

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Computando π por Métodos de Aproximação

Luiz Alberto Radavelli

04 de fevereiro de 2009

$\pi =$

3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781
640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223
172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881
097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432
664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925409171
536436789259036001133053054882046652138414695194151160943305727036575
959195309218611738193261179310511854807446237996274956735188575272489
122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217986
094370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526356082
778577134275778960917363717872146844090122495343014654958537105079227
968925892354201995611212902196086403441815981362977477130996051870721
134999999837297804995105973173281609631859502445945534690830264252230
825334468503526193118817101000313783875288658753320838142061717766914
730359825349042875546873115956286388235378759375195778185778053217122
680661300192787661119590921642019893809525720106548586327886593615338
182796823030195203530185296899577362259941389124972177528347913151557
485724245415069595082953311686172785588907509838175463746493931925506
040092770167113900984882401285836160356370766010471018194295559619894
676783744944825537977472684710404753464620804668425906949129331367702
898915210475216205696602405803815019351125338243003558764024749647326
391419927260426992279678235478163600934172164121992458631503028618297
455570674983850549458858692699569092721079750930295532116534498720275
596023648066549911988183479775356636980742654252786255181841757467289
097777279380008164706001614524919217321721477235014144197356854816136
115735255213347574184946843852332390739414333454776241686251898356948
556209921922218427255025425688767179049460165346680498862723279178608
578438382796797668145410095388378636095068006422512520511739298489608
412848862694560424196528502221066118630674427862203919494504712371378
696095636437191728746776465757396241389086583264599581339047802759009
946576407895126946839835259570982582262052248940772671947826848260147
699090264013639443745530506820349625245174939965143142980919065925093
722169646151570985838741059788595977297549893016175392846813826868386
894277415599185592524595395943104997252468084598727364469584865383673
622262609912460805124388439045124413654976278079771569143599770012961
608944169486855584840635342207222582848864815845602850601684273945...

226746767889525213852254995466672782398645659611635488623057745649803
559363456817432411251507606947945109659609402522887971089314566913686
722874894056010150330861792868092087476091782493858900971490967598526
136554978189312978482168299894872265880485756401427047755513237964145
152374623436454285844479526586782105114135473573952311342716610213596
953623144295248493718711014576540359027993440374200731057853906219838
744780847848968332144571386875194350643021845319104848100537061468067
491927819119793995206141966342875444064374512371819217999839101591956
181467514269123974894090718649423196156794520809514655022523160388193
014209376213785595663893778708303906979207734672218256259966150142150
306803844773454920260541466592520149744285073251866600213243408819071
048633173464965145390579626856100550810665879699816357473638405257145
910289706414011097120628043903975951567715770042033786993600723055876
317635942187312514712053292819182618612586732157919841484882916447060
957527069572209175671167229109816909152801735067127485832228718352093
539657251210835791513698820914442100675103346711031412671113699086585
163983150197016515116851714376576183515565088490998985998238734552833
163550764791853589322618548963213293308985706420467525907091548141654
985946163718027098199430992448895757128289059232332609729971208443357
326548938239119325974636673058360414281388303203824903758985243744170
291327656180937734440307074692112019130203303801976211011004492932151
608424448596376698389522868478312355265821314495768572624334418930396
864262434107732269780280731891544110104468232527162010526522721116603
966655730925471105578537634668206531098965269186205647693125705863566
201855810072936065987648611791045334885034611365768675324944166803962
657978771855608455296541266540853061434443185867697514566140680070023
787765913440171274947042056223053899456131407112700040785473326993908
145466464588079727082668306343285878569830523580893306575740679545716
37752...


Essa monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no curso de matemática – Habilitação bacharelado em matemática e computação científica, e aprovada em sua forma final pela banca examinadora designada pela portaria nº 11 / CCM / 09.



Prof^a Carmem Suzane Comitre Gimenez

Professora da disciplina

Banca examinadora:



Licio Hernanes Bezerra
Orientador



Nereu Estanişlau Burin



Paulo Rafael Bösing

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares I	5
2.1	Funções analíticas reais	5
2.1.1	Análise de convergência	7
2.2	Funções analíticas complexas	14
3	Preliminares II	19
3.1	Espaços de funções	19
3.1.1	Funções seccionalmente contínuas	20
3.1.2	Funções pares, ímpares e a ortogonalidade	21
3.1.3	Wronskiano	23
3.2	Operadores diferenciais	25
3.2.1	$Ly = 0$: Uma abordagem	29
4	Fourier: Segundo método	35
4.1	Motivação	35
4.2	A série de Fourier	37
4.3	Convergência da série de Fourier	39
4.3.1	Coefficientes de Fourier: Três estimativas	42
4.4	Dados numéricos	47
5	Método SH - Parte 1	49
5.1	Cardinal e Newton	49
5.1.1	Seguindo os passos dos mestres	51
5.2	Dados numéricos	58
6	Método SH - Parte 2	61
6.1	Idéia simplificada	61
6.2	Convergência do método	65
6.3	Dados numéricos	66

6.4	SH VS Fourier	67
7	A iteração MAG e a convergência para π	69
7.1	Iteração MAG	70
7.2	O algoritmo MAG	73
7.3	Dados numéricos	82
8	Conclusão	85

Capítulo 1

Introdução

Pi é certamente o mais natural dentre os números transcendentos. Portanto não é surpresa que suas propriedades venham sendo estudadas ao longo dos últimos 250 anos.

Sabemos que pi é um número irracional desde 1771 (Lambert), que pi é um número transcendente desde 1882 com a prova apresentada por Lindermann. Também sabemos que pi não é um número de Liouville¹ (provado por Mahler em 1953).

Conhecemos algumas centenas de milhares de dígitos de pi e que questões concernentes à normalidade e/ou à distribuição destes dígitos são muito comuns em técnicas matemáticas para o cálculo de pi. Vale salientar que as técnicas mais avançadas hoje utilizadas visam apenas aplicações substanciais como, por exemplo, em testes de integridade global de supercomputadores, já que não podemos fazer muita coisa em termos de precisão estendida no cálculo numérico (de pi).

A primeira técnica utilizada para o cálculo de π foi introduzida por Arquimedes de Saracenas (287-212 A.C.) que relacionou as áreas de polígonos com $6 \cdot 2^n$ -lados inscritos e circuncritos a uma circunferência de raio unitário. Com $n = 4$ Arquimedes obteve

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Esta foi a base para todos os cálculos de π nos próximos 1800 anos. *Ludolph* (1540-1610) calculou 34 dígitos de π por este método.

¹Um número β é dito de Liouville se para qualquer número n , existem inteiros p e q tais que

$$0 < \left| \beta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

Liouville provou que todos estes números são números transcendentos.

O desenvolvimento do cálculo (séries, integrais, etc) possibilitou o estudo de técnicas mais avançadas para calcular dígitos de π . Em 1671 com a série de *Gregory*

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

surgiram várias fórmulas que aproximavam π . Em 1706 *John Machin* (1680-1752) provou a igualdade

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

Variações nesta identidade foram estudadas até 1970, concluindo com o cálculo manual de π feito por *William Shanks* que obteve 527 dígitos de π (na verdade seus cálculos chegaram a 707 dígitos, porém um erro ocorrido na 527 casa decimal fez anular todos os dígitos sequêntes).

Com o avanço computacional, *Metropolis*, *Reitwieses* e *von Neumann* em 1949 computaram e analisaram 2037 dígitos de π utilizando-se da fórmula de *Machin* e o micro *ENIAC*. Em 1961, *Daniel Shanks* e *John Wrench* computaram 100.000 dígitos de π no *IBM 7090*. Já em 1973, ainda pela fórmula de *Jonh Machin*, um milhão de dígitos de π foram computados com o micro *CDC 7600*, mérito atribuído a *Jean Guillord* e *M. Bouyer*.

A terceira técnica, baseada na teoria de integrais elípticas, promoveu o mais recente algoritmo para a computação de dígitos de π . Os mais recentes recordes vão, separadamente, para *David Bailey* (1986 - 29 milhões de dígitos) e *Yasumasa Kanada*, que começou pelos estudos de *Richard Brent* e *Eugene Salamin*. Com auxílio do supercomputador *Hitachi S-820*, *Kanada* obteve 201.326.000 dígitos de π em 6 horas.

Para apresentar todas estas técnicas, este trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 2, que servirá também como preliminar para os capítulos 5 e 6, apresento uma forma de aproximação para π que é dada pelo método de aproximação por polinômios de Taylor. Definições, resultados e propriedades sobre convergência deste modelo também serão abordados.

No capítulo 3, apresento preliminares necessárias para o estudo das séries de Fourier. Introduzo um espaço de funções, definindo o produto interno e norma neste espaço. Já no capítulo 4 faço um estudo da série de Fourier num contexto geral, mostrando como são dados os coeficientes desta série e como ela serve para aproximar funções. Como um caso particular, apresento um segundo método de aproximação para π .

No capítulo 5 considero a aproximação $f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$, $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma base de funções linearmente independentes, e utilizo as idéias precedentes (Taylor e Fourier) para encontrar os coeficientes c_n 's que auxiliarão na

aproximação de π . O capítulo 6 pode ser considerado como uma extensão do capítulo 5, já que utiliza a mesma idéia deste. A diferença entre eles é a base de funções utilizada. Aqui apresento outro método para aproximação de π , analisando sua convergência e o comparando com o método de Fourier.

Por fim, no capítulo 7, estudo um dos mais recentes e avançados métodos para o cálculo de pi: o algoritmo MAG. Este algoritmo tem convergência exponencial e essa velocidade de convergência não pode ser apreciada em computadores domésticos, já que a precisão da máquina é atingida logo nas primeiras iterações.

Capítulo 2

Preliminares I

2.1 Funções analíticas reais

Existem vários métodos para se aproximar uma função. Um deles é a aproximação por funções polinomiais. Por exemplo, a idéia da aproximação de *Taylor*¹ é aproximar uma função f por um polinômio p no sentido de que o polinômio e suas derivadas concordem com a função e suas derivadas na vizinhança de um determinado ponto, ou seja,

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad k = 0, 1, \dots, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Portanto, supondo que f seja uma função com derivadas até ordem $n \geq 1$ na vizinhança de um ponto a , e considerando o polinômio

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n \quad (2.2)$$

a tentativa de aproximar a função f por um polinômio p ,

$$f(x) \approx a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n,$$

respeitando-se as condições (2.1), nos dá a seguinte relação entre os coeficientes a_k 's da aproximação com a função a ser aproximada:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Conclusão: Se f é uma função com derivadas até ordem $n \geq 1$ na vizinhança de um ponto a , a aproximação de f por um polinômio p_n é dada por

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x - a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x - a)^n}{n!}$$

¹Brook Taylor, matemático inglês 1685 - 1731.

que pode ser denotada simplesmente por

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}. \quad (2.4)$$

O polinômio $p_n(x)$ dado em (2.2) com constantes dadas por (2.3) é dito o *polinômio aproximador de Taylor*.

No caso particular em que $a = 0$, a aproximação é dita *aproximação de Maclaurin*. Se $n = 1$, $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ - que é o *Teorema do Valor Médio*.

Além disso, se a função f for $n+1$ vezes diferenciável no intervalo $]a, x[$, então o sinal “ \approx ” pode ser substituído pelo sinal de “=” fazendo-se

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad (2.5)$$

em que o termo $R_n(x)$ representa o erro na aproximação da função f pelo polinômio P_n . O erro na aproximação por polinômio de Taylor é dado por uma das seguintes fórmulas:

a) erro de *Lagrange* [18], [23]:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad c \in (a, x);$$

b) erro de *Cauchy* (a representação integral do erro[2]):

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n (x-a), \quad c \in (a, x) \text{ ou}$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt, \quad t \in (a, x).$$

Em geral, se a função f for infinitamente diferenciável no intervalo $[a, x]$, com $R_n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, então segue de (2.5) que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

ou, simplesmente,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

em $[a, x]$.

2.1.1 Análise de convergência

Considere o intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Uma sequência de funções definidas em I é uma sequência do tipo

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \quad (2.6)$$

Dado $x \in I$, a sequência (2.6) pode ou não ter um limite, podendo definir uma função f nos pontos de I em que existe o limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Contudo, suponha que as funções f_n tenham certas propriedades, por exemplo sejam contínuas, diferenciáveis e/ou integráveis. Será que tais propriedades são mantidas na função f ? Dependendo do tipo de convergência a resposta é positiva. Vejamos:

Definição 2.1 (Convergência pontual de funções). *Dizemos que a sequência*

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

converge pontualmente em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ para uma função $f(x)$ se, e somente se, para cada $x \in I$ fixado, para cada $\epsilon > 0$, existe um inteiro N tal que,

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall n > N.$$

Denotamos essa relação por $f_n \rightarrow f$ pontualmente em I .

Definição 2.2 (Convergência uniforme de funções). *Dizemos que a sequência*

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

converge uniformemente em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ para uma função f se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$, existe um inteiro N , independente de x , tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in I, \quad \forall n > N.$$

Denotamos essa relação por $f_n \rightarrow f$ uniformemente em I .

Decorre da própria definição que convergência uniforme implica em convergência pontual. Já a recíproca não é verdadeira. Convergência pontual não é um modelo forte de convergência no que diz respeito à preservação de

propriedades das funções f_n 's, pois não preserva sequer a continuidade. Com efeito, considere a sequência de funções contínuas dadas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \leq 0 \\ 1 & , \text{ se } x \geq \frac{1}{n} \\ nx & , \text{ se } 0 < x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

Essa sequência converge pontualmente para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \leq 0 \\ 1 & , \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

que não é uma função contínua. Por outro lado, a convergência uniforme preserva a continuidade de funções. O resultado que prova esse fato é o que segue.

Teorema 2.1. *Suponha que a sequência de funções $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente para a função $f(x)$ em $I \subseteq \mathbb{R}$. Se cada função $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, for contínua em $I \subseteq \mathbb{R}$, então f é contínua em $I \subseteq \mathbb{R}$.*

Demonstração:

□ Seja ϵ um inteiro positivo qualquer. Pela definição de convergência uniforme, existe N suficientemente grande tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall x \in I, \quad \forall n > N.$$

Suponha, agora, $x_0 \in I$. Uma vez que f_{N+1} é contínua, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall x \in |x - x_0| < \delta.$$

É claro que

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f_{N+1}(x) + f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0) + f_{N+1}(x_0) - f(x_0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)| \\ &\quad + |f_{N+1}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

sempre que $|x - x_0| < \delta$. Isto é, f é contínua para cada ponto $x_0 \in I$, o que conclui a demonstração. ■

Em termos de séries, dizemos que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge se a sucessão das reduzidas, também chamada sequência das somas parciais, converge. Isto é, se existe e é finito o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$, em que $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ é a sequência das somas parciais. Neste caso devemos estudar para que função converge a série das somas parciais $S_n(x)$.

Definição 2.3 (Convergência pontual de séries). *Considere a sequência de funções f_k 's definidas num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge pontualmente para uma função f se, e somente se, para cada $x \in I$ fixado,*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

em que $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ é a sequência das somas parciais.

Definição 2.4 (Convergência uniforme de séries). *Considere a sequência de funções f_k 's definidas num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente para uma função f se, e somente se,*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x), \quad \forall x \in I,$$

em que $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ é a sequência das somas parciais.

A condição suficiente para ocorrer convergência uniforme de uma série pode ser dada pelo teste M de *Weierstrass* (teste M-W), vide demonstração em [1]:

Teorema 2.2 (Teste M-W). *Considere $\sum u_n(x)$ uma série de funções $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, I um intervalo da reta. Suponha que $|u_n(x)| < M_n$ para todo $x \in I$, em que M_n é uma constante positiva. Se $\sum M_n$ converge, então a série $\sum u_n(x)$ converge uniformemente e absolutamente² em I .*

Vale lembrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, conhecida como série geométrica, converge sempre que $|x| < 1$ e seu valor é igual a $x/(1-x)$. Já para a p -série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, caso $p = 1$ então ela não converge, donde diz-se que ela divergente.

Voltando à série de Taylor, nada sabemos, a priori, sobre a convergência da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \quad (2.7)$$

²Diz-se que uma série $\sum u_n(x)$ de funções $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, converge absolutamente se a série $\sum |u_n(x)|$ dos valores absolutos convergir. Não é difícil ver que se uma série converge, então ela convergirá absolutamente.

O que sabemos é que ela é uma série do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, dita uma série de potências numa vizinhança do ponto a . Como pode ser visto em [23] ou em [18], vale o teorema:

Teorema 2.3 (Convergência da série de potências). *Suponha a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. Existem três possibilidades para esta série:*

1. *é convergente somente quando $x = a$;*
2. *é convergente para qualquer valor de x ;*
3. *existe um número real $R > 0$ tal que a série converge sempre que $|x-a| < R$ e diverge sempre que $|x-a| > R$.*

O número R é dito o raio de convergência da série e, por convenção, $R = 0$ para o caso (1) e $R = \infty$ para o caso (2).

Uma vez garantida a convergência da série em (2.7), podemos diferenciá-la e integrá-la termo a termo obtendo novas séries, as quais continuam com o mesmo raio de convergência R , isto é, valem os resultados [1]:

Teorema 2.4 (Diferenciação da série de potências). *Suponha $R > 0$ e que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ tenha raio de convergência R . Defina*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n. \quad (2.8)$$

Então f é diferenciável, tem raio de convergência R e é dada por

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-a)^{n-1}$$

para todo x tal que $|x-a| < R$.

Corolário 2.4.1 (Integração da série de potências). *Considere as hipóteses do teorema (2.4). Então f é integrável, com $\int_a^x f(t)dt$ obtida integrando-se (2.8) termo a termo, tem raio de convergência R e é dada por*

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

para todo x tal que $|x-a| < R$.

Além das definições de convergência estudadas, para funções integráveis temos mais um conceito de convergência: a convergência em média:

Definição 2.5 (Convergência em média). *Dizemos que uma sequência de funções f_1, \dots, f_n integráveis num intervalo $I = [a, b]$ converge em média para uma função f se, e somente se,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx \right)^{1/2} = 0.$$

A convergência em média é diferente da convergência pontual. De fato, para a sequência de funções $f_n(x) = x^n$ em $\mathcal{C}([-1, 1])$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - 0\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-1}^1 x^{2n} \right)^{1/2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{2n+1} \right)^{1/2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja, a sequência x, x^2, x^3, \dots converge em média para zero. Entretanto, se $x = 1$ essa sequência converge para 1, enquanto que se $x = -1$ a sequência sequer converge. Logo x, x^2, x^3, \dots não converge pontualmente. Decorre daí que convergência em média também é diferente de convergência uniforme.

Definição 2.6 (Função Analítica). *Seja I um intervalo aberto da reta e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função infinitamente diferenciável. Dizemos que f é analítica em I se para cada ponto $x_0 \in I$ existir uma vizinhança aberta $V_R \subseteq I$ de x_0 tal que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

para todo ponto $x \in V_R$.

