0, 4)$ é uma quádrupla ordenada da equação acima.

Agora observe que o número de elementos da seqüência formada de 1's e de b's tem 12 elementos. O número de b's é de acordo com o número de partes que desejamos separar a equação, neste caso, 4 (número de variáveis) e para isso precisaremos de três

b's. Novamente aqui usamos combinação simples $C_{12}^{3} = \frac{12.11.10}{3.2.1} = 220$ que é o número de soluções inteiras não negativas da equação acima.

Uma outra forma de contarmos o número de soluções inteiras não negativas da equação supracitada é por mudança de variáveis, as quais verificaremos a seguir, pois veremos que há correspondência entre o número de soluções inteiras não negativas desta equação com o número de soluções em inteiras positivas de outra equação.

Como $x_i \geq 0$, para i=1, 2, 3, 4 fazemos a mudança de variáveis da seguinte forma: $y_i = x_i + 1$ com $y_i \geq 1$. Portanto temos $x_i = y_i - 1$, e assim substituindo x_i na equação dada teremos:

$$y_1 - 1 + y_2 - 1 + y_3 - 1 + y_4 - 1 = 9$$

ou

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9 + 1 + 1 + 1 + 1 = 13$$

com $y_i \geq 1$. Logo o número de soluções não negativas de equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$$

é igual ao número de soluções inteiras positivas (que já sabemos encontrar) de:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13$$

No caso geral com n variáveis:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = m$$

com $x_i \geq 0$, somamos 1 a cada termo e obtemos o seguinte:

$$x_1 + 1 + x_2 + 1 + ... + x_{n-1} + 1 + x_n + 1 = m + n$$

ou seja,

$$y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + y_n = m + n, y_i \geq 1$$

Assim, conforme teorema 1.0.1, o número de soluções não negativas da equação é:

$$C_{m+n-1}^{n-1}$$

Exemplo 1.0.4 *Encontrar o número de soluções inteiras não negativas da seguinte equação:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$

Utilizando a fórmula por nós deduzida temos:

$$C_{m+n-1}^{n-1} = C_{15+4-1}^{4-1} = C_{18}^{3} = \frac{18.17.16}{3.2.1} = 816.$$

Portanto, temos 816 soluções em inteiros não negativos para a equação dada.

Consideremos agora o seguinte problema:

Encontrar o número de soluções, inteiras, da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, tais que a variável x_1 pertence ao conjunto $\{3, 4, 5\}$, x_2 pertence ao conjunto $\{2, 4, 6\}$ e a variável x_3 pertence ao conjunto $\{6, 7, 8\}$.

Agora temos restrições. Como resolver este problema?

Aguardemos as funções geradoras.

Capítulo 2

Coeficientes Binomiais

Binômio é qualquer expressão da forma $a+b$, isto é, a soma de dois termos distintos.

Queremos aqui, estudar o cálculo dos coeficientes das expansões de potências de $a+b$, ou seja, $(a+b)^n$.

Consideremos inicialmente n=3. Portanto, teremos:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b).$$

Fazendo esta multiplicação, obteremos $2^3 = 8$ termos com três letras. Multiplicando 6 binômios, teremos $2^6 = 64$ maneiras de selecionarmos 6 letras (uma de cada binômio) e se os binômios são iguais, teremos termos repetidos. Devemos observar que se tomarmos a letra a nos 4 primeiros termos e a letra b nos outros dois binômios restantes, teremos a^4b^2, que aparecerá toda vez que escolhermos a letra a em exatamente 4 dos seis binômios dados e a letra b nos dois restantes. Isto pode ocorrer de C_6^4 maneiras diferentes. Concluimos que a^4b^2 aparece C_6^4 vezes. Todo termo geral é da forma a^ib^j, onde $i+j=6$, ou seja, cada termo é da forma a^ib^{6-i}. Como um termo destes aparece C_6^i vezes a expansão acima é dada por:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^6 &= \sum_{i=0}^{6} C_6^i a^i b^{6-i} \\
&= C_6^0 a^0 b^6 + C_6^1 a^1 b^5 + C_6^2 a^2 b^4 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^4 b^2 + C_6^5 a^5 b^1 + C_6^6 a^6 b^0 \\
&= b^6 + 6ab^5 + 15a^2b^4 + 20a^3b^3 + 15a^4b^2 + 6a^5b + a^6.
\end{aligned}
$$

No caso geral $(a+b)^n$ cada termo será da forma $a^i b^{n-i}$ e assim temos:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}.$$

Nesta expansão, temos um termo distinto para cada i variando de 0 a n. Logo são $n+1$ termos distintos dentre 2^n termos.

Sabemos que $(a+b)^n = (b+a)^n$, e deste fato podemos concluir que trocando-se a por b teremos

$$(b+a)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i b^i a^{n-i},$$

e isto nos garante o fato já conhecido de que

$$C_n^i = C_n^{n-i},$$

uma vez que pelo argumento apresentado, o coeficiente de $a^{n-i}b^i$ é dado por C_n^{n-i}, em outras palavras, na expansão de $(a+b)^n$ os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos são iguais.

Na expansão de

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i},$$

denotamos o termo geral por T_{i+1}, o qual é dado por

$$T_{i+1} = C_n^i a^i b^{n-i}.$$

Exemplo 2.0.5 *Calcular o quarto termo da expansão de* $(1+x)^8$.

Tomamos, $a = 1$, $b = x$, $n = 8$ e $i + 1 = 4$, e assim, $i = 3$ e

$$T_4 = T_{3+1} = C_8^3 1^3 x^{8-3} = 56x^5.$$

Exemplo 2.0.6 *Calcular o sexto termo da expansão de* $(x - 5y)^{10}$.

Tomamos, $a = x$, $b = -5y$, $n = 10$ e $i + 1 = 6$, e assim, $i = 5$ e

$$T_6 = C_{10}^5 x^5(-5y)^5 = -787.500x^5y^5.$$

Exemplo 2.0.7 *No desenvolvimento de* $(x + a)^n$, *ordenado de modo usual, temos*

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^k x^{n-k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} a^k x^{n-k}$$

e

$$T_k = \binom{n}{k-1} a^{k-1} x^{n-k+1}.$$

Daí resulta

$$T_{k+1} = \frac{n-k+1}{k}\frac{a}{x}T_k.$$

Portanto, para obtermos T_{k+1} a partir de T_k basta aumentar o expoente de a em uma unidade, diminuir o expoente de x em uma unidade e multiplicar o coeficiente de T_k pelo expoente de x em T_k e dividir o produto pelo expoente de a em T_k aumentado de uma unidade. Isso nos permite obter rapidamente o desenvolvimento de binômios.

Por exemplo,

$$(x + a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

Os coeficientes foram obtidos da seguinte forma:

$$1, \frac{1.5}{0+1} = 5; \frac{5.4}{1+1} = 10; \frac{10.3}{2+1} = 10; \frac{10.2}{3+1} = 5; \frac{5.1}{4+1} = 1 \qquad \blacksquare$$

Capítulo 3

Séries Formais

Um polinômio é uma expressão da forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

e uma série formal é uma expressão do tipo:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

Para melhor entendimento, verifiquemos algumas definições:

Definição 3.0.1 *Séries de potências são séries do tipo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

e, se $x_0 = 0$, *temos,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

sendo a_n *um números real e* x *uma variável.*

Pela definição acima, qualquer polinômio em x é uma série de potências. Por exemplo: o polinômio $5x + 8x^3 + 9x^5$ pode ser escrito como $0 + 5x + 0x^2 + 8x^3 + 0x^4$ $+ 9x^5 + 0x^6 + ...$

Definição 3.0.2 *Sejam* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$ *e* $b_0 + b_1x + b_2x^2 + ...$ *séries de potências, então a soma das duas é a série de potências na qual o coeficiente de* x^r *é* $a_r + b_r$, *e o* *produto das duas é a série de potências na qual o coeficiente de x^r é $a_0b_r + a_1b_{r-1}$ $+ a_2b_{r-2} + ... + a_rb_0$.*

Definição 3.0.3 *Se, para $r = 0, 1, 2, ...$, a_r é o número de soluções de um problema de combinatória, a função geradora ordinária para este problema é a série de potências*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

ou, de maneira geral, dada uma seqüência (a_r), a função geradora ordinária para esta seqüência é definida como a série de potências acima.

