Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Introdução aos Espaços Vetoriais de Dimensão Infinita

Francielle Hinckel
Orientador: Prof^{o}. Dr. Danilo Royer

Florianópolis - SC

2009

Francielle Hinckel

Introdução aos Espaços Vetoriais de Dimensão Infinita

Trabalho acadêmico de graduação apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II, do Curso de matemática - Habilitação Licenciatura, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis - SC

2009

Esta Monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 55/CCM/09.

Profº. Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Profº. Danilo Royer
Orientador

Profº. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa

Profª. Rosimary Pereira

Agradecimentos

Ao professor e orientador Danilo Royer, pelo seu apoio na elaboração deste trabalho.

Aos professores Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa e Rosimary Pereira, por terem aceito o convite para participar da Banca Examinadora.

Ao meu marido Marciel e ao meu filho Vitor, pela compreensão e pelo incentivo, durante toda a graduação.

A minha família, amigos e todos aqueles que contribuíram para esta realização, em especial aos meus colegas e aos professores coordenadores do LEMAT.

A todos, muito obrigado!

"Dentro de minhas limitações pessoais
e de minha condição individual,
eu faço diferença, todos fazemos..."
Lya Luft

Sumário

Introdução

Neste trabalho de conclusão de curso, faremos um estudo de propriedades dos espaços vetoriais de dimensão infinita. Para tanto, inicialmente estudaremos alguns resultados importantes da teoria dos espaços vetoriais de dimensão finita, e num segundo momento, verificaremos a validade destes, quando passamos a considerar espaços de dimensão infinita. Esse é o contexto deste trabalho, comparar algumas propriedades dos espaços vetoriais de dimensão finita com as dos espaços de dimensão infinita.

Durante todo o trabalho realçaremos os conceitos e resultados abordados através de exemplos, com o objetivo de tornar mais claro ao leitor o assunto apresentado. Também tivemos a preocupação de demonstrar com detalhes a maioria dos teoremas, afim de que a leitura deste material seja auto-suficiente para a compreensão do conteúdo abordado. Por fim, apresentaremos um breve resumo deste trabalho.

A definição de espaços vetoriais, subespaços, bem como os conceitos e propriedades básicas sobre a teoria dos espaços vetoriais, serão vistos no primeiro capítulo deste trabalho. Neste também, é demonstrado o primeiro teorema de ênfase do trabalho, no qual afirmamos que todo espaço vetorial admite uma base de Hammel.

No segundo capítulo estudaremos uma classe de espaços vetoriais que nos permitirá um maior aprofundamento no estudo de propriedades de espaços vetoriais de dimensão infinita, os chamados espaços normados.

O capítulo seguinte, será dedicado ao estudo das transformações lineares, aplicações entre espaços vetoriais que preservam as duas operações algébricas dos espaços vetoriais. Uma classe importante destas aplicações são as limitadas, sendo este um critério simples para a continuidade destas aplicações, como veremos com mais detalhes no desenvolvimento deste capítulo. Além disso, demonstraremos que para espaços com dimensão finita, todas as transformações lineares são contínuas.

Para finalizar, no quarto capítulo vamos apresentar algumas propriedades que diferem quanto ao fato da dimensão do espaço vetorial considerado na transformação linear ser de dimensão finita ou infinita. Dentre elas, podemos destacar a bijetividade destas aplicações. Se por um lado, para espaços vetoriais de dimensão finita basta analisar apenas um dos conceitos, injetividade ou sobrejetividade, por outro lado, quando a dimensão é infinita, isto não será o suficiente.

Capítulo 1

Espaços Vetoriais

Neste capítulo, definiremos espaços vetoriais e apresentaremos uma série de exemplos, afim de tornar clara ao leitor essa estrutura. Além disso, discutiremos algumas de suas propriedades, como a existência de bases para estes espaços de qualquer dimensão. Ao longo deste trabalho, $\mathbb{K}$ denotará o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

1.1 Espaços Vetoriais

Definição 1.1.1. *Seja V um conjunto não vazio, sobre o qual estão definidas as operações de adição e multiplicação por escalar, isto é,*

$$\forall \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V \Rightarrow \mathrm{u} + \mathrm{v} \in V \quad e \quad \forall \mathrm{u} \in V, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha \mathrm{u} \in V.$$

O conjunto V com essas duas operações é um Espaço Vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, se para quaisquer $\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, as seguintes propriedades sejam satisfeitas:

1. $\mathrm{u} + \mathrm{v} = \mathrm{v} + \mathrm{u}$ *(adição é comutativa),*

2. $(\mathrm{u} + \mathrm{v}) + \mathrm{w} = \mathrm{u} + (\mathrm{v} + \mathrm{w})$ *(adição é associativa),*

3. *existe um único elemento $0 \in V$ tal que $\mathrm{u} + 0 = 0 + \mathrm{u} = \mathrm{u}$ (elemento zero),*

4. *para cada $\mathrm{u} \in V$ existe um único elemento $(-\mathrm{u}) \in V$ com $\mathrm{u} + (-\mathrm{u}) = 0$ (inverso aditivo),*

5. $(\alpha\beta)\mathrm{u} = \alpha(\beta \mathrm{u})$ *(multiplicação de escalares é associativa),*

6. $(\alpha + \beta)\mathrm{u} = \alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{u}$ *(multiplicação escalar é distributiva sob a adição escalar),*

7. $\alpha(\mathrm{u} + \mathrm{v}) = \alpha \mathrm{u} + \alpha \mathrm{v}$ *(multiplicação escalar é distributiva sob a adição vetorial),*

8. $1\mathrm{u} = \mathrm{u}$ *(onde 1 é identidade multiplicativa no corpo* $\mathbb{K}$*).*

Exemplo 1.1.1. $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$*é o conjunto de todas as funções reais definidas em um intervalo I,*

$$\mathcal{F}(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R}; f \quad \text{é função}\}.$$

Sejam f *e* g *funções deste conjunto, definem-se a soma* $f + g : I \to \mathbb{R}$ *por*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in I$$

e o produto de $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *por* $\alpha \in \mathbb{R}$ *como a função* $\alpha.f : I \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$(\alpha.f)(x) = \alpha[f(x)], \quad x \in I.$$

Com estas operações, o conjunto $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*, onde a função nula é o vetor nulo desse espaço.*

Exemplo 1.1.2. *Seja* $\mathcal{P}_n$ *o conjunto dos polinômios com coeficientes reais, de grau menor ou igual a n (incluindo o zero), ou seja,*

$$\mathcal{P}_n = \{p(x) = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0; a_i \in \mathbb{R} \quad e \quad n \geq 0\}.$$

O conjunto $\mathcal{P}_n$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*, onde as operações são soma de polinômios e multiplicação destes por números reais. Especificamente, sejam* $p(x) = a_r x^r + \ldots + a_0$ *e* $q(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$ *dois elementos de* $\mathcal{P}_n$*. Vamos assumir que* $r \leq m$*. Definimos então a soma*

$$(p + q)(x) = b_m x^m + \ldots + b_{r+1} x^{r+1} + (a_r + b_r) x^r + \ldots + (a_0 + b_0).$$

Além disso, se $\alpha \in \mathbb{R}$*, o produto escalar de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *por p(x) será, por definição o polinômio*

$$(\alpha.p)(x) = (\alpha a_r) x^r + \ldots + (\alpha a_0).$$

Exemplo 1.1.3. *Seja* $\mathbb{R}^\infty$ *o conjunto das sequências infinitas* $\mathrm{u} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$*, de números reais. O elemento zero de* $\mathbb{R}^\infty$ *é a sequência* $0 = (0, 0, ..., 0, ...)$*, formada por infinitos zeros , e o inverso aditivo da sequência* $\mathrm{u} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ *é*

$$-\mathrm{u} = (-\alpha_1, -\alpha_2, ..., -\alpha_n, ...).$$

As operações de adição e multiplicação por um número real são definidas por:

$$\mathrm{u} + \mathrm{v} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n, ...)$$

$$\lambda \mathrm{u} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_n, ...), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Com estas operações, $\mathbb{R}^\infty$ é um espaço vetorial.

1.2 Subespaços Vetoriais

Em muitas ocasiões, é importante estudar dentro de um espaço vetorial V, subconjuntos W que continuem sendo espaços vetoriais. Tais conjuntos são chamados de *Subespaços Vetoriais* de V, o qual definiremos a seguir.

Definição 1.2.1. *Seja V um espaço vetorial. Um Subespaço Vetorial (ou simplesmente um subespaço) de V é um subconjunto $W \subset V$ com as seguintes propriedades:*

1. $0 \in W$;
2. $\forall \mathrm{u}, \mathrm{v} \in W \Rightarrow (\mathrm{u} + \mathrm{v}) \in W$;
3. $\forall \mathrm{u} \in W, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha \mathrm{u} \in W$.

Observe que um subespaço W em um espaço vetorial V, é ele próprio um espaço vetorial. Dado que, das propriedades *2* e *3* da definição de subespaço, as operações de adição de vetores e de multiplicação de vetor por escalar em V, ficam naturalmente definidas em W.

Podemos destacar dois exemplos de subespaços de um espaço V, chamados de triviais. O conjunto $\{0\}$, com o único elemento 0, e o espaço inteiro V.

Exemplo 1.2.1. *Consideremos o conjunto $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ definido no exemplo 1.1.1. Seja $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ o conjunto formado pelas funções reais definidas em um intervalo I, tal que essas funções sejam contínuas,*

$$\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R}; \quad f \text{ é contínua}\}.$$

Temos que $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ é um subespaço de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

De fato, o vetor nulo do espaço $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ é a função nula, que é uma função contínua e portanto pertence a $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Além disso, se f e g são funções reais contínuas, a soma

$(f+g)(x)$ será uma função real contínua e se $\alpha \in \mathbb{R}$, o produto escalar de α por $f(x)$, será a função real $(\alpha f)(x)$ que também é uma função contínua.

Do mesmo modo, também são subespaço de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, o conjunto $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ das funções k vezes continuamente deriváveis no intevalo I, onde $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $L^1(I, \mathbb{R})$ das funções integráveis em um intervalo I e o conjunto $P_n(I, \mathbb{R})$ dos polinômios de grau menor ou igual a n.

Observe que se considerarmos o conjunto formado apenas por polinômios de grau n, este não será um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, pois a soma de dois polinômios de grau n pode ter grau menor que n.

