UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

UM APOIO COMPUTACIONAL À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE APLICAÇÕES DA DERIVADA

PRISCILA CARDOSO CALEGARI

FLORIANÓPOLIS, DEZEMBRO DE 2004.

PRISCILA CARDOSO CALEGARI

UM APOIO COMPUTACIONAL À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE APLICAÇÕES DA DERIVADA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientadora: Dra. Mirian Buss Gonçalves

FLORIANÓPOLIS - SC
Dezembro de 2004

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 70/SCG/04.

____

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora

____

Profª Dra. Mirian Buss Gonçalves
Professora Orientadora

____

Profº Dr. Daniel Norberto Kozakevich

____

Profª Msc. Rosimary Pereira

À minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus uma prece de amor.
Aos meus pais, Antônio e Helena,
meu voto de reconhecimento, pelo amor e pela compreensão.
Aos professores do curso de matemática minha gratidão,
em especial à professora Mirian B. Gonçalves.
A todos os meus amigos pelo companheirismo e amizade, principalmente
Cristiane P. Tonetto, Felipe L. Valério, João L. Gonçalves e Walisson P. Lorigiola.
E a todos que de alguma maneira contribuiram para que
eu concluisse mais essa etapa.

Sumário

Lista de Figuras

1 Introdução

Utilizar a informática na área educacional é bem mais complexo que a utilização de qualquer outro recurso didático. Com a informática é possível comunicar, pesquisar, criar figuras, efetuar cálculos, dentre muitas outras ações. Nenhum outro recurso possui tantas possibilidades de uso, quanto o computador. A principal vantagem do uso do computador em relação aos demais recursos didáticos, está ligada à sua característica de interatividade, à sua grande possibilidade de ser um instrumento que pode ser utilizado para facilitar a aprendizagem individualizada.

Algumas propostas inovadoras têm sido apresentadas ao meio acadêmico, mas ainda predominam em muitos casos as aulas expositivas, em que são utilizados praticamente quadro-negro, giz e apagador. Com o aumento das facilidades computacionais, não se pode ignorar as mudanças que vem ocorrendo, principalmente a influência das ferramentas tecnológicas no processo de ensino-aprendizagem. Isso implica em uma alteração da postura dos profissionais da educação, requer o repensar de alguns processos educacionais.

Atualmente, um dos grandes desafios encontrados pelos profissionais da educação é aliar a tecnologia computacional com o ensino, com o objetivo de melhorar o processo de ensino-aprendizagem. Um caminho para vencer tal desafio, pode ser a utilização adequada de técnicas de Inteligência Artificial, que vêm sendo usadas como suporte conceitual para o desenvolvimento de softwares educacionais. Na década de 70, surgiram os Sistemas Tutoriais Inteligentes que constituem um grande foco de pesquisa nas mais diversas áreas do conhecimento.

O Grupo de Estudos de Informática Aplicada à Aprendizagem Matemática - GEIAAM, do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, foi criado em 1994, com o propósito de desenvolver pequenos sistemas especialistas e tutoriais inteligentes, utilizando técnicas de Inteligência Artificial, a fim de sanar algumas dificuldades apresentadas pelos alunos nas disciplinas de matemática. A observação dessas dificuldades está baseada na experiência de professores comprometidos com a aprendizagem matemática e direciona a seleção dos conteúdos enfocados nesses sistemas.

Atualmente o GEIAAM direciona sua linha de pesquisa em dois ramos:

- Desenvolvimento de softwares educacionais;

- Análise de fenômenos em situações de ensino as quais são desenvolvidas com apoio de softwares educacionais.

1.1 Justificativa

Em sala de aula verificam-se dificuldades evidentes enfrentadas por muitos alunos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Entre elas destaca-se a dificuldade de relacionar o saber teórico e o saber prático, referentes à resolução de problemas. Isso ocorre em diversos conteúdos das disciplinas de Cálculo, em particular, no estudo de aplicações da derivada. Muitos alunos assimilam os conceitos e proposições expostos pelo professor ao apresentar esse conteúdo em sala de aula, no entanto, quando eles tentam resolver os problemas envolvendo esses conceitos e proposições, uma grande maioria não consegue compreender o enunciado do problema e aplicar a teoria.

A realização do presente trabalho tem como motivação e justificativa, a contribuição do uso do computador no ensino de Cálculo, visando a meta maior que é a melhoria da qualidade do Ensino de Matemática.

1.2 Objetivos do Trabalho

O objetivo principal do presente trabalho é apresentar uma pequena contribuição pedagógica para o ensino de cálculo diferencial e integral no conteúdo de aplicações da derivada, através do protótipo de software educacional ApliDer. Este protótipo de software pode ser usado por alunos que já possuem uma base teórica sobre o assunto de aplicações da derivada, com o objetivo de resolver problemas.

Especificamente, o presente trabalho também tem como objetivo:

- Apresentar o desenvolvimento do ApliDer.

- Discutir a resolução de problemas de aplicações da derivada.

1.3 Metodologia

Para alcançar tais objetivos, inicialmente fez-se uma análise de conceitos, métodos e ferramentas utilizadas em experiências anteriores no Grupo GEIAAM, que vem desenvolvendo trabalho de pesquisa e extensão no Departamento de Matemática da UFSC.

A seguir foi feito um estudo aprofundado do assunto explorado no protótipo ApliDer, a fim de saber como esse conteúdo é enfocado nos programas, nos livros didáticos, etc...

Também realizou-se um estudo sobre resolução de problemas e teorias educacionais que deram suporte à abordagem adotada e à experimentação que foi realizada.

Para a concepção, desenvolvimento e experimentação do protótipo ApliDer, também foram necessárias as seguintes etapas:

- Projeto do sistema, tanto do ponto de vista da concepção ergonômica e da interface, quanto das transposições didáticas e informática do assunto abordado no protótipo ApliDer.

- Desenvolvimento e implementação computacional, para a qual foi utilizada a shell kappa, já utilizada no desenvolvimento de outros protótipos no Grupo GEIAAM.

- Experimentação, na qual foram aplicados dois questionários, a um grupo de alunos da UFSC, a maioria do curso de Licenciatura em Matemática .

- Divulgação, feita através da apresentação dos resultados obtidos e a disponibilização do protótipo ApliDer para a comunidade da UFSC e interessados em geral. Em breve disponível no site: http://www.mtm.ufsc.br/geiaam.

1.4 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos, da seguinte maneira:

- No primeiro capítulo, apresentam-se a justificativa, os objetivos, a metodologia e a estrutura deste trabalho.

- No segundo capítulo apresenta-se uma síntese da fundamentação teórica, sobre resolução de problemas.

- No terceiro capítulo apresenta-se a abordagem do assunto aplicações da derivada nos programas e livros didáticos de cálculo, bem como a apresentação dos problemas de aplicações da derivada, selecionados para o protótipo ApliDer, alguns com sua resolução, baseada nas etapas de Polya.

- No quarto capítulo são apresentados os objetivos do protótipo, seu desenvolvimento e experimentação.

- As considerações finais são apresentadas no quinto capítulo.

Após as considerações finais, são apresentadas as referências, os anexos e o apêndice. Nos anexos encontram-se: os questionários aplicados na experimentação e os programas das disciplinas de cálculo. No Apêndice encontra-se a sugestão de navegação dada pela autora do protótipo ApliDer.

2 *Resolução de Problemas*

A resolução de problemas é hoje, um assunto muito estudado por educadores e matemáticos. Alguns professores chegam a considerar a resolução de problemas como a principal razão de se *aprender* e *ensinar* matemática, pois através dela que os alunos começam a pensar matematicamente e aplicar seus conhecimentos matemáticos.

> "Aprender a resolver problemas matemáticos deve ser o maior objetivo da instrução matemática. Certamente outros objetivos da matemática devem ser procurados, mesmo para atingir o objetivo da competência em resolução de problemas. Desenvolver conceitos matemáticos, princípios e algoritmos através de um conhecimento significativo habilidoso é importante. Mas o significado principal de aprender tais conteúdos matemáticos é ser capaz de usá-los na construção das soluções das situações-problema".
>
> (Hatfield, apud. Dante, 1991)

Mesmo sendo tão estudada, a resolução de problemas, é um tópico muito difícil de se aplicar em sala de aula. Muitos alunos sabem muito bem efetuar algoritmos, mas não conseguem aplicá-los na hora de resolver um problema. Para superar essa dificuldade são sugeridas algumas estratégias para a resolução de problemas. Estas estratégias são constituídas por algumas questões que devem fazer o aluno refletir sobre seus conhecimentos anteriores.

2.1 O que é um problema matemático

Um problema matemático é toda situação que implica na descoberta de novas informações matemáticas para a pessoa que tenta resolvê-lo.

O problema pode ser simples, mas se ele desafiar a curiosidade e a criatividade, quem o resolver experimentará tensão e se alegrará com a descoberta da solução. Esse tipo de experiência poderá ativar nos alunos o verdadeiro gosto pela matemática.

> "Para que possamos falar da existência de um problema, a pessoa que está resolvendo essa tarefa precisa encontrar alguma dificuldade que a obrigue a questionar-se sobre qual seria o caminho que precisaria seguir para alcançar a meta".
>
> (Pozo [et al.], 1998)

2.2 Diferença entre problema e exercício

Todo problema costuma exigir o exercício de algumas habilidades já adquiridas, para sua resolução estratégica. Mas o oposto não é verdadeiro: uma tarefa que pode ser resolvida de modo repetitivo ou como um exercício, não representará um problema para o aluno.

O exercício é uma atividade de treinamento de alguns conhecimentos matemáticos já adquiridos pelo aluno, como a aplicação de algum algoritmo, de alguma fórmula, etc. O exercício envolve aplicação e o problema envolve invenção ou uma criação significativa. Vale ressaltar, que quando nos limitamos a exercitar técnicas, ao enfrentarmos situações ou tarefas já conhecidas, que não apresentam nada de novo, estamos frente a um exercício. Portanto a distinção entre exercício e problema depende muito dos conhecimentos e atitudes, tanto dos alunos quanto dos professores, pois o que pode representar um problema para um aluno, para outro pode representar apenas um exercício.

É muito importante, que na sala de aula as atividades sejam bem definidas entre exercícios e problemas. Um professor no modelo tradicional de ensino, pode transformar um bom problema em um simples exercício, aplicando o método "siga o modelo". Assim cabe aos professores equilibrar as atividades na sala de aula.

> "...os exercícios servem para automatizar certas técnicas, habilidades e procedimentos necessários para a resolução de problemas, mas, dificilmente podem servir para a aprendizagem e compreensão de conceitos".
>
> (Conceição, 2001)

É necessários que fique claro, que tanto os exercícios quanto os problemas, são importantes no aprendizado do aluno, quando dosados de maneira coerente durantes as aulas.

2.3 Características de um bom problema

- **Ser desafiador, real e interessante para o aluno:**

A motivação é um dos fatores mais importantes para o envolvimento do aluno com o problema, ela está presente em problemas do cotidiano. Problemas com dados e perguntas artificiais desmotivam os alunos. Eles precisam se sentir desafiados para pensar nos problemas e procurar solucioná-los, pois o desafio é um fator de motivação diante de um problema.

- **Não consistir somente na aplicação de algum algoritmo:**

> "É importante que o problema possa gerar muitos processos de pensamento, levantar muitas hipóteses e propiciar várias estratégias de solução. O pensar e o fazer criativo devem ser componentes fundamentais no processo de resolução de problemas".
>
> (Dante, 1991)

- **Ter um nível de dificuldade adequadado:**

O problema deve ser desafiador, mas compatível com os conhecimentos matemáticos que o aluno possui. Quando o problema tem um nível de dificuldade muito elevado, maior que o nível de conhecimentos do aluno, o efeito esperado poderá ser contrário, causando desânimo, frustração e fazendo com que o aluno tenha aversão à matemática.

2.4 Objetivos da resolução de problemas

Conforme Dante (1991), os principais objetivos da resolução de problemas são:

- Fazer o aluno pensar produtivamente.

- Desenvolver o raciocínio do aluno.

- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas.

- Dar ao aluno oportunidade de se envolver com as aplicações da matemática.

- Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras.

- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas.

- Dar uma boa base matemática às pessoas.

Um dos principais objetivos do ensino de matemática é fazer com que os alunos pensem produtivamente. Para isso, é necessário desenvolver o raciocínio lógico dos alunos e fazer com que eles usem seus conhecimentos matemáticos, para propor soluções às situações-problema. Também é preciso exercitar habilidades, conceitos e algoritmos matemáticos. Mas quando estes são explorados como o único objetivo do ensino de matemática, tornam-se insignificantes. As aulas de matemática podem servir como um laboratório, a fim de desenvolver nos alunos características como: criatividade, iniciativa e independência, para enfrentar novas situações. E nada como a resolução de problemas para ativar todas estas características no aluno.

2.5 Etapas na resolução de um problema

Em geral, as pessoas utilizam-se de estratégias ao longo da resolução de um problema. Alguns autores propõem etapas para a resolução de problemas. Isso não significa que correspondam à uma seqüência de etapas que devam ser seguidas passo a passo, sem que seja necessário voltar atrás, ou que funcionem como uma "poção mágica". As etapas que são apresentadas a seguir, incluem questões que devem fazer o aluno refletir sobre seus conhecimentos anteriores, que podem ser usados para resolver o problema; bem como refletir sobre o caminho a ser seguido para se chegar a solução desejada.

Conforme Pozo [et al.] (1998), estes são alguns procedimentos heurísticos na resolução de problemas:

- Realizar tentativas por meio de ensaio e erro.
- Dividir o problema em subproblemas.
- Estabelecer submetas.
- Procurar problemas análogos.
- Ir do conhecido ao desconhecido.

É claro que estes procedimentos heurísticos não garantem sucesso na resolução de problemas. O sucesso depende da capacidade do aluno em solucionar problemas e de seu conhecimento específico na área de abrangência do problema.

> "... não há como negar que do ponto de vista psicológico variáveis como ansiedade, expectativas, intuição, sucesso, frustrações, se fazem presentes em qualquer tarefa de resolução de problemas. O mesmo pode ser

> dito de parâmetros que sugerem ao solucionador uma certa organização, ou melhor, posicionamento em relação a situação-problema, como ler o enunciado do problema com atenção e circular informações relevantes, dividir o problema em partes ou subproblemas, analisar o resultado obtido, etc."
>
> (Peduzzi, 1998)

Com base nas quatro etapas de resolução de problemas, sugeridas por Polya (1995), citam-se algumas questões que podem auxiliar na reflexão ao longo da resolução de um problema.

- **Compreensão do Problema:**

É necessário compreender o problema, para traduzir o enunciado para a linguagem matemática. Quando necessário, é preciso ler o problema várias vezes, refletindo sobre algumas questões como:

- Qual é, ou quais são a(s) incógnita(s)? Quais são os dados apresentados no problema?

- Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante?

- É possível traçar uma figura ou diagrama? Quais as notações que você vai utilizar?

- É possível separar as diversas partes da condicionante?

- **Estabelecimento de um Plano:**

Nessa etapa é preciso chegar a um plano para a execução. Quais as ferramentas matemáticas que poderão ser utilizadas?

- É preciso encontrar uma conexão entre os dados e a(s) incógnita(s).

Se não for possível encontrar uma conexão imediata, pense em problemas auxiliares:

- Já viu o problema antes?

- Conhece um problema semelhante?

- Se conhece um problema semelhante, é possível utilizá-lo ou utilizar o seu resultado?

Se ainda não for possível encontrar uma conexão entre os dados e a(s) incógnita(s), pense:

- É possível reformular o problema?

- Todos os dados foram utilizados? Todas as condições estão sendo satisfeitas e utilizadas? Todas as noções essenciais implicadas no problema estão sendo levadas em consideração?

- **Execução do plano:**

Com um plano já estabelecido, é preciso executá-lo. Mas tomando todo o cuidado para não cometer erros, principalmente de cálculo.

- Ao executar o plano, verifique cada passo.

- É possível demonstrar que cada passo está correto?

- **Retrospecto:**

A verificação da solução é um passo essencial, que na maioria das vezes passa despercebida pelos alunos. **Certifique-se que a solução encontrada faça sentido.**

- É possível verificar o resultado?

- É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?

- É possível utilizar o resultado ou o método em algum outro problema?

As fases de Polya também se fazem presentes nas sugestões de Reif (1976, apud. Peduzzi, 1998), para a resolução de problemas de Física:

1. **Descrição:**
   Listar explicitamente os dados e as informações desejadas. Se possível fazendo um diagrama da situação.

2. **Planejamento:**
   Selecionar as relações básicas pertinentes para a solução do problema e delinear como estas serão usadas.

3. **Implementação:**
   Executar o plano precedente fazendo todos os cálculos necessários.

4. **Conferência:**
   Certificar-se que cada um dos passos precedentes seja válido e que a solução final faça sentido.

Os quatro passos de Polya, resumem de maneira adequada as etapas e questões que devemos ter em mente para refletir diante de uma situação-problema.

Com base no modelo interpretativo de análise, de Kramers-Pals e Pilot (1988, apud. Peduzzi, 1998), as principais dificuldades encontradas pelos alunos diante de um problema são:

- **Compreensão do problema:**
  - Não lêem.
  - Começam muito depressa.
  - Não identificam qual é a incógnita.
  - Não conseguem visualizar a situação-problema.
- **Estabelecimento de um plano:**
  - Não trabalham sistematicamente.
  - Não conhecem o assunto suficientemente.
- **Execução do plano:**
  - Cometem muitos erros.
- **Retrospecto:**
  - Não conferem sua solução.

> "... parte das dificuldades encontradas no ensino das técnicas e estratégias de resolução de problemas, é que os professores dominam a matéria tão bem que não precisam parar para pensar nos problemas".
>
> (Schoenfeld 1985, apud. Pozo [et al.], 1998)

Alguns professores, quando propoem problemas em sala de aula aos alunos, apresentam-no como um exercício, omitindo alguns passos da sua resolução. É muito importante lembrar, que é indispensável indicar os passos mais importantes que estão sendo dados, ao longo da resolução de um problema, durante sua exposição aos alunos. De maneira que fique claro para os alunos que diante de um problema, é essencial ter uma metodologia baseada em uma reflexão consciente.

2.6 Papel do professor, baseado na resolução de problemas

Ensinar a resolver problemas é uma tarefa muito mais difícil que ensinar algoritmos e fórmulas. Quando ensina um algoritmo ou uma fórmula, o professor executa um papel de orientador, que dá instruções passo a passo, de como o aluno deve fazer. Este método de ensino, que consiste em mostrar e repetir, baseia-se na expressão "é assim que se faz".

