UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

Problemas Olímpicos

Trabalho de Conclusão de Curso

Juliana Duarte Zacchi

Florianópolis - SC
Dezembro - 2004

Juliana Duarte Zacchi

Problemas Olímpicos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientadora: Carmem Suzane Comitre Gimenez

Florianópolis - SC
Dezembro - 2004

Problemas Olímpicos

Esta Monografia foi julgada adequada como Trabalho de Conclusão de Curso no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela banca Examinadora designada pela Portaria n^o 62/SCG/04.

Prof^a. Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora responsável pela disciplina

Banca Examinadora:

Prof^a. Carmem Suzane Comitre Gimenez
Orientadora

Prof^a Neri Terezinha Both Carvalho

Prof. José Luiz Rosas Pinho

Florianópolis, 02 de dezembro de 2004.

“Os problemas olímpicos de matemática são os melhores
exemplos, em seu nível, de como deve ser encarada a
matemática: desafiadora, exigindo criatividade
e imaginação, e também divertida.”

José Luiz Rosas Pinho

Aos meus pais que me apoiam incondicionalmente, e que amo muito.
Aos professores que realmente fizeram diferença na minha
formação (profissional e, principalmente, pessoal): Carmem e Fermín.
Aos queridos funcionários do curso de matemática,
que além do grande apoio “técnico”, foram, muitas
vezes, um ombro amigo: Sílvia, Iara e Airton.
Aos grandes amigos que fiz durante a graduação, que
sempre me deram apoio e, durante a realização deste trabalho,
me ajudaram muito: Aline, Anderson, Renata, Kely e Edson.
Àquele que foi meu professor, tutor e “pai”durante
a graduação. Que além dos conhecimentos matemáticos,
me ensinou também grandes lições sobre a vida: Pinho.

Sumário

Introdução

Olimpíadas de Matemática são competições individuais (para estudantes do ensino fundamental, médio e superior) de resolução de problemas que exigem muita criatividade e imaginação. Estes problemas não são convencionais, pois exigem pouco uso de fórmulas e não são habitualmente encontrados nos livros didáticos.

São chamados de *Problemas Olímpicos*, e, mais do que um "malabarismo" com contas, eles exigem idéias muitas vezes simples mas brilhantes.

A idéia de escolher os Problemas Olímpicos como tema para o meu Trabalho de Conclusão de Curso não ocorreu por acaso.

Desde 1999 que conheço o projeto das olimpíadas. Neste ano participei da competição como estudante do ensino médio e a partir de 2000 (já cursando matemática) participei ativamente do projeto como bolsista do Programa Especial de Treinamento (PET) do curso de Matemática/UFSC. Mesmo após meu desligamento do programa em 2002 ainda participei de atividades como treinamentos, aplicação de provas e correção das mesmas. Desde o início me identifiquei com o projeto e acompanhei seu crescimento.

No ano de 2004, quando estava cursando as práticas de ensino (exigidas na habilitação licenciatura) a influência da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (ORM) na minha formação ficou bastante evidente. Durante os treinamentos para as olimpíadas travei contato com alunos desde a sétima série até o terceiro ano do ensino médio. Esse primeiro contato foi fundamental para que, durante o estágio, eu pudesse ministrar aulas com maior clareza e segurança.

Além do projeto contribuir para melhoria do ensino de matemática nas escolas (o que é um dos objetivos da Olimpíada Brasileira de Matemática), contribui também na formação de futuros professores. Uma vez que existe uma deficiência bastante grande na parte de *educação matemática* em nosso currículo[1] , um projeto como este que coloca o graduando em contato com estudantes dos ensinos fundamental e médio é muito válido. O contato com esses alunos e seus professores proporciona um certo amadurecimento em ministrar aulas. É claro que um treinamento para olimpíada é muito diferente das aulas dadas a uma turma durante o ano letivo. Existe a dificuldade em fazer um planejamento do conteúdo, em organizar uma aula, porém as dificuldades em enfrentar uma turma de alunos, de explicar com clareza o conteúdo são bastante amenizadas.

O fato de sentir essa influência da ORM na minha formação, me instigou a tentar formalizar isto de alguma maneira. O trabalho de conclusão de curso foi minha ferramenta. Meu objetivo inicial era escrever um trabalho sobre as olimpíadas para que os professores atuantes pudessem se inteirar sobre o projeto (mais especificamente sobre problemas olímpicos), e para que os graduandos em matemática (licenciatura) pudessem travar algum contato durante sua formação.

A olimpíada de matemática se torna um diferencial nas escolas devido ao estilo dos problemas olímpicos. Pretende-se com este trabalho explorar alguns aspectos desses problemas, ressaltando sua relevância no ensino. Utilizando uma teoria da didática da matemática de Ives Chevallard, faz-se aqui uma "classificação" dos problemas em relação às técnicas utilizadas em suas resoluções.

Afim de institucionalizar os Problemas Olímpicos como objeto matemático a ser estudado, os dois primeiros capítulos deste trabalho apresentam as Olimpíadas de Matemática como um todo.

O primeiro trata das competições internacionais. O segundo concentra-se nas Olimpíadas Brasileira e Regional de Matemática de Santa Catarina, apresentando um pouco do histórico destas competições, funcionamento, dados quantitativos etc.

O terceiro capítulo traz a análise dos Problemas Olímpicos, ressaltando sua relevância no ensino através das técnicas de resolução dos mesmos.

[1] Sobre o currículo do curso de Licenciatura em Matemática da UFSC, ver: MAYER, Edson. *O Currículo de 1994 do Curso de Licenciatura em Matemática de UFSC na Visão dos Egressos.*

Capítulo 1

O que são Olimpíadas de Matemática?

São competições anuais focadas na resolução de problemas onde participam estudantes em vários níveis de escolaridade (ensino fundamental, médio e superior).

O objetivo inicial das olimpíadas, que persiste até hoje, era de detectar jovens talentos em matemática e estimulá-los, promovendo seu espírito crítico. Outros objetivos foram sendo incorporados ao longo dos anos, talvez como conseqüência inevitável das competições. Hoje, a melhoria do ensino de matemática é também uma preocupação dos organizadores da olimpíada brasileira.

A competição é individual e consiste na resolução de provas contendo os chamados problemas olímpicos, que exigem do participante além do conteúdo, bastante criatividade e se diferem daqueles trabalhados nas escolas.

São oferecidas medalhas de ouro, prata e bronze aos alunos que têm melhores pontuações. Os alunos que não atingem nota suficiente para ganhar uma medalha, mas resolvem completamente pelo menos um dos problemas, são ocasionalmente premiados com menção honrosa.

Assim como nas competições esportivas, as olimpíadas de matemática ocorrem em diferentes âmbitos. Existem competições internacionais, nacionais e regionais.

1.1 Olimpíada Internacional de Matemática - IMO

A primeira Olimpíada Internacional de Matemática - IMO foi realizada no ano de 1959, com a participação de 6 países: Bulgária, Polônia, República Federal da Alemanha, Romênia, Tcheco-eslováquia e URSS.

Atualmente participam 82 países, cada país pode enviar uma equipe de até seis estudantes acompanhados de dois professores.

Os estudantes competem individualmente e são desafiados a resolver 6 problemas em dois dias consecutivos, 3 problemas por dia, durante 4 horas e meia. As provas têm sido traduzidas para mais de 50 idiomas.

No Brasil, que participa da IMO desde 1979, a seleção destes estudantes é feita pela Comissão Olímpica Brasileira e participam todos os medalhistas da Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM do ano imediatamente anterior ao processo de seleção. Alunos premiados em alguma OBM anterior a essa que gostariam de participar, podem solicitar que sejam incluídos no processo de seleção, mas caberá à comissão de olimpíadas decidir se o pedido é aceito ou não.

Este processo de seleção também classifica estudantes para as outras competições internacionais.

1.1.1 Desempenho das Equipes Brasileiras nas IMO's

IMO	**Prêmio (quantidade)**
XXI, 1979	****
1980	Não houve competição
XXII, Estados Unidos, 1981	Medalha de Ouro (1)
XXIII,Hungria, 1982	Medalha de Bronze (1)
XXIV,França,1983	Medalha de Bronze (3)
XXV,Tchecoslováquia, 1984	Medalha de Bronze (3)
XXVI,Finlândia, 1985	Medalha de Bronze (2)
XXVII,Polônia, 1986	Medalha de Ouro (1)
XXVIII, Cuba, 1987	Medalha de Ouro (1) Medalha de Bronze (2)
XXIX, Austrália, 1988	Menção Honrosa (2)
XXX, Alemanha, 1989	Medalha de Bronze (3)
XXXI, China, 1990	Medalha de Ouro (1) Medalha de Bronze (2)
XXXII, Suécia 1991	Medalha de Bronze (1) Menção Honrosa (2)
XXXIII, Rússia, 1992	Medalha de Bronze (1) Menção Honrosa (1)
XXXIV, Turquia, 1993	Medalha de Bronze (1) Menção Honrosa (2)
XXXV, Hong Kong, 1994	Medalha de Prata (2) Menção Honrosa (3)

IMO	**Prêmio (quantidade)**
XXXVI, Canadá, 1995	Medalha de Ouro (1)
XXXVII, Índia, 1996	Menção Honrosa (1)
XXXVIII, Argentina, 1997	Medalha de Prata (1) Medalha de Bronze (4) Menção Honrosa (1)
XXXIX, Taiwan, 1998	Medalha de Ouro (1) Medalha de Bronze (1) Menção Honrosa (2)
XL, Romênia, 1999	Medalha de Bronze (4)
XLI, Coreia do Sul, 2000	Medalha de Bronze (3) Menção Honrosa (1)
XLII, EE.UU, Washington - DC, 2001	Medalha de Prata (4) Medalha de Bronze (2)
XLIII,United Kingdom, Glasgow, 2002	Medalha de Prata (1) Medalha de Bronze (5)
XLIV,Tóquio, Japão, 2003	Medalha de Prata (1) Medalha de Bronze (3) Menção Honrosa (2)
XLV, Atenas, Grécia, 2004	Medalha de Prata (2) Medalha de Bronze (4)

O Brasil conquistou nas olimpíadas internacionais de matemática um total de:

6 Medalhas de Ouro;

11 medalhas de Prata;

45 Medalhas de Bronze e

17 menções Honrosas.

É interessante notar que, desde 2001, todos os seis integrantes da equipe brasileira são premiados com medalhas.

1.2 Outras Competições Internacionais

- **Olimpíada de Maio**

  É uma competição realizada para jovens alunos, disputada em dois níveis (Nível 1: para alunos até 13 anos e Nível 2: para alunos de até 15 anos), por países da América Latina, Espanha e Portugal. Em 2004 a 10^a Olimpíada de Maio foi realizada em 8 pólos (cidades): Cidade de Buenos Aires, Mar del Plata, Bahía Blanca, Rosario, Tucumán, Córdoba, Bariloche, Río Grande - Tierra del Fuego.

  As equipes brasileiras conquistaram até hoje, nesta competição:
  Nível 1: 8 medalhas de ouro, 17 medalhas de prata, 32 medalhas de bronze e 25 menções honrosas.
  Nível 2: 8 medalhas de ouro, 16 medalhas de prata, 32 medalhas de bronze e 24 menções honrosas.

- **Olimpíada Iberoamericana de Matemática**

  Desta competição participam os países da América Latina, Espanha e Portugal. Estes países são representados por equipes de até 4 estudantes que não tenham feito 18 anos de idade em 31 de dezembro do ano imediatamente anterior à celebração da Olimpíada, e que não tenham participado anteriormente em duas OIM. Este ano ocorreu a 19^a Olimpíada Iberoamericana na cidade de Castellón, Espanha.

  As equipes brasileiras conquistaram até hoje, nesta competição: 35 medalhas de ouro, 23 medalhas de prata e 10 medalhas de bronze. Sendo que, neste ano (2004) foram 4 medalhas de ouro.

  Esta competição apresenta o nível universitário desde 1998. Podem participar estudantes matriculados em uma Universidade em um curso de graduação, e que não tenham o título de graduado ou equivalente.