Exemplos. Para a função $f(x) = \text{sen } x$, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$, $f^{(4k)}(x) = \text{sen } x$, $f^{(4k+1)}(x) = \cos x$, $f^{(4k+2)}(x) = -\text{sen } x$ e $f^{(4k+3)}(x) = -\cos x$. Daí,

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(0) &= 0 \\ f^{(4k+1)}(0) &= 1 \\ f^{(4k+2)}(0) &= 0 \\ f^{(4k+3)}(0) &= -1 \end{aligned}$$

e a série de Maclaurin de $f(x) = \text{sen } x$ fica

$$0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2!} - 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot \frac{x^4}{4!} + 1 \cdot \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Como esta série converge para qualquer valor de x ,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Um estudo análogo obtém:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ e} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Ambas com convergência é assegurada para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Considere, agora, a seguinte função:

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , \text{ se } x > 0 \\ 0 & , \text{ se } x \leq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Esse exemplo nos mostra que nem sempre uma função infinitamente diferenciável pode ser representada como uma série de Taylor.

De fato, g é infinitamente diferenciável em $x = 0$. A saber, $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$ para qualquer número natural n . Desta forma, a série de Maclaurin de $g(x)$, dada por

$$0 + 0x + 0\frac{x^2}{2!} + 0\frac{x^3}{3!} + \cdots + 0 + \cdots = 0.$$

Mas g não é identicamente nula numa vizinhança de zero!

Um caso interessante é derivado da série geométrica $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$, a qual é convergente sempre que $x \in (-1, 1)$. A saber,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (2.10)$$

Integrando termo a termo, de 0 a x , obtemos

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

em que a convergência é assegurada sempre que $-1 < x \leq 1$. Seguindo de forma semelhante,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

que é convergente sempre que $|x| \leq 1$. Assim, integrando de 0 a x ,

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

para todo x tal que $|x| \leq 1$.

Fazendo $x = 1$, obtemos a série de *Leibniz*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (2.12)$$

que foi uma das descobertas mais significativas do século XVII. No entanto, usando essa identidade para aproximar o valor de π , percebemos que essa série converge muito lentamente. De fato, cada parcela de (2.12) decai muito lentamente, o que significa que para encontrarmos uma casa decimal correta teremos calcular a soma de várias parcelas (Para calcular π com 3 dígitos corretos são necessárias 1690 parcelas).

Contudo, interessante é perceber que

$$\arctan \frac{x}{k} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)k^{2n+1}}.$$

Portanto, quanto maior o valor de k mais rapidamente decrescerão os termos dessa série. Assim, utilizando-se da relação trigonométrica

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$$

tomemos A e B de modo que $A+B = \frac{\pi}{4}$. Por exemplo, $A = \arctan \frac{1}{2}$ e $B = \arctan \frac{1}{3}$. Então

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$$

donde obtemos outra fórmula para aproximar o valor de π :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}. \quad (2.13)$$

Utilizando (2.11) para calcular os termos à direita em (2.13), percebemos que esta fórmula é um pouco mais eficaz no cálculo de π , já que cada parcela convergirá à zero mais rapidamente. Entretanto, em 1706 o escocês *John Machin* (1680-1752) provou a igualdade

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \quad (2.14)$$

que foi utilizada para a maioria dos cálculos extensos de π [21], [6].

Dados numéricos

Truncando-se a série (2.11) em $n = 9$, (2.12) retorna $\pi \approx 3,25236\dots$ (0 dígito) enquanto que (2.13) e (2.14) retornam, respectivamente, $\pi \approx 3,141592981\dots$ (6 dígitos) e $\pi \approx 3,14159265358984\dots$ (12 dígitos).

2.2 Funções analíticas complexas

Uma função complexa pode ser expressa em componentes real e imaginária. De fato, se $z = x + iy$, então

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

u a componente real, v a componente imaginária. A função conjugada da função complexa f é definida invertendo-se o sinal de sua componente imaginária.

O conjunto de todos os pontos w forma o conjunto imagem de f . Essa correspondência é dita um *mapeamento* ou uma *transformação* de pontos do z -plano para pontos do w -plano. Por exemplo, considere a função $w = f(z) = \bar{z}$. Essa função toma pontos $z = x + iy$ no z -plano e mapeia em pontos $w = x - iy$ no w -plano. Seria a reflexão do caso real.

Observe que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u_0 + iv_0$ se, e somente se,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0$$

Assim, a continuidade de funções complexas fica por conta da continuidade das funções u e v .

O processo de derivação no caso complexo é mais abrangente que no caso real. Para uma função f , considere z_0 um número complexo fixo. Seja $z \in \mathbb{C}$ um ponto pertencente a uma vizinhança de z_0 no domínio de definição de f . A derivada de f em z_0 é definida por

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

se o limite existir. Da existência da derivada $f'(z)$ decorre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.15)$$

Essas equações formam a *condição de Cauchy-Riemann*. Também decorre da existência da derivada $f'(z)$ que

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.16)$$

Definição 2.7 (Função analítica - Caso complexo). *Uma função complexa $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ em que D é um conjunto aberto de \mathbb{C} é dita analítica em $z_0 \in D$ se existir a derivada em z_0 . f é dita analítica em um domínio D se existir $f'(z)$ para todo ponto z de D . Nesse caso, também dizemos que f é regular ou holomórfica.*

Uma vez que a derivada da soma e do produto de funções existe sempre que existir a derivada dessas funções, temos que se f e g são funções analíticas num domínio D , então também serão sua soma e seu produto. O quociente f/g também resulta em uma função analítica em todo o domínio D tal que $g(z) \neq 0$. A composição de funções analíticas também é uma função analítica.

Perceba que f contínua é uma condição necessária para que se tenha uma função f analítica. A condição de Cauchy-Riemann também é uma condição necessária para analiticidade de f . Contudo, para uma função $f = u + iv$, u e v funções reais, a condição suficiente para que se tenha f analítica em (x_0, y_0) é que u , v , $\partial_x u$, $\partial_y u$, $\partial_x v$ e $\partial_y v$ sejam contínuas em (x_0, y_0) e satisfaçam a condição de Cauchy-Riemann [8].

Consideremos um exemplo. Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função complexa com $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \sin y$. u e v definidas dessa forma são analíticas em todos os pontos de $D \in \mathbb{R}^2$. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos y) &= e^x \cos y = \frac{\partial}{\partial y} (e^x \sin y) \quad , \\ \frac{\partial}{\partial y} (e^x \cos y) &= -e^x \sin y = -\frac{\partial}{\partial x} (e^x \sin y) \end{aligned}$$

e vale a condição de Cauchy-Riemann para qualquer ponto de D . Consequentemente, $f'(z)$ existe em qualquer ponto de D e é dada por

$$f'(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = f(z). \quad (2.17)$$

Uma vez visto em cálculo real que a única função que possui derivada igual a ela mesma é a função exponencial, (2.17) sugere a definição:

Definição 2.8 (Exponencial complexa). *Para o número complexo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, defino*

$$e^z = \exp(z) = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

No caso particular em que $x = 0$ temos

$$e^{iy} = (\cos y + i \operatorname{sen} y). \quad (2.18)$$

Note que $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$z = |z| e^{i\theta}, \quad \theta = \operatorname{arg}(z).$$

Pelo teorema de Moivre, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

É interessante perceber que (2.18) fornece um meio de definir as funções reais $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ a partir da exponencial complexa e^{iy} . De fato, qualquer que seja o inteiro k , tem-se

$$\frac{e^{iky} + e^{-iky}}{2} = \frac{\cos(ky) + i \operatorname{sen}(ky) + \cos(ky) - i \operatorname{sen}(ky)}{2} = \cos(ky) \quad (2.19)$$

$$\frac{e^{iky} - e^{-iky}}{2i} = \frac{\cos(ky) + i \operatorname{sen}(ky) - \cos(ky) + i \operatorname{sen}(ky)}{2i} = \operatorname{sen}(ky) \quad (2.20)$$

Além disso, as equações (2.19) e (2.20) garantem que

$$\begin{aligned}
2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) &= (e^{ix} + e^{-ix}) + \cdots + (e^{inx} + e^{-inx}) \\
&= \sum_{k=1}^n e^{ikx} + \sum_{k=1}^n e^{-ikx} \\
&= \frac{e^{ix}(1 - e^{inx})}{1 - e^{ix}} + \frac{e^{-ix}(1 - e^{-inx})}{1 - e^{-ix}} \\
&= -1 + \frac{e^{ix}e^{inx} + e^{inx} - e^{-ix}e^{-inx}}{2 - e^{ix} - e^{-ix}} \\
&= -1 + \frac{(e^{i\frac{x}{2}}e^{inx} - e^{-i\frac{x}{2}}e^{-inx})(-e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}})}{(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})(-e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}})} \\
&= -1 + \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\
&= -1 + \frac{\text{sen}[(n + \frac{1}{2})x]}{\text{sen} \frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\text{sen}[(n + \frac{1}{2})x]}{2 \text{sen} \frac{x}{2}}. \quad (2.21)$$

Capítulo 3

Preliminares II

Neste capítulo apresento conceitos que serão a base para o estudo das séries de Fourier.

3.1 Espaços de funções

As funções polinomiais do tipo $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ são funções contínuas em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$. Outras funções estudadas, também contínuas, são as funções trigonométricas do tipo $\sin kx$, $\cos kx$, $x \sin kx$, $x \cos kx$, $x^2 \sin kx$, $x^2 \cos kx$, etc, em que $k \in \mathbb{R}$.

Seja $I = [a, b]$ um intervalo em \mathbb{R} . Considere o conjunto $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ o conjunto de todas as funções de valores complexos, contínuas, definidas em I . Com as operações usuais de soma de função e produto por escalar $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ é um espaço vetorial.

Definição 3.1 (Produto interno em $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$). *Considere as funções $f, g \in \mathcal{C}(I)$. Defino o produto interno das funções f e g pela função*

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t) \overline{g(t)} dt$$

isto é, pela função que leva o par ordenado (f, g) de funções pertencentes a $\mathcal{C}(I)$ ao número $\langle f, g \rangle \in \mathbb{C}$, em que $\overline{g(t)}$ representa a função conjugada de g .

De fato a função $\langle f, g \rangle$ assim definida constitui um produto interno, já que

1. Para toda função f ,

$$\langle f, f \rangle = \int_I f(t) \overline{f(t)} dt = \int_I |f(t)|^2 dt \geq 0$$

A igualdade é obtida se, e somente se, $f = 0$;

2. Pela comutatividade das funções contínuas,

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t)\overline{g(t)}dt = \int_I \overline{\overline{f(t)}g(t)}dt = \int_I \overline{g(t)\overline{f(t)}}dt = \int_I g(t)\overline{f(t)}dt = \overline{\langle g, f \rangle};$$

3. Da distributividade de funções contínuas,

$$\langle f, g + h \rangle = \int_I f(t)\overline{[g(t) + h(t)]}dt = \int_I f(t)\overline{g(t)}dt + \int_I f(t)\overline{h(t)}dt = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle;$$

4. Para α uma constante qualquer,

$$\langle \alpha f, g \rangle = \int_I \alpha f(t)\overline{g(t)}dt = \alpha \int_I f(t)\overline{g(t)}dt = \alpha \langle f, g \rangle.$$

Definição 3.2 (Norma em $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$). *Considere uma função contínua f definida em $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Defino a norma da função f como sendo a norma induzida pelo produto interno, isto é,*

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Lembremos que uma norma satisfaz

1. $\|f\| \geq 0$. A igualdade ocorre somente se $f = 0$;
2. $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$;
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$;

Além disso, quando a norma é induzida por um produto interno temos que ela goza da seguinte propriedade: $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$ (*desigualdade de Cauchy-Schwarz*).

De agora em diante o espaço das funções consideradas será $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(I)$.

3.1.1 Funções seccionalmente contínuas

Definição 3.3 (Função seccionalmente contínua). *Uma função f é dita seccionalmente contínua em um intervalo $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ se, e somente se, para $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, f for contínua em todo subintervalo (x_i, x_{i+1}) , e existam os limites laterais $\lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x)$. Em palavras, f é seccionalmente contínua num intervalo $[a, b]$ se for contínua a menos de um número finito de pontos, em que as possíveis descontinuidades são de primeira espécie, isto é, são descontinuidades do tipo salto.*

Denotaremos o espaço das funções seccionalmente contínuas em I por $\mathcal{CP}(I)$.

Diretamente da definição, percebemos que se f for uma função contínua, então f é seccionalmente contínua. Isto é, $\mathcal{C}(I) \subset \mathcal{CP}(I)$. Além disso, se f é uma função seccionalmente contínua, então $\int_a^b f(x)dx$ existe e é independente dos valores que f assume nas descontinuidades. De fato, para o intervalo $I = [a, b]$, em que $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx.$$

Definição 3.4 (Função seccionalmente diferenciável). *Uma função f é dita seccionalmente diferenciável em I se, e somente se, f for seccionalmente contínua e diferenciável no interior dos intervalos de continuidade de I , com derivada seccionalmente contínua em I .*

Definição 3.5. *Sejam f e g funções seccionalmente contínuas no intervalo $[a, b]$. f e g são idênticas se diferem em apenas um número finito de pontos.*

A partir dessa definição, podemos tomar o produto interno e a norma em $\mathcal{CP}(I)$ como sendo o produto interno e a norma definidos para o espaço $\mathcal{C}(I)$. Com efeito, considere a função $f(x) = 0$ exceto para um número finito de pontos. Como a integral de uma função independe de seus pontos de descontinuidade (finitos),

$$\langle f(x), f(x) \rangle = \int_I f^2(x) dx = 0$$

com $f(x)$ não identicamente nula. Portanto, \langle , \rangle não definiria um produto interno.

Definição 3.6. *Defino $\mathcal{C}^n(I)$ o espaço constituído de todas as funções n vezes diferenciável, com a n -ésima derivada contínua.*

Claro que se $f \in \mathcal{C}^n(I)$, então $f \in \mathcal{C}(I)$, isto é, $\mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{C}(I)$.

3.1.2 Funções pares, ímpares e a ortogonalidade

Definição 3.7 (Ortogonalidade). *Dadas as funções f e g pertencentes a $\mathcal{C}(I)$, $f \neq g$, diremos que f e g são mutuamente ortogonais se, e somente se, ocorrer que*

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t)g(t)dt = 0.$$

Por exemplo, considere as funções contínuas $f(x) = x$ e $g(x) = \cos(kx)$, $k \in \mathbb{Z}$, para o intervalo da forma $I = [-L, L]$.

$$\begin{aligned}
 \langle f, g \rangle &= \int_{-L}^L x \cos(kx) dx \\
 &= \left\{ \frac{1}{k} \cdot x \operatorname{sen}(kx) \right\}_{-L}^L - \int_{-L}^L \operatorname{sen}(kx) dx \\
 &= \left\{ \frac{1}{k} [L \operatorname{sen}(Lk) + L \operatorname{sen}(-Lk)] + \frac{1}{k} \cdot \cos(kx) \right\}_{-L}^L \\
 &= \frac{1}{k} [L \operatorname{sen}(Lk) - L \operatorname{sen}(Lk)] + \frac{1}{k} [\cos(Lk) - \cos(-Lk)] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Já que $\operatorname{sen}(-Lk) = -\operatorname{sen}(Lk)$ e $\cos(-Lk) = \cos(Lk)$, $\forall k$. Assim, $f(x) = x$ e $g(x) = \cos(kx)$ são funções ortogonais.

Definição 3.8 (Funções pares e ímpares). *Uma função f , definida no intervalo I , é dita par se*

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in I, \quad (3.1)$$

e ímpar se

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in I. \quad (3.2)$$

Caso não se verifique nem (3.1) nem (3.2), dizemos que a função f é nem par, nem ímpar ou, simplesmente, sem paridade.

Decorre da definição que o gráfico de funções pares são simétricos em relação ao eixo y , enquanto que o gráfico de funções ímpares é simétrico em relação ao ponto $(0, 0)$.

Como exemplo de funções ímpares temos, principalmente, as funções polinomiais do tipo $a_1x + a_3x^3 + \dots + a_{2k+1}x^{(2k+1)}$ e a função $\operatorname{sen} kx$; e funções pares, principalmente, as funções polinomiais do tipo $a_0 + a_2x^2 + \dots + a_{2k}x^{2k}$ e a função $\cos kx$, qualquer que seja o inteiro k e as constantes $a_0, a_1, \dots, a_{2k+1}$.

Observação. Note que soma e produto de funções pares, e o produto de funções ímpares são pares. Também, soma de funções ímpares e produto de função par com função ímpar são ímpares. Mais ainda, seja f uma função de $\mathcal{C}(I)$, então:

$$f \text{ par} \implies \int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx. \quad (3.3)$$

$$f \text{ ímpar} \implies \int_{-L}^L g(x) dx = 0. \quad (3.4)$$

Com efeito, vimos que as funções pares têm gráfico simétrico em relação ao eixo y . Desta forma as áreas à direita e à esquerda do eixo y serão iguais. lembrando que a área entre a curva f e o eixo x é dada por $\int_a^b f(x)dx$ concluímos que

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx.$$

Não obstante, se f for uma função ímpar, então o gráfico de f é simétrico em relação à origem $(0,0)$ o que faz com que as áreas à esquerda e à direita do eixo y se anulem. Noutras palavras,

$$\int_{-L}^L g(x) dx = 0.$$

Com auxílio deste resultado, teríamos concluído de imediato que

$$\langle x, \cos(kx) \rangle = \int_{-L}^L x \cos(kx) dx = 0,$$

já que a função $x \cos(kx)$ é uma função ímpar.

3.1.3 Wronskiano

Sabemos que uma sequência de funções f_1, \dots, f_n , pertencentes a $\mathcal{C}^{n-1}(I)$ é linearmente dependente se existem constantes c_1, \dots, c_n arbitrárias, nem todas nulas, tais que

$$c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \tag{3.5}$$

para todo $x \in I$. Caso contrário dizemos que as funções f_1, \dots, f_n são linearmente independentes.

Dado um conjunto composto de n funções pertencentes a $\mathcal{C}^{n-1}(I)$, digamos f_1, \dots, f_n , definidas em I , não é uma tarefa fácil, em geral, decidir se essas funções são linearmente independentes ou linearmente dependentes através de (3.5). Uma condição suficiente para provar que um conjunto de n funções é linearmente independente é mostrar que existe pelo menos um ponto x_0 em I tal que

$$W[f_1(x_0), \dots, f_n(x_0)] = \begin{vmatrix} f_1(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & \cdots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix},$$

chamado o wronskiano de f_1, \dots, f_n , é não nulo. Caso o wronskiano seja nulo para qualquer ponto $x \in I$, então as funções f_1, \dots, f_n serão linearmente dependentes em I [16].

Por exemplo, para $f_1(x) = e^{2x}$ e $f_2(x) = e^{-3x}$,

$$W[f_1(x), f_2(x)] = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-3x} \\ 2e^{2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = 2e^{-x} - 3e^{-x} = -e^{-x} \neq 0,$$

qualquer que seja o valor de $x \in \mathbb{R}$. Logo as funções e^{2x} e e^{-3x} são linearmente independentes.