No ensino de resolução de problemas, o professor cumpre o papel de incentivador e moderador das idéias geradas pelos alunos. Nesse método, o professor encoraja o aluno a pensar por si mesmo, levantar hipóteses e testá-las, a discutir com seus colegas porque esse ou aquele método funcionam. Os alunos passam de sujeitos passivos que só observam, para sujeitos ativos, que "fazem matemática".

Esses são alguns lembretes importantes ao professor, conforme Dante (1991):

1. É bom começar dando problemas mais fáceis aos alunos, para que todos possam resolvê-los, afim de motivá-los. Fracassos repetidos levam os alunos à desmotivação e à frustração.

2. É interessante resolver problemas com uma mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver um mesmo problema. Isso facilita a ação futura dos alunos diante de um novo problema, mostrando a eles que não existe uma maneira única de resolver um problema.

3. A resolução de problemas deve ser parte integrante do currículo de matemática, usando as habilidades e os conceitos matemáticos que estão sendo desenvolvidos. Ninguém aprende a resolver problemas repentinamente.

4. Deve-se incentivar os alunos a "pensarem alto", discutir em pequenos grupos. Assim é possível perceber como estão encaminhando a resolução do problema, que estratégias estão tentando usar, que dificuldades tentam superar, etc...

5. É preciso motivar os alunos a reverem seu raciocínio, descrevendo-o, a pensarem como poderiam ter resolvido o problema de outra maneira, a testarem a solução encontrada, a generalizarem os resultados, sempre que possível e a criar novos problemas a partir daquele resolvido.

6. Não se pode proteger o aluno do erro. Às vezes, é percebendo um erro cometido que ele compreende melhor o que poderia ter feito.

7. Não se deve dizer ao aluno aquilo que ele pode descobrir por si só. Suas sugestões em pontos críticos devem ser incentivos para mantê-lo interessado em resolver o problema.

O papel do professor é indicar o caminho ao aluno e não mostrá-lo, como normalmente acontece. O verdadeiro aprendizado, se dá através da descoberta, da experiência. Também se aprende através da observação, mas nada se compara à experiência de se ter "descoberto" algo.

3 Problemas de Aplicações da Derivada

> "O cálculo, algumas vezes chamado de 'matemática da variação', é o ramo da matemática interessado em descrever a forma precisa na qual variações em uma variável se relacionam com variações em outra. Em quase todo tipo de atividade humana, encontramos dois tipos de variáveis: aquelas que podemos controlar diretamente e as que não podemos. Felizmente, as variáveis que não podemos controlar diretamente, respondem freqüentemente de alguma forma às que podemos."
>
> (Anton, 2000)

O cálculo foi desenvolvido no século $XVII$ como instrumento para investigar quatro classes de problemas científicos e matemáticos da época:

- Descobrir a reta tangente a uma curva genérica num dado ponto.
- Descobrir a área de uma região genérica bem como o comprimento de uma curva qualquer e o volume de um sólido em geral.
- Descobrir o valor máximo e mínimo de uma quantidade, por exemplo, a distância máxima e mínima de um planeta aos sol.
- Dada a fórmula para a distância percorrida por um corpo em um certo tempo, descobrir a velocidade e a aceleração do corpo em um instante qualquer.

Mesmo sendo problemas diversos e não-relacionados, eles estão ligados pelos princípios fundamentais do cálculo. Um desses princípios fundamentais é o conceito de derivada.

Embora o cálculo tenha sido desenvolvido para resolver problemas de física, atualmente suas aplicações abrangem as mais diversas áreas. As aplicações da derivada, por exemplo, incluem:

- A investigação da taxa de crescimento de bactérias em uma cultura.

- A predição dos resultados de uma reação química.
- A mensuração de variações instantâneas na corrente elétrica.
- A descrição do comportamento de partículas atômicas.
- A estimativa da evolução de um tumor na terapia radioativa.
- A previsão de resultados econômicos.
- A análise de vibrações num sistema mecânico.

A derivada também é utilizada na resolução de problemas que envolvem valores máximos e mínimos, tais como:

- Fabricar uma caixa retangular de volume dado com o menor custo.
- Calcular a distância máxima a ser percorrida por um foguete.
- Obter o fluxo máximo de tráfego através de uma ponte.
- Determinar o número de poços a perfurar num campo petrolífero de modo a obter a produção mais eficiente.
- Determinar o ponto entre duas fontes luminosas no qual a iluminação seja máxima.
- Maximizar o lucro na fabricação de um certo produto.

3.1 Aplicações da Derivada nos Programas de Cálculo

O assunto **aplicações da derivada** aparece nos programas das disciplinas de **Cálculo A** e **Cálculo I**, dos currículos dos cursos de ciências exatas: **Matemática, Física, Química e Engenharias** da Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC.

A disciplina de Cálculo I (MTM 5105), em anexo C, na pág. 77, ministrada para o curso de Licenciatura em Matemática com 6 horas/aula semanais tem como ementa: *Sequência; limite e convergência. Limite de Funções. Continuidade. Derivada. Máximos e Mínimos. Regra de L'Hospital. Fórmula de Taylor. Utilização de softwares computacionais. História da matemática relacionada com o conteúdo.*

O conteúdo programático está dividido em cinco unidades:

1. Sequências.

2. Limite de funções.

3. Continuidade.

4. Derivadas.

5. Aplicações da Derivada.

A unidade 5: *Aplicações da Derivada*, aborda os assuntos de taxa de variação e máximos e mínimos. O programa da disciplina ainda traz uma observação, sugerindo o uso de apoio computacional nos itens: limite de funções, derivadas e aplicações da derivada.

A disciplina de Cálculo A (MTM 5161), em anexo D, na pág. 80, ministrada para os cursos de Engenharia, com exceção do curso de Engenharia Elétrica, com 4 horas/aula semanais tem como ementa: *Funções reais de variável real. Funções elementares do cálculo. Noções sobre limite e continuidade. Derivada. Aplicações da derivada. Integral definida e indefinida.*

O conteúdo programático está dividido em cinco unidades:

1. Funções.

2. Noções sobre Limites e Continuidade.

3. Derivada.

4. Aplicações da Derivada.

5. Integral Definida e Indefinida.

A unidade 4: *Aplicações da Derivada*, aborda os dois assuntos, onde os conceitos de velocidade e aceleração servem para introduzir o assunto de taxa de variação.

Ao curso de Engenharia Elétrica é oferecida a disciplina de Cálculo I (MTM 5175), em anexo E, na pág. 83, com 6 horas/aula semanais, tendo como ementa: *Número reais. Introdução as Sequências. Limites e Continuidade. Derivada. Aplicações da Derivada. Integral. Métodos de Integração.*

O conteúdo programático está dividido em sete unidades:

1. Números reais.
2. Funções.
3. Limites e Continuidade.
4. Derivada.
5. Aplicações da Derivada.
6. Integral.
7. Métodos de Integração.

O assunto taxa de variação é abordado na unidade 4: *Derivada*, junto com o conceito de Derivada. O assunto de máximos e mínimos e abordado na unidade 5: *Aplicações da Derivada.*

Os cursos de Química e Física contam com a disciplina de Cálculo I (MTM 5115), em anexo F, na pág. 86, com 6 horas/aula semanais, tendo como ementa: *Números reais. Função de uma variável. Gráficos. Limite e Continuidade. Derivada. Taxa de Variação. Fórmula de Taylor. Teorema de L'Hospital. Máximos e Mínimos. Esboço de Gráficos. Introdução a Integral.*

O conteúdo programático está dividido em seis unidades:

1. Números reais.
2. Funções reais de uma variável.
3. Limites e Continuidade.
4. Derivada.
5. Aplicações da Derivada.
6. Introdução à Integral.

Ambos os assuntos, taxa de variação e máximos e mínimos, são abordados na unidade 5: *Aplicações da Derivada*, da mesma maneira que o programa da disciplina de Cálculo I do curso de Licenciatura em Matemática.

3.2 Aplicações da Derivada nos Livros Didáticos

Para o desenvolvimento do protótipo Aplider foi necessária a realização de uma pesquisa bibliográfica nos livros didáticos de Cálculo, com o objetivo de ver como a assunto Aplicações da Derivada é abordado e para selecionar os problemas abordados no protótipo.

O livros didáticos[1] mais utilizados para o desenvolvimento do protótipo ApliDer, que também estão nas referências dos programas das disciplinas de Cálculo, foram:

- Cálculo A: Funções, Limites, Derivação, Integração.
  (Diva Marília Flemming & Mirian Buss Gonçalves).

- Cálculo com geometria analítica: volume um.
  (Earl W. Swokowski).

- Cálculo: Um novo horizonte.
  (Howard Anton).

O livro **Cálculo A**, apresenta os assuntos de Taxa de Variação e Máximos e Minimos, no capítulo 5: *Aplicações da Derivada.* Nele os conceitos de velocidade e aceleração são utilizados para introduzir o conceito de Taxa de Variação. Os problemas de máximos e mínimos são apresentados nesse mesmo capítulo, depois das seções: *Máximos e Mínimos e Critérios para determinar os extremos de uma função.*

O livro **Cálculo: um novo horizonte**, apresenta o assunto Taxa de Variação no capítulo 3: *A Derivada*, onde é usado para introduzir o conceito de Derivada. Os problemas de Taxas Relacionadas, são apresentados no capítulo 4: *Funções Logarítmicas e Exponencial.* O livro ainda apresenta uma estratégia para resolver problemas de taxas relacionadas:

Passo 1. Desenhe uma figura e classifique as quantidades que variam.

Passo 2. Identifique as taxas de variação que são conhecidas e a taxa de variação que é para ser encontrada.

Passo 3. Ache uma equação que relacione a quantidade, cuja taxa de variação é para ser encontrada com as quantidades cujas taxas de variação são conhecidas.

[1] Veja a lista de todos os livros de cálculo utilizados nas referências.

Passo 4. Diferencie ambos os lados desta equação em relação ao tempo e resolva para a derivada que dará a taxa de variação desconhecida.

Passo 5. Calcule esta derivada em um ponto apropriado.

Os problemas de Máximos e Mínimos são apresentados no capítulo 6: *Aplicações da Derivada*. Para problemas de Máximos e Mínimos, o livro também apresenta cinco passos para se resolver problemas aplicados.

Passo 1. Faça uma figura apropriada e identifique as quantidades relevantes ao problema.

Passo 2. Ache uma fórmula para a quantidade a ser maximizada e minimizada.

Passo 3. Usando as condições dadas no problema para eliminar variáveis, expresse a quantidade a ser maximizada ou minimizada como função de uma variável.

Passo 4. Ache o intervalo de valores possíveis para esta variável a partir das restrições físicas do problema.

Passo 5. Se aplicável, use as técnicas já estudadas para obter o máximo ou o mínimo.

O livro **Cálculo com geometria analítica**, apresenta os assuntos Taxa de Variação e Máximos e Mínimos de maneira semelhante a abordada no livro Cálculo: um novo horizonte. A única diferença é que os assuntos Taxa de Variação e Taxas Relacionadas são abordados no capítulo 3: *A Derivada*. O livro também apresenta estratégias para a resolução de problemas de Taxas Relacionadas:

1. Ler o problema cuidadosamente várias vezes e analisar os dados e as quantidades que devem ser determinadas.

2. Esboçar o gráfico do problema e rotulá-lo adequadamente, introduzindo variáveis para representar quantidades desconhecidas.

3. Escrever todos os fatos conhecidos, expressando as taxas conhecidas e desconhecidas como derivadas das variáveis introduzidas em 2.

4. Formular uma equação geral relacionando as variáveis.

5. Diferenciar a equação obtida em 4 implicitamente em relação a t, obtendo uma relação geral entre as taxas.

6. Fazer a substituição pelos valores e taxas conhecidos, obtendo a taxa de variação desejada.

Ao passo que o assunto Máximos e Mínimos é apresentado no capítulo 4: *Aplicações da Derivada*. Também é apresentada uma estratégia para a resolução de problemas de Máximos e Mínimos, no livro Cálculo com geometria analítica.

1. Ler cuidadosamente várias vezes, meditando sobre os fatos apresentados e as quantidades e analisar os dados e as quantidades que devem ser determinadas.
2. Se possível, esboçar um diagrama e rotulá-lo adequadamente, introduzindo variáveis para representar as quantidades desconhecidas. Expressões tais como *o que, ache, quanto, a que distância* ou *quando* devem alertá-lo para as quantidades desconhecidas.
3. Registrar os fatos conhecidos juntamente com quaisquer relações envolvendo as variáveis.
4. Determinar qual variável deve ser maximizada ou minimizada, e expressar esta variável como função de *uma* das outras variáveis.
5. Determinar os pontos críticos da função obtida em 4.
6. Determinar os extremos pelos testes de derivadas primeira e segunda. Verificar os pontos extremos do intervalo sempre que necessário.

3.3 Seleção dos Problemas de Aplicações da Derivada

Após o estudo dos assuntos, *taxa de Variação* e *Máximos e Mínimos* nos livros didáticos de cálculo, foi necessária a seleção de alguns problemas de aplicações da derivada. O objetivo dessa seleção foi escolher alguns problemas para serem implementados no protótipo ApliDer. Os critérios para a seleção dos problemas foram:

- **Diversidade:**
  Em primeiro lugar foram selecionados problemas que abrangessem várias áreas. Para os problemas de taxa de variação, procurou-se escolher tanto os problemas de taxas simples, quanto os problemas de taxas relacionadas, que envolvem a regra da cadeia. Para os problemas de máximos e mínimos, procurou-se escolher alguns que fosse necessário analisar os extremos do intervalo.

- **Nível de dificuldade:**
  Foram selecionados problemas simples e alguns que exigem um pouco mais de raciocínio do aluno. Considerando-se assim um nível de dificuldade adequado.

- **Motivação:**
  Os problemas selecionados são motivadores, pois são considerados problemas reais e ligados ao cotidiano.

3.3.1 Problemas selecionados como exemplos no ApliDer

Estes são os problemas que foram selecionados para serem implementados no protótipo ApliDer como exemplos.

- **Exemplos de problemas de Taxa de Variação:**

1. [2] Uma cidade é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias) é dado aproximadamente através da função:

$$f(t) = 64 \cdot t - \frac{t^3}{3}$$

   (a) Qual a razão da expansão da epidemia no tempo t=4?

   (b) Qual a razão da expansão da epidemia no tempo t=8?

   (c) Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no 5° dia?

2. Suponhamos que um óleo derramado através da ruptura de um tanque, se espalha em uma forma circular cujo raio cresce em uma taxa constante de $2m/s$. Com que velocidade a área do derramamento está crescendo quando o raio dele for $60m$?

- **Exemplos de problemas de Máximos e Mínimos:**

1. Um pedaço de arame de $1.5m$ de comprimento deve ser cortado em duas partes. Com uma das partes deve-se formar um círculo, e com a outra, um triângulo equilátero. Onde deve ser cortado o arame, de modo que a soma das áreas do círculo e do triângulo seja mínima? E máxima?

[2]Este problema está resolvido na seção 4.4.3, na pág. 52

2. [3] Um recipiente cilíndrico, aberto em cima, deve ter a capacidade de $375\pi cm^3$. O custo do material usado para a base do recipiente é de 15 centavos por cm^2 e o custo do material para a parte curva é de 5 centavos por cm^2. Se não há perda de material, determine as dimensões que minimizem o custo do material.

3.3.2 Problemas propostos selecionados para o protótipo ApliDer

Estes são os problemas selecionados para o protótipo ApliDer, propostos ao aluno.

- **Problemas de Taxa de Variação:**

1. Um reservatório de água está sendo esvaziado para limpeza. A quantidade de água no reservatório, em litros, t horas após o escoamento ter começado é dada por:

$$V = 50 \cdot (80 - t)^2$$

Determinar:

(a) A taxa de variação média do volume de água no reservatório durante as 10 primeiras horas de escoamento.

(b) A taxa de variação do volume de água no reservatório após 8 horas de escoamento.

(c) A quantidade de água que sai do reservatório nas 5 primeiras horas de escoamento.

2. O rendimento bruto anual de uma empresa, t anos após 1º de janeiro de 2003 é de p milhões de reais e projetou-se que:

$$p(t) = -\frac{2}{3}t^2 + 4t + 6$$

(a) Encontre a taxa segundo a qual o rendimento bruto anual deverá estar crescendo ou decrescendo em 01-01-2004.

(b) Idem se nada for mudado, em 01-01-2007.

3. Um quadrado de lado $l(cm)$ está expandindo segundo a equação $l = 2 + t^2$, onde a variável t representa o tempo em segundos. Determine a taxa de variação da área desse quadrado no tempo t=2.

[3] Este problema está resolvido na seção 4.4.3, na pág. 54

4. [4]A serragem que cai de uma serra, forma um monte em forma de cone a uma taxa de $10m^3$ por dia. O lado do monte faz um ângulo de 45° com o solo. Com que velocidade sobe o topo do monte no momento em que se encontra a h metros do solo? (Resolva o problema em função de h, e no final dê sua resposta fazendo $h = 1.5m$.)

- **Problemas de Máximos e Mínimos:**

1. Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento, situada à margem de um rio de 500 metros de largura, a um conjunto habitacional situado na outra margem do rio, 2000 metros abaixo da central. O custo da obra através do rio é de 640 reais por metro, enquanto em terra custa 312 reais. Qual é a forma mais econômica de se instalar a rede de água potável?

2. [5]Num instante $t = 0$, o navio A está a $65km$ a leste do navio B e está viajando para o sul a uma velocidade de $15Km/h$, enquanto o navio B está indo para o leste a uma velocidade de $10Km/h$. Se os navios continuam seus cursos respectivos, determine a menor distância entre eles e quando isto acontece.

3. Um cartaz de $6m$ de altura está colocado no alto de um edifício com sua parte inferior a $20m$ acima do nível do olho do observador. A que distância diretamente abaixo do cartaz deve colocar-se um observador de modo a minimizar o ângulo Θ formado pelas linhas de visão do topo e da base do cartaz? (Este ângulo deve resultar na melhor visão do cartaz.)

4. Um fabricante de móveis estima que o custo semanal da fabricação de x reproduções (manuais) de uma mesa colonial é dado por $C(x) = x^3 - 3x^2 - 80x + 500$. Cada mesa é vendida por 2800 reais. Que produção semanal maximizará o lucro? Qual o máximo lucro semanal possível?

3.4 Resolução de Problemas de Aplicações da Derivada

Nesta seção será apresentada a resolução de dois dos problemas citados na seção 3.3.2 na pág. 30, um de taxa de variação e outro de máximos e mínimos, seguindo as etapas

[4]Este problema está resolvido na seção 3.4, na pág. 32
[5]Este problema está resolvido na seção 3.4, na pág. 33

de Polya. O problema de taxa de variação apresentado é o número 4 e o problema de máximos e mínimos apresentado é o número 2.

