UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA – HABILITAÇÃO LICENCIATURA

EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: PROPOSTA DE MÓDULO PARA O ENSINO DE PROGRESSÕES

IRIMAR MOREIRA

FLORIANÓPOLIS

2004

IRIMAR MOREIRA

EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: PROPOSTA DE MÓDULO PARA O ENSINO DE PROGRESSÕES

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção do título de Licenciado em Matemática, orientado pela Professora Ms. Carmem Suzane Comitre Gimenez.

FLORIANÓPOLIS

2004

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura e aprovado em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 76/SCG/04.

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez

Profº Nereu Estanislau Burin

Profº Rubens Starke

Profº Vilmar Coelho

DEDICATÓRIA

Dedico esta monografia:

Ao meu Pai e meu irmão Sérgio que infelizmente não se encontram mais entre nós.

Ao Giovani e a professora Carmem, que com carinho incentivaram para que este estudo pudesse ser realizado.

AGRADECIMENTOS

À minha família

Ao meu marido Giovani, por sempre ter me compreendido nestes anos de curso.

À minha Mãe, por sempre ter me incentivado e acreditado em mim.

À minha irmã Marli, por sempre ter me ajudado quando precisava.

E à minha sobrinha Egidiane por ter me ajudado no trabalho.

Aos meus irmãos Egidio, Íris.

Aos meus sobrinhos Felipe, Serginho e ao meus afilhados Thaysi e Andrew.

Aos meus professores:

À professora Carmem por ter aceitado me orientar, por sempre está tão disposta e alegre nos horários de atendimento, por suas correções, por sempre ter me compreendido com meus horários, com certeza sem ela este trabalho não teria sido realizado.

Ao professor Rubens, por ter aceitado participar da banca examinadora e por ter acreditado em mim durante os cálculos sempre nos incentivando.

Ao professor Nereu, por ter aceitado participar da banca examinadora e por sempre ter me ajudado com explicações durante a disciplina de Fundamentos de Matemática II.

Agradeço aos professores: Lício, Méricles, Albertina, Vírgilio, Guerra e Eliezer.

À Sílvia, à Iara e ao Alcino por serem sempre tão prestativos.

Ao meu coordenador Vilmar por ter aceitado participar da banca a examinadora e sempre ter me compreendido nas mudanças de horário de aula.

Aos meus colegas:

À Iris, por ser uma das pessoas que mais me ajudaram durante o curso, sempre me incentivando em todos os aspectos. Por nossos sábados, domingos e madrugadas estudando, pelos xérox tirado no palácio e uma lista de outras coisas.

À Clarissa, também por ser uma das pessoas que me ajudaram durante o curso. Por minhas idas a Paulo Lopes, sábados, domingos e madrugadas, pela explicação de matérias, por nossas caminhadas sem rumo pela universidade e por sempre termos uma solução de ultima hora para os nossos desesperos quando tínhamos prova.

À Patrícia por ter me ajudado em Física I, e tantas outras coisas.

Ao Manoel por ter sempre me incentivado e me arrumado vários empregos, inclusive na COPEREDUCA.

Ao Marcos por ter se disponibilizado a me explicar matéria quando mais precisei.

Ao Alécio, por ser sempre tão simpático e querido comigo.

Ao Edson e a Elisângela por terem me ajudado em cálculo III.

À Tatiana por sempre quando precisei, aplicou prova para meus alunos.

À minha colega de infância Josiane.

Ao Lindomar por ter também explicado matéria para mim quando precisei

À Ana Alice, Adriana, Maicon, Roselane, Renata, Madeline, Samuel, Luiz Junqueira, Ivanildo e a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos bichos:

À Meleca por sempre ter me acompanhado nas minhas noites de insônia estudando.

À Darlene, Vaninho I, Vaninho II, Malu, Maluf, Mayki, Rosinha, Fofucha, Figueira, Muck, Louro, as duas gatas, os patos, marrecos, galinhas por serem minhas companhias e por sempre me deixarem feliz.

"As grandes conquistas da humanidade só foram possíveis graças à conquista da **Matemática**".

Autor desconhecido

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Durante todo o curso de licenciatura sentia a preocupação dos colegas em escolher o tema para o trabalho de conclusão de curso. Também sempre me preocupei qual seria o tema que escolheria, mas depois que falei com minha orientadora é que veio a idéia de escolher um tema que tivesse ligação com o local em que trabalho: na Educação de Jovens e Adultos (EJA) .

O estudo de progressões sempre foi de meu interesse, pois desde o ensino médio era o assunto que mais gostava. Foi trabalhando com a EJA que este tema me chamou à atenção, pela dificuldade dos alunos em relação às progressões. Não sei se esta dificuldade é porque o módulo não atende às necessidades auto-didáticas para o aluno estudar, ou se é devido a toda uma estrutura educacional do ensino em nosso país.

Foi através dessa experiência que veio a necessidade de construir um novo módulo para ensinar progressões para os meus alunos, esperando que estes pudessem assimilar melhor o conteúdo das progressões, sem toda aquela dificuldade que sentem.

Gostaria de ressaltar que durante todo um semestre, no meu TCC I, estudei as progressões, resolvendo exercícios de vários níveis de dificuldade, desde os mais simples aos mais complexos, com o objetivo de ampliar os horizontes sobre o tema.

No capítulo I, fizemos um estudo sobre EJA em relação a conteúdo, contexto histórico, político e social. Apresentamos a LDB, tratando da educação de jovens e Adultos, o PCN falando da matemática do ensino médio e o projeto político pedagógico da COPEREDUCA (supletivo da grande Florianópolis e onde trabalho), que faz uma retrospectiva histórica do ensino em nosso país e o porque da EJA ter uma participação tão importante na nossa sociedade.

No capítulo II, avaliamos a abordagem de progressões nos livros didáticos das décadas de 50, 60, 70, 80, três livros atuais e o módulo do ensino de progressões da COPEREDUCA.

O capítulo III é nossa proposta de módulo sobre progressões da EJA. O módulo foi escrito para que o aluno estudasse sozinho, com a preocupação de colocar exercícios resolvidos e definições claras. A idéia é que o módulo fosse auto-explicativo, permitindo ao aluno conhecer o conteúdo sem a interferência direta do professor. Além disso, acreditamos que qualquer aluno que queira estudar o tema possa fazê-lo com auxílio do módulo.

Por fim, no capítulo IV, vemos o resultado de uma experiência feita com quatro alunos da COPEREDUCA que estudaram o módulo e fizeram uma análise do que entenderam e não entenderam do mesmo, sendo que um destes alunos fez uma comparação do módulo usado na COPEREDUCA e o módulo que fizemos para o estudo de progressões.

CAPÍTULO 1

1. EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Neste capítulo apresentaremos um estudo sobre o papel do conteúdo na educação de jovens e adultos, primeiro citaremos o parágrafo da LEI DE DIRETRIZES E BASES DA EDUCAÇÃO – LEI 9.394, que trata sobre a educação de jovens e adultos. Também citaremos os PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS falando sobre a Matemática no ensino médio, pois não temos uma parte específica falando sobre a EJA. Finalmente, faremos um resumo do PROJETO POLÍTICO PEDAGÓGICO do ensino de educação de jovens e adultos da (COPEREDUCA), um supletivo modularizado da grande Florianópolis.

1.1 A LDB

Com base na LDB temos o seguinte parágrafo:

Da educação de jovens e adultos:

A educação de jovens e adultos será destinada aqueles que não tiverem acesso ou continuidade de estudos no ensino fundamental e médio na idade própria.

Os sistemas de ensino assegurarão gratuitamente aos jovens e adultos que não puderem efetuar os estudos na idade regular, oportunidades educacionais apropriadas, consideradas as características do alunado, seus interesses, condições de vida e de trabalho, mediante cursos e exames.

O Poder Público viabilizará e estimulará o acesso e a permanência do trabalhador na escola, mediante ações integradas complementares entre si.

Os sistemas de ensino manterão cursos e exames supletivos, que compreenderão a base nacional comum do currículo, habitando ao prosseguimento de estudos em caráter regular.

Os exames a que se refere este artigo realizar-se-ão:

- no nível de conclusão do ensino fundamental, para os maiores de quinze anos;

- no nível de conclusão do ensino médio, para os maiores de dezoito anos.

Os conhecimentos e habilidades adquiridos pelos educandos por meios informais serão aferidos e reconhecidos mediante exames.

1.2 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente.

Ao se estabelecer um primeiro conjunto de parâmetros para a organização do ensino de Matemática no Ensino Médio, pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional. Em um mundo onde necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.

A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de urna visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno.

Nesse sentido, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de idéias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a *probabilidade na compreesão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações.*

Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

A essas concepções da Matemática no Ensino Médio se junta a idéia de que, no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade.

Por fim, cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Sem dúvida, cabe a todas as áreas do Ensino Médio auxiliar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento.

É preciso ainda uma rápida reflexão sobre a relação entre Matemática e tecnologia. Embora seja comum, quando nos referimos às tecnologias ligadas à Matemática, tomarmos por base a informática e o uso de calculadoras, estes instrumentos, não obstante sua importância, de maneira alguma constituem o centro *da questão.*

O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidadedo surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamenrte ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional.

O trabalho ganha então uma nova exigência, que é a de aprender continuamente em um processo não mais solitário. O indivíduo, imerso em um mar de informações, se liga a outras pessoas, que, juntas, complementar-se-ão em um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão de conhecimentos.

Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento.

Para isso, habilidades como selecionar analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemáticos que devem ser desenvolvidos ao longo do Ensino Médio, bem como a capacidade de avaliar limites, possibilidades e adequação das tecnologias em diferentes situações.

Assim, as funções da Matemática descritas anteriormente e a presença da tecnologia nos permitem afirmar que aprender Matemática no Ensino médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um *saber pensar matemático.*

Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento.

Feitas as considerações sobre a importância da Matemática no Ensino Médio, devemos agora estabelecer os objetivos para que o ensino dessa disciplina possa resultar em aprendizagem real e significativa para os alunos.

As finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:

- *compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;*
- *aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;*
- *analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;*
- *desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;*
- *utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;*

- *expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;*
- *estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;*
- *reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;*
- *promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.*

Essencial é a atenção que devemos dar ao desenvolvimento de valores, habilidades e atitudes desses alunos em relação ao conhecimento e as relações entre colegas e professores. A preocupação com esses aspectos da formação dos indivíduos estabelece uma característica distintiva desta proposta pois zvalores, habilidades e atitudes são, a um só tempo objetivos centrais da educação e também são elas que permitem ou impossibilitam a aprendizagem, quaisquer que sejam os conteúdos e as metodologias de trabalho. Descuidar do trabalho com a formação geral do indivíduo impede o desenvolvimento do pensamento científico, pois o pano de fundo salas de aula se constitui dos preconceitos e concepções errôneas que esses alunos trazem sobre o que é aprender, sobre o significado das atividades matemáticas e a natureza da própria ciência.

Como vimos, a Matemática, integrando a área das Ciências da Natureza e Tecnologia do Ensino Médio, tem caráter instrumental mais amplo, além de sua dimensão própria, de investigação e invenção. Certamente, ela se situa como linguagem, instrumento portanto de expressão e raciocínio, estabelecendo-se também como espaço de e elaboração e compreensão de idéias que se desenvolvem em *estreita relação com o todo social e cultural, portanto ela possui também uma dimensão histórica. Por isso, o conjunto de competências e habilidades que o trabalho de Matemática deve auxiliar a desenvolver pode ser escrito tendo em vista este relacionamento com as demais áreas do saber, cada uma delas aglutinadora de área correspondente no Ensino Médio, o que consta do quadro resumo das competências e habilidades gerais da área.*

Para que essa etapa da escolaridade possa complementar a formação iniciada na escola básica e permitir o desenvolvimento das capacidades que são os objetivos do ensino de Matemática, é preciso rever e redimensionar alguns dos temas tradicionalmente ensinados.

De fato não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as idéias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade.

Também por isso, o currículo a ser elaborado deve corresponder a uma boa seleção, deve contemplar aspectos dos conteúdos e práticas que precisam ser enfatizados. Outros aspectos merecem menor ênfase e devem mesmo ser abandonados por parte dos organizadores de currículos e professores. Essa organização terá de cuidar dos conteúdos mínimos da Base Nacional Comum, assim como fazer algumas indicações sobre possíveis temas que podem compor a parte do *currículo flexível, a ser organizado cada em cada unidade escolar, podendo ser de aprofundamento ou direcionar-se para as necessidades e interesses da escola e da comunidade em que ela está inserida.*

Sem dúvida, os elementos essenciais de um núcleo comum devem compor uma série de temas ou tópicos em Matemáticas escolhidos a partir de critérios que visam ao desenvolvimento das atitudes e habilidades descritas anteriormente.

O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As seqüências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.

Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira *certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.*

Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distancias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Nesse sentido, um projeto envolvendo também a Física pode ser uma grande oportunidade de aprendizagem significativa.

O currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio-histórica que está na origem desses temas. Estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

O trabalho com números pode também permitir e os alunos se apropriem da *capacidade de estimativa, para que possam ter controle sobre a ordem de grandeza de resultados de cálculo ou medições e tratar com valores numéricos aproximados de acordo com a situação e o instrumental disponível.*

Numa outra direção, as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.

Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpetrar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências, em especial a Física.

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas.