Exemplo 1.2.2. *Considere P_{n_0} como o conjunto dos polinômios com coeficientes reais, de grau menor ou igual a n, onde $p(0) = 0$. Note que P_{n_0} é um subconjunto de P_n definido no exemplo 1.1.2.*
Geometricamente, os elementos do subespaço P_{n_0} caracterizam-se pelo fato, de seus gráficos intersectarem a origem do sistema cartesiano. Como exemplo, podemos observar o gráfico das funções polinômiais $p_1(x) = x^3 - 3x$ e $p_2(x) = -x$ que são elementos de P_{n_0}.

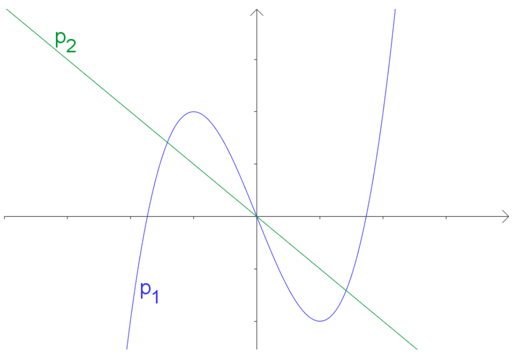

Figura 1.1: Gráfico de $p_1(x)$ e $p_2(x)$.

Exemplo 1.2.3. *Seja $V = M_n(\mathbb{R})$, o conjunto das matrizes reais quadradas de ordem n, com a soma e o produto escalar usuais, e W é o subconjunto das matrizes triangulares superiores. W é um subespaço vetorial de V.*

De fato, a soma de matrizes triangulares superiores ainda é uma matriz triangular superior, assim como o produto de uma matriz triangular por um escalar real.

1.3 Base de Hammel

Nesta seção iremos apresentar um dos conceitos mais importantes no estudo da estrutura de espaço vetorial, o de base. O qual, será bastante útil nos estudos seguintes desse trabalho. Iniciaremos com a seguinte definição:

Definição 1.3.1. *Sejam W um subespaço vetorial do espaço vetorial V e $\mathcal{A}$ um subconjunto de V. Dizemos que W é um subespaço gerado por $\mathcal{A}$, ou que $\mathcal{A}$ é um conjunto gerador para W, se tivermos*

$$W = \{u \in V; \quad u = \sum_{i=1}^{n} k_i e_i \quad \textit{onde} \quad k_i \in \mathbb{K}, e_i \in \mathcal{A} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Em outras palavras um subespaço de W é gerado por $\mathcal{A}$ se todo elemento de W é combinação linear de elementos de $\mathcal{A}$.

Exemplo 1.3.1. *Considere $\mathbb{R}^2$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. O conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ é conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$, pois se $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, então*

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1) \quad \textit{com} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Da mesma forma o conjunto $\{(1,0),(-2,-1),(2,2)\}$ também é um gerador de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.3.2. *Seja $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$. O conjunto $\{1, x, x^2, \ldots, x^n \ldots\}$ é um conjunto gerador de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.*

De fato, qualquer elemento de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ é da forma

$$p(x) = \alpha_0(1) + \alpha_1(x) + \alpha_2(x^2) + \ldots + \alpha_n(x^n),$$

para algum $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ coeficientes reais.
O conjunto $\{2, 1+x, 1+x^2, \ldots, 1+x^n, \ldots\}$ também é um conjunto gerador do mesmo espaço vetorial.

Em geral, um espaço vetorial possui muitos conjuntos geradores, sendo que vai nos interessar o conjunto gerador que seja o "menor possível", onde cada elemento de V se escreva de maneira única como combinação linear dos elementos deste conjunto gerador. Para tanto, precisamos nos valer da seguinte definição:

Definição 1.3.2. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo escalar $\mathbb{K}$. Dizemos que um conjunto $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset V$ é Linearmente Independente (ou L.I.) se para todo conjunto $I \subset J$ finito,*

$$\sum_{i \in I} k_i e_i = 0 \Rightarrow k_i = 0, \quad \forall i \in I.$$

Observações:

i) Mesmo que o conjunto $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$ seja um subconjunto infinito de V, consideremos somente combinações lineares de quantidades finitas de vetores deste conjunto, uma vez que somas infinitas não fazem sentido neste momento.

ii) Se $A = \{e_1, e_2, \ldots\}$ é um subconjunto L.I. de um espaço vetorial V, então nenhum vetor de A pode ser escrito como combinação linear de outros vetores deste subconjunto, pois, se tivermos, por exemplo,

$$e_i = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \ldots + k_{i-1} e_{i-1}$$

teremos

$$k_1 e_1 + k_2 e_2 + \ldots + k_{i-1} e_{i-1} + (-1) e_i = 0,$$

com o coeficiente de e_i não nulo, o que contradiz o fato de A ser linearmente independente.

iii) Um conjunto X é chamado de linearmente dependente (ou L.D.) se não for linearmente independente, ou seja algum dos vetores $v \in X$ é combinação linear de outros elementos de X.

Exemplos de conjuntos Linearmente Independente:

Exemplo 1.3.3. *Os monômios $1, x, \ldots, x^n$ em $\mathcal{P}_n$ são L.I., pois*

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$$

é o vetor nulo em $\mathcal{P}_n$ somente quando $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja $\alpha_0 = \ldots = \alpha_n = 0$, pois um polinômio não nulo de grau m tem no máximo m raízes reais.

O que nos permite concluir, que o conjunto $\{1, x, \ldots, x^n, \ldots\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *é um conjunto infinito* L.I. *no espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais.*

Exemplo 1.3.4. *O conjunto* $X = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}^\infty$*, onde*

$$\bar{e}_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots)$$

é a sequência infinita cujo n-ésimo termo é 1 e os demais são iguais a zero, é um conjunto infinito L.I..

De fato, se $A = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ é um subconjunto finito de X, para que

$$\alpha_1\bar{e}_1 + \ldots + \alpha_n\bar{e}_n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0, 0, \ldots) = 0,$$

devemos ter $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Definição 1.3.3. *Uma base de Hammel para V é um conjunto de elementos de V linearmente independentes,* $\mathcal{B} = \{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$ *tal que todo elemento* $v \in V$ *pode ser escrito como combinações lineares finitas de elementos de* $\mathcal{B}$*, ou seja, existe* $I \subset J finito$ *e* $\{k_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{K}$ *tais que*

$$v = \sum_{i \in I} k_i e_i.$$

Note que, se V é espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B} = \{v_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma base de Hammel, então todo vetor $v \in V$ pode ser escrito como combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$ de maneira única. Suponhamos por absurdo que o vetor v possa ser escrito de duas maneiras distintas, isto é,

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \quad \text{e} \quad v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$$

onde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$. Observe que, mesmo a base $\mathcal{B}$ sendo infinita, podemos exprimir v como combinações lineares dos mesmos elementos de $\mathcal{B}$, completando com coeficientes zero os múltiplos dos v_i que aparecem apenas numa das duas expresões. Assim,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$$

ou seja,

$$v_1(\alpha_1 - \beta_1) + v_2(\alpha_2 - \beta_2) + \ldots + v_n(\alpha_n - \beta_n) = 0$$

como $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de Hammel para V, segue que,

$$(\alpha_1 - \beta_1) = (\alpha_2 - \beta_2) = \ldots = (\alpha_n - \beta_n) = 0.$$

Logo,

$$(\alpha_1 = \beta_1), (\alpha_2 = \beta_2), \ldots, (\alpha_n = \beta_n)$$

contradizendo a hipótese. Portanto, todo vetor $v \in V$ se exprime de modo único como combinação linear de elementos da base.

Veremos a seguir, alguns exemplos de base de Hammel de alguns espaços vetoriais.

Exemplo 1.3.5. *Uma base para o espaço vetorial $M(m \times n)$, das matrizes de ordem $m \times n$ é formada pelas matrizes e_{ij} cujo ij-ésimo elemento (na interseção da i-ésima linha e da j-ésima coluna) é igual a 1 e os demais elementos são iguais a zero. Para o caso $M(2 \times 1)$, temos que o conjunto*

$$\mathcal{B} = \left\{ e_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base para $M(2 \times 1)$.

De fato, $\mathcal{B}$ é um conjunto L.I., pois para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ teremos,

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

somente se $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
Além disso, toda matriz $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in M(2 \times 1)$, pode ser escrita como

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.3.6. *Os monômios $\{1, x, \ldots, x^n\}$ formam uma base para o espaço vetorial $\mathcal{P}_n$ dos polinômios de grau menor ou igual a n.*
O conjunto $\{1, x, \ldots, x^n, \ldots\}$ dos monômios de graus arbitrários, constitui uma base infinita para o espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de todos os polinômios reais.

Exemplo 1.3.7. *Os vetores $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ constituem uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, chamada de base canônica. Porém, o conjunto $X = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n, \ldots\} \subset$*

$\mathbb{R}^\infty$, onde $\bar{e}_n = 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, é um conjunto infinito L.I., conforme vimos no exemplo 1.3.4, mas não é uma base de Hammel para $\mathbb{R}^\infty$, pois não gera este espaço, ou seja, os elementos de $\mathbb{R}^\infty$ não podem ser escritos como uma soma finita de combinações de elementos de X. Por exemplo, o elemento $(1, 1, 1, \ldots) \in \mathbb{R}$ não é combinação linear finita de vetores $\bar{e}_n$.

Entretanto, embora não exibamos explicitamente uma base de Hammel para o espaço $\mathbb{R}^\infty$, o teorema que discutiremos na próxima seção, nos garantirá que existe uma base de Hammel para este espaço.

Definição 1.3.4. *Dizemos que um espaço vetorial é de dimensão finita se existe uma base finita para V. Caso contrário dizemos que a dimensão de V é infinita.*

Observação: No caso de V ser um espaço de dimensão finita, podemos associar ao espaço um número natural bem definido que será chamado de dimensão do espaço. Para isso, enunciaremos antes um resultado que justificará esta relação.

Teorema 1.3.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Então duas bases quaisquer de V têm o mesmo número de elementos.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em qualquer livro conceituado de álgebra linear. Indicamos ao leitor o livro [6].

Podemos então apresentar a seguinte definição.

Definição 1.3.5. *Chama-se dimensão de um espaço vetorial V de dimensão finita ao número de elementos de qualquer uma das bases para V.*
Notação: dim V.