Teorema 3.1. *Considere $S = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ um conjunto de funções ortogonais de $\mathcal{C}(I)$, não nulas. Então S é um conjunto de funções linearmente independentes. Noutras palavras, se um conjunto é formado por funções ortogonais não nulas, então essas funções são linearmente independentes.*

Demonstração:

□ De fato, considere a equação

$$a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 0,$$

a_i 's constantes reais. Da ortogonalidade das funções u_i 's, temos que $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, se $i \neq j$ e $\langle u_i, u_j \rangle \neq 0$, se $i = j$. Assim, para um número k fixado, $k = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \langle a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + \dots + a_n u_n, u_k \rangle &= 0 \\ a_1 \langle u_1, u_k \rangle + \dots + a_k \langle u_k, u_k \rangle + \dots + a_n \langle u_n, u_k \rangle &= 0 \\ 0 + 0 + \dots + a_k \langle u_k, u_k \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Como por hipótese $\langle u_k, u_k \rangle \neq 0$, devemos ter $a_k = 0$. Como k representa um valor arbitrário entre 1 e n ,

$$a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 0 \iff a_1 = \dots = a_n = 0.$$

Concluindo que $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ é linearmente independente. ■

Uma expressão do tipo como à esquerda em (3.5) é dita uma combinação linear das funções f_1, \dots, f_n .

3.2 Operadores diferenciais

Do cálculo diferencial, considerando o diferencial $D = \frac{d}{dx}$,

$$\begin{aligned}
 (2D^3 + 3D)y = 0 &\iff 2D^3y + 3Dy = 0 \\
 &\iff 2DD[D(y)] + 3D(y) = 0 \\
 &\iff 2D[D(y')] + 3y' = 0 \\
 &\iff 2D(y'') + 3y' = 0 \\
 &\iff 2y''' + 3y' = 0.
 \end{aligned}$$

Mais geralmente, o operador potência D^n é definido como sendo a composição de n vezes o operador diferencial D , isto é, $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$.

Vale lembrar que se y é uma função com mais de uma variável, então $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$, \dots , denotam os diferenciais parciais, enquanto que ∇y é o gradiente da função y , dado por $\nabla y = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \dots\right)$.

Definição 3.9 (Operador diferencial com coeficientes constantes). *Um operador diferencial de grau n com coeficientes constantes, $L : \mathcal{C}^n(I) \rightarrow \mathcal{C}^n(I)$, é um operador da forma*

$$L = a_n D^n + \dots + a_1 D^1 + a_0,$$

em que D é o operador diferencial $D = \frac{d}{dx}$, e a_0, a_1, \dots, a_n são constantes reais arbitrarias, $a_n \neq 0$.

Aplicando o operador L em uma função y , resulta

$$L(y) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y.$$

Exemplo: Seja o operador $L = D^2 - 5D + 6$. Para a função $y = x^2 + 2$,

$$\begin{aligned}
 L(y) &= y'' - 5y' + 6y \\
 &= 2 - 5(2x) + 6(x^2 + 2) \\
 &= 6x^2 - 10x + 14.
 \end{aligned}$$

Afirmação 3.1. *Operadores diferenciais com coeficientes constantes são operadores lineares.*

Demonstração:

□ Sejam L um operador com coeficientes constantes; u, v funções; e α, β

constantes. Então,

$$\begin{aligned}
 L(\alpha u + \beta v) &= a_n D^n(\alpha u + \beta v) + \cdots + a_1 D(\alpha u + \beta v) + a_0(\alpha u + \beta v) \\
 &= a_n [D^n(\alpha u) + D^n(\beta v)] + \cdots + a_1 [D(\alpha u) + D(\beta v)] \\
 &\quad + a_0(\alpha u + \beta v) \\
 &= \alpha a_n D^n(u) + \beta a_n D^n(v) + \cdots + \alpha a_1 D(u) + \beta a_1 D(v) \\
 &\quad + \alpha a_0 u + \beta a_0 v \\
 &= \alpha (a_n D^n(u) + \cdots + a_0 u) + \beta (a_n D^n(v) + \cdots + a_0 v) \\
 &= \alpha L(u) + \beta L(v).
 \end{aligned}$$

Concluindo que o operador L é um operador linear. ■

Observe que por serem operadores lineares, os operadores com coeficientes constantes herdam as leis de associatividade e distributividade. Além disso, como $D^r D^s = D^s D^r$ quaisquer que sejam os naturais r e s , então $L_r L_s = L_s L_r$.

Definição 3.10 (Núcleo de um operador). *Seja L um operador diferencial com coeficientes constantes. O núcleo de L é o conjunto formado por todas as funções y tais que $Ly = 0$. Denotaremos o núcleo de um operador L por $\mathcal{N}(L)$. Resumidamente,*

$$\mathcal{N}(L) = \{y; Ly = 0\}.$$

Por exemplo, seja L o operador diferencial dado por

$$L = D^2 + D - 6, \quad (3.6)$$

em que deseja-se resolver a equação diferencial

$$Ly = 0, \quad y = y(x),$$

que, por sua vez, equivale a encontrar o espaço gerado pelo núcleo do operador L . No entanto,

$$Ly = 0 \iff y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0. \quad (3.7)$$

Supondo $y(x) = ce^{\lambda x}$, c uma constante arbitrária, obtemos

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

donde os possíveis valores de λ são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$. Portanto o núcleo de L é dado por

$$\mathcal{N}(L) = [e^{2x}, e^{-3x}]. \quad (3.8)$$

Isto é, a solução geral de (3.7),

$$y(x) = a_1 e^{2x} + a_2 e^{-3x},$$

com a_1, a_2 constantes arbitrárias. Perceba que de (3.8) concluímos que o espaço solução do operador diferencial de ordem 2 (3.6) tem dimensão 2. Essa relação não é mera coincidência. De fato, em [14] está provado o seguinte teorema, mais geral:

Teorema 3.2. *O espaço solução de qualquer equação diferencial linear homogênea normal de ordem n*

$$a_n(x)D^n y(x) + \cdots + a_1(x)Dy(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

definida num intervalo I é um subespaço de dimensão n de $\mathcal{C}^n(I)$.

O resultado que segue agora mostra que toda vez que nos dispusermos com um operador diferencial linear, com coeficientes constantes, digamos L , que pode ser expressa como produto de operadores diferenciais, também de coeficientes constantes, digamos L_1, L_2 , etc, então encontrar o núcleo do operador original L será equivalente a encontrar o núcleo de cada operador L_j . Mais precisamente:

Teorema 3.3. *Seja L um operador diferencial de coeficientes constantes definido em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Suponha que L seja expresso como um produto de operadores diferenciais, também de coeficientes constantes, digamos $L = L_1 L_2 \cdots L_n$. Então o espaço solução da equação diferencial $L(y) = 0$ contém o espaço solução de cada equação diferencial $L_k(y) = 0$ para cada $k = 1, 2, \dots, n$. Noutras palavras,*

$$\mathcal{N}(L_k) \subseteq \mathcal{N}(L), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

em que $\mathcal{N}(L_k)$ denota o núcleo do operador L_k .

Demonstração:

□ A idéia da demonstração é tomar $u \in \mathcal{N}(L_k)$ e provar que $u \in \mathcal{N}(L)$ para cada $k = 1, 2, \dots, n$.

Considere uma função u tal que $u \in \mathcal{N}(L_k)$ para um k fixo, $k = 1, \dots, n$. Desta forma, $L_k(u) = 0$. Usando o fato de que os operadores diferenciais de coeficientes constantes comutarem,

$$\begin{aligned} L(u) &= (L_1 \cdots L_k \cdots L_n)(u) \\ &= (L_1 \cdots L_{k-1} L_{k+1} \cdots L_n L_k)(u) \\ &= (L_1 \cdots L_{k-1} L_{k+1} \cdots L_n) L_k(u) \\ &= (L_1 \cdots L_{k-1} L_{k+1} \cdots L_n) \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto é, $u \in \mathcal{N}(L)$. Com isto, provo que o núcleo do operador L contém o núcleo do operador L_k . No entanto, pela arbitrariedade do número k fixado, podemos concluir que

$$\mathcal{N}(L_k) \subseteq \mathcal{N}(L), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

como queria demonstrar. ■

Assim, para o operador diferencial dado como no exemplo citado anteriormente, $L = D^2 + D - 6$, perceba que $D^2 + D - 6 = (D - 2)(D + 3)$. O teorema demonstrado logo acima garante que o núcleo de L contém os núcleos dos operadores $L_1 = D - 2$ e $L_2 = D + 3$. Mas

$$\begin{aligned} L_1 y = 0 &\iff (D - 2)y = 0 \\ &\iff y' - 2y = 0 \\ &\iff y = y(x) = c_1 e^{2x}. \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} L_2 y = 0 &\iff (D + 3)y = 0 \\ &\iff y' + 3y = 0 \\ &\iff y = y(x) = c_2 e^{-3x}, \end{aligned}$$

em que c_1, c_2 são constantes arbitrárias. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(L_1) &= [e^{2x}], \\ \mathcal{N}(L_2) &= [e^{-3x}], \end{aligned}$$

donde,

$$\mathcal{N}(L) \supseteq \{e^{2x}, e^{-3x}\}.$$

Decorre do Teorema 3.2 que o núcleo de L deve ter dimensão 2. Além disso, provamos que as funções e^{2x} e e^{-3x} são l.i.'s. Portanto,

$$\mathcal{N}(L) = [e^{2x}, e^{-3x}].$$

Assim, o espaço solução de (3.7), $Ly = 0$, com $L = D^2 + D - 6$, é o espaço gerado por estas funções, isto é, o espaço solução de $Ly = 0$, com $L = D^2 + D - 6$, é dada pela combinação linear das funções e^{2x}, e^{-3x} ,

$$y(x) = a_1 e^{2x} + a_2 e^{-3x}, \quad (3.9)$$

em que a_1, a_2 são constantes arbitrárias. É claro que o resultado aqui obtido concorda com o resultado obtido anteriormente. Esse exemplo servirá como modelo para resolver equações diferenciais mais complicadas, como farei agora.

3.2.1 $Ly = 0$: Uma abordagem

Consideremos a equação diferencial $Ly = 0$ em que

$$L = (D^2 + 1^2)^2 (D^2 + 2^2)^2 \cdots (D^2 + s^2)^2, \quad (3.10)$$

D é o operador diferencial, $y = y(x)$, $s \geq 1$. O espaço solução dessa equação é gerado pelo núcleo do operador L que, pelo Teorema 3.2, deve ser um subespaço de dimensão $4s$ de $\mathcal{C}^{4s}(I)$. No entanto, considere os operadores diferenciais,

$$L_k = (D^2 + k^2)^2, \quad k = 1, \dots, s. \quad (3.11)$$

O operador L definido em (3.10) pode ser reescrito como produto dos operadores L_k , $k = 1, \dots, s$, e o Teorema 3.3 pode ser aplicado com intuito de simplificar a busca pela solução de (3.10). Com efeito, $L = L_1 \cdots L_s$, donde devemos ter

$$\mathcal{N}(L) \supseteq \mathcal{N}(L_1), \dots, \mathcal{N}(L_s).$$

Sendo assim, resolvendo $L_k y = 0$, para $k = 1, 2, \dots, s$, estaremos resolvendo $Ly = 0$ para L dado em (3.10).

$$\begin{aligned} L_k y = 0 &\iff (D^2 + k^2)^2 y = 0 \\ &\iff (D^4 + 2k^2 D^2 + k^4) y = 0 \\ &\iff D^4 y + 2k^2 D^2 y + k^4 y = 0 \\ &\iff y^{(iv)} + 2k^2 y'' + k^4 y = 0. \end{aligned}$$

Supondo $y(x) = ce^{\lambda x}$, para c uma constante arbitrária não nula¹,

$$\lambda^4 + 2k^2 \lambda^2 + k^4 = 0,$$

que, pela mudança de variável $\phi = \lambda^2$, fornece

$$\phi^2 + 2k^2 \phi + k^4 = 0,$$

que tem raiz de multiplicidade 2 dada por $\phi = -k^2$. Logo, $\lambda = \pm ik$ e, portanto, $y_1(x) = e^{ikx}$, $y_2(x) = xe^{ikx}$, $y_3(x) = e^{-ikx}$ e $y_4(x) = xe^{-ikx}$.

Afirmção 3.2. *As funções $y_1(x) = e^{ikx}$, $y_2(x) = xe^{ikx}$, $y_3(x) = e^{-ikx}$ e $y_4(x) = xe^{-ikx}$ são linearmente independentes em $\mathcal{C}(I)$, qualquer que seja o valor de k , $k = 1, 2, \dots, s$, $x \in \mathcal{C}(I)$.*

¹É claro que $c = 0$ implica em $y = 0$ que é uma solução da equação diferencial dada. Porém não há interesse na solução nula e sim o contrário.

Demonstração:

□ De fato, calculando o wronskiano dessas funções em $x_0 = 0$,

$$W[y_1(x_0), y_2(x_0), y_3(x_0), y_4(x_0)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ ik & 1 & -ik & 1 \\ -k^2 & 2ik & -k^2 & -2ik \\ -ik^3 & -3k^2 & -ik^3 & -3k^2 \end{vmatrix}.$$

Não é difícil ver que as colunas desse determinante são l.i.'s, donde o determinante é diferente de zero. De qualquer forma,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ ik & 1 & -ik & 1 \\ -k^2 & 2ik & -k^2 & -2ik \\ -ik^3 & -3k^2 & -ik^3 & -3k^2 \end{vmatrix} = 16k^4.$$

Concluindo que $W[y_1, y_2, y_3, y_4] \neq 0$, qualquer que seja o valor de k , $k = 1, 2, \dots, s$. ■

Note que pelo Teorema 3.2, o núcleo do operador L_k deve ter dimensão 4. Além disso, as 4 soluções encontradas para $L_k y = 0$ são linearmente independentes. Logo,

$$\mathcal{N}(L_k) = [e^{ikx}, xe^{ikx}, e^{-ikx}, xe^{-ikx}].$$

Portanto, segundo o Teorema 3.3, o núcleo do operador L contém as $4s$ funções (s um número natural maior ou igual a 1)

$$e^{ix}, xe^{ix}, \dots, e^{isx}, xe^{isx}, e^{-ix}, xe^{-ix}, \dots, e^{-isx}, xe^{-isx}.$$

O que é equivalente a dizer que o núcleo de L contém as $4s$ funções

$$\cos x, \operatorname{sen} x, x \cos x, x \operatorname{sen} x, \dots, \cos(sx), \operatorname{sen}(sx), x \cos(sx), x \operatorname{sen}(sx) \quad (3.12)$$

já que

$$\begin{aligned} e^{ikx} &= \cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx) ; \\ xe^{ikx} &= x [\cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx)] ; \\ e^{-ikx} &= \cos(kx) - i \operatorname{sen}(kx) ; \\ xe^{-ikx} &= x [\cos(kx) - i \operatorname{sen}(kx)] . \end{aligned}$$

Com objetivo de provar que as funções dadas em (3.12) são linearmente independentes em $\mathcal{C}(I)$, considere \mathcal{T} o espaço vetorial de todas as somas

trigonométricas da forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)]$$

em que $n \in \mathbb{N}$, com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar. Nesse espaço, a função

$$\langle f, g \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x)g(x) dx \quad (3.13)$$

define um produto interno para qualquer par de soma trigonométrica $f(x)$ e $g(x)$, desde que o limite exista. No entanto, para ver que o limite existe sempre, basta considerar apenas três casos:

1. $f(x) = \cos(kx)$ e $g(x) = \operatorname{sen}(jx)$;
2. $f(x) = \cos(kx)$ e $g(x) = \cos(jx)$;
3. $f(x) = \operatorname{sen}(kx)$ e $g(x) = \operatorname{sen}(jx)$.

Uma vez que a integração é realizada termo a termo, e uma constante multiplicativa não altera o limite em questão.

Caso 1. Se $j \neq k$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \cos(kx) \operatorname{sen}(jx) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{2} \{ \operatorname{sen}[(j+k)x] + \operatorname{sen}[(j-k)x] \} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \left\{ \frac{\cos[(j+k)x]}{j+k} + \frac{\cos[(j-k)x]}{j-k} \right\}_0^t \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se $j = k$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \cos(kx) \operatorname{sen}(jx) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \left[\frac{\cos(2kx)}{2k} \right]_0^t = 0$$

Caso 2. Se $j \neq k$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \cos(kx) \cos(jx) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{2} \{ \cos[(j+k)x] + \cos[(j-k)x] \} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \left\{ \frac{\operatorname{sen}[(j+k)x]}{j+k} + \frac{\operatorname{sen}[(j-k)x]}{j-k} \right\}_0^t \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se $j = k$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \cos(kx) \cos(jx) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{2} [1 + \cos(2kx)] dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \left[t + \frac{\text{sen}(2kx)}{2k} \right]_0^t \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Caso 3. Se $j \neq k$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{sen}(kx) \text{sen}(jx) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{2} \{ \cos[(j-k)x] - \cos[(j+k)x] \} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \left\{ \frac{\text{sen}[(j-k)x]}{j-k} - \frac{\text{sen}[(j+k)x]}{j+k} \right\}_0^t \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se $j = k$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{sen}(kx) \text{sen}(jx) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{2} [1 - \cos(2kx)] dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \left[t - \frac{\text{sen}(2kx)}{2k} \right]_0^t \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Teorema 3.4. *Seja $T \in \mathcal{T}$. Se $\lim_{x \rightarrow \infty} T(x) = 0$, então todos os coeficientes de T são nulos.*

Demonstração:

□ Considere

$$T(x) = \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)].$$

Pela ortogonalidade das funções $\text{sen } kx$ e $\cos kx$:

$$\begin{aligned} a_k &= 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t T(x) \cos(kx) dx ; \\ b_k &= 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t T(x) \text{sen}(kx) dx. \end{aligned}$$

Por hipótese, $T(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$. Portanto, para $\epsilon > 0$ tão pequeno quanto se queira, existe um número real $N > 0$ tal que

$$|T(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{sempre que } x > N. \quad (3.14)$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|a_k| &= \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t T(x) \cos(kx) dx \right| \\ &= \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^N T(x) \cos(kx) dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_N^t T(x) \cos(kx) dx \right| \\ &\leq \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^N T(x) \cos(kx) dx \right| + \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_N^t T(x) \cos(kx) dx \right|. \end{aligned}$$

Mas, note que $\left| \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^N T(x) \cos(kx) dx \right| = 0$, enquanto que

$$\begin{aligned} \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_N^t T(x) \cos(kx) dx \right| &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_N^t |T(x) \cos(kx)| dx \\ &< \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_N^t \frac{\epsilon}{2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (t - N) \frac{\epsilon}{2} \\ &= \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Isto é, $|a_k| < \epsilon$, para todo k . Segue-se que $a_k = 0$ para todo k .