Os conceitos matemáticos que dizem respeito a conjuntos finitos de dados ganham *também papel de destaque para as Ciências Humanas e para o cidadão comum, que se vê imerso numa enorme quantidade de informações de natureza estatística ou probabilística. No trtamento desses temas, a mídia, as calculadoras e os computadores adquirem importância natural como recursos que permitem a abordagem de problemas com daos reais e requerem habilidades de seleção e análise de informações.*

Não são suficientes metas e princípios que norteiem a seleção de temas e conceitos, mas são também essenciais escolhas de natureza metodológica e didática, para compor o par indissociável conteúdo e forma. Algumas diretrizes para se alcançar esse equilíbrio estão sintetizadas no terceiro item desse documento de área, entre elas algumas de particular importância para o aprendizado matemático.

Integrando o currículo, com o mesmo peso que os conceitos e os procedimentos, o desenvolvimento de valores e atitudes são fundamentais para que o aluno aprenda a aprender. Omitir ou descuidar do trabalho com esse aspecto da formação pode impedir a aprendizagem inclusive da própria Matemática. Dentre esses valores e atitudes, podemos destacar que ter iniciativa na busca de informações, demonstrar responsabilidade, ter confiança em suas formas de pensar, fundamentar suas idéias e argumentações são essenciais para que o aluno possa aprender, se comunicar, perceber o valor da Matemática como bem cultural de leitura e interpretação da realidade e possa estar melhor preparado para sua inserção no mundo do conhecimento e do trabalho.

1.2.2.COMPETÊNCIAS E HABILIDADES A SEREM DESENVOLVIDAS EM MATEMÁTICA

Representação e comunicação	• *Ler e interpretar textos de Matemática.* • *Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc).* • *Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas, etc) e vice-versa.* • *Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.* • *Produzir textos matemáticos adequados.* • *Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.* • *Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.*
Investigação e compreensão	• *Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, etc).* • *Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.* • *Formular hipóteses e prever resultados.* • *Selecionar estratégias de resolução de problemas.* • *Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.* • *Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.* • *Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades*

	• *Discutir idéias e produzir argumentos convincentes.*
Contextualização sócio-cultural	• *Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.* • *Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.* • *Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.* • *Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.*

A educação em geral e o ensino das Ciências da Natureza, Matemática e das Tecnologias não se estabelecem como imediata realização de definições legais ou como simples expressão de convicções teóricas. Mais do que isso, refletem também as condições políticas, sociais e econômicas de cada período e região assim como são diretamente relevantes para o desenvolvimento cultural e produtivo.As idéias dominantes ou hegemônicas em cada época sobre a educação e a ciência, seja entre os teóricos da educação, seja entre as instâncias de decisão política, raramente coincidem com a educação efetivamente praticada no sistema escolar, que reflete uma situação real nem sempre considerada, onde as condições escolares são muito distintas das idealizadas.

Por isso, na elaboração de propostas educacionais, além de se considerarem as variáveis regionais, de sentido cultural e socioeconômico, tão significativas em um país de dimensões e de contrastes sociais como o Brasil, é preciso ter clareza de que *as propostas, oficiais ou não, na melhor das hipóteses são o início de um processo de transformação, de reacomodação e de readequação. Os rumos desse processo dependem não só do mérito da proposta, que condicionará as reações a ela, mas também da história pregressa e dos meios empregados. Isto foi verdade para iniciativas anteriores e, com certeza, será verdade para a atual.*

Quando foi promulgada a LDB 4024/61, o cenário escolar era dominado pelo ensino tradicional, ainda que esforços de renovação estivessem processo. As propostas para o ensino de ciências debatidas para a confecção daquela lei orientavam-se pela necessidade de o currículo responder ao avançodo conhecimento científico e às novas concepções educacionais, deslocando o eixo da questão pedagógica, dos aspectos puramente lógicos para aspectos psicológicos, valorizando a participação ativa do aluno no processo de aprendizagem.

No período subseqüente, o Brasil buscou novos rumos para o ensino de Biologia, Física, Matemática e Química, no seguimento de linha de ação dos países centrais do chamado "bloco ocidental", que patrocinaram a produção de projetos como o BSCS – Biological Sciences Curriculum Study - para Biologia, PSSC — Physical Sciences Study Committee- para Física, Chem Study e o Chemical Bound Approach para a Química. Também nesse período surge a Matemática moderna, que aproxima o ensino básico escolar de uma particular reformulação acadêmica do conhecimento matemático, com ênfase na teoria de conjuntos e estruturas algébricas. A formação e expansão de centros de Ciências e de Matemática, em vários Estados, teve a finalidade de preparar professores para o desenvolvimento de ensino proposto nos projetos traduzidos e em produções próprias que tiveram grande influência na década seguinte.

Nesta década de 70, já se propunha uma democratização do conhecimento *científico, reconhecendo-se a importância da vivência científica não apenas para eventuais futuros cientistas, mas também para o cidadão comum, paralelamente a um crescimento da parcela da população atendida pela rede escolar. Esse crescimento, especialmente no tocante ao Ensino Médio, não foi acompanhado pela necessária formação docente, resultando assim em acentuada carência de professores qualificados, carência que só tem se agravado até a atualidade. Sem pretender subestimar a importância das discussões ocorridas naquele período para a mudança de mentalidade do professor, que começa a assimilar, mesmo que num plano teórico, novos objetivos para o ensino, é preciso saber que a aplicação efetiva dos projetos em sala de aula acabou se dando apenas em alguns estabelecimentos de ensino de grandes centros.*

Ainda nessa época, o modelo de industrialização acelerada impôs. em todo o mundo, custos sociais e ambientais altos, de forma que particularmente no Ensino Fundamental, os problemas relativos ao meio ambiente e à saúde humana começaram a estar presentes em currículos de ciências. Discutiam-se implicações políticas e sociais da produção e aplicação dos conhecimentos científicos e tecnológicos, com algum reflexo nas salas de aula. Foi nesse momento que se inaugurou a idéia de que tecnologia é integrante efetiva dos conteúdos educacionais, lado a lado com as ciências. Não se deve confundir essa idéia, contudo, com a real ou pretensa introdução, em todo o Ensino Médio, de disciplinas técnicas separadas das disciplinas científicas, como preconizado pela já mencionada Lei 5692/71, cuja perspectiva era a de formar profissionais de nível médio, e que teve resultados frustrantes.

No âmbito da pedagogia geral, naquele período, aprofundaram-se discussões sobre as relações entre educação e sociedade, determinantes para o surgimento de tendências cujo traço comum era atribuir particular importância a conteúdos *socialmente relevantes e aos processos de discussão em grupo. Na mesma época, e pouco depois, estabeleceu-se um núcleo conceitual teórico de diferentes correntes denominadas construtivistas, cujo pressuposto básico é tomar a aprendizagem como resultado da construção do conhecimento pelo aluno, processo em que se respeitam as idéias dos alunos prévias ao processo de aprendizagem.*

Esta proposta de condução do aprendizado tem sido aperfeiçoada no sentido de se levar em conta que a construção de conhecimento científico envolve valores humanos, relaciona-se com a tecnologia e, mais em geral, com toda a vida em sociedade, de se enfatizar a organicidade conceitual das teorias científicas, de se explicitar a função essencial do diálogo e da interação social na produção coletiva. Tais redirecionamentos têm sido relevantes para a educação científica e matemática e, certamente, suas idéias influenciam o presente esforço de revisão de conteúdos e métodos para a educação científica. Será preciso, além disso, procurar suprir a carência de propostas interdisciplinares para o aprendizado, que tem contribuído para uma educação científica excessivamente compartimentada, especialmente no Ensino Médio, fazendo uso, por exemplo, de instrumentos com natural interdisciplinaridade, como os modelos moleculares, os conceitos evolutivos e as leis de conservação.

Felizmente, pelo menos no plano das leis e das diretrizes, a definição para o Ensino Médio estabelecida na LDB/96, assim como seu detalhamento e encaminhamento pela Resolução CNE/98 apontam para uma revisão e uma atualização na direção correta. Vários dos artigos daquela Resolução são dedicados a orientar o aprendizado para uma maior contextualização, uma efetiva interdisciplinaridade e uma formação humana mais ampla, não só técnica, já recomendando uma maior relação entre teoria e prática no próprio processo de aprendizado.

Entre os maiores desfios para a atualização pretendida no aprendizado de Ciência e Tecnologia, no Ensino Médio, está a formação adequada de professores, a elaboração de materiais instrucionais apropriados e até mesmo a modificação do posicionamento e da estrutura da própria escola, relativamente ao aprendizado individual e coletivo e sua avaliação.

Esta afirmação pode ser feita acerca de todo aprendizado escolar de Ciências, desde a alfabetização científico-tecnológica das primeiras séries do Ensino Fundamental. O significado dessas deficiências se agrava, contudo, na escola média, etapa final da Educação Básica, nessa época caracterizada pelo ritmo vertiginoso de mudanças econômicas e aceleradas por uma revolução científico-tecnológica mal acompanhada pelo desenvolvimento na educação.

Não se deve pretender, aliás, depositar a esperança desse acompanhamento simplesmente numa exigência maior sobre a cultura científica do professor que, afinal, não deve ser pensado como detentor de todo o saber da ciência contemporânea. Vale insistir que a atualização curricular não deve significar complementação de ementas, ao se acrescentarem tópicos a uma lista de assuntos. Ao contrário, é preciso superar a visão enciclopédica do currículo, que é um obstáculo à verdadeira atualização do ensino, porque estabelece uma ordem tão artficial quanto arbitrária, em que pré-requisitos fechados proíbem o aprendizado de aspectos modernos antes de se completar o aprendizado clássico e em que aspectos "aplicados" ou tecnológicos sóteriam lugar após a ciência "pura" ter sido extensivamente dominada. Tal visão dificulta tanto a organização dos conteúdos escolares quanto a formação dos professores.

É claro que se demanda um preparo adequado dos professores de Biologia, Física, Química e Matemática, para que a modernidade de seu conhecimento não tenha *como contrapartida a superficialidade ou o empobrecimento cognitivo. Além disso, um desenvolvimento mais eficaz, científico e pedagógico exige também mudanças na própria escola, de forma a promover novas atitudes nos alunos e na comunidade. É preciso mudar convicções equivocadas, culturalmente difundidas em toda a sociedade, de que os alunos são os pacientes, de que os agentes são os professores e de que a escola estabelece simplesmente o cenário do processo de ensino. Quando o aprendizado das Ciências e da Matemática, além de promover competências como domínio de conceitos e a capacidade de utilizar fórmulas, pretende desenvolver atitudes e valores, através de atividades dos educandos, como discussões, leituras, observações, experimentações e projetos, toda a escola deve ter uma nova postura metodológica difícil de implementar, pois exige a alteração de hábitos de ensino há muito consolidados.*

Especialmente nas ciências, aprendizado ativo é, às vezes, equivocadamente confundido com algum tipo de experimentalismo puro e simples, que não é praticável nem sequer recomendável, pois a atividade deve envolver muitas outras dimensões, além da observação e das medidas, como o diálogo ou a participação em discussões coletivas e a leitura autônoma. Não basta, no entanto, que tais atividades sejam recomendadas. É preciso que elas se revelem necessárias e sejam propiciadas e viabilizadas como partes integrantes do projeto pedagógico. Isso depende da escola, não só do professor. Para Matemática, em particular, dado seu caráter de linguagem e de instrumental universal, os desvios no aprendizado influenciam muito duramente o aprendizado das demais ciências.

Pode-se perceber, por exemplo, quão significativa teria de ser a reformulação de postura pedagógica na maioria de nossas escolas para que assumissem, como parte regular da promoção da educação científico-tecnológica, a concepção e a condução *de projetos de trabalho coletivo, interdisciplinares. Entre outras coisas, a comunidade escolar deveria estar envolvida na concepção do projeto pedagógico e, em muitas situações, um apoio científico e educacional das universidades ou de outros centros formadores pode ser necessário. Por um lado, a complexidade dos temas pode tornar indispensável tal apoio; por outro, os programas de formação inicial e continuada de professores da área de Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologia, conduzidos por esses centros ou universidades, seriam mais eficazes se conduzidos em função das necessidades identificadas na prática docente.*

Nessa área, que mais tradicionalmente seria a das Ciências e da Matemática, é tão difícil promover uma nova postura didática quanto introduzir novos e mais significativos conteúdos. A simples menção de "tecnologia" ao lado da "ciencia não promove a nova postura e os novos conteúdos. Usualmente, não se costuma passar do discurso geral e abstrato, ao se conceituar tecnologia, sem mesmo se explicitar de que forma ela demanda conhecimento e, portanto, educação científica, e por que processos ela fomenta desenvolvimento científico.