1.4 Existência de bases

Na seção anterior definimos, a partir de conjunto gerador e conjunto L.I., a idéia de base e dimensão de um espaço vetorial. A questão que se coloca agora é a seguinte: Seja V um espaço vetorial qualquer, existe uma base de Hammel para este espaço? E se existir, ela é facilmente encontrada? No exemplo 1.3.6, construímos uma base $\mathcal{B}$ para $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a partir de uma base de $\mathcal{P}_n$ dada. Porém, no exemplo seguinte (exemplo 1.3.7), vimos que não é possível fazer o mesmo para $\mathbb{R}^\infty$. O que queremos agora é analizar se mesmo não apresentando uma base para este espaço, podemos garantir sua existência. Para tanto, iremos utilizar o chamado Lema de Zorn, e relembrar alguns conceitos relacionados.

Definição 1.4.1. *Seja E um conjunto não vazio, e R uma relação sobre este conjunto, então:*

1. *A relação R é chamada de relação de ordem parcial sobre E, se e somente se, R é reflexiva, anti-simétrica e transitiva, isto é, são verdadeiras as setenças:*
   (a) $(\forall x)(x \in E \Rightarrow xRx)$
   (b) $(\forall x, y \in E)(xRy \quad e \quad yRx \Rightarrow x = y)$
   (c) $(\forall x, y, z \in E)(xRy \quad e \quad yRz \Rightarrow xRz)$
2. *Um conjunto parcialmente ordenado é um conjunto sobre o qual se define uma certa ordem parcial.*
3. *Os elementos x e y de uma ordem parcial (E,R) são comparáveis se xRy ou yRx, caso contrário são incomparáveis.*
4. *Se dois elementos quaisquer de E forem comparáveis mediante R, então R será chamada relação de ordem total sobre E. Dizemos que E é conjunto totalmente ordenado.*
5. *Um conjunto totalmente ordenado é chamado de cadeia.*
6. *Seja A um subconjunto não vazio do conjunto parcialmente ordenado E. Um elemento $m \in A$ é um elemento maximal de A quando se verifica:*

$$(\forall x \in A)(m \leq x \Rightarrow m = x).$$

A seguir, enunciamos o importante Lema de Zorn, cuja demonstração pode ser encontrada em $([3], p.105)$.

Lema 1.4.1 (Lema de Zorn)**.** *Seja E um conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadeia tenha pelo menos uma cota superior, então E tem um elemento maximal.*

A partir deste resultado, podemos demonstrar o teorema de nosso interesse.

Teorema 1.4.2 (Base de Hammel)**.** *Todo espaço vetorial admite uma base de Hammel.*

Demonstração. Considere o conjunto B cujos elementos são subconjuntos de vetores linearmente independentes de V. Note que B é não vazio, pois, por exemplo, se $v \in V$ é não nulo então o conjunto $\{v\}$, formado pelo elemento v é L.I..
Consideremos a relação de ordem dada pela inclusão de conjuntos em B, isto é, $C \leq D$, se $C \subseteq D$. Suponha que $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma cadeia em B, então $\bigcup_n I_n \in B$ pois dado um conjunto finito $\{e_1, ..., e_n\} \subset \bigcup_n I_n$, então certamente existe n_0 tal que

$$\{e_1, ..., e_n\} \subset I_{n_0}$$

Como I_{n_0} é formado por vetores linearmente independentes, podemos concluir que $\bigcup_n I_n$ é um conjunto de vetores linearmente independentes. Pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal em B, digamos I_M.
Afirmamos que I_M é uma base de Hammel, efetivamente:
Dado $e \notin I_M$, suponha que para qualquer combinação linear da forma

$$ke + k_1e_1 + ... + k_ne_n = 0$$

com $\{e_1, ..., e_n\} \subset I_M$, teriamos $k = 0$. Então como $\{e_1, ..., e_n\}$ são vetores linearmente independentes, teriamos que $k = k_i = 0$, e consequentemente $I_M \bigcup\{e\}$ seria linearmente independente. O que contradiz o fato de I_M ser o elemento maximal. Portanto, existem $e_1, ..., e_n \in I_M$ e $k, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$ com $k \neq 0$ tal que

$$ke + k_1e_1 + ... + k_ne_n = 0$$

ou seja,

$$e = -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} k_i ei.$$

Isto mostra que todo elemento e de V pode ser escrito como combinação linear de elementos de I_M.

□

Usando-se a mesma idéia da demonstração anterior, podemos mostrar o seguinte resultado:

Proposição 1.4.1. *Seja A um conjunto L.I. em um espaço vetorial V. Então existe uma base de Hammel C de V tal que $A \subseteq C$.*

Observe que, para espaços com dimensão infinita, precisaremos de um conjunto infinito de vetores para gerar o espaço, onde cada vetor do espaço, é uma combinação linear finita daquela “base infinita”, ou seja, para cada vetor, podemos escolher uma quantidade finita de vetores da “base”para com eles escrever o vetor dado. O que nem sempre é fácil de se encontrar. Embora o teorema anterior afirme que exista. Por exemplo, considere o espaço vetorial c_{00} de todas as sequências de elementos de $\mathbb{R}$ que se anulam a partir de uma certa ordem n,

$$c_{00} = \{v = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty; x_i = 0 \quad \text{para algum} \quad i \geq n\}.$$

Neste espaço, as operações de soma e multiplicação de escalares, são definidas de modo natural. Então, $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n, \ldots\}$ é uma base de Hammel para c_{00}, pois é um conjunto L.I. neste espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, e cada vetor de c_{00} pode ser escrito como uma combinação linear finita de elementos de $\mathcal{B}$. Agora, seja c_0 o espaço vetorial de todas as sequências de elementos de $\mathbb{R}$ convergindo para zero,

$$c_0 = \{v = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty; (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \text{converge a zero}\}.$$

Para este espaço vetorial de dimensão infinita o conjunto $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n, \ldots\}$ não forma uma base de Hammel, pois, embora seja um conjunto L.I. em c_0, este não gera o espaço vetorial c_0, dado que existem vetores de c_0 que não podem ser escritos como uma soma finita de combinações de elementos de $\mathcal{B}$, por exemplo, o vetor $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots) \in c_0$ e não pode ser escrito como combinação linear finita de elementos de $\mathcal{B}$.

Para finalizar esta seção apresentaremos outros exemplos de bases para espaços de dimensão infinita.

Exemplo 1.4.1 (*O conjunto dos Polinômios*)**.** *$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ é o espaço de todos os polonômios (de qualquer grau) com coeficientes reais. Uma base para este espaço de dimensão infinita é o conjunto $\{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$.*

De fato, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$ é um conjunto linearmente independente infinito de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, pois dado um subconjunto finito F de $\mathcal{B}$,

$$F = \{(x^{n_1}, \ldots, x^{n_k}); \quad n_i \in \mathbb{N}\}$$

e coeficientes $\alpha_{n_1}, \ldots, \alpha_{n_k}$ reais, teremos

$$p(x) = \alpha_{n_1} x^{n_1} + \ldots + \alpha_{n_k} x^{n_k} = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, somente quando $\alpha_{n_1} = \ldots = \alpha_{n_k} = 0$. Além disso, todos os polinômios de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ podem ser escritos como uma soma finita de combinações lineares de elementos de $\mathcal{B}$.

Exemplo 1.4.2 (*O conjunto dos Polinômios Trigonométricos*)**.** *Chamaremos de Polinômio Trigonométrico de grau* n *qualquer função* $T_n(x)$ *da forma abaixo*

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kx) + b_k sen(kx)\right],$$

para algum n *natural, e coeficientes reais.*
O conjunto $T(\mathbb{R})$ *de todos os polinômios (de qualquer grau) constituídos dessa forma, é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre* $\mathbb{R}$*, onde as operações são soma de polinômios e multiplicação destes por números reais. O conjunto*

$$\mathcal{B} = \{1, sen(x), \cos(x), sen(2x), \cos(2x), ..., sen(kx), \cos(kx), ...\},$$

é uma base para este espaço.

Vamos verificar que $\mathcal{B}$ é realmente uma base de Hammel para $T(\mathbb{R})$.
É imediato que o conjunto $\mathcal{B}$ gera o espaço $T(\mathbb{R})$. Para provar que $\mathcal{B}$ é um conjunto L.I. recorremos as seguintes afirmações:

Afirmação 1: Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos,

$$sen(k_0x)sen(kx) = \frac{1}{2}\left[\cos((k_0 - k)x) - \cos((k_0 + k)x)\right].$$

De fato, pelas propriedades trigonométricas,

$$\cos(k_0x + kx) = \cos(k_0x)\cos(kx) - sen(k_0x)sen(kx). \tag{1.1}$$

Da mesma forma,

$$\cos(k_0x - kx) = \cos(k_0x)\cos(-kx) - sen(k_0x)sen(-kx).$$

Como $\cos(u)$ é uma função par e $sen(u)$ é uma função impar, para todo u real, segue que,

$$\cos(k_0x - kx) = \cos(k_0x)\cos(kx) + sen(k_0x)sen(kx). \tag{1.2}$$

Subtraindo as equações 1.2 e 1.1, temos,

$$\begin{aligned}\cos(k_0x - kx) - \cos(k_0x + kx) &= \cos(k_0x)\cos(kx) + sen(k_0x)sen(kx) \\ &- \cos(k_0x)\cos(kx) + sen(k_0x)sen(kx).\end{aligned}$$

Logo,

$$sen(k_0x)sen(kx) = \frac{1}{2}\left[\cos((k_0-k)x) - \cos((k_0+k)x)\right].$$

Afirmação 2: Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, com $k \neq k_0$, temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(k_0x)sen(kx)dx = 0.$$

Efetivamente, pela afirmação 1,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} sen(k_0x)sen(kx)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos((k_0-k)x) - \cos((k_0+k)x)\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos((k_0-k)x)dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos((k_0+k)x)dx\right].
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(k_0x)sen(kx)dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{sen((k_0-k)x)}{k_0-k}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{sen((k_0+k)x)}{k_0+k}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right].$$

Como $(k_0 - k)$ e $(k_0 + k)$ são números inteiros,

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{sen((k_0-k)x)}{k_0-k}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{sen((k_0+k)x)}{k_0+k}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right] = 0,$$

logo,

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(k_0x)sen(kx)dx = 0, \quad k \neq k_0.$$

Afirmação 3: Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, temos,

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(k_0x)\cos(kx)dx = 0.$$

A igualdade acima, vem do fato de $(sen(k_0x)\cos(kx))$ ser uma função impar.