Somas e produtos são definidos conforme a definição 3.0.2. Assim, por exemplo:

$$(1-3x+3^2x^2-3^3x^3+\ldots)(1+3x) = 1-3x+3^2x^2-3^3x^3+\ldots+3x-3^2x^2+3^3x^3-\ldots = 1$$

de modo que podemos escrever

$$1 - 3x + 3^2x^2 - 3^3x^3 + \ldots = \frac{1}{(1+3x)}.$$

De maneira geral, podemos "compactar" uma série formal $1 + ax + a^2x^2 + \ldots$ na forma $\frac{1}{(1-ax)}$, que certamente ocupa bem menos espaço que uma série infinita. Vejamos uma primeira aplicação das séries formais. Vamos determinar uma "fórmula fechada" para a seqüência definida por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ para $n \geq 0$. A idéia é considerar a série formal $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ e tentar "compactá-la" e depois "descompactá-la". Para alcançar o primeiro objetivo, observe que:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1x + \ \ a_2x^2 + \ \ a_3x^3 + \ldots \\
-5xf(x) &= \qquad - 5a_0x - 5a_1x^2 - 5a_2x^3 - \ldots \\
6x^2f(x) &= \qquad\qquad\quad + 6a_0x^2 + 6a_1x^3 + \ldots
\end{aligned}$$

Somando as equações acima, os coeficientes de x^n, $n \geq 2$ anulam-se, por exemplo, o coeficiente de x^2 será $(a_2 - 5a_1 + 6a_0)$. Calculando, veremos que $a_2 = 5$, pois $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ com $n = 0$ é $a_2 = 5a_1 - 6a_0$ e, como $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, temos

$a_2 = 5$. Agora calculando o coeficiente de x^2 chegaremos a 0, e isto acontece, de maneira análoga, com todos os coeficientes de x^n, onde $n \geq 2$. Assim ficamos com

$$(1 - 5x + 6x^2)f(x) = a_0 + (a_1 - 5a_0)x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{(1 - 5x + 6x^2)}$$

Agora, como descompactar $f(x)$? Observemos que $1 - 5x + 6x^2 = (1 - 2x)(1 - 3x)$ e é razoável procurar constantes a e b tais que:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{1-2x} + \frac{b}{1-3x} &= \frac{x}{1-5x+6x^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{(a+b) - (3a+2b)x}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{x}{1-5x+6x^2} \\
&\Leftrightarrow a + b = 0 \ \ e \ \ 3a + 2b = -1 \\
&\Leftrightarrow a = -1 \ \ e \ \ b = 1
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{1-5x+6x^2} \\
&= \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1-2x} \\
&= (1 + 3x + 3^2x^2 + 3^3x^3 + \ldots) - (1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + \ldots) \\
&= (3^0 - 2^0) + (3^1 - 2^1)x + (3^2 - 2^2)x^2 + (3^3 - 2^3)x^3 + \ldots
\end{aligned}$$

Assim, o coeficiente de x^n em $f(x)$, pela definição de $f(x)$ é $a_n = 3^n - 2^n$.

Essa é a sequência a_n tal que $a_{n+1} = a_{n+1} - 6a_n$.

Outra aplicação das séries formais é ajudar a contar. Neste contexto, as séries formais recebem o nome de funções geradoras, o que veremos no capítulo a seguir.

Capítulo 4

Funções Geradoras

Para tratarmos seqüências de números, uma maneira poderosa é manipular séries que "geram" tais seqüências. Exploraremos aqui essas funções geradoras em profundidade e veremos quão poderosas e surpreendentes elas são.

Esta técnica teve origem nos trabalhos de Abraham De Moivre($1667-1754$), tendo sido aplicada extensivamente por Leonhard Euler ($1707-1783$) em problemas de teoria aditiva de números, especificamente na teoria de partições. Também foi utilizado por Pierre Simon Laplace ($1749-1827$) no estudo de probabilidade, e por Nikolaus Bernoulli ($1687-1759$) no estudo de permutações caóticas[1]. De Moivre utilizou pela primeira vez as funções geradoras para mostrar como achar diretamente os números de Fibonacci, sem ser necessário calcular todos eles, até o que desejamos.

Definição 4.0.4 *A função geradora de uma seqüência* $\{a_n\}$ $n \geq 0$ *de números reais ou complexos é uma função* $A(x)$ *definida pela série de potências:*

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

As funções geradoras são bastante importantes, porém suficientemente novas para muitos de nós. Então começaremos com uma breve explicação e com uma abordagem

[1]Uma permutação dos números (1, 2,3, ...,n) é dita caótica (ou desordenamento) quando nenhum número está no seu lugar primitivo.

através de exemplos.

O esquema geral é o seguinte: o expoente de x quantifica alguma propriedade em que estamos interessados, como o comprimento de uma seqüência, o número de conjuntos em uma partição, a quantidade de objetos em um determinado local, etc. Se para cada objeto associarmos tal potência de x e somarmos estas potências, o coeficiente de x^n será, respectivamente, o número de objetos com comprimento n, o número de partições com n conjuntos, o número de locais com n objetos, etc. Por exemplo, considere o problema de determinar o número de maneiras de se escrever n como soma de termos iguais a 1, 2 ou 3, sem levar em conta a ordem dos termos. A idéia aqui não é tentar obter este número para um valor particular de n. Somos mais ousados: vamos obter todos estes números de uma só vez. Para isto, escrevemos a função geradora $f(x)$, que é a soma das potências x^s para cada soma s:

$$f(x) = x^0 + x^1 + x^{1+1} + x^2 + x^{1+1+1} + x^{1+2} + x^3 + \ldots = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$$

(x^0 corresponde à soma sem nenhum termo), de modo que, por exemplo, o coeficiente de x^3 é o número de maneiras de escrever 3 como soma não ordenada dos termos 1 ou 2 ou 3. Aparentemente, obter $f(x)$ é uma tarefa mais difícil do que a inicial. Mas observe que cada termo de $f(x)$ é o produto de um termo da forma $x^{somasde1's}$, um termo da forma $x^{somasde2's}$ e um termo da forma $x^{somasde3's}$.

Exemplos: $x^{1+2} = x^1.x^2$; $x^{1+1+2+3+3} = x^{1+1}.x^2.x^{3+3}$

Logo:

$$f(x) = (x^0 + x^1 + x^{1+1} + x^{1+1+1} + \ldots)(x^0 + x^2 + x^{2+2} + x^{2+2+2} + \ldots)(x^0 + x^3 + x^{3+3} + x^{3+3+3} + \ldots)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (\frac{1}{1-x})(\frac{1}{1-x^2})(\frac{1}{1-x^3})$$

Muitas vezes, as funções geradoras são utilizadas não para calcular o número exato de maneiras de se fazer isto ou aquilo, mas para mostrar que duas quantidades são iguais.

Vamos demonstrar agora que o número de partições (não ordenadas) de n em naturais distintos é igual ao número de partições (também não ordenadas) de n em naturais ímpares. Por exemplo, 7 = 5 + 1 + 1 = 3 + 3 + 1 = 3 +1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 e 7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3 = 4 + 2 + 1.

Teorema 4.0.1 *O número de partições de* n *em naturais distintos é igual ao número de partições de* n *em naturais ímpares.*

Dem.: O número de partições em naturais distintos é:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots$$

enquanto que o número de partições em naturais ímpares é dado por:

$$(1+x+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\dots)(1+x^3+x^{3+3}+x^{3+3+3}+\dots)(1+x^5+x^{5+5}+x^{5+5+5}+\dots)\dots$$

$$= (1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^3+x^6+x^9+\dots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\dots)\dots$$

$$= (\frac{1}{1-x})(\frac{1}{1-x^3})(\frac{1}{1-x^5})\dots$$

Observe que:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots = (\frac{1}{1-x})(\frac{1}{1-x^3})(\frac{1}{1-x^5})\dots$$

De fato, como

$$\frac{1-x^2}{1-x} = 1+x, \frac{1-x^4}{1-x^2} = 1+x^2, \frac{1-x^6}{1-x^3} = 1+x^3, \frac{1-x^8}{1-x^4} = 1+x^4, \dots$$

teremos que:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots = (\frac{1-x^2}{1-x}).(\frac{1-x^4}{1-x^2}).(\frac{1-x^6}{1-x^3}).(\frac{1-x^8}{1-x^4}).\dots$$

e, simplificando-se dividindo os numeradores da forma $1-x^{2k}$ por denominadores correspondentes resulta que,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots}. \qquad \blacksquare$$

Com o objetivo de facilitar a compreensão das funções geradoras exploraremos a seguir alguns exemplos.