  As equipes brasileiras conquistaram até o ano de 2003, nesta competição: 6 medalhas de ouro, 12 medalhas de prata, 22 medalhas de bronze e 15 menções honrosas. (O resultado da competição deste ano ainda não foi divulgado, pois as provas ocorreram no mês de novembro).

- **Olimpíada de Matemática do Cone Sul**

  Desta competição participam os países da porção meridional da América do Sul, representados por equipes de 4 estudantes que não tenham feito 16 anos de idade em 31 de dezembro do ano imediatamente anterior à celebração da Olimpíada. Este ano realizou-se a 15^a competição na cidade de Assunção, Paraguai.

  As equipes brasileiras conquistaram até hoje, nesta competição: 13 medalhas de ouro, 17 medalhas de prata e 23 medalhas de bronze.

Capítulo 2

Olimpíadas de Matemática no Brasil

2.1 Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM

A primeira Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) foi realizada em 1979. Durante 19 anos ela foi dividida em apenas dois níveis: Júnior e Sênior e tinha como objetivo detectar talentos em matemática e desenvolvê-los.

A partir de 1998 foi instituída uma nova olimpíada brasileira de matemática com o principal objetivo de promover, em âmbito nacional, a melhoria do ensino de matemática nas escolas. Para a preparação dos alunos e para o aperfeiçoamento dos professores, a OBM começou a editar uma revista totalmente dedicada às competições, (Revista Eureka!), e distribuí-la, juntamente com outros materiais, às escolas participantes.

Além da revista Eureka! e de todo material de divulgação, foram criadas as competições regionais. Cada estado participante promove sua própria olimpíada através do coordenador regional, que servirá de estímulo e preparação para a olimpíada brasileira.

A OBM é organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), tem o apoio do CNPq e é realizada pela Comissão de Olimpíadas da SBM (com secretaria no IMPA) e pelos coordenadores regionais.

Desde 1998 a OBM é realizada em três fases e três níveis:

- **Nível 1** - para alunos de 5^a e 6^a séries do ensino fundamental.

- **Nível 2** - para alunos de 7^a e 8^a séries do ensino fundamental.

- **Nível 3** - para alunos do ensino médio.

A partir de 2001 a OBM é realizada também em:

- **Nível Universitário** - para alunos que ainda não tenham concluído o curso superior (normalmente estudantes universitários em nível de graduação, podendo ser estudantes de qualquer curso e qualquer período).

A OBM é realizada atualmente em três fases para cada um dos 3 níveis e em duas fases no nível universitário. Na primeira fase, qualquer aluno interessado poderá participar; para participar das próximas fases existirá um critério de promoção.

- 1^a fase: consta de uma prova de múltipla escolha, contendo 25 problemas.

- 2^a fase: consta de uma prova discursiva contendo 6 problemas - 3^a fase: a exemplo da segunda fase, se realizará também com prova discursiva contendo 6 problemas.

A Olimpíada Brasileira de Matemática não é uma competição entre regiões, cidades, colégios ou grupos quaisquer. O aspecto da competição existe, mas com o intuito de despertar no aluno o gosto pelo estudo da Matemática através da resolução de problemas novos, estimulando o desenvolvimento da imaginação e da criatividade e premiando o esforço individual dos alunos que se destacam.

2.1.1 Regulamento

Veja o regulamento da OBM em anexo.

2.1.2 Revista Eureka!

A Revista Eureka! (revista da Olimpíada Brasileira de Matemática) é uma publicação dedicada principalmente a participantes da OBM e professores envolvidos no treinamento desses alunos. A revista é editada quatro vezes ao ano, distribuída às Instituições de ensino participantes da Olimpíada e Coordenadores Regionais. Apresenta a seguinte estrutura:

1. Seção de *problemas de treinamento* com soluções, dividida em níveis, fornecendo

aos alunos material para estudo e pesquisa dirigidos à Olimpíada Brasileira, realizada nesses mesmos níveis.

2. Seção de *artigos de Matemática* elementar, abordando assuntos que complementem o currículo escolar e conteúdos novos. São divididos em três níveis: iniciante, intermediário e avançado.

3. Seção de *problemas propostos*, para que os leitores enviem suas respostas, sendo que as melhores são publicadas nos números seguintes da revista.

4. Seção de *cartas dos leitores*, em que os mesmos têm possibilidade de enviar perguntas; todas são respondidas e as mais relevantes publicadas.

5. *Agenda*, contendo informações sobre as competições de Matemática no Brasil e exterior

2.1.3 Semana Olímpica

A Semana Olímpica vem sendo realizada desde 1998 e se destina a reunir os alunos premiados na OBM afim de que estes participem de um treinamento intensivo com professores de diversas partes do país. Durante a Semana Olímpica acontece a primeira reunião anual da comissão de olimpíadas da SBM. Um dos objetivos da semana é dar início ao processo de seleção das equipes que irão representar o país nas competições internacionais.

2.2 Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina - ORM

Em Santa Catarina, desde o ano de 1993, os alunos do Programa Especial de Treinamento (PET) do curso de Matemática - UFSC vêm realizando treinamentos e proporcionando a participação de estudantes catarinenses na OBM.

A partir 1998 a SBM (em parceria com o Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, e com apoio financeiro do CNPq) iniciou um projeto em âmbito nacional de participação na OBM, através do estímulo para a criação de olimpíadas regionais de matemática em todo país.

Neste mesmo ano um grupo de professores do Departamento de Matemática - UFSC, juntamente com os alunos do PET - Matemática, apresentou um projeto de extensão (o projeto da ORM) que foi contemplado com o apoio do CNPq. Hoje o projeto também conta com o apoio da PRCE através do pagamento de 5 bolsistas.

A Olimpíada Regional de Matemática - ORM é realizada em três níveis (Nível 1: 5^a e 6^a séries do Ensino Fundamental; Nível 2: 7^a e 8^a séries do Ensino Fundamental; Nível 3: Ensino Médio) e em duas fases. A 1ª fase utiliza a mesma prova da 1ª fase da OBM e a 2ª fase consta de uma prova composta de cinco problemas em cada nível, elaborada pelos professores e corrigida por estes e pelos bolsistas e colaboradores do projeto.

A segunda fase da ORM desde 1998 é realizada na UFSC. A partir do ano de 2003 foram instituídos mais 4 pólos de aplicação das provas, em 2004 foram 6 pólos (incluindo a UFSC). Esses pólos são definidos conforme o número de alunos classificados por região, procurando sempre atender às diferentes regiões: norte, sul, oeste etc. Quem aplica as provas nos diferentes pólos são os bolsistas envolvidos no projeto.

A premiação da ORM se dá, a exemplo das outras olimpíadas, através da entrega de várias medalhas de ouro, prata e bronze e menções honrosas aos alunos não premiados com medalhas que na última fase tiveram pelo menos um problema perfeitamente resolvido. Todos os alunos classificados para a fase final da ORM ganham certificados de classificação como um estímulo às participações futuras nas Olimpíadas.

2.2.1 Quem Participa do Projeto?

Participam do projeto atualmente:

- *Professores do Departamento de Matemática:* José Luiz Rosas Pinho (Coordenador Regional); Carmem Suzane Comitre Gimenez; Eliézer Batista; Lício Hernanes Bezerra; Nereu Estanislau Burin; Waldir Quandt e William Glenn Whitley.

- *Bolsistas do Projeto de Extensão (PRCE):* Aline de Góes; Conrado Damato de

Lacerda; João Luís Gonçalves; Rafael Sales e Rodrigo Maciel Rosa.

- *Bolsistas do PET - Matemática:* Ana Beatriz Michels; Carla Mörschbächer; Felipe Vieira; Graciele Amorim; Grasielli Gava; Heloísa Cristina da Silva; Juliana Araujo Paz; Karla Christina da Costa Kagoiki; Leonardo Koller Sacht; Louise Reips; Lucas Spillere Barchinski e Monique Müller Lopes Rocha.

- *Colaboradores (Acadêmicos do curso de Matemática):* Alda Dayana Mattos; Anderson Reis de Vargas; Edinéia Zarpelon; Jucavo Savie Rocha; Mael Sachine e Renata Leandro Becker.

2.2.2 Treinamento

Desde o início do ano letivo os bolsistas do projeto juntamente com o PET - Matemática fazem um trabalho de treinamento com os alunos interessados em participar da Olimpíada. São elaboradas listas contendo problemas olímpicos de competições anteriores. Estas são distribuídas aos colégios cadastrados onde cada professor responsável pela olimpíada em seu colégio distribui para seus alunos.

São oferecidas (na UFSC) aulas de discussões dessas listas. Uma única lista é trabalhada durante uma semana inteira, sendo oferecidos 4 horários diferentes para as aulas. Desta maneira é possível atender a um número maior de alunos.

2.2.3 Dados Quantitativos

Alguns dados quantitativos, desde a primeira ORM realizada em 1998, são aqui apresentados afim de ilustrar o crescimento desta competição no estado de Santa Catarina. Para alguns dados das primeiras competições regionais não encontrou-se registro.

ORM	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**
Escolas Participantes	7	19	21	33	64	102	98
Municípios Participantes	2	5	9	13	30	40	33
Número de Participantes na 1^a fase	***	915	940	2.111	2.439	5.074	3.460
Número de Classificados para a 2^a fase	***	***	***	240	281	352	741
Número de Treinamentos	***	***	10	11	10	10	10
Público total que assistiu aos treinamentos	***	***	***	507	874	822	615
Número de alunos premiados por nível	Nível 1: 15 Nível 2: 12 Nível 3: 14	Nível 1: 26 Nível 2: 19 Nível 3: 7	Nível 1: 21 Nível 2: 14 Nível 3: 10	Nível 1: 17 Nível 2: 29 Nível 3: 5	Nível 1: 19 Nível 2: 42 Nível 3: 17	Nível 1: 36 Nível 2: 37 Nível 3:29	Nível 1: 71 Nível 2: 65 Nível 3: 62

A queda em alguns valores no ano de 2004 em relação a 2003, deveu-se ao fato que os municípios do Oeste de SC passaram a participar de uma outra olimpíada regional promovida pela UNOCHAPECÓ. No entanto, houve um salto qualitativo que pode ser percebido pelo número de alunos classificados para a 2^a fase.

2.2.4 Revista da Olimpíada Regional de Santa Catarina

Países de grande tradição nas olimpíadas de matemática têm o seu excelente rendimento, em muito, baseado na existência de revistas de divulgação.

No Brasil, a participação de alunos, e seus desempenhos, nas olimpíadas aumentaram bastante após o lançamento da revista Eureka!. A revista contribui para que os professores dos ensinos fundamental e médio, possam melhor preparar-se para resolver os problemas olímpicos, discutir as soluções com os participantes das olimpíadas e até inserí-los em suas aulas.

Com estes objetivos, em 2002 foi aprovado um projeto de extensão (PROEXTENSÃO - PRCE/UFSC) para a confecção do primeiro número da **Revista da Olimpíada de Matemática de Santa Catarina**, o que veio a ser um excelente veículo de transmissão de idéias. O coordenador regional do projeto da ORM e seus bolsistas (do projeto e do PET) durante aquele ano trabalharam na confecção da revista, e em dezembro de 2003 ela já começou a ser distribuída.

A estrutura da revista é bastante semelhante a da revista Eureka!. Apresenta as provas da segunda fase da ORM com soluções, os alunos premiados, as escolas participantes, artigos e problemas propostos. Informações a respeito de como enviar artigos e soluções de problemas para a revista, ou como participar das olimpíadas também são encontradas na mesma.

Para 2004 já foi aprovado projeto para o segundo número da revista que será distribuída em 2004/2005.

Capítulo 3

Problemas Olímpicos

Os problemas olímpicos exigem muita criatividade e imaginação em suas resoluções. Mais do que um "malabarismo" com contas, eles exigem idéias muitas vezes simples mas brilhantes.

São problemas não convencionais, pois exigem pouco uso de fórmulas e não são habitualmente encontrados nos livros didáticos.

Afirmações como estas são geralmente encontradas quando faz-se referência aos problemas olímpicos. Mas, afinal:

- O que caracteriza um problema olímpico?
- No que eles se diferem dos problemas usuais?