Após estas afirmações, voltemos ao nosso problema inicial, provar que $\mathcal{B}$ é L.I.. Primeiramente, considere uma combinação linear finita C de elementos de $\mathcal{B}$ e coeficientes reais.

Seja $f(x) = C$, então $f(x)$ é da forma

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kx) + b_k sen(kx) \right],$$

para algum $n \in \mathbb{N}$. Suponha $f(x) = 0$ para todo x real, então,

$$f'(x) = -a_1 sen(x) + b_1 \cos(x) - \ldots - n a_n sen(nx) + n b_n \cos(nx) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ou seja,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[\bar{a}_k sen(kx) + \bar{b}_k \cos(kx) \right],$$

onde, $\bar{a}_k = -k a_k$ e $\bar{b}_k = k b_k$, para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Vamos mostrar que $\bar{a}_k = 0$ e $\bar{b}_k = 0$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, e portanto a_k e b_k serão iguais a zero.
Suponha que exista pelo menos um $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\bar{a}_k \neq 0$ (ou $\bar{b}_k \neq 0$).
Seja k_0 o menor natural tal que $\bar{a}_{k_0} \neq 0$ (ou $\bar{b}_{k_0} \neq 0$).
Nos restringiremos ao caso em que $\bar{a}_{k_0} \neq 0$, sendo o caso onde $\bar{b}_{k_0} \neq 0$ análogo.
Segue que, para este k_0, teremos

$$sen(k_0 x) \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[\bar{a}_k sen(kx) + \bar{b}_k \cos(kx) \right] = 0,$$

assim,

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\bar{a}_k sen(k_0 x) sen(kx) + \bar{b}_k sen(k_0 x) \cos(kx) \right] = 0.$$

Ainda,

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \bar{a}_k sen(k_0 x) sen(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \bar{b}_k sen(k_0 x) \cos(kx) dx \right] = 0.$$

Segue das afirmações 2 e 3 que,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \bar{a}_{k_0} sen(k_0 x) sen(k_0 x) dx = 0.$$

Entretanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen^2(k_0 x) dx > 0,$$

pois a função $sen^2(k_0 x)$ é uma função contínua positiva.
Logo, $\bar{a}_{k_0} = 0$, contradizendo a hipótese de que $\bar{a}_{k_0} \neq 0$. Assim, $\bar{a}_k = 0$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e portanto, $a_k = 0$ para todo k. Da mesma forma $b_k = 0$ para todo

$k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Para finalizar, como $f(x) = 0$, segue que $a_0 = 0$ e portanto todos os coeficientes reais de $f(x)$ são nulos.
Logo, $\mathcal{B}$ é um conjunto linearmente independente, e assim $\mathcal{B}$ é uma base para $T(\mathbb{R})$.

Capítulo 2

Espaços Normados

Este capítulo será dedicado a introdução do conceito de espaços normados, o qual relaciona conceitos algébricos e métricos. Para tanto, primeiro introduziremos um conceito auxiliar, a norma, depois empregaremos este conceito a um espaço vetorial para obter uma métrica d, e consequentemente um espaço normado. O fato é que analizando espaços vetoriais como espaços normados, nos possibilitará a introdução de uma série de conceitos e propriedades que darão continuidade ao nosso estudo. Entre eles, está o conceito de base de Schauder que analisaremos no final deste capítulo.

2.1 Espaços Normados

Definição 2.1.1 (Norma)**.** *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma norma em V é uma aplicação $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$ tal que para quaisquer* $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$ *se tenha:*

i) $\|\mathrm{u}\| \geq 0 \quad e \quad \|\mathrm{u}\| = 0 \iff u = 0;$

ii) $\|\alpha \mathrm{u}\| = |\alpha| \|\mathrm{u}\|;$

iii) $\|\mathrm{u} + \mathrm{v}\| \leq \|\mathrm{u}\| + \|\mathrm{v}\|.$

Um *Espaço Normado* V é um espaço vetorial no qual está definido uma norma. A seguir, veremos alguns exemplos de espaços normados.

Exemplo 2.1.1. *Consideremos o espaço euclideano $\mathbb{R}^n$. Vamos mostrar que, a aplicação*

$$x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \|x\| = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$$

é uma norma em $\mathbb{R}^n$, em que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

O primeiro e o segundo axioma da definição de norma são triviais, conforme o leitor pode ver abaixo:

i) $\|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$ (por definição de módulo).
Além disso,

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_k = 0 \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$$

ou seja,

$$\|x\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

ii) $\|\lambda \cdot x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda \cdot x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda^2 \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$
Logo,

$$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|.$$

Para provar o terceiro axioma da definição de norma, vamos utilizar a desigualdade de Cauchy-Schawarz. Suporemos o leitor familiarizado com esse resultado, que pode ser encontrado em ([5], p.14).

iii) Considere em $\mathbb{R}^n$ o produto interno usual. Então por definição, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2,
\end{aligned}$$

aplicando a desigualdade de Cauchy-Schawarz, obtemos

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

assim,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados da desigualdade acima, chegamos ao resultado desejado. Logo,

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Portanto, como as condições da definição de norma são satisfeitas, e $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial, acabamos de provar que $\mathbb{R}^n$ é um espaço normado com esta norma.

Observação: Podemos verificar que $\mathbb{R}^n$ também é um espaço normado com qualquer uma das normas seguintes:

a) $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \quad$ se $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$;

b) $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|, \quad$ se $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

As notações $\|x\|_\infty$ e $\|x\|_1$, explicam-se por analogia com o que se passa no exemplo que examinaremos adiante em 2.1.4. Da mesma forma, a norma acima poderia ter sido chamada de $\|x\|_2$.

Exemplo 2.1.2. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$. Seja $\mathcal{C}([a,b])$ o conjunto de todas as funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$,*

$$\mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}; \quad f \textit{ é contínua}\},$$

que é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ definido em 1.1.1.
Para cada $f \in \mathcal{C}([a,b])$, façamos

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt.$$

Vamos verificar que $\|\cdot\|_1$ é norma em $\mathcal{C}([a,b])$.

Sejam $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

i) $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt \geq 0. \quad$ (por definição de módulo)

Além disso, como f é contínua em $[a,b]$ e $|f(t)| \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$,

$$\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(t)|dt = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |f(t)| = 0 \quad \forall t \in [a,b]$$

conforme podemos verificar no apêndice. Assim,

$$\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(t)|dt = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) = 0.$$

ii) $\|\lambda \cdot f(t)\| = \int\limits_a^b |\lambda \cdot f(t)|dt = |\lambda| \int\limits_a^b |f(t)|dt.$
Logo,

$$\|\lambda \cdot f(t)\| = |\lambda| \|f(t)\|.$$

iii) $\|f(t) + g(t)\| = \int\limits_a^b |f(t) + g(t)|dt \leq \int\limits_a^b (|f(t)| + |g(t)|)dt.$
Segue da propriedade de integral,

$$\int\limits_a^b (|f(t)| + |g(t)|)dt = \int\limits_a^b |f(t)|dt + \int\limits_a^b |g(t)|dt.$$

Logo,

$$\|f(t) + g(t)\| \leq \|f(t)\| + \|g(t)\|.$$

Portanto, como as condições da definição de norma são satisfeitas temos que o espaço vetorial $\mathcal{C}([a,b])$, com a norma $\|\cdot\|_1$ é um espaço normado.

Exemplo 2.1.3. *Podemos estabelecer outro tipo de norma no espaço vetorial $\mathcal{C}([a,b])$, definido no exemplo anterior. Para cada $f \in \mathcal{C}([a,b])$, façamos,*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

É imediato que os axiomas i) e ii) da definição de norma são satisfeitos. Quanto ao axioma iii), note que

$$|(f+g)(t)| = |f(t)+g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \quad \forall t \in [a,b]. \tag{2.1}$$

Além disso, para todo $t \in [a,b]$,

$$|f(t)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \quad \text{e} \quad |g(t)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |g(t)|,$$

segue que,

$$|f(t)| + |g(t)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |g(t)| \quad \forall t \in [a,b]. \tag{2.2}$$

Logo, de (2.1) e (2.2),

$$\sup_{t\in[a,b]} |(f+g)(t)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |g(t)| \quad \forall t \in [a,b].$$

Portanto, $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em $\mathcal{C}([a,b])$, e assim, $\mathcal{C}([a,b])$ é um espaço normado com esta norma.

Observe que o espaço normado $\mathcal{C}([a,b])$ definido pela norma $\|\cdot\|_1$ é distinto do espaço normado $\mathcal{C}([a,b])$ definido pela norma $\|\cdot\|_\infty$. Se considerarmos, por exemplo a função $f(x) = x^2$, definida no intervalo $[0,2]$, teremos que geometricamente a $\|f\|_1$ representará toda área sob a curva, já a $\|f\|_\infty$ representará apenas o ponto de máximo da função no intevalo $[0,2]$ (Veja a figura 2.1).

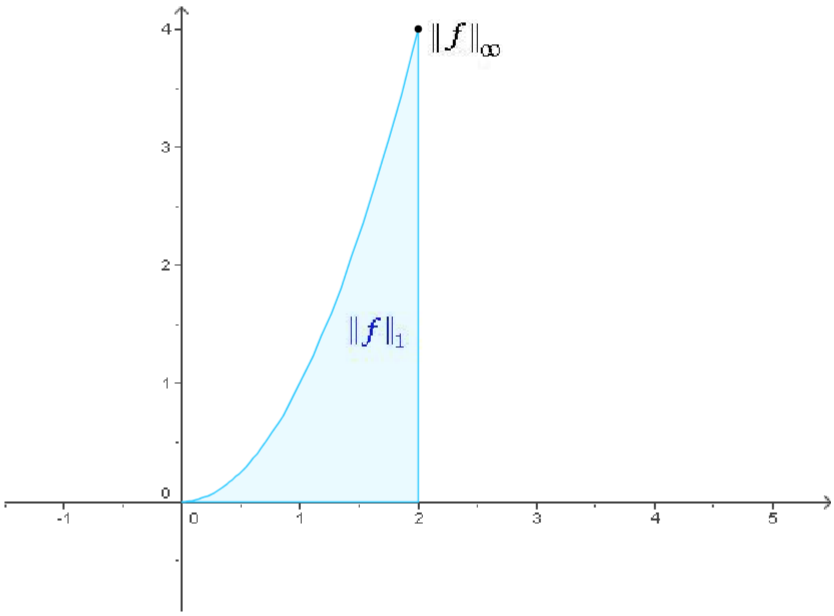

Figura 2.1: Representação gráfica de $\|f\|_1$ e $\|f\|_\infty$.