Exemplo 4.0.8 *De quantas maneiras podemos escolher 7 pessoas de um grupo de 10 pessoas?*

Este é um problema bastante simples que podemos resolver por combinação simples, ou seja:

$$C_{10}^{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10.9.8}{3.2.1} = 120$$

Mas também podemos usar funções geradoras, "é claro que estaríamos dando um tiro de canhão para matar uma formiguinha", ou seja:
Tomamos para polinômio "controlador" da presença de uma pessoa $(1+x)$ e fazemos a expansão de $(1+x)^{10}$ e assim temos:

$$(1+x)^{10} = 1+10x+45x^2+120x^3+210x^4+252x^5+210x^6+120x^7+45x^8+10x^9+x^{10}$$

A resposta neste caso é o coeficiente x^7 que é igual a 120, mas podemos observar que com o uso de função geradora encontramos muito mais do que procuramos, pois a expansão de $(1+x)^{10}$ é a função geradora ordinária para o número de maneiras de escolhermos k pessoas dentro do grupo de 10 pessoas, ou seja, nos fornece todas as maneiras de escolher qualquer número de pessoas dentro do grupo dado. Podemos observar que até mesmo a possibilidade de não escolhermos nenhuma pessoa está contemplada, pois temos somente uma maneira de escolhermos nenhuma pessoa, que é o coeficiente de x^0.

Como já vimos o coeficiente de x^k é dado por $\binom{10}{k}$, que aparece expansão binomial

$$(1+x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^k$$

Exemplo 4.0.9 *De quantos modos podemos representar o inteiro* 9 *como somas não ordenadas de inteiros distintos pertencentes ao conjunto* $A = \{1,2,3,4,5\}$ *?*

Pelo método de tentativas, fica fácil e rápido verificar que temos 3 modos de obter 9, pois o mesmo pode ser escrito, de acordo com as restrições do problema, conforme abaixo:

$$5 + 4$$

$$5 + 3 + 1$$

$$4 + 3 + 2$$

Já por funções geradoras, fazemos a expansão do produto dos polinômios abaixo:

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5) &= 1 + x + x^2 + 2x^3 \\ &+2x^4 + 3x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 3x^9 \\ &+3x^{10} + 2x^{11} + 2x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15}\end{aligned} \tag{4.1}$$

Com a expansão do produto dos polinômios acima, podemos observar que o coeficiente de x^9 é igual a 3, que é exatamente o número de modos de se obter 9 com os elementos do conjunto A e as restrições estabelecidas. Na expansão, observamos também que o maior expoente é 15, que é o maior número que pode ser escrito com as restrições dadas, e que o coeficiente de x^{15} é igual a 1, pois neste caso, só temos uma maneira de obter 15. O que pretendemos aqui é mostrar que nessa expansão o coeficiente de x^i é o número de maneiras de representarmos i como soma de elementos distintos de A.

Como isto pode ser visto?

Interpretamos cada um dos monômios $(1 + x^i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ como um polinômio controlador da presença do elemento $i \in A$. Neste polinômio $1 + x^i$ o termo 1 é interpretado como não escolher i e o termo x^i como a escolha de uma cópia de i. Isto nos explica o aparecimento de 3 como coeficiente de x^9 uma vez que:

$$x^9 = x^5x^4 = x^5x^3x^1 = x^4x^3x^2$$

Dizemos que a expansão do produto dos polinômios (4.1) é a função geradora para o número de maneiras de expressar um inteiro positivo como soma de elementos distintos do conjunto A e devemos observar que esta função nos fornece não apenas o número de maneiras de se expressar o número pedido no problema mas de todos os números de 0 a 15.

Quando falamos em séries, normalmente queremos saber se convergem e para onde convergem. A convergência em geral não importa aqui, pois quase todas as operações que fazemos nas funções geradoras podem ser interpretadas como operações em séries formais e tais operações são válidas mesmo quando as séries não convergem.

Ao concluirmos o capítulo 1 deixamos um problema em aberto, o qual repetiremos aqui e veremos o quão simples é sua solução.

Exemplo 4.0.10 *Encontrar o número de soluções inteiras da equação* $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, *em que a variável* x_1 *pertence ao conjunto* $\{3, 4, 5\}$, *a variável* x_2 *pertence ao conjunto* $\{2, 4, 6\}$ *e a variável* x_3 *pertence ao conjunto* $\{6, 7, 8\}$.

Definimos três polinômios que chamaremos de controladores, um para cada variável x_i, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p_1 &= x^3 + x^4 + x^5 \\ p_2 &= x^2 + x^4 + x^6 \\ p_3 &= x^6 + x^7 + x^8 \end{aligned}$$

Os expoentes de x em cada termo de cada polinômio p_i são os elementos do conjunto ao qual x_i pertence. Como queremos que a soma de três números, um de cada conjunto, seja 15 e os elementos de cada conjunto são os expoentes dos polinômios acima, fazemos o produto $p(x)$ destes três polinômios:

$$\begin{aligned} p(x) &= p_1 p_2 p_3 \\ &= (x^3 + x^4 + x^5)(x^2 + x^4 + x^6)(x^6 + x^7 + x^8) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Agora, fazendo a expansão do produto $p_1 p_2 p_3$, teremos assim nossa função geradora e a resposta para o nosso problema será o coeficiente de x^{15}. Fazendo o cálculo deste produto, chegaremos a :

$$x^{11} + 2x^{12} + 4x^{13} + x^{14} + 5x^{15} + 4x^{16} + 4x^{17} + 2x^{18} + x^{19}$$

Portanto, a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ possui 5 soluções inteiras com as restrições dadas. Um termo como $x^3x^4x^8$ nos fornece a solução $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ e $x_3 = 8$. O termo $x^5x^2x^8$ nos fornece $x_1 = 5$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 8$.

Podemos perceber que cada solução deste problema é igual a exatamente cada maneira de termos x^{15} na expansão do produto dos polinômios em questão. Verificamos também que a função geradora obtida nos fornece, a resposta para outros problemas, pois ao analisarmos os coeficientes dos termos do polinômio obtido saberemos o número de soluções, com as restrições dadas, para a equação $x_1+x_2+x_3 = i$ com i pertencendo ao conjunto $\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$. Por exemplo o número de soluções de $x_1 + x_2 + x_3 = 18$ é igual a 2.

Exemplo 4.0.11 *Qual é o coeficiente do termo x^{21} em $(1 + x^5 + x^8)^5$?*

Devemos observar que este exemplo é uma variação do anterior, pois $(1 + x^5 + x^8)^5$ é a função geradora associada ao problema de achar quantas soluções tem $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$, sendo que $x_i \in \{0, 5, 8\}$.

Resolveremos este problema de duas formas, sendo a primeira por combinação simples, ou seja, só podemos obter 21 como soma de cincos e oitos de uma única maneira, isto é, $5 + 8 + 8 = 21$. Como o polinômio está elevado a cinco, temos cinco termos. Portanto, nestes cinco devemos ter dois oitos, o que pode ser feito de C_5^2, e um cinco que pode ser feito de C_3^1, pois em dois já foram escolhidos os oitos. Assim, o coeficiente de x^{21} é igual a $C_5^2.C_3^1 = 30$.

Agora, para obtermos o resultado por funções geradoras, basta fazermos a expansão de $(1 + x^5 + x^8)^5$ e verificar o coeficiente de x^{21}.

$$\begin{aligned}(1 + x^5 + x^8)^5 &= 1 + 5x^5 + 5x^8 + 10x^{10} + 20x^{13} + 10x^{15}\\ &\quad +10x^{16} + 30x^{18} + 5x^{20} + 30x^{21} + 20x^{23}\\ &\quad +10x^{24} + x^{25} + 30x^{26} + 5x^{28} + 20x^{29}\\ &\quad +10x^{31} + 5x^{32} + 10x^{34} + 5x^{37} + x^{40}\end{aligned}$$

No exemplo a seguir, lidaremos com repetição, pois ainda não trabalhamos com a possibilidade de repetição, mas veremos que é fácil, basta manipular os polinômios controladores.

Exemplo 4.0.12 *Temos uma caixa contendo cinco bolas, sendo duas azuis, uma branca, uma cinza e uma preta. Representando-as pelas suas letras iniciais, por a, b, c e p, quantas são as possibilidades de tirarmos uma ou mais bolas desta caixa, sem nos importarmos com a ordem?*

Primeiro, analisaremos quantas formas ou maneiras há de tirar uma bola: são 4, pois ou tiramos uma bola azul a, ou uma bola branca b, ou uma bola cinza c, ou ainda uma bola preta p.

Agora verificamos que temos 7 maneiras de tirar duas bolas, ou seja, aa, ab, ac, ap bc, bp, cp;.
temos 7 maneiras de tirar três bolas: aab, aac, aap, abc, abp, acp, bcp;
temos 4 maneiras de tirar quatro bolas: $aabc$, $aabp$, $aacp$, $abcp$;
e finalmente temos apenas uma maneira de tirarmos cinco bolas: $aabcp$.