Com o advento do que se denomina sociedade pós-industrial, a disseminação das tecnologias da informação nos produtos e nos serviços, a crescente complexidade dos equipamentos individuais e coletivos e a necessidade de conhecimentos cada vez mais elaborados para a vida social e produtiva, as tecnologias precisam encontrar espaço próprio no aprendizado escolar regular, de forma semelhante ao que aconteceu com as ciências, muitas décadas antes, devendo ser vistas também como processo, e não simplesmente como produto. A tecnologia no aprendizado escolar deve constituir-se também em instrumento da cidadania, para a vida social e para o trabalho. No ensino Médio, a familiarização com as modernas técnicas de edição, de uso democratizado pelos computadores pessoais, é só um exemplo das vivências *reais que é preciso garantir, ultrapassando-se assim o "discurso sobre as tecnologias" de utilidade questionável. É preciso identificar na Matemática, nas Ciências Naturais, Ciências Humana, Comunicações e nas Artes, os elementos de tecnologia que lhes são essenciais e desenvolvê-los como conteúdos vivos, como objetivos da educação e, ao mesmo tempo, como meios para tanto.*

A incorporação de tais elementos às práticas escolares, alguns imediatamente, é mais realizável do que se pode imaginar. Até por já se constituirem em objetos de consumo relativamente triviais, câmeras de vídeo e computadores estão hoje se tornando mais baratos do que microscópios e outros equipamentos experimentais convencionais, com tendência se tornarem cada vez mais acessíveis. Isso eliminará, em muito pouco tempo, os obstáculos à incorporação desses instrumentos do processo de aprendizado, seja como meio indireto, na utilização de textos e vídeos didáticos apropriados a cada momento e local, seja como meio direto e objeto de aprendizado, usado pelos alunos na produção de textos e vídeos, aprendizado prático, portanto.

O desenvolvimento de projetos, conduzidos por grupos de alunos com a supervisão de professores, pode dar oportunidade de utilização dessas e de outras tecnologias, especialmente no Ensino Médio- Isso, é claro, não ocorre espontaneamente, mas sim como uma das iniciativas integrantes do projeto pedagógico de cada unidade escolar, projeto que pode mesmo ser estimulado pelas redes educacionais. Para a elaboração de tal projeto, pode-se conceber, com vantagem,uma nucleação prévia de disciplinas de uma área, como a Matemática e Ciências da Natureza, articulando-se em seguida com as demais áreas Modificações como essas, no aprendizado, vão demandar e induzir novos conceitos de avaliação. Isso tem aspectos específicos para a área de Ciência e Tecnologia, mas *tem validade mais ampla, para todas as áreas e disciplinas. Há aspectos bastante particulares da avaliação que deverão ser tratados em cada disciplina, no contexto de suas didáticas específicas, mas há aspectos gerais que podem ser desde já enunciados. É imprópria a avaliação que só se realiza numa prova isolada, pois deve ser um processo contínuo que sirva à permanente orientação da prática docente. Como parte do processo de aprendizado, precisa incluir registros e comentários da produção coletiva e individual do conhecimento e, por isso mesmo, não deve ser um procedimento aplicado nos alunos, mas um processo que conte com a participação deles. É pobre a avaliação que se constitua em cobrança da repetição do que foi ensinado, pois deveria apresentar situações em que os alunos utilizem e vejam que realmente podem utilizar os conhecimentos, valores e habilidades que desenvolveram.*

Esses e outros recursos e instrumentos educacionais têm validade praticamente universal, ainda que se apresentem com característica e ênfases específicas, no -processo de ensino-aprendizagem das Ciências e da Matemática. Por isso, é justo que tratemos de, pelo menos, arrolar ou elencar seu conjunto, ilustrando como eles podem ser utilizados pelãs várias disciplinas.

Há características comuns, entre as várias ciências, Matemática e as tecnologias, pelo tipo de rigor pressupõem, pelo tipo de correspondência entre suas formulações e os fatos observáveis ou pelo tipo de sentido prático que freqüentemente ostentam, que é também comum parte significativa das didáticas utilizadas em seu ensino, ainda que com distintas ênfases adotadas pelas diferentes disciplinas dessa área. Em parte, isso já pode ser percebido a partir do histórico da evolução do ensino dessas disciplinas, feito há pouco, mostrando que elas viveram as mesmas fases e tendências, mais ou menos na mesma época. Se é fato que isso, de certa forma, *reflete movimentos gerais de educação, não é menos verdade que, freqüentemente, o ensino de Ciências tem estado na vanguarda desses movimentos, especialmente nos últimos cinqüenta anos.*

Sem pretender estabelecer qualquer hierarquia de prioridadea, rapidamente descreveremos alguns aspectos, conceitos ou instrumentos didáticos partilhados no ensino de todas as ciências e no da Matemática, começando por considerações sobre o papel do professor, que, conhecendo os conteúdos de sua disciplina e estando convicto da importância e da possibilidade de seu aprendizado por todos os seus alunos, é quem seleciona conteúdos instrucionais compatíveis com os objetivos definidos no projeto pedagógico; problematiza tais conteúdos, promove e media o diálogo educativo; favorece o surgimento de condições para que os alunos assumam o centro da atividade educativa, tomando-se agentes do aprendizado articula abstrato e concreto, assim como teoria e prática; cuida da contínua adequação da linguagem, com a crescente capacidade do aluno, evitando a fala e os símbolos incompreensíveis, assim como as repetições desnecessárias e desmotivantes.

O conhecimento prévio dos alunos, tema que tem mobilizado educadores, especialmente nas últimas duas décadas, é particularmente relevante para o aprendizado científico e matemático. Os alunos chegam à escola já trazendo conceitos próprios para as coisas que observam e modelos elaborados autonomamente para explicar sua realidade vivida, inclusive para os fatos de interesse científico. É importante levar em conta tais conhecimentos, no processo pedagógico, porque o efetivo diálogo pedagógico só se verifica quando há uma confrontação verdadeira de visões e opiniões: o aprendizado da ciência é um processo de transição da visão intuitiva, de senso comum ou de auto-elaboração, pela visão de caráter científico construída pelo aluno, como produto do embate de visões.

Se há unanimidade, pelo menos no plano dos conceitos entre educadores para as Ciências e a Matemática, é quanto à necessidade de se adotarem métodos de aprendizado ativo e interativo. Os alunos alcançam o aprendizado em um processo complexo, de elaboração pessoal, para o qual o professor e a escola contribuem permitindo ao aluno se comunicar, situar-se em seu grupo, debater sua compreensão, aprender a respeitar e a fazer-se respeitar; dando ao aluno oportunidade de construir modelos explicativos, linhas de argumentação e instrumentos de verificação de contradições; criando situações em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e questionar; valorizando as atividades coletivas que propiciem a discussão e a elaboração conjunta de idéias e de práticas; desenvolvendo atividades lúdicas, nos quais o aluno deve se sentir desafiado pelo jogo do conhecimento e não somente pelos outros participantes.

Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a avalidar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.

O aprendizado que tem seu ponto de partida no universo vivencial comum entre os alunos e os professores, que investiga ativamente o meio natural ou social real, ou *que faz uso do conhecimento prático de especialistas e outros profissionais, desenvolve com vantagem o aprendizado significativo criando condições para um diálogo efetivo, de caráter interdisciplinar, em oposição ao discurso do saber, prerrogativa do professor. Além disso, aproxima a escola do mundo real, entrando em contato com a realidade natural, social, cultural e produtiva, em visitas de campo, entrevistas, visitas industriais, excursões ambientais. Tal sistema de aprendizado também atribui sentido imediato ao conhecimento, fundamentando sua subseqüente ampliação de caráter abstrato.*

Para o aprendizado científico, matemático tecnológico, a experimentação, seja ela de demonstração, seja de observação e manipulação de situações e equipamentos do cotidiano do aluno e até mesmo a laboratorial. propriamente dita, é distinta daquela conduzida para a descoberta científica e é particularmente importante quando permite ao estudante diferentes e concomitantes formas de percepção qualitativa e quantitativa, de manuseio, observação, confronto, dúvida e de construção conceitual. A experimentação permite ainda ao aluno a tomada de dados significativos, com as quais possa verificar ou propor hipóteses explicativas e, preferencialmente, fazer previsões sobre outras experiências não realizadas.

As ciências e as tecnologias, assim como seu aprendizado, podem fazer uso de uma grande variedade de linguagens e recursos, de meios e formas de expressão, a exemplo dos mais tradionais, os textos e as aulas expositivas em sala de aula. Os textos nem sempre são essenciais, mas podem ser utilizadoscom vantagem, uma vez verificada sua adequação, como introdução ao estudo de um dado conteúdo, síntese do conteúdo desenvolvido ou leitura complementar. Um texto apresenta concepções filosóficas, visões de um mundo e deve-se estimular o aluno a ler além das palavras, aprender, avaliar e mesmo se contrapor ao que lê. A leitura de um texto deve ser *sempre um dos recursos e não o essencial da aula. Assim, cabe ao professor problematizar o texto e oferecer novas informações que caminhem para a compreensão do conceito pretendido.*

Quanto às aulas expositivas, é comum que sejam o único meio utilizado, ao mesmo tempo em que deixam a idéia de que correspondem a uma técnica pedagógica sempre cansativa e desinteressante. Não precisa ser assim. A aula expositiva é só um dos muitos meios e deve ser o momento do diálogo, do exercício da criatividade e do trabalho coletivo de elaboração do conhecimento. Através dessa técnica podemos, por exemplo, fornecer informações preparatórias para um debate, jogo ou outra atividade em classe, análise e interpretação dos dados coletados nos estudo do meio e laboratório.

Aulas e livros, contudo, em nenhuma hipótese resumem a enorme diversidade de recursos didáticos, meios e estratégias que podem ser utilizados no ensino das Ciências e da Matemática. O uso dessa diversidade é de fundamental importância para o aprendizado porque tabelas, gráficos, desenhos, fotos, vídeos, câmeras, computadores e outros equipamentos não são só meios. Dominar seu manuseio é também um dos objetivos do próprio ensino das Ciências, Matemática e suas Tecnologias. Determinados aspectos exigem imagens e, mais vantajosamente, imagens dinâmicas; outros necessitam de cálculos ou de tabelas de gráfico; outros podem demandar expressões analíticas, sendo sempre vantajosa a redundância de meios para garantir confiabilidade de registroe/ou reforço no aprendizado.

Outro aspecto metodológico a ser considerado,no ensino de ciências em geral, com possível destaque para a Química e a Física, diz respeito às abordagens quantitativas e às qualitativas. Deve-se iniciar o estudo sempre pelos aspectos qualitativos e só então introduzir tratamento quantitativo. Este deve ser feito de tal *maneira que os alunos percebam as relações quantitativas sem a necessidade de utilização de algoritmos. Os alunos, a partir do entendimento do assunto, poderão construir seus próprios algoritmos.*

A própria avaliação deve ser também tratada como estratégia de ensino, de promoção do aprendizado das Ciências e da Matemática. A avaliação pode assumir um caráter eminentemente formativo, favorecedor do progresso pessoal e da autonomia do aluno, integrada ao processo ensino-aprendizagem para perm itir ao aluno consciência de seu próprio caminhar em relação ao conhecimento e permitir ao professor controlar e melhorar a sua p pedagógica. Uma vez que os conteúdos de aprendizagem abrangem os domínios dos conceitos das capacidades e das atitudes, é objeto da avaliação o progresso do aluno em todos estes domínios. De comum acordo com o ensino desenvolvido, a avaliação deve dar informação sobre o conhecimento e compreensão de conceitos e procedimentos; a capacidade para aplicar conhecimentos na resolução de problemas do cotidiano; a capacidade para utilizar as linguagens das Ciências, da Matemática e suas Tecnologias para comunicar idéias; e as habilidades de pensamento como analisar, generalizar, inferir.

O aprendizado das Ciências, da Matemática e suas Tecnologias pode ser conduzido de forma a estimular a efetiva participação e responsabilidade social dos alunos, discutindo possíveis ações na realidade em que vivem, desde a difusão de conhecimento a ações de controle ambiental ou intervenções significativas no bairro ou localidade, de forma a que os alunos sintam-se de fato detentores de um saber significativo.

Os projetos coletivos são particularmente apropriados para esse propósito educacional, envolvendo turmas de alunos em projetos de produção e de difusão do conhecimento, em torno de temas amplos, como edificações e habilitação ou veículos *e transporte, ou ambiente, saneamento e poluição , ou ainda produção, distribuição e uso social da energia, temas geralmente interdisciplinares.*

A compreensão da relação entre o aprendizado científico, matemático e das tecnologias e as questões de alcance social são a um só tempo meio para o ensino e objetivo da educação. Isso pode ser desenvolvido em atividades como os projetos acima sugeridos, ou se analisando historicamente o processo de desenvolvimento das Ciências e da Matemática. Nessa medida, a história das Ciências é um importante recurso. A importância da história das Ciências e da Matemática, contudo, tem uma relevância para o aprendizado que transcende a relação social, pois ilustra também o desenvolvimento e a evolução dos conceitos a serem aprendidos.

A confluência entre os meios utilizados para o aprendizado e os objetivos pretendidos para a educação deve ser observada com especial atenção, como algo a ser cultivado no projeto pedagógico de cada escola, em todos os aspectos do processo educacional. Quando, por exemplo, são propostas atividades coletivas, de cooperação entre estudantes e de elaboração de projetos conjuntos, quer se tornar o aprendizado das Ciências e da Matemática mais eficaz, mas, ao mesmo tempo, quer se promover o aprendizado do trabalho coletivo e cooperativo, como competência humana. Aliás, são absolutamente raros os trabalhos demandados na vida real que não exijam precisamente atividades conjuntas e cooperativas.

Quando, noutro exemplo, se propõem métodos de aprendizado ativo, em que os alunos se tornem protagonistas do processo educacional, não pacientes deste se ter a certeza de que o conhecimento foi de fato apropriado pelos alunos, ou mesmo elaborado por eles. Mas também se pretende é educar para a iniciativa, pois a cidadania que se quer construir implica participação e não se realiza na passividade.