Afim de tentar responder à essas questões faz-se aqui uma análise destes problemas quanto às diferentes técnicas de resolução. Esta análise concentra-se nos problemas olímpicos da segunda fase da ORM e baseia-se em uma teoria da didática da matemática de Ives Chevallard.

Os problemas Olímpicos da segunda fase da ORM são elaborados por uma comissão formada por alguns professores do departamento de matemática/UFSC que participam do projeto. Uma das preocupações desta comissão ao elaborar os problemas, é que o conteúdo exigido para sua resolução esteja adequado ao nível da questão. Um problema de nível 2, por exemplo, deve abordar somente conteúdos vistos até a 8^a série.

Os problemas olímpicos, portanto, estão vinculados aos conteúdos dos livros didáticos, porém não “vivem” neles. Dificilmente são encontrados em livros didáticos problemas no estilo olímpico.

3.1 Quadro Teórico

A análise dos problemas olímpicos utilizará conceitos da Teoria Antropológica do Saber de Ives Chevallard.

Chevallard se utiliza metaforicamente de termos ecológicos como *habitat* e *nicho* afim de ilustrar que um saber não vive isolado, ele está ligado a instituições (habitats) e desempenha uma função (nicho).

Aqui o significado de instituição não está necessariamente atrelado a instituições de ensino, é mais amplo, pode ser, por exemplo, um livro didático ou um artigo de revista. Neste caso, o nosso objeto (saber) matemático são os problemas olímpicos e tem como instituição as Olimpíadas de Matemática.

A descrição que Chevallard faz de uma organização matemática será a base para a análise dos problemas olímpicos. Ele as descreve em termos de tarefa, técnica, tecnologia e teoria relativas a um objeto matemático.

Em relação ao objeto matemático estudado (os problemas olímpicos), temos:

- Tarefa - é uma ação, é a pergunta do problema, por exemplo: calcular, determinar, demonstrar.

- Técnica - o que é feito para realizar a tarefa, a maneira com que se chega à solução do problema (o que foi utilizado). Por exemplo: algoritmos, experimentações.

  Obs: é o estudo da técnica que nos permitirá classificar os problemas em tipos ou classes.

- Tecnologia - é o que valida a técnica, é o suporte teórico, o que está por trás. Por exemplo: definições, teoremas, propriedades.

- Teoria - é a *tecnologia* de uma tecnologia, um discurso mais amplo que justifique a tecnologia. Exemplo: álgebra, geometria, teoria de conjuntos.

Para esta análise foram selecionados alguns problemas que envolvem a mesma Teoria (Conjuntos Numéricos, Álgebra), os chamados problemas de contagem. Para classificá-los em termos de tarefa, técnica e tecnologia, primeiramente apresentamos as soluções dos problemas. Todos os problemas foram extraídos de provas da segunda fase da ORM.

3.2 Listagem dos problemas com resolução

1. **ORM - 2003, Nível 1:** Uma pessoa nasceu em uma data tal que o dia, mês e o ano de nascimento são números primos e cuja soma é igual a 2003. Sabe-se também que o número do dia é menor que o número do mês e que esta pessoa não fez aniversário neste ano. Qual a data de nascimento desta pessoa? (Nota: esta prova foi realizada em 27/09/2003)

   Resolução: Sejam D, M e A respectivamente o dia, mês e ano que a pessoa nasceu. Sabemos que:
   D, M e A são primos;
   D + M + A = 2003;
   $D < M \quad \text{e} \quad M \geq 9.$

   Se $M \geq 9$ então M = 9, 10, 11 ou 12, mas M é primo, então M = 11.
   D é primo e $D < M = 11$, então D = 2, 3, 5 ou 7.

   Calcularemos A para cada valor de D:
   Se $D = 2$, $A = 2003 - 11 - 2 = 1990$ (divisível por 5)
   Se $D = 3$, $A = 2003 - 11 - 3 = 1989$ (divisível por 3)
   Se $D = 5$, $A = 2003 - 11 - 5 = 1987$
   Se $D = 7$, $A = 2003 - 11 - 2 = 1985$ (divisível por 5)

   Como A é primo, o único valor que nos serve é 1987.
   Portanto, a pessoa nasceu em 05/11/1987.

   Obs: Aqui geralmente o aluno não verifica que 1987 é primo, já que é a única opção que resta.

2. **ORM - 2003, nível 1:** Felixcidade é uma pequena cidade num país distante onde não há gatos abandonados. Cada casa da cidade tem o mesmo número de gatos. Sabe-se que existem pelo menos duas casas na cidade e, em cada casa, há pelo menos dois gatos. O número total de gatos da cidade está entre 150 e 200. Qual o número de casas na cidade e quantos gatos há em cada casa, sabendo-se que o número total de gatos da cidade é tal que há uma única solução para o número de casas e de gatos em cada casa?

   Resolução: Sejam:

   G = número de gatos por casa;

   C = número de casas em Felixcidade;

   G_T = número total de gatos em Felixcidade.

   Então, $G_T = C \times G$, mas G_T é tal que só admite uma solução para C e G, então C = G. Caso contrário teríamos, por exemplo, se $G_T = 160$ poderíamos ter C = 2 e G = 80 ou G = 2 e C = 80, ou ainda outras soluções.

   Sabemos também que $150 < G_T < 200 \Rightarrow 150 < C \times G < 200 \Rightarrow 150 < C^2 < 200$

   $\sqrt{150} < C < \sqrt{200} \Rightarrow 12,24 < C < 14,14$

   Portanto, C = 13 ou C = 14.

   Se C = 14 então $G_T = 196$ e poderíamos ter, por exemplo, C = 4 e G = 49 ou C = 49 e G = 4. Se C = 13 isto não ocorre.

   (Note que C e G devem ser primos)

   Logo, há 13 casas em Felixcidade com 13 gatos em cada casa.

3. **ORM - 2003, nível 2:** Considere a seqüência de números em que cada termo "descreve"o termo anterior: o 1^o termo é 4, o 2^o é 14 (ou seja, lendo o 1^o termo da seqüência dizemos "um (algarismo) *quatro*"), o 3^o termo é 1114 (um *um* e um *quatro*), etc. Calcule os três últimos algarismos (unidade, dezena e centena)

da soma dos 2003 primeiros termos da seqüência.

Resolução: De acordo com as instruções do enunciado, os primeiros termos da seqüência são:

$1^o \rightarrow 4$

$2^o \rightarrow 14$

$3^o \rightarrow 1114$

$4^o \rightarrow 3114$

$5^o \rightarrow 132114$

$6^o \rightarrow 1113122114$

$7^o \rightarrow 311311222114$

$8^o \rightarrow 13211321322114$

Notemos que a partir do 3^o termo da seqüência existe um padrão que se repete para os 3 últimos algarismos que são: 114.

Temos que encontrar os 3 últimos algarismos da soma dos 2003 primeiros termos desta seqüência.

De acordo com o algoritmo da adição, somaremos primeiro as unidades. São um total de 2003 algarismos 4, que somados nos dão: $2003 \times 4 = 8012$.

Já temos o algarismo da unidade: 2.

Somemos agora as dezenas, são 2002 algarismos 1 (o 1^o termo não apresenta dezena) acrescidos de 801 (referente à soma das unidades) o que nos dá um total de : $2002 \times 1 + 801 = 2803$.

Temos então o algarismo da dezena: 3.

Nos resta somar agora os algarismos das centenas, são 2001 algarismos 1 (o 1^o e 2^o termos não apresentam centena) acrescidos de 280 (referente à soma das dezenas) o que nos dá um total de: $2001 \times 1 + 280 = 2281$.

Finalmente, o algarismo da centena é: 1.

Portanto, os 3 últimos algarismos da soma dos 2003 primeiros termos da seqüência são: 132.

Obs: Os alunos geralmente percebem o padrão para os 3 últimos algarismos dos termos da seqüência, utilizam este fato para responder o problema, mas não se preocupam em demonstrá-lo.

4. **ORM - 2003, nível 2:** Dois irmãos, de idades diferentes, nasceram em datas tais que o dia, o mês e o ano de nascimento são números primos e cuja soma, para cada um dos irmãos, é igual a 2003. Sabe-se também que, para os dois irmãos, o número do dia é menor que o número do mês. Qual a data de nascimento de cada um deles?

   Resolução: Temos que encontrar duas datas distintas que satisfazem as seguintes condições:
   Sejam D, M e A respectivamente o dia, mês e ano. Então:
   D, M e A são primos;
   D + M + A = 2003 e $D < M$.

   Para M temos as seguintes opções: M = 2, 3, 5, 7 ou 11. Analisaremos cada caso:

   Se M = 2, então $D < 2$, mas D é primo, não existe primo menor que dois. Portanto M não pode ser igual a 2.

   Se M = 3, então $D < 3 \Rightarrow D = 2$ e teremos:
   $A = 2003 - D - M = 2003 - 2 - 3 = 1998$ (divisível por 2)

   Se M = 5, então $D < 5 \Rightarrow D = 2$ *ou* 3 e teremos:
   $A = 2003 - 2 - 5 = 1996$ (divisível por 2)
   $A = 2003 - 3 - 5 = 1995$ (divisível por 5)

   Se M = 7, então $D < 7 \Rightarrow D = 2,\ 3$ *ou* 5 e teremos:
   $A = 2003 - 2 - 7 = 1994$ (divisível por 2)
   $A = 2003 - 3 - 7 = 1993$ (primeira candidata: 02/07/1993)
   $A = 2003 - 5 - 7 = 1991$ (divisível por 11)

   Se M = 11, então $D < 11 \Rightarrow D = 2,\ 3,\ 5$ *ou* 7 e teremos:

$A = 2003 - 2 - 11 = 1990$ (divisível por 2)

$A = 2003 - 3 - 11 = 1989$ (divisível por 3)

$A = 2003 - 5 - 11 = 1987$ (segunda candidata: 05/11/1987)

$A = 2003 - 7 - 11 = 1985$ (divisível por 5)

As únicas duas datas que satisfazem as condições acima são:
02/07/1993 e 05/11/1987.

Obs: Mais uma vez aqui o aluno não verifica que 1993 e 1987 são, de fato, números primos. Nesta versão do problema para o nível 2, é necessário que o aluno conheça o critério de divisibilidade por 11, o que não ocorre na questão de nível 1.

5. **ORM - 2003, nível 2:** No início do século vinte, uma comunidade estava sendo castigada por uma terrível seca. os habitantes suplicaram a ajuda do seu santo padroeiro, acendendo-lhe uma vela especial em 27/09/1901. Esta vela tinha um metro de altura e demorava 5 anos para queimar completamente. Como a seca continuava, os fiéis acendiam uma nova vela todo dia 27/09. A partir de 1906, além de continuar a acender uma vela nova por ano, os fiéis também substituiam as velas que se acabavam. Em janeiro de 1913 finalmente vieram as chuvas. Com o fim da seca, os habitantes deixaram de acender uma nova vela por ano mas, em agradecimento ao santo padroeiro, continuaram a substituir as velas que se acabavam, todo dia 27 de setembro de cada ano. Qual será a soma dos comprimentos das velas acesas ao final do dia 27 de setembro de 2003?

   Resolução: Em 27/09/1901 foi acessa a 1^a vela. Até o final do dia 27 de setembro de 2003 se passaram $2003 - 1901 = 102$ anos. Uma vela demora 5 anos para queimar completamente. Durante 102 anos (visto que quando a vela queimava por inteiro era substituída por outra) queimaram $(102 = 5 \times 20 + 2)$ 20 velas e restaram $\dfrac{2}{5}$ da 21^a vela.
   Analogamente, para as demais velas acessas nos outros anos teremos:

em 1902, 2003 - 1902 $= 101$, $101 = 5 \times 20 + 1$;

em 1903, 2003 - 1903 $= 100$, $100 = 5 \times 20$;

em 1904, 2003 - 1904 $= 99$, $99 = 5 \times 19 + 4$;

em 1905, 2003 - 1905 $= 98$, $98 = 5 \times 19 + 3$;

em 1906, 2003 - 1906 $= 97$, $97 = 5 \times 19 + 2$;

em 1907, 2003 - 1907 $= 96$, $96 = 5 \times 19 + 1$;

em 1908, 2003 - 1908 $= 95$, $95 = 5 \times 19$;

em 1909, 2003 - 1909 $= 94$, $94 = 5 \times 18 + 4$;

em 1910, 2003 - 1910 $= 93$, $93 = 5 \times 18 + 3$;

em 1911, 2003 - 1911 $= 92$, $92 = 5 \times 18 + 2$;

em 1912, 2003 - 1912 $= 91$, $91 = 5 \times 18 + 1$;

Após 1912 não acenderam novas velas. Ao final de 2003 teremos então:

$$2 \times \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right) + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$$

$2 \times \dfrac{10}{5} + \dfrac{3}{5} = \dfrac{23}{5}$ de vela, ou 4 velas $+ \dfrac{3}{5}$ de vela.