De forma análoga, obtém-se $b_k = 0$ para todo k . ■

Corolário 3.4.1. *As funções dadas em (3.12) são linearmente independentes em $\mathcal{C}(I)$.*

Demonstração:

□ Considere

$$\begin{aligned} F(x) &= A_1 \sen x + B_1 \cos x + \cdots + A_s \sen(sx) + B_s \cos(sx) \\ &\quad + C_1 x \sen x + D_1 x \cos x + \cdots + C_s x \sen(sx) + D_s x \cos(sx) \\ &= A_1 \sen x + B_1 \cos x + \cdots + A_s \sen(sx) + B_s \cos(sx) \\ &\quad + [C_1 \sen x + D_1 \cos x + \cdots + C_s \sen(sx) + D_s \cos(sx)] x. \end{aligned}$$

Ou, simplesmente,

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=1}^s [A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)] + x \sum_{k=1}^s [C_k \cos(kx) + D_k \sin(kx)] \\ &= f(x) + xg(x). \end{aligned}$$

Suponha que $F(x) \equiv 0$. Devo provar que todos os coeficientes são nulos. Para isto, suponha que exista pelo menos um coeficiente não nulo em $g(x)$, pois, se não, $f(x) = 0$, o que implica que os coeficientes de f são nulos.

Então,

$$g(x) = -\frac{f(x)}{x},$$

e $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Contradizendo o Teorema 3.4, já que supomos haver algum coeficiente não nulo em $g(x)$.

Conclusão: Para que

$$\sum_{k=1}^s [A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)] + x \sum_{k=1}^s [C_k \cos(kx) + D_k \sin(kx)] = 0$$

devemos, necessariamente, ter

$$A_k = B_k = C_k = D_k = 0, \quad \forall k, \quad k = 1, 2, \dots, s.$$

■

Uma vez visto que o núcleo do operador L tem dimensão $4s$, que

$$\mathcal{N}(L) \supseteq \{\cos x, \sin x, x \cos x, x \sin x, \dots, \cos(sx), \sin(sx), x \cos(sx), x \sin(sx)\}$$

e que essas funções são linearmente independentes, concluímos, com auxílio do Teorema 3.2, que

$$\mathcal{N}(L) = [\cos x, \sin x, x \cos x, x \sin x, \dots, \cos(sx), \sin(sx), x \cos(sx), x \sin(sx)].$$

Encerro o capítulo salientando que as funções dadas em (3.12) são funções linearmente independentes, soluções da equação diferencial (3.10) que, por sua vez, será a peça chave no método de aproximação de π desenvolvido no capítulo 5 e, conseqüentemente, no capítulo 6.

Capítulo 4

Fourier: Segundo método

O presente capítulo tratará das séries de Fourier, onde estudo a relação entre uma função arbitrária f e sua série de Fourier. Estudo de que modo a função f pode ser aproximada por uma série de Fourier e quão arbitrária pode ser essa função.

Por fim, utilizo a teoria de Fourier para encontrar uma aproximação para o valor de π .

4.1 Motivação

Na aproximação por Taylor, como condição necessária devemos ter uma função f n vezes diferenciável num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. No entanto, como aproximar, por exemplo, a função $f(x) = |x|$ em algum intervalo I que contenha a origem, já que nesse intervalo a função f sequer é diferenciável? Desta forma somos impulsionados a encontrar outra forma de aproximação. Uma idéia é utilizar aproximações por funções trigonométricas, isto é, será possível expressar uma função f qualquer pela série

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

em que a_n 's e b_n 's constantes a serem determinadas? Se assim puder ser feito, qual a expressão que define as constantes a_n 's e b_n 's? Qual a relação entre a função f e a série que a representa?

Considere o espaço $\mathcal{C}(I)$ das funções contínuas, com produto interno definido em (3.1).

Afirmção 4.1. *Para k um número inteiro não negativo, $\{\frac{1}{2}, \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L}, \cos \frac{k\pi x}{L}\}$ é um sistema ortogonal em $\mathcal{C}([-L, L])$.*

Demonstração:

□ De fato, como $\text{sen } \frac{k\pi x}{L}$ e $\text{sen } \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{k\pi x}{L}$ são funções ímpares,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-L}^L \text{sen } \frac{k\pi x}{L} dx &= 0, \quad \forall x \in [-L, L]; \\ \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} \text{sen } \frac{k\pi x}{L} dx &= 0, \quad \forall x \in [-L, L]. \end{aligned}$$

Também, qualquer que seja $x \in [-L, L]$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx &= \int_0^L \cos \frac{k\pi x}{L} \\ &= \left(\frac{L}{k\pi} \text{sen } \frac{k\pi x}{L} \right)_0^L \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2} \right\|^2 &= \int_{-L}^L \left(\frac{1}{2} \right)^2 dx = \frac{L}{2}; \\ \left\| \text{sen } \frac{k\pi x}{L} \right\|^2 &= \int_{-L}^L \left(\text{sen } \frac{k\pi x}{L} \right)^2 dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{2k\pi x}{L} \right] dx = L; \\ \left\| \cos \frac{k\pi x}{L} \right\|^2 &= \int_{-L}^L \left(\cos \frac{k\pi x}{L} \right)^2 dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{2k\pi x}{L} \right] dx = L. \end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração. ■

Definição 4.1 (Funções periódicas). *Considere $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo que contenha o ponto x . Uma função f é dita periódica, de período p , se, e somente se,*

$$f(x + p) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Por exemplo, para $n \geq 1$ considere as funções

$$\text{sen } \frac{n\pi x}{L} \quad \text{e} \quad \cos \frac{n\pi x}{L}$$

com x pertencente a um intervalo da forma $I = [-L, L]$. Essas funções são periódicas, com período dado por $P = \frac{2L}{n}$. Como $n = 1, 2, \dots$, então o menor período que é comum para todas essas funções é $P = 2L$. Neste caso $2L$ é dito o *período fundamental* das funções $\text{sen } \frac{n\pi x}{L}$ e $\cos \frac{n\pi x}{L}$.

Uma propriedade das funções periódicas é que se f for uma função diferenciável, periódica de período $2L$, então também será a sua derivada f' . Este resultado demonstro agora.

Afirmção 4.2. *Suponha que uma função f seja diferenciável, periódica de período $2L$. Então a derivada de f , f' , será periódica de período $2L$.*

Demonstração:

□ Como hipóteses temos que $f(x + 2L) = f(x)$ e, por f ser diferenciável, $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Desta forma,

$$f'(x + 2L) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h + 2L) - f(x + 2L)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

concluindo com o desejado. ■

4.2 A série de Fourier

Considere a série trigonométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.1)$$

com x pertencente a um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. O que desejamos é expressar uma função arbitrária f pela série (4.1). Assim, sob quais condições para a função f e para que pontos $x \in \mathbb{R}$ teremos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.2)$$

com a_n 's e b_n 's constantes a serem determinadas? É de se esperar que essas constantes estejam intimamente ligados à função f . Que expressões elas têm em termos de f ?

Visto que as funções $\sen \frac{n\pi x}{L}$ e $\cos \frac{n\pi x}{L}$ têm período fundamental igual a $2L$, e desejando-se que valha (4.2), como primeira hipótese natural, devemos ter f uma função periódica de período $2L$. Não obstante, provamos no capítulo 2 que se uma sucessão de funções contínuas convergir uniformemente para uma função, digamos f , então f deve ser uma função contínua. Para (4.2) valer no sentido de convergência uniforme outra hipótese natural é que f seja contínua.

É claro que se essa igualdade valer no sentido de convergência uniforme, então segundo o Teorema 2.4 e o Corolário 2.4.1, poderemos derivar e integrar (4.2) termo a termo e, então,

$$f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \right).$$

Integrando de $-L$ a L ,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \right. \\ &\quad \left. + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \right). \end{aligned}$$

Como a função $\sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L}$ é ímpar, quaisquer que sejam os inteiros m e n ,

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0$$

Logo,

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \right). \quad (4.3)$$

Além disso, pela ortogonalidade das funções $\cos \frac{n\pi x}{L}$ e $\cos \frac{m\pi x}{L}$ em $[-L, L]$, a integral em (4.3) é nula sempre que $m \neq n$. Portanto,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx ; \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx , \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga e pelos mesmos motivos anteriores, porém multiplicando (4.2) por $\sin \frac{m\pi x}{L}$ e integrando de $-L$ a L , obtemos:

$$\begin{aligned} b_0 &= 0 ; \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx , \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Conclusão: Se f é uma função integrável em cada intervalo limitado (f seccionalmente contínua por exemplo), em particular o intervalo $[-L, L]$, então os coeficientes a_n 's e b_n 's ficam bem definidos, dados por:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0; \quad (4.4)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1. \quad (4.5)$$

Desta forma podemos relacionar a função f com a série trigonométrica dada em (4.1) escrevendo

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.6)$$

com as constantes a_n 's e b_n 's dadas por (4.4) e (4.5).

Observe que (4.6) pode ser reescrita por

$$f(x) \sim \int_{-L}^L \left[\frac{f(y) \cdot \frac{1}{2}}{\|\frac{1}{2}\|^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f(y) \cos \frac{n\pi y}{L}}{\|\cos \frac{n\pi y}{L}\|^2} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{f(y) \sen \frac{n\pi y}{L}}{\|\sen \frac{n\pi y}{L}\|^2} \sen \frac{n\pi x}{L} \right) \right] dy.$$

Essa relação nos diz que f é aproximada tomando-se a sua projeção sobre o espaço das funções ortogonais $\{\frac{1}{2}, \cos \frac{k\pi x}{L}, \sen \frac{k\pi x}{L}\}$.

Definição 4.2 (Série de Fourier). *A série dada em (4.6) é a série de Fourier de f ; (4.4) e (4.5) são os coeficientes de Fourier de f .*

A série de Fourier de uma função é a série gerada a partir dessa função. Nada garante que o símbolo “ \sim ” seja uma igualdade.

Caso essa série seja convergente, devemos estudar para qual função ela converge. O estudo que segue tratará desse assunto com maiores detalhes.

4.3 Convergência da série de Fourier

De modo geral, estudar a convergência de uma série resume-se a estudar a convergência da série de suas somas parciais. Assim, considere

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sen \frac{k\pi x}{L} \right) \quad (4.7)$$

a série das somas parciais de (4.6).

Um dos fortes resultados sobre convergência da série de Fourier é o Teorema de Fourier. Este teorema dá as condições necessárias para que a série de Fourier de uma função f seja convergente para a função f . Sua demonstração pode ser vista em [9] ou em [15]. Neste caso a convergência é dada no sentido pontual.

Teorema 4.1 (Convergência pontual da série de Fourier). *Seja f uma função seccionalmente diferenciável, periódica de período $2L$. Então para um ponto x fixado,*

$$S_n(x) \longrightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \quad n \rightarrow \infty,$$

em que $f(x^+)$ e $f(x^-)$ são os limites laterais à direita e à esquerda, respectivamente. Ou seja, fixado um número $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Note que se f é contínua, então $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = f(x)$. Isto nos diz que se f é uma função de $\mathcal{CP}(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$, seccionalmente diferenciável em um ponto $x_0 \in I$, então a série de Fourier de f converge para $f(x_0)$ se x_0 for um ponto de continuidade da função f . Por outro lado, se esse ponto for de descontinuidade, então a série de Fourier de f converge para a média dos limites laterais de f no ponto x_0 .

Observe também que a série de Fourier de uma função f convergirá pontualmente em toda a reta real se, e somente se, f for contínua em $[-L, L]$, com $f(-L) = f(L)$. De fato, neste caso f não terá pontos de descontinuidades qualquer que seja o ponto $x_0 \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.2 (Melhor aproximação). *Seja f uma função periódica de período $2L$, integrável e de quadrado integrável em $[-L, L]$. Então as reduzidas da série de Fourier de f*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sen \frac{k\pi x}{L} \right)$$

são polinômios trigonométricos de melhor aproximação para a função f .

Demonstração:

□ Seja

$$T_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \sen \frac{k\pi x}{L} \right)$$

outro polinômio trigonométrico que representa as reduzidas de Fourier de f . Analisando o erro $e_n(x) = \|T_n(x) - f(x)\|^2$, temos que $e_n(x) =$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-L}^L |T_n(x) - f(x)|^2 dx \\
&= \int_{-L}^L \left| \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + \sum_{k=1}^n d_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} - f(x) \right|^2 dx \\
&= \int_{-L}^L \frac{c_0^2}{4} + \left(\sum_{k=1}^n c_k \cos \frac{k\pi x}{L} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n d_k \cos \frac{k\pi x}{L} \right)^2 + f^2(x) + 2c_0 \sum_{k=1}^n c_k \cos \frac{k\pi x}{L} \\
&\quad + 2c_0 \sum_{k=1}^n d_k \cos \frac{k\pi x}{L} - 2c_0 f(x) + 2 \sum_{k=1}^n c_k \cos \frac{k\pi x}{L} \sum_{k=1}^n d_k \cos \frac{k\pi x}{L} \\
&\quad - 2 \sum_{k=1}^n c_k \cos \frac{k\pi x}{L} f(x) - 2 \sum_{k=1}^n d_k \cos \frac{k\pi x}{L} f(x) \\
&= \frac{c_0^2 L}{2} + L \sum_{k=1}^n c_k^2 + L \sum_{k=1}^n d_k^2 + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx - La_0 c_0 - 2L \sum_{k=1}^n a_k c_k - 2L \sum_{k=1}^n b_k d_k.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
e_n(x) &= \frac{L}{2} c_0^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) + \int_{-L}^L f^2(x) dx - La_0 c_0 - 2L \sum_{k=1}^n (a_k c_k + b_k d_k) \\
&= \frac{L}{2} (c_0 - a_0)^2 + L \sum_{k=1}^n (c_k - a_k)^2 + L \sum_{k=1}^n (d_k - b_k)^2 \\
&\quad + \int_{-L}^L f^2(x) dx - \frac{L}{2} a_0^2 - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)
\end{aligned}$$

Note que $e_n(x)$ será mínimo quando $c_0 = a_0$, $c_k = a_k$ e $d_k = b_k$, concluindo a demonstração. ■

Pela demonstração acima,

$$e_n(x) = \int_{-L}^L f^2(x) dx - \frac{L}{2} a_0^2 - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Além disso $e_n(x) \geq 0$ qualquer que seja o inteiro positivo n . Logo,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx < +\infty \quad (4.8)$$

Observe que a “melhor aproximação” referida no Teorema 4.2 diz respeito à minimização de $e_n(x) = \|T_n(x) - f(x)\|^2$. Logo, essa é a melhor aproximação no sentido de média quadrática.

Com objetivo de encontrar uma melhor convergência da a série de Fourier, considere a série das somas parciais

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right), \quad (4.9)$$

com constantes a_k 's e b_k 's dados por (4.4) e (4.5). Perceba que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|),$$

já que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$, qualquer que seja o valor de x . Assim, a análise da convergência da série de Fourier pode ser substituída pela análise da série da soma dos valores absolutos de seus coeficientes.

4.3.1 Coeficientes de Fourier: Três estimativas

Estimativa 1

Diretamente de (4.4) e (4.5) temos que

$$|a_n| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx; \quad (4.10)$$

$$|b_n| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx. \quad (4.11)$$

E supondo que a função f seja integrável e de módulo integrável, as integrais em (4.10) e (4.11) estarão bem definidas e

$$|a_n|, |b_n| \leq C, \quad (4.12)$$

$C = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx$, constante. (4.12) é a primeira estimativa para os coeficientes de Fourier. Infelizmente esta estimativa não nos leva a resultado algum.

Estimativa 2

Como segunda estimativa, resolvamos as integrais em (4.4) e (4.5) por partes.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{L} \left\{ \left[\frac{L}{n\pi} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right]_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right\}. \end{aligned}$$

E como $\sin n\pi = 0$ para qualquer n ,

$$a_n = -\frac{1}{n} \int_{-L}^L \frac{1}{\pi} f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1. \quad (4.13)$$

Analogamente,

$$b_n = \frac{1}{n} \int_{-L}^L \frac{1}{\pi} f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1. \quad (4.14)$$

Portanto,

$$|a_n| = |b_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx.$$

Supondo a função f integrável, com derivada integrável e de módulo integrável, existirá uma constante $C = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx$, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

E ainda não obtivemos sucesso quanto à convergência da série de Fourier, já que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Estimativa 3

Seguindo-se com a idéia aplicada na estimativa 2, resolvendo-se, agora, (4.13) e (4.14),

$$\begin{aligned} -n\pi a_n &= -\frac{L}{n\pi} \left[f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{L}{n\pi} [f'(L) - f'(-L)] \cos n\pi + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \end{aligned}$$

uma vez que f periódica $\Rightarrow f'$ periódica de $2L \Rightarrow f'(L) - f'(-L) = 0$. Assim,

$$a_n = -\frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1. \quad (4.15)$$

Analogamente,

$$a_n = -\frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1. \quad (4.16)$$

Portanto,

$$|a_n| = |b_n| \leq \frac{L}{n^2 \pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx.$$

Supondo que a função f seja integrável, com derivada segunda integrável e de módulo integrável, existirá uma constante $C = \int_{-L}^L \frac{L}{\pi^2} |f''(x)| dx$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Como a série à direita é convergente, o teste M-W pode ser aplicado provando que a série de Fourier de f converge uniformemente para todo x .

É importante ressaltar que o teste M-W garante convergência uniforme para alguma função, não necessariamente para a função f . No entanto, com as hipóteses da estimativa 3 também vale o Teorema de Fourier, isto é, a série de Fourier converge pontualmente para a função $f(x)$. Logo a convergência uniforme deve ser para a função f .

Um dos resultados mais fortes no que diz respeito à convergência uniforme da série de Fourier de uma função f para a função f é dado pelo seguinte resultado:

Teorema 4.3 (Convergência uniforme da série de Fourier). *Seja f uma função contínua, periódica de período $2L$ e seccionalmente diferenciável. Nessas condições, a série de Fourier de f converge uniformemente para a função f .*

Demonstração:

□ Sejam

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right), \\ \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right), \end{aligned}$$

as séries de Fourier de f e f' respectivamente. Como f é periódica de período $2L$,

$$a'_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) dx = \frac{1}{L} [f(L) - f(-L)] = 0.$$

Para $k > 0$,

$$\begin{aligned}
 a'_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx \\
 &= \frac{1}{L} \left\{ \left[f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} \right]_{-L}^L + \int_{-L}^L \frac{k\pi}{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} dx \right\} \\
 &= \frac{1}{L} \left[f(L) \cos(k\pi) - f(-L) \cos(k\pi) \right] + \frac{k\pi}{L} \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} dx \right] \\
 &= \frac{k\pi}{L} b_k.
 \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
 b'_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} dx \\
 &= \frac{1}{L} \left\{ \left[f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right]_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{k\pi}{L} f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx \right\} \\
 &= -\frac{k\pi}{L} \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx \right] \\
 &= -\frac{k\pi}{L} a_k.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right) \right| \\
 &\leq \sum_{k=1}^n |a_k| + |b_k| \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{L}{k\pi} |a'_k| + \frac{L}{k\pi} |b'_k| \\
 &= \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a'_k| + |b'_k|) \\
 &= \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left[(|a'_k| + |b'_k|)^2 \right]^{1/2} \\
 &\leq \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \sum_{k=1}^n \left[(|a'_k| + |b'_k|)^2 \right]^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Observando que $(a + b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, então obtemos a majoração

$$\frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \sum_{k=1}^n [(|a'_k| + |b'_k|)^2]^{1/2} \leq \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \sum_{k=1}^n [(|a'_k|^2 + |b'_k|^2)]^{1/2}.$$

E ambas as séries à direita convergem. A primeira é uma p -série com $p = 2$ e a segunda converge em virtude da desigualdade (4.8).