No exemplo a seguir, consideraremos espaços constituídos por funções reais ou complexas, definidas em um certo conjunto T. Estes espaços se tornam espaços vetoriais, se a soma e o produto escalar são definidos por

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), \quad (\lambda x)(t) = \lambda x(t) \quad \forall t \in T.$$

Em particular, se $T = \{1, 2, \ldots, n\}$, obtemos os espaços das n-uplas de reais ou complexos, e se $T = \mathbb{N}$, obtemos espaços vetoriais de sequências.

Exemplo 2.1.4. *Fixemos $p \in [1, +\infty)$. Seja l^P o conjunto de todas as sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tais que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ converge. Considere a soma e a multiplicação por escalar definidas de modo usual. Para $p \geq 1$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$, façamos*

$$\|x\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R},$$

então l^p é um espaço normado com esta norma.

Os axiomas *i)* e *ii)* da definição de norma, são de fácil verificação. Quanto ao axioma *iii)*, como o caso em que $p = 1$ é imediato, nos restringiremos ao caso em que $p > 1$. Para demontrá-la vamos utilizar as desigualdades de Hölder e de Minkowski, as quais são provadas a seguir.
Inicialmente, vamos estabelecer a seguinte desigualdade auxiliar:
se $0 < \alpha < 1$ e $a, b \geq 0$, então

$$a^{\alpha} b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b.$$

De fato, podemos nos restringir ao caso em que $0 < a < b$. Consideremos a seguinte aplicação derivável

$$t \in [a, b] \longmapsto t^{1-\alpha} \in \mathbb{R}.$$

Pelo teorema do valor médio, existe $t \in (a, b)$ tal que

$$b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} = (1-\alpha) t^{-\alpha} (b - a).$$

Como $t > a$, temos $t^{-\alpha} < a^{-\alpha}$, então

$$b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} < (1-\alpha)a^{-\alpha}(b-a).$$

Multiplicando ambos os lados desta última desigualdade por a^{α}, obtemos

$$a^{\alpha}b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b,$$

como desejávamos.
Provemos a desigualdade de Hölder. Seja $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Se $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} x_k$, $\sum\limits_{k=0}^{n} y_k \in \mathbb{K}$, então

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Vamos considerar o caso em que

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{n} |y_k|^q > 0,$$

pois, se algum desses termos for nulo, a desigualdade é claramente satisfeita.
Para cada $0 \leq k \leq n$, façamos

$$a_k = \frac{|x_k|^p}{\sum\limits_{i=0}^{n} |x_i|^p} \quad \text{e} \quad b_k = \frac{|y_k|^q}{\sum\limits_{i=0}^{n} |y_i|^q}.$$

Fazendo $\alpha = \frac{1}{p}$ e aplicando a desigualdade que provamos anteriormante, temos

$$\frac{|x_k|}{\left(\sum\limits_{i=0}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|y_k|}{\left(\sum\limits_{i=0}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\sum\limits_{i=0}^{n} |x_i|^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{\sum\limits_{i=0}^{n} |y_i|^q}$$

para cada $k = 0, 1, \ldots, n$.
Como a desigualdade acima, vale para cada $k = 0, 1, \ldots, n$, ela também é válida para o somatório, com k variando de 0 até n,

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{|x_k|}{\left(\sum\limits_{i=0}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|y_k|}{\left(\sum\limits_{i=0}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \right) \leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\sum\limits_{i=0}^{n} |x_i|^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{\sum\limits_{i=0}^{n} |y_i|^q} \right)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left(\sum\limits_{i=0}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\sum_{k=0}^{n}|x_ky_k| &\leq \frac{1}{p}\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n}|x_i|^p}\sum_{k=0}^{n}|x_k|^p+\frac{1}{q}\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n}|y_i|^q}\sum_{k=0}^{n}|y_k|^q \\
&\leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{k=0}^{n}|x_ky_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{n}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

como queriamos demonstrar.

A seguir, provemos a desigualdade de Minkowski.

Se $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} x_k$, $\sum\limits_{k=0}^{n} y_k$ com $x_k, y-k \in \mathbb{K}$, então

$$\left(\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $\sum\limits_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p=0$, a desigualdade acima é claramente satisfeita.Vamos considerar o caso em que$\sum\limits_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p>0$. Temos

$$\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p=\sum_{k=0}^{n}\left(|x_k+y_k|^{p-1}|x_k+y_k|\right).$$

Aplicando a desigualdade triangular,temos que $|x_k+y_k| \leq |x_k|+|y_k|$, e

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p &\leq \sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^{p-1}|x_k|+\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^{p-1}|y_k| \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\sum_{k=0}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

sendo a última desigualdade válida pela desigualdade de Hölder.

Como $(p-1)q=p$, vem

$$\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p \leq \left(\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\sum_{k=0}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=0}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{-\frac{1}{q}},$$

obtemos a desigualdade desejada.

Após estes resultados, podemos demonstrar o axioma *iii)*. Primeiramente, observe que se $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$, então,

$$\|x\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

e

$$\|y\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Pela desigualdade de Minkowski,

$$T_N = \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^{N} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ou seja,

$$T_N = \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\| + \|y\|.$$

Logo, a seqência T_N é limitada e como seus termos são não negativos, ela é uma sequência monótona não decrescente. Portanto, a sequência T_N é convergente, ou seja, o limite de T_N existe

$$\lim_{N\to\infty} T_N = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x + y\|.$$

Como $T_N \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $N \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{N\to\infty} T_N \leq \|x\| + \|y\|,$$

ou seja,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

2.2 Base de Schauder

Para o espaço de dimensão finita $\mathbb{R}^n$, o conjunto dos n vetores canônicos linearmente independentes formam uma base (chamada base de Hammel) deste espaço vetorial. Porém, para certos espaços de dimensão infinita, o espaço c_0, por exemplo, o correspondente conjunto de infinitos vetores canônicos não é uma base de Hammel, pois existem vetores pertencentes a este espaço que não podem ser escritos como uma combinação linear finita dos vetores canônicos. Por outro lado, cada vetor $x \in c_0$ pode ser aproximado por combinações lineares finitas destes elementos, formando assim um outro tipo de base, a Base de Schauder, a qual definimos abaixo.

Definição 2.2.1. *Uma base de Schauder de um espaço normado V é uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em V em que, a cada vetor $x \in V$, associa-se uma única sequência de escalares $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ de forma que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n.$$

Dessa forma, se $\mathcal{B} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder de um espaço normado V, dado um vetor x de V, x pode não ser uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$, mas deve ser uma "combinação linear infinita"no sentido de que cada vetor de V é aproximado por combinações lineares finitas de $\mathcal{B}$.

Note que o conceito de base de Hammel faz sentido em qualquer espaço vetorial, mesmo que este não seja um espaço normado. No entanto, para bases de Schauder, é necessário que estejamos tratando de espaços normados, pois queremos que cada vetor v do espaço seja "aproximado"por combinações lineares finitas. Assim, para podermos falar em "aproximado", precisamos de alguma noção de distância, que neste caso é a norma. De fato,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

se

$$\lim_{N\to\infty} \|x - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n\| = 0.$$

Exemplo 2.2.1. *A base de Schauder do espaço $l^p(\mathbb{R}), 1 < p < \infty$ é dada por $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}^{\infty}$, onde*

$$\bar{e}_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots)$$

é a sequência infinita cujo n-ésimo termo é 1 e os demais são iguais a zero.

De fato, para qualquer elemento $x \in l^p(\mathbb{R})$ da forma $x = (x_1, x_2, ...)$ temos

$$x = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ...$$

pois,

$$\lim_{k\to\infty} \|x - (x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_k\bar{e}_k)\| = \lim_{k\to\infty}(\sum_{i=k+1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = (\lim_{k\to\infty} \sum_{i=k+1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

e como $x \in l^p(\mathbb{R})$, então

$$\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

pelo que $\sum_{i=k+1}^{\infty} |x_i|^p$ é o resto de uma série convergente, logo tende para zero quando $k \to \infty$, e assim provamos que cada elemento $x \in l^p(\mathbb{R})$, pode ser escrito como combinação linear (infinita) de elementos de $\mathcal{B}$. Vamos provar que esta maneira de escrever é única. Suponhamos por absurdo que o vetor x possa ser escrito de duas maneiras distintas, isto é,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\bar{e}_n \quad \text{e} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\bar{e}_n$$

onde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\bar{e}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\bar{e}_n$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n - \beta_n)\bar{e}_n = 0.$$

Segue que,

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n - \beta_n)\bar{e}_n\right\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Logo, $|\alpha_n - \beta_n| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e então $\alpha_n = \beta_n$ para todo n natural. Portanto, todo vetor $x \in V$ se exprime de modo único.

Exemplo 2.2.2. *O conjunto $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}^\infty$, também é base de Schauder para o espaço c_0 de todas as sequências de elementos de $\mathbb{R}$ convergindo para zero, com a norma $\|\cdot\|_\infty$.*

De fato, para qualquer elemento $x \in c_0$ da forma $x = (x_1, x_2, ...)$ temos

$$x = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_k\bar{e}_k$$

pois,

$$\lim_{k\to\infty} \|x - (x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_k\bar{e}_k)\| = \lim_{k\to\infty} \| \sum_{i=k+1}^{\infty} x_i\bar{e}_i\| = \lim_{k\to\infty} \left(\sup_{k+1\leq i\leq\infty} |x_i| \right).$$

Como x é uma sequência de elementos de $\mathbb{R}$ convergindo para zero, então quando $k \to \infty$ os x_i tendem à zero. Logo,

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sup_{k+1\leq i\leq\infty} |x_i| \right) = 0.$$

Portanto todo elemento $x \in c_0$, pode ser escrito como combinação linear (infinita) de elementos de $\mathcal{B}$. Vamos provar sua unicidade.