Como cada vela inteira mede um metro, teremos 4,6 metros de vela ao final de 2003.

6. **ORM - 2000, nível 1:** Um banco garante que a cada ano o total de dinheiro da caderneta de poupança de seus clientes será duplicado. Se uma pessoa depositar R\$ 1,00 numa caderneta de poupança deste banco, a partir de quantos anos ela terá mais de um milhão de reais? Se ela depositar R\$ 4,00, a partir de quantos anos ela terá mais de um milhão de reais?

Resolução: Depositando R\$ 1,00 na caderneta de poupança deste banco, ao final do primeiro ano a pessoa terá $2 \times R\$\ 1,00 = R\$\ 2,00$. Após 2 anos ela terá

$2 \times R\$ \ 2,00 = R\$ \ 4,00$, etc. Temos então:

1^o ano	R$ 2,00	6^o ano	R$ 64,00
2^o ano	R$ 4,00	7^o ano	R$ 128,00
3^o ano	R$ 8,00	8^o ano	R$ 256,00
4^o ano	R$ 16,00	9^o ano	R$ 512,00
5^o ano	R$ 32,00	10^o ano	R$ 1024,00

(a) Podemos contiuar calculando a quantia que ela terá na poupança ao longo dos anos. Percebemos que após 20 anos ela terá mais de um milhão de reais na poupança.

(b) Outra maneira de chegar à solução é percebendo que, ao multiplicarmos o ano por 2, o valor da poupaça é elevado ao quadrado.
Exemplo: 2^o ano , R$ 4,00 ;
2×2^o ano $= 4^o$ ano , $R\$ \ (4,00)^2 =$ R$ 16,00
utilizando este raciocínio, após 9 anos teremos:
2×9^o ano $= 18^o$ ano , $R\$ \ (512,00)^2 =$ R$ 262.144,00 (que é menor que R$ 1.000.000,00)
19^o ano , $2 \times R\$ \ 262.144,00 =$ R$ 524.288,00 (que é menor que R$ 1.000.000,00)
2×10^o ano $= 20^o$ ano , $R\$ \ (1.024,00)^2 =$ R$ 1.048.576,00 (que é maior que R$ 1.000.000,00)

Portato, após 20 anos a pessoa terá na poupaça mais de R$ 1.000.000,00.

7. **ORM - 1998, nível 3:** Entre os inteiros de 1 à 10.000.000.000 qual das duas é maior: a quantidade daqueles números que possuem pelo menos um algarismo 1, ou a quantidade de números que não possuem nenhum algarismo 1?

Resolução: Para achar a quantidade de números que não possuem o algarismo 1, basta arranjar os números de forma a ter 9 possíveis algarismos na casa das unidades, 9 possíveis algarismos na casa das dezenas etc.

Chegando assim a $9^{10}-1 \approx 9^{10}$ (Subtrair 1 pois excluímos o número 00.000.000.000).

Observe agora que:

$9^2 = 81, \quad 9^3 = 729, \quad 9^4 = 6561, \quad 9^5 = 59049, \quad 9^6 = 531441, \quad 9^7 = 4782969$

$9^7 = 4782969 = 4,782969 \times 10^6 < 5 \times 10^6 \ \Rightarrow \ 9^7 < 5 \times 10^6$

$9^8 < 9 \times 5 \times 10^6 < 10 \times 5 \times 10^6 = 5 \times 10^7 \ \Rightarrow \ 9^8 < 5 \times 10^7$

Analogamente, $9^{10} \ < \ 5 \times 10^9 \ = \ \dfrac{10 \times 10^9}{2} = \dfrac{10^{10}}{2}$ metade dos números.

Temos então que a quantidade de números, entre os inteiros 1 à 10.000.000.000, que não possuem o algarismo 1 é menor que a metade do total desses números. O que nos diz que a quantidade de números que possuem algum algarismo 1 é maior que a metade destes.

Portanto a quantidade de números, entre 1 e 10.000.000.000, que possuem algum algarismo 1 é maior que a quantidade daqueles que não possuem nenhum algarismo 1.

Obs: Para arranjar os números "de forma a ter 9 possíveis algarismos na casa das unidades, 9 possíveis algarismos na casa das dezenas etc" o aluno utiliza a técnica da árvore.

8. **ORM - 2000, nível 1:** Dois carregadores de mala trabalham em uma esteira de bagagens de um aeroporto descarregando malas. O serviço deles consiste em pegar uma mala na esteira, colocá-la em um carrinho, levá-la até a saída e voltar para a esteira. O carregador A faz o serviço em 40 segundos, enquanto o carregador B faz o mesmo serviço em 60 segundos. Os dois carregadores trabalham em um mesmo local de frente à esteira e sempre que os dois se encontram ao mesmo tempo neste local, o carregador A pega primeiro a mala. Sabendo-se que uma mala na esteira na frente deste lugar a cada 20 segundos, quantas malas eles descarregam entre 12 horas e 12 horas e 30 minutos de um dia, realizando o serviço completo, se a primeira mala a ser descarregada passa em frente aos

dois às 12 horas e 40 segundos?

Resolução: Vamos analisar um ciclo típico:

- A e B estão em frente à esteira aos 0 segundos e passa a primeira mala. O carregador A pega esta mala e B espera.
- Aos 20 segundos passa a segunda mala e B a pega (A ainda não voltou).
- Aos 40 segundos passa a terceira mala. A acaba de voltar e pega esta mala (B está fora 20 segundos).
- Aos 60 segundos passa a quarta mala. A e B não voltaram (A está 20 segundos fora e B está 40 segundos fora).
- Aos 80 segundos passa a quinta mala e A e B estão junntos novamente em frente à esteira (A pega esta mala e iniciará novamente o ciclo).

Portanto: a cada 80 segundos A e B fizeram o ciclo completo descarregando juntos 3 malas.
Entre 12 horas e 40 segundos e 12 horas e 30 miutos temos:

$$29 \text{ minutos} + 20 \text{ segundos} = 29 \times 60 + 20 = 1760 \text{ segundos}$$
$$1760 \div 80 = 22 \text{ ciclos de } 80 \text{ segundos}$$

Portanto, A e B descarregam (completamente): $22 \times 3 = 66$ malas.

9. **ORM - 2000, nível 2:** Uma pessoa possui um balde de 8 litros cheio de água, e quer dividir este volume em duas partes iguais de 4 litros tendo à sua disposição mais dois baldes: um de 5 litros e outro de 3 litros. Como ela pode fazer isso sabendo-se que nenhum balde possui uma graduação de volume? Explique porque esta pessoa não pode dividir um volume de 10 litros em duas partes iguais, tendo à sua disposição 3 baldes: um de 10 litros, um de 6 litros e um de 2 litros.

Resolução:

balde de $8l$	balde de $5l$	balde de $3l$
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

Com um volume de $10l$, em um balde de $10l$ e mais dois baldes vazios, um de $6l$ e o outro de $2l$, não é possível dividir em duas partes iguais pois deveríamos obter $5l$ e $5l$. Isto nunca ocorrerá, pois em qualquer operação que se faça, obteremos sempre volumes pares. (tudo o que se faz é somar ou subtrair números pares de pares).

10. **ORM - 1998, níveis 1 e 2:** Quais são as possibilidades para o algarismo das unidades do número $x^4 + 3^{1998}$, com x um número inteiro?

Resolução: Vejamos inicialmente quais são as possibilidades para o algarismo das unidades para um número da forma 3^n, para n natural:

$3^0 = 1$ $\quad$ $3^6 = 729$

$3^1 = 3$ $\quad$ $3^7 = 2187$

$3^2 = 9$ $\quad$ $3^8 = 6561$

$3^3 = 27$ $\quad$ $3^9 = 19683$

$3^4 = 81$ $\quad$ $3^{10} = 59049$

$3^5 = 243$

O expoente do 3 pode ser da forma:

$4k \longrightarrow$ algarismo 1 no final, $k \geq 0, k \in \mathbb{N}$

$4k + 1 \longrightarrow$ algarismo 3 no final, $k \geq 0, k \in \mathbb{N}$

$4k + 2 \longrightarrow$ algarismo 9 no final, $k \geq 0, k \in \mathbb{N}$

$4k + 3 \longrightarrow$ algarismo 7 no final, $k \geq 0, k \in \mathbb{N}$

1998 = 4.499 + 2, logo 3^{1998} tem 9 como algarismo das unidades.

Vejamos agora as possibilidades para o algarismo das unidades para x^4, sendo x um número inteiro.

$0^4 = 0$ $\quad$ $6^4 = 1296$

$1^4 = 1$ $\quad$ $7^4 = 2401$

$2^4 = 16$ $\quad$ $8^4 = 4096$

$3^4 = 81$ $\quad$ $9^4 = 6561$

$4^4 = 256$ $\quad$ $10^4 = 10000$

$5^4 = 525$ $\quad$ $11^4 = 14641$

As possibilidades para o algarismo das unidades de x^4, sendo x um número inteiro, são: 0, 1, 5 e 6.

Portanto, $x^4 + 3^{1998}$ terá como possibilidades para o algarismo das unidades os seguintes algarismos: 0, 4, 5 e 9.

Obs: Aqui o aluno percebe que existe uma repetição nos algarismos das unidades de 3^n, mas não chega a demonstrar tal fato. O mesmo acontece com as unidades de x^4.

11. **ORM - 2000, nível 3:** Uma pessoa, ao completar 17 anos, resolve festejar seu aniversário com um bolo com 17 velas. Ela só consegue comprar caixas com 12 velas. Assim ela compra duas caixas, usa 17 velas e guarda as 7 que sobram. Para o próximo ano ela só precisa comprar uma caixa de velas novas para usar juntamente com aquelas que guardou do ano anterior. Novamente ela guarda a única vela que sobra. Prosseguindo desta maneira a cada ano, com que idade ela festejará seu aniversário e não sobrará nenhuma vela?

Resolução:

(a) *Primeira Solução:* podemos determinar a idade da pessoa analisando cada caso, como na tabela abaixo.

Idade	N^o de velas que já possuía	N^o de caixas compradas	N^o de velas no total	N^o de velas que sobraram.
17	0	2	$2 \times 12 + 0 = 24$	$24 - 17 = 7$
18	7	1	$1 \times 12 + 7 = 19$	$19 - 18 = 1$
19	1	2	$2 \times 12 + 1 = 25$	$25 - 19 = 6$
20	6	2	$2 \times 12 + 6 = 30$	$30 - 20 = 10$
21	10	1	$1 \times 12 + 10 = 22$	$22 - 21 = 1$
22	1	2	$2 \times 12 + 1 = 25$	$25 - 22 = 3$
23	3	2	$2 \times 12 + 3 = 27$	$27 - 23 = 4$
24	4	2	$2 \times 12 + 4 = 28$	$28 - 24 = 4$
25	4	2	$2 \times 12 + 4 = 28$	$28 - 25 = 3$
26	3	2	$2 \times 12 + 3 = 27$	$27 - 26 = 1$
27	1	3	$3 \times 12 + 1 = 37$	$37 - 27 = 10$
28	10	2	$2 \times 12 + 10 = 34$	$34 - 28 = 6$
29	6	2	$2 \times 12 + 6 = 30$	$30 - 29 = 1$
30	1	3	$3 \times 12 + 1 = 37$	$37 - 30 = 7$
31	7	2	$2 \times 12 + 7 = 31$	$31 - 31 = 0$

Portanto, ela festejará seu aiversário de 31 anos sem que sobre nenhuma vela.