Desta forma, a aplicação do teste M-W nos permite concluir que a série de Fourier de f ,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right),$$

converge uniformemente em qualquer intervalo de \mathbb{R} .

Finalmente, pelo Teorema de Fourier, sabemos que essa série converge pontualmente para a função f , completando a demonstração. ■

Observação. Se f é uma função descontínua em um ponto x_0 , então, em virtude do Teorema 2.1 do capítulo 2, a série de Fourier de f não pode convergir uniformemente. Logo, para se ter convergência uniforme em todo o \mathbb{R} deve-se ter f contínua em todo o \mathbb{R} .

Contudo, se f é uma função definida e contínua apenas num intervalo fechado $[a, b]$, será possível ter convergência uniforme nesse intervalo? Observe que se a série de Fourier de uma função f converge, então a série converge para uma função periódica definida em todo o \mathbb{R} . Por outro lado, se a série de Fourier convergir em todo \mathbb{R} então é claro que ela convergirá no intervalo $[a, b]$. Por estas observações, encontramos um modo de obter convergência uniforme para uma função definida somente num intervalo $[a, b]$. De fato, considere a afirmação:

Definição 4.3 (Extensão periódica). *Considere uma função contínua e definida em $[-L, L]$. A extensão periódica de f , que denotarei por $\hat{F} = \operatorname{ext}[f]$, é obtida repetindo-se f sucessivamente ao longo de todo o eixo x , em intervalos de comprimento $2L$. Formalmente,*

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{se } x = (2k - 1)L \\ f(x) & \text{se } (-2k - 1)L < x < (-2k + 1)L \end{cases}$$

Através dessa definição temos condições de estabelecer uma relação entre a série de Fourier de \hat{F} com a função f . Como exemplo, tome a função

$f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$. f é ímpar, donde $f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$ é ímpar, e $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$. Também,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2}{L} \left\{ - \left[\frac{L}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_0^L + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx dx \right\} \\ &= \frac{2L(-1)^{n+1}}{\pi n}. \end{aligned}$$

Assim, a série de Fourier de f em $[-L, L]$ é

$$x \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (4.17)$$

Observe que para $x = L \neq 0$ a relação “ \sim ” é uma relação de desigualdade, já que para esse valor a série à direita em (4.17) é nula.

O interessante é analisarmos para quais valores de x “ \sim ” pode ser substituído pela igualdade. Para isto considere a extensão de f :

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = (2k-1)L \\ f(x) & \text{se } (-2k-1)L < x < (-2k+1)L \end{cases}$$

Para esta função as hipóteses da estimativa 3 são satisfeitas, o que implica na convergência uniforme da série em (4.17) para a função \hat{F} em cada intervalo da forma $]-(-2k-1)L, (-2k+1)L[$. Em particular, para o intervalo $(-L, L)$. Noutras palavras,

$$x = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad \forall x \in (-L, L). \quad (4.18)$$

4.4 Dados numéricos

Na expansão dada por Fourier (4.18), façamos $L = \pi$. Desta forma, se x é um valor pertencente ao intervalo $(-\pi, \pi)$, vale a igualdade:

$$\begin{aligned} x &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx \\ &= 2 \left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} - \frac{\operatorname{sen} 6x}{6} + \dots \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Variando-se os valores $x = \pi/6$, $x = \pi/8$ e $x = \pi/12$, obtemos as respectivas aproximações:

$$\pi \approx 3,1372\dots \quad (1 \text{ dígito})$$

$$\pi \approx 3,14318\dots \quad (2 \text{ dígitos})$$

$$\pi \approx 3,1527\dots \quad (1 \text{ dígito})$$

Nos cálculos acima, truncamos a série (4.19) em $n = 1000$.

A análise de convergência do método aqui apresentado, bem como outros resultados para o valor de π via método de Fourier, serão computados no final do capítulo 6.

Capítulo 5

Método SH - Parte 1

Neste capítulo apresento um método de aproximação para π seguindo as idéias passadas por Cardinal e por Newton [13] – O método SH. O estudo de Fourier e a aproximação de Maclaurin serão indispensáveis no desenvolvimento desse método, bem como o conjunto de funções linearmente independentes encontrado no final do capítulo 3.

5.1 Cardinal e Newton

Para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\text{sen } x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\ x \cos x &= x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + \cdots - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} + \cdots\end{aligned}$$

Ou, simplesmente,

$$\begin{aligned}\text{sen } x &= x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) \\ x \cos x &= x - \frac{x^3}{2!} + \mathcal{O}(x^5)\end{aligned}$$

Seguem daí as aproximações

$$\begin{aligned}\text{sen } x &\approx x - \frac{x^3}{3!} \\ x \cos x &\approx x - \frac{x^3}{2!}\end{aligned}$$

E, para A_1 e A_2 constantes arbitrárias,

$$\begin{aligned} A_1 \operatorname{sen} x - A_2 x \cos x &\approx A_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} \right) - A_2 \left(x - \frac{x^3}{2!} \right) \\ &\approx (A_1 - A_2)x - (A_1 - 3A_2) \frac{x^3}{3!}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

No entanto, se tomarmos A_1 e A_2 de modo que

$$\begin{cases} A_1 - A_2 = 1 \\ A_1 - 3A_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1 = \frac{3}{2} \\ A_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

então (5.1) resulta em

$$x \approx \frac{3 \operatorname{sen} x}{2 + \cos x} \quad (5.2)$$

Esta foi a aproximação da função $f(x) = x$ dada por *Cardinal Nicolau Cusanus* e, mais tarde, pelo físico e matemático *Snellius*¹.

Da trigonometria, $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$. Além disso, pela aproximação de Taylor,

$$\operatorname{sen} 2x = 2x - 2^3 \frac{x^3}{3!} + 2^5 \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)$$

Assim, para A_1 , A_2 e A_3 constantes arbitrárias, truncando-se todos os termos de ordem superior a 5,

$$\begin{aligned} A_1 \operatorname{sen} x - A_2 x \cos x + A_3 \operatorname{sen} 2x &\approx \\ (A_1 - A_2 + 2A_3)x - (A_1 - 3A_2 + 2^3 A_3) \frac{x^3}{3!} &+ (A_1 - 5A_2 + 2^5 A_3) \frac{x^5}{5!} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Se tomarmos as constantes de modo que

$$\begin{cases} A_1 - A_2 + 2A_3 = 1 \\ A_1 - 3A_2 + 2^3 A_3 = 0 \\ A_1 - 5A_2 + 2^5 A_3 = 0 \end{cases}$$

então (5.3) resulta em

$$x \approx \frac{14 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} 2x}{9 + \cos x} = 2 \operatorname{sen} x \frac{7 + 2 \cos x}{9 + \cos x}. \quad (5.4)$$

Esta foi a aproximação da função $f(x) = x$ apresentada por *Newton*.

Para $x = \pi/12$, (5.2) fornece $\pi \approx 3, 1415099 \dots$ (4 dígitos), enquanto que (5.4) fornece $\pi \approx 3, 141592169 \dots$ (6 dígitos).

¹Willebrord Snellius foi mais conhecido pelas leis da refração, famosas *leis de Snell*.

5.1.1 Seguindo os passos dos mestres

Cardinal e Newton tomaram as constantes da aproximação de modo a anular todos os termos de grau maior a 1, donde expressaram x em função $\text{sen } sx$ e $x \cos sx$.

Da motivação dada por eles, será sempre possível fazer uma aproximação da forma

$$x \approx A_1 \text{sen } x - A_2 x \cos x + A_3 \text{sen } 2x - A_4 x \cos 2x + \dots + A_{2s-1} \text{sen } (sx) - A_{2s} x \cos (sx)$$

com as constantes A_n 's tomadas seguindo-se essa mesma idéia?

Sabemos que $\{\cos(kx), x \cos(kx), \text{sen}(kx), x \text{sen}(kx)\}$ é uma base para o conjunto solução de

$$(D^2 + 1^2)^2 \dots (D^2 + s^2)^2 y = 0. \quad (5.5)$$

Seja $k(x) = A_1 \text{sen } x - A_2 x \cos x + \dots + A_{2s-1} \text{sen } (sx) - A_{2s} x \cos (sx)$. Definido assim, $k(x)$ também é solução de (5.5). No entanto, exigindo-se que

$$\begin{aligned} k'(0) &= f'(0); \\ k''(0) &= f''(0); \\ &\vdots \\ k^{(s-1)}(0) &= f^{(s-1)}(0); \end{aligned}$$

então, segundo o teorema da existência e unicidade para equações diferenciais, $k(x)$ é único. Ou seja, $\{A_1, \dots, A_{2s}\}$ é único. Isso é equivalente a dizer que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & s & -1 \\ 1 & -3 & \dots & s^3 & -3s^2 \\ 1 & -5 & \dots & s^5 & -5s^4 \\ 1 & -7 & \dots & s^7 & -7s^6 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -(4s-3) & \dots & s^{4s-3} & -(4s-3)s^{4s-4} \\ 1 & -(4s-1) & \dots & s^{4s-1} & -(4s-1)s^{4s-2} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

é inversível, pois considerando

$$x \approx \sum_{k=1}^s \left[A_{2k-1} \text{sen}(kx) - A_{2k} x \cos(kx) \right] \quad (5.7)$$

uma aproximação como sendo uma aproximação dada por Maclaurin, expandindo os $2s$ termos à direita em (5.7), truncando-se todos os termos de ordem

superior a $4s - 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
x &\approx \\
&+A_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{4s-3}}{(4s-3)!} - \frac{x^{4s-1}}{(4s-1)!} \right) \\
&-A_2 \left(x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + \cdots + \frac{x^{4s-3}}{(4s-4)!} - \frac{x^{4s-1}}{(4s-2)!} \right) \\
&+A_3 \left(2x - 2^3 \frac{x^3}{3!} + 2^5 \frac{x^5}{5!} - 2^7 \frac{x^7}{7!} + \cdots + 2^{4s-3} \frac{x^{4s-3}}{(4s-3)!} - 2^{4s-1} \frac{x^{4s-1}}{(4s-1)!} \right) \\
&-A_4 \left(x - 2^2 \frac{x^3}{2!} + 2^4 \frac{x^5}{4!} - 2^6 \frac{x^7}{6!} + \cdots + 2^{4s-4} \frac{x^{4s-3}}{(4s-4)!} - 2^{4s-2} \frac{x^{4s-1}}{(4s-2)!} \right) \\
&\vdots \\
&+A_{s-1} \left((s-1)x - s^3 \frac{x^3}{3!} + s^5 \frac{x^5}{5!} - s^7 \frac{x^7}{7!} + \cdots + s^{4s-3} \frac{x^{4s-3}}{(4s-3)!} - s^{4s-1} \frac{x^{4s-1}}{(4s-1)!} \right) \\
&-A_{2s} \left(x - s^2 \frac{x^3}{2!} + s^4 \frac{x^5}{4!} - s^6 \frac{x^7}{6!} + \cdots + s^{4s-4} \frac{x^{4s-3}}{(4s-4)!} - s^{4s-2} \frac{x^{4s-1}}{(4s-2)!} \right).
\end{aligned}$$

Procedendo de forma semelhante aos mentores Cardinal e Newton, ficamos com o seguinte sistema para as constantes A_k 's:

$$\begin{aligned}
A_1 - A_2 + 2A_3 - A_4 + \cdots + sA_{2s-1} - A_{2s} &= 1 \\
A_1 - 3A_2 + 2^3A_3 - 3 \cdot 2^2A_4 + \cdots + s^3A_{2s-1} - 3 \cdot s^2A_{2s} &= 0 \\
A_1 - 5A_2 + 2^5A_3 - 5 \cdot 2^4A_4 + \cdots + s^5A_{2s-1} - 5 \cdot s^4A_{2s} &= 0 \\
&\vdots \\
A_1 - (4s-3)A_2 + \cdots + s^{4s-3}A_{2s-1} - (4s-3)s^{4s-4}A_{2s} &= 0 \\
A_1 - (4s-1)A_2 + \cdots + s^{4s-1}A_{2s-1} - (4s-1)s^{4s-2}A_{2s} &= 0
\end{aligned}$$

Ou, matricialmente,

$$\begin{bmatrix}
1 & -1 & \cdots & s & -1 \\
1 & -3 & \cdots & s^3 & -3s^2 \\
1 & -5 & \cdots & s^5 & -5s^4 \\
1 & -7 & \cdots & s^7 & -7s^6 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & -(4s-3) & \cdots & s^{4s-3} & -(4s-3)s^{4s-4} \\
1 & -(4s-1) & \cdots & s^{4s-1} & -(4s-1)s^{4s-2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
A_1 \\
A_2 \\
\vdots \\
A_{2s-1} \\
A_{2s}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 \\
0 \\
\vdots \\
0 \\
0
\end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Essa matriz é um caso particular da seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} u_1 & -1 & \cdots & u_s & -1 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & u_s^3 & -3u_s^2 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & u_s^5 & -5u_s^4 \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & u_s^7 & -7u_s^6 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_1^{4s-3} & -(4s-3)u_1^{4s-4} & \cdots & u_s^{4s-3} & -(4s-3)u_s^{4s-4} \\ u_1^{4s-1} & -(4s-1)u_1^{4s-2} & \cdots & u_s^{4s-1} & -(4s-1)u_s^{4s-2} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

para $u_i = i$, $i = 1, 2, \dots, s$.

Afirmção 5.1. *O determinante de (5.9) é*

$$(-2)^s (u_1 \cdots u_s)^3 \prod_{1 \leq i < j \leq s} (u_j^2 - u_i^2)^4$$

Demonstração:

□ Farei a demonstração por indução sobre o valor de s . Para isto, seja

$$H(u_1, u_2, \dots, u_s) = \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & u_s & -1 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & u_s^3 & -3u_s^2 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & u_s^5 & -5u_s^4 \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & u_s^7 & -7u_s^6 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_1^{4s-3} & -(4s-3)u_1^{4s-4} & \cdots & u_s^{4s-3} & -(4s-3)u_s^{4s-4} \\ u_1^{4s-1} & -(4s-1)u_1^{4s-2} & \cdots & u_s^{4s-1} & -(4s-1)u_s^{4s-2} \end{vmatrix}.$$

Para $s = 1$,

$$\begin{vmatrix} u_1 & -1 \\ u_1^3 & -3u_1^2 \end{vmatrix} = -3u_1^3 + u_1^3 = (-2)u_1^3,$$

e o resultado é válido. Como hipótese de indução, considere o resultado válido para $s \geq 2$. Isto é,

$$H(u_1, \dots, u_s) = (-2)^s (u_1 \cdots u_s)^3 \prod_{1 \leq i < j \leq s} (u_j^2 - u_i^2)^4. \quad (5.10)$$

Devo provar que para $s + 1$ temos

$$H(u_1, \dots, u_s, u_{s+1}) = (-2)^{s+1} (u_1 \cdots u_s u_{s+1})^3 \prod_{1 \leq i < j \leq s+1} (u_j^2 - u_i^2)^4.$$

Com efeito, perceba que o determinante $D(x) =$

$$\begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & u_s & -1 & x & -1 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & u_s^3 & -3u_s^2 & x^3 & -3x^2 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & u_s^5 & -5u_s^4 & x^5 & -5x^4 \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & u_s^7 & -7u_s^6 & x^7 & -7x^6 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{4s-3} & -(4s-3)u_1^{4s-4} & \cdots & u_s^{4s-3} & -(4s-3)u_s^{4s-4} & x^{4s-3} & -(4s-3)x^{4s-4} \\ u_1^{4s-1} & -(4s-1)u_1^{4s-2} & \cdots & u_s^{4s-1} & -(4s-1)u_s^{4s-2} & x^{4s-1} & -(4s-1)x^{4s-2} \\ u_1^{4s+1} & -(4s+1)u_1^{4s} & \cdots & u_s^{4s+1} & -(4s+1)u_s^{4s} & x^{4s+1} & -(4s+1)x^{4s} \\ u_1^{4s+3} & -(4s+3)u_1^{4s+2} & \cdots & u_s^{4s+3} & -(4s+3)u_s^{4s+2} & x^{4s+3} & -(4s+3)x^{4s+2} \end{vmatrix}$$

é um polinômio de grau igual a $8s + 3$, na variável x . Logo pode ser decomposto por

$$D(x) = K \cdot (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_{8s+3}) = K \cdot \prod_{i=1}^{8s+3} (x - r_i),$$

em que K é a coeficiente de x^{8s+3} e $r_1, r_2, \dots, r_{8s+3}$ são as raízes do polinômio $D(x)$, isto é, são os valores de x que anulam o determinante D . No entanto, observe que $D(x)$ é dado, em blocos, por

$$\begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & u_s & -1 & x & -1 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & u_s^3 & -3u_s^2 & x^3 & -3x^2 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & u_s^5 & -5u_s^4 & x^5 & -5x^4 \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & u_s^7 & -7u_s^6 & x^7 & -7x^6 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{4s-3} & -(4s-3)u_1^{4s-4} & \cdots & u_s^{4s-3} & -(4s-3)u_s^{4s-4} & x^{4s-3} & -(4s-3)x^{4s-4} \\ u_1^{4s-1} & -(4s-1)u_1^{4s-2} & \cdots & u_s^{4s-1} & -(4s-1)u_s^{4s-2} & x^{4s-1} & -(4s-1)x^{4s-2} \\ \hline u_1^{4s+1} & -(4s+1)u_1^{4s} & \cdots & u_s^{4s+1} & -(4s+1)u_s^{4s} & x^{4s+1} & -(4s+1)x^{4s} \\ u_1^{4s+3} & -(4s+3)u_1^{4s+2} & \cdots & u_s^{4s+3} & -(4s+3)u_s^{4s+2} & x^{4s+3} & -(4s+3)x^{4s+2} \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \frac{H(u_1, \dots, u_s)}{*} \middle| \frac{*}{X} \right|,$$

em que

$$X = \begin{vmatrix} x^{4s+1} & -(4s+1)x^{4s} \\ x^{4s+3} & -(4s+3)x^{4s+2} \end{vmatrix} = (4s+1)x^{8s+3} - (4s+3)x^{8s+3} = (-2)x^{8s+3}$$

Portanto o coeficiente de x^{8s+3} é igual a $(-2)H(u_1, \dots, u_s)$, e então

$$D(x) = (-2)H(u_1, \dots, u_s) \prod_{i=1}^{8s+3} (x - r_i). \quad (5.11)$$

Assim, o determinante $D(x)$ é nulo sempre que:

- $x = 0$, pois desta forma o determinante D terá uma linha identicamente nula, portanto será nulo;
- $x = \pm u_1, x = \pm u_2, \dots, x = \pm u_s$, pois no caso em que $x = \pm u_i$, $1 \leq i \leq s$, o determinante terá duas colunas múltiplas, portanto nulo.