Para resolvermos por funções geradoras associamos o polinômio $1 + ax + a^2x^2$ às bolas de cor azul; e às de cor branca, cinza e preta associamos, respectivamente, os polinômios $1 + bx$, $1 + cx$ e $1 + px$.

Vamos interpretar o polinômio $1 + ax + a^2x^2$ de tal forma que; o termo ax significa que "uma" bola de cor azul foi escolhida; o termo a^2x^2, significa que "duas" bolas azuis foram escolhidas e o termo constante 1 $(= x^0)$, que nenhuma bola azul foi escolhida. Do mesmo modo devemos interpretar os polinômios $1+bx$, $1+cx$ e $1+px$. Cada um destes polinômios controladores está relacionado à retirada de bolas da cor correspondente. Fazemos, então o produto destes quatro polinômios:

$$\begin{aligned}
(1 + ax + a^2x^2)(1 + bx)(1 + cx)(1 + px) \quad &= \quad 1 + (a + b + c + p)x \\
&+(a^2 + ab + ac + ap + bc + bp + cp)x^2 \\
&+(a^2b + a^2c + a^2p + abc + abp + acp + bcp)x^3 \\
&+(a^2bc + a^2bp + a^2cp + abcp)x^4 \\
&+a^2bcpx^5
\end{aligned}$$

Esta expansão é a nossa função geradora e ela nos fornece a lista de possibilidades completa das possíveis maneiras de retirarmos as bolas da caixa. Ao verificarmos, por exemplo, o coeficiente de x^4, $(a^2bc+a^2bp+a^2cp+abcp)$, veremos que temos 4 formas de retirarmos 4 bolas, pois cada parcela da adição do coeficiente é uma forma de retirarmos 4 bolas. Logo, a parcela a^2bc significa tirar 2 bolas azuis, uma branca e uma cinza e assim ocorre com as demais parcelas. Basta observar a que cor a letra representa. O termo 1 na expansão significa que só temos uma maneira de não escolhermos nenhuma bola. Não devemos esquecer que o expoente de x representa o número de bolas retiradas e o coeficiente, a lista destas possibilidades.

Se quiséssemos somente a quantidade de diferentes maneiras de escolhermos i bolas, onde $0 \leq i \leq 5$ sem nos preocuparmos com a cor, bastaria tomarmos, no produto dos três polinômios, $a = b = c = p = 1$, obtendo assim a expansão abaixo:

$$(1+x+x^2)(1+x)(1+x)(1+x) = (1+x+x^2)(1+x)^3 = x^5+4x^4+7x^3+7x^2+4x+1.$$

Dizemos que o polinômio

$$x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 4x + 1$$

é a função geradora para o problema apresentado, e que seus coeficientes 1, 4, 7, 7, 4, 1 nos fornecem as respostas para este problema, ou seja, existem 1 maneira de retirarmos cinco bolas, 4 de retirarmos 4 bolas, 7 de retirarmos 3 bolas, 7 de retirarmos 2 bolas, 4 de retirarmos 1 bola e 1 maneira de retirarmos bola nenhuma.

Teorema 4.0.2 *Sendo $f(x)$ e $g(x)$ as funções geradoras das seqüências (a_r) e (b_r), respectivamente, temos:*

(i) *$Af(x) + Bg(x)$ é a função geradora para a seqüência $(Aa_r + Bb_r)$.*

(ii) $f(x)g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (a_k b_{n-k}) \right) x^n.$

(iii) *A função geradora para a seqüência $a_r = a_0 + a_1 + \cdots + a_r)$ é igual a $(1 + x$ $+ x^2 + \cdots).f(x)$.*

(iv) *A função geradora para* (ra_r) *é igual a* $xf'(x)$*, onde* $f'(x)$ *é a derivada de* f *com respeito a* x.

(v) $\displaystyle\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Dem.: (i) Sejam $f(x)$ e $g(x)$ as funções geradoras de (a_r) e (b_r), respectivamente, então:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \\ g(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} Af(x) + Bg(x) &= Aa_0 + Aa_1 x + Aa_2 x^2 + \cdots + Bb_0 + Bb_1 x + Bb_2 x^2 + \cdots \\ &= (Aa_0 + Bb_0) + (Aa_1 + Bb_1)x + (Aa_2 + Bb_2)x^2 + \cdots , \end{aligned}$$

e portanto,

$Af(x) + Bg(x)$ é a função geradora para a seqüência $(Aa_r + Bb_r)$. ■

Dem.: (ii) Sejam $f(x)$ e $g(x)$ as funções geradoras de (a_r) e (b_r), respectivamente, então:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \\ g(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots \end{aligned}$$

logo:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots) \\ &= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 \\ &\quad + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (a_k b_{n-k}) \right) x^n. \quad ■ \end{aligned}$$

Dem.: (iii) Para demonstrarmos (iii), tomamos $b_r = 1$ em (ii), ou seja, $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ e assim obtemos a função geradora para

$(a_0 + a_1 + \cdots + a_r)$. $\blacksquare$

Dem.: (iv) Seja $f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ a função geradora da seqüência a_r, então a função geradora de ra_r é

$$rf(x) = r\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r.$$

Assim sendo, temos:

$$f'(x) = \sum_{r=0}^{\infty} r\ a_r\ x^{r-1}$$

$$xf'(x) = \sum_{r=0}^{\infty} x\ ra_r\ x^{r-1} \Rightarrow xf'(x) = \sum_{r=0}^{\infty} r\ a_r\ x^r$$

Portanto, a função geradora para ra_r é:

$$xf'(x) = r\sum_{r=0}^{\infty} a_n x^n = rf(x). \qquad \blacksquare$$

Dem.: (v) Seja $f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_n x^n$, então pela definição de integral temos:

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \qquad \blacksquare$$

Nos próximos exemplos aplicaremos os resultados do Teorema 4.0.2.

Exemplo 4.0.13 *Encontrar a função geradora para $a_r = r$.*

Já sabemos que a função geradora para a seqüência $(1, 1, 1, \ldots)$ é

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^r + \cdots .$$

Pelo item (iv) do Teorema 4.02, concluímos que a função geradora de (ra_r) é $xf'(x)$. Observemos que:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + rx^{r-1} + \cdots ,$$

logo,

$$xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + rx^r + \cdots$$

possui r como coeficiente de x^r e, portanto, é a função geradora para a seqüência $(a_r = r)$.

Exemplo 4.0.14 *Encontrar a função geradora para $a_r = r^2$.*

Pelo exemplo anterior temos que

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + rx^r + \cdots .$$

Para que o coeficiente de x^r seja r^2, derivamos a função acima e multiplicamos por x, isto é,

$$\begin{aligned} x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' &= x(1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \cdots + r^2x^{r-1} + \cdots) \\ &= 1^2x^1 + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \cdots + r^2x^r + \cdots . \end{aligned}$$

Como

$$x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3},$$

temos que a função geradora para a seqüência $a_r = r^2$ é $x(xf'(x))'$, onde

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)}.$$

Exemplo 4.0.15 *Encontrar a função geradora para $a_r = 2r + 3r^2$.*

Já sabemos que a função geradora para $a_r = r$ é

$$\frac{x}{(1-x)^2}$$

e a função geradora para $a_r = r^2$ é

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Logo, pelo Teorema 4.0.2, a função geradora para $a_r = 2r + 3r^2$ é dada por

$$2\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) + 3\left(\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\right).$$

4.1 O Teorema Binomial

Este teorema generaliza a expansão binomial $(1+x)^n$.

Assim, dada a função $f(x) = (1+x)^u$, onde $u \in \mathbb{R}$, e fazendo sua expansão em série de Taylor, em torno de zero, podemos provar que para $|x| < 1$ temos:

Teorema 4.1.1 *Teorema Binomial*

$$(1+x)^u = \binom{u}{0}x^0 + \binom{u}{1}x^1 + \binom{u}{2}x^2 + \binom{u}{3}x^3 + \ldots + \binom{u}{r}x^r + \ldots$$

$$(1+x)^u = 1 + ux + \frac{u(u-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{u(u-1)\cdots(u-r+1)}{r!}x^r + \cdots .$$

E, se designarmos por

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \dfrac{u(u-1)\cdots(u-r+1)}{r!}, & se \quad r > 0, \\ 1, & se \quad r = 0, \end{cases}$$

teremos

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r. \tag{4.3}$$

O número $\binom{u}{r}$ definido acima é chamado de *coeficiente binomial generalizado.* Caso u seja igual ao inteiro positivo n, $\binom{u}{r}$ será o familiar coeficiente binomial, e como $\binom{n}{r}$ é zero para $r > n$, a expansão acima se reduzirá à expansão binomial usual.