(b) *Segunda Solução:* Consideremos m a idade em que a pessoa comemora seu aniversário sem que sobre velas. E k, o número total de caixas que a pessoa comprou desde seu aniversário de 17 anos. Então,

$$17 + 18 + 19 + ... + m = k.12$$

temos que $k.12$ é a soma da P.A. de razão 1 e $a_1 = 17$.

Sabemos que $a_n = a_1+(n-1).r$, logo $m = 17+(n-1).1 \Rightarrow m = 17+n-1 \Rightarrow m = 16+n \Rightarrow n = m-16$.

Se $12k$ é a soma da P.A. então:

$$12k = \frac{(a_1+a_n)n}{2} = \frac{(17+m)n}{2} = \frac{(17+m).(m-16)}{2}$$

$$24k = (17+m)(m-16)$$

Se m for par então: $(17+m)$ é ímpar e $(m-16)$ é par, mas

Se m for ímpar então: $(17+m)$ é par e $(m-16)$ é ímpar.

Temos que $(17+m)(m-16)$ é múltiplo de 24 ($24 = 2^3.3$), então nos resta duas possibilidades:

- (m - 16) múltiplo de 3 e (m + 17) múltiplo de 2^3:

  Neste caso m é ímpar e $m \geq 16$

m	17	19	21	23	25	27	29	31
$(m+17)$	34	36	38	40	42	44	46	48
$(m-16)$	1	3	5	7	9	11	13	15

  O menor valor para m, que satisfaça $m-16$ múltiplo de 3 e $m+17$ múltiplo de 8, é 31.

- (m + 17) múltiplo de 3 e (m - 16) múltiplo de 2^3:

  Neste caso m é par e $m \geq 16$

m	16	18	20	22	24	26	28	30	32
$(m+17)$	33	35	37	39	41	43	45	47	49
$(m-16)$	0	2	4	6	8	10	12	14	16

  Não há valor para m menor que 31 que satisfaça $m+17$ múltiplo de 3 e $m-16$ múltiplo de 8.

  Portanto, ela festejará seu aniversário de 31 anos sem que sobre nenhuma vela.

12. **ORM - 1998, nível 2:** Um cheque é escrito no valor de x reais e y centavos, ambos os números de dois dígitos. Por engano, na ocasião do recebimento, é pago o valor de y reais e x centavos, aumentando de R$ 17,82 o valor correto. Quais são os possíveis valores do cheque?

    Resolução: Temos que:

    x reais e y centavos $= x + \dfrac{y}{100}$ e y reais e x centavos $= y + \dfrac{x}{100}$

    Então: $(y + \dfrac{x}{100}) - (x + \dfrac{y}{100}) = 17,82 \Rightarrow 99y - 99x = 1782 \Rightarrow y - x = 18$

    mas $10 \leq x \leq 99$ e $10 \leq y \leq 99$, pois x e y são números de dois algarismos. Portanto:

    se $x \geq 10$ então $y \geq 28$ e se $y \leq 99$ então $x \leq 99 - 18 = 81$.

    Ou seja, $10 \leq x \leq 81$ e $28 \leq y \leq 99$

13. **ORM - 1999, nível 1:** Uma fábrica produz conjuntos para cozinha formados por 1 mesa e 4 bancos. Cada mesa é montada usando-se 4 pés e um tampo. Num turno de trabalho um operário fabrica 3 tampos ou 16 pés de mesa ou 8 bancos. Perguntas: Quantos operários devem trabalhar em cada uma das tarefas (tampos, pés de mesa e bancos) de maneira a se ter no final do turno um número inteiro de conjuntos completos sem sobra de peça? Quantos conjuntos são fabricados no final do turno?

    Resolução: Um cojunto completo é formado por 1 tampo, 4 pés e 4 bancos. Sabemos que um operário fabrica durante um turno:

    3 tampos (suficientes para 3 conjuntos) ou

    16 pés (suficientes para 4 conjuntos) ou

    8 bancos (suficientes para 2 conjutos)

    mmc(3, 4, 2) = 12. Serão fabricados 12 conjuntos (menor múltiplo) ao final do turno. Para isto precisaremos de:

$$12 \text{ tampos (4 operários para os tampos)}$$
$$12 \times 4 = 48 \text{ pés (3 operários para os pés)}$$
$$12 \times 4 = 48 \text{ bancos (6 operários para os bancos)}$$

Logo, são fabricados 12 conjuntos, e precisa-se de 4 operários para os tampos, 3 operários para os pés e 6 operários para os bancos.

14. **ORM - 1999, nível 2:** Dois números naturais são tais que a diferença de seus quadrados é 37. Quais são os números?

    Resolução: Sejam a e b esses números, então:

    $$a^2 - b^2 = 37 \Rightarrow (a-b)(a+b) = 37$$

    Como 37 é primo, temos a única possibilidade:

    $$\begin{cases} a + b = 37 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

    Logo, $2a = 38 \Rightarrow a = 19$, $b = 37 - a = 37 - 19 \Rightarrow b = 18$

    Portanto, os números são 18 e 19.

15. **ORM - 1999, nível 2:** João foi à loja de produtos agrícolas comprar animais para o sítio de seu pai. Para comprar os animais seu pai lhe deu R\$ 100,00, mas fez as seguintes exigências:

    (a) Gastar todo dinheiro até o último centavo.

    (b) Comprar exatamente 100 animais (vivos!).

    (c) Comprar pelo menos um ganso, um pato e um pintinho.

    (d) Comprar somente gansos, patos e pintinhos.

Ao chegar à loja João foi informado que cada ganso custava R$ 10,00, cada pato custava R$ 3,00 e cada pintinho custava R$ 0,50. Determinar se é possível atender às exigências com estes preços. Se for possível, quantos animais de cada espécie João deve comprar?

Resolução: Seja G o número de gansos, P o número de patos, e T o número de pintinhos. Então:

$$10G + 3P + \frac{1}{2}T = 100$$

ou

$$20G + 6P + T = 200$$

Pela exigência (b) temos que: G + P + T = 100. Então: T = 200 - 20G - 6P e T = 100 - G - P. Logo,

$$200 - 20G - 6P = 100 - G - P \Rightarrow 100 = 19G + 5P \Rightarrow P = \frac{100 - 19G}{5}$$

Para P ser um número inteiro, 100 - 19G deve ser múltiplo de 5, ou seja, deve terminar em 0 ou 5.

O múltiplo de 19 terminado em 0 ou 5 e menor que 100 é $95 = 19 \times 5$. Logo,

$$P = \frac{100 - 95}{5} = 1 \ , \ G = 5 \ e \ T = 94$$

Portanto, João deve comprar 94 pintinhos, 5 gansos e 1 pato.

16. **ORM - 1999, nível 2:** João pretendia comprar 4 pares de meias pretas e alguns pares de meias azuis. Na hora do pedido ser anotado as cores foram trocadas. As meias pretas custam o dobro das meias azuis. Com esta troca, a compra ficou 50% mais cara. Qual a quantidade de meias azuis que João pretendia comprar?

Resolução: Temos 4 pares de meias pretas e x pares de meias azuis. Seja p o preço do par de meias pretas e a o preço do par de meias azuis. Então: $p = 2a$. Suponhamos que k seja o valor da compra correta, então:

$$4p + xa = k \quad e \quad 4a + xp = k + \frac{1}{2}k = \frac{3}{2}k$$

Igualando as duas equações obtemos:

$$\frac{3}{2}(4p + xa) = 4a + xp$$

$$\frac{3}{2}(4.2a + xa) = 4a + x.2a$$

$$12a + \frac{3}{2}xa = 4a + 2xa \Rightarrow 8a = \frac{1}{2}xa \Rightarrow x = 16$$

Logo, João pretendia comprar 16 meias azuis.

17. **ORM - 1999, nível 3:** Mostre que um número diferente de 1 e formado apenas por algarismos 1 não pode ser um quadrado perfeito.

Resolução: Sabemos que 11, 111 e 1.111 não são quadrados perfeitos. Além disso, para que o quadrado de um número natural m termine em 1 é necessário que m termine em 1 ou 9. Podemos representar os números m de 3 ou mais algarismos que terminem em 1 ou 9 da seguinte maneira:

(a) $m = 100a + 10b + 1$ ou

(b) $m = 100a + 10b + 9$

onde a é um número natural e $0 \leq b \leq 9$ (isto é, b é o algarismo da casa das dezenas de m). Então:

(a) $m^2 = (100a + 10b + 1)^2 = 10^4a^2 + 100b^2 + 2.10^3ab + 2.10^2a + 20b + 1$. Neste caso, teremos para a casa das dezenas de m^2 a casa das unidades de $2b$ que é par, e portanto não pode ser igual a 1.

(b) $m^2 = (100a + 10b + 9)^2 = 10^4a^2 + 100b^2 + 2.10^3ab + 18.10^2a + 180b + 81.$

Neste caso, teremos para a casa das dezenas de m^2 a casa das unidades de $8b + 8$, que é par, e portanto não pode ser igual a 1.

Logo, m^2 não pode ser formado apenas por algarismos 1.

18. **ORM - 1998, nível 2:** Quantas soluções tem a equação $x + y + z = n$ com x, y e z inteiros positivos e n fixo?

Resolução: Fixando-se $x = 1$ temos:

$x =$	1	1	1	...	1
$y =$	1	2	3	...	$n - 2$
$z =$	$n - 2$	$n - 3$	$n - 4$	...	n - (n - 1)
$n =$	n	n	n	...	n

Obtemos assim, $n - 2$ soluções. (Observe a segunda linha).

Fixando-se $x = 2$ temos:

$x =$	2	2	2	...	2
$y =$	1	2	3	...	$n - 3$
$z =$	$n - 3$	$n - 4$	$n - 5$	...	n - (n - 1)
$n =$	n	n	n	...	n

Obtemos assim, $n - 3$ soluções.

Fixando-se sucessivamente valores para x, chegaremos em $x = n - 2$, onde teremos:

$x =$	$n - 2$
$y =$	1
$z =$	1
$n =$	n

Observe que x não pode ser nem $(n - 1)$, nem n, pois caso contrário, y ou z seria 0, e isso contradiz o fato de x, y e z serem inteiros positivos.

Portanto, o número de soluções é: $(n-2)+(n-3)+\ldots+2+1$

ou seja, a soma de uma Progressão Aritmética de $(n-2)$ termos e razão 1:

$$S = \frac{(1+(n-2))(n-2)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Logo, o número de soluções para a equação é: $S = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$

19. **ORM - 1998, nível 1:** Foram usados 807 algarismos para numerar todas as páginas de um livro. Quantas páginas tem o livro?

Resolução: De 1 até 9 teremos 1 algarismo para cada número. São 9 números desse tipo, o que nos dá um total de 9 algarismos. Logo, ainda nos restam 807 - 9 = 798 algarismos.

De 10 até 99 teremos 2 algarismos para cada número. São 90 números desse tipo, resultando num total de 180 algarismos. Logo, ainda nos restam 798 - 180 = 618.

De 100 até 199 teremos 3 algarismos para cada número. São 100 números dese tipo, resultando num total de 300 algarismos. Logo, ainda nos resta 618 - 300 = 318 algarismos.

Da mesma forma, de 200 até 299 são 300 algarismos. Assim, ainda nos resta 318 - 300 = 18 algarismos.

$18 \div 3 = 6$, ainda podemos ter 6 números com 3 algarismos cada. São eles: 300, 301, 302, 303, 304 e 305.

Portanto, em um livro com 305 páginas são utilizados 807 algarismos para numerá-las.

20. **ORM - 1998, nível 1:** Seu amigo lhe deve 25 centavos e pretende pagá-lo com moedas de 1 centavo, 5 centavos e 10 centavos. De quantas maneiras ele pode fazer o pagamento?