Logo, $0, \pm u_i, 1 \leq i \leq s$, serão raízes de $D(x)$. Neste momento questiono: Qual será a multiplicidade algébrica dessas raízes? E a resposta vem analisando-se as derivadas de $D(x)$:

$$\begin{aligned}
 D'(x) &= \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & 3x^2 & -3x^2 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & 5x^4 & -5x^4 \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & 7x^6 & -7x^6 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & x & 0 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & x^3 & -6x \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & x^5 & -20x^3 \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & x^7 & -42x^5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & x & 0 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & x^3 & -6x \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & x^5 & -20x^3 \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & x^7 & -42x^5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Note que aqui foi utilizado a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{2n}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}' &= \begin{bmatrix} a'_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1}(x) & a_{2n}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} + \\
 + \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a'_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a'_{2n}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a'_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{2n}(x) & \cdots & a'_{nn}(x) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Observe que $D'(x) = 0$ sempre que:

- $x = 0$, pois desta forma $D'(x)$ terá uma coluna identicamente nula;
- $x = \pm u_i, 1 \leq i \leq s$, pois desta forma $D'(x)$ terá duas colunas múltiplas.

$$\begin{aligned}
 D''(x) &= \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & 1 & 0 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & 3x^2 & -6x \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & 5x^4 & -20x^3 \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & 7x^6 & -42x^5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & x & 0 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & x^3 & -6 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & x^5 & -60x^2 \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & x^7 & -210x^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

e $D''(x) = 0$ sempre que

- $x = 0$, pois desta forma $D'(x)$ terá uma coluna identicamente nula;
- $x = \pm u_i$, $1 \leq i \leq s$, pois desta forma $D'(x)$ terá duas colunas múltiplas.

$$D'''(x) = \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & 6x & -6x \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & 20x^3 & -20x^3 \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & 42x^5 & -42x^5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & 1 & 0 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & 3x^2 & -6 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & 5x^4 & -60x^2 \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & 7x^6 & -210x^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & 1 & 0 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & 3x^2 & -6 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & 5x^4 & -60x^2 \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & 7x^6 & -210x^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & x & 0 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & x^3 & 0 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & x^5 & -120x \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & x^7 & -840x^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Ou seja,

$$D'''(x) = 2 \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & 1 & 0 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & 3x^2 & -6 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & 5x^4 & -60x^2 \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & 7x^6 & -210x^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & x & 0 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & x^3 & 0 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & x^5 & -120x \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & x^7 & -840x^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

e $D'''(x) = 0$ sempre que $x = \pm u_i$, $1 \leq i \leq s$, pois desta forma $D'''(x)$ terá duas colunas múltiplas. Perceba que 0 não é raiz de $D'''(x)$, uma vez que se $x = 0$, então as duas últimas colunas de $D'''(x)$ serão linearmente independentes. Por fim,

$$D^{(iv)}(x) = 2 \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & 6x & -6 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & 20x^3 & -60x^2 \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & 42x^5 & -210x^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & 1 & 0 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & 3x^2 & 0 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & 5x^4 & -120x \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & 7x^6 & -840x^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \\ + 2 \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & 1 & 0 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & 3x^2 & 0 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & 5x^4 & -120x \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & 7x^6 & -840x^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & x & 0 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & x^3 & 0 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & x^5 & -120 \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & x^7 & -2520x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Ou seja,

$$D^{(iv)}(x) = 2 \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & 6x & -6 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & 20x^3 & -60x^2 \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & 42x^5 & -210x^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & 1 & 0 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & 3x^2 & 0 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & 5x^4 & -120x \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & 7x^6 & -840x^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} u_1 & -1 & \cdots & x & 0 \\ u_1^3 & -3u_1^2 & \cdots & x^3 & 0 \\ u_1^5 & -5u_1^4 & \cdots & x^5 & -120 \\ u_1^7 & -7u_1^6 & \cdots & x^7 & -2520x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

e $D^{(iv)}(x) \neq 0$ para $x = \pm u_i$, $1 \leq i \leq s$. Portanto concluímos que a raiz 0 tem multiplicidade algébrica igual a 3, enquanto que as raízes $\pm u_i$, com $1 \leq i \leq s$, são raízes de multiplicidade algébrica igual a 4. Logo,

$$\prod_{i=1}^{8s+3} (x - r_i) = x^3 \prod_{i=1}^s (x^2 - u_i^2)^4.$$

Também, pela hipótese de indução,

$$H(u_1, \dots, u_s) = (-2)^s (u_1 \cdots u_s)^3 \prod_{1 \leq i < j \leq s} (u_j^2 - u_i^2)^4.$$

De (5.11) segue que

$$D(x) = (-2)^{s+1} (u_1 \cdots u_s x)^3 \prod_{1 \leq i < j \leq s} (u_j^2 - u_i^2)^4 \prod_{i=1}^s (x^2 - u_i^2)^4.$$

Fazendo $x = u_{s+1}$,

$$D(x) = H(u_1, \dots, u_s, u_{s+1}) = (-2)^{s+1} (u_1 \cdots u_s u_{s+1})^3 \prod_{1 \leq i < j \leq s+1} (u_j^2 - u_i^2)^4.$$

Como eu queria demonstrar. ■

Desta forma, fazendo-se $u_j = j$, $1 \leq j \leq 2s$, no determinante (5.9), verifica-se que este determinante é precisamente o determinante do sistema (5.8), cujo valor é não nulo:

$$(-2)^s (1 \cdots s)^3 \prod_{1 \leq i < j \leq s} (j^2 - i^2)^4 \neq 0$$

uma vez que $i < j$, quaisquer que sejam os valores de i e de j . Assim, resolvendo-se (5.7), obtemos

$$\begin{aligned} x &\approx A_1 \operatorname{sen} x - A_2 x \cos x + \cdots + A_{2s-1} \operatorname{sen}(sx) - A_{2s} x \cos(sx) \\ &= A_1 \operatorname{sen} x + \cdots + A_{2s-1} \operatorname{sen}(sx) - x [A_2 \cos x + \cdots + A_{2s} \cos(sx)]. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$x \approx \frac{A_1 \operatorname{sen} x + A_3 \operatorname{sen} 2x + A_5 \operatorname{sen} 3x \cdots + A_{2s-1} \operatorname{sen}(sx)}{1 + A_2 \cos x + A_4 \cos 2x + A_6 \cos 3x \cdots + A_{2s} \cos(sx)}.$$

Para $s = 1$, encontramos $A_1 = \frac{3}{2}$ e $A_2 = \frac{1}{2}$, verificando a expressão dada por Cardinal (5.2).

Com o objetivo de computar todas as funções trigonométricas no mesmo argumento, levemos em conta as identidades trigonométricas,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2x &= 2 \operatorname{sen} x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$

Assim, para $s = 2$ e 3 obtemos as respectivas aproximações:

$$x \approx \frac{5}{3} \operatorname{sen} x \frac{16 + 5 \cos x}{17 + 16 \cos x + 2 \cos^2 x}; \quad (5.12)$$

$$x \approx \frac{7}{5} \operatorname{sen} x \frac{92 + 66 \cos x + 7 \cos^2 x}{82 + 111 \cos x + 36 \cos^2 x + 2 \cos^3 x}. \quad (5.13)$$

5.2 Dados numéricos

Fazendo $x = \pi/6$ as aproximações 5.12) e 5.13) retornam, respectivamente,

$$\begin{aligned} \pi &\approx 3,141592228 \dots \quad (6 \text{ dígitos}) \\ \pi &\approx 3,141592653460 \dots \quad (9 \text{ dígitos}) \end{aligned}$$

Com $x = \pi/12$ temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} \pi &\approx 3,14159265199 \dots \quad (8 \text{ dígitos}) \\ \pi &\approx 3,14159265358976 \dots \quad (13 \text{ dígitos}) \end{aligned}$$

Note que as aproximações dadas aqui pelas fórmulas (5.12) e (5.13) melhoram consideravelmente a feito por Fourier. Aqui também truncamos os cálculos com $n = 1000$.

Para o caso $s = 3$ façamos $x = P - \pi$. Desta forma (5.13) nos deixa com a aproximação

$$\pi \approx P + \frac{7}{5} \operatorname{sen} P \frac{92 - 66 \cos P + 7 \cos^2 P}{82 - 111 \cos P + 36 \cos^2 P - 2 \cos^3 P} .$$

Note que se P for um valor aproximado para π , então x representa o erro desta aproximação. Fazendo $P = 3,1$ obtemos

$$\pi \approx 3,14159265358979 \dots \quad (> 14 \text{ dígitos})$$

Capítulo 6

Método SH - Parte 2

No capítulo anterior a função $f(x) = x$ foi aproximada utilizando-se a base composta pelas funções ímpares $\text{sen } x, x \cos x, \dots, \text{sen}(sx), x \cos(sx)$. Neste capítulo utilizo a base dada apenas pelas funções $\text{sen } x, \text{sen } 2x, \dots, \text{sen } sx$. Esta base é a mesma utilizada no método de Fourier, no entanto desta vez as constantes não serão tomadas pelo produto interno. Ao final faço um confronto entre os métodos anteriores e o método aqui desenvolvido para que possamos tirar algumas conclusões.

6.1 Idéia simplificada

No capítulo 4, vimos que a série de Fourier da função $f(x) = x$ é dada por

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\text{sen}(nx)}{n}$$

e tem convergência garantida sempre que x pertencer a um intervalo da forma $[-\pi, \pi]$. Com esta mesma base de funções, será possível aproximar uma função $f(x)$ utilizando-se da idéia passada pela aproximação do capítulo anterior, isto é, será que podemos ter

$$x \approx A_1 \text{sen } x - A_2 \text{sen } 2x + \dots + (-1)^{s-1} A_s \text{sen}(sx) \quad (6.1)$$

com as coeficientes A_k 's a serem determinadas de modo que esta aproximação seja considerada no sentido de Maclaurin?

Na tentativa de obter uma resposta positiva, expandimos a expressão à direita em (6.1) truncando, agora, todos os termos de grau maior a $2s - 1$.

Feito isto,

$$\begin{aligned}
x &\approx \\
&+A_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{s-1} \frac{x^{2s-1}}{(2s-1)!} \right) \\
&-A_2 \left(2x - 2^3 \frac{x^3}{3!} + 2^5 \frac{x^5}{5!} - 2^7 \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{s-1} 2^{2s-1} \frac{x^{2s-1}}{(2s-1)!} \right) \\
&+A_3 \left(3x - 3^3 \frac{x^3}{3!} + 3^5 \frac{x^5}{5!} - 3^7 \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{s-1} 3^{2s-1} \frac{x^{2s-1}}{(2s-1)!} \right) \\
&\vdots \\
&+(-1)^{s-1} A_s \left(sx - s^3 \frac{x^3}{3!} + s^5 \frac{x^5}{5!} - s^7 \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{s-1} s^{2s-1} \frac{x^{2s-1}}{(2s-1)!} \right).
\end{aligned}$$

O que nos deixa com o seguinte sistema para os coeficientes A_k 's (idéia de Cardinal e Newton):

$$\begin{aligned}
A_1 - 2A_2 + 3A_3 - \cdots + (-1)^{s-1} s A_s &= 1 \\
A_1 - 2^3 A_2 + 3^3 A_3 - \cdots + (-1)^{s-1} s^3 A_s &= 0 \\
&\vdots \\
A_1 - 2^{2s-1} A_2 + 3^{2s-1} A_3 - \cdots + (-1)^{s-1} s^{2s-1} A_s &= 0
\end{aligned}$$

Ou, matricialmente,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \cdots & s \\ 1 & -2^3 & 3^3 & \cdots & s^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -2^{2s-1} & 3^{2s-1} & \cdots & s^{2s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Para ver que de fato esse sistema é sempre solúvel, considere a afirmação abaixo:

Afirmação 6.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ v_1^2 & v_2^2 & \cdots & v_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{n-1} & v_2^{n-1} & \cdots & v_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (v_j - v_i). \quad (6.3)$$

Demonstração:

□ Farei a prova deste resultado por indução no número de ordem do determinante.

Com efeito, para $n = 2$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = v_2 - v_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 2} (v_j - v_i)$$

e o resultado é verificado.

Considere válido o resultado para $n \geq 2$. Assim,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_1^{n-1} & v_2^{n-1} & \cdots & v_n^{n-1} & x^{n-1} \\ v_1^n & v_2^n & \cdots & v_n^n & x^n \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{c|c} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (v_j - v_i) & * \\ \hline * & x^n \end{array} \right|$$

é um polinômio em x de grau n . Seja $P(x)$ esse polinômio. Note que se $x = v_i$, para qualquer $i = 1, 2, \dots, n$, $P(x)$ terá duas colunas idênticas, o que o torna nulo. Equivalente é dizer que $P(x)$ tem como raízes os números v_1, v_2, \dots, v_n . Então $P(x)$ pode ser decomposto por

$$P(x) = D(x - v_1)(x - v_2) \cdots (x - v_n)$$

em que D é o coeficiente de x^n . Nesse caso, D é dado por $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (v_j - v_i)$.
Donde,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_1^{n-1} & v_2^{n-1} & \cdots & v_n^{n-1} & x^{n-1} \\ v_1^n & v_2^n & \cdots & v_n^n & x^n \end{vmatrix} = (x - v_1)(x - v_2) \cdots (x - v_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (v_j - v_i)$$

Faça $x = v_{n+1}$ e o resultado fica completo. ■

Uma vez válido o resultado acima, faça $v_i = \lambda_i^2$ na equação (6.3) para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Desta forma,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \lambda_1^4 & \lambda_2^4 & \cdots & \lambda_n^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{2n-2} & \lambda_2^{2n-2} & \cdots & \lambda_n^{2n-2} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j^2 - \lambda_i^2).$$

Ou, equivalentemente,

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \cdots & \lambda_n^3 \\ \lambda_1^5 & \lambda_2^5 & \cdots & \lambda_n^5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{2n-1} & \lambda_2^{2n-1} & \cdots & \lambda_n^{2n-1} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j^2 - \lambda_i^2).$$

Por fim, faça agora

$$\lambda_j = (-1)^{j-1} j, \quad j = 1, \dots, n,$$

o determinante em (6.3) é precisamente o determinante da matriz em (6.2), cujo valor é

$$1(-2)3(-4) \cdots n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j^2 - i^2) = \prod_{i=1}^n (-1)^{i-1} i \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j^2 - i^2) \neq 0.$$

Logo o sistema para as constantes A_k 's possui única solução.

Observação. A unicidade das constantes A_k 's teria sido obtida de forma mais simplificada se tivéssemos encontrado uma equação diferencial de dimensão finita s com base para o conjunto solução dada por

$$\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin(sx)\}$$

pois desta forma bastaria tomar

$$K(x) = A_1 \sin x - A_2 \sin 2x + \cdots + (-1)^{s-1} A_s \sin(sx)$$

e impor as condições iniciais

$$\begin{aligned} K'(0) &= f'(0) \\ K''(0) &= f''(0) \\ &\vdots \\ K^{(s-1)}(0) &= f^{(s-1)}(0) \end{aligned}$$

Por exemplo a equação diferencial

$$(D^2 + 1)(D^2 + 2^2) \cdots (D^2 + s^2)y = 0$$

é uma equação que atende tais exigências.

Resolvendo o sistema (6.2) para $s = 1, 2, 3$ e 4 obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} x &\approx \operatorname{sen} x \\ x &\approx \frac{4}{3} \operatorname{sen} x - \frac{1}{6} \operatorname{sen} 2x \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$x \approx \frac{3}{2} \operatorname{sen} x - \frac{3}{10} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{30} \operatorname{sen} 3x \quad (6.5)$$

$$x \approx \frac{8}{5} \operatorname{sen} x - \frac{2}{5} \operatorname{sen} 2x + \frac{8}{105} \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{140} \operatorname{sen} 4x \quad (6.6)$$

6.2 Convergência do método

Suponha que P é uma aproximação para π . Faça $x = P - \pi$: o erro na aproximação de π . Substituindo x por $P - \pi$ em (6.1), obtemos

$$P - \pi \approx \sum_{n=1}^s (-1)^{n-1} A_n \operatorname{sen} [n(P - \pi)]. \quad (6.7)$$

Uma vez que $\operatorname{sen} [n(P - \pi)] = \operatorname{sen} (nP - n\pi) = (-1)^n \operatorname{sen} (nP)$,

$$\begin{aligned} P - \pi &\approx \sum_{n=1}^s (-1)^{2n-1} A_n \operatorname{sen} (nP) \\ &= - \sum_{n=1}^s A_n \operatorname{sen} (nP). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \pi &\approx P + \sum_{n=1}^s A_n \operatorname{sen} (nP) \\ &= P + A_1 \operatorname{sen} P + A_2 \operatorname{sen} 2P + A_3 \operatorname{sen} 3P + \cdots + A_s \operatorname{sen} (sP). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Para $s = 1$, obtemos

$$\pi \approx P + \operatorname{sen} P. \quad (6.9)$$

Esta foi a aproximação apresentada por *D. Shanks* em 1992 [20]. Observe que se $x = P - \pi$, então $\operatorname{sen} P = \operatorname{sen} x + \pi = -\operatorname{sen} x$ e, portanto,

$$\begin{aligned} P + \operatorname{sen} P &= \pi + x - \operatorname{sen} x \\ &= \pi + x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \right) \\ &= \pi + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots \end{aligned}$$

Isto é, o erro nesta aproximação é da ordem $\frac{x^3}{3!}$. Portanto o erro envolvido na aproximação de π por P é reduzido para $\frac{x^3}{3!}$ em (6.9). Assim, se P for uma aproximação de π com n casas decimais corretas, então (6.9) terá $3n$ casas decimais corretas. Faça $P = 3,1$ em (6.9) e teremos

$$\pi \approx 3,1415806\dots \quad (4 \text{ dígitos})$$

Com $P = 3,14$ obtemos

$$\pi \approx 3,14159265291\dots \quad (8 \text{ dígitos})$$

Não obstante, reescrevendo-se também as equações (6.4), (6.5) e (6.6), obtemos as respectivas melhores aproximações:

$$\pi \approx P + \frac{4}{3} \operatorname{sen} P + \frac{1}{6} \operatorname{sen} 2P \quad (6.10)$$

$$\pi \approx P + \frac{3}{2} \operatorname{sen} P + \frac{3}{10} \operatorname{sen} 2P + \frac{1}{30} \operatorname{sen} 3P \quad (6.11)$$

$$\pi \approx P + \frac{8}{5} \operatorname{sen} P + \frac{2}{5} \operatorname{sen} 2P + \frac{8}{105} \operatorname{sen} 3P + \frac{1}{140} \operatorname{sen} 4P \quad (6.12)$$

Como $x = P - \pi$, então $\operatorname{sen} P = -\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} 2P = \operatorname{sen} 2x$, $\operatorname{sen} 3P = -\operatorname{sen} 3x$, $\operatorname{sen} 4P = \operatorname{sen} 4x$ e

$$\begin{aligned} P + \frac{4}{3} \operatorname{sen} P + \frac{1}{6} \operatorname{sen} 2P &= \pi + \frac{4x^5}{5!} - \frac{20x^7}{7!} + \dots \\ P + \frac{3}{2} \operatorname{sen} P + \frac{3}{10} \operatorname{sen} 2P + \frac{1}{30} \operatorname{sen} 3P &= \pi + \frac{36x^7}{7!} - \frac{504x^9}{9!} + \dots \\ P + \frac{8}{5} \operatorname{sen} P + \frac{2}{5} \operatorname{sen} 2P + \frac{8}{105} \operatorname{sen} 3P + \frac{1}{140} \operatorname{sen} 4P &= \pi + \frac{576x^9}{9!} - \dots \end{aligned}$$

Logo, se P é uma aproximação de π com n casas decimais corretas, então (6.10) aproxima π com $5n$ casas decimais corretas. Analogamente, se P aproxima π com n casas decimais corretas, então (6.11) e (6.12) retornam valores de π com $7n$ e $9n$ casas decimais corretas, respectivamente.