Não devemos esquecer que (4.3) acontece somente para $|x| < 1$, mas como aqui não estamos preocupados com questões de convergência, pois não necessitamos atribuir valores numéricos à variável x, com este resultado podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 4.1.2 *O coeficiente de x^p na expansão de $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^n$ é igual a* $\binom{n+p-1}{p}$.

Dem.:

Aplicando o teorema 4.1.1, uma vez que

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n} e$$

substituindo, em (4.3), x por $-x$ e u por $-n$ temos:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r}(-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r}(-1)^r x^r.$$

Utilizando a definição do coeficiente binomial generalizado temos que o coeficiente de x^p é igual a:

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{p}(-1)^p &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-p+1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{(-1)^p(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{p!} \\
&= \frac{(n+p-1)(n+p-2)\cdots(n+1)n(n-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} \\
&= \binom{n+p-1}{p}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\binom{-n}{p}(-1)^p = \binom{n+p-1}{p}. \qquad \blacksquare$$

Este é o número total de maneiras de selecionarmos p objetos dentre n objetos distintos, onde cada objeto pode ser tomado até p vezes.

Exemplo 4.1.1 *Mostrar que a função geradora ordinária para a seqüência*

$$\binom{0}{0}, \binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \binom{6}{3}, \ldots, \binom{2r}{r}$$

é $\quad (1-4x)^{-1/2}$.

Dem.: Substituindo, em (4.3), x por $-4x$ e u por $-1/2$, temos:

$$\begin{aligned}
(1-4x)^{-1/2} &= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{r}(-4x)^r \\
&= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1/2)(-1/2-1)\cdots(-1/2-r+1)}{r!}(-1)^r4^rx^r \\
&= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{4^r(1/2)(3/2)(5/2)\cdots((2r-1)/2)}{r!}x^r \\
&= 1+\sum_{r=1}^{\infty}4^r\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)}{2^r r!}x^r \\
&= 1+\sum_{r=1}^{\infty}2^r\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)r!}{r!r!}x^r \\
&= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1))(2\cdot 4\cdot 6\cdots 2r)}{r!r!}x^r \\
&= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2r)!}{r!r!}x^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{2r}{r}x^r. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 4.1.2 *Usar o teorema binomial para encontrar o coeficiente de x^3 na expansão de $(1+4x)^{1/2}$.*

Substituindo x por $4x$ e u por $1/2$ em (4.3), temos:

$$\begin{aligned}
(1+4x)^{1/2} &= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{r}(4x)^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}4^r\frac{(1/2)(1/2-1)\cdots(1/2-r+1)}{r!}x^r.
\end{aligned}$$

Logo o coeficiente de x^3 é dado por:

$$\frac{4^3(1/2)(1/2-1)(1/2-3+1)}{3!} = 4^3\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{3!} = \frac{4^3\cdot 3}{2^3\cdot 3\cdot 2} = 4$$

Exemplo 4.1.3 *Encontrar uma expressão para o número de maneiras de se distribuir i objetos idênticos em j caixas distintas, com a restrição de que cada caixa contenha pelo menos k objetos e, no máximo, $k+l-1$ objetos.*

Solução:

Como cada caixa deve ter pelo menos k objetos e no máximo $k + l - 1$ objetos, consideremos o polinômio controlador:

$$x^k + x^{k+1} + \cdots + x^{k+l-1}.$$

Como temos j caixas, elevamos esse polinômio a j e o número de maneiras de se distribuir os i objetos conforme o problema será o coeficiente de x^i na expansão abaixo:

$$(x^k + x^{k+1} + \cdots + x^{k+l-1})^j = x^{kj}(1 + x + x^2 + \cdots + x^{l-1})^j.$$

Temos que,

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{l-1} = \frac{1 - x^l}{1 - x},$$

logo,

$$(x^k + x^{k+1} + \cdots + x^{k+l-1})^j = x^{kj} \left(\frac{1 - x^l}{1 - x} \right)^j.$$

Mas queremos o coeficiente de x^i, que é igual ao coeficiente de x^{i-kj} em

$$\left(\frac{1 - x^l}{1 - x} \right)^j.$$

Os exemplos seguintes são casos particulares desse problema.

Exemplo 4.1.4 *De quantas maneiras diferentes podemos escolher 12 latas de cerveja se existem 5 marcas diferentes ?*

Solução:

Como são 5 marcas diferentes, naturalmente teremos repetições e também não há restrições em termos de quantidade de uma determinada marca, sendo assim o polinômio que "controla" o número de latas de uma dada marca é

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{12}.$$

A resposta procurada será o coeficiente de x^{12} na expansão de

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{12})^5 &= \left(\frac{1 - x^{13}}{1 - x} \right)^5 \\ &= (1 - x^{13})^5 (1 - x)^{-5}.\end{aligned}$$

Como

$$(1-x^{13})^5 = 1 - 5x^{13} + 10x^{26} - 10x^{39} + 5x^{52} - x^{65},$$

o coeficiente de x^{12} no produto acima é o coeficiente de x^{12} em $(1-x)^{-5}$. Portanto,

$$(1-x)^{-5} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-5}{r} (-x)^r,$$

o coeficiente de x^{12} é

$$\binom{-5}{12}(-1)^{12} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdots 16}{12!} = 1.820.$$

Exemplo 4.1.5 *Encontrar o número de maneiras nas quais 4 pessoas, cada uma jogando um único dado, podem obter um total de 17.*

Solução:

Podemos aplicar o resultado do problema anterior, se olharmos para as pessoas como sendo as "caixas distintas"($j = 4$) e 17 como os i objetos idênticos. Sabemos que num dado os possíveis resultados variam de 1 a 6. Logo vamos tomar $k = 1$ e $k + l - 1 = 6$, sendo $l = 6$. Agora basta utilizar a expressão do exemplo anterior e achar o coeficiente de $x^{i-kj} = x^{17-1.4} = x^{13}$ na expansão de

$$\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4 = (1-x^6)^4(1-x)^{-4}.$$

como:

$$(1-x^6)^4 = 1 - 4x^6 + 6x^{12} - 4x^{18} + x^{24}$$

e, por coeficientes binomiais,

$$\begin{aligned} (1-x)^{-4} &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-4}{r} (-x)^r \\ &= 1 + \frac{4}{1!}x + \frac{4 \cdot 5}{2!}x^2 + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3!}x^3 + \cdots, \end{aligned}$$

vemos que o coeficiente de x^{13} em

$$(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$$

é

$$\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots 16}{13!} - 4\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots 10}{7!} + 6\frac{4}{1!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{3!} - 4\frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{3!} + 6\frac{4}{1!} = 104.$$

4.2 Funções Geradoras Exponenciais

Algumas vezes uma seqüência (g_n) tem uma função geradora com propriedades bastante complicadas, enquanto a seqüência $(\frac{g_n}{n!})$ tem função geradora bem simples. Portanto é preferível trabalhar com a segunda e depois multiplicar por $n!$. Esta manobra funciona com tanta freqüência que a série de potências

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} g_n \frac{x^n}{n!}$$

recebe o nome especial de "função geradora exponencial" ou "fge" da seqüência $(g_0, g_1, g_2, \ldots)$.

Utilizamos a função geradora exponencial quando resolvemos problemas em que a ordem de retirada dos objetos é relevante, ou seja deve ser considerada.

O polinômio que controla as permutações de um único objeto sem repetições é $(1 + x)$. Nós também já vimos que, para permutações de n objetos distintos sem repetições, o polinômio é $(1 + x)^n$.

Quando repetições são permitidas nas permutações a expansão é imediata. O polinômio para as permutações de p objetos idênticos é $\frac{x^p}{p!}$ (uma vez que existe um único modo de fazê-lo). Desta forma, para as permutações em que são permitidas até p repetições de p objetos idênticos é

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{p!}x^p.$$

Similarmente, para as permutações de $p + q$ objetos com p objetos p de um tipo e q objetos de outro tipo é

$$\frac{x^p}{p!}.\frac{x^q}{q!} = \frac{x^{p+q}}{p!q!}$$

o qual está de acordo com o resultado conhecido, no qual o número de permutações é $\frac{(p+q)!}{p!q!}$. Resulta que o polinômio controlador para as permutações de $p + q$ objetos em que são permitidas até p repetições de p objetos de um tipo , e até q repetições de q objetos de outro tipo, é

$$(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{p!}x^p)(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{q!}x^q).$$

Por exemplo, para as permutações de até 2 objetos de um tipo e de até 3 objetos de outro tipo, temos

$$\begin{aligned}(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!})(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}) &= 1+(\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!})x \\ &+(\frac{1}{1!1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!})x^2+(\frac{1}{1!2!}+\frac{1}{1!2!}+\frac{1}{3!})x^3 \\ &+(\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{2!2!})x^4+(\frac{1}{2!3!})x^5.\end{aligned}$$

Usaremos o exemplo abaixo para nos ajudar a entender e ver as vantagens das fge's.