Resolução: Começando com as moedas de 1 centavo, obtemos as seguintes possibilidades:

5 moedas de R$ 0,01 + 2 moedas de R$ 0,05 + 1 moeda de R$ 0,10

5 moedas de R$ 0,01 + 4 moedas de R$ 0,05

5 moedas de R$ 0,01 + 2 moedas de R$ 0,10

10 moedas de R$ 0,01 + 1 moeda de R$ 0,05 + 1 moeda de R$ 0,10

10 moedas de R$ 0,01 + 3 moedas de R$ 0,05

15 moedas de R$ 0,01 + 2 moedas de R$ 0,05

15 moedas de R$ 0,01 + 1 moedas de R$ 0,10

20 moedas de R$ 0,01 + 1 moeda de R$ 0,05

25 moedas de R$ 0,01

Começando agora com moedas de 5 centavos e excluindo as possibilidades já citadas anteriormente, obtemos:

1 moeda de R$ 0,05 + 2 moedas de R$ 0,10

3 moedas de R$ 0,05 + 1 moeda de R$ 0,10

5 moedas de R$ 0,05

Portanto temos 12 possibilidades para se fazer o pagamento.

Obs: Um aluno de sexta série, ao resolver esta questão, afirmou que só haviam duas possibilidades para se fazer o pagamento. Sua justificativa baseou-se no fato de que o problema propõe que se utilize moedas de 1 centavo, 5 centavos **e** 10 centavos. Ele ainda afirmou que se estivesse escrito *ou* ao invés de *e*, o problema teria mais soluções. Este aluno ganhou pontuação máxima na questão, e fez com que a comissão de elaboração de provas da ORM redobrasse sua atenção quanto aos sutis detalhes dos enunciados dos problemas.

21. **ORM - 1998, nível 1:** Num sorteio com números de 100 a 999, alguns cartões numerados devem ser marcados para não dar margem a dúvidas; por exemplo o 696, que lido de cabeça para baixo é ainda um número, 969. Quantos são os

cartões numerados que devem ser marcados?

Resolução: Os únicos números que podem produzir soluções ambíguas são aqueles que possuem apenas os algarismos 0, 6 e 9. No entanto o algarismo 0 não pode ocupar a casa das centenas (pois não seria um número entre 100 e 999). Se ocupar a casa das unidades não causará ambigüidade (pois ao ser lido de cabeça para baixo produzirá um número que não estará compreendido entre 100 e 999). Logo, o algarismo 0 só poderá ocupar a casa das dezenas.
Temos então duas possibilidades de algarismos para a casa das centenas (6 e 9), três possibilidades para a dezena (0, 6 e 9) e duas possibilidades para a unidade (6 e 9). Portanto tem-se: $2 \times 3 \times 2 = 12$ cartões.

Obs: Aqui muitas vezes o aluno utiliza a técnica da "árvore" para listar todas as possibilidades.

3.3 Tabela de Classificação

Para cada problema apresentado acima faz-se uma classificação em termos de tarefa, técnica e tecnologia (segundo conceitos de Ives Chevallard).

ENUNCIADO DO PROBLEMA	**TAREFA**	**TÉCNICA**	**TECNOLOGIA**
1. **ORM - 2003, Nível 1:** Uma pessoa nasceu em uma data tal que o dia, mês e o ano de nascimento são números primos e cuja soma é igual a 2003. Sabe-se também que o número do dia é menor que o número do mês e que esta pessoa não fez aniversário neste ano. Qual a data de nascimento desta pessoa? (Nota: esta prova foi realizada em 27/09/2003)	- Determinar a data de nascimento da pessoa.	- Reconhecimento de números primos; - Experimentação; - Operações.	- Definição de número primo; - Critérios de divisibilidade; - Relação de ordem.
2. **ORM - 2003, nível 1:** Felixcidade é uma pequena cidade num país distante onde não há gatos abandonados. Cada casa da cidade tem o mesmo número de gatos. Sabe-se que existem pelo menos duas casas na cidade e, em cada casa, há pelo menos dois gatos. O número total de gatos da cidade está entre 150 e 200. Qual o número de casas na cidade e quantos gatos há em cada casa, sabendo-se que o número total de gatos da cidade é tal que há uma única solução para o número de casas e de gatos em cada casa?	- Determinar o número de casas na cidade e quantos gatos há em cada casa.	- Reconhecimento de um quadrado perfeito; - Fatoração; - Experimentação; - Operações.	- Definição de quadrado perfeito; - Relação de ordem; - Teorema Fundamental da Aritmética; - Indução.

ENUNCIADO DO PROBLEMA	**TAREFA**	**TÉCNICA**	**TECNOLOGIA**
3. **ORM - 2003, nível 2:** Considere a seqüência de números em que cada termo "descreve" o termo anterior: o 1^o termo é 4, o 2^o é 14 (ou seja, lendo o 1^o termo da seqüência dizemos "um (algarismo) *quatro*"), o 3^o termo é 1114 (um *um* e um *quatro*), etc. Calcule os três últimos algarismos (unidade, dezena e centena) da soma dos 2003 primeiros termos da seqüência.	- Determinar os três últimos algarismos de uma soma.	- Reconhecimento de padrões; - Algoritmo da adição; - Operações.	- Algoritmo da adição; - Sistema de numeração.
4. **ORM - 2003, nível 2:** Dois irmãos, de idades diferentes, nasceram em datas tais que o dia, o mês e o ano de nascimento são números primos e cuja soma, para cada um dos irmãos, é igual a 2003. sabe-se também que, para os dois irmãos, o número do dia é menor que o número do mês. Qual a data de nascimento de cada um deles?	- Determinar as datas de nascimento dos dois irmãos.	- Reconhecimento de números primos; - Experimentação; - Operações.	- Definição de número primo; - Critérios de divisibilidade; - Relação de ordem.

ENUNCIADO DO PROBLEMA	**TAREFA**	**TÉCNICA**	**TECNOLOGIA**
5. **ORM - 2003, nível 2:** No início do século vinte, uma comunidade estava sendo castigada por uma terrível seca. os habitantes suplicaram a ajuda do seu santo padroeiro, acendendo-lhe uma vela especial em 27/09/1901. Esta vela tinha um metro de altura e demorava 5 anos para queimar completamente. Como a seca continuava, os fiéis acendiam uma nova vela todo dia 27/09. a partir de 1906, além de continuar a acender uma vela nova por ano, os fiéis também substituiam as velas que se acabavam. Em janeiro de 1913 finalmente vieram as chuvas. Com o fim da seca, os habitantes deixaram de acender uma nova vela por ano mas, em agradecimento ao santo padroeiro, continuaram a substituir as velas que se acabavam, todo dia 27 de setembro de cada ano. Qual será a soma dos comprimentos das velas acesas ao final do dia 27 de setembro de 2003?	- Determinar a soma dos comprimentos das velas.	- Reconhecimento de padrões; - Algoritmo da divisão; - Operações.	- Congruência; - Algoritmo da divisão; - Indução.

ENUNCIADO DO PROBLEMA	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
6. **ORM - 2000, nível 1:** Um banco garante que a cada ano o total de dinheiro da caderneta de poupança de seus clientes será duplicado. Se uma pessoa depositar R$ 1,00 numa caderneta de poupança deste banco, a partir de quantos anos ela terá mais de um milhão de reais? Se ela depositar R$ 4,00, a partir de quantos anos ela terá mais de um milhão de reais?	Determinar em quantos anos uma pessoa terá mais de um milhão de reais na caderneta de poupança sabendo-se o depósito inicial.	- Reconhecimento de padrão; - Algoritmo da multiplicação; - Operações.	- Potenciação; - Relação de ordem; - Indução.
7. **ORM - 1998, nível 3:** Entre os inteiros de 1 à 10.000.000.000 qual das duas é maior: a quantidade daqueles números que possuem pelo menos um algarismo 1, ou a quantidade de números que não possuem nenhum algarismo 1?	Determinar qual é a maior quantidade de números entre 1 e 10.000.000.000: aqueles que possuem pelo menos um algarismo 1 ou aqueles que não possuem nenhum algarismo 1.	- Árvore; - Operações.	- Definição de arranjo (Análise Combinatória); - Relação de ordem.

ENUNCIADO DO PROBLEMA	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
8. **ORM - 2000, nível 1:** Dois carregadores de mala trabalham em uma esteira de bagagens de um aeroporto descarregando malas. O serviço deles consiste em pegar uma mala na esteira, colocá-la em um carrinho, levá-la até a saída e voltar para a esteira. O carregador A faz o serviço em 40 segundos, enquanto o carregador B faz o mesmo serviço em 60 segundos. Os dois carregadores trabalham em um mesmo local de frente à esteira e sempre que os dois se encontram ao mesmo tempo neste local, o carregador A pega primeiro a mala. Sabendo-se que uma mala na esteira na frente deste lugar a cada 20 segundos, quantas malas eles descarregam entre 12 horas e 12 horas e 30 minutos de um dia, realizando o serviço completo, se a primeira mala a ser descarregada passa em frente aos dois às 12 horas e 40 segundos?	Determinar a quantidade de malas que dois carregadores descarregam em um período de tempo determinado.	- Reconhecimento de padrão; - Algoritmo da divisão; - Algoritmo da multiplicação; - Operações.	- Algoritmo da divisão; - Indução.

ENUNCIADO DO PROBLEMA	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
9. **ORM - 2000, nível 2:** Uma pessoa possui um balde de 8 litros cheio de água, e quer dividir este volume em duas partes iguais de 4 litros tendo à sua disposição mais dois baldes: um de 5 litros e outro de 3 litros. Como ela pode fazer isso sabendo-se que nenhum balde possui uma graduação de volume? Explique porque esta pessoa não pode dividir um volume de 10 litros em duas partes iguais, tendo à sua disposição 3 baldes: um de 10 litros, um de 6 litros e um de 2 litros.	Explicar como é possível dividir o volume de um balde de 8 litros em duas partes utilizando dois outros baldes (5 e 3 litros), mostrar que isso não é possível fazer com 10 litros utilizando baldes de 6 e 2 litros.	- Experimentação; - Algoritmo da divisão; - Operações.	- Algoritmo da divisão.
10. **ORM - 1998, níveis 1 e 2:** Quais são as possibilidades para o algarismo das unidades do número $x^4 + 3^{1998}$, com x um número inteiro?	Determinar quais são as possibilidades para o algarismo das unidades do número $x^4 + 3^{1998}$, com x um número inteiro	- Reconhecimento de padrão; - Operações.	- Sistema de numeração; - Algoritmo da divisão; - Indução.

ENUNCIADO DO PROBLEMA	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
11. **ORM - 2000, nível 3:** Uma pessoa, ao completar 17 anos, resolve festejar seu aniversário com um bolo com 17 velas. Ela só consegue comprar caixas com 12 velas. Assim ela compra duas caixas, usa 17 velas e guarda as 7 que sobram. Para o próximo ano ela só precisa comprar uma caixa de velas novas para usar juntamente com aquelas que guardou do ano anterior. Novamente ela guarda a única vela que sobra. Prosseguindo desta maneira a cada ano, com que idade ela festejará seu aniversário e não sobrará nenhuma vela?	Determinar com que idade a pessoa festejará seu aniversário sem que sobre nenhuma vela.	(a) - Alg. da adição; - Experimentação; - Operações. (b) - Representar o problema por uma equação; - Soma de P.A.; - Fatoração; - Experimentação; - Reconhecimento de múltiplos; - Operações.	(a) - Algoritmo da adição. (b) - Progressão aritmética; - Definição de múltiplo.
12. **ORM - 1998, nível 2:** Um cheque é escrito no valor de x reais e y centavos, ambos os números de dois dígitos. Por engano, na ocasião do recebimento, é pago o valor de y reais e x centavos, aumentando de R$ 17,82 o valor correto. Quais são os possíveis valores do cheque?	Determinar os possíveis valores de um cheque.	- Representar o problema por uma equação; - Representação decimal; - Operações.	- Sistema de numeração; - Relação de ordem.