6.3 Dados numéricos

Nas fórmulas (6.10), (6.11) e (6.12) obtidas pelo método SH, fazendo $P = 3,1$, obtemos, respectivamente, as seguintes aproximações:

$$\pi \approx 3,141592649\dots \quad (7 \text{ dígitos})$$

$$\pi \approx 3,1415926535882\dots \quad (11 \text{ dígitos})$$

$$\pi \approx 3,1415926535897922\dots \quad (15 \text{ dígitos})$$

6.4 SH VS Fourier

Para entender melhor a importância do método apresentado nesse capítulo, faça $x = P - \pi$ na aproximação dada por Fourier. Isto é,

$$\begin{aligned} P - \pi &\approx 2 \sum_{k=1}^s \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen}(kP - k\pi) \\ &\approx 2 \sum_{k=1}^s \frac{(-1)^{k+1}}{k} (-1)^k \operatorname{sen}(kP) \\ &\approx -2 \sum_{k=1}^s \frac{\operatorname{sen}(kP)}{k}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\pi \approx P + 2 \sum_{k=1}^s \frac{\operatorname{sen}(kP)}{k}. \quad (6.13)$$

Para $s = 1$,

$$\pi \approx P + 2 \operatorname{sen} P. \quad (6.14)$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} P + 2 \operatorname{sen} P &= \pi + x - 2 \operatorname{sen} x \\ &= \pi + x - 2 \left(x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \\ &= \pi - x + \frac{2x^3}{3!} - \frac{2x^5}{5!} - \frac{2x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Concluimos que o erro dado por Fourier é linear: Para $P = 3, 1$, (6.14) retorna 3, 1831... (1 dígito), enquanto (6.9) retornou 3, 1415806... (4 dígitos). Também, para $P = 3, 14$ (6.14) retorna 3, 14318530... (2 dígitos), enquanto (6.9) retornou $\pi \approx 3, 14159265291...$ (8 dígitos).

Se $s = 3$, então por Fourier temos

$$\pi \approx P + 2 \operatorname{sen} P + \operatorname{sen} 2P + \frac{2}{3} \operatorname{sen} 3P$$

e tanto para $P = 3, 1$ quanto para $P = 3, 14$ os resultados não melhoram no que diz respeito a dígitos corretos de π .

Capítulo 7

A iteração MAG e a convergência para π

Diversos métodos para aproximar π foram estudados até agora. Contudo, neste capítulo apresento um método iterativo que converge para o valor de π de forma surpreendente no que diz respeito à velocidade de convergência.

Com base nas médias aritmética e geométrica, o método apresentado converge exponencialmente para o valor de π , ou seja, a cada iteração há redução do erro (diferença entre o valor aproximado e o valor real de π) de forma exponencial.

Seja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência numérica. Se existir uma constante C_1 e um número natural p , o menor possível, para o qual

$$|a_{n+1} - L| < C_1 |a_n - L|^p, \quad \forall n$$

então diz-se que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para L na ordem de p .

Por outro lado, se existe uma constante C_2 tal que

$$|a_n - L| \leq C_2^{-2^n}$$

então dizemos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a L exponencialmente.

O método de Newton é o que se conhece como melhor método iterativo de convergência quadrática ($p = 2$). Funções polinomiais com coeficientes racionais podem ser computados por este método, porém a dificuldade é encontrar um método que aproxime exponencialmente pelo menos uma função transcendental. Até o momento, o único procedimento que converge exponencialmente para funções transcendentais é o método por média aritmética-geométrica, pauta da próxima seção.

7.1 Iteração MAG

Considere os números positivos a e b , $a > b$. Para $a_0 := a$ e $b_0 := b$, defina

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \quad (7.1)$$

$$b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}, \quad (7.2)$$

com $n \in \mathbb{N}$. Não é difícil ver que $a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n$, $\forall n$. Segue daí que ambas as sequências $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergem para o mesmo limite L , também denotado por $AG(a, b)$.

Defina, agora,

$$c_n := \sqrt{a_n^2 - b_n^2}.$$

Desta forma,

$$c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} = \frac{c_n^2}{4a_{n+1}} \leq \frac{c_n^2}{4L}$$

e, portanto, a sequência $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge quadraticamente para zero.

A percepção de que

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n+1} + c_{n+1}, \\ b_n &= a_{n+1} - c_{n+1}, \end{aligned}$$

permite-nos definir a_n , b_n e c_n para valores negativos de n . De fato, iniciando com $\check{a}_0 = a_0$ e $\check{b}_0 = b_0$ e definindo \check{a}_n e \check{b}_n tal como em (7.1), a indução em n conduz a

$$\begin{aligned} \check{a}_n &= 2^{-n} a_{-n}; \\ \check{b}_n &= 2^{-n} b_{-n}; \\ \check{c}_n &= 2^{-n} c_{-n}. \end{aligned}$$

Além disso, para um número k entre 0 e 1, defino $\check{k} := \sqrt{1 - k^2}$.

Utilizando-se da integral elíptica de primeiro tipo

$$I(a, b) := \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} d\theta,$$

sabemos que $I(a_n, b_n)$ independe do valor de n [17], donde

$$I(a_0, b_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(a_n, b_n) = I(L, L) = \frac{\pi}{2L}.$$

Isto é,

$$AG(a_0, b_0)I(a_0, b_0) = \frac{\pi}{2}.$$

Em seu trabalho, J. M. Borwein e P. B. Borwein [5] provaram que

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \left[\log \left(\frac{4}{k} \right) - I(1, k) \right] = 0.$$

Teorema 7.1. *A iteração MAG satisfaz a seguinte identidade:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \frac{\check{a}_n}{a_n} \log \frac{4a_n}{c_n} = \frac{\pi}{2}. \quad (7.3)$$

Demonstração:

□ Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \check{a}_n I(\check{a}_0, \check{b}_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \check{a}_n I(\check{a}_{-n}, \check{b}_{-n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \check{a}_n I(2^n a_n, 2^n c_n). \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} I(2^n a_n, 2^n c_n) &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{(2^n)^2 a_n^2 \cos^2 \theta + (2^n)^2 c_n^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \frac{2^{-n}}{a_n} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta + \left(\frac{c_n}{a_n}\right)^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \frac{2^{-n}}{a_n} I\left(1, \frac{c_n}{a_n}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \frac{\check{a}_n}{a_n} I\left(1, \frac{c_n}{a_n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \frac{\check{a}_n}{a_n} \log \frac{4a_n}{c_n}. \end{aligned}$$

■

Assim, para $a_0 = \check{a}_0 = 1$, $b_0 = k$ e $c_0 = \check{k}$, considere

$$P_n(k) := \left(\frac{4a_n}{c_n} \right)^{2^{1-n}},$$

$$Q_n(k) := \frac{a_n}{\check{a}_n},$$

e os limites $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$, $Q = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n$, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ e $\check{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \check{a}_n$. Desta forma,

$$P_{n+1} = P_n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^{2^{1-n}}.$$

Como $a \leq a_{n+1} \leq a_n$, então $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^{2^{1-n}} \leq 1$ e, portanto, $P_{n+1} \leq P_n \leq P_0$, $\forall n$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 \leq P_n - P_{n+1} &\leq \left[1 - \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^{2^{1-n}} \right] P_n \\ &\leq \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) P_0 \\ &\leq \left(\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} \right) P_0 \\ &\leq \frac{a_n - a_{n+1}}{a} P_0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$|P_{n+k} - P_n| \leq \frac{|a_{n+k} - a_n|}{a} P_0$$

Uma vez que $P_0 = 16/(1 - k^2)$, fazendo $k \rightarrow \infty$ obtemos

$$|P_n(k) - P(k)| \leq \frac{16}{1 - k^2} \left(\frac{|a_n - a|}{a} \right). \quad (7.4)$$

Também,

$$\begin{aligned} |Q_n(k) - Q(k)| &= \left| \frac{a_n}{\check{a}_n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\check{a}_n} \right| \\ &= \left| \frac{a_n}{\check{a}_n} - \frac{a}{\check{a}} \right| \\ &= \left| \frac{a_n \check{a} + \check{a} a - \check{a} a - a \check{a}_n}{\check{a} \check{a}_n} \right| \\ &\leq \frac{\check{a} |a - a_n| + a |\check{a} - \check{a}_n|}{\check{a}^2}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Decorre das majorações (7.4) e (7.5) que ambos $P_n(k)$ e $Q_n(k)$ podem ser computados exponencialmente desde que os a_n 's possam ser calculados. Assim, por (7.3) segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \log \frac{4a_n}{c_n} = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\check{a}_n} \quad (7.6)$$

e ambos os lados convergem.

O ponto crucial desse método é perceber que ao diferenciarmos (7.6) eliminaremos o logaritmo e ficaremos apenas com π .

7.2 O algoritmo MAG

Teorema 7.2. *Considere os valores iniciais*

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \sqrt{2} \\ \beta_0 &= 0 \\ \pi_0 &= 2 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Se

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \frac{1}{2}(\alpha_n^{1/2} + \alpha_n^{-1/2}) \\ \beta_{n+1} &= \alpha_n^{1/2} \left(\frac{\beta_n + 1}{\beta_n + \alpha_n} \right) \\ \pi_{n+1} &= \beta_{n+1} \left(\frac{1 + \alpha_{n+1}}{1 + \beta_{n+1}} \right) \pi_n \end{aligned}$$

então π_n converge exponencialmente para o valor de π .

Demonstração:

□ □ Considere os valores de $a_n, b_n, c_n, \check{a}_n, \check{b}_n$ e \check{c}_n funções de k , ou seja, faça $b_0 = k, \check{b}_0 = \sqrt{1 - k^2}, a_0 = \check{a}_0 = 1$. Diferenciando a expressão

$$\frac{1}{2^n} \log \frac{4a_n}{c_n} - \frac{\pi a_n}{2 \check{a}_n} ,$$

que sabemos convergir para zero, obtemos:

$$\frac{1}{2^n} \left(\frac{a'_n}{a_n} - \frac{c'_n}{c_n} \right) - \frac{\pi a_n}{2 \check{a}_n} \left(\frac{a'_n}{a_n} - \frac{\check{a}'_n}{\check{a}_n} \right) \quad (7.7)$$

que converge para zero.

Note que os valores de a'_n , b'_n e c'_n podem ser computados recursivamente fazendo-se

$$\begin{aligned} a'_{n+1} &= \frac{a'_n + b'_n}{2} \\ b'_{n+1} &= \frac{1}{2} \left(a'_n \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} + b'_n \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \right) \\ c'_{n+1} &= \frac{1}{2} (a'_n - b'_n) \end{aligned}$$

com $a'_0 = 0$, $b'_0 = 1$, $a_0 = 1$ e $b_0 = k$.

Por simplicidade façamos

$$\begin{aligned} \alpha_n &:= \frac{a_n}{b_n} ; \\ \beta_n &:= \frac{a'_n}{b'_n} . \end{aligned}$$

Levando-se em conta a iteração MAG, ou seja, as definições de a_{n+1} , b_{n+1} e c_{n+1} , obtemos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} a'_{n+1} - b'_{n+1} &= \frac{a'_n + b'_n}{2} - \frac{1}{2} \left(a'_n \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} + b'_n \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(a'_n + b'_n - \frac{a'_n \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n}} - \frac{b'_n \sqrt{a_n}}{\sqrt{b_n}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \left(\frac{a'_n}{\sqrt{a_n}} - \frac{b'_n}{\sqrt{b_n}} \right) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a_{n+1} c'_{n+1}}{a'_{n+1} c_{n+1}} &= 1 - \frac{(a_n + b_n)(a'_n - b'_n)}{(a'_n + b'_n)(a_n - b_n)} \\ &= 1 - \frac{a_n a'_n + a'_n b_n - a_n b'_n - b_n b'_n}{a_n a'_n + a_n b'_n - a'_n b_n - b_n b'_n} \\ &= \frac{2a_n b'_n - 2a'_n b_n}{a_n a'_n + a_n b'_n - a'_n b_n - b_n b'_n} \\ &= \frac{2 \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a'_n}{b'_n} \right)}{\frac{a_n}{b_n} \frac{a'_n}{b'_n} + \frac{a_n}{b_n} - \frac{a'_n}{b'_n} - 1} \\ &= \frac{2(\alpha_n - \beta_n)}{\alpha_n \beta_n + \alpha_n - \beta_n - 1} \\ &= \frac{2(\alpha_n - \beta_n)}{(\beta_n + 1)(\alpha_n - 1)} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= \frac{1}{2} \frac{a_n + b_n}{\sqrt{a_n b_n}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{a_n \sqrt{a_n b_n} + b_n \sqrt{a_n b_n}}{a_n b_n} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{a_n b_n}}{b_n} + \frac{\sqrt{a_n b_n}}{a_n} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a_n}{b_n}} + \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} \right) \\
&= \frac{1}{2} (\alpha_n^{1/2} + \alpha_n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{n+1} &= \frac{a'_n + b'_n}{a'_n \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} + b'_n \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}} \\
&= \frac{a'_n + b'_n}{a'_n \alpha_n^{-1/2} + b'_n \alpha_n^{1/2}} \\
&= \frac{\alpha_n^{1/2} (a'_n + b'_n)}{a'_n + b'_n \alpha_n} \\
&= \frac{\alpha_n^{1/2} \left(\frac{a'_n}{b'_n} + 1 \right)}{\frac{a'_n}{b'_n} + \alpha_n} \\
&= \alpha_n^{1/2} \left(\frac{\beta_n + 1}{\beta_n + \alpha_n} \right). \tag{7.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} - 1 &= \frac{1}{2} (\alpha_n^{1/2} + \alpha_n^{-1/2}) - 1 \\
&= \frac{1}{2\alpha_n^{1/2}} (\alpha_n + 1) - 1 \\
&= \frac{1}{2\alpha_n^{1/2}} (\alpha_n + 1 - 2\alpha_n^{1/2}) \\
&= \frac{1}{2\alpha_n^{1/2}} (\alpha_n^{1/2} - 1)^2. \tag{7.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} - \beta_{n+1} &= \frac{1}{2}(\alpha_n^{1/2} + \alpha_n^{-1/2}) - \alpha_n^{1/2} \frac{(\beta_n + 1)}{(\beta_n + \alpha_n)} \\
&= \frac{\alpha_n^{1/2}}{2} \left[\frac{\alpha_n + 1}{\alpha_n} - \frac{2(\beta_n + 1)}{\beta_n + \alpha_n} \right] \\
&= \frac{\alpha_n^{1/2}}{2} \left[\frac{(\beta_n + \alpha_n)(\alpha_n + 1) - 2\alpha_n(\beta_n + 1)}{\alpha_n(\beta_n + \alpha_n)} \right] \\
&= \frac{\alpha_n^{1/2}}{2} \frac{(\alpha_n^2 - \alpha_n + \beta_n - \alpha_n\beta_n)}{\alpha_n(\beta_n + \alpha_n)} \\
&= \frac{\alpha_n^{1/2}}{2} \frac{(\alpha_n - 1)(\alpha_n - \beta_n)}{\alpha_n(\beta_n + \alpha_n)}. \tag{7.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}}{\alpha_{n+1} - 1} &= \frac{\alpha_n^{1/2}(\alpha_n - 1)(\alpha_n - \beta_n)}{2\alpha_n(\alpha_n + \beta_n)} \cdot \frac{2\alpha_n}{\alpha_n^{1/2}(\alpha_n^{1/2} - 1)^2} \\
&= \frac{(\alpha_n - 1)(\alpha_n - \beta_n)}{(\alpha_n^{1/2} - 1)^2(\alpha_n + \beta_n)} \\
&= \frac{(\alpha_n^{1/2} + 1)^2(\alpha_n - \beta_n)}{(\alpha_n - 1)(\alpha_n + \beta_n)} \\
&= \frac{(1 + \alpha_n^{1/2})^2(\alpha_n - \beta_n)}{(\alpha_n + \beta_n)(\alpha_n - 1)}. \tag{7.11}
\end{aligned}$$

Definindo, agora,

$$\gamma_n := \frac{1}{2^n} \left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{\alpha_n - 1} \right).$$

Diretamente de (7.11) decorre que

$$\gamma_{n+1} = \frac{(1 + \alpha_n^{1/2})^2}{2(\alpha_n + \beta_n)} \gamma_n. \tag{7.12}$$

E, portanto,

$$\frac{\gamma_n}{1 + \beta_n} = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 - \frac{a_{n+1}c'_{n+1}}{a'_{n+1}c_{n+1}} \right).$$

O algoritmo para π vem multiplicando-se a identidade (7.7) por a_n/a'_n , pois essa multiplicação resulta em

$$\frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{a_n c'_n}{a'_n c_n} \right) - \frac{\pi a_n}{2 \check{a}_n} \left(1 - \frac{a_n \check{a}'_n}{a'_n \check{a}_n} \right) \tag{7.13}$$

Além disso, note que se

$$\begin{aligned}\check{a}_n &= a_n, \\ \check{a}'_n &= -a'_n,\end{aligned}$$

então (7.13) torna-se

$$\frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{a_n c'_n}{a'_n c_n} \right) - \pi,$$

que converge para zero. Ou seja,

$$\frac{\gamma_n}{1 + \beta_n} \longrightarrow \pi. \quad (7.14)$$

Mas para obter a igualdade $a_n = \check{a}_n$ basta que $a_1 = \check{a}_1$, já que $a_1 = \check{a}_1 \Rightarrow a_n = \check{a}_n, \forall n$. Decorre daí que $k = \check{k} = 2^{-1/2}$.