- **Problema 1**

A serragem que cai de uma serra, forma um monte em forma de cone a uma taxa de $10m^3$ *por dia. O lado do monte faz um ângulo de 45° com o solo. Com que velocidade sobe o topo do monte no momento em que se encontra a h metros do solo? (Resolva o problema em função de h, e no final dê sua resposta fazendo* $h = 1.5m$.*)*

- **Resolução:**

1. *Compreensão do Problema:*

   Após a leitura do problema, podemos extrair os seguintes dados e incógnitas:

   - Dados:

     V (volume de serragem).

     r (raio da base).

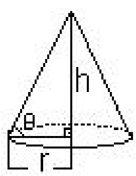
     $\frac{dV}{dt} = 10m^3$ (Taxa de volume de serragem que cai por dia).

     $\Theta = 45°$ (ângulo formado entre o monte e o solo).

   - Pede-se:

     $\frac{dh}{dt}$ (quando $h = 1.5$, onde $\frac{dh}{dt}$ é a velocidade que o topo do monte de serragem sobe).

   Um diagrama vai auxiliar na compreensão desse problema.



2. *Estabelecimento de um plano:*

   Pelos dados do problema, temos:

   $\Theta = \frac{\pi}{4}$

   E sabemos que:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 = \frac{h}{r} \Rightarrow r = h$$

Também sabemos que:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \tag{3.1}$$

Substituindo r por h, na equação 3.1, temos:

$$V = \frac{\pi h^3}{3} \tag{3.2}$$

Assim a equação 3.2, relaciona as variáveis V e h. Podemos usar esta equação e a regra da cadeia para encontrar $\frac{dh}{dt}$.

3. *Execução do Plano:*

   Temos a equação 3.2, relacionando as variáveis. Usando a regra da cadeia para derivar a função em relação a t vamos obter:

$$\frac{dV}{dt} = \pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt} \tag{3.3}$$

   Substituindo os valores que são dados pelo problema na equação 3.3, temos:

$$\begin{aligned} 10 &= \pi \cdot 1.5^2 \cdot \frac{dh}{dt} \\ 10 &\cong 3.14 \cdot 2.25 \cdot \frac{dh}{dt} \\ \frac{10}{7.065} &\cong \frac{dh}{dt} \\ \frac{dh}{dt} &\cong 1.41 \end{aligned}$$

   Portanto $\frac{dh}{dt} \cong 1.41m/s$, quando $h = 1.5m$.

4. *Retrospecto*

   A solução encontrada faz sentido, pois o resultado encontrado é positivo indicando que, quando $h = 1.5m$ a velocidade com que o topo do monte de serragem sobe é de aproximadamente $1.41m/s$.

- **Problema 2**

Num instante $t = 0$, o navio A está a $65km$ a leste do navio B e está viajando para o sul a uma velocidade de $15Km/h$, enquanto o navio B está indo para o leste a uma *velocidade de $10Km/h$. Se os navios continuam seus cursos respectivos, determine a menor distância entre eles e quando isto acontece.*

- **Resolução:**

1. *Compreensão do Problema:*

   Após a leitura do problema, podemos extrair os seguintes dados e incógnitas:

   - Dados:

     $d_{AB} = 65km$ (distância do navio A a leste do navio B, no tempo $t = 0$).

     $V_A = 15Km/h$ (velocidade do navio A em direção ao sul).

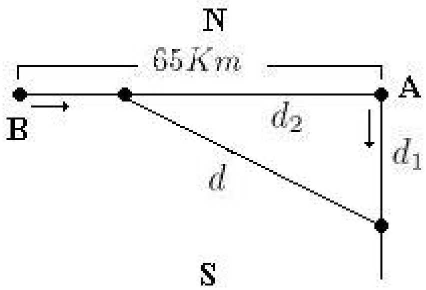
     $V_B = 10Km/h$ (velocidade do navio B em direção ao leste).

   - Pede-se:

     d_M (onde d_M é a distância mínima entre os navios).

     t (onde t é o instante em que a distância é mínima).

   Um diagrama vai auxiliar na compreensão desse problema.



2. *Estabelecimento de um plano:*

   Pelos dados do problema, temos:

   $d_1 = V_a \cdot t = 15 \cdot t$

   $d_2 = 65 - V_b \cdot t = 65 - 10 \cdot t$

   A partir do diagrama, usando o teorema de Pitágoras podemos estabelecer uma relação entre d (distância entre os navios) e t. Assim temos:

$$d^2 = (d_1)^2 + (d_2)^2$$

ou,

$$d(t) = \sqrt{(15 \cdot t)^2 + (65 - 10 \cdot t)^2} \tag{3.4}$$

A função $d(t)$ é mínima quando o radicando for mínimo. Podemos usar as proposições de derivadas para determinar esse mínimo.

3. *Execução do Plano:*

   Como queremos minimizar o radicando, vamos escrevê-lo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} d(t) &= \sqrt{(15 \cdot t)^2 + (65 - 10 \cdot t)^2} \\ &= \sqrt{225 \cdot t^2 + 4225 - 1300 \cdot t + 100 \cdot t^2} \\ &= \sqrt{325 \cdot t^2 - 1300 \cdot t + 4225} \\ &= \sqrt{325 \cdot (t^2 - 4 \cdot t + 13)} \end{aligned}$$

   O radicando será mímimo, quando a função $f(t) = t^2 - 4 \cdot t + 13$ for mínima.

   O próximo passo para minimizar a função, é encontrar seus pontos críticos. Para isso devemos derivar a função $f(t)$. Derivando a função $f(t)$, temos:

$$f'(t) = 2 \cdot t - 4 \tag{3.5}$$

   Lembre-se que: *se $f(t)$ é derivável, c é um ponto crítico se e só se* $f'(c) = 0$. Então temos:

$$\begin{aligned} f'(t) = 2 \cdot t - 4 &= 0 \\ 2 \cdot t &= 4 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

   Assim $t = 2$ é um ponto crítico da função $f(t)$. Para sabermos se $t = 2$ é um ponto de mínimo, vamos utilizar o teste da derivada segunda. Derivando $f'(t)$, temos:

$$f''(t) = 2 > 0 \tag{3.6}$$

   Pelo teste da derivada segunda, concluimos que $t = 2$, é um ponto de mínimo local. Para sabermos se $t = 2$, é um ponto de mínimo global, é necessário analisar os extremos do intervalo $[0, \infty)$ e o ponto $t = 2$, verificando qual deles fornece o menor valor para a função.

Para $t = 0$, temos:

$$\begin{aligned} d(t) &= \sqrt{325 \cdot (t^2 - 4 \cdot t + 13)} \\ &= \sqrt{325 \cdot 13} \\ &= \sqrt{4225} \\ &= 65 \end{aligned}$$

Para $t = 2$, temos:

$$\begin{aligned} d(t) &= \sqrt{325 \cdot (t^2 - 4 \cdot t + 13)} \\ &= \sqrt{325 \cdot (4 - 8 + 13)} \\ &= \sqrt{2925} \\ &\cong 54.08 \end{aligned}$$

Assim podemos concluir que os navios estão a uma distância mínima quando $t = 2$, ou seja, após duas horas.

Já calculamos a distância mínima entre os navios, onde substituimos t por 2 na equação $d(t)$.

Portanto, a distância mínima entre os navios é de $54.08Km$ e isso ocorre após 2 horas.

4. *Retrospecto*

   A solução encontrada faz sentido. Após 2 horas os navios estão a uma distância mínima de $54.08Km$. Também podemos calcular o valor da função em alguns outros pontos na "vizinhança" de $t = 2$. Por exemplo, para $t = 1$ temos $f(1) \cong 57$ e para $t = 3$ temos $f(3) \cong 57$, verificando que para $t = 2$ a função atinge seu ponto de mínimo.

Nesta seção foram apresentadas as resoluções de dois problemas de aplicações da derivada, seguindo as etapas de resolução de problemas sugeridas por Polya. Na seção 4.4.3 na pág. 50, serão apresentadas as resoluções de dois problemas da mesma forma que estes foram implementados no protótipo ApliDer.

4 Descrição do Protótipo ApliDer

Propostas inovadoras têm sido apresentadas ao meio acadêmico, mas ainda predominam em muitos casos as aulas expositivas, em que são utilizados praticamente quadro-negro, giz e apagador. A influência das ferramentas tecnológicas no processo de ensino-aprendizagem, implica na alteração da postura dos profissionais da educação, requer o repensar de alguns processos educacionais. Um dos grandes desafios encontrados pelos professores é aliar a tecnologia computacional com o ensino, de forma que se utilize a tecnologia com o objetivo de melhorar o ensino.

O GEIAAM atualmente é constituído pelas professoras Mirian Buss Gonçalves, Neri Terezinha Both Carvalho e Rosimary Pereira. Com base nas experiências dessas professoras em sala de aula, verificaram-se algumas dificuldades enfrentadas pelos alunos referentes a resolução de problemas nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Em particular, destaca-se essa dificuldade no estudo de aplicações da derivada. Por exemplo, muitos alunos sabem trabalhar bem com algoritmos isoladamente, mas não conseguem aplicá-los na hora de solucionar um problema. Devido a essas questões sugeriu-se o desenvolvimento de um software educacional que auxiliasse o aluno na aprendizagem do conteúdo de aplicações da derivada de funções de uma variável e que pudesse ser usado pelos alunos em horário extra-classe, no ritmo próprio de cada um.

4.1 Sistemas Especialistas e Tutoriais Inteligentes

Como já foi citado, o grupo GEIAAM durante alguns anos teve como finalidade desenvolver pequenos sistemas especialistas e tutoriais inteligentes, utilizando técnicas de Inteligência Artificial. O protótipo de software ApliDer possui características, tanto de sistemas especialistas quanto de tutoriais inteligentes, dessa forma classifica-se como sistema especialista inteligente.

- **Sistemas Especialistas:**

Os sitemas especialistas são programas de computador, destinados a solucionar problemas, planejados para adquirir e disponibilizar o conhecimento operacional de um especialista humano, utilizando-se da aplicação da inteligência artificial.

A arquitetura básica de um sistema especialista, apresenta três componentes básicos: *a base do conhecimento, a máquina de inferência e a interface com o usuário*[1].

Um professor quando vê as dificuldades do aluno, pode tomar inúmeras atitudes para ajudá-lo: fazendo analogias, propondo leituras adicionais, ou dando um tempo para o aluno. É essa versatilidade humana que os sistemas especialistas, através da tecnologia, tentam imitar.

- **Tutoriais Inteligentes:**

O sistemas tutoriais inteligentes (STIs), são programas de computador com propósitos educacionais e que incorporam técnicas de Inteligência Artificial, geralmente utilizando-se da tecnologia dos sistemas especialistas.

> "Uma das características dos STIs é possuir uma base de conhecimento sobre o tema a ser ensinado. Assim, o sistema interage com o aluno, simulando a figura de um professor humano, tornando a modelagem cognitiva, constante e progressiva."
>
> (Conceição, 2001)

Em um Sistema Tutorial Inteligente o aluno pode navegar em seu próprio ritmo, revendo os pontos onde encontrou maiores dificuldades. Essa é uma das grandes vantagens apresentadas pelos STIs.

4.2 Objetivos do protótipo ApliDer

O objetivo principal do protótipo ApliDer é servir como recurso didático tendo como finalidade auxiliar os alunos na resolução de problemas de aplicações da derivada.

O ApliDer ainda têm como objetivos específicos:

- Motivar os alunos no estudo da resolução de problemas de aplicações da derivada, através de recursos computacionais.

[1]mais interesse, ver Conceição, K. (2) e Passos, E. L. (11)

- Fazer com que os alunos escrevam de forma clara e objetiva seu raciocínio na resolução de problemas de aplicações da derivada.
- Desenvolver o espiríto crítico e criativo e a capacidade do aluno de:
  - Deduzir.
  - Organizar, comparar e aplicar seus conhecimentos adquiridos na resolução de problemas.
  - Formular e interpretar situações matemáticas.

4.3 Estrutura do protótipo ApliDer

O protótipo ApliDer está estruturado da seguinte maneira:

Figura 1: Estrutura do protótipo ApliDer

Os módulos **Taxa de Variação** e **Máximos e Mínimos** estão estruturados da seguinte maneira:

Figura 2: Estrutura do módulo Taxa de Variação

Figura 3: Estrutura do módulo Máximos e Mínimos

4.4 Apresentação do Protótipo ApliDer

O protótipo ApliDer foi implementado utilizando-se a ferramenta computacional shell Kappa[2], própria para a construção de sistemas especialistas e tutoriais inteligentes, usada pelo GEIAAM no desenvolvimento de seus protótipos desde sua criação.

Figura 4: Interface da Shell Kappa

O ApliDer é destinado aos alunos que cursam disciplinas de cálculo que contemplem o conteúdo de aplicações da derivada. Como já foi apresentado anteriormente o protótipo ApliDer está dividido em quatro módulos principais: *Motivação, Dicas sobre Resolução de Problemas, Taxa de Variação e Máximos e Mínimos.* O desenvolvimento do protótipo teve como ponto de partida, os conhecimentos que um aluno tem sobre os conteúdos que são pré-requisitos para a resolução de problemas de Aplicações da Derivada. Inicialmente serão apresentadas algumas telas iniciais do protótipo e em seguida cada módulo será apresentado mais especificamente.

[2]mais interesse, ver Conceição, K. (2) e Siqueira, K. C. (16).

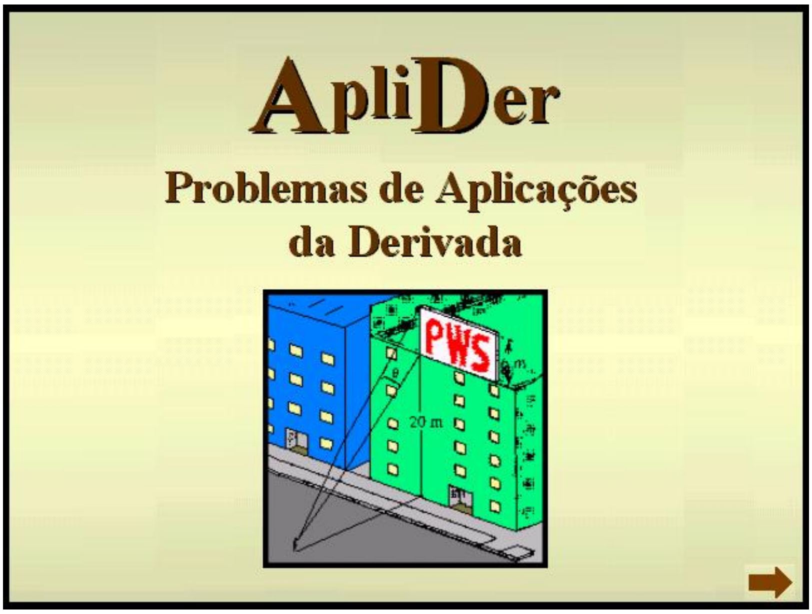


Figura 5: Tela inicial do protótipo ApliDer.

A tela inicial é seguida por uma tela que traz informações sobre o desenvolvimento do protótipo ApliDer. Em seguida, uma seqüência de telas de apresentação, trazem informações e instruções sobre o uso protótipo.

Figura 6: Tela de informações sobre o desenvolvimento do ApliDer.

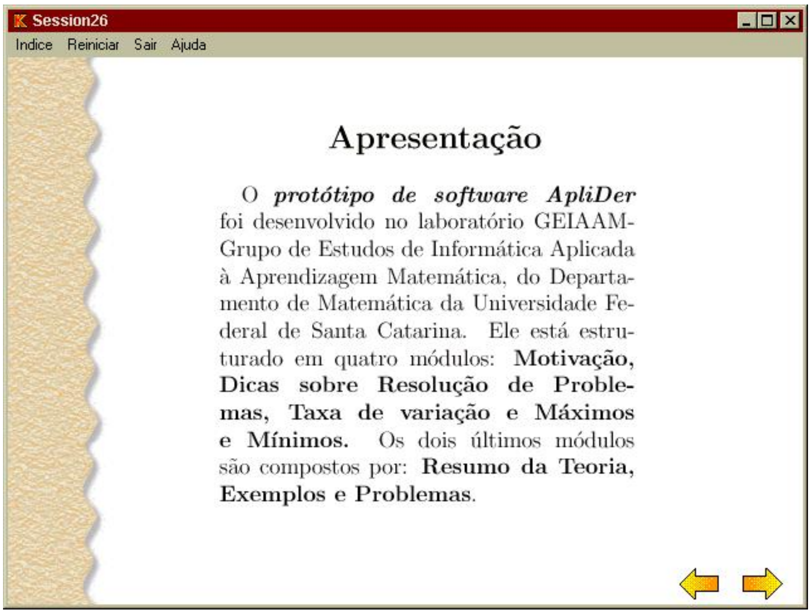


Figura 7: Tela de apresentação do protótipo ApliDer.

Em seguida será apresentada a tela principal do protótipo ApliDer. Nela o aluno pode escolher o módulo que deseja começar a estudar. No canto superior esquerdo da tela (veja figura 8, pág. 43), pode-se observar o menu que traz as opções: *Índice, Reiniciar, Sair e Ajuda*. A opção "Índice", apresenta os principais tópicos abordados no protótipo: *Teoria, Exemplos, Problemas e Referências*, mostrando que a estrutura do ApliDer é não linear, permitindo ao aluno escolher o tópico que pretende estudar ou retornar ao estudo de onde tenha parado em um momento anterior. A opção "Ajuda", não se refere a "Ajuda" para a resolução dos problemas, (citada na seção 4.4.3 na pág. 62), trata-se de um resumo das principais regras de derivação, de uma tabela de derivadas e de uma tabela de identidades trigonométricas.