ENUNCIADO DO PROBLEMA	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
13. **ORM - 1999, nível 1:** Uma fábrica produz conjuntos para cozinha formados por 1 mesa e 4 bancos. Cada mesa é montada usando-se 4 pés e um tampo. Num turno de trabalho um operário fabrica 3 tampos ou 16 pés de mesa ou 8 bancos. Perguntas: Quantos operários devem trabalhar em cada uma das tarefas (tampos, pés de mesa e bancos) de maneira a se ter no final do turno um número inteiro de conjuntos completos sem sobra de peça? Quantos conjuntos são fabricados no final do turno?	Determinar quantos operários devem trabalhar, ao final de um turno, em cada uma das tarefas para que se produza um número inteiro de conjuntos, e quantos conjuntos são fabricados ao final do turno.	- Mínimo múltiplo comum; - Operações.	- Definição de múltiplo; - Proporcionalidade.
14. **ORM - 1999, nível 2:** Dois números naturais são tais que a diferença de seus quadrados é 37. Quais são os números?	Encontrar dois números naturais conhecida a diferença de seus quadrados.	- Reconhecimento de número primo; - Expansão de produto notável; - Resolução de sistema; - Operações.	- Definição de número primo; - Propriedade distributiva da multiplicação.

ENUNCIADO DO PROBLEMA	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
15. **ORM - 1999, nível 2:** João foi à loja de produtos agrícolas comprar animais para o sítio de seu pai. Para comprar os animais seu pai lhe deu R$ 100,00, mas fez as seguintes exigências: 1. Gastar todo dinheiro até o último centavo. 2. Comprar exatamente 100 animais (vivos!). 3. Comprar pelo menos um ganso, um pato e um pintinho. 4. Comprar somente gansos, patos e pintinhos. Ao chegar à loja João foi informado que cada ganso custava R$ 10,00, cada pato custava R$ 3,00 e cada pintinho custava R$ 0,50. Determinar se é possível atender às exigências com estes preços. Se for possível, quantos animais de cada espécie João deve comprar?	Determinar se é possível fazer uma compra de tantos aimais, gastando exatamente certa quantia. Se for possível, dizer quantos animais de cada espécie serão comprados.	- Representar o problema por uma equação; - Construção e resolução de sistema; - Reconhecer múltiplos de um número; - Operações.	- Critérios de divisibilidade; - Definição de múltiplo; - Propriedades das operações.

ENUNCIADO DO PROBLEMA	**TAREFA**	**TÉCNICA**	**TECNOLOGIA**
16. **ORM - 1999, nível 2:** João pretendia comprar 4 pares de meias pretas e alguns pares de meias azuis. Na hora do pedido ser anotado as cores foram trocadas. As meias pretas custam o dobro das meias azuis. Com esta troca, a compra ficou 50% mais cara. Qual a quantidade de meias azuis que João pretendia comprar?	- Determinar a quantidade de meias azuis que João pretendia comprar.	- Representar o problema por uma equação; - Construção e resolução de sistema; - Operações.	- Propriedades das operações.
17. **ORM - 1999, nível 3:** Mostre que um número diferente de 1 e formado apenas por algarismos 1 não pode ser um quadrado perfeito.	Mostrar que um número diferente de 1 e formado apenas por algarismos 1 não pode ser um quadrado perfeito.	- Reconhecimento de quadrados perfeitos; - Representação decimal; - Operações.	- Sistema de numeração; - Relação de ordem.
18.**ORM - 1998, nível 2:** Quantas soluções tem a equação $x+y+z=n$ com x, y e z inteiros positivos e n fixo?	Determinar quantas soluções tem a equação $x+y+z=n$ com x, y e z inteiros positivos e n fixo.	- Experimentação; - Reconhecimento de padrão; - Soma de P.A.; - Operações.	- Indução; - Progressão Aritmética.

ENUNCIADO DO PROBLEMA	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
19. **ORM - 1998, nível 1:** Foram usados 807 algarismos para numerar todas as páginas de um livro. Quantas páginas tem o livro?	Determinar o número de páginas de um livro conhecido o total de algarismos utilizados para enumerá-las.	- Contagem; - Operações.	- Sistema de numeração.
20. **ORM - 1998, nível 1:** Seu amigo lhe deve 25 centavos e pretende pagá-lo com moedas de 1 centavo, 5 centavos e 10 centavos. De quantas maneiras ele pode fazer o pagamento?	Determinar de quantas maneiras pode-se fazer um pagamento de 25 centavos utilizando moedas de 1, 5 e 10 centavos.	- Árvore; - Operações.	- Definição de arranjo (Análise Combinatória).
21. **ORM - 1998, nível 1:** Num sorteio com números de 100 a 999, alguns cartões numerados devem ser marcados para não dar margem a dúvidas; por exemplo o 696, que lido de cabeça para baixo é ainda um número, 969. Quantos são os cartões numerados que devem ser marcados?	Determinar o número de cartões que deverão ser marcados afim de não deixar margem a dúvidas.	- Reconhecimento de número simétrico; - Árvore; - Operações.	- Simetria; - Definição de arranjo (Análise Combinatória).

Abaixo são descritas as técnicas que figuraram dentre os problemas listados anteriormente. O número entre parênteses significa a quantidade de exercícios que possuem determinada técnica.

- *Operações (21):* é a técnica mais elementar. Todos os problemas analisados exigem essa técnica que consiste no uso das quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão);
- *Reconhecimento de números primos (3):* capacidade de reconhecer um número primo dentre algumas opções;
- *Reconhecimento de um quadrado perfeito (2):* capacidade de reconhecer um quadrado perfeito dentre algumas opções;
- *Reconhecer múltiplos de um número (2):* capacidade de reconhecer múltiplos de um número dentre algumas opções, e também de listar esses múltiplos;
- *Reconhecimento de número simétrico (1):* capacidade de reconhecer um número simétrico dentre algumas opções;

Reconhecer um número primo, por exemplo, exige do aluno uma boa compreensão da definição de números primos. Todas as técnicas desse tipo exigem a compreensão da teoria envolvida.

- *Reconhecimento de padrões (6):* geralmente o aluno percebe um padrão em seus cálculos quando há uma repetição constante de resultados;
- *Algoritmo da Adição (2), divisão (3), multiplicação (2):* mais do que saber operar entre os números, ás vezes torna-se necessário conhecer o funcionamento dos algoritmos afim de resolver a questão ou perceber algum padrão na mesma;
- *Árvore (3):* técnica bastante utilizada para listar todas as possibilidades para um certo evento. É uma maneira sistemática de listá-las sem repetir qualquer possibilidade ou esquecer de alguma;
- *Representar o problema por uma equação (4):* diferente do aluno trabalhar com uma equação dada no problema, aqui é necessário construir essa equação. É preciso interpretar os dados do problema para representá-lo por uma equação;

- *Construção e Resolução de sistema (3):* assim como representar o problema por uma equação, às vezes é necessário representá-lo por um sistema de equações. Geralmente são sistemas simples em que o aluno utiliza o método da substituição para resolvê-lo;

- *Experimentação (7):* consiste em experimentar certos valores para saber se é adequado à solução ou não, em seguir instruções passo a passo para se chegar a solução ou perceber algum padrão nos resultados;

Algumas técnicas utilizadas na resolução dos problemas olímpicos também são freqüentemente encontradas nos livros didáticos:

- *Representação Decimal (2); Mínimo Múltiplo Comum (1); Fatoração (2); Expansão de produto notável (1); Soma de P.A. (2)*

Além de *Operações* (que aparece em todos os problemas), as técnicas mais utilizadas foram: *experimentação, reconhecimento de padrão e reconhecimento de números primos, múltiplos, quadrados perfeitos*, etc.

O aparecimento constante dessas técnicas talvez possa responder em parte as perguntas do início do capítulo: *O que caracteriza um problema olímpico? No que eles se diferem dos problemas usuais?*

As técnicas de experimentação e reconhecimento de padrões são raramente encontradas na resolução de exercícios de livros didáticos. Já nos problemas olímpicos essas técnicas são bastante freqüentes, o que os torna diferentes. São técnicas como estas que despertam o raciocínio lógico nos alunos, o que vem a ser uma das características dos problemas olímpicos.

As questões discursivas exigem que o aluno exponha seu raciocínio de forma clara e compreensível, o que permite a eles uma sistematização do raciocínio e uma melhor compreensão da solução apresentada.

Os problemas olímpicos são formulados de modo que não apresente tão claramente os conceitos matemáticos utilizados em sua resolução, levando o aluno a relacionar as fórmulas, teoremas e resultados que aprende na sala de aula a estas " situações-problema".

Criatividade e originalidade são necessárias para resolver estes problemas, pois os mesmos geralmente descrevem situações para as quais nenhum processo rotineiro foi previamente aprendido. Ao resolver estes problemas com certa freqüência, o aluno adquire suas mais variadas técnicas, ampliando assim seu conhecimento matemático.

Conclusão

Os alunos dos ensinos fundamental e médio estão acostumados a encontrar a matemática na forma acabada. A resolução de problemas (especialmente os olímpicos) é matemática em elaboração.

Julgando de suma importância a resolução de problemas, para o desenvolvimento do pensamento lógico e raciocínio crítico dos alunos, espero que este trabalho contribua para que professores atuantes possam avaliar a importância destes problemas e até inserí-los em suas aulas.

Espero que contribua também aos futuros professores de matemática, que possa auxiliá-los em uma formação mais completa e crítica em relação à prática de docência.

Neste trabalho foi apresentado apenas um tipo de classificação dos problemas olímpicos (e muito poderia ser ainda analisado a respeito deste). Entretanto, não é somente as técnicas de resolução dos problemas olímpicos que os diferenciam dos demais.

Um dos aspectos importantes destes problemas é sua formulação. Um estudo acerca dos enunciados dos problemas olímpicos seria igualmente interessante. Outras teorias seriam utilizadas para esse estudo (como, por exemplo, a Teoria das Representações).

Por fim, espero que este trabalho sirva de estímulo a próximos estudos relacionados às Olimpíadas de Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] BERNAL, Márcia Maria. *Estudo do Objeto Proporção: elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado.* Dissertação defendida em maio de 2004.

[2] Comissão de Olimpíadas da SBM. *Olimpíadas Brasileiras de Matemática* - 1^a *a* 8^a*: Problemas e Resoluções.* São Paulo: Atual, 1995.

[3] MAYER, Edson. *O Currículo de 1994 do Curso de Licenciatura em Matemática de UFSC na Visão dos Egressos.* 68fls. 2004 (Trabalho de Conclusão de Curso) Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina.

[4] Organizadores: MOREIRA, Carlos; MOTTA, Edmilson; TENGAN, Eduardo; AMÂNCIO, Luiz; SALDANHA, Nicolau; RODRIGUES, Paulo. *Olimpíadas Brasileiras de Matemática* - 9^a *a* 16^a*: Problemas e Resoluções.* Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2003.

[5] Organizadores: REYS, Robert E.; KRULIK, Stephen. *A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.* Atual Editora. São Paulo, 1997.

[6] *Revista da Olimpíada Regional de Matemática - Santa Catarina.* Número 1. Universidade Federal de Santa Catarina - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Florianópolis, 2004.

[7] www.obm.org.br (consultado no período de 08/2004 a 11/2004)

[8] www.orm.mtm.ufsc.br (consultado no período de 08/2004 a 11/2004)

ANEXOS

Regulamento da Olimpíada Brasileira de Matemática

Os Participantes

A olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) é uma competição dedicada aos alunos brasileiros ou de escolas e universidades brasileiras desde a 5 série do ensino fundamental até estudantes universitários em nível de graduação.

Os Objetivos

A OBM tem como objetivos principais estimular o estudo da Matemática pelos alunos, desenvolver e aperfeiçoar a capacitação dos professores, influenciar na melhoria do ensino, e detectar jovens talentos.

Os Níveis

A OBM será realizada anualmente em quatro níveis, de acordo com a escolaridade do aluno:

- Nível 1 - para alunos matriculados na 5 ou 6 séries do ensino fundamental quando da realização da primeira fase da OBM.

- Nível 2 - para alunos matriculados na 7 ou 8 séries do ensino fundamental quando da realização da primeira fase da OBM ou que, tendo concluído o ensino fundamental menos de um ano antes, não tenham ingressado no ensino médio até a data da realização da primeira fase da OBM.

- Nível 3 - para alunos matriculados em qualquer série do ensino médio quando da realização da primeira fase da OBM ou que, tendo concluído o ensino médio menos de um ano antes, não tenham ingressado em curso de nível superior até a data de realização da primeira fase da OBM.