Suponhamos por absurdo que o vetor x possa ser escrito de duas maneiras distintas, isto é,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\bar{e}_n \quad \text{e} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\bar{e}_n$$

onde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\bar{e}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\bar{e}_n$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n)\bar{e}_n = 0.$$

Segue que,

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n)\bar{e}_n \right\| = \sup_{1\leq n\leq\infty} |\alpha_n - \beta_n| = 0.$$

Logo, $|\alpha_n - \beta_n| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e assim $\alpha_n = \beta_n$ para todo n natural. Portanto, todo vetor $x \in V$ se exprime de modo único.

Capítulo 3

Transformações Lineares

No presente capítulo vamos estudar aplicações entre espaços vetoriais que preservam as duas operações algébricas destes espaços. Estas aplicações entre espaços vetoriais e, em particular, espaços normados, é chamada de transformações lineares. No caso do espaço de chegada ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ então a aplicação é chamada de funcional. Uma classe muito importante das transformações lineares são as limitadas, visto que estas podem tirar partido da estrutura vetorial. Também veremos que como as transformações lineares são funções, o conceito de continuidade aplica-se a estas. Um fato importante é que para transformações lineares, continuidade e limitação tornam-se conceitos equivalentes como estudaremos com mais detalhes.

3.1 Definição e exemplos

Definição 3.1.1 (Transformação Linear)**.** *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares $\mathbb{K}$. Uma aplicação $T : X \to Y$ será dita transformação linear se, para todo $x, y \in X$ e α escalares tivermos,*

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha(Tx).$$

Note que as condições da definição de transformação linear, mostram que T preserva as duas operações do espaço vetorial. Além disso, são equivalentes a

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

As transformações lineares $T : X \to X$ do espaço vetorial X em si mesmo são chamadas de *operadores lineares.* No caso do espaço de chegada ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ então a transformação linear também é chamada de *funcional linear.*

Denotaremos por $D(T)$, o domínio da transformação linear.

Exemplo 3.1.1 (Operador identidade)**.** *O operador $I_X : X \to X$ definido por $I_X(x) = x$ para todo $x \in X$ chama-se operador identidade. Temos $D(I_X) = X$.*

Exemplo 3.1.2 (Operador diferenciação)**.** *Seja $X = \mathcal{P}([0,1])$ o espaço vetorial de todos os polinômios em $[0,1]$ e o operador $T : X \to X$, dado por*

$$Tp(t) = p'(t),$$

onde $p'(t)$ designa a derivada do polinômio p. O operador T é linear.

De fato, para quaisquer $p, q \in X$ e escalares α e β, temos

$$\begin{aligned} T(\alpha p + \beta q) &= (\alpha p + \beta q)' \\ &= \alpha p' + \beta q' \\ &= \alpha Tp + \beta Tq. \end{aligned}$$

Exemplo 3.1.3 (Operador integração)**.** *Seja $X = C([0,1])$ o espaço vetorial das funções reais contínuas definidas em $[0,1]$. Se definirmos $T : X \to X$, por*

$$Tx(t) = \int_0^t x(s)ds, \quad t \in [0,1]$$

então T é um operador linear.

De fato,

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y)(t) &= \int_0^t (\alpha x + \beta y)(s)ds \\ &= \int_0^t (\alpha x)(s)ds + \int_0^t (\beta y)(s)ds \\ &= \alpha \int_0^t x(s)ds + \beta \int_0^t y(s)ds \\ &= \alpha Tx(t) + \beta Ty(t), \end{aligned}$$

o que mostra que

$$T(\alpha x + \beta y)(t) = \alpha Tx(t) + \beta Ty(t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

e portanto,

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

Exemplo 3.1.4. *Uma matriz real $A = (a_{ij})$ com m linhas e n colunas define uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ pela fórmula, $T(x) = Ax$, onde $x = (x_j)$ tem n componentes e $T(x) = (y_i)$ tem m componentes e estes são escritos na forma de colunas por causa da conversão da multiplicação de matrizes, escrevendo $T(x) = Ax$, temos*

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.1.5. *Se $k \in \mathbb{R}$, então $T_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$T_k(x) = kx, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

é um funcional linear. O gráfico de T_k é uma reta passando pela origem $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ e com inclinação k.

3.2 Transformações Lineares limitadas e contínuas

Vamos agora analisar em espaços normados, uma classe de transformações importantes, as tranformações lineares limitadas, a qual está encapsulada um critério simples para a continuidade de transformações lineares.

Definição 3.2.1 (Transformação limitada)**.** *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear. Dizemos que T é limitada se existe uma constante c tal que para todo $x \in X$,*

$$\|Tx\| \leq c\|x\|. \tag{3.1}$$

Exemplo 3.2.1. *O operador truncamento $T : l^p \to l^p$, definido por*

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$$

é limitado.

De fato, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$, então pela definição de norma no l^p temos

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R},$$

e

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|^p &= \|\sum_{n=2}^{\infty} e_{n-1}x_n\|^p \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^p \\
&\leq |x_1|^p + \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^p = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \|x\|^p.
\end{aligned}$$

Segue que,

$$\|Tx_n(t)\|^p \leq \|x_n\|^p \quad \forall x \in X,$$

ou seja,

$$\|Tx_n(t)\| \leq \|x_n\| \quad \forall x \in X.$$

Portanto, T é limitado.

Exemplo 3.2.2 (Operador diferenciação)**.** *Seja $X = \mathcal{P}([0, 1])$ o conjunto dos polinômios definidos em $[0, 1]$. Definimos $T : X \to X$ por $T(x) = x'$. Este operador não é limitado.*

De fato, seja x_n o polinômio $x_n(t) = t^n$. Então

$$\|x_n\| = \sup\{|x_n(t)|, \quad t \in [0, 1]\} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e,

$$\|Tx_n\| = \sup\{|x'_n(t)|, \quad t \in [0, 1]\} = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Disto segue que,

$$\|Tx_n(t)\| = n\|x_n\|.$$

Como $n \in \mathbb{N}$ é arbitrário, não existe c tal que para todos $n \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$\|Tx_n(t)\| \leq c\|x_n\|.$$

Portanto, T não é limitada.

Note que, o conceito de transformação limitada difere do conceito de função limitada, onde uma função limitada é aquela cujo conjunto imagem é limitado. No caso das transformações lineares, só a transformação nula tem o conjunto imagem limitado. A motivação do termo transformação linear limitada deve-se ao fato que tal transformação leva conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Da definição de transformação limitada surge a seguinte pergunta: Qual é o menor valor possível de c tal que (3.1) seja verdadeira para todo $x \in X$?

Desconsideremos o caso $x = 0$. Dividindo (3.1) por $\|x\|$ temos

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c \quad \forall x \neq 0.$$

Tomando o supremo sobre $X \setminus 0$ obtemos

$$\sup_{x \in X \setminus 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c$$

assim, este supremo é a constante mais pequena tal que (3.1) se verifica. Esta constante é denotada por $\|T\|$ e é chamada norma de T, isto é,

$$\|T\| = \sup_{x \in X \setminus 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c$$

A seguir veremos que toda transformação linear definida em um espaço normado X de dimensão finita é limitada. Antes, porém, vamos enunciar um resultado que utilizaremos para este fim, cuja demonstração pode ser encontrada em ([5], p. 72).

Lema 3.2.1. *Seja $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independente em um espaço normado X (de qualquer dimensão). Então existe um número $c > 0$ tal que para toda escolha de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ teremos*

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|) \quad (c > 0).$$

Teorema 3.2.2 (Dimensão finita). *Se um espaço normado X tem dimensão finita, então toda transformação linear em X é limitada.*

Demonstração. Seja dim$X = n$ e $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ uma base para X. Tomamos $x = \sum \lambda_j e_j$ e consideremos alguma transformação linear T em X.
Como T é linear,

$$\|Tx\| = \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Te_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \|Te_i\| \leq \max_{1\leq i\leq n} \|Te_{1\leq i\leq n}\| \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

Para a última soma aplicamos o Lema 3.2.1 e obtemos,

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq \frac{1}{c} \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\| = \frac{1}{c}\|x\|$$

ao mesmo tempo,

$$\|Tx\| \leq \delta\|x\| \quad \text{onde} \quad \delta = \frac{1}{c} \max_{1\leq i\leq n} \|Te_{1\leq i\leq n}\|$$

Logo, T é limitada.

□

Definição 3.2.2 (Transformação Contínua). *Seja X e Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear. T é contínua em um x_0 se para todo $\mathcal{E} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|Tx - Tx_0\| < \mathcal{E}, \quad \forall x \in X \quad \textit{satisfazendo} \quad \|x - x_0\| < \delta.$$

Dizemos que T é contínua se T for contínua para todo $x \in X$.

Exemplo 3.2.3. *O operador identidade I_X é contínuo.*

De fato, dado $\mathcal{E} > 0$, tome $\delta = \mathcal{E}$ então,

$$\|Tx - Tx_0\| = \|x - x_0\| < \delta = \mathcal{E}$$

sempre que $\|x - x_0\| < \delta$.

Exemplo 3.2.4. *O funcional $T_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $T_k(x) = kx$, para todo x real é contínuo.*

De fato, dado $\mathcal{E} > 0$, tome $\delta = \frac{\mathcal{E}}{|k|}$ então,

$$\|T_k x - T_k x_0\| = \|kx - kx_0\| = |k|\|x - x_0\| < |k| \cdot \delta = \mathcal{E}$$

sempre que $\|x - x_0\| < \delta$.

A seguir, vamos estudar a relação entre transformações lineares limitadas e transformações lineares contínuas.

Teorema 3.2.3 (Continuidade e Limitação)**.** *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear. Então*

a) Se T é contínua num ponto $x_0 \in X$, então T é limitada;

b) Se T é limitada, então T é contínua.