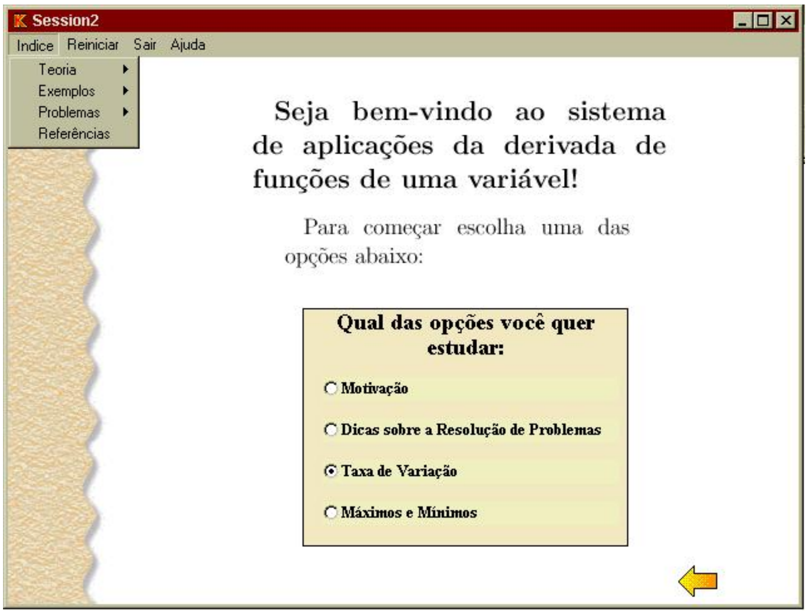


Figura 8: Tela principal, mostrando a opção "Índice".

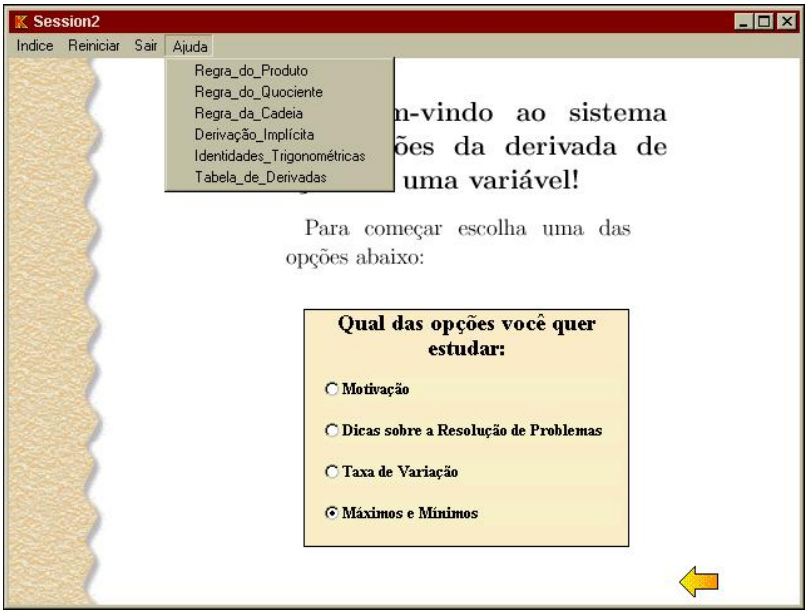


Figura 9: Tela principal, mostrando a opção "Ajuda".

Agora cada módulo é descrito mais especificamente.

4.4.1 Motivação

O módulo **Motivação** traz um resumo da história do cálculo, bem como a apresentação breve de alguns exemplos de problemas de aplicações da derivada. O objetivo desse módulo é mostrar a importância do cálculo, em especial de algumas aplicações da derivada e despertar o interesse dos alunos na resolução de problemas de aplicações da derivada.

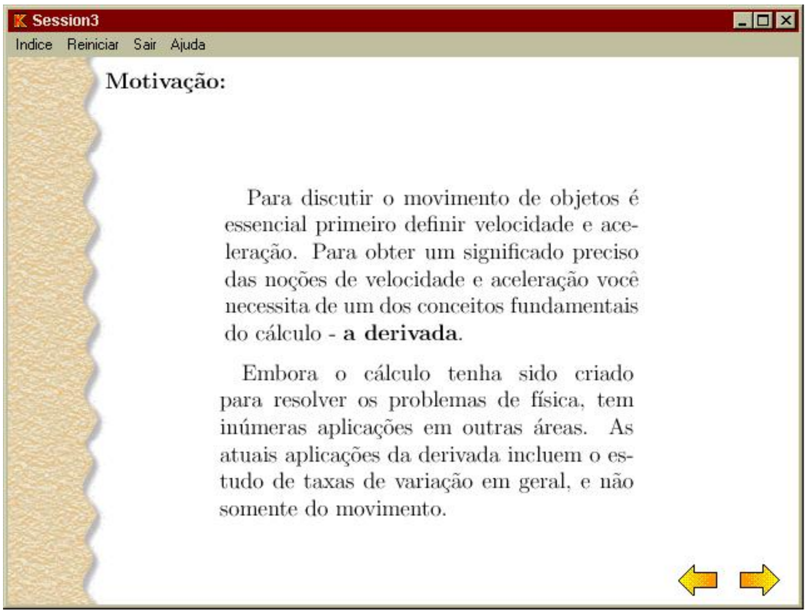


Figura 10: Tela do módulo Motivação

4.4.2 Dicas sobre Resolução de Problemas

O módulo **Dicas sobre Resolução de Problemas**, apresenta as etapas da resolução de problemas propostas por Polya, com algumas questões que devem fazer o aluno refletir sobre seus conhecimentos anteriores que podem ser utilizados para resolver o problema, bem como refletir sobre o caminho a ser seguido para se chegar a solução desejada. A estratégia de Polya é base para a resolução dos exemplos e problemas apresentados e propostos no ApliDer. Além disso, quando o aluno fornece uma resposta incorreta, nos submódulos problemas [3], são fornecidos a ele textos explicativos baseados nessa estratégia.

[3] ver seção 4.4.3, na pág. 62

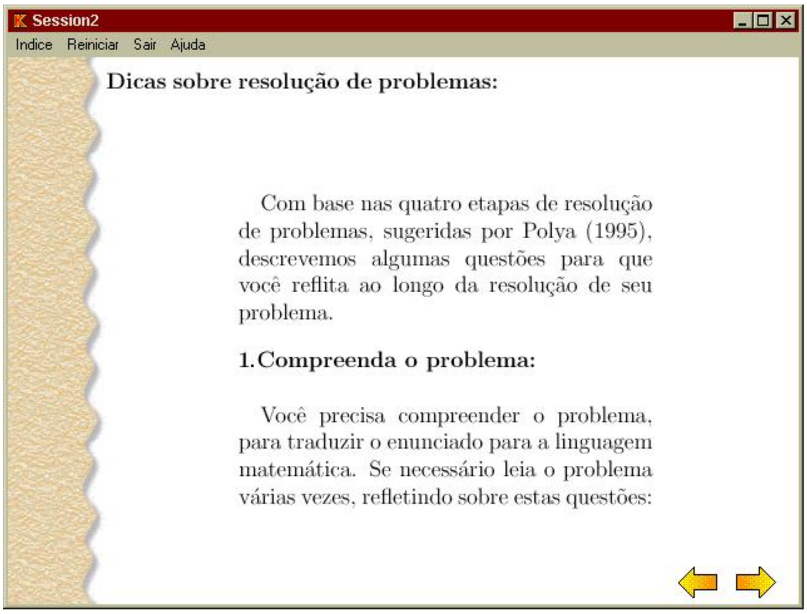


Figura 11: Tela do módulo Dicas sobre Resolução de Problemas

4.4.3 Taxa de Variação e Máximos e Mínimos

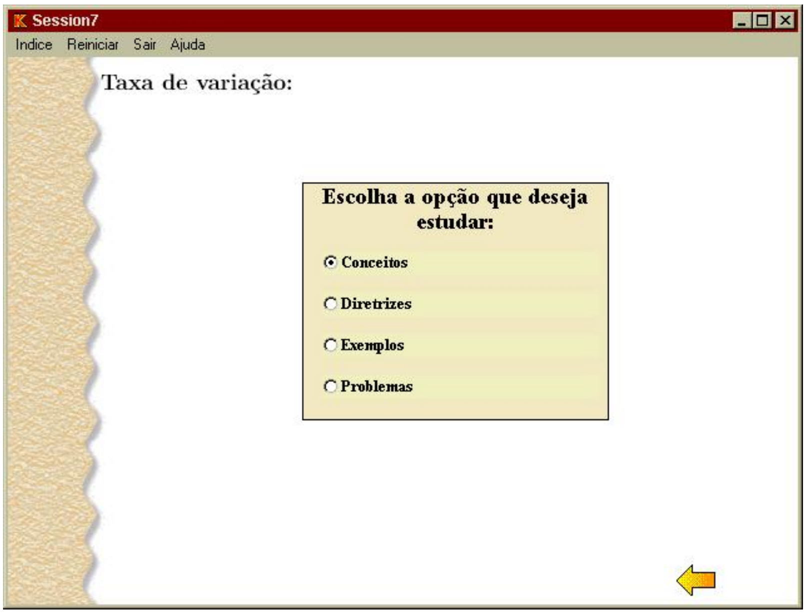


Figura 12: Tela do módulo Taxa de Variação.

Figura 13: Tela do módulo Máximos e Mínimos.

Como foi visto na secão 4.3, pág. 39, os módulos **Taxa de Variação** e **Máximos e Mínimos** estão divididos basicamente em quatro seções: *Resumo da Teoria, Diretrizes, Exemplos e Problemas.*

A partir de agora, cada uma dessas seções será apresentada em seu respectivo módulo.

• **Resumo da Teoria do módulo Taxa de Variação:**

No módulo **Taxa de Variação**, o resumo da teoria se concentra no submódulo **Conceitos**. Nele introduz-se o conceito de Taxa de Variação através dos conceitos de velocidade e aceleração. Também é apresentado o conceito de Taxas Relacionadas utilizado em problemas que envolvem funções compostas.

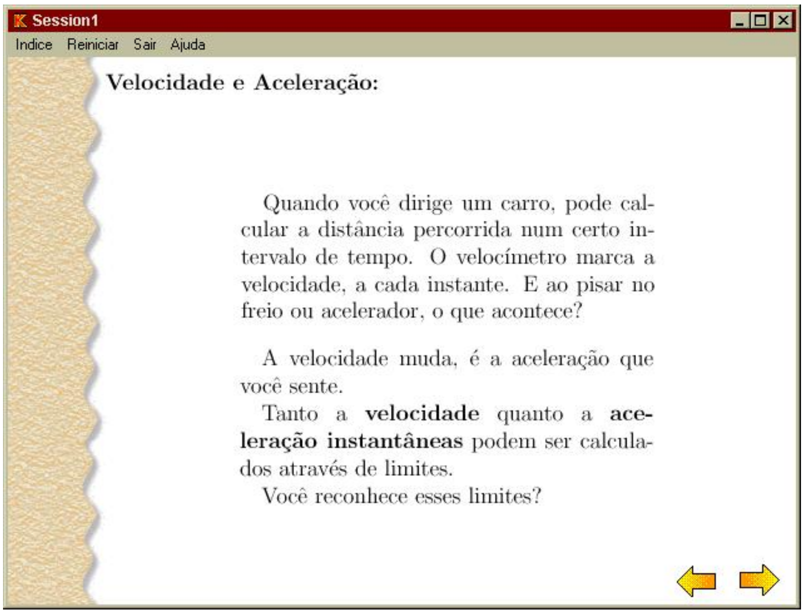


Figura 14: Tela do submódulo Conceitos

- **Resumo da Teoria do módulo Máximos e Mínimos:**

No módulo **Máximos e Mínimos** o resumo da teoria se concentra nos submódulos: **Conceitos Básicos, Condição Necessária, Teste da Derivada Primeira e Teste da Derivada Segunda**.

A seguir descreve-se cada submódulo, do resumo da teoria do módulo **Máximos e Mínimos**.

◇ **Conceitos Básicos**

O submódulo **Conceitos Básicos** apresenta quatro definições e um teorema. Em algumas definições o aluno tem a possibilidade de vizualizar graficamente o conceito a fim de torná-lo mais concreto.

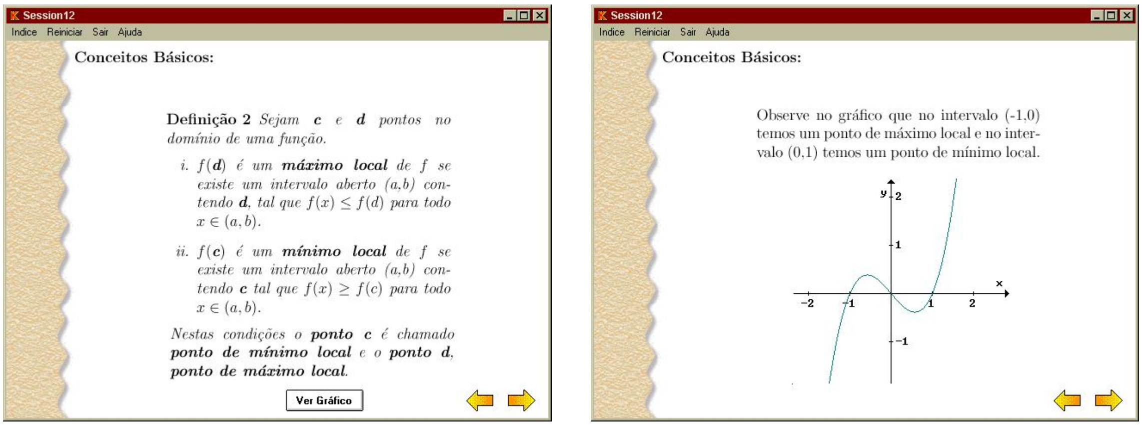


Figura 15: Telas do submódulo Conceitos Básicos

◇ Condição Necessária

O submódulo **Condição Necessária** apresenta um teorema e um corolário, que são as condições necessárias para que um ponto crítico seja ponto extremo.

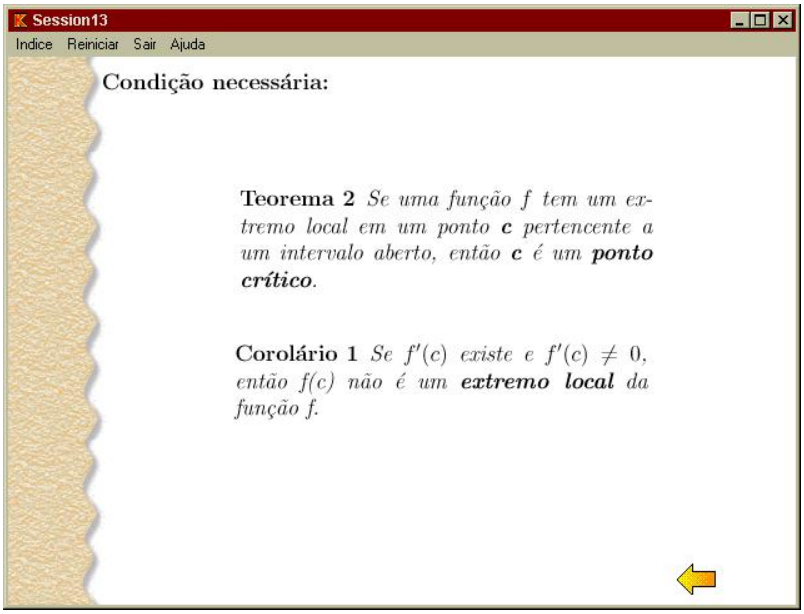


Figura 16: Tela do submódulo Condição Necessária

◇ Teste da Derivada Primeira

O submódulo **Teste da Derivada Primeira** apresenta o teorema de crescimento e decrescimento de uma curva e o teste da derivada primeira, junto com sua visualização gráfica.

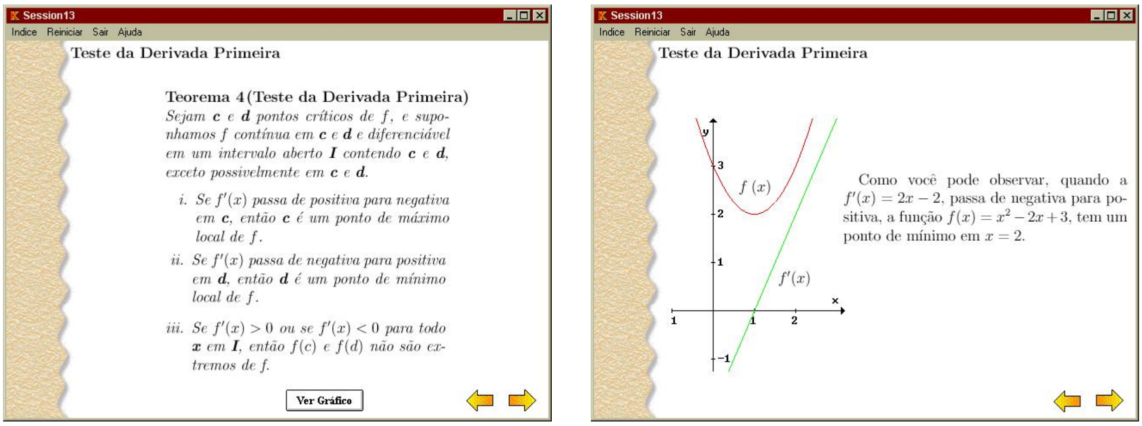


Figura 17: Telas do submódulo Teste da Derivada Primeira

⋄ Teste da Derivada Segunda

O submódulo **Teste da Derivada Segunda** apresenta duas definições, o teste da concavidade e o teste da derivada segunda.

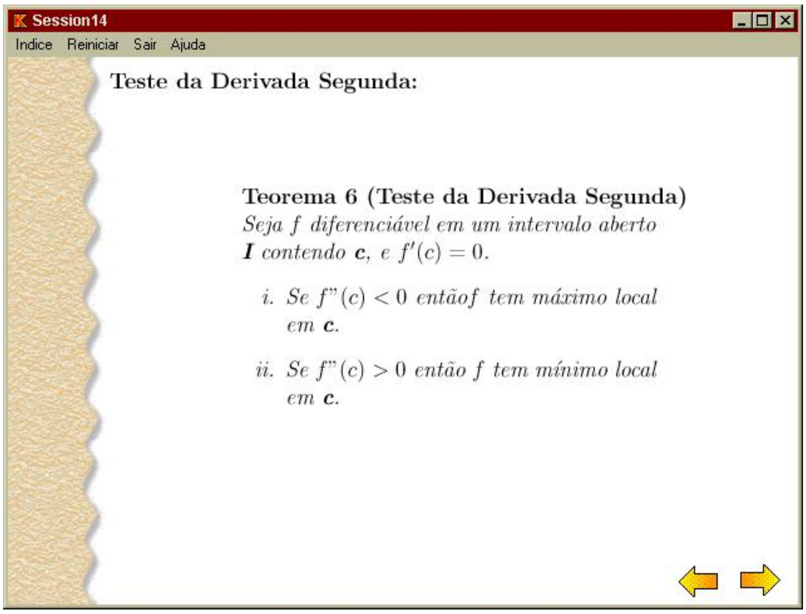


Figura 18: Tela do submódulo Teste da Derivada Segunda

• Diretrizes:

Tanto o submódulo **Diretrizes para Problemas de Taxa de Variação** quanto o submódulo **Diretrizes para Problemas de Máximos e Mínimos**, apresentam as etapas para uma estratégia de resolução de problemas de Taxa de Variação e Máximos e Mínimos, respectivamente, baseadas nas etapas propostas por Polya.