- Nível Universitário - para alunos que ainda não tenham concluído o curso superior (normalmente estudantes universitários em nível de graduação, podendo ser estudantes de qualquer curso e qualquer período).

As Fases

Para os níveis 1, 2 e 3, a OBM será realizada em três fases. A primeira fase será realizada no primeiro semestre, a segunda e a terceira no segundo semestre.
Para o Nível Universitário, a OBM será realizada em duas fases ambas aplicadas no segundo semestre coincidindo em dia e horário com a segunda e terceira fases dos níveis 2 e 3.
As datas serão fixadas anualmente pela Comissão de Olimpíadas da SBM.

Estrutura das provas

Níveis 1, 2 e 3

Primeira Fase - uma prova de múltipla escolha com 20 a 25 questões com duração de 3 horas.
Segunda Fase - uma prova realizada nas escolas com duração de 4 horas e 30 minutos.
Terceira Fase:
Nível 1 - uma prova discursiva com 5 problemas com duração de 4 horas e 30 minutos.
Níveis 2 e 3 - duas provas discursivas realizadas em dois dias consecutivos com 3 problemas em cada dia com uma duração de 4 horas e 30 minutos por dia.

Nível Universitário

Primeira Fase - uma prova discursiva com 6 problemas com duração de 4 horas e 30 minutos, aplicada no mesmo dia e horário da Segunda Fase dos níveis 1, 2 e 3.
Segunda Fase - duas provas discursivas realizadas em dois dias consecutivos com 3 problemas em cada dia com duração de 4 horas e 30 minutos por dia, aplicadas no mesmo dia e horário da Terceira Fase dos níveis 2 e 3.

Elaboração Das Provas e Responsabilidades das Bancas

Para cada nível será nomeada pela Comissão de Olimpíadas uma banca especializada de 3 a 5 membros. Esta nomeação será feita até 15 de março de cada ano.

Cada uma das bancas será responsável por:

- elaborar as questões, problemas e suas respectivas soluções.
- submeter o trabalho a consultores convidados para verificação da adequação.

- elaborar os critérios de correção para as provas das fases 2 e 3.
- corrigir as provas da fase final.
- elaborar um relatório contendo os aspectos positivos e negativos percebidos durante a correção, dados e estatísticas que permitam a cada coordenador regional atuar na melhoria do ensino das escolas de sua região.
- na fase final decidirem juntamente com a coordenação nacional os critérios finais de premiação.

A Coordenação

A coordenação geral da OBM estará centralizada na Secretaria da Olimpíada Brasileira de Matemática (localizada no IMPA) que dirigirá a atuação dos coordenadores regionais que, por sua vez, atenderão as escolas de sua região (veja anexo 3).

A Realização da OBM

Níveis 1, 2 e 3.

- A primeira fase da OBM será realizada em todos os colégios cadastrados (veja anexo 1). A responsabilidade do recebimento da prova, impressão, aplicação, correção e transmissão dos dados ao coordenador regional será de um professor do colégio, denominado representante da OBM no colégio, e que estará em contato permanente com o coordenador de sua região (veja anexo 2).

  Alunos podem pedir ao coordenador regional para fazer a primeira fase sob a sua responsabilidade direta se por qualquer razão não for possível fazer a prova na escola. Cabe ao coordenador regional analisar se tal pedido é viável e procedente.

- A segunda fase da OBM será realizada nos colégios que tiverem maior número de estudantes promovidos. caberá ao coordenador regional estabelecer os locais onde esta fase será realizada, distribuir todos os alunos classificados nesses locais, solicitar a ajuda de todos os professores representantes da OBM para a aplicação e correção das provas, e transmissão dos resultados para a Secretaria da Olimpíada (veja anexos 2 e 3). O coordenador regional pode inclusive autorizar todas as escolas a aplicarem a segunda fase.

Como na primeira fase, alunos podem pedir ao coordenador regional para fazer a segunda fase sob a sua responsabilidade direta.

Devem se enviadas cópias de todas as provas aos coordenadores regionais; os coordenadores regionais devem rever a correção.

- A terceira fase da OBM será realizada em local centralizado designado pelo coordenador regional. Em grandes regiões o coordenador poderá designar mais de um local para a realização desta fase. O coordenador regional enviará todas as provas para a Secretaria da Olimpíada (veja anexo 3).

Nível Universitário

A Primeira e Segunda Fases serão realizadas em todas as universidades cadastradas. A responsabilidade do recebimento da prova, impressão, aplicação, correção e transmissão dos dados a Secretaria da OBM será de um professor da universidade, denominado representante da OBM na universidade, e que estará em contato permanente com a Secretaria da OBM.

Alunos podem solicitar a aplicação da prova em outra universidade se por qualquer razão não for possível fazer a prova na propria universidade.

Critérios de Inscrição e Promoção

Níveis 1, 2 e 3

- Para a primeira fase, cada colégio poderá inscrever todos os estudantes interessados. Não existe nenhuma limitação no número de alunos por escola e todo aluno que desejar participar deve participar. A existência da OBM deve ser amplamente divulgada na escola cadastrada.

  A inscrição ocorrerá em cada colégio e não precisa ser repassada ao coordenador regional. Posteriormente, o representante da OBM em cada colégio informará os resultados ao coordenador de sua região, o qual terá prazo de uma semana para transmitir à Secretaria da Olimpíada. (veja anexos 2 e 3).

- O critério para a promoção dos alunos para a segunda fase será divulgado pela Comissão de Olimpíadas até 30 días após a realização da primeira fase.

- O critério para a promoção dos alunos para a terceira fase será divulgado até 30 dias após a realização da segunda fase, valendo a observação do ítem anterior. (veja anexos 2 e 3).

- Alunos que ganharam medalha de ouro, prata e bronze na OBM de um ano estão automaticamente classificados para todas as fases da OBM do ano subseqüente, inclusive se houver mudança de nível. Suas notas nas fases classificatórias serão ou a nota mínima para classificação ou a nota efetivamente obtida, o que for maior.

- Provas da Terceira Fase feitas em qualquer momento ou local e em caráter informal por alunos não classificados na 1a. ou 2a. fases não serão sob hipótese alguma corrigidas pela mesma banca que corrige as provas oficiais. Os coordenadores regionais não devem portanto enviar este tipo de material para a coordenação nacional.

Nível Universitário

- Para a primeira fase, cada universidade poderá inscrever todos os estudantes interessados. Não existe nenhuma limitação no número de alunos por universidade e todo aluno que desejar participar deve participar. A existência da OBM deve ser amplamente divulgada na universidade cadastrada.

  A inscrição ocorrerá em cada universidade e não precisa ser repassada a Secretaria da OBM. Posteriormente, o representante da OBM em cada universidade informará os resultados a Secretaria da OBM.

- O critério para a promoção dos alunos para a segunda fase será divulgado pela Comissão de Olimpíadas até 30 días após a realização da primeira fase.

A Pontuação

Níveis 1, 2 e 3

A pontuação final dos alunos que participarem das três fases será feita pelas bancas atribuindo-se um ponto a cada questão da primeira fase, 10 pontos para cada problema da segunda fase e 50 pontos para cada problema da terceira fase. Fica estabelecido que a promoção para a terceira fase levará em conta os pontos acumulados nas duas primeiras. (veja também anexo 4).

Nível Universitário

A pontuação final dos alunos que participarem das duas fases será feita pelas bancas atribuindo-se 10 pontos a cada questão da primeira fase e 50 pontos para cada problema da segunda fase. Fica estabelecido que a promoção para a segunda fase levará em conta os pontos acumulados na primeira fase.

Os Prêmios

Serão oferecidos prêmios aos alunos que obtiverem as melhores pontuações finais. Esses prêmios são chamados de Medalhas de Ouro, Medalhas de Prata e Medalhas de Bronze e as quantidades de medalhas oferecidas atenderão aproximadamente a proporção $1 : 2 : 3$.

Serão oferecidas Menções Honrosas a critério da banca.

As Cerimônias de Premiação

Serão realizadas cerimônias de premiação da OBM nas regiões que tiverem maior número de alunos premiados. Para garantir a presença dos alunos premiados, a Comissão de Olimpíadas patrocinará o translado, hospedagem e demais despesas destes alunos.

O Cadastramento

Qualquer colégio ou universidade, de qualquer região do país poderá se cadastrar na Secretaria da Olimpíada para participar da OBM. Para isso, é necessário enviar:

- O nome do colégio ou universidade e seu endereço completo.
- O nome do diretor ou reitor.
- O nome de um professor responsável para o recebimento de todas as correspondências e que será designado representante da Olimpíada Brasileira de Matemática neste colégio ou universidade.

A Contrapartida dos Colégios e Universidades

A Comissão de Olimpíadas solicita aos colégios e universidades uma colaboração para tornar exeqüível a realização da OBM em âmbito nacional nos seguintes aspectos:

- nomear um professor representante da OBM.
- incluir no calendário as datas da OBM para que não haja colisões com as atividades normais.
- reproduzir as provas da OBM para os alunos participantes.
- promover a divulgação das atividades da OBM e organizar a infra-estrutura para a realização das provas.
- envolver os professores e alunos nas atividades da OBM.

Seqüência de Procedimentos dos Representantes e Coordenadores

Níveis 1, 2 e 3:

- no início do ano letivo todos divulgam a realização da OBM.
- os representantes em cada colégio recebem a prova de primeira fase com o gabarito.
- os representantes nos colégios providenciam a impressão e a aplicação da prova, a correção de acordo com o gabarito e, em seguida, transmitem o resultado ao coordenador regional, que os transmite à Secretaria da Olimpíada.
- os representantes recebem do coordenador regional a nota de corte para a promoção para a segunda fase e divulgam no colégio.
- o coordenador regional recebe a prova de segunda fase com as soluções dos problemas e critérios de pontuação.
- o coordenador regional decide em que colégios a segunda fase será realizada e distribui os alunos classificados nesses locais, informando com antecedência a todos.
- o coordenador regional solicita aos colégios onde a segunda fase será realizada a impressão das provas, o papel necessário para as soluções dos alunos e a ajuda dos representantes dos outros colégios para a correção, de acordo com o critério recebido.

- o coordenador regional envia as notas para o Centro de Olimpíadas.
- o coordenador regional recebe o critério de promoção para a terceira fase e o transmite a todos os colégios.
- o coordenador regional, tendo em vista o número de participantes para a terceira fase de sua região, decide e divulga o local de realização desta última fase.
- o coordenador regional recebe a prova da terceira fase, providencia a impressão e papel necessário para o trabalho dos alunos e a fiscalização com a ajuda de alguns dos representantes dos colégios
- o coordenador regional aplica a prova de terceira fase e envia todas para a Secretaria da Olimpíada onde serão corrigidas pelas respectivas bancas.

Nível Universitário:

- no início do ano letivo todos divulgam a realização da OBM.
- os representantes em cada universidade recebem a prova de primeira fase com o gabarito.
- os representantes nas universidades providenciam a impressão e a aplicação da prova, a correção de acordo com o gabarito e, em seguida, transmitem o resultado a Secretaria da Olimpíada.
- os representantes recebem da Secretaria da OBM a nota de corte para a promoção para a segunda fase e divulgam na universidade.
- o representante recebe a prova de segunda fase com as soluções dos problemas e critérios de pontuação.
- o representante envia as notas para a Secretaria da OBM

Olimpíadas e Premiações Regionais

Níveis 1, 2 e 3

As pontuações obtidas pelos alunos nas primeira e segunda fase da OBM podem ser usadas para classificar, pontuar ou dar prêmios em competições regionais a critério dos coordenadores regionais, sem necessidade de consulta a quem quer que seja.

A terceira fase da OBM não deve ser utilizada para classificar, pontuar ou dar prêmios em competições regionais.

Nível Universitário

As pontuações obtidas pelos alunos na primeira fase da OBM podem ser usadas para classificar, pontuar ou dar prêmios em competições internas ou regionais a critério dos representantes, sem necessidade de consulta a quem quer que seja.

A Segunda Fase da OBM não deve ser utilizada para classificar, pontuar ou dar prêmios em competições internas ou regionais.