Demonstração. (a) Suponhamos que T é contínua em $x_0 \in X$. Então dado $\mathcal{E} = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x) - T(x_0)\| < 1 \quad \text{se} \quad \|x - x_0\| < \delta, \quad x \in X.$$

Dado $x \in X$, defina $x_1 = x_0 + \frac{\delta}{2\|x\|}x$. Note que $\|x_1 - x_0\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ e então da equação acima temos

$$\|T(x_1) - T(x_0)\| = \|T(x_1 - x_0)\| = \|T(\frac{\delta x}{2\|x\|})\| = \frac{\delta}{2\|x\|}\|T(x)\| < 1$$

ou seja,

$$\|Tx\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\| \quad \forall x \in x.$$

Portanto $\|Tx\| \leq c\|x\|$ onde $c = \frac{2}{\delta}$, ou seja, T é uma transformação linear limitada.
(b) Para $T = 0$, a continuidade é clara. Suponhamos que T é não nulo. Como T é limitada existe $c > 0$ tal que

$$\|T\| = \sup_{x \in X \setminus 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c.$$

Então,

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|, \quad \|T\| \neq 0.$$

Seja $x_0 \in X$ um elemento qualquer. Vamos mostrar que T é contínua em x_0
Como X é um espaço normado, $x - x_0 \in X, \forall x \in X$ e então segue que

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\|\|x - x_0\|.$$

Portanto,dado $\mathcal{E} > 0$, e tomando $\delta = \frac{\mathcal{E}}{\|T\|}$ teremos

$$\|Tx - Tx_0\| < \mathcal{E}, \quad \forall x \in X,$$

sempre que $\|x - x_0\| < \delta$, e assim, T é uma transformação linear contínua.

$\square$

Teorema 3.2.4. *Transformações lineares entre espaços normados de dimensão finita são todas contínuas.*

Demonstração. Seja X um espaço normado de dimensão finita, então pelo Teorema 3.2.2, toda transformação em X é limitada. Portanto, pelo teorema anterior (3.2.3), toda transformação em X é contínua.

$\square$

Capítulo 4

Resultados para espaços de dimensão infinita

O objetivo deste capítulo, é comparar propriedades de transformação linear consideradas importantes em espaços vetoriais de dimensão finita, quando os espaços considerados passam a ser de dimensão infinita. Mostraremos que muitas delas não são mais válidas, quando não temos dimensão finita, por exemplo a continuidade destas aplicações. Outra propriedade que difere, é sobre definir de maneira única uma transformação linear a partir dos valores desta nos elementos da base. Veremos como fica esta questão para espaços de dimensão infinita.

4.1 Continuidade de Transformações Lineares

Embora transformações lineares em espaços vetoriais normados de dimensão finita sejam sempre contínuas, conforme vimos no capítulo anterior, o mesmo não vale para espaços vetoriais normados de dimensão infinita. De fato, se X é um espaço vetorial normado de dimensão infinita e Y é um espaço vetorial normado de dimensão maior ou igual a 1, podemos sempre construir uma aplicação linear $T : X \to Y$ que não é limitada. Para tanto, utilizaremos um resultado que garante que para definir uma transformação linear, basta definí-la na base de Hammel, o qual discutiremos mais a frente (Teorema 4.3.2). Então, seja $\mathcal{B}$ uma base de Hammel para X, $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ um subconjunto enumerável de vetores e $y \in Y$ um vetor não nulo qualquer. Definiremos uma aplicação linear $T : X \to Y$ em $\mathcal{B}$ por

$$Tx_n = n\|x_n\|y \quad \text{se} \quad x_n \in \mathcal{B}'$$

e

$$Tx = 0 \quad \text{se} \quad x \in \mathcal{B} \backslash \mathcal{B}'.$$

T não é limitada, pois

$$\|Tx_n\| = n\|y\|\|x_n\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo não existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Em particular, vemos que se X é um espaço vetorial normado de dimensão infinita, sempre existem funcionais lineares que não são contínuos, pois podemos tomar $Y = \mathbb{R}$.

Exemplos de transformações lineares entre espaços de dimensão infinita que não são contínuas

Exemplo 4.1.1. *Seja $X = \mathcal{P}([0,1])$ o conjunto dos polinômios definidos em $[0,1]$. A transformação linear $T : X \to X$ dada por $T(x) = x'$, não é contínua.*

De fato, no exemplo (3.2.2) vimos que T não é limitada. Logo, pelo Teorema de Continuidade e Limitação (3.2.2), T não é contínua.

Exemplo 4.1.2. *Considere o espaço normado $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ das sequências de elementos de $\mathbb{R}$ que se anulam a partir de uma certa ordem, munido da norma $\|\cdot\|_\infty$. O operador linear $T : c_{00} \to c_{00}$, definido por*

$$T\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n\right) := \sum_{n=1}^{N} n\lambda_n e_n,$$

não é contínuo.

De fato, suponha por absurdo que T seje contínuo, então pelo teorema de Continuidade e Limitação, T é limitada, assim existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|T(x)\| \leq k\|x\|, \quad \forall x \in c_{00}.$$

Em particular temos que

$$\|T(e_N)\| = N\|e_N\|, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Como, $\|e_N\| = 1$, temos $\|T(e_N)\| = N$. Mas, N é um número arbitrário, logo não existe k tal que para todos os $N \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$\|T(e_N)\| \leq k.$$

Portanto, T não é limitada, e assim T não é contínua.

4.2 Núcleo e Imagem

Vamos analisar dois importantes subespaços associados a uma transformação linear T. O núcleo e a imagem de T.

Definição 4.2.1 (Imagem de T)**.** *A imagem de $T : X \to Y$ é um subconjunto $Im(T) \subset Y$, formado por todos os vetores $w = Tx \in Y$ que são imagens de elementos de X pela transformação T.*

Definição 4.2.2 (Núcleo de T)**.** *O núcleo da transformação linear $T : X \to Y$ é o conjunto dos vetores $x \in X$ tais que $Tx = 0$ e será denotado por $N(T)$.*

Definição 4.2.3. *Dado um operador linear $T : X \to Y$, dizemos que T é injetora se para pontos diferentes no domínio temos imagens diferentes, isto é, se para quaisquer $u, v \in X$ com $u \neq v$, tivermos $T(u) \neq T(v)$.*

Proposição 4.2.1. *Uma transformação linear é injetora se e somente se $N(T)$ conter apenas o vetor nulo.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja T injetora. Então para qualquer $v \in N(T)$ temos
$T(v) = 0 = T(0)$. Segue que v=0 e assim $N(T) = \{0\}$.
($\Leftarrow$) Seja $N(T) = \{0\}$ e $u, v \in X$. Suponha $T(u) = T(v)$, então

$$T(u) - T(v) = T(u - v) = 0,$$

ou seja, $(u - v) \in N(T)$. Logo $u - v = 0$ e portanto T é injetora.

□

Definição 4.2.4. *A transformação linear $T : X \to Y$ será sobrejetora se a imagem de T coincidir com Y, ou seja $T(X) = Y$.*

Isto significa que para qualquer vetor $w \in Y$ podemos encontrar um vetor $v \in X$, tal que $T(v) = w$.

A seguir, demonstraremos um resultado básico para espaços de dimensão finita, conhecido como Teorema do núcleo e da imagem, do qual decorre o objeto de estudo desta seção, que é provar que para espaços com dimensão finita, a transformação linear $T : X \to X$ é injetora se e somente se ela é sobrejetora.

Teorema 4.2.1 (Núcleo e Imagem)**.** *Sejam X, Y espaços vetoriais de dimensão finita. Para toda transformação linear $T : X \to Y$, tem-se*

$$dimX = dimN(T) + dimIm(T).$$

Demonstração. A demonstração deste teorema decorre da seguinte afirmação, que provaremos a seguir: Se $\{Tu_1, \ldots, Tu_n\}$ é uma base de Im(T) e $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é uma base de N(T) então $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\}$ é uma base de X.
De fato, se tivermos

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m = 0 \tag{4.1}$$

então aplicando o operador T a ambos os membros desta igualdade e como $v_1, \ldots, v_m$ pertencem ao núcleo de T, obtemos

$$\alpha_1 Tu_1 + \ldots + \alpha_n Tu_n = 0.$$

Por hipótese, $Tu_1, \ldots, Tu_n$ são L.I., então $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Assim, a igualdade (3.2) se reduz a

$$\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m = 0.$$

Como $v_1, \ldots, v_m$ são L.I., concluímos que $\beta_1 = \ldots = \beta_m = 0$. Logo, $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m$ são L.I..
Vamos provar que $\mathcal{B}$ gera o espaço X e portanto é uma base para X.
Consideremos um vetor $w \in X$. Como $Tw \in Im(T)$, podemos escrever

$$Tw = \alpha_1 Tu_1 + \ldots + \alpha_n Tu_n,$$

pois, $\{Tu_1, \ldots, Tu_n\}$ é uma base de Im(T). Segue que,

$$T[w - (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n)] = 0.$$

Ou seja, o vetor $w - (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n)$ pertence ao núcleo de T, logo pode ser expresso como combinação linear dos elementos da base $v_1, \ldots, v_m$. Temos então

$$w - (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m,$$

portanto,

$$w = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m.$$

□

Teorema 4.2.2. *Seja X um espaço vetorial de dimensão finita n e $T : X \to X$ uma transformação linear. Então T é injetora se e somente se T é sobrejetora.*

Demonstração. Do teorema anterior (4.2.2) resulta que

$$n = dimX = dimN(T) + dimIm(T).$$

Logo, $N(T) = \{0\}$ se e somente se $dimIm(T) = n$, ou seja, $Im(T) = X$.

□

Os exemplos a seguir ilustram que a hipótese de a dimensão de X ser finita é essencial para a validade do teorema acima.

Exemplo 4.2.1. *Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios sobre $\mathbb{R}$ e seja*

$$T : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), p \mapsto (Tp)(t) = p'(t)$$

a tranformação linear dada pela derivação. Observe que T não é injetora pois todo polinômio constante pertence ao N(T). Por outro lado, T é sobrejetora pois todo polinômio de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tem uma primitiva.

Exemplo 4.2.2. *Considere o operador shift $S : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ definido por*

$$S((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Temos que S é injetivo, pois $N(S) = \{0\}$. Porém, S não é sobrejetivo, uma vez que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $x_1 = 1$ e $x_i = 0$, para todo $i \geq 2$ não é imagem de nenhuma sequência de $\mathbb{R}^\infty$ por meio do operador S.