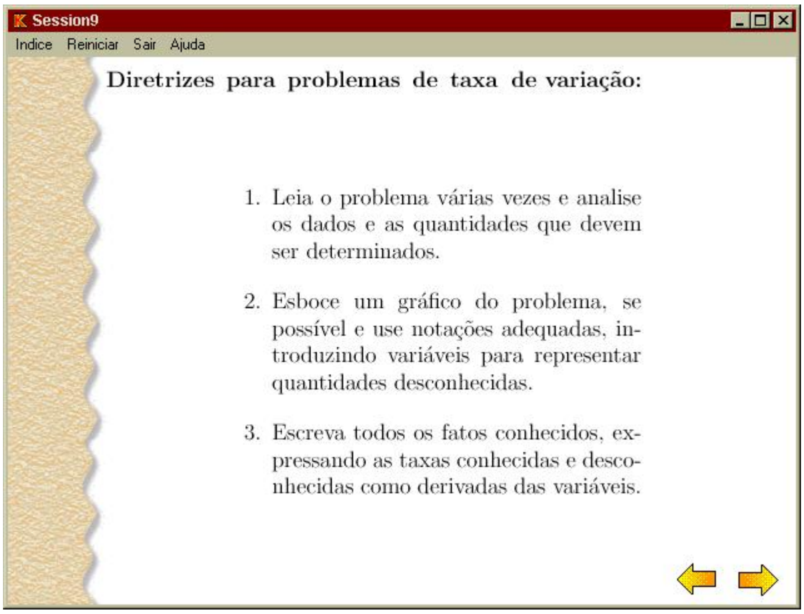


Figura 19: Tela do submódulo Diretrizes para Problemas de Taxa de Variação

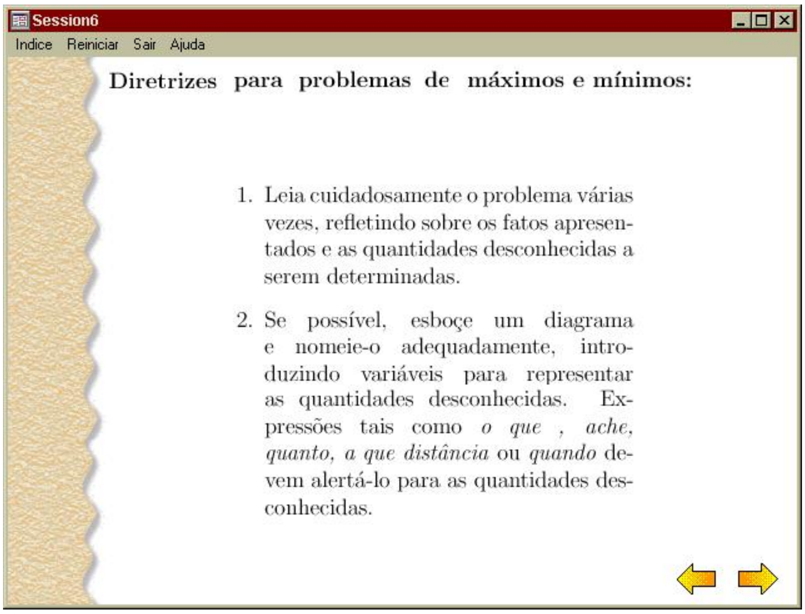


Figura 20: Tela do submódulo Diretrizes para Problemas de Máximos e Mínimos

- **Exemplos:**

Nos submódulos **Exemplos de Problemas de Taxa de Variação** e **Exemplos de Problemas de Máximos e Mínimos**, o aluno é convidado a participar, trabalhando em paralelo no ambiente lápis/papel e conferindo seus resultados nas telas posteriores. Cada submódulo apresenta a resolução de dois exemplos de problemas.

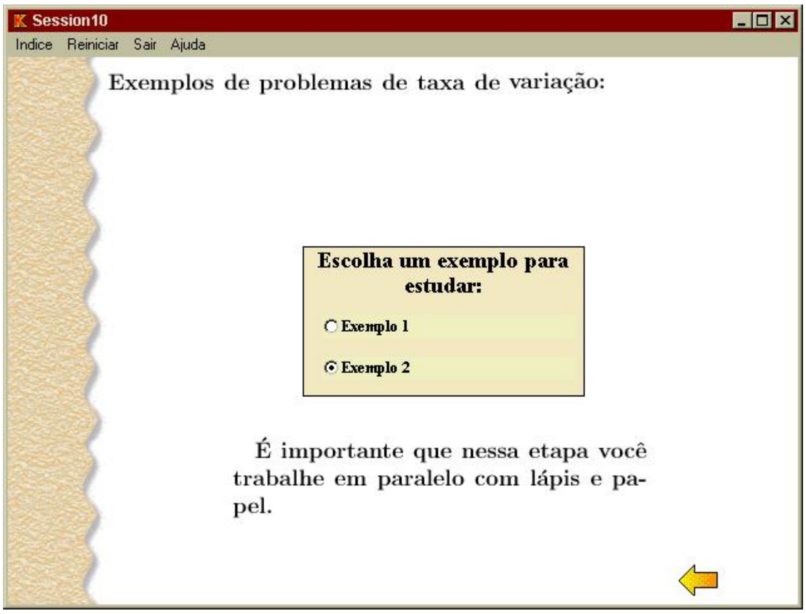
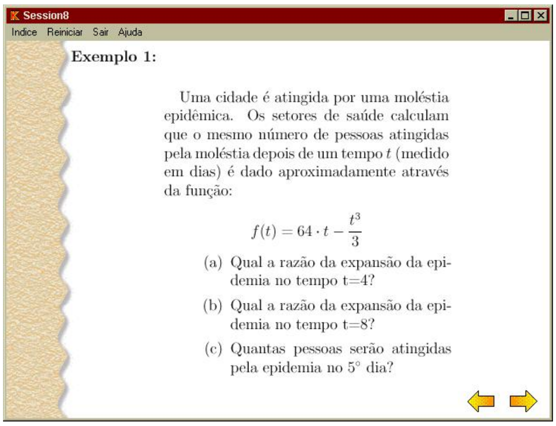


Figura 21: Tela do submódulo Exemplos de Problemas de Taxa de Variação

Estes são os dois exemplos de problemas de taxa de variação apresentados no protótipo ApliDer.



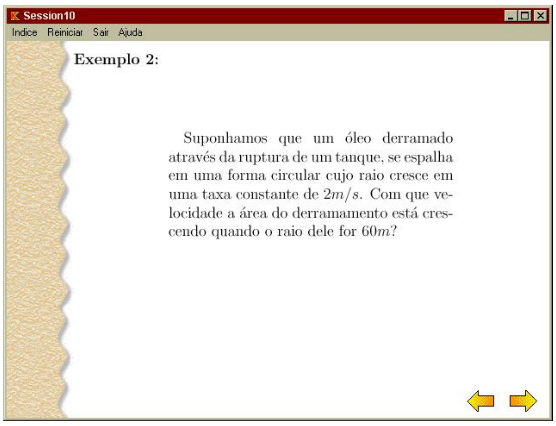


Figura 22: Telas dos exemplos de problemas de Taxa de Variação.

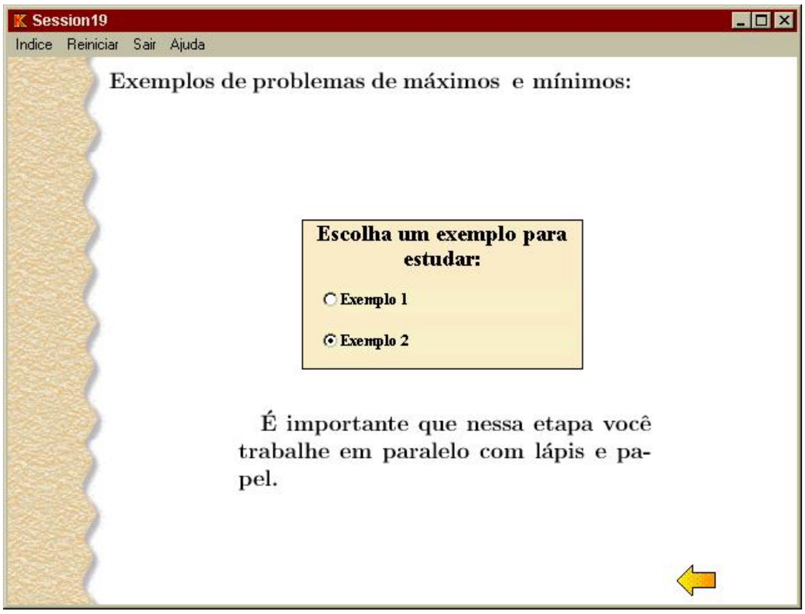


Figura 23: Tela do submódulo Exemplos de Problemas de Máximos e Mínimos.

Estes são os dois exemplos de problemas de Máximos e Mínimos apresentados no protótipo ApliDer.

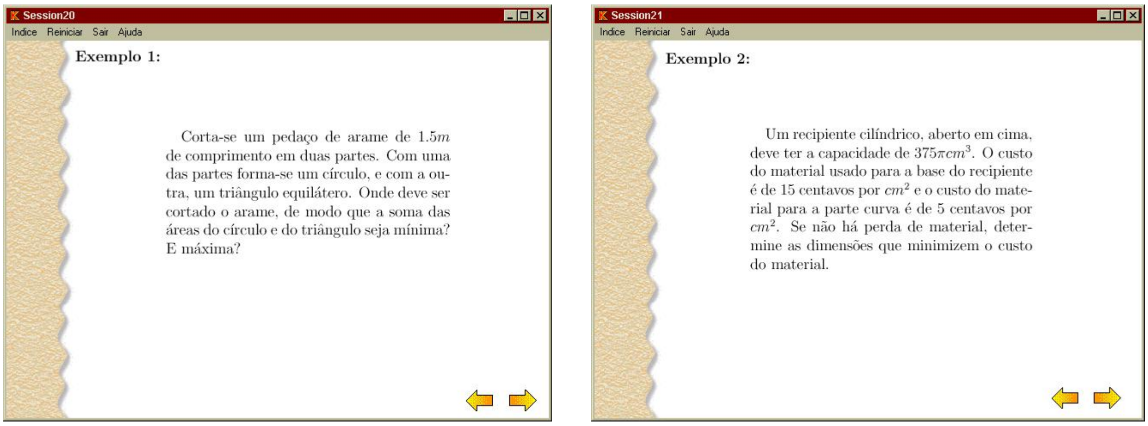


Figura 24: Telas dos exemplos de problemas de Máximos e Mínimos.

Todos os exemplos, de problemas de taxa de variação e de máximos e mínimos, são resolvidos seguindo as etapas apresentadas nos submódulos **Diretrizes para Problemas de Taxa de Variação** e **Diretrizes para Problemas de Máximos e Mínimos**, respectivamente. A seguir é apresentado o desenvolvimento da resolução do exemplo 1, do módulo **Taxa de Variação** e a resolução do exemplo 2, do módulo **Máximos e Mínimos**.

- **Exemplo 1, do módulo Taxa de Variação:**

Uma cidade é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o mesmo número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias) é dado aproximadamente através da função:

$$f(t) = 64 \cdot t - \frac{t^3}{3}$$

i. *Qual a razão da expansão da epidemia no tempo t=4?*

ii. *Qual a razão da expansão da epidemia no tempo t=8?*

iii. *Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no 5° dia?*

- **Resolução:**

1. Você precisa ler o problema cuidadosamente, para compreendê-lo. Isso significa que nessa etapa, você deve identificar os dados e as incógnitas do problema. Pense um pouco...

   Nesse caso você tem, como dados:

$$f(t) = 64 \cdot t - \frac{t^3}{3}$$

   quando $t = 4$; e $t = 8$.

   E as incógnitas são:

Expansão da epidemia no 4° dia	Expansão da epidemia no 8° dia	N° de pessoas atingidas no 5° dia
$f'(4)$	$f'(8)$	$f(5) - f(4)$

2. Agora você deve derivar a função $f(t)$.

   Você deve obter...

$$f'(t) = 64 - t^2$$

3. Seu problema já está parcialmente resolvido, pois basta substituir os dados que o problema fornece:

   Portanto:

   (a) A razão da expansão da epidemia no quarto dia será:

   $f'(4) = 64 - (4)^2 = 64 - 16 = 48$

   No quarto dia, a moléstia estará se alastrando à razão de 48 pessoas por dia.

   (b) A razão da expansão da epidemia no oitavo dia será:

   $f'(8) = 64 - (8)^2 = 64 - 64 = 0$

   Assim no oitavo dia, a epidemia estará controlada.

   (c) E o número de pessoas atingidas no quinto dia você sabe como calcular? Pense um pouco...

   Isso mesmo! o número de pessoas atingidas no quinto dia corresponde à variação de $f(t)$, quando t varia de 4 para 5.

   Assim você obtem:

$$
\begin{aligned}
f(5) - f(4) &= \left(64 \cdot 5 - \frac{5^3}{3}\right) - \left(64 \cdot 4 - \frac{4^3}{3}\right) \\
&= 320 - \frac{125}{3} - 256 + \frac{64}{3} \\
&\cong 43
\end{aligned}
$$

   Ou seja, 43 pessoas serão atingidas no 5ºdia de epidemia.

4. Lembre-se que é importante verificar se a solução encontrada faz sentido. Você acha que essa solução faz sentido?

   Observe que no tempo $t = 4$ (início do 5° dia), a epidemia se alastra a uma taxa de 48 pessoas por dia. Enquanto que no item (c) você encontrou que durante o 5° dia 43 pessoas serão atingidas. Essa diferença ocorreu porque a taxa de propagação da moléstia se modificou no decorrer do dia.

- **Exemplo 2, do módulo Máximos e Mínimos:**

Um recipiente cilíndrico, aberto em cima, deve ter a capacidade de $375\pi cm^3$. O custo do material usado para a base do recipiente é de 15 centavos por cm^2 e o custo do material para a parte curva é de 5 centavos por cm^2. Se não há perda de material, determine as dimensões que minimizem o custo do material.

- **Resolução:**

1. Você precisa ler o problema cuidadosamente, para compreendê-lo. Isso significa que você deve identificar os dados e as incógnitas. Pense um pouco...

   Nesse caso você tem, como dados:

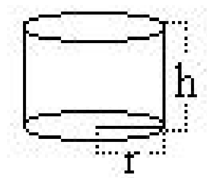
   - $V = 375\pi cm^3$
   - $C_b = 15$ (Custo da base por cm^2)
   - $C_l = 5$ (Custo da parte lateral por cm^2)

   E as incógnitas são:

   - r: raio da base do cilindro.
   - h: altura do cilindro.

2. Se for possível, você deve esboçar um diagrama, introduzindo as variáveis. Tente fazer um diagrama para esse problema.

   Esse diagrama vai facilitar na compreensão do problema.



3. Agora tente escrever os fatos conhecidos com as relações que envolvem as variáveis.

   Como os custos, por cm^2, da base e da parte lateral são 15 e 5 centavos, respectivamente, você obtem:

$$C = 15 \cdot (A_b) + 5 \cdot (A_l)$$

$$onde \begin{cases} A_b = \pi r^2 \\ A_l = 2\pi r h \end{cases}$$

   Assim:

$$C = 15 \cdot (\pi r^2) + 5 \cdot (2\pi r h)$$

$$C = 5\pi(3r^2 + 2rh) \tag{4.1}$$

4. Você consegue identificar qual função deve ser minimizada? Pense um pouco...

   A função a ser minimizada é a equação 4.1. Mas você precisa expressá-la como função de uma variável.

   Tente escrever h em termos de r.

   É dado que $V = 375\pi cm^3$.

   Como $V = \pi r^2 h$, você vai obter

$$\begin{aligned} \pi r^2 h &= 375\pi \\ h &= \frac{375}{r^2} \end{aligned}$$

   Ao substituir h por $\frac{375}{r^2}$ na equação 4.1, você vai obter:

$$C(r) = 5\pi\left(3r^2 + \frac{750}{r}\right)$$

   que vai ser a função custo do material utilizado.

5. Você precisa, agora, determinar os pontos críticos da função. Tente...

   Derivando a função $C(r)$, vem que:

$$C'(r) = 5\pi\left(6r - \frac{750}{r^2}\right) = 30\pi\left(\frac{r^3 - 125}{r^2}\right)$$

   Lembre-se que: *se f é derivável, c é um ponto crítico se e só se $f'(c) = 0$.*

   $C'(r) = 0$ se e somente se, $r = 5$, você já pode concluir que $r = 5$ é o único ponto crítico.

6. Agora você deve determinar se o ponto crítico é um ponto de mínimo. Você sabe qual o melhor teste para este problema?

   Nesse problema você pode utilizar o teste da derivada primeira, da seguinte maneira:

$$C'(r) = 30\pi\left(\frac{r^3 - 125}{r^2}\right)$$

   Você pode analisar apenas $(r^3 - 125)$, pois $30\pi > 0$ e $r^2 > 0$.

- $(r^3 - 125) > 0$ para $r > 5$, e;
- $(r^3 - 125) < 0$ para $r < 5$.

Portanto:

- $C'(r) > 0$ para $r > 5$, e;
- $C'(r) < 0$ para $r < 5$.

Pelo teste da derivada primeira você vai concluir que $C(r)$ tem seu mínimo quando o raio do cilindro for $5cm$ e a altura, consequentemente, $h = \frac{375}{r^2}$ for $15cm$.

7. Como o domínio de C é $(0, \infty)$, não é necessário verificar os extremos do intervalo.

8. Você acha que o resultado faz sentido?

   Os resultados obtidos fazem sentido. Para que o custo de fabricação da lata seja mínimo, a lata deve ter as seguintes dimensões:

$$\begin{cases} r = 5cm \\ h = 15cm \end{cases}$$

   E o custo será: $C(5) = 3534.29$.

   Se você quiser conferir, calcule $C(r)$ para alguns outros valores. Por exemplo, $r = 4$ e $r = 6$.

   Você deverá obter valores maiores que $C(5)$, pois nesse ponto a função atinge seu valor mínimo.

- **Problemas:**

Nos submódulos **Problemas de Taxa de Variação** e **Problemas de Máximos e Mínimos**, o aluno é convidado a participar novamente, trabalhando em paralelo no ambiente lápis/papel, tentando resolver os problemas propostos. Cada submódulo propõe quatro problemas ao aluno.