Cada um dos elementos pedagógicos da seqüência acima, que sequer tem a *pretensão de ser completa, pode ser visto como meio e fim, como processo e como produto da educação, devendo ser promovido, portanto, com o cuidado de se estar lidando com algo necessário, não como eventual expediente de que se lança mão, na falta de outro. Mesmo computadores, câmeras e outros recursos, aos quais se fez tão breve menção, devem ser percebidos como algo mais do que instrumentos do aprendizado, pois, quando for possível aprender a usálos como ferramenta de trabalho, de vida e de formação permanente, se estará complementando as metas da Educação Básica.*

Concluindo essas considerações sobre fins e meios da educação, é justo se acrescentarem alguns ingredientes freqüentemente esquecidos, quando se fala do ensino das Ciências, da Matemática e suas Tecnologias, que são o apreço pela cultura e a alegria do aprendizado. Quando a escola promove uma condição de aprendizado em que há entusiasmo nos fazeres, paixão nos desafios, cooperação entre os partícipes, ética nos procedimentos, esta construindo a cidadania em sua prática, dando as condições para a formação dos valores humanos fundamentais, que são centrais entre os objetivos da educação.

1.3 PROJETO POLÍTICO PEDAGÓGICO

1.3.1 A EJA NO CONTEXTO HISTÓRICO BRASILEIRO

Pelo fato de o Brasil manter-se por quatro séculos como colônia de exploração, criou-se culturalmente uma linha de pensamentos, de comportamentos e até mesmo de políticas que têm refletido o arraigado sistema colonial com todos os seus elementos e contextos de imposições, sobretudo o de subserviência e o de dependência européia. Os poucos movimentos e manifestações ocorridos contrários ao contexto estabelecido foram prontamente extirpados.

O nascimento do Estado Brasileiro em 1822 não dá à sociedade brasileira uma condição diferente do período anterior (época colonial), com exceção da emancipação política. Com este contexto, todo o período Imperial do Brasil ficou longe de ter um projeto social e nacional no qual a educação fosse uma das preocupações básicas, continuando solenemente a mercê e aos ditames de nações européias, logicamente diferentes do Império brasileiro pela própria diferença estabelecida entre as nações exploradoras, ou seja, Portugal e Inglaterra.

Não podemos falar dos acontecimentos históricos do Brasil, do início do século XX, sem fazermos uma análise conjuntural elencando fatos e acontecimentos políticos, sociais e econômicos que vão sendo responsáveis pela estrutura que abrange a primeira República Brasileira:

- disputas políticas entre cafeicultores e militares;
- formação das oligarquias mineira / gaúcha;
- economicamente, dependência quase exclusiva da cafeicultura;
- o início do processo de industrialização provocado pelo capital advindo do café e a industria de substituição ungida pelas guerras mundiais;
- processo de urbanização provocado pelo desenvolvimento industrial;
- diversificação das relações comerciais brasileiras;
- aumento do trabalho assalariado (pela vinda dos imigrantes europeus para trabalhar na cafeicultura e o proletariado empregado nas industrias). Elencar esses fatos, relacionandos-os com a Educação de Adultos, antes do século XX, é uma análise dificílima. Primeiro, pela própria herança da política de exclusão da época colonial / imperial na qual o acesso á educação não se constituía um direito, mas

sobretudo, um privilégio. O privilégio dos homens brancos e ricos. A mesma exclusão verificada no processo político da colônia até praticamente a Iª. República, se refletia na educação, pois não havia nenhuma política de recuperação de escolaridade.

O que temos de fato são os relatos de estudiosos sobre os movimentos devidamente registrados, as ações positivas das políticas nacionais conhecidas, as legislações e os projetos específicos em várias regiões do País em prol da recuperação da escolaridade dos milhares e milhares de trabalhadores jovens e adultos.

Com o fim da Era Vargas, mesmo com toda a aspiração do retorno ao estado democrático (pois trata-se de um processo demorado), para efetivação da democracia é necessário investimento na educação, investimento que garanta acesso à escola e nela permanência, da população em idade escolar e paralelamente desenvolver um programa de recuperação de escolaridade para uma população de jovens e adultos que se encontre sem a devida escolaridade, e, grande percentual dela mergulhada no analfabetismo, situação vergonhosa para qualquer democracia que se queira estabelecer.

Podemos citar como fatos importantes desse período: em 1945, o Plano Geral de Ensino Supletivo, em 1947, a instituição dos Serviços de Educação de Adultos e ressaltamos também a atuação desenvolvida pelo educador Lourenço Filho. Surgem as grandes campanhas como também as primeiras reflexões sobre o aprendizado do aluno adulto, como as reflexões da Ação Alfabetizadora de Inspiração de Paulo Freire frustrada pela ditadura militar. O Mobral, como ação de continuidade até o final da ditadura militar, com seus defensores e também seus ferrenhos críticos.

A Educação de Jovens e Adultos do período da ditadura militar foi estabelecida pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional / Lei nº 5692/72 e o Parecer nº

699/72 do Professor Valnir Chagas: Juntos estabeleceram a preocupação com o suprimento e a suplência da escolaridade de adultos excluídos, fazendo, como alternativa, a criação dos Centros de Estudos Supletivos com o uso do método modularizado. Surge também a preocupação com a capacitação de professores para atuarem na educação supletiva. Em 1976, por meio de um convênio entre MEC/ DSU/ CETEB, teve lugar a preparação dos professores pelo Curso de Capacitação de Recursos Humanos feito à distância abrangendo todos os Estados da Federação, proporcionando o início da metodologia da educação modularizada.

Com o processo de redemocratização e com a Constituição de 1988, passamos por uma década de reordenamento do Estado Brasileiro. Esta nova ordem afetou diretamente o Brasil. Principalmente a partir da abertura econômica, o Brasil sente o peso da globalização, da economia competitiva e, portanto se depara com o problema do capital humano de suas empresas, que está em situação muito diferente da dos trabalhadores do mundo globalizado.

Os últimos cinqüenta anos foram marcados por um acelerado crescimento da população econômica.

Essa produção econômica centrou-se num desenvolvimento tecnológico bastante significativo que estabeleceu uma nova ordem social. Esta ordem social estava estabelecida nos centros urbanos e numa sociedade de consumo, portanto explosão produtiva, urbana e consumista. Esta situação não demorou muito para deixar evidente suas mazelas, tais como a ampliação das diferenças sociais provocando a população que tinha acesso aos bens produzidos, com valor tecnológico agregado, que, muitas vezes pertencente à cadeia produtiva, não tinha acesso aos bens de consumo que produzia, além da degradação do meio ambiente. Politicamente, as sociedades produtivas de bens de consumo com auto-valor agregado também já tinham estabelecido sua forma de democracia e estruturado o poder em Estados organizados. Nestas sociedades, os movimentos sociais também tiveram mudanças de enfoque. Não estavam mais centradas na luta pela organização da democracia, mas, sobretudo, para o alcance delas. Organizavam lutas em favor de minorias, da defesa dos direitos humanos; do meio ambiente; e das liberdades principalmente, a sexual das mulheres e de expressão além de outras.

Chegado ao final do Século, o resultado mas significativo era o estabelecimento da terceira revolução industrial, caracterizada pela incorporação da tecnologia ao cotidiano, ao acesso, dada vez mais efetivo dos bens de consumo e, sobretudo aos sistemas de comunicação. Com o avanço da eletrônica e da informática e como novos paradigmas de mercado, o poder tecnológico transformou-se em mundo sem fronteiras para o "consumismo padrão", criado para satisfazer as necessidades de riqueza dos países produtivos.

Sabiamente o Brasil não passou a todos os brasileiros os avanços tecnológicos externos. E como dispõe de um vasto território e de um contingente humano considerável, além de um insipiente, mas promissor parque industrial, mesmo que carente de tecnologias, o empresariado brasileiro, sem competitividade viu-se incapaz de enfrentar a mundialização produtiva.

É neste contexto que a Educação de Jovens e Adultos deve ser encarada sendo exigida uma crescente competência laboral dos trabalhadores.

1.3.2. A EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS NO CONTEXTO DAS REFORMAS EDUCATIVAS E SUAS ESTRUTURAS LEGAIS

Para iniciarmos algumas reflexões sobre Educação de Jovens e Adultos no contexto das reformas educativas da década de 90, temos que estabelecer a conjuntura em que se verificam essas reformas. Para falarmos nas reformas ocorridas na educação brasileira, vamos contextualizá-las, resgatando pontos essenciais do processo de redemocratização do Estado Brasileiro.

Os acontecimentos sociais, políticos e econômicos, que caracterizam o cenário internacional nas décadas anteriores à da redemocratização brasileira ocorrida entre 70 e 80, é que vão dar o "tom" das reformas no Brasil. É esta conjuntura internacional que provoca as mudanças nas estruturas do Estado brasileiro culminado com o fim do grande período da ditadura militar e com o fim deste processo que abrange a estrutura econômica e a estrutura educacional.

Havia o consenso nacional de que o processo de redemocratização do País somente se consolidaria com a remoção do "entulho autoritário", base da estrutura anterior. Fica evidente na educação que todo o aparato de reprodução do poder autoritário também se fez presente. A ditadura militar deixou marcas na educação nacional com a inclusão de disciplinas próprias para a reprodução do modelo de governo, OSPB (Organização Social e Política Brasileira), EMC(Educação Moral e Cívica), a perda da entidade de História e Geografia, para um processo aligeirado de estudos sociais, controles na gestão do conhecimento com supervisão e orientação escolar como veículos de controle do trabalho docente.

A direção das instituições passou a ser cargo de confiança do poder estabelecido, não para um conhecimento autônomo e pluralizando, mas para controle dos discursos e da ação pedagógica. Era assim supervisionalmente posta a administração escolar no período da ditadura militar. E a educação de jovens e adultos não incidia em políticas públicas de responsabilidade de governo e de direito do cidadão, mas era tida como um mal necessário no contexto educacional.

A luta pelo restabelecimento da ordem democrática exigiu a reformulação do aparato legal existente. Uma nova construção que restabelecesse a plenitude do estado democrático de direito para nação brasileira era imprescindível. Para que se iniciasse o estabelecimento democrático, com eleições diretas e um Congresso Constituinte legítimo, as manifestações populares, juntamente com a intelectualidade, foram decisivas. Medidas tomadas entre 1984 a 1988 foram imprescindíveis para que o sonho do estado democrático de direito fosse restabelecido para o povo brasileiro. E a conquista deste Estado brasileiro passou pela responsabilidade de inclusão dos brasileiros até então excluídos da educação e seu direito à educação reconhecido como dever do Estado.

A remoção da legislação autoritária, o restabelecimento das eleições diretas para Presidente da República, nas capitais e áreas de segurança nacional, o voto para analfabetos, a suspensão das cassações dos sindicatos e a legalização dos partidos clandestinos foram os primeiros passos. Contudo não se conseguiu avançar além disto. As eleições de 1986 constituiriam o passo decisivo, e o Congresso eleito recebeu o poder constituinte que efetivava a Constituição de novo aparato legal. Reunida pela primeira vez em fevereiro de 1987 a Assembléia Constituinte encerrou seus trabalhos em outubro de 1988 entregando à sociedade brasileira a Constituição de 1988.

A Constituição de 1988 tornou-se o ponto de partida para as reformas que viriam. A nova identidade da democracia brasileira seria aos poucos construída a partir do que ficou estabelecido por este marco legal e se iniciou a grande caminhada na construção do Brasil como um Estado Democrático de Direito, que mesmo hoje, mais de uma década depois de promulgada esta Constituição, está muito longe de ser alcançado, e muito entulho autoritário ainda está presente em vários setores; a educação não está fora deste contexto. Em nenhuma outra Constituição do Brasil, o direito à educação ficou restrito ao entendimento da infância e da adolescência, mas a educação como direito de cidadania em qualquer tempo e em qualquer idade.

Para analisarmos a EJA como direito de cidadania, temos que ter claros os princípios estabelecidos para o Estado Brasileiro, no Art. 1º da Constituição de 1988:

Art. 1º A República Federativa do Brasil, formada pela união indissolúvel dos Estados e Municípios e do Distrito Federal, constitui-se em Estado Democrático de Direito e tem como fundamentos:

I – a sabedoria;

II – a cidadania;

III – a dignidade da pessoa humana;

IV – os valores sociais do trabalho e da livre iniciativa;

V – o pluralismo político.

Parágrafo único. Todo poder emana do povo, que o exerce por meio de representantes eleitos ou diretamente, nos termos desta Constituição.

Se analisarmos o nosso compromisso como cidadãos, em relação à conquista desse "Estado Democrático de Direito" e seus fundamentos para todos os brasileiros, sem qualquer tipo de exclusão, vemos que ele já seria por si só um grande caminho, um grande desafio para qualquer brasileiro lúcido. Juntando ao compromisso de "ser" político o compromisso do educador, o caminho da gestão está mapeado; a direção para as reformas está indicada e as nossas ações já começam a ser delineadas.

Neste ponto temos de fazer referência a distintos conceitos, que levam ao entendimento do Art. 1º da Constituição de 1988, já citada.

Quando falamos de Estado estamos nos referindo à nação politicamente organizada, ou seja, ao conjunto de organismos políticos e administrativos de um país, que sejam de direito público.

Vejamos: é comum às pessoas confundirem Estado com Governo ou, ainda, com estado geográfico, e além disto, não reconhecerem as nossas escolas como instituição de direito público, obrigatoriamente pertencentes ao cidadão, que têm o direito de reivindicar serviços de qualidade, sobretudo com eqüidade e que os adultos têm como reivindicar acesso a essa instituição, que deve obrigatoriamente atendê-los com os mesmos princípios.