Exemplo 4.2.3. *O operador truncamento $T : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ definido por*

$$T((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = (x_2, x_3, \ldots),$$

é sobrejetivo, pois, dada uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podemos tomar $x = (0, y_1, y_2, \ldots)$ para termos que

$$T(0, y_1, y_2, \ldots) = (y_1, y_2, y_3, \ldots).$$

Por outro lado T não é injetivo, uma vez que

$$N(T) = \{(x_1, 0, 0, \ldots); \quad x_1 \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}.$$

4.3 Unicidade da extensão de uma Transformação Linear definida nos vetores de uma base

Definição 4.3.1. (Igualdade, Restrição, Extensão)

1. *Duas transformações lineares $T_1, T_2 : X \to Y$ dizem-se iguais, e escrevemos $T_1 = T_2$, se $T_1(x) = T_2(x)$ para qualquer $x \in X$.*

2. *A restrição da transformação linear $T : X \to Y$ a um subconjunto $B \subset X$, denotada por $T|_B$, é a transformação linear $T|_B : B \to Y$ tal que $T|_B(x) = T(x)$ para qualquer $x \in B$.*

3. *Uma transformação linear $\widetilde{T} : M \to Y$ é uma extensão da transformação linear $T : X \to Y$ se $\widetilde{T} : M \to Y$ é tal que $\widetilde{T}|_X = T$, isto é, $\widetilde{T}(x) = T(x)$ para qualquer $x \in X$. Assim, T é a restrição de $\widetilde{T}$ a X.*

Teorema 4.3.1. *Sejam X um espaço vetorial de dimensão finita, Y um espaço vetorial qualquer. Então se $T : \{e_1, \ldots, e_n\} \to Y$ é uma função (note que T não é transformação linear pois $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é apenas um conjunto) existe uma única transformação linear $\widetilde{T} : X \to Y$ tal que $\widetilde{T}(e_i) = T(e_i)$.*

Demonstração. Dado $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, defina $\widetilde{T}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i T(e_i)$. Então $\widetilde{T}$ é transformação linear, e $\widetilde{T}(e_i) = T(e_i)$ por definição.
Vamos provar que $\widetilde{T}$ é única.
Suponha que exista outra transformação linear $L : X \to Y$ tal que

$$L(e_i) = T(e_i).$$

Então,

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L(e_i)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(e_i) \\
&= \widetilde{T}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right),
\end{aligned}
$$

ou seja, $L = \widetilde{T}$. Portanto, $\widetilde{T}$ é única.

□

Usando-se a mesma idéia da demonstração anterior, podemos mostrar o seguinte resultado:

Teorema 4.3.2. *Sejam X um espaço vetorial de dimensão infinita e Y um espaço vetorial qualquer. Então se $T : \mathcal{B} \to Y$ é uma função, onde $\mathcal{B}$ é base de Hammel para X, existe uma única transformação linear $\widetilde{T} : X \to Y$ tal que $\widetilde{T}(e) = T(e)$, $\forall e \in \mathcal{B}$.*

A questão que se coloca agora é a seguinte: Será que existe uma única transformação linear $\widetilde{T} : X \to Y$ que estende T quando $\mathcal{B}$ for uma base de Schauder?

Vamos analizar a situação em que $\mathcal{D} \subseteq X$ é uma base de Schauder.

Sejam X um espaço vetorial de dimensão infinita em que $\mathcal{D} \subseteq X$ é uma base de Schauder para o mesmo, e $T : \mathcal{D} \to Y$ é uma função onde Y é um espaço vetorial qualquer. Pela proposição 1.4.1, existe uma base de Hammel $\mathcal{B}$ de X tal que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$ (Note que T está definida só em $\mathcal{D}$).

Defina $\widetilde{\widetilde{T}} : \mathcal{B} \to Y$ de forma que $\widetilde{\widetilde{T}}$ estenda T, isto é,

$$
\widetilde{\widetilde{T}}(v) = \begin{cases} T(v), & \text{se} \quad v \in \mathcal{D} \\ \text{qualquer vetor de Y}, & \text{se} \quad v \notin \mathcal{D}. \end{cases}
$$

Pelo teorema anterior, existe $\widetilde{T}$ que estende $\widetilde{\widetilde{T}}$, e portanto, em particular estende T. Porém, esta extensão de T não é única, pois para $v \notin \mathcal{D}$ podemos definir inumeras funções. Logo, existem inumeras transformações lineares que estendem $T : \mathcal{D} \to Y$.

Por exemplo, considere a função $T : \mathcal{D} = \{e_1, \ldots, e_n \ldots\} \to C_0$, onde $\mathcal{D} \subseteq C_0$ é uma base de Schauder para C_0, e $T(e_n) = ne_n$. Vamos mostrar que existem transformações lineares $\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2 : C_0 \to C_0$, onde $\widetilde{T}_1 \neq \widetilde{T}_2$, que são extensões de T.

Seja $x_0 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$, que é um elemento de C_0. Temos que $x_0 \notin \mathcal{D}$ e $\mathcal{D} \cup \{x_0\}$ é um conjunto L.I.

De fato, para que

$$
\sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n + \beta x_0 = 0
$$

devemos ter $\beta = 0$ e $\lambda_i = 0$. Pois,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n + \beta x_0 &= (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N, 0, 0, \ldots) + (\beta, \frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{3}, \ldots) \\
&= (\lambda_1 + \beta, \lambda_2 + \frac{\beta}{2}, \ldots, \lambda_N + \frac{\beta}{N}, \frac{\beta}{N+1}, \frac{\beta}{N+2} \ldots).
\end{aligned}$$

Como, $\lambda_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ (pois $\mathcal{D}$ é base de Schauder) e N é um número natural maior que zero temos que $\beta = 0$. Logo,$\mathcal{D} \cup \{x_0\}$ é um conjunto L.I.

Assim pela proposição 1.4.1, existe uma base de Hammel H de C_0 tal que $\mathcal{D} \cup \{x_0\} \subseteq H$. Defina, $\widetilde{\widetilde{T}}_1 : H \to C_0$ tal que

$$\widetilde{\widetilde{T}}_1(v) = \begin{cases} T(v), & \text{se} \quad v \in \mathcal{D} \\ e_1, & \text{se} \quad v = x_0 \\ 0, & \text{se} \quad v \in H \setminus \mathcal{D} \cup \{x_0\}. \end{cases}$$

Pelo teorema 4.3.2 existe $\widetilde{T_1} : C_0 \to C_0$ que estende $\widetilde{\widetilde{T}}_1$, e portanto, em particular estende T.

Agora defina, $\widetilde{\widetilde{T}}_2 : H \to C_0$ tal que

$$\widetilde{\widetilde{T}}_2(v) = \begin{cases} T(v), & \text{se} \quad v \in \mathcal{D} \\ e_2, & \text{se} \quad v = x_0 \\ 0, & \text{se} \quad v \in H \setminus \mathcal{D} \cup \{x_0\}. \end{cases}$$

Da mesma forma, pelo teorema 4.3.2 existe $\widetilde{T_2} : C_0 \to C_0$ que estende $\widetilde{\widetilde{T}}_2$, e portanto, em particular estende T.

Logo, $\widetilde{T_1}, \widetilde{T_2} : C_0 \to C_0$, estendem T, mas $\widetilde{T_1} \neq \widetilde{T_2}$, pois $\widetilde{T_1}(x_0) \neq \widetilde{T_2}(x_0)$, como queriamos demonstrar.

Considerações Finais

Quando estudamos propriedades de espaços vetoriais de dimensão finita, temos a idéia intuitiva de que, a generalização destas para espaços cuja dimensão é infinita é trivial. Contudo, depois de analizarmos, notamos que muitas delas perdem sua eficácia quando passamos a considerar espaços com dimensão infinita.

Ao longo deste trabalho, observamos uma série de resultados que comprovam esta discordância entre estes espaços, pelo fato de a dimensão ser finita ou não. Por exemplo, a continuidade e limitação das transformações lineares, onde, para espaços de dimensão finita, todas as aplicações são limitadas e portanto contínuas. Já para espaços de dimensão infinita, nem sempre temos a continuidade destas transformações, tendo em vista que várias transformações lineares não são limitadas.

Enfim, este trabalho proporcionou um conhecimento matemático, até então não obtido com as disciplinas de graduação. Espera-se que este possa ser útil como material de consulta ou de estudo.

Apêndice

Segue abaixo a demonstração do resultado utilizado no exemplo 2.1.2.

Resultado. *Seja* $h : [a, b] \to \mathbb{R}$*, uma função contínua e não negativa, ou seja,* $h \geq 0$ *para todo* $x \in [a, b]$*. Então,* $\int_a^b h(x) = 0$ *se e somente se* $h(x) = 0$ *para todo* $x \in [a, b]$*.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $h(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in [a, b]$.
Seja $\mathcal{E} = \frac{h(x_0)}{2}$.
Como h é contínua em x_0, existe $\delta > 0$ tal que, $|x - x_0| < \delta$ implica

$$|h(x) - h(x_0)| < \mathcal{E}.$$

Assim, para todo $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ temos

$$h(x) \in \left[\frac{h(x_0)}{2}, \frac{3h(x_0)}{2}\right],$$

ou seja,

$$h(x) \geq \frac{h(x_0)}{2}, \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

Segue que,

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{h(x_0)}{2}dx = \frac{h(x_0)}{2} \cdot 2\delta > 0.$$

Note que,

$$\begin{aligned} \int_a^b h(x)dx &= \int_a^{x_0-\delta} h(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} h(x)dx \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx > 0. \end{aligned}$$

Conclusão,

$$\int_a^b h(x)dx > 0, \forall x \in [a, b].$$

Absurdo, pois, por hipótese $\int_a^b h(x)dx = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Portanto, $h(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

$(\Leftarrow)$ É trivial.

$\square$

Referências

[1] BARONE Jr, M. *Álgebra linear.* 3ed. São Paulo: São Paulo, 1988.

[2] BOLDRINI, J. L. *Álgebra linear.* São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1978.

[3] HALMOS, P. *Teoria Ingênua dos Conjuntos.* São Paulo: Polígono, 1973.

[4] HIGINO, H. D. & IEZZI, G. *Álgebra moderna.* São Paulo: Atual, 1979.

[5] KREYSIZG, E. *Introductory functional analysis with applications.* New York: Wiley Classics Library, 1978.

[6] LIMA, E. L. *Álgebra linear.* 7 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[7] LOZADA-CRUZ, G. *Introdução à análise funcional. Notas de aula.* Disponível em: http://www.mat.ibilce.unesp.br/personal/german/notas-iaf.pdf, acesso em maio de 2009.

[8] NOWOSAD, P. *Introdução à análise funcional, Textos de Matemática Nº 18.* Recife: UFP, 1969.

[9] POMBO Jr, D. P. *Introdução à análise funcional.* Niterói: UFF, 1999.