Com intuito de estabelecer uma recursividade para (7.14) defino

$$\pi_n := \frac{\gamma_n}{1 + \beta_n}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\pi_{n+1} &= \frac{\gamma_{n+1}}{1 + \beta_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1 + \alpha_n^{1/2})^2}{(\alpha_n + \beta_n)} \frac{\gamma_n}{(1 + \beta_{n+1})} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1 + \alpha_n^{1/2})^2}{(\alpha_n + \beta_n)} \frac{\gamma_n}{\left[1 + \alpha_n^{1/2} \frac{(1 + \beta_n)}{(\alpha_n + \beta_n)} \right]} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1 + 2\alpha_n^{1/2} + \alpha_n)\gamma_n}{(\alpha_n + \beta_n) + \alpha_n^{1/2}(1 + \beta_n)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + 2\alpha_n^{1/2} + \alpha_n}{\frac{\alpha_n + \beta_n}{1 + \beta_n} + \alpha_n^{1/2}} \right) \pi_n \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha_n^{-1/2} + \alpha_n^{1/2} + 2}{\alpha_n^{-1/2} \left(\frac{\alpha_n + \beta_n}{1 + \beta_n} \right) + 1} \right] \pi_n \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2 + 2\alpha_{n+1}}{\frac{1}{\beta_{n+1}} + 1} \right] \pi_n \\ &= \beta_{n+1} \left(\frac{1 + \alpha_{n+1}}{1 + \beta_{n+1}} \right) \pi_n.\end{aligned}$$

Lembremos que π_n converge para o valor de π .

Observação. Para analisar o quão rápido ocorre tal convergência, devemos considerar a diferença $\pi_{n+1} - \pi_n$. Antes disso, façamos algumas considerações:

Lema 7.2.1. $\alpha_n \rightarrow 1$, *quadraticamente*.

Demonstração:

□

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} - 1 &= \frac{1}{2\alpha_n^{1/2}} \frac{[(\alpha_n^{1/2} - 1)(\alpha_n^{1/2} + 1)]^2}{(\alpha_n^{1/2} + 1)^2} \\ &= \frac{(\alpha_n - 1)^2}{2\alpha_n^{1/2}(\alpha_n^{1/2} + 1)^2} \\ &\leq \frac{1}{2}(\alpha_n - 1)^2.\end{aligned}$$

■

Observe que $|\alpha_n - 1| \leq 1 \implies |\alpha_{n+1} - 1| \leq 1$. Além disso, como $\alpha_0 = \sqrt{2}$, $1 \leq \alpha_{n+1} \leq \alpha_n, \forall n$.

Lema 7.2.2. *Considere a identidade (7.8). Por esta identidade segue que*

$$\beta_n^2 \leq \alpha_n \implies \beta_{n+1}^2 \leq \alpha_{n+1}$$

Demonstração:

□ Se $\beta_n^2 \leq \alpha_n$, então $\beta_n \leq \sqrt{\alpha_n}$ e, logo,

$$\begin{aligned}\beta_n(\alpha_n^{1/2} - 1) \leq \alpha_n^{1/2}(\alpha_n^{1/2} - 1) &\implies \alpha_n^{1/2}\beta_n + \alpha_n^{1/2} \leq \alpha_n + \beta_n \\ &\implies \alpha_n^{1/2}(\beta_n + 1) \leq \alpha_n + \beta_n \\ &\implies \alpha_n^{1/2} \frac{(\beta_n + 1)}{(\alpha_n + \beta_n)} \leq 1.\end{aligned}$$

Ou seja, $\beta_{n+1} \leq 1$. Logo, $\beta_{n+1}^2 \leq 1 \leq \alpha_{n+1}$.

■

Como $\beta_0^2 \leq \alpha_0, \beta_n^2 \leq \alpha_n, \forall n$. Mais, $\beta_n \leq 1, \forall n$.

Lema 7.2.3. *Para $n \geq 4$ temos*

$$|\alpha_n - 1| \leq \frac{1}{10^{2n+2}}.$$

Demonstração:

□ Farei a prova por indução sob o número n . Com efeito, para $n = 4$ o cálculo numérico nos leva a

$$|\alpha_4 - 1| \leq \frac{1}{10^{2^4} + 2}.$$

Considere, então, válida a relação

$$|\alpha_n - 1| \leq \frac{1}{10^{2^n+2}}$$

para $n \geq 4$. Notando que

$$|\alpha_n - 1| = |\alpha_n^{1/2} - 1| |\alpha_n^{1/2} + 1| \implies |\alpha_n^{1/2} - 1| \leq \frac{1}{\alpha_n^{1/2} + 1} \cdot \frac{1}{10^{2^n+2}}$$

da identidade (7.9) segue que

$$\begin{aligned} |\alpha_{n+1} - 1| &= \frac{1}{2\alpha_n^{1/2}} |\alpha_n^{1/2} - 1|^2 \\ &\leq \frac{1}{2\alpha_n^{1/2}} \frac{1}{(\alpha_n^{1/2} + 1)^2} \cdot \frac{1}{10^{2^n+4}} \\ &\leq \frac{1}{10^{2^{n+1}+2}} \end{aligned}$$

que termina a demonstração. ■

Lema 7.2.4. *Para $n \geq 4$ temos*

$$|\beta_n - 1| \leq \frac{1}{10^{2^n+2}}.$$

Demonstração:

□ Novamente farei uma indução sobre o número n . Para $n = 4$ de fato temos

$$|\beta_4 - 1| \leq \frac{1}{10^{2^4} + 2}.$$

Considerando o resultado válido sempre que $n \geq 4$, isto é,

$$|\beta_n - 1| \leq \frac{1}{10^{2^n+2}}, \quad n \geq 4,$$

temos, de acordo com as identidades (7.9) e (7.10),

$$1 - \beta_{n+1} = \frac{(\alpha_n - 1)(\alpha_n - \beta_n)}{2\alpha_n^{1/2}(\alpha_n + \beta_n)} + (1 - \alpha_{n+1}).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|1 - \beta_{n+1}| &\leq \left| \frac{(\alpha_n - 1)(\alpha_n - \beta_n)}{2\alpha_n^{1/2}(\alpha_n + \beta_n)} \right| + |1 - \alpha_{n+1}| \\
&\leq |\alpha_n - 1||\alpha_n - \beta_n| + |\alpha_n - 1|^2 \\
&\leq \frac{1}{10^{2^n+2}} (|\alpha_n - 1| + |\beta_n - 1|) + \frac{1}{10^{2^{n+1}+4}} \\
&\leq \frac{2}{10^{2^{n+1}+4}} + \frac{1}{10^{2^{n+1}+4}} \\
&\leq \frac{1}{10^{2^{n+1}+2}}.
\end{aligned}$$

Finalizando a demonstração. ■

Voltando à diferença $\pi_{n+1} - \pi_n$, perceba que esta é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_{n+1}}{1 + \beta_{n+1}} - \frac{\gamma_n}{1 + \beta_n} &= \left[\frac{(1 + \alpha_n^{1/2})^2}{2(\beta_n + \alpha_n)(1 + \beta_{n+1})} - \frac{1}{(1 + \beta_n)} \right] \gamma_n \\
&= \left[\frac{(1 + \alpha_n + \alpha_n^{1/2})(1 + \beta_n) - 2(\beta_n + \alpha_n)(1 + \beta_{n+1})}{2(\beta_n + \alpha_n)(1 + \beta_{n+1})(1 + \beta_n)} \right] \gamma_n.
\end{aligned}$$

Entretanto,

$$\begin{aligned}
(1 + \alpha_n + \alpha_n^{1/2})(1 + \beta_n) - 2(\beta_n + \alpha_n)(1 + \beta_{n+1}) &= \\
&= 1 + \alpha_n\beta_n + 2\alpha_n^{1/2}\beta_n + 2\alpha_n^{1/2} - \alpha_n - \beta_n \\
&\quad - 2\beta_n\beta_{n+1} - 2\alpha_n\beta_{n+1} \\
&= 2\beta_n(\alpha_n^{1/2} - 1) + \beta_n + 1 + \alpha_n\beta_n + 2\alpha_n^{1/2} \\
&\quad - \alpha_n - 2\beta_n\beta_{n+1} - 2\alpha_n\beta_{n+1} \\
&= 2\beta_n(\alpha_n^{1/2} - 1) + 2\beta_n(1 - \beta_{n+1}) - \beta_n + 1 \\
&\quad + \alpha_n\beta_n + 2\alpha_n^{1/2} - \alpha_n - 2\alpha_n\beta_{n+1} \\
&= 2\beta_n(\alpha_n^{1/2} - 1) + 2\beta_n(1 - \beta_{n+1}) + \beta_n(\alpha_n - 1) \\
&\quad + 1 + 2\alpha_n^{1/2} - \alpha_n - 2\alpha_n\beta_{n+1} \\
&= 2\beta_n(\alpha_n^{1/2} - 1) + 2\beta_n(1 - \beta_{n+1}) + \beta_n(\alpha_n - 1) \\
&\quad - (\alpha_n^{1/2} - 1)^2 + 2 - 2\alpha_n\beta_{n+1} \\
&= 2\beta_n(\alpha_n^{1/2} - 1) + 2\beta_n(1 - \beta_{n+1}) + \beta_n(\alpha_n - 1) \\
&\quad - (\alpha_n^{1/2} - 1)^2 + 2\beta_{n+1}(1 - \alpha_n) - 2\beta_{n+1} + 2 \\
&= 2\beta_n(\alpha_n^{1/2} - 1) + 2\beta_n(1 - \beta_{n+1}) + \beta_n(\alpha_n - 1) \\
&\quad - (\alpha_n^{1/2} - 1)^2 + 2\beta_{n+1}(1 - \alpha_n) + 2(1 - \beta_{n+1}).
\end{aligned}$$

Uma vez que $2(\beta_n + \alpha_n)(1 + \beta_{n+1})(1 + \beta_n) > 1$,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\gamma_{n+1}}{1 + \beta_{n+1}} - \frac{\gamma_n}{1 + \beta_n} \right| &\leq \left| (1 + \alpha_n + \alpha_n^{1/2})(1 + \beta_n) - 2(\beta_n + \alpha_n)(1 + \beta_{n+1}) \right| |\gamma_n| \\
&\leq \left(2|\alpha_n^{1/2} - 1| + 2|\beta_{n+1} - 1| + |\alpha_n - 1| \right. \\
&\quad \left. + |\alpha_n^{1/2} - 1|^2 + 2|\alpha_n - 1| + 2|\beta_{n+1} - 1| \right) |\gamma_n| \\
&\leq 10 \left| \frac{1}{10^{2^n+2}} \right| |\gamma_n| \\
&\leq \left| \frac{1}{10^{2^n+1}} \right| |\gamma_n|.
\end{aligned}$$

Observe, agora, que

$$\begin{aligned}
|\lambda_{n+k} - \lambda_n| &= |\lambda_{n+k} - \lambda_{n+k-1} + \lambda_{n+k-1} - \dots - \lambda_{n+1} + \lambda_{n+1} - \lambda_n| \\
&\leq |\lambda_{n+k} - \lambda_{n+k-1}| + \dots + |\lambda_{n+1} - \lambda_n|.
\end{aligned}$$

Assim, para $\lambda_n := \frac{\gamma_n}{1+\beta_n}$ temos que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\gamma_{n+k}}{1 + \beta_{n+k}} - \frac{\gamma_n}{1 + \beta_n} \right| &\leq \frac{1}{10^{2^{n+k-1}+1}} |\gamma_{n+k-1}| + \dots + \frac{1}{10^{2^n+1}} |\gamma_n| \\
&\leq \frac{1}{10} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{|\gamma_{n+s}|}{10^{2^{n+s}}}
\end{aligned}$$

Como $\gamma_n \rightarrow 2\pi$, a partir de um certo número N , $n \geq N \Rightarrow |\gamma_n| \leq 8$. Desta forma, fazendo k tender a infinito,

$$\begin{aligned}
\left| \pi - \frac{\gamma_n}{1 + \beta_n} \right| &\leq \frac{8}{10} \sum_{s=n}^{\infty} \frac{1}{10^{2^s}} \\
&\leq \frac{4}{5} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(10^{2^n})^s} \\
&\leq \frac{1}{5/4} \frac{1}{(10^{2^n} - 1)}.
\end{aligned}$$

Como $10^{2^n} - 5 \geq 0 \Leftrightarrow 5/4(10^{2^n} - 1) \geq 10^{2^n}$, concluímos que

$$\left| \frac{\gamma_n}{1 + \beta_n} - \pi \right| \leq \frac{1}{10^{2^n}} \tag{7.15}$$

e, de fato, a sequência π_n converge exponencialmente para o valor de π . ■■

7.3 Dados numéricos

Começamos desenvolvendo nosso algoritmo com os valores $a_0 = \check{a}_0 = 1$, $b_0 = k$ e $\check{b}_0 = \check{k}$. Além disso, na parte intermediária de nossos cálculos nos deparamos com a necessidade $k = \check{k} = 2^{-1/2}$. Assim, para que o algoritmo funcione corretamente precisamos encontrar agora os valores iniciais α_0 , β_0 e π_0 :

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{a_0}{b_0} = \sqrt{2} \\ \beta_0 &= \frac{a'_0}{b'_0} = 0 \\ \pi_0 &= \frac{\gamma_0}{1 + \beta_0} = \gamma_0 = 2 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

Com estes valores, e iterando conforme as identidades

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \frac{1}{2}(\alpha_n^{1/2} + \alpha_n^{-1/2}) \\ \beta_{n+1} &= \alpha_n^{1/2} \left(\frac{\beta_n + 1}{\beta_n + \alpha_n} \right) \\ \pi_{n+1} &= \beta_{n+1} \left(\frac{1 + \alpha_{n+1}}{1 + \beta_{n+1}} \right) \pi_n\end{aligned}$$

obtemos os seguintes resultados (n é o número de iterações):

$$\begin{aligned}n = 1 &\implies \pi \approx 3,1426\dots \quad (2 \text{ dígitos}) \\ n = 1 &\implies \pi \approx 3,141592660\dots \quad (7 \text{ dígitos}) \\ n = 1 &\implies \pi \approx 3,14159265358979\dots \quad (> 14 \text{ dígitos})\end{aligned}$$

Os cálculos foram realizados em um micro computador com processador AMD Sempron(tm) 2600+. Para valores maiores de n vide tabela 7.1 abaixo.

Com 20 interações temos o valor de π com 2 milhões de casas decimais corretas. Fonte: [5].

Iteração (n)	Dígitos corretos	Iteração (n)	Dígitos corretos
1	3	6	170
2	8	7	345
3	19	8	694
4	41	9	1392
5	83	10	2788

Tabela 7.1: Resultados do algoritmo. Fonte [5].

Capítulo 8

Conclusão

Neste trabalho, foram apresentados vários métodos de aproximação para π , dos quais um, em especial, merece destaque: o algoritmo MAG (no original, *Arithmetic-Geometric Mean*). A cada iteração deste algoritmo, a diferença entre o valor retornado pela máquina e o valor exato de π decresce exponencialmente.

Este trabalho obrigou-me a aplicar conhecimentos de diversas áreas da Matemática: Análise, Álgebra Linear, Teoria de Números, Equações Diferenciais, Métodos Numéricos etc. No âmbito pessoal, a visão da Matemática que eu tinha, como algo meramente abstrato, foi substituída por uma visão mais realista, ao verificar o valor da teoria quando aplicada em um problema concreto.

Referências Bibliográficas

- [1] TOM M. APOSTOL, *Calculus*. Toronto: Waltham, c1969.673p.
- [2] TOM M. APOSTOL, *Calculus and linear algebra, Vol I, 2nd ed.* 686p. A John Wiley and Sons, Inc., publication, USA 1967.
- [3] TOM M. APOSTOL, *Mathematical analysis. 2nd ed.* Reading, Mass: Addison-Wesley publishing company, Inc., c1974.492p.
- [4] TOM M. APOSTOL, *Mathematical analysis: A modern approach to advanced calculus*. Addison-Wesley publishing company, Inc. (1958). Massachusetts, EUA.
- [5] P. B. BORWEIN AND J. M. BORWEIN, *The aritmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions*. SIAM review, Vol 26, No 3 (1984). pp. 351-366.
- [6] P. B. BORWEIN, J. M. BORWEIN AND D. H. BAILEY, *Modular equations and approximations to pi: How to compute one billion digits of pi*. The american mathematical monthly, Vol 96, No 3. (1989), pp201-219.
- [7] F. BOWMAN, *Introduction to elliptic functions*, English Univ. Press, London, 1953.
- [8] RUEL VANCE CHURCHILL, *Complex variables and applications. 2nd ed.* New York: McGraw-Hill, c1960.267p.
- [9] DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO, *Analise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Instituto de matemática pura e aplicada. [Rio de Janeiro]: IMPA; [Brasilia]: CNPQ, c1977. 274p.
- [10] DIACU FLORIN, *Introdução a equações diferenciais: Teoria e aplicações*. Rio de Janeiro: LTC, 2004. 262p.

- [11] F. W. GEHRING, K. A. RIBET AND ALEX S. SHELDON, *Linear algebra done right* Second edition. Springer-Verlag New York, Inc., 1996.
- [12] GENE H. GOLUB AND JAMES H. ORTEGA, *Scientific computing and differential equations: An introduction to numerical methods*. Academic press, Inc. H.B.J. publishers.
- [13] CHIEN-LIH HWANG, *Two methods for approximating π* . Mathematics magazine, Vol 79, No 5. (2006).
- [14] DONALD L. KREIDER, *Introdução a análise linear*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972. nv. Volume 1
- [15] DONALD L. KREIDER, *Introdução a análise linear*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972. nv. Volume 2
- [16] STEVEN J. LEON, *Álgebra linear com aplicações*. 4 ed Rio de Janeiro: LTC, c1999. 390p.
- [17] D. J. NEUMAN, *Rational approximation versus fast computer methods* in Lectures on Approximations and Value Distribution, Presses de l'Université de Montréal, Montreal, 1982, pp. 149-174.
- [18] MURRAY H. PROTTER, *Modern mathematical analysis*. Reading: Addison-Wesley publishing company, Inc., 1964.
- [19] S. RAMANUJAN, *Modular equations and approximations to π* . Quart. J. Math, 45 (1914) 350-72.
- [20] D. SHANKS, *Improving an approximation for π* . The american mathematical monthly, Vol 99, (1992), 263.
- [21] GEORGE F. SIMMONS, *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw-Hill, c1987. v.
- [22] PAVEL SOLIN, *Partial differential equation and finite element method*. A John Wiley and Sons, Inc., publication, USA 2006.
- [23] MICHAEL SPIVAK, *Calculus, 3rd ed*. Houston: Publish or Perish, c1994. 670p.