A cidadania é a qualidade que o cidadão tem de exercer seus direitos políticos-sociais. Estes lhe permitem fruir dos bens comuns gerados pela sociedade e intervir na produção e distribuição destes bens. E nos deveres, contrapartida do cidadão para com a sociedade.

O entendimento correto desses conceitos leva à percepção da diferença entre aqueles que querem um Estado para todos e os que se utilizam da estrutura do Estado em proveito próprio.

Para fazer referência às reformas educativas como geradoras de transformação e de mudança no paradigma até então estabelecido, é necessário ter bastante claro que o Estado que queremos é um Estado democrático, transparente, voltado para os interesses da maioria, sem exclusão das minorias. E que, a nós, educadores, não interessa nem o Estado monstruoso, que ocupa todos os espaços, como o que a ditadura militar criou, nem, muito menos, o Estado mínimo, que não se preocupa com as questões sociais, como querem os neoliberais. Somos muito conscientes de que a democratização do Estado depende mais de nossa ação do que das boas intenções dos governantes. Não defendemos o Estado mínimo, mas defendemos um Estado com compromisso com o bem comum, e este de conformidade com o cumprimento dos direitos constitucionais estabelecidos no art 5º da Constituição de 1988. Um Estado organizado e governado para cumprir o objetivo constitucionalmente estabelecido para a República Federativa do Brasil, ou seja, capaz de:

1. construir uma sociedade livre, justa e solidária;

2. garantir o desenvolvimento nacional;

3. erradicar a pobreza e a marginalização e reduzir as desigualdades sociais regionais;

4. promover o bem de todos, sem preconceitos de origem, raça, sexo, cor idade e qualquer outra forma de discriminação.

É a sociedade civil organizada que faz as coisas acontecerem. E nós, como instituição de ensino, temos obrigação de educar com esta finalidade, dando-lhe o instrumental necessário.

Historicamente, o Estado brasileiro sempre contou com grupos em luta para acabar com os privilégios de determinados setores e para garantir os princípios, os direitos individuais e coletivos, transformando o Estado em gestor dos bens sociais em benefício do bem comum.

Se em relação ao compromisso exigido de nós, como cidadão, a nós, educadores, e a nós, profissionais da educação financiada com recursos dos próprios trabalhadores e da iniciativa privada na conquista do estado democrático de direito para todos os brasileiros, este Estado Democrático em si já é um desafio e a conquista de um sistema educacional com gestão democrática – tanto no gerenciamento do processo quanto na gestão do conhecimento – torna-se um desafio ainda maior.

Os artigos 205 e 206 da Constituição estabelecem os princípios norteadores da Educação Nacional:

Artigo 205: A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando o pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e a sua qualificação para o trabalho.

Artigo 206: O ensino será ministrado com base nos seguintes princípios:

I – igualdade de condições para acesso e permanência na escola;

II – liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar pensamento, a arte e o saber;

III – pluralismo de idéias e de concepção pedagógica, e coexistência de instituições públicas e privadas de ensino;

IV – gratuidade do ensino público em estabelecimentos oficiais;

V – valorização dos profissionais do ensino, garantindo, na forma da lei, plano de carreira para magistério público, com piso salarial profissional e ingresso exclusivamente por concurso público, de provas e títulos, assegurando regime jurídico único para todas as instituições mantidas pela União;

VI – gestão democrática do ensino público, na forma da lei;

VII – garantia de padrão de qualidade.

Se analisarmos os princípios sob ótica de conduzir o processo educativo e a gestão do conhecimento, eles já estão constitucionalmente entendidos. A gestão do processo será democrática se houver participação da comunidade escolar, esta entendida como alunos, professores, dirigentes e pais. Assim o conhecimento será construído com pluralismo de idéias e de concepções pedagógicas. Podemos concluir que se nenhum outro documento tratasse da gestão das instituições ou norteasse o trabalho pedagógico os princípios constitucionais seriam suficientes para fundamentar uma escola de qualidade que viesse para construção de cidadãos preparados para a cidadania e para o trabalho.

O que assistimos nos anos subseqüentes à promulgação da Constituição de 1988 até a sansão da Lei 9394/96, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, e a regulamentação posterior a elas, são momentos de muitas e muitas discussões sobre o significado dos princípios democráticos de gestão, sobre a qualidade, sobre a eqüidade, sobre a permanência e sobre as reformas educativas. Mas tanto no campo interno como no campo externo, a educação brasileira estava reprovada. A conferência de Jotien (na Tailândia) em 1990 deixou evidentes a fragilidade da educação brasileira e a enorme dívida social que os governos acumulam. A educação nacional demonstrou-se insuficiente para alcançar todos e pouco eficiente na qualidade do que ministrava, aceitando que um grande número de pessoas que, mesmo freqüentando escolas, não demonstrava habilidades e competência em relação ao conhecimento que deveriam adquirir ou ter.

É necessário incluir neste contexto o flagrante fracasso brasileiro para com sua população adulta e a grande dívida social acumulada.

É necessário reconhecer que o grande avanço da LDB – Lei nº 9394/96 é não tratar o EJA como educação supletiva, mas tratá-la como modalidade com identidade própria para atender jovens e adultos,que, tendo direito de acesso à educação básica não foram atendidos em idade apropriada.

Art. 5º Os componentes curriculares conseqüentes ao modelo próprio da educação de jovens e adultos e expresso nas propostas pedagógicas das unidades educacionais obedecerão aos princípios, aos objetivos e às diretrizes curriculares tais como formulados no parecer CEB nº 11/00 que acompanha a presente resolução, nos *pareceres CEB nº 04/98, CEB nº 15/98 e CEB nº 16/99, suas respectivas resoluções e as orientações próprias dos sistemas de ensino.*

§ único: Como modalidade destas etapas da Educação Básica, a identidade própria da Educação de Jovens e Adultos considerará as situações, os perfis dos estudantes, as faixas etárias e se pautará pelos princípios de eqüidade, diferente e proporcionalidade na aprovação e contextualização das diretrizes curriculares nacionais e na proposição de um modelo pedagógico próprio, de modo a assegurar:

I. quanto à eqüidade, a distribuição dos componentes curriculares a fim de propiciar um patamar igualitário de formação e restabelecer a igualdade de direitos e de oportunidades face ao diretor à educação;

II. quanto à diferença, a identificação e o reconhecimento da alteridade própria e inseparável dos jovens e dos adultos em seu processo formativo, da valorização do mérito de cada qual e do desenvolvimento de seus conhecimentos e valores;

III. quanto à proporcionalidade, a disposição e alocação adequados dos componentes curriculares face às necessidades próprias da EJA com espaços e tempos nos quais as práticas pedagógicas assegurem aos seus estudantes identidade formativa comum aos demais participantes da escolarização básica.

Essas bases legais levantadas e devidamente analisadas pelo relato, e que vão dar uma unidade a EJA em todo o território nacional, são marcos legais que estabelecem pólos comuns sem portanto servirem de impedimentos para que traga, nos sistemas, as demandas localizadas com mais eficiência e mais rapidez.

No parecer (CEB nº 11/2000 do professor Jamil Cury) temos que destacar as questões das funções de responsabilidade da EJA:

Função reparadora: a reparação do direito negado para jovens e adultos que foram historicamente desalojados do acesso e/ou não conseguiam a permanência no processo educativo, na idade apropriada.

Trabalhar a educação como um direito positivo que deve ser garantido pelo Estado, não a tratando apenas como direito estabelecido constitucionalmente, mas até mesmo como direito natural, socialmente indispensável, instrumento para a convivência social, numa sociedade letrada.

"A EJA necessita ser pensada como um modelo pedagógico próprio a fim de criar situações pedagógicas e satisfazer necessidade de aprendizagem de jovens e adultos".

Função equalizadora: corrigir distorções no processo regular da oferta. Trata daqueles que, por motivo vários, não conseguiram permanecer no processo de ensino até conseguir a formação mínima, que é a Educação Básica. Dar oportunidade de concluir, o processo interrompido, o meio é a modalidade de EJA.

O domínio dos conhecimentos da Educação Básica, além de direito do indivíduo, é dever do Estado e sobretudo pré-condição para inserção econômica social e política exigida do individuo no entorno social em que está inserido.

Função qualificadora: Essa função está intimamente ligada ao mundo do trabalho, este ligado diretamente às competências requeridas do profissional pelas empresas. É quando se afirma que para adquirir as competências profissionais (o "fazer" próprio de um professor) se requer competência específica. Por exemplo: do profissional de eletricidade – domínio das competências do técnico de eletricidade, e/ou de mecânica, e/ou de tecelagem, e/ou de construção,... entendo ser função qualificadora a aquisição das habilidades básicas que sustentem a aquisição das competências específicas. Para a aquisição do domínio da competência específica de eletricidade/eletrônica, o mecânico precisa dominar a física, a química, a matemática assim como nenhum desses conhecimentos fica a parte do domínio da escrita (ou dos sistemasde códigos de linguagem). É neste contexto que entendo se processar a função qualificadora, como uma ação de educação continuada, na qual o compromisso maior não se dá pela certificação, mas pelo retorno e ou por uma aquisição das competências e habilidades básicas para a profissionalização. Como já tratamos a respeito das atividades anteriores a EJA, a função qualificadora tem o compromisso de desenvolver o ensino contextualizado da educação e educação para o trabalho, na qual os agentes envolvidos no processo de ensino estejam voltados para o mundo do trabalho, que descarta completamente aquele “saber da escola” para um saber que dê ao indivíduo o instrumento, as competências básicas que lhe dêem suporte, que lhe dêem instrumental para a aquisição das competências específicas.

Neste ponto, a EJA tem que fugir dos modelos engessados e distantes do mundo do trabalho. A função qualificadora da EJA é a oportunidade de realmente ousar com rompimento dos fazeres formais e propor realmente um modelo de educação contínua no qual o conhecimento científico elaborado leve a um processo de transformação.

Em consonância com os indicativos da L.D.B., lei nº 9394/96, e os documentos assinados pelo Brasil, como compromisso assumido internacionalmente, segue que:

● reconhece o Direito à educação como um direito de todos, independe da faixa etária em que o indivíduo se encontre;

● reconhece o dever do Estado na disponibilização dessa modalidade em todos os entes federativos;

● atribui aos sistemas de ensino a autonomia para a regularização de cursos e exames;

● reconhece que EJA é uma modalidade específica de Educação Básica em nível Fundamental e Médio que pode ser certificado e reconhecido em cursos e ou exames supletivos;

● que os cursos podem ter modelos pedagógicos próprios, desde que cumpram os quesitos estabelecidos pelos pareceres e parâmetros estabelecidos para educação básica e devidamente reconhecidos pelos conselhos estaduais e municipais quando for o caso;

● estabelece que o art 208 da Constituição já outorga aos municípios o estabelecer sua lei e organizar os gastos com erradicação do analfabetismo nos percentuais aplicados à educação;

● reconhece à abertura do EJA de utilizar-se do aproveitamento de estudos já adquiridos por seus integrantes;

● estabelece a preocupação com a idade própria de EJA, para que esta não se torne meio de aligeirar a escolarização, estabelecida a obrigatoriedade de respeito à educação infantil e juvenil;

● não reconhece a maioridade política adquirida por meios de emancipação por ato civil válido como razão para ingresso na EJA;

● reconhece a necessidade de reconhecimento e de regulamentação dos cursos de EJA e ou Supletivo, feitos fora do país.

Convém lembrar que durante todo o parecer na resolução nº 001/05 de julho de 2000 foi estabelecido que a EJA, como um todo, está comprometida com o conhecimento científico nos parâmetros curriculares nacionais para a Educação Básica nos níveis fundamental e médio. Aqui já está determinado o primeiro compromisso docente do EJA. O segundo é reconhecer todo o processo histórico de exclusão do processo educativo de grande parte do trabalhador brasileiro. O Estado tem para com este trabalhador uma grande dívida social, por não lhe ter dado acesso e/ou não lhe ter garantido a permanência na escola em idade própria. Mas esse docente capacitado a trabalhar com EJA deve ainda assumir outro grande compromisso, que é o de reelaborar conhecimentos de pedagogia para andragogia, ou seja, o aprender do adulto.

1.3.3. CONCEPÇÃO DE EJA

Para o educador, a educação implica na modificação constante dos referenciais existentes. Por isto é difícil estabelecer atitude rígida para o ato de aprender, porque, ao serem modificados os referenciais do educador, vão se modificando, também, os do aluno.

O professor só poderá tornar flexível sua prática, se no processo de sua formação tiverem sido trabalhados os referenciais teóricos- metodológicos que lhe possibilitem essa flexibilidade.

É importante também compreender que a educação é um processo dependentemente do contexto social. É ela a base material para a formação do capital humano e corresponde aos interesses e as relações que ela estabelece em seu desenvolvimento como processo de reprodução social.

É bem verdade que a educação não se processa igualmente para todas as classes sociais no que se refere a informações, referenciais e conteúdos a serem trabalhados, como também a metodologias de trabalho, conhecimentos, meios e tecnologias disponíveis aos educadores.

Não há interesse nem possibilidade de se formarem indivíduos iguais, se são diferentes em todos os seus aspectos, sejam eles os biológicos, psicológicos ou os sócio-culturais. A educação pelo saber letrado tem sido sempre privilégio de um grupo ou de uma classe que apresenta melhores condições de acesso ao conhecimento socialmente produzido, como também, às informações de qualquer espécie.