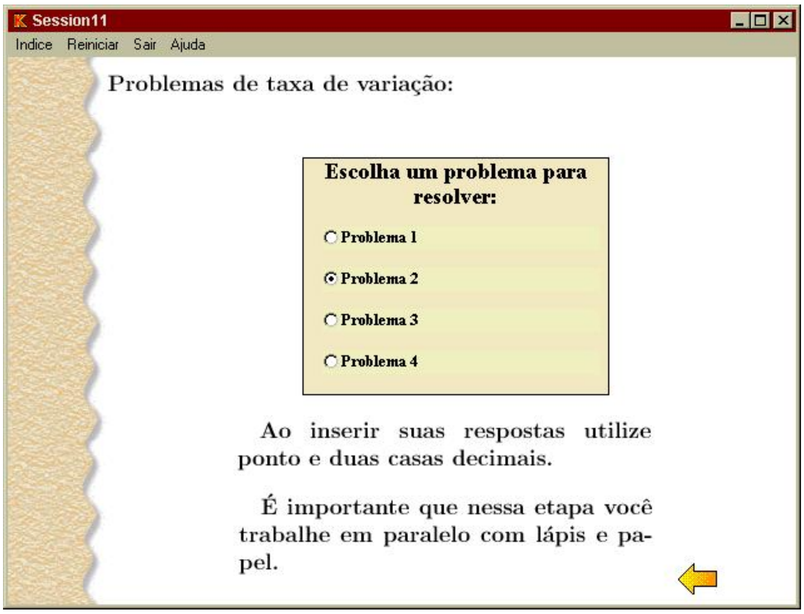
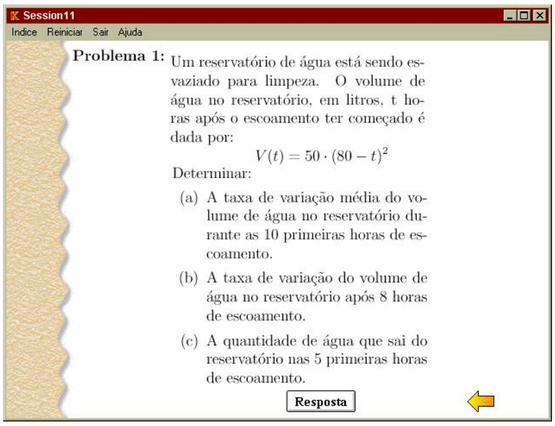
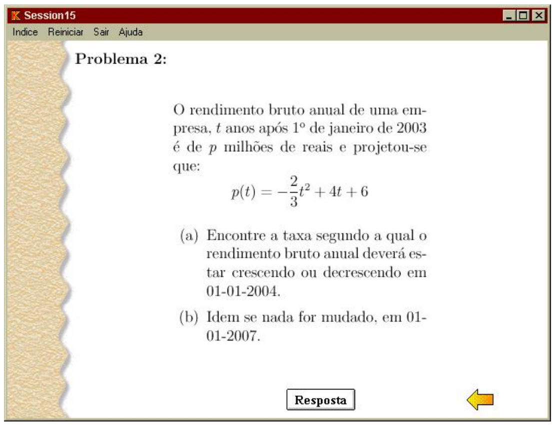
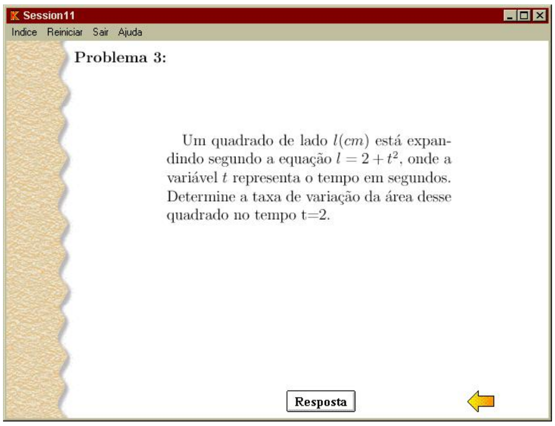


Figura 25: Tela do submódulo Problemas de Taxa de Variação

Estes são os quatro problemas de taxa de variação propostos.







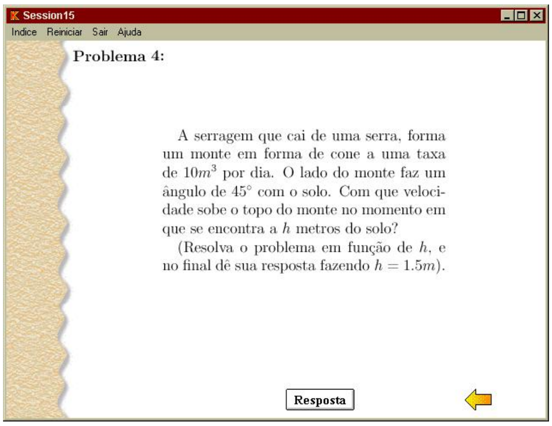


Figura 26: Telas dos problemas de Taxa de Variação propostos.

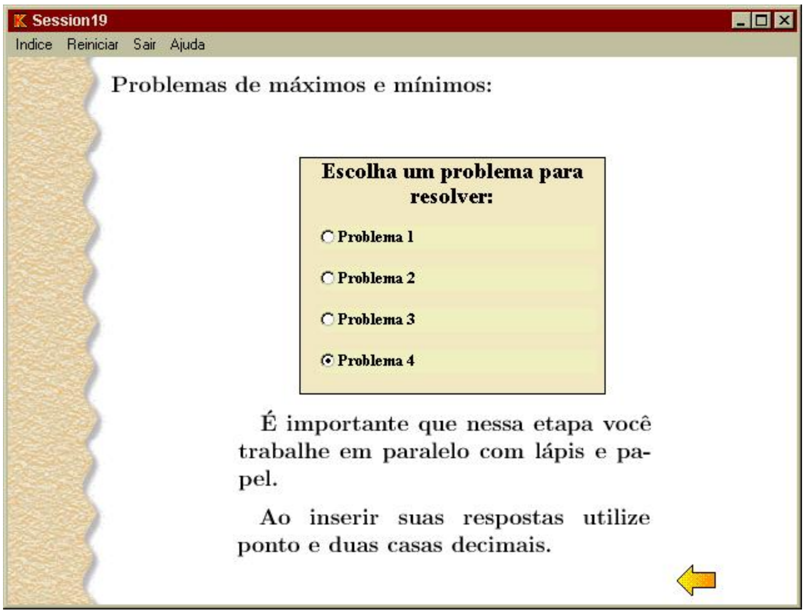


Figura 27: Tela do submódulo Problemas de Máximos e Mínimos

Estes são os quatro problemas de máximos e mínimos propostos.

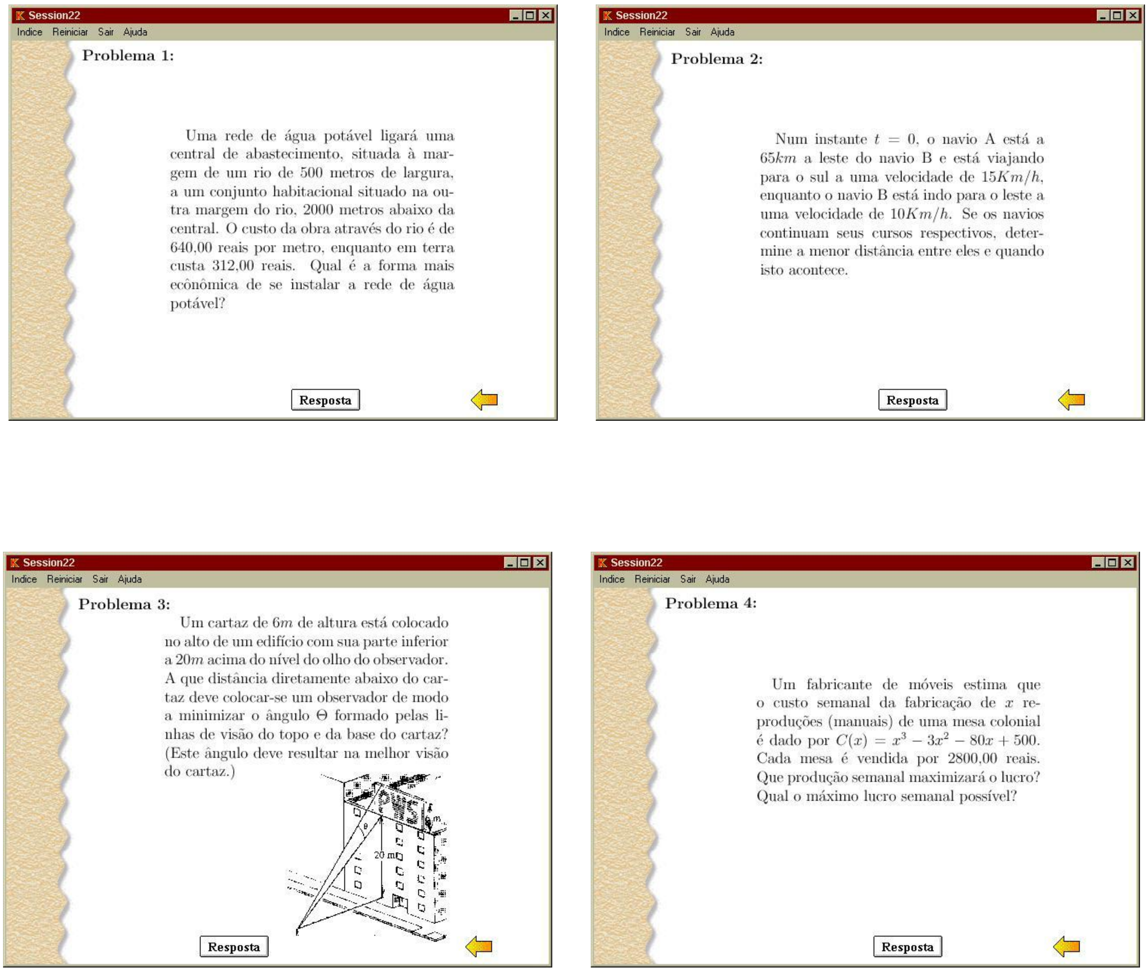


Figura 28: Telas dos problemas de Máximos e Mínimos propostos.

Todos os problemas apresentados no protótipo ApliDer possuem uma estrutura de “Ajuda”. Essa “Ajuda” apresenta questões, com o objetivo de fazer o aluno refletir sobre seus conhecimentos anteriores e sobre o caminho a ser seguido para se chegar a solução desejada.

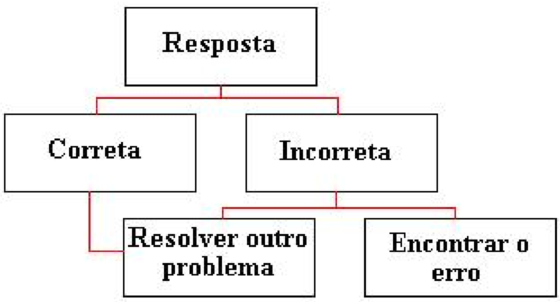


Figura 29: Estrutura de ajuda dos problemas.

A seguir será apresentada a implementação desta estrutura em um dos problemas de Taxa de Variação. O problema apresentado, é o **Problema 4** do módulo **Taxa de Variação**.

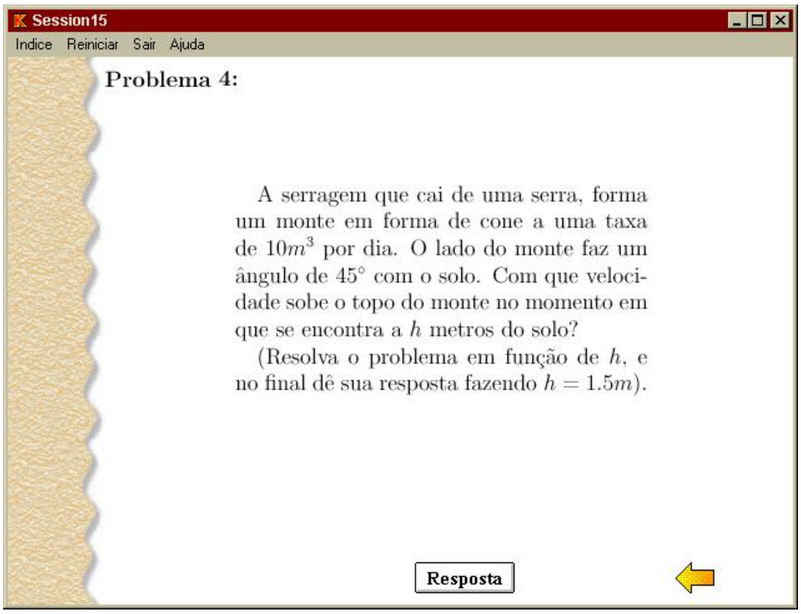


Figura 30: Problema 4 do módulo Taxa de Variação.

Depois de resolver o problema no ambiente lápis/papel, ao clicar no botão **Resposta**, o aluno poderá inserir o valor encontrado em sua resolução.

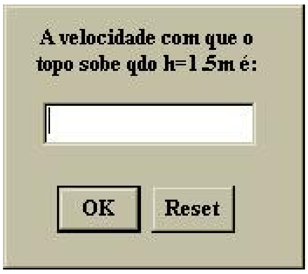


Figura 31: Entrada de valores para a resposta do Problema 4.

Caso o aluno insira a resposta correta o protótipo "responde" com uma mensagem de parabenização. A seguir o aluno pode optar se quer resolver outro problema.

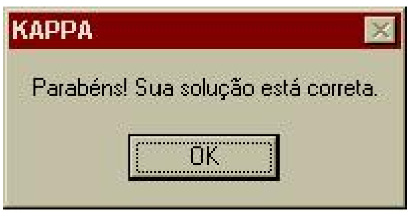


Figura 32: Mensagem de acerto.

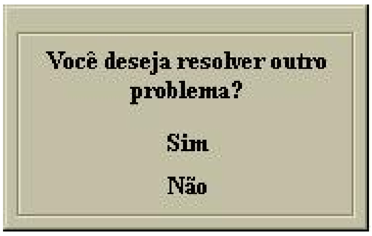


Figura 33: Menu de opções para resolver outro problema.

Ao escolher a opção **"sim"**, o aluno volta para a sessão do submódulo **Problemas de Taxa de Variação**, veja a figura 25, na pág. 58. Caso escolha a opção "**"não"**, o protótipo apresenta uma mensagem:"Faça sua opção no índice ou clique em sair".

Caso o aluno insira a resposta incorreta o protótipo "responde" com uma mensagem de erro. E em seguida o aluno pode optar se quer encontrar seu erro.

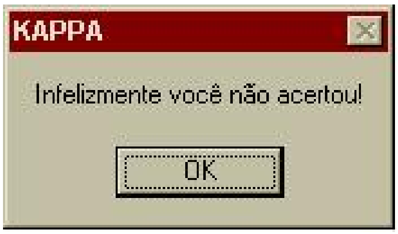


Figura 34: Mensagem de erro.

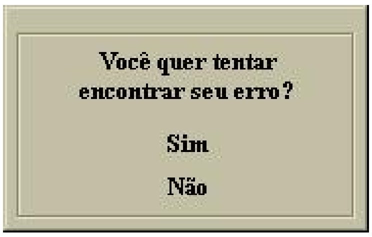


Figura 35: Menu de opções, caso o aluno queira encontrar o seu erro.

Ao escolher a opção **"sim"**, o protótipo apresentará ao aluno algumas questões, que tem como objetivo levá-lo a refletir sobre algumas questões citadas no submódulo **Diretrizes para Problemas de Taxa de Variação**. A seguir serão apresentadas as questões referentes a solução do Problema 4, do módulo **Taxa de Variação**.

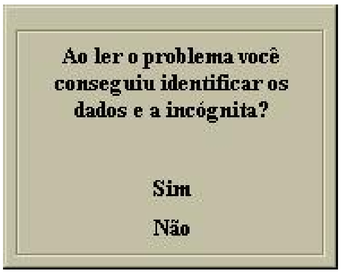


Figura 36: Primeira questão da ajuda apresentada para o Problema 4 de Taxa de Variação.

Ao escolher a opção **"não"**, o protótipo apresentará ao aluno quais são os dados e as incógnitas do problema. Ao escolher a opção **"sim"**, o protótipo apresentará a segunda questão, referente ao problema 4 de Taxa de Variação.

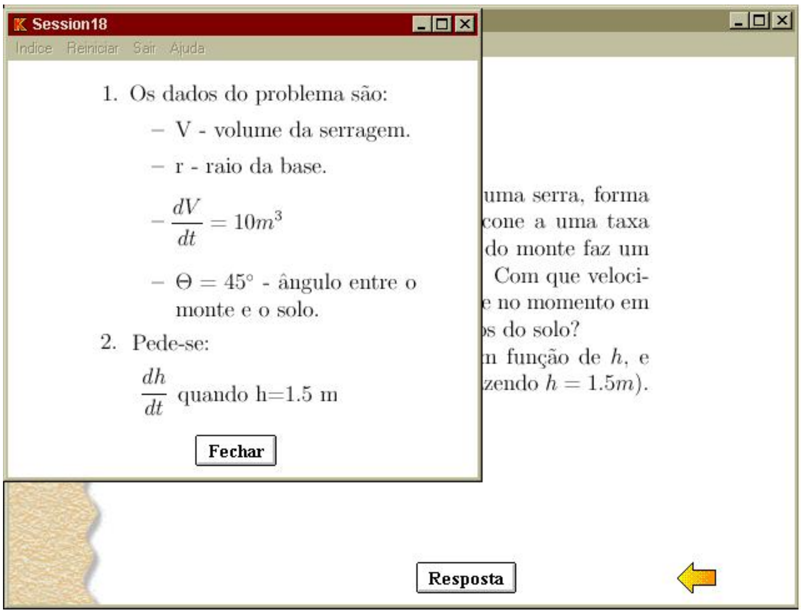


Figura 37: Primeira tela de ajuda apresentada para o problema 4.

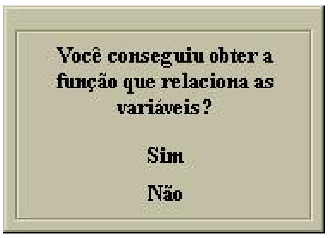


Figura 38: Segunda questão da ajuda apresentada para o Problema 4 de Taxa de Variação.

Ao escolher a opção **"não"**, o protótipo apresentará ao aluno o esboço de uma figura para auxiliar na leitura do problema. Ao escolher a opção **"sim"**, o protótipo "pedirá" ao aluno que confira sua solução e refaça seus cálculos.