Exemplo 4.2.1 *Dados três livros diferentes a, b e c, desejamos retirar quatro livros de maneiras diferentes e colocá-los em ordem em uma estante com as seguintes restrições: o livro a pode ser retirado no máximo uma vez, o livro b no máximo três vezes e o livro c no máximo duas vezes.*

Inicialmente chegamos no polinômio controlador que, com base no exemplo 4.0.8, é a expansão abaixo. Assim teremos as possíveis escolhas sem nos preocuparmos com a ordem.

$$\begin{aligned}(1+ax)(1+bx+b^2x^2+b^3x^3)(1+cx+c^2x^2) &= \\ &= 1+(a+b+c)x+(b^2+ab+bc+ac+c^2)x^2 \\ &+(b^3+ab^2+ac^2+b^2c+abc+bc^2)x^3 \\ &+(ab^3+b^3c+ab^2c+b^2c^2+abc^2)x^4 \\ &+(ab^3c+b^3c^2+ab^2c^2)x^5+ab^3c^2x^6.\end{aligned}$$

Com esta expansão temos que o coeficiente de x nos dá todas as possíveis escolhas de um só livro, o coeficiente de x^2 de dois livros, o coeficiente de x^3 de três livros, o de x^4 de quatro livros e, assim, sucessivamente. Ao verificarmos o coeficiente de x^4, vemos que existem 5 maneiras de retirarmos 4 livros com as restrições impostas. Agora, queremos ordenar os 4 livros, isto é, verificando a possibilidade ab^3, ou seja, um livro a e 3 livros b. Temos um caso de permutação com repetição, então podemos ordená-los de $4!/(1!3!)$ maneiras diferentes. O caso b^3c é análogo ao anterior; já os 4 livros, ab^2c, podem ser ordenados de $4!/(1!2!1!)$ maneiras distintas, b^2c^2 de $4!/(2!2!)$, e assim por diante. Na realidade, o que queremos obter como coeficiente de x^4 é:

$$\left(\frac{4!}{1!3!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{1!2!1!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{1!1!2!}\right).$$

Utilizaremos uma manobra alterando os polinômios controladores da presença de cada tipo de livro, ou seja, introduziremos no coeficiente de x^n o fator $1/n!$ e assim teremos:

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{a}{1!}x\right)\left(1+\frac{b}{1!}x+\frac{b^2}{2!}x^2+\frac{b^3}{3!}x^3\right)\left(1+\frac{c}{1!}x+\frac{c^2}{2!}x^2\right)=\\
&\quad = 1+\left(\frac{a}{1!}+\frac{b}{1!}+\frac{c}{1!}\right)x+\left(\frac{b^2}{2!}+\frac{ab}{1!1!}+\frac{bc}{1!1!}+\frac{ac}{1!1!}+\frac{c^2}{2!}\right)x^2\\
&\qquad +\left(\frac{b^3}{3!}+\frac{ab^2}{1!2!}+\frac{ac^2}{1!2!}+\frac{b^2c}{2!1!}+\frac{abc}{1!1!1!}+\frac{bc^2}{1!2!}\right)x^3\\
&\qquad +\left(\frac{ab^3}{1!3!}+\frac{b^3c}{3!1!}+\frac{ab^2c}{1!2!1!}+\frac{b^2c^2}{2!2!}+\frac{abc^2}{1!1!2!}\right)x^4\\
&\qquad +\left(\frac{ab^3c}{1!3!1!}+\frac{b^3c^2}{3!2!}+\frac{ab^2c^2}{1!2!2!}\right)x^5+\frac{ab^3c^2}{1!3!2!}x^6.
\end{aligned}$$

Agora o coeficiente de x^4 é

$$\left(\frac{ab^3}{1!3!}+\frac{b^3c}{3!1!}+\frac{ab^2c}{1!2!1!}+\frac{b^2c^2}{2!2!}+\frac{abc^2}{1!1!2!}\right),$$

mas ainda não é o que queremos. Por isso, multiplicamos e dividimos por $4!$ a expressão acima, obtendo:

$$\left(\frac{4!}{1!3!}ab^3+\frac{4!}{3!1!}b^3c+\frac{4!}{1!2!1!}ab^2c^2+\frac{4!}{2!2!}b^2c^2+\frac{4!}{1!1!2!}abc^2\right)\frac{1}{4!}.$$

Assim, tomando-se $a=b=c=1$, o número procurado será o coeficiente de $x^4/4!$ na expansão de

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{x}{1!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)=\\
&\quad = 1+3\frac{x}{1!}+\left(\frac{2!}{2!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{2!}\right)\frac{x^2}{2!}\\
&\qquad +\left(\frac{3!}{3!}+\frac{3!}{1!2!}+\frac{3!}{1!2!}+\frac{3!}{2!1!}+\frac{3!}{1!1!1!}+\frac{3!}{1!2!}\right)\frac{x^3}{3!}\\
&\qquad +\left(\frac{4!}{1!3!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{1!2!1!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{1!1!2!}\right)\frac{x^4}{4!}\\
&\qquad +\left(\frac{5!}{1!3!1!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{1!2!2!}\right)\frac{x^5}{5!}+\left(\frac{6!}{1!3!2!}\right)\frac{x^6}{6!}.
\end{aligned}$$

Com as restrições do problema podemos retirar 4 livros de 5 maneiras diferentes, ou seja, ac^3, b^3c, ab^2c, abc^2, b^2c^2. O número de maneiras diferentes de ordenar os 4 livros é dado pelo coeficiente de $\frac{x^4}{4!}$ visto na equação acima.

Exemplo 4.2.2 *Achar o número de seqüências quaternárias*[2] *de* r *dígitos onde cada um dos dígitos 0, 1, 2, 3 aparecem pelo menos uma vez.*

Este problema é o mesmo que permutar 4 objetos distintos com a restrição de que 3 dos 4 objetos precisam estar incluidos na permutação. A fge para a permutação do dígito "0"é:

$$(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots,) = e^x$$

A fge para as permutações do dígito "um"(ou 2 ou3)é:

$$(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots,) = e^x - 1$$

Logo, a fge para a permutação dos quatro dígitos é

$$\begin{aligned} e^x(e^x - 1)^3 &= e^x(e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1) \\ &= e^{4x} - 3e^{3x} + 3e^{2x} - e^x \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(4^r - 3.3^r + 3.2^r - 1)}{r!} x^r. \end{aligned}$$

portanto o número de seqüências quaternárias de r dígitos com cada um dos dígitos 0, 1, 2, 3 aparecendo pelo menos 1 vez é

$$4^r - 3.3^r + 3.2^r - 1. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 4.2.3 *Achar o número de seqüências quaternárias de* r *dígitos que contêm um número par de zeros.*

---

[2]Uma seqüência quaternária é uma seqüência cujos termos são formados apenas pelos dígitos $0, 1, 2, 3$.

A função geradora exponencial para permutações do 0 é

$$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2r}}{(2r)!}+\cdots=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}).$$

A função geradora exponencial para as permutações de cada um dos dígitos 1, 2 e 3, é

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots.$$

Portanto, a função geradora exponencial que estamos procurando é:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})e^{3x} &= \frac{1}{2}(e^{4x}+e^{2x})\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(4x)^r}{r!}+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2x)^r}{r!}\right)\\ &= 1+\frac{1}{2}\left(\sum_{r=1}^{\infty}4^r\frac{x^r}{r!}+\sum_{r=1}^{\infty}2^r\frac{x^r}{r!}\right)\\ &= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(4^r+2^r)}{r!}x^r.\end{aligned}$$

Portanto, o número de seqüências quaternárias com um número par de zeros é igual a $\dfrac{(4^r+2^r)}{2}$. ■

Exemplo 4.2.4 *Encontrar o número de seqüências quaternárias de 3 dígitos tal que, seus termos tenham um número par de zeros.*

Solução

Utilizando o resultado do exemplo 4.2.3 chegamos a 36 seqüências quaternárias de 3 dígitos com número par de zeros.