A educação e suas transformações ocorrem mediante a dinâmica do processo econômico da sociedade, que determina, então, a necessidade de educar. É um processo permanente de transformação do homem, constituindo-se em referência fundamental da organização social, visto que o ser humano é um ser em devenir, potenciando-se durante toda sua existência. Assim sendo, a educação não deve ser reduzida à transmissão escolar de conhecimentos, mas ampliada à aprendizagem aplicável às distintas situações da vida cotidiana em geral e no trabalho.

O adulto, como trabalhador, no seu contexto de vida é um indivíduo com responsabilidade social diretamente relacionada à economia, ao desenvolvimento de uma cultura mais elaborada do que a sua cultura individual, com participação político-social efetiva.

O trabalho é fator construtivo da natureza humana e é na idade adulta que se expressa com mais intensidade. O adulto é um trabalhador já anteriormente trabalhado, inserido na ação política, participante de uma realidade social na qual atua de muitas formas, inclusive liderando movimentos sociais, religiosos, comunitários e outros, necessários à sua organização social.

Portanto, mesmo não participando de um processo educativo formal, fica concretizada sua atuação na escola, dada sua participação na organização da sociedade. Estes adultos, apesar de não terem tido acesso à escola em tempo regulamentar, quase sempre são levados a se incorporar a ela pela necessidade de educar os filhos. Isto serve para reafirmar a importância da instituição escolar.

O aluno adulto não só inicia seu processo de educação sistematizada juntando a ela sua experiência social, cultural e profissional, que imprime características peculiares ao seu processo educativo como, concomitantemente, passa a ter uma atuação e profissional influenciada pela experiência escolar que, indubitavelmente, determina acréscimos e mudanças consideráveis em seu ser social e em sua atuação profissional.

Assim é possível afirmar que, no processo de aprendizagem, a relação educando-adulto/educador se diferencia, em muito, da relação educando-criança/educador, visto que o educando adulto assim como o educador, é um trabalhador, o que possibilita uma visão e uma participação social diferente da postura infantil e que influenciam sensivelmente na aquisição do seu conhecimento porque visa, inclusive, uma modificação na sua condição de trabalhador.

O conteúdo com que vamos trabalhar deve ser entendido não apenas como o conteúdo das disciplinas que constituirão a base curricular, mas também e sobretudo como fundamento do ensino-aprendizagem. Assim sendo, não se reduz aos conhecimentos transmitidos aos educandos; abrange toda sua produção, o aprendizado por parte do aluno e do educador, sua reelaboração e seu desenvolvimento.

O conteúdo é uma organização, sistematizada, sintética e retrabalhada dos conhecimentos. Culturalmente, expressa o fazer social, estabelecido e decodificado em uma linguagem acessível a professores e alunos. Daí a importância do seu domínio didático pelo professor ao ministrá-lo, para que seja compreendido pelo aluno.

O conteúdo da educação escolar não é constituído somente pelas informações contidas nas matérias disciplinares que formam o currículo, ou seja, por aquele conjunto de conhecimentos transmitidos, mas que abrange a totalidade das condições objetivas que concretamente legitimam a realização efetiva do ato pedagógico.

Assim sendo, constituem elementos fundamentais a serem considerados na abordagem educacional: o aluno, o conhecimento, o professor, os meios instrumentais e metodológicos utilizados, as instalações da escola e o contexto em que se trabalham o conteúdo e sua posterior aplicação.

O docente de EJA reconhece haver bases comuns às necessidades da sua e das outras modalidades de ensino para a formação de docentes; porém a essas bases comuns acrescenta aquelas típicas da EJA, ou seja, trabalha com aluno adulto de forma específica, buscando um modo de alcançá-lo a fim de provocar sua permanência no processo.

Neste capítulo acabamos de estudar o papel do conteúdo na educação de jovens e adultos, vimos como foi abordada a EJA na LDB, assegurando uma oportunidade aqueles que não tiveram acesso a continuidade dos estudos na idade própria, pois através da LDB os sistemas de ensino passaram a dar uma maior atenção a esses jovens, adultos e trabalhadores proporcionando-lhes a oportunidade de concluírem seus estudos.

Através do PCN podemos entender um novo jeito de ensinar Matemática, abordando os assuntos de forma a levar em conta as habilidades próprias do aluno, suas características, seu contexto social e sua inserção no mundo do conhecimento e do trabalho.

E no PPP podemos fazer toda uma recapitulação do contexto histórico brasileiro e o porque da necessidade de vermos a educação de jovens e adultos como um processo diferenciado e tão importante para a nossa sociedade.

CAPÍTULO 2

2. AVALIAÇÃO CRÍTICA DOS LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo, faremos uma avaliação crítica de alguns livros didáticos do ensino médio desde a década de 50 e de um módulo do ensino de educação de jovens e adultos, em relação ao estudo de seqüências, e mais especificamente, progressões aritméticas e geométricas. Foram analisados um livro de cada década (50,60,70,80), três livros atuais e um módulo do ensino de educação de jovens e adultos.

Apresentaremos aqui uma especificação do conteúdo e dos exercícios de cada livro. Em seguida apresentaremos uma tabela de resolução: dos principais tipos de exercícios encontrados e uma tabela da quantidade de cada tipo de exercício, em cada livro.

2.1 Livro da década de 50

<u>1) Curso de matemática – 1ª. Série – ciclo colegial – Algacyr Munhoz Maeder</u>

O livro começa direto com a definição de progressão aritmética, fala de progressão crescente e decrescente, progressão limitada e ilimitada, expressa a fórmula do termo geral e em seguida ensina a calcular o primeiro termo, a razão e o cálculo do número de termos. Depois de alguns exercícios resolvidos, fala da propriedade dos termos eqüidistantes e apresenta a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética. Após mais exercícios resolvidos, fala de interpolação aritmética, resolve alguns problemas e só então apresenta a lista de exercícios propostos. Os exercícios são muito repetitivos, quase todos são praticamente iguais, do tipo: Calcular um dos termos ou soma.

Neste livro as notações de progressões são diferentes por exemplo: a_n = l, a_1 = a , S_n = S.

Em relação às progressões geométricas ele também logo dá a definição, fala de progressão crescente e decrescente, progressão limitada e ilimitada e dá a fórmula do termo geral, ensinando a calcular o primeiro termo e a razão. Após os exercícios resolvidos apresenta a propriedade dos termos eqüidistantes, produto dos termos de uma progressão geométrica, soma dos termos de uma progressão geométrica crescente, soma dos termos de uma progressão geométrica decrescente ilimitada, geratriz de uma dízima e interpolação geométrica. No final apresenta trinta exercícios sobre estes assuntos, cinco de cada tipo destes falados acima. Listaremos a seguir os principais tipos de exercícios.

1) Dados termos, calcular um desses termos da P.A. ou P.G.

2) Calcular a diferença entre os termos da P.A. ou P.G.

3) Calcular a razão da P.A. ou P.G.

4) Calcular a soma dos termos de uma P.A. ou P.G.

5) Calcular o limite da soma dos termos da P.G.

6) Inserir meios geométricos.

7) Alguns exercícios contextualizados:

a. Quantos são os múltiplos de 7 compreendidos entre 10 e 100?

b. Calcular a soma dos números pares desde 2 até 100.

c) Calcular a soma dos números ímpares compreendidos entre 20 e 110.

d. Calcular a soma dos 50 primeiros números ímpares.

e. Calcular a soma dos múltiplos de 7 inferiores a 50.

f. Calcular a geratriz da dízima periódica 0,777...

2.2 Livro da década de 60

2) Matemática 2º. Ciclo ensino atualizado – Omar Catunda, Martha Maria de Souza Dantas, Eliana Costa Nogueira, Norma Coelho de Araújo, Eunice da Conceição Guimarães e Neide Clotilde de Pinho e Souza.

Trata-se de um volume único do segundo ciclo da década de 60. Na primeira parte do assunto introduz a noção de seqüência e em seguida dá ênfase ao estudo das progressões. Depois de abordar bastante o conteúdo “seqüências”, destaca a progressão aritmética como a seqüência mais conhecida desde o tempo dos gregos dando logo após a definição de progressão aritmética, a definição do termo geral e a fórmula da soma dos termos.Todas as fórmulas são deduzidas.

Quanto aos exercícios, primeiro traz um exercício para escrever as seqüências, depois para dar a fórmula do termo geral das seqüências, o conjunto imagem das seqüências, verificação de seqüências crescentes, decrescentes, não decrescentes e não crescentes. Nas progressões aritméticas os exercícios são para achar o termo geral e a soma a partir das seqüências dadas. Apresenta poucos exercícios sobre progressões aritméticas, trata mais do assunto seqüência, bem diferente do que é visto nos livros de hoje.

Na progressão geométrica deduz a fórmula do termo geral e a fórmula do produto dos termos e depois a fórmula da soma da progressão geométrica finita. São poucos exercícios, mas alguns envolvem demonstrações e situações do dia-a-dia. Quando aborda a progressão geométrica infinita, dá a idéia de convergência e cai no assunto de seqüências novamente, envolvendo convergência, divergência, limite de seqüências e até limites infinitos. Os exercícios sobre o assunto incluem o cálculo de limites de seqüências. Listaremos a seguir os principais tipos de exercícios.

1) Escrever as seqüências conhecendo a_1 e a_n.

2) Encontrar o termo geral de uma P.A. ou P.G.

3) Achar a soma dos termos de uma P.A. ou P.G.

4) Calcular a soma dos termos da progressão geométrica infinita:

$1+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}+\ldots$ com x > 0.

5) Determinar lim a_n nos seguintes casos:

a) $a_n = 3^n$

b) $a_n = -n^2$

c) $a_n = \frac{1-n}{n}$

d) $a_n = \frac{n^2+2}{n^2}$

6) Alguns exercícios contextualizados:

a. Dado um círculo de raio r, mostrar que a área do hexágono regular inscrito é média proporcional entre as áreas dos triângulos eqüiláteros inscritos e circunscritos.

b. Para reformar uma casa, um engenheiro apresentou o orçamento da seguinte maneira: Colocando moedas de Cr$ 0,10 em cada degrau da escada, que dá acesso ao 1º andar, de modo que no primeiro degrau seja posta uma moeda, no segundo, duas, no terceiro, quatro; e assim sucessivamente, até o último degrau, que é o vigésimo, ter-se-á o valor do orçamento. Calcular o orçamento.

2.3 Livro da década de 70

Matemática segundo grau – volume I – Damian Schor e José Guilherme Tizziotti

De todos os livros este é o que traz o assunto seqüências e progressões mais bem explicado. Começa falando detalhadamente sobre seqüências, explicando através da idéia de função. Mostra o que é o primeiro termo, o segundo, razão, etc. Depois de falar bastante em seqüências dá a definição de progressão aritmética e a fórmula do termo geral, fala de interpolação aritmética e fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética finita.

Os exercícios são poucos, todos do tipo complete.

O autor também dá vários exemplos para as progressões geométricas; explica detalhadamente, fala de interpolação geométrica, fórmula do termo geral de uma progressão geométrica finita, produto dos termos em progressão geométrica e fórmula de uma progressão geométrica infinita. Apresenta pouquíssimos exercícios propostos. Como no livro da década de 60, no final fala de séries geométricas infinitas, convergência de séries e limite de seqüências. Listaremos a seguir os principais tipos de exercícios.

1) Escrever os termos da seqüência.

2) Completar os termos das seqüências.

3) Desenvolver cada uma das séries abaixo:

a) $\sum_{a=1}^{4} 3a$

b) $\sum_{n=1}^{3} (n^2 + n) =$

c) $\sum_{n=2}^{5} 2^n - 1 =$

4) Determinar a soma S das séries abaixo:

a) $\sum_{n=1}^{3} \frac{1}{n}$ S =

b) $\sum_{p=2}^{4} p^2$ S=

c) $\sum_{i=1}^{3} i^3 - 1$ S=

5) Determinar a P.A. ou P.G. conhecidos o 1º. termo, a razão, número de termos ou último termo.

6) Completar aplicando as propriedades citadas no livro.

7) Inserir meios aritméticos ou geométricos.

8) Complete:

A série 1+2+3+4+....+n corresponde a $\sum_{1}^{n}$ ____?

9) Alguns exercícios contextualizados:

a. Complete:

A soma dos múltiplos de 7, compreendidos entre os números 10 e 90, é_____.

b. Complete:

A soma das potências de 3 compreendidas entre 2 e 500 é_____.

c. Complete:

Sendo S o limite da soma dos infinitos termos da PG (18, 6, 2, ...), temos:

S =______.

d. Complete:

A geratriz da dízima periódica 1,333 .... é?_____.

e. A quantidade de números inteiros positivos, formados por 3 algarismos, que não são múltiplos de 9 é:

( ) 900. ( ) 801.

( ) 800. ( ) 799.