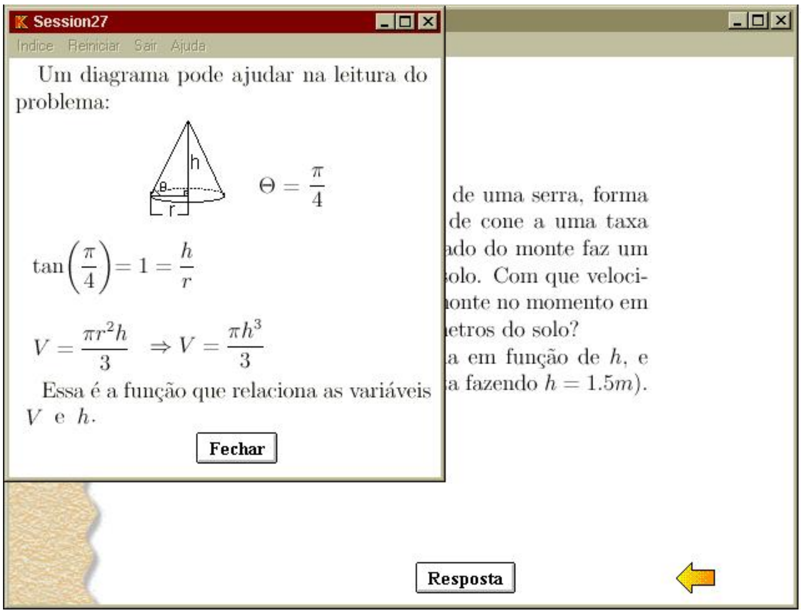


Figura 39: Segunda tela de ajuda apresentada para o problema 4.

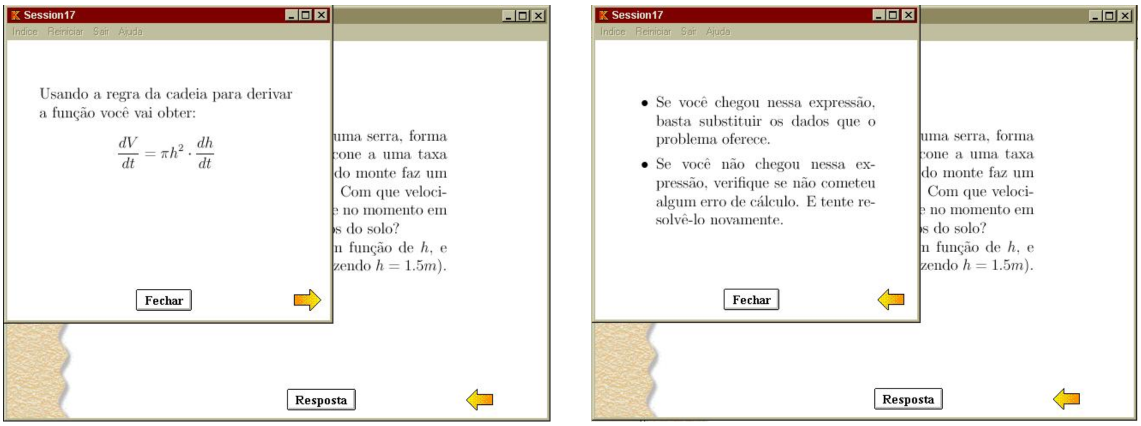


Figura 40: Terceira e Quarta telas de ajuda apresentadas para o Problema 4.

Na próxima seção, será apresentada a experimentação do protótipo ApliDer.

4.5 Experimentação do protótipo ApliDer

A experimentação foi realizada com oito alunos da Universidade Federal de Santa Catarina, sete do curso de Licenciatura em Matemática e um do curso de Química, onde foram aplicados dois questionários, um para ser respondido antes da navegação e outro depois. Nessa etapa os oito alunos foram deixados livres para navegar pelo ApliDer e o fizeram em momentos diferentes. Ainda pretende-se fazer uma segunda experimentação, onde o ApliDer será aplicado a uma turma de Cálculo 1 presencial, mas esta não será descrita nesse trabalho.

O primeiro questionário (anexo A), na pág. 73, tem como objetivo obter o perfil dos alunos que irão utilizar o protótipo e verificar as dificuldades encontradas pelos alunos diante de problemas de aplicações da derivada.

- **Dados obtidos do questionário 1:**

1. **A quanto tempo você cursou a disciplina de cálculo 1? E qual cálculo você está cursando?**

   Dentre os oito alunos que participaram da experimentação:

   - Um aluno está cursando cálculo 1 esse semestre [4].
   - Dois alunos cursaram cálculo 1 no segundo semestre de 2003 e atualmente cursam cálculo 3.
   - Dois alunos cursaram cálculo 1 no primeiro semestre de 2003.
   - Dois alunos cursaram cálculo 1 no segundo semestre de 2002.
   - Um aluno cursou cálculo 1 no primeiro semestre de 2002.

2. **Você resolveu problemas de aplicações da derivada quando cursou o cálculo 1?**

   Os oito alunos responderam que resolverem problemas de aplicações da derivada em algum momento do curso de cálculo 1.

3. **Você acha que é capaz de resolver um problema de aplicação da derivada facilmente?**

   Sete alunos responderam que se sentem capazes de resolver problemas de aplicações da derivada, somente um respondeu que não se sente capaz.

4. **Você está disposto a tentar resolver?**

   Cinco alunos se propuseram a tentar resolver dois problemas de aplicações da derivada. Os problemas[5] propostos foram:

[4] segundo semestre de 2004

[5] Esses dois problemas estão implementados no protótipo ApliDer como exemplos.

(a) Suponhamos que um óleo derramado através da ruptura de um tanque, se espalha em uma forma circular cujo raio cresce em uma taxa constante de $2m/s$. Com que velocidade a área do derramamento está crescendo quando o raio dele for $60m$?

(b) Um recipiente cilíndrico, aberto em cima, deve ter a capacidade de $375\pi cm^3$. O custo do material usado para a base do recipiente é de 15 centavos por cm^2 e o custo do material para a parte curva é de 5 centavos por cm^2. Se não há perda de material, determine as dimensões que minimizem o custo do material.

Dos cinco alunos que tentaram resolver os problemas: dois afirmaram que não encontraram dificuldades em resolvê-los; dois responderam que a dificuldade encontrada, está em relacionar as variáveis; e um aluno respondeu que algumas fórmulas necessárias para a resolução dos problemas poderiam ter sido dadas.

Esses foram os resultados obtidos com a aplicação do primeiro questionário.

O segundo questionário, em anexo B, na pág. 75, tem como objetivo avaliar a eficácia do protótipo ApliDer, no processo de ensino-aprendizagem.

• **Dados obtidos do questionário 2:**

○ *Com relação aos objetivos do protótipo ApliDer:*

1. **O protótipo ApliDer o auxiliou na resolução de problemas de Aplicações da Derivada? De que maneira?**

   Os oito alunos responderam que o protótipo auxiliou na resolução dos problemas de aplicações da derivada. Dos oito alunos, quatro responderam que o ApliDer ajudou a relembrar conceitos já esquecidos.

   Um dos alunos respondeu: "*Estamos habituados a resolver apenas os cálculos de derivadas. Assim, conseguimos perfeitamente aplicar as técnicas para resolvê-las. Entretanto são poucos os momentos em que tentamos resolver problemas que necessitem da aplicação da derivada. Desta forma, o ApliDer além de nos motivar para a resolução de problemas, nos possibilita rever algumas definições e conceito sobre a derivada.*

2. **A linguagem adotada foi clara e objetiva, de forma que evitou confusão conceitual e contradições? Se não diga em que parte ou seção.**

Sete alunos responderam que a linguagem adotada pelo ApliDer foi clara, somente um aluno respondeu que não, não justificando sua resposta.

3. **A teoria apresentada é suficiente para a resolução dos problemas? Se não o que poderia ser acrescentado.**

   Os oito alunos responderam que a teoria apresentada é suficiente para a resolução dos problemas, sendo que um deles destacou que a teoria é suficiente para os problemas propostos.

4. **Se você errou algum problema e utilizou a "Ajuda" para tentar resolvê-lo novamente, achou que ela foi suficiente? Se não dê sugestões.**

   Os oito alunos responderam que a "Ajuda" foi suficiente ao tentarem resolver os problemas novamente.

   Um deles respondeu que: "*É muito interessante o processo adotado para nos fazer encarar os desafios e problemas sugeridos, ou seja, resolvemos de uma maneira e depois podemos visualizar a solução escrita de uma forma diferente. Além disso, caso não consigamos resolver, podemos contar com a ajuda disponível no programa. Destaco a importância de o programa conter as sugestões de Polya de como proceder para resolver um problema.*"

◦ *Com relação ao uso do protótipo ApliDer:*

1. **Você encontrou alguma dificuldade para navegar no protótipo?**

   Os oito alunos responderam que a navegação pelo ApliDer é simples. Um deles destacou que: "*... o ApliDer deve exibir uma mensagem após sua abertura que para sair o usuário deve clicar no ícone sair*". Isso porque o usuário, ao clicar no X, localizado no canto superior direito da tela, está fechando somente aquela sessão e o programa quando aberto novamente acusa um erro. Quando o usuário clica no ícone "sair", a função ligada a esse ícone, fecha todas as sessões, não importando em qual delas o aluno está navegando.

2. **Você encontrou algum erro (botões, textos sobrepostos, erros de digitação, etc.) no protótipo durante a navegação? Se encontrou descreva o local.**

   Dos oito alunos, cinco encontraram alguns erros como: textos sobrepostos e erros de digitação. Um dos alunos sugeriu que nos problemas com mais de um item na resposta, caso a resposta dada esteja incorreta, o programa "respondesse" qual dos itens está incorreto, para que não fosse necessário resolver todos os itens novamente.

4.5.1 Resultados da experimentação:

Esses são os resultados da primeira experimentação realizada com o protótipo de software ApliDer. Pode-se concluir que esses resultados foram satisfatórios, atingindo o objetivo principal proposto pelo protótipo ApliDer: *servir como recurso didático tendo como finalidade auxiliar os alunos na resolução de problemas de aplicações da derivada.* Os alunos que participaram dessa experimentação, como já foi citado, além de citarem que o protótipo auxiliou na resolução do problemas propostos, também contribuiu ao relembrar de alguns conceitos já esquecidos. Todos os alunos consideraram o ApliDer um programa de navegação fácil e a maioria deles respondeu que a linguagem adotada é clara e objetiva evitando confusão conceitual.

Espera-se que com a próxima experimentação, a ser realizada em uma turma de cálculo 1 presencial, os resultados obtidos também possam ser satisfatórios. Destaca-se que essa primeira experimentação foi realizada individualmente, em momentos diferentes e sem nenhuma sugestão de navegação. Provavelmente para a segunda experimentação será utilizada a sugestão de navegação que encontra-se no apêndice A na pág. 89.

5 Considerações Finais

O principal objetivo desse trabalho foi apresentar o protótipo de software educacional AapliDer, desenvolvido pela autora sob orientação da professora Mirian Buss Gonçalves, que contempla problemas de aplicações da derivada. As resoluções destes problemas estão baseadas nas etapas de resolução de problemas de Polya, que contemplam: *a compreensão do enunciado, o estabelecimento de um plano, a execução correta desse plano e a análise crítica do resultado final.* Dessa forma espera-se contribuir singela e efetivamente para a melhoria da qualidade do ensino de matemática, fazendo com que professores e alunos consigam sanar algumas dificuldades presentes no ensino e na aprendizagem de problemas de aplicações da derivada.

Ensinar os alunos a resolverem problemas é uma tarefa extremamente difícil, um verdadeiro desafio. É muito comum que o professor resolva um problema mostrando sua resolução, sem discutí-la com seus alunos. Diante desse desafio, espera-se que o ambiente desenvolvido possa despertar nos alunos sua capacidade de raciocínio, interesse, empenho, percepção e motivação. Pretende-se assim fornecer uma metodologia para a resolução de problemas, que motive e engaje os alunos em uma reflexão consciente, que os leve a buscar a compreensão do enunciado, a elaboração de um plano de resolução, a execução correta desse plano e a análise crítica do resultado final. Ela poderá também servir como recurso didático ao professor.

Tanto alunos quanto professores devem estar cientes de seus objetivos ao utilizarem softwares no processo de ensino-aprendizagem. É comum que em aulas realizadas em laboratórios de informática, muitos alunos se dispersem, por isso é fundamental a intervenção do professor em algum momento. Ou então, o professor pré-determinar atividades para os alunos. Por esse motivo, no apêndice desse trabalho, propõe-se uma sugestão de navegação, a fim de assegurar o alcance dos objetivos propostos pelo protótipo. Essa sugestão é dirigida tanto ao professor que vá utilizar o ApliDer em sala de aula, quanto ao aluno que prefira estudar individualmente.

Dentre as recomendações para trabalhos futuros, vale destacar que o ApliDer deve passar por uma nova experimentação aplicada a uma turma presencial e por uma avaliação. Como o protótipo estará disponível na rede (http://www.mtm.ufsc.br/geiaam), sugestões e críticas também poderão ser recebidas via e-mail. A partir dos resultados obtidos, críticas e sugestões serão feitas as alterações consideradas necessárias, a fim de satisfazer as necessidades dos usuários. Outro ponto de grande interesse é investigar a adequação do protótipo de software ApliDer, para o ensino a distância.

Referências

1 COBURN, P. [et. al]: **Informática na educação**. (Trad. Gilda Helena B. de Campos Novis). Rio de Janeiro-RJ: Livros técnicos e científicos. Ltda, 1988.

2 CONCEIÇÃO, K.: **Um Protótipo para Resolução de Problemas de Máximos e Mínimos de Funções de Várias Variáveis**. Dissertação de Mestrado. UFSC, Florianópolis-SC, 2001.

3 DANTE, L. R.: **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo - SP: Ática, 1991.

4 FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B.: **Calculo A : funções, limite, derivação, integração**. 5. ed. rev. e ampl. São Paulo: Makron; Florianopolis: Ed. da UFSC, 1992.

5 GIRAFFA, L. M. M.: **STI modelados através de uma sociedade de agentes**. Disponível em: <**http://www.edukbr.com.br/portal.asp**>. Acesso em: 12 jun. 2003.

6 GOULART, J. J.: **Um apoio computacional para o ensino da parábola - Desenvolvimento e experimentação**. Trabalho de Conclusão de Curso. UFSC, Florianópolis-SC, 2003.

7 HOWARD, A.: **Cálculo um Novo Horizonte**. (Trad. Cyro C. Potarra; Márcia Tamanaha). vol 1. 6° ed. Porto Alegre-RS: Bookman, 2000.

8 KAPPA User's Guide. Intellicorp, Inc. Publication Number: Kap 1.2-UG-MSW2-1, May 1991.

9 LEITHOLD, L.: **Cálculo com geometria analítica**. (Trad. Cyro Carvalho Patarra). vol 1. 3°ed. São Paulo-SP: Harbra ltda, 1994.

10 MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J.: **Calculo**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1982.

11 PASSOS, E. L.: **Inteligência artificial e sistemas especialistas - ao alcance de todos**. Rio de Janeiro-RJ: LTC - Livros técnicos e científicos. Sociedade beneficiente Guilherme Guinle , 1989.

12 PEDUZZI, L. Q.: **As Concepções Espontâneas, a Resolução de Problemas e a História e Filosofia da Ciência em um Curso de Mecânica**. Tese de Doutorado. UFSC, Florianópolis-SC, 1998.

13 POLYA, G.: **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. (Trad. Heitor Lisboa de Araújo). 2° reimpr. Rio de Janeiro-RJ: Interciência, 1995.

14 POZO, J. I. E. [et al.]: **A solução de problemas**. Porto Alegre-RS: Artes Médicas, 1998.

15 SIMMONS, G. F.: **Cálculo com geometria analitica**. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

16 SIQUEIRA, K. C.: **Distâncias em redes de transporte - um enfoque usando sistemas especialistas**. Dissertação de Mestrado. UFSC, Florianópolis-SC, 1998.

17 SWOKOWSKI, E. W.: **Cálculo com Geometria Analítica**.Vol 1. 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

18 **Os Sistemas Tutoriais inteligentes - STIs**. Disponível em: <**http://wwwedit.inf.ufsc.br:1998/Lages/tutores2.html**>. Acesso em: 10 abr. 2003.

19 **Programas das disciplinas de cálculo 1 - UFSC**. Disponível em: <**http://mtm.ufsc.br/ensino/programas/**>. Acesso em: 4 out. 2004.

20 **Lista de Problemas para Cálculo A**. Disponível em: <**http://mtm.ufsc.br/~azeredo/calculos/Acalculo**>. Acesso em: 13 maio 2003.

21 **Ensino Superior Roteiro Geral**. Disponível em: <**http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/superior.htm**>. Acesso em: 17 maio 2003.

22 **Listas de Exercício de Cálculo I -SMA 301**. Disponível em: <**http://www.icmc.sc.usp.br/~andcarva/sma301/listas.html**>. Acesso em: 1 dez. 2004.

ANEXO A – Questionário 1

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática-CFM

Aluno(a):

Objetivos: Obter um perfil dos alunos que irão utilizar o protótipo. Verificar as dificuldades encontradas pelos alunos diante de problemas de aplicações da derivada.

1. **A quanto tempo você cursou a disciplina de cálculo 1? E qual cálculo você está cursando?**

   ____

   ____

2. **Você resolveu problemas de aplicações da derivada quando cursou o cálculo 1?**

   ☐ **Sim** ☐ **Não**

   Se não, você poderia dizer quais motivos?________________________

   ____

3. **Você acha que é capaz de resolver um problema de aplicação da derivada facilmente?**

   ☐ **Sim** ☐ **Não**

4. **Você está disposto a tentar resolver?**

   ☐ **Sim** ☐ **Não**

   (a) Suponhamos que um óleo derramado através da ruptura de um tanque, se espalha em uma forma circular cujo raio cresce em uma taxa constante de

$2m/s$. Com que velocidade a área do derramamento está crescendo quando o raio dele for $60m$?

(b) Um recipiente cilíndrico ,aberto em cima, deve ter a capacidade de $375\pi cm^3$. O custo do material usado para a base do recipiente é de 15 centavos por cm^2 e o custo do material para a parte curva é de 5 centavos por cm^2. Se não há perda de material, determine as dimensões que minimizem o custo do material.

Se você encontrou alguma dificuldade ao resolvê-los, quais foram?

____

____

ANEXO B – Questionário 2

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática-CFM

Aluno(a):

Objetivos: Avaliar a eficácia do protótipo em relação ao processo ensino-aprendizagem

.