Para confirmar o resultado, podemos resolver utilizando combinatória e permutações, obedecendo às restrições impostas. Chegaremos ao mesmo resultado, o que confirma a solução por funções geradoras exponenciais.

4.3 Aplicações

Esta seção tem por objetivo apresentar alguns exercícios onde aplicamos as funções geradoras.

4.3.1 A torre de Hanoi

Este problema foi inventado por Edouard Lucas em 1883 e consiste em transferir n discos de tamanhos diferentes, com um furo no meio, fixados em um pino em ordem decrescente, para outro pino. Com o auxílio de um terceiro pino devemos movimentar somente um disco de cada vez, nunca havendo um disco maior sobre um disco menor.

A pergunta é: Qual é o menor número de movimentos necessários pra transferir uma torre de n discos?

Solução:

É conveniente que inicialmente verifiquemos para números pequenos, ou seja:
$n = 1$, é necessário apenas um movimento.
$n = 2$, são necessários 3 movimentos.
$n = 3$, 7 movimentos resolvem.

Já é possível fazermos uma análise, pois, com $n = 3$, podemos observar os três primeiros movimentos são os mesmos que no caso $n = 2$. Daí executamos o quarto movimento que é transferir o disco maior para o pino livre. Agora novamente executamos os movimentos de $n = 2$, só que transferindo os dois discos para o pino onde está o disco maior, concluindo a transferência da torre.

Portanto, com $n = 3$, podemos verificar que executamos duas vezes os movimentos de $n = 2$, mais o movimento do disco maior, ou seja, considerando T_3 o número de movimentos necessários para movimentar 3 discos, temos $T_3 = 2T_2 + 1$.
Para n discos, precisamos de T_{n-1} para movimentar os $n-1$ discos, mais o movimento do disco maior e ainda mais T_{n-1} para transferir os $n-1$ discos para cima do disco maior, ou seja: $T_n = 2T_{n-1} + 1$. Mas será que este é o número mínimo de movimentos?

Queremos T_n como o número mínimo de movimentos necessários para transferirmos uma torre de n discos. Sendo assim podemos dizer que $T_n \leq 2T_{n-1} + 1$.

Por outro lado, temos que passar o disco maior da torre inicial para outra posição, e para isto temos que tirar os $n - 1$ discos de cima dele, então precisaremos de no mínimo T_{n-1} movimentos para que isto aconteça. Daí transferimos o disco maior, o que caracteriza mais um movimento. Agora é necessário colocarmos os $n - 1$ discos sobre o maior e novamente precisamos no mínimo $n - 1$ movimentos. Assim, para termos T_n será necessário no mínimo $2T_{n-1} + 1$, ou seja, $T_n \geq 2T_{n-1} + 1$.

Chegamos a conclusão que $T_n \leq 2T_{n-1} + 1$ e $T_n \geq 2T_{n-1} + 1$. Portanto,
$T_n = 2T_{n-1} + 1$. Assim T_n é o número mínimo de movimentos necessários para transferirmos uma torre de n discos.

Esta é a relação de recorrência para solução deste problema, mas ainda podemos encontrar uma fórmula fechada para T_n.
Temos que $T_n = 2T_{n-1} + 1$. Vamos somar 1 em ambos os lados da igualdade, ou seja:
$T_n + 1 = 2T_{n-1} + 1 + 1 \Leftrightarrow T_n + 1 = 2(T_{n-1} + 1)$.

Agora seja $\tau_n = T_n + 1$.
Temos que $\tau_n = 2\tau_{n-1} = 2.2\tau_{n-2} = 2^2.2\tau_{n-3} = \ldots = 2^{n-1}\tau_1$. Devemos observar que $\tau_1 = T_1 + 1 = 1 + 1 = 2$ e portanto,
$\tau_n = 2^{n-1}\tau_1 = 2^{n-1}.2 = 2^n$. Concluindo, temos que $T_n + 1 = \tau_n = 2^n$. Logo,

$$T_n = 2^n - 1.$$

Solução usando funções geradoras

A seqüência Torre de Hanoi pode ser definida como:

$$T_0 = 0,\ T_1 = 1,\ T_2 = 3,\ T_3 = 7,\ \ldots,\ T_n = 2T_{n-1} + 1,\ \textit{onde}\ n \geq 1 \tag{4.4}$$

Pela definição, a função geradora G desta seqüência é dada por:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n$$

Como $T_0 = 0$, temos:

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2T_{n-1} + 1) x^n \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty} T_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= 2x\sum_{n=1}^{\infty} T_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

mas,

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n = G(x)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 = \frac{1}{(1-x)} - 1$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} G(x) &= 2x\sum_{n=1}^{\infty} T_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= 2xG(x) + \frac{1}{1-x} - 1. \end{aligned}$$

Portanto, temos:

$$G(x) = 2xG(x) + \frac{1}{1-x} - 1 \Leftrightarrow G(x) - 2xG(x) = \frac{1}{1-x} - 1$$

e

$$\begin{aligned} (1-2x)G(x) &= \frac{1}{1-x} - 1 \\ &= \frac{x}{(1-x)}. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$G(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-x)},$$

usando frações parciais

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{(1-2x)} - \frac{1}{(1-x)} \\ &= 1 + (2x) + (2x)^2 + (2x)^3 + \ldots - (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) \end{aligned}$$

e pela definição de soma de séries de potências

$$G(x) = (2-1)x + (2^2-1)x^2 + (2^3-1)x^3 + \ldots.$$

Mas $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n$ então, igualando os coeficientes de x^n nós obtemos finalmente:

$$T_n = 2^n - 1. \qquad \blacksquare$$

4.3.2 Números de Catalan

Os números de Catalan[3] aparecem em muitos lugares, como, por exemplo, ao selecionarmos os elementos centrais do triângulo de Pascal e os dividirmos respectivamente por $1, 2, 3, 4, \ldots$, obtemos como resultado uma sucessão de números (1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, ...), que são os números de Catalan.

Ao verificarmos quantos apertos de mãos sem cruzamento são possíveis com n pares de pessoas também obtemos os números de Catalan. Existem outras formas, tais como, árvores binárias com n nós, dividir um polígono de $(n+2)$ lados em n triângulos e etc...

A fórmula para obtermos os números de Catalan (C_n) é:

$$C_n = \frac{C_{2n}^{n}}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Mas, podemos deduzí-la usando "funções geradoras". Faremos isto respondendo ao seguinte problema:

Qual é o número C_n de maneiras de inserir parênteses em um produto

$$Z_0 Z_1 ... Z_n$$

de forma que a ordem de multiplicação é completamente determinada?

Por exemplo, quando $n = 2$, há exatamente 2 maneiras

$$Z_0(Z_1 Z_2)$$

e

$$(Z_0 Z_1) Z_2,$$

então $C_2 = 2$.

Nós temos $C_0 = 1 = C_1$. Para achar a recorrência para C_n, vamos considerar para algum k

$$(Z_0 ... Z_k)(Z_{k+1} ... Z_n)$$

[3]Eugène Catalan (1814-1894) era belga e sua especialidade era Teoria de Números.

O número de maneiras de inserir parenteses no primero termo é C_k, enquanto o número de maneiras de inserir parênteses no segundo termo é C_{n-k-1}. Somando todos os valores de k dados, temos

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + ... + C_{n-1}C_0 \quad (n > 0)$$

Resolvendo esta recorrência, vamos achar a fórmula fechada para os números de Catalan (C_n).

Solução:

A função geradora G da seqüência C_n é dada por:

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + ... + C_{n-1}C_0)x^n \\ &= 1 + x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{n} C_rC_{n-r}\right)x^n. \end{aligned}$$

A última expressão pode ser simplificada usando a definição de produto de série de potências.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r}\right)x^n$$

Portanto temos:

$$G(x) = 1 + xG(x)^2$$

ou

$$xG(x)^2 - G(x) + 1 = 0$$

e, resolvendo a equação quadrática para G(x), teremos:

$$G(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

A expansão da série de potências de G pode agora ser encontrada usando o teorema Binomial, ou seja:

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n, \quad |x| < \frac{1}{4}.$$

O coeficiente de x^0 nesta expansão Binomial é 1. Então nós escolhemos o sinal negativo na fórmula acima para G, obtendo

$$\begin{aligned} G(x) &= -\frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \binom{\frac{1}{2}}{n+1} (-4)^{n+1} x^n \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a solução da recorrência é dada por:

$$\begin{aligned} C_n &= \binom{\frac{1}{2}}{n+1} (-1)^n 2^{2n+1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)...\left(\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1)!} (-1)^n 2^{2n+1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)...\left(\frac{1-2n}{2}\right)}{(n+1)!} (-1)^n 2^{2n+1} \\ &= \frac{1.3.5...(2n-1)}{(n+1)!} 2^n \\ &= \frac{1.2.3.4.5...2n}{(n+1)!2.4...(2n)} 2^n \\ &= \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Portanto, $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$. ■

4.3.3 Números de Fibonacci

Esta seqüência apareceu pela primeira vez no livro "Liber Abacci", de 1202, escrito por Leonardo de Pisa[4] no seguinte problema:

Cálculo do tamanho de uma população de coelhos

Um explorador deixou um casal de coelhos recém nascidos em uma ilha. Sabendo que eles não produzem filhotes até completarem 2 meses de idade e que, a partir daí, cada casal de coelhos produz exatamente um outro casal por mês, pergunta-se: qual será a população de coelhos na ilha após n meses, supondo que não haja mortes e nem migrações?