2.4 Livro da década de 80

Elementos de Matemática – Scipione Di Pierro Netto,Cláudio Arconcher, Cláudio Possani e Anita San Martin

Trata-se de um livro de primeira e segunda série do Ensino Médio. Este livro é bem interessante, pois começa o assunto seqüências com uma demonstração por indução finita; em seguida traz exercícios de demonstração por indução finita. Logo após apresenta o conteúdo de seqüências reais, dá a definição de seqüência, seqüências crescentes e seqüências decrescentes e aborda cinco exercícios sobre seqüências. Depois aborda as progressões aritméticas, dando a definição, fórmula do termo geral e exercícios resolvidos. Em seguida fala de termos eqüidistantes dos extremos em uma progressão aritmética finita, soma dos termos e interpolação aritmética. Após abordar todos os assuntos, apresenta uma lista de exercícios bem variados, tendo dois de cada tipo do conteúdo citado acima, algumas demonstrações e alguns envolvendo situações do dia-a-dia.

Em relação à progressão geométrica o assunto é abordado diretamente com a definição, demonstração da fórmula do termo geral por indução finita e exemplos. Em seguida fala dos termos eqüidistantes, produto dos termos de uma progressão geométrica, soma dos termos de uma progressão geométrica e interpolação geométrica. No final traz uma lista de exercícios variados envolvendo os assuntos citados acima.

Listaremos a seguir os principais tipos de exercícios:

1) Demonstrar, por indução finita, as seguintes igualdades ($n \in \mathbb{N}^*$):

2) Verificar se as seqüências são P.A. ou P.G.

3) Achar o termo geral da P.A. ou P.G.

4) Determinar a P.A. ou P.G. conhecidos o 1º. termo, a razão, número de termos ou último termo.

5) Inserir meios aritméticos ou geométricos.

6) Achar a soma dos termos de uma P.A. ou P.G.

7) Alguns exercícios contextualizados:

a. Um relógio bate as meias horas e as horas (de um a doze); quantas pancadas dará em um dia?

b. Um corpo, quando cai no vácuo, percorre 4,9m durante o primeiro segundo de queda, e, em cada segundo, percorre 9,8m a mais do que no anterior. Calcule o percurso em 10 segundos.

c. Ao se efetuar a soma de 50 parcelas em PA, 202, 206, 210,... , por distração não foi somada a 35ª parcela. Qual foi a soma encontrada?

d. Determine a fórmula da soma dos múltiplos de 3.

e. Quantos múltiplos de 13 existem entre 100 e 1000?

f. Qual é a soma dos múltiplos (positivos) de 7, com dois, três ou quatro algarismos?

g. Uma empresa produziu, no ano de 1975, 100000 unidades de um produto. Quantas unidades produzirá no ano de 1980, se o aumento anual de produção é de 20%?

h. A população humana de um conglomerado urbano é de 10 milhões de habitantes e a de ratos é de 200 milhões. Admitindo-se que ambas as populações cresçam em progressão geométrica, de modo que a humana dobre a cada 20 anos e a de ratos dobre a cada ano, dentro de 10 anos, quantos ratos haverá por habitante?

i. Largando-se uma bola de uma altura qualquer, ela bate no chão e sobe a uma altura 2/3 da anterior; tendo-se largado inicialmente da altura h, quando terá percorrido a bola, no momento em que bater no chão pela 6ª vez?

2.5 Livro atual I

<u>Matemática ensino médio volume I- José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno</u>

O livro apresenta três volumes separados, estando o assunto seqüências no volume I, ou seja, na primeira série do ensino médio.

Na primeira parte do assunto seqüências, o autor começa com exemplos de seqüências e em seguida apresenta a definição de progressão aritmética, dando exemplos. Os exercícios são colocados numa seqüência de complexidade e são apresentados de acordo com o assunto e os exemplos dados, sempre na ordem: assunto, exemplo, exercícios.

Cada assunto é bem explorado, traz bastante exercícios de cada tipo, facilitando bastante a aprendizagem do aluno, pois segue uma ordem bem distribuída do conteúdo. O livro não possui abordagem dos aspectos históricos .

Os exercícios são bem elaborados mas alguns são repetitivos. No final de cada assunto trabalha-se com exercícios envolvendo situações do dia-a-dia. De todos os livros atuais analisados este é o mais completo, tanto no conteúdo como nos exercícios, pois no final do assunto progressão geométrica ele fala de séries , convergência, divergência, geratriz de dízimas periódicas, e ainda é o único que aborda problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas ao mesmo tempo. Listaremos a seguir os principais tipos de exercícios.

1) Escrever os termos da seqüência.

2) Verificar se as seqüências são P.A. ou P.G.

3) Determinar o termo dado da P.A. ou P.G.

4) Achar o termo geral da P.A. ou P.G.

5) Determinar a P.A. ou P.G. conhecidos o 1º. termo, a razão, número de termos ou último termo.

6) Inserir meios aritméticos ou geométricos.

7) Achar a soma dos termos de uma P.A. ou P.G.

8) Alguns exercícios contextualizados:

a. Quantos múltiplos de 7 podemos escrever com 3 algarismos ?

b. Quantos são os números naturais, menores que 98 e divisíveis por 5.

c. quantos números inteiros existem, de 1000 a 10000, que não são divisíveis nem por 5 nem por 7.

d. Ache a soma dos múltiplos de 3 compreendidos entre 50 e 300.

e. Qual é a soma dos múltiplos de 7 com dois, três ou quatro algarismos ?

f. Calcule a soma dos números inteiros positivos inferiores a 501 e que não sejam divisíveis por 7.

g. Um coronel dispõe de seu regimento num triangulo completo, colocando um homem na primeira linha, dois na segunda, três na terceira e assim por diante. Forma assim um triangulo com 171 homens. Qual é o número de linhas?

h. A população humana de um conglomerado humano é de 10 milhões de habitantes e a de ratos é de 200 milhões. Admitindo-se que ambas as populações cresçam em PG, de modo que a humana dobre a cada 20 anos e a de ratos dobre a cada ano, dentro de 10 anos quantos ratos haverá por habitante?

i. Obtenha a fração geratriz das seguintes dízimas periódicas:

a) 0,999...   b) 0,25151...

c) 0,42333...   d) 2,666...

j. (Olimpíada Matemática)

Um micróbio (de tamanho desprezível) parte da origem de um sistema de coordenadas. Inicialmente ele se desloca uma unidade e chega no ponto (1,0). Ai ele vira 90° no sentido anti-horário e anda $\frac{1}{2}$ unidade até o ponto. $(1, \frac{1}{2})$. Ele continua desta maneira, sempre descrevendo ângulos de 90° no sentido anti-horário e andando a metade da distância da vez anterior. Continuando indefinidamente, ele vai se aproximar cada vez mais de um determinado ponto. Quais são as coordenadas desse ponto?

k. Uma bola e´ lançada, na vertical, de encontro ao solo, de uma altura h. Cada vez que bate no solo, ela sobe até a metade da altura de que caiu. Determine a distância total percorrida pela bola em sua trajetória, até atingir o repouso.

2.6 Livro atual 2

Matemática 2º. Grau volume I – Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, José Carlos Teixeira, Nilson José Machado, Márcio Cintra Goulart,Luiz Roberto da Silveira Castro e Antonio dos Santos Machado.

Trata-se de um livro em três volumes e o assunto progressões é abordado na primeira série do ensino médio.

O livro começa com exemplos de sucessões, ou seqüências e em seguida traz o conceito de progressão aritmética, dando a definição e os exemplos.Logo após vêm os exercícios propostos para identificar uma progressão aritmética,. Em seguida apresenta a fórmula do termo geral da progressão aritmética. Apresenta a definição da formula da soma e dá exemplos. Na progressão geométrica faz o mesmo e apresenta fórmula da soma da progressão geométrica finita e infinita. Os exercícios são colocados em uma seqüência de complexidade como no livro atual 1 e sempre na ordem: assunto, exercícios resolvidos e exercícios propostos. Os exercícios são repetitivos, com poucos exercícios de cada tipo.

Em várias partes do livro traz um assunto envolvendo história da matemática. Listaremos a seguir os principais tipos de exercícios.

1) Escrever os termos da seqüência.

2) Verificar se as seqüências são P.A. ou P.G.

3) Determinar o termo dado da P.A. ou P.G.

4) Achar o termo geral da P.A. ou P.G.

5) Determinar a P.A. ou P.G. conhecidos o 1º. termo, a razão, número de termos ou último termo.

6) Inserir meios aritméticos ou geométricos.

7) Achar a soma dos termos de uma P.A. ou P.G.

8) Alguns exercícios contextualizados:

a. Calcule a soma dos 50 primeiros números pares positivos.

b. Mostre que a soma dos 50 primeiros números ímpares naturais é a quarta parte da soma dos 100 primeiros números ímpares naturais.

c. Calcule a soma dos múltiplos positivos de 10 que se escrevem com 3 dígitos (algarismos).

d. Determine a soma dos múltiplos de 9 compreendidos entre 1 e 100.

e. Determine a soma dos números inteiros de 1 a 100 que não são divisíveis por 9.

f. Dissolve-se certa quantidade de anilina em um litro d`água. Retira-se metade da solução e novamente dilui-se para um litro. Dessa nova solução retira-se a metade e eleva-se a um litro outra vez (diluindo). Procedendo-se da mesma forma, quantas vezes precisar, que fração da quantidade inicial de anilina haverá na 10ª solução? E numa n-ésima solução?

g. Obtenha a fração geratriz de uma das dízimas periódicas seguintes:

a) 0,777... b) 0,202020...

c) 5,333... d) 0,1777...

e) 1,9222...

h. Dado um triângulo eqüilátero de lado l , unindo os pontos médios de seus lados, forma-se um 2º triângulo. Unindo os pontos médios dos lados desse 2º triângulo, forma-se um 3º triângulo e assim sucessivamente. Calcule a soma das áreas de todos esses triângulos.

2.7 Livro atual 3

<u>Matemática – Novo Ensino médio – Carlos Alberto Marcondes dos Santos, Nelson Gentil e Sérgio Emílio Greco.</u>

É um livro de volume único das três séries do ensino médio. Começa falando de seqüências ou sucessões e em seguida de progressão aritmética. Apresenta a classificação de uma progressão aritmética, fórmula do termo geral e exercícios resolvidos envolvendo cada tipo de assunto, verificação de termos, representação de progressões aritméticas, interpolação de meios aritméticos e em seguida os exercícios propostos sobre o assunto. Os exercícios são bem variados, não são repetitivos e trabalha-se bastante exercícios envolvendo situações do dia-a-dia. Em seguida aborda as progressões geométricas, progressão geométrica finita e infinita e traz um exemplo para calcular geratriz da dízima periódica. No final do assunto apresenta exercícios de aplicações práticas, interdisciplinaridade e exercícios das provas do ENEM. Listaremos a seguir os principais tipos de exercícios.

1) Escrever os termos da seqüência.

2) Verificar se as seqüências são P.A. ou P.G.

3) Determinar o termo dado da P.A. ou P.G.

4) Achar o termo geral da P.A. ou P.G.

5) Determinar a P.A. ou P.G. conhecidos o 1º. termo, a razão, número de termos ou último termo.

6) Inserir meios aritméticos ou geométricos.

7) Achar a soma dos termos de uma P.A. ou P.G.

8) Alguns exercícios contextualizados:

a. Ache o 60º número natural ímpar.

b. Um corpo, em queda livre, percorre 4,9m durante o 1º segundo. Depois disso, em cada segundo percorre sempre 9,8m a mais do que no segundo anterior. Quantos metros o corpo percorrerá em 8 segundos?

c. Quantos múltiplos de 11 existem entre 100 e 1000?

d. Calcule a soma dos números naturais de 1 a 300.

e. Determine a soma dos cem primeiros números ímpares positivos.

f. Um professor de Educação Física, utilizando 1540 alunos, quer alinhá-lo de modo que a figura formada seja um triângulo. Se na primeira fila for colocado um aluno, na segunda 2, na terceira 3 e assim por diante, quantas filas serão formadas?

g. Em janeiro depositei R$ 100,00 no banco, em fevereiro R$ 200,00, em março R$ 300,00 e assim sucessivamente, aumentando R$ 100,00 a cada mês nos depósitos, sem falhar em nenhum deles. Quanto terei depositado após quatro anos se mantiver esse mesmo procedimento?

h. Um vazamento em um tanque de gasolina provocou a perda de 2L no 1º dia. Como o orifício responsável pelas perdas foi aumentando, no dia seguinte o vazamento foi o dobro do dia anterior. Se essa perda foi dobrado a cada dia, quantos litros de gasolina foram desperdiçados no total, após o 10º dia?

i. (FAAP-SP) É dado um quadrado de 4m de lado. Internamente, unindo-se os pontos médios dos seus lados, constrói-se um segundo quadrado e assim sucessivamente. Incluindo o quadrado de 4m de lado, calcule a soma das áreas dos vinte primeiros quadrados.

j. Determine a geratriz de cada dízima periódica:

a) 0,3333...

l. Calcule a soma da série infinita $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots$

m. Assinale a única proposição correta. A soma dos múltiplos de 10, compreendidos entre 1 e 1995, é:

a) 198000. b) 19950.

c) 199000. d) 1991010.

e) 19900.

n. Nas recentes eleições municipais realizadas numa cidade do interior do Estado, todos os eleitores votaram: candidatos A e B, ou em branco. O resultado foi: 58% votaram em A, 32% em B e os 700 eleitores restantes votaram em branco. Então, podemos afirmar que o número de eleitores que votaram no candidato A foi:

a) 4060. b) 2660. c) 5500. d) 3000. e) 5800.