- **Com relação aos objetivos do protótipo:**

1. **O protótipo ApliDer o auxiliou na resolução de problemas de Aplicações da Derivada? De que maneira?**

   ____

   ____

2. **A linguagem adotada foi clara e objetiva, de forma que evitou confusão conceitual e contradições? Se não diga em que parte ou seção.**

   ☐ **Sim** ☐ **Não**

   ____

   ____

3. **A teoria apresentada é suficiente para a resolução dos problemas? Se não o que poderia ser acrescentado.**

   ☐ **Sim** ☐ **Não**

   ____

   ____

4. **Se você errou algum problema e utilizou a "Ajuda"para tentar resolvê-lo novamente, achou que ela foi suficiente? Se não dê sugestões.**

☐ **Sim** ☐ **Não**

____

____

- **Com relação ao uso do protótipo:**

  1. **Você encontrou alguma dificuldade para navegar no protótipo?**

     ☐ **Sim** ☐ **Não**

  2. **Você encontrou algum erro (botões, textos sobrepostos, erros de digitação, etc.) no protótipo durante a navegação? Se encontrou descreva o local.**

     ☐ **Sim** ☐ **Não**

     ____

     ____

ANEXO C – Programa da disciplina de Cálculo I (MTM-5105)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MTM 5105 - CÁLCULO I[1]

- Pré-Requisitos(s): Introdução ao Cálculo - MTM 5110.

- N° de horas-aula semanais: 06.

- N° total de horas-aula: 108.

- semestre: 99.2.

- Curso(s): Licenciatura em Matemática.

EMENTA:

Sequências: limite, convergência; limite de funções; continuidade; derivada; máximos e mínimos; regra de L'Hospital; fórmula de Taylor, utiização de softwares computacionais. História da Matemática relacionada com o conteúdo.

OBJETIVOS GERAIS:

• Propiciar ao aluno condições de:

1. Desenvolver sua capacidade de dedução;

2. Desenvolver sua capacidade de raciocínio lógico e organizado;

[1]Informações disponíveis online em http://mtm.ufsc.br/ensino/programas/

3. Desenvolver sua capacidade de formulação e interpretação de situações matemáticas;

4. Desenvolver seu espírito crítico e criativo;

5. Perceber e compreender o interrelacionamento das diversas áreas da Matemática apresentadas ao longo do Curso.

6. Organizar, comparar e aplicar os conhecimentos adquiridos.

- Incentivar o aluno ao uso da Biblioteca.

OBJETIVOS ESPECIFICOS:

- Propiciar ao aluno condições de:

1. Entender e utilizar os conceitos de limites de sequências e limites de funções.

2. Dominar os conceitos de continuidade e derivada e aplicá-los na resolução de problemas.

3. Analisar o comportamento de funções e esboçar seus gráficos.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO:

1. Sequências: Progressão Aritmética e Progressão Geométrica (Fórmulas de termo geral, somas finitas); Sequências de modo geral (Subsequências); Limite de uma sequência (propriedades); Sequências monótonas; Teorema de Bolzano-Weierstrass; Sequência de Cauchy.

2. Limite de funções: Definição via sequência; Limites laterais; Propriedades (Limite da soma, produto, quociente, etc); O método dos épsilons e deltas; Limites no infinito; Limites infinitos; Limites fundamentais.

3. Continuidade: Definição geral de continuidade, exemplos (sug. trabalhar em intervalos); Caracterização de continuidade usando sequências; Operações com funções contínuas (soma, produto, quociente, compostas); Teorema de Weierstrass; Teorema do Valor Intermediário.

4. Derivadas: O problema das tangentes; Definição de derivada - Exemplos (função constante, identidade, módulo); Regras de derivação; Derivadas das funções elementares (Potências inteiras, Polinômios, Trigonométricas, Exponencial - Logaritmo); Derivada de funções compostas (regra da cadeia); Derivada da função inversa

(Potências fracionárias, Trigonométricas inversas); Derivadas de funções implícitas; Derivadas de ordem superior.

5. Aplicações da derivada: Taxa de variação; Máximos e mínimos; Teorema de Rolle; Teorema do valor Médio; Crescimento e decrescimento de funções; Concavidade e pontos de inflexão; Regra de L'Hospital; Esboço de gráficos; Fórmula de Taylor.

OBSERVAÇÃO:

Sugere-se o uso de apoio computacional nos ítens:

2 Limites de funções

4 Derivadas

5 Aplicações da derivada

BIBLIOGRAFIA:

1. Ávila, G. - Cálculo I - Funções de uma variável. Livros Técnicos e Científicos Editora - RJ.

2. Ávila, G. - Introdução à Análise Matemática. Editora Edgard Blucher Ltda.

3. Flemmming, D. M. & Gonçalves, M. B. - Cálculo A Editora Makron-Books.

4. Guidorizzi, H. L. - Um Curso de Cálculo - Volume I. Livros Técnicos e Científicos Editora - RJ.

5. Lima, E. L. - Análise Real - Volume I. Coleção Matemática Universitária - SBM.

6. Morgado, E. W. & Wagner, E. & Zani, S. C. - Progressões e Matemática Financeira. Coleção do Professor de Matemática - SBM.

7. Simmons, G. F. - Cálculo com Geometria Analítica - Volume I. Editora McGraw-Hill.

8. Spivak, M. - Calculus Publish or Perish, Inc. - 3ª edição - 1994.

ANEXO D – Programa da disciplina de Cálculo A (MTM-5161)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MTM 5161 - CÁLCULO A[1]

- Nº de horas-aula semanais: 04.
- Nº total de horas-aula: 72.
- semestre: 85.1.
- Curso(s): Engenharias: Mecânica, Civil, Sanitária e Ambiental, Química, Produção Elétrica, Produção Civil, Produção Mecânica, Ciências da Computação, Controle e Automação.

EMENTA:

Funções reais de variável real; funções elementares do cálculo; noções sobre limite e continuidade; a derivada; aplicações da derivada; integral indefinida de definida.

OBJETIVOS:

1. Identificar algumas funções quando apresentadas sob formas algébricas ou sob formas de gráficos.
2. Intuitivamente definir limites.
3. Calcular limites.

[1]Informações disponíveis online em http://mtm.ufsc.br/ensino/programas/

4. Analisar a continuidade de funções.
5. Resolver problemas geométricos de cálculo de equações de retas tangentes e normais as curvas, utilizando a interpretação geométrica da derivada.
6. Encontrar a derivada de funções diversas aplicando, sempre que possível, em situações práticas de sua área ou de áreas afins.
7. Calcular velocidade e aceleração usando derivada.
8. Resolver problemas práticos de taxa de variação de sua área ou de áreas afins.
9. Aplicar derivadas no cálculo de limites.
10. Analisar o comportamento de funções determinando os valores máximos e mínimos e esboçar gráficos.
11. Resolver problemas práticos de maximização e minimização adequados a suas áreas.
12. Calcular integral definida e indefinida através dos métodos apresentados.
13. Calcular áreas através de integral definida.
14. Identificar a relação entre integral e derivada.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO:

1. Funções: Definição; domínio; imagem; gráficos; funções especiais (função constante, função linear, função modular, função polinomial, função racional); função composta; função par e ímpar; função inversa; funções elementares (funções exponencial e logarítmica, funções trigonométricas e funções trigonométricas inversas, funções hiperbólicas e funções hiperbólicas inversas).
2. Noções sobre limite e continuidade: Noção intuitiva de limite; definição; propriedades, teorema da unicidade; limites laterais; limites no infinito e limites infinitos; limites fundamentais; assíntotas horizontais e verticais; definição de contimuidade e propriedades.
3. A Derivada: A reta tangente; Definição de derivada; interpretação geométrica; derivadas laterais Regras de derivação; Derivada de funções compostas; Derivada da função inversa; Derivadas de funções elementares; Derivadas sucessivas; derivação implícita.

4. Aplicações da derivada: Velocidade e aceleração; Taxa de variação; Máximos e mínimos; Teorema de Rolle; Teorema do valor Médio; funções crescentes e decrescentes; critérios para determinar os máximos e mínimos; Concavidade; pontos de inflexão; Esboço de gráficos; problemas de maximização e minimização; Regra de L'Hospital.

5. Integral definida e indefinida: Diferencial; função primitiva (anti-derivada); integral indefinida e propriedades; integrais imediatas; integração por substituição e por partes; definição da integral definida; interpretação geométrica, propriedades, a relação entre a integral definida e a derivada (teorema fundamental do cálculo); cálculo de áreas.

BIBLIOGRAFIA:

1. Flemmming, D. M. & Gonçalves, M. B. - Cálculo A Editora Makron-Books.

2. Leithold, L. - O Cálculo com geometria analítica - Volume I. Harbra - RJ.

3. Spiegel, M. - Cálculo Avançado. Mc Graw-Hill - SP.

4. Simmons, G. F. - Cálculo com Geometria Analítica - Volume I. Editora McGraw-Hill.

5. Piskunov, N. - Cálculo diferencial e integral. Porto.

6. Guidorizzi,H. L.- Um curso de cálculo. volume 1. LTC: SP.

7. Kuelkamp, N. - Cálculo 1. Editora da UFSC. SC.

8. Edward & Penney -Cálculo com geometria analítica. Ed. Prentice-Hall. RJ.

9. Howard, A. - Cálculo um novo horizonte. Bookman. RS.

ANEXO E – Programa da disciplina de Cálculo I (MTM-5175)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MTM 5175 - CÁLCULO 1[1]

- Nº de horas-aula semanais: 06.

- Nº total de horas-aula: 108.

- Curso(s): Engenharia Elétrica.

EMENTA:

Números Reais; Introdução a sequências; Funções; Limites e Continuidade; Derivada; Aplicações da Dirivada; Integral; Métodos de inegração.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO:

1. Números Reais: Números racionais, números irracionais; propriedades Aritméticas; subconjuntos; desigualdades; sequências; pontos de acumulação; supremo e ínfimo.

2. Funções: conceito; domínio, imagem e gráfico; polinômios; função composta; função inversa; funções especiais; funções algébricas; funções transcendentais.

3. Limites e Continuidade: limites de sequências; definição de limite; limites laterais; propriedades aritméticas dos limites; limites infinitos e limites no infinito; teorema de confronto; limites fundamentais; limites de funções transcendentais; continuidade; limites de funções compostas.

[1]Informações disponíveis online em http://mtm.ufsc.br/ensino/programas/

4. Derivada: tangentes, velocidade etaxas de variação; definição de derivada; continuidade e derivação; derivadas laterais; regras de derivação; regra da cadeia; derivada da função inversa; derivadas implícitas; derivadas de ordem superior; retas tangentes e normais ao gráfico.

5. Aplicações da Derivada: Máximos e mínimos; teorema de Rolle e teorema do valor médio; estudo qualitativo de uma função, esboço de gráficos; problemas de aplicações de máximos e mínimos; regra de L'Hospital.

6. Integral: introdução; cálculo da área de um setor de parábola; soma de Riemann; definição de integral de Riemann; interpretação via área, valor médio, trabalho, centro de massa de uma linha; propriedades de integral; teorema fundamental do cálculo; integral indefinida; mudança de variáveis; integração por partes.

7. Métodos de integração: integração de funções racionais por frações parciais; integração de funções trigonométricas; integração por substituição trigonométricas.

BIBLIOGRAFIA:

1. STEWART, James: Calculus, Brooks/Cole Publishing Company, ITP.

2. IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos e MACHADO, Nilson J.: Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 8 Atual Editora.

3. LEITHOLD, Louis: O Cálculo com Geometria Analítica, Harbra.

4. SPIEGEL, Murray R.: Cálculo Avançado, Mc Graw-Hill.

5. AIRES, Frank Jr.; Cálculo Diferencial e Integral, ao Livro Técnico e Científico SA, Rio.

6. THOMAS e FINNEY: Cálculo Diferencial e Integral, LTC, Livro Técnico e Científico Editora SA.

7. SIMMONS, George F.: Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 1, Mc Graw-Hill.

8. ÁVILA, G. S. S.: Cálculo I, Livro Técnico e Científico Editora SA.

9. HOFFMANN, Laurence D.: Cálculo (Um Curso Moderno e suas Aplicações), Livros Técnicos e Científicos Editora.

10. PISKUNOV, N.: Cálculo Diferencial e Integral, vol. 1, Livraria Lopes da Silva Editora.

11. GUIDORIZZI, Hamilton Luiz: Um Curso de Cálculo.

12. SEELEY, Robert T.: Cálculo de uma Variável, vol. 1, LTC.

ANEXO F – Programa da disciplina de Cálculo I (MTM-5115)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MTM 5115 - CÁLCULO 1[1]

- Nº de horas-aula semanais: 06.

- Nº total de horas-aula: 108.

- semestre: 86.1.

- Curso(s): Física e Química.

EMENTA:

Números reais. Função real de uma variável real. Gráficos. Limite e continuidade. Derivada. Taxa de variação. Fórmula de Taylor. Teorema de L'Hospital. Máximos e mínimos. Esboço de gráfico. Introdução à integral.

OBJETIVOS:

- Ao final do semestre o aluno deverá estar apto a:

1. Trabalhar com funções de uma variável, limites, derivada e integral mostrando conhecer os conceitos e técnicas empregadas na resolução de problemas.

2. Escrever de forma clara e objetiva seu raciocínio na solução de problemas sobre todo o conteúdo.

[1]Informações disponíveis online em http://mtm.ufsc.br/ensino/programas/

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO:

1. Números reais: Operações e propriedades; desigualdades; valor absoluto; intervalos.

2. Funções reais de uma variável real: Definição; domínio; imagem; gráficos; operações; funções especiais (função constante, função linear, função módulo, função polinomial, função racional); função composta; função par e função ímpar; função inversa; funções elementares (função exponencial e função logarítmica, funções trigonométricas e funções trigonométricas inversas, funções hiperbólicas e funções hiperbólicas inversas)

3. Limites e Continuidade: Noção intuitiva de limite; definição; propriedades; teorema da unicidade; limites laterais; limites infinitos; limites no infinito; assíntotas horizontais e verticais; limites fundamentais; definição de continuidade; propriedades das funções contínuas.

4. Derivada: Definição; interpretação geométrica; derivadas laterais; regras de derivação; derivada de função composta; derivada de função inversa; derivada das funções elementares; derivadas sucessivas; derivação implícita; diferencial.

5. Aplicações da derivada: Taxa de variação; máximos e mínimos; teorema de Rolle; teorema do valor médio; funções crescente e decrescente; critérios para determinar os extremos de uma função; concavidade e pontos de inflexão; esboço de gráficos; problemas de maximização e minimização; regras de L'Hospital; fórmula de Taylor.

6. Introdução a integral: Função primitiva; integral indefinida (definição, propriedades); integrais imediatas, integração, integração por substituição; conceito de área; integral definida (definição, propriedades, interpretação geométrica); teorema Fundamental do Cálculo; calculo de areas.

BIBLIOGRAFIA:

1. EDWARDES, C. H.; PENNEY, David E. Cálculo com Geometria Analítica. Rio de Janeiro: Ed. Prentice-Hall do Brasil, Ltda. 1997.

2. FLEMMING, Diva M. GONÇALVES, Mirian B. Cálculo A. 5 ed. São Paulo: Makron Books. 1992.

3. KUELKAMP, Nilo. Cálculo I. Florianópolis: Editora da UFSC. 1999.

4. LEITHOLD, Louis - O Cálculo com Geometria Analítica - Harbra. 3. Ed. São Paulo: Editora Harbra. 1994. V. 1.

5. SIMONS, George F. - Cálculo com Geometria Analítica - São Paulo: Mac Graw-Hill. 1987. V. 1.

APÊNDICE A – Sugestão de Navegação

Tema: Aplicações da Derivada

Público Alvo: Alunos das disciplinas de Cálculo A, Cálculo 1 e demais disciplinas que contemplem o assunto aplicações da derivada.

Software: ApliDer

Pré-requisitos:

- Derivada
- Regras de derivação
- Extremos de funções
- Teste da derivada primeira
- Teste da derivada segunda

Justificativa:

Uma das principais dificuldades enfrentadas pelos alunos nas disciplinas de cálculo é aplicar seus conhecimentos na hora de solucionar um problema. Para superar essa dificuldade são sugeridas etapas de resolução de problemas propostas por Polya, a fim de fazer com que o aluno reflita sobre seus conhecimentos anteriores e trace um plano com o intuito de chegar a solução desejada.

Objetivos:

Fornecer ao aluno uma metodologia para a resolução de problemas de aplicações da derivada, baseada nas etapas de Polya que são:

- Compreensão do problema.

- Elaboração de um plano.

- Execução correta do plano.

- Análise critica do resultado final.

Atividades:

1. Navegar rapidamente pelas telas dos módulos *Motivação* e *Dicas sobre Resolução de Problemas*. (opcional)

2. Navegar pelo submódulo *Conceitos* do módulo *Taxa de Variação.*

3. Navegar pelos submódulos *Conceitos Básicos, Condição Necessária, Teste da Derivada Primeira* e *Teste da Derivada Segunda* do módulo *Máximo e Mínimos.*

4. No ambiente lápis/papel resolva os seguintes problemas [1]:

   (a) Suponhamos que um óleo derramado através da ruptura de um tanque, se espalha em uma forma circular cujo raio cresce em uma taxa constante de $2m/s$. Com que velocidade a área do derramamento está crescendo quando o raio dele for $60m$?

   (b) Um recipiente cilíndrico, aberto em cima, deve ter a capacidade de $375\pi cm^3$. O custo do material usado para a base do recipiente é de 15 centavos por cm^2 e o custo do material para a parte curva é de 5 centavos por cm^2. Se não há perda de material, determine as dimensões que minimizem o custo do material.

5. Verifique a resolução desses problemas no protótipo ApliDer. O problema 1 é o exemplo 2 do módulo *Taxa de Variação.* O problema 2 é o exemplo 2 do módulo *Máximos e Mínimos.*

6. Interativamente resolva os exemplos restantes.

7. Navegue pelos submódulos *Problemas* [2] e resolva pelo menos um dos problemas propostos em cada submódulo. Resolva-os no ambiente lápis/papel e depois insira sua resposta no ApliDer.

8. Caso sua resposta não esteja correta, navegue pela ajuda proposta e reflita sobre seu erro.

[1]Se necessário vá no menu, opção **Ajuda**, lá você encontrará as regras de derivação, uma tabela de derivadas e uma tabela de identidades trigonométricas.

[2]Vá no menu, opção **Índice** e escolha o item **Problemas** que contém **Problemas de Taxa de Variação** e **Problemas de Máximos e Mínimos**.