Solução:

Poderíamos construir uma tabela de forma a facilitar a visualização da evolução da população de coelhos em cada um dos primeiros meses, mas nos limitaremos a informar tais números.

No primeiro e no segundo mês teremos 1 casal; no terceiro mês teremos 2 casais, pois o primeiro casal produziu um outro casal; no quarto mês serão 3 casais; já no quinto mês serão 5 casais; no sexto mês teremos 8 casais; no sétimo mês serão 13 casais; assim segue-se obedecendo uma determinada regra de formação.

Se denotarmos por F_n a população de coelhos no n-ésimo mês e observarmos que para $n = 5$ teremos $F_5 = F_4 + F_3$, $F_6 = F_5 + F_4$ e assim sucessivamente, deduziremos que a regra de formação é dada pela equação

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad para\ n \geq 3.$$

Fato relevante é que a seqüência produzida pela referida equação é exatamente a seqüência de Fibonacci.

Portanto, a população de coelhos na ilha ao longo de n meses, considerando a condição de não haver mortes ou migrações pode ser obtida pela equação acima.

[4]Leonardo de Pisa era conhecido pelo apelido de Fibonacci, que era um diminutivo de fillius Bonacci e que queria provavelmente dizer filho de Bonacci, apelido este atribuído pelo editor dos seus trabalhos no século XIX.

Usando "funções geradoras" para encontrarmos uma fórmula fechada para obtermos a solução deste problema.

Pela definição da seqüência de Fibonacci temos:

$f_1 = 1$, $f_2 = 1$, definimos $f_0 = 0$, e assim $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 2$

Podemos escrever a função geradora para os números de Fibonacci conforme abaixo:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \\ &= 0 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) x^n \end{aligned}$$

Podemos agora então resolver $F(x)$, a fim de achar uma fórmula fechada para a função geradora.

$$\begin{aligned} F(x) &= x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n \\ &= x + x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} \\ &= x + x \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\ &= x + x \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\ &= x + xF(x) + x^2 F(x). \end{aligned}$$

Agora nós temos uma equação em função de $F(x)$. Resolvendo em $F(x)$ teremos a função geradora para a seqüência dos números de Fibonacci.

$$F(x) = x + xF(x) + x^2 F(x)$$

$$\Rightarrow F(x) - xF(x) - x^2 F(x) = x$$

$$\Rightarrow F(x)(1 - x - x^2) = x$$

$$F(x) = \frac{x}{(1 - x - x^2)}.$$

Surpreendentemente, a série de potências de $F(x)$ faz realmente surgir em seus coeficientes toda a seqüência dos números de Fibonacci, ou seja, o coeficiente de x^n nesta série é f_n. Portanto o coeficiente de x^n é a resposta para o nosso problema da população de coelhos.

$$F(x) = \frac{x}{(1 - x - x^2)} = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \ldots.$$

Achando uma fórmula fechada para facilitar o cálculo

Calculando as raízes do polinômio $1 - x - x^2$ obteremos $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e portanto,

$$1 - x - x^2 = \left(1 - \frac{x}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(1 - \frac{x}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right).$$

Logo, podemos reescrever a equação como

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x}{\left(1 - \frac{x}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(1 - \frac{x}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right)} \\ &= \frac{x}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)} \\ &= \frac{A}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{B}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x}. \end{aligned}$$

Para calcular as constantes A e B temos que considerar que:

$$\begin{aligned} \frac{A}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{B}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x} &= \frac{A\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right) + B\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)} \\ &= \frac{\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}A - \frac{1+\sqrt{5}}{2}B\right)x + A + B}{1 - x - x^2}. \end{aligned}$$

Agora para que:

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}A - \frac{1+\sqrt{5}}{2}B\right)x + A + B}{1 - x - x^2} \tag{4.5}$$

é necessário e suficiente que:

$$\begin{cases} -\frac{1-\sqrt{5}}{2}A & - & \frac{1+\sqrt{5}}{2}B & = & 1 \\ A & + & B & = & 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear obtemos

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad e \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Substituindo tais valores de A e B em (4.5) e desenvolvendo os termos obtemos

$$F(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right)$$

Agora é fácil verificar, escrevendo a função geradora com frações parciais, que cada fração possui uma série de potências simples, pois:

$$\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = 1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 x^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} = 1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 x^2 + \ldots$$

Podemos agora achar o coeficiente de x^n na função geradora, ou seja, desenvolvendo os termos obtemos

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 x^2 + \ldots\right)\right) \\ &- \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 x^2 + \ldots\right)\right). \end{aligned}$$

Obtemos assim a fórmula desejada

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad n \geq 0. \qquad \blacksquare$$

Esta fórmula[5] nos dá a seqüência de Fibonacci e por conseguinte a resposta para o problema da população de coelhos para qualquer **n** ($n \geq 0$) meses.

[5]A fórmula fechada para os números de Fibonacci foi, na verdade, primeiramente achada por De Moivre em 1718 usando esta técnica.

Conclusão

As funções geradoras são realmente poderosas e o método de solução de problemas baseado nesta ferramenta é mais abrangente que os demais. Porém, seu êxito depende de uma manipulação habilidosa e é conveniente ter um bom estoque de funções conhecidas.

Durante a elaboração deste trabalho percebi que a maior dificuldade na utilização desta ferramenta está em deduzir a função geradora para a solução de um problema dado, ou seja, após colher os dados, chegar à função que nos dá a solução.

Uma angústia durante todo o período de elaboração deste trabalho foi por não ter encontrado a história sobre as funções geradoras, ou seja, como realmente surgiram e quem as deduziu, pois são geniais. Às vezes, me pergunto: que mágica é essa? E em alguns casos complicados, colhemos os dados, chegamos a um binômio, fazemos sua expansão e o coeficiente de um termo nos dá a resposta. É muito prático, mas quem "inventou" isso? Esta é uma procura que continuará.

Foram várias as dificuldades para realizar esta monografia, mas destaco a bibliografia, onde obtive apenas dois livros na língua pátria. No início, tentei buscar conteúdo na grande Rede (Internet) e não encontrava nada. À medida que estudava mais sobre o assunto, como num passe de mágica, começaram a aparecer páginas na Rede, ou seja, à medida que aprendia mais, ficava mais fácil a busca.

Como ganho complementar, destaco o exercício de leitura e tradução de textos em inglês, pois boa parte do conteúdo estava em inglês, e o aprendizado do software "Latex" que facilitou muito a digitação deste trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] GRAHAM, Ronald L.; KNUTH, Donald E.; PATASHNIK, Oren; *Matemática Concreta - Fundamentos para a Ciência da Computação*, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1995.

[2] LIU, C.L.; *Introduction to Combinatorial Mathematics*, New York: Mcgraw-Hill, 1968.

[3] MORGADO, Augusto Cezar de Oliveira; CARVALHO, João Bosco Pitombeira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. *Análise Combinatória e Probabilidade*, Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[4] SANTOS, J.Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T.C., *Introdução à Análise Combinatória*, Campinas: Editora da Unicamp, 1998.

[5] WILF, Herbert S.. *Generatingfunctionology*, Philadelphia: Academic press, 1992.

[6] http://www.american.edu/academic.depts/cas/mathstat/People/kalman/calc2/genfunc.pdf (15/06/2004)

[7] http://www.dcs.warwick.ac.uk/ msp/CS124/Notes/note33.ps (15/06/2004)

[8] http://www.math.mcgill.ca/ pila/Teaching/363200401/363acrobat/64generatingfunctions.pdf (15/06/2004)

[9] http://www.obm.org.br/eureka/artigos/series.doc (15/06/2004)

[10] http://www.obm.org.br/eureka/artigos/hanoi.pdf (15/06/2004)