2.8 Módulo do ensino de educação de jovens e adultos

<u>Matemática módulo 6 -Progressão aritmética e progressão geométrica– Cooperativa de educação catarinense .</u>

O módulo começa falando de sucessões em seguida dá exemplos.Traz algumas observações do tipo: “quando a sucessão tem o último elemento, ela é denominada de finita e quando uma sucessão não tem o último elemento ela é denominada infinita". Depois aborda o assunto progressão aritmética, fala de progressão aritmética crescente, decrescente e constante e apresenta alguns exercícios. Em seguida apresenta a fórmula do termo geral, exercícios resolvidos, exercícios propostos e a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética. Mais exercícios propostos são apresentados.

Quanto a progressão geométrica, é apresentada a definição, exercícios resolvidos e propostos e logo após a fórmula do termo geral. Como no assunto anterior, são apresentados exercícios resolvidos, exercícios propostos e a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica finita. Não aborda progressão geométrica infinita. No módulo a fonte usada é pequena e em várias partes não se consegue enxergar o que está escrito. Listaremos a seguir os principais tipos de exercícios.

1) Escrever os termos da seqüência.

2) Verificar se as seqüências são P.A. ou P.G.

3) Determinar o termo dado da P.A. ou P.G.

4) Achar o termo geral da P.A. ou P.G.

5) Determinar a P.A. ou P.G. conhecidos o 1º. termo, a razão, número de termos ou último termo.

6) Inserir meios aritméticos ou geométricos.

7) Achar a soma dos termos de uma P.A. ou P.G.

8) Não há exercícios contextualizados no módulo.

Através desta avaliação crítica, podemos ter uma idéia da forma que foi abordado o assunto de progressões da década de 50 até os dias de hoje.

O livro da década de 50 é um livro um pouco resumido, não traz exercícios variados, traz poucos exemplos e as notações são diferentes dos demais livros, abordando o assunto de forma bem resumida. Os livros da década 60, 70, 80 são livros mais complexos em relação à teoria. Explicam as definições detalhadamente e trazem bastante exercícios resolvidos. Na parte de exercícios propostos deixam a desejar, os exercícios são repetitivos, técnicos e não possuem abordagem de situações do dia a dia.

Em relação aos livros atuais o assunto é abordado de forma contrária aos antigos, estes trazem as definições resumidas, pouca teoria e alguns exercícios resolvidos. O livro atual 1 difere dos outros pois, é bem explicativo, traz bastante teoria e o assunto de progressões de forma bem completa.

Em relação aos exercícios, os atuais são repletos de exercícios propostos. Apresentam testes de vestibulares, provas do ENEM e exercícios que envolvem situações do dia a dia.

O módulo de educação de jovens e adultos traz bastante exercícios resolvidos, pois é um módulo auto didático, também traz exercícios propostos, mas não dá ênfase à teoria e também não apresenta exercícios contextualizados.

CAPÍTULO 3

PROPOSTA DE MÓDULO PARA O ENSINO DE PROGRESSÕES

Educação de Jovens e Adultos

Ensino Médio

MATEMÁTICA

Módulo 06

SUMÁRIO

SEQÜÊNCIAS
PROGRESSÃO ARITMÉTICA
PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

INTRODUÇÃO

Neste módulo estudaremos seqüências, progressão aritmética e progressão geométrica, conceitos fundamentais em Matemática.

As seqüências matemáticas e as séries infinitas são conhecidas desde a antiguidade. Em 1202 Leonardo de Pisa, também conhecido por Fibonacci, formulou o seguinte problema:

A partir de um casal de coelhos recém nascidos, quantos casais de coelhos existirão após 12 meses, supondo-se que: nenhum coelho morre, todo casal de coelhos tem um primeiro casal de filhotes com dois meses de idade e, após ter o primeiro casal de filhotes, gera um novo casal todo mês.

Esse problema célebre dá origem à seqüência de Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots, f_n \qquad (1)$$

Indicando por f_n o número de casais de coelhos no enésimo mês, vale a seguinte fórmula de recorrência: para todo $n \geq 3$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Esta seqüência é conhecida como seqüência de Fibonacci; dados os dois primeiros termos, cada termo é igual à soma dos dois termos anteriores. Fibonacci era o apelido de Leonardo de Pisa (1180 – 1250), que construiu a seqüência a partir do problema: “Um homem põe um casal de coelhos em um cercado. Quantos pares de coelhos são produzidos num ano, se a natureza desses coelhos é tal que a cada mês um casal gera um novo casal, que se torna produtivo a partir do segundo mês?” A partir do terceiro termo a seqüência dá o número de casais a cada mês.

Ou, a partir do primeiro termo, dá o número de casais jovens ao final de cada mês.Veja a tabela até o sétimo mês:

Final do	Número de casais	Número de casais jovens
1º mês	2 (1adulto e 1 jovem)	1
2º mês	3 (2 adultos e 1 jovem)	1
3º mês	5 (3 adultos e 2 jovens)	2
4º mês	8 (5 adultos e 3 jovens)	3
5º mês	13 (8 adultos e 5 jovens)	5
6º mês	21 (13 adultos e 8 jovens)	8
7º mês	34(21 adultos e 13 jovens)	13

A seqüência (1), que é conhecida como seqüência de Fibonacci, tem sido objeto de continuada atenção na literatura matemática. Podemos construir seqüências “do tipo Fibonacci”, dando valores diferentes para os dois primeiros termos, como por exemplo: (4, 4, 8, 12, 20, 32, 52, 84, 136, ...).

As progressões aritméticas e geométricas são modelos matemáticos cujas aplicações nos ajudarão a entender muitos fenômenos em diversos ramos da atividade humana.

São comuns, na vida real, grandezas que sofrem aumentos iguais em intervalos de tempos iguais. Por exemplo, a produção de uma fábrica que aumenta de 100 unidades por mês, as economias de Eduardo que crescem todo mês de 500 reais etc... Neste módulo trataremos de seqüências que representam os valores dessas grandezas, ou seja, de seqüências $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots)$ nas quais cada termo é obtido do anterior por um aumento ou diminuição constante.

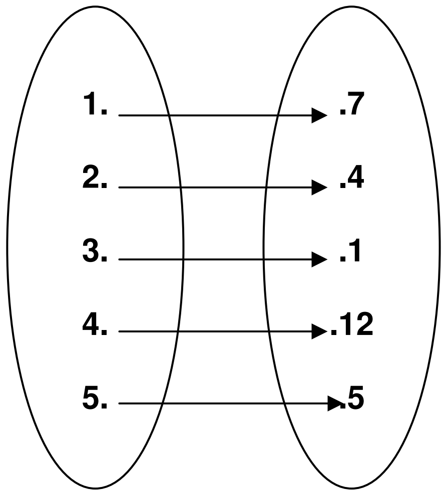
SEQÜÊNCIAS

Seqüência ou sucessão é todo conjunto onde consideramos os elementos dispostos em certa ordem.

Vejamos inicialmente dois exemplos práticos, para que você concretize a idéia de seqüência.

1º. Exemplo: Considere uma corrida de cavalos da qual participam os cavalos de número 1, 4, 5, 7 e 12. Terminada a prova, a classificação por ordem de chegada é:

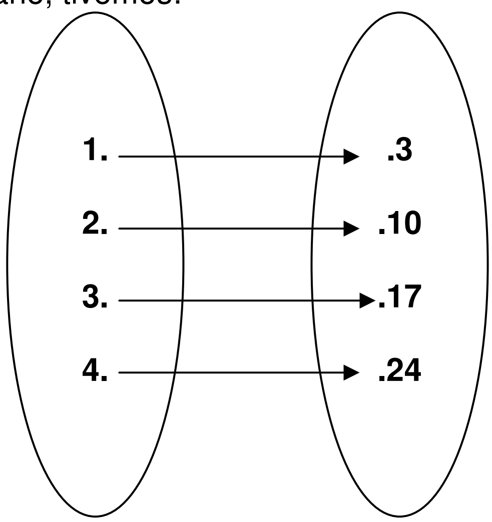
1º. Lugar → cavalo nº. 7
2º. lugar → cavalo nº. 4
3º. lugar → cavalo nº. 1
4º. lugar → cavalo nº. 12
5º. lugar → cavalo nº. 5



O grupo ordenado (7, 4, 1,12, 5) é a ***seqüência*** dos números dos cavalos na chegada.

2º. Exemplo: No mês de junho de certo ano, tivemos:

1º. Domingo → dia 3
2º. Domingo → dia 10
3º. Domingo → dia 17
4º. Domingo → dia 24



O grupo ordenado (3, 10, 17, 24) é uma seqüência dos domingos do mês de junho.

Toda seqüência é um conjunto de números dispostos numa certa ordem, isto é, você sabe qual é o primeiro, segundo, terceiro,...

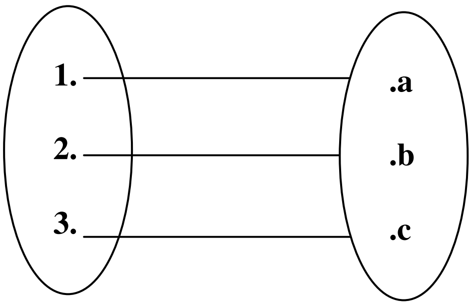
Formalmente, pode-se definir seqüência da seguinte maneira:

Seqüência é toda aplicação do conjunto dos números naturais não-nulos N* ou de um subconjunto não-vazio de N* do tipo {1, 2, 3, ...,n} no conjunto dos números reais.

Significado da definição

1. A cada número natural, a partir de 1, associa-se um único número do conjunto dos números reais. Assim, fazendo a associação:

CONJUNTO A CONJUNTO B



teremos formado a seqüência (a, b, c).

2. Os números naturais do conjunto A indicam a ordem de colocação dos termos na seqüência (conjunto B).
No exemplo dado, temos:

1º. termo é a
2º. termo é b
3º. termo é c

NOTAÇÃO

Os termos de uma seqüência são representados por uma mesma letra, à qual se associa um índice natural que indica a ordem do termo, na seqüência. Assim, temos:

$a_1 \longrightarrow$ 1º. termo

$a_2 \longrightarrow$ 2º. termo

$a_3 \longrightarrow$ 3º. termo

.
.
.

$a_n \longrightarrow$ enésimo termo ou termo de ordem *n*

A representação matemática de uma seqüência é:

$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$

Em que:

a_1 é o primeiro termo (lê-se: a índice 1)

a_2 é o segundo termo (lê-se: a índice 2)

. .
. .
. .

a_n é o enésimo termo (lê-se: a índice n)

LEI DE FORMAÇÃO

Estudaremos agora as seqüências em que os valores dos termos que se sucedem obedecem a uma certa regra ou ***lei de formação.***

Conhecendo esta lei de formação podemos determinar a seqüência.

Os termos de uma seqüência ficam determinados quando:

1. O 1º termo (a_1) é conhecido e é dada uma relação entre a_n e a_{n+1}.
2. Quando conhecemos uma fórmula onde o valor do termo é expresso em função de sua ordem (a_n em função de n).

Eventualmente, podem ocorrer outros casos.

EXEMPLOS:

1º Exemplo: Determinar os termos da seqüência em que

$\boxed{a_1 = 2}$ e $\boxed{a_{n+1} = a_n + 5}$ $\forall\ n \in N^*$

Resolução:

$a_1 = 2$

n=1 $\longrightarrow$ $a_2 = a_1 + 5 = 2 + 5 = 7$

n=2 $\longrightarrow$ $a_3 = a_2 + 5 = 7 + 5 = 12$

n=3 $\longrightarrow$ $a_4 = a_3 + 5 = 12 + 5 = 17$

....

Resposta: A seqüência é (2, 7, 12, 17, ...).

Observação: Uma fórmula do tipo $\boxed{a_{n+1} = a_n + 5}$, com $a_1 = 2$ é chamada, ***fórmula de recorrência,*** ou seja, conhecendo um termo (a_1) podemos explicitar os outros.

2º Exemplo: Determinar os termos da seqüência em que

$\boxed{a_n = 2n - 1}$, $\forall\ n \in N^*$

Resolução:

$n = 1 \longrightarrow a_1 = 2 . 1 - 1 = 1$

$n = 2 \longrightarrow a_2 = 2 . 2 - 1 = 3$

$n = 3 \longrightarrow a_3 = 2 . 3 - 1 = 5$

Resposta: A seqüência é (1, 3, 5, ...)

3º Exemplo: Sendo dada uma sucessão definida pela fórmula: $a_n = 50 + 3n$, calcular o 36º termo dessa sucessão.

Resolução:

$a_n = 50 + 3n$ (equação dada)

- para o 36º termo, o n será 36. Então:

$a_{36} = 50 + 3.36$

$a_{36} = 50 + 108 = 158$

Resposta: O 36º termo é 158.

4º Exemplo: Achar os cinco primeiros termos da seqüência dada por:

$a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n + 7$ e $n \in N^*$

Resolução:

$n = 1 \Rightarrow a_2 = a_1 + 7 = 3 + 7 = 10$

$n = 2 \Rightarrow a_3 = a_2 + 7 = 10 + 7 = 17$

$n = 3 \Rightarrow \quad a_4 = a_3 + 7 = 17 + 7 = 24$

$n = 4 \Rightarrow \quad a_5 = a_4 + 7 = 24 + 7 = 31$

Resposta: A seqüência é: (3, 10, 17, 24, 31).

Exercícios propostos:

1. Na seqüência (3, 6, 12, 15, 18, 21, 24, 27):

a) identifique os termos a_2, a_4, a_6, a_8
b) Se $a_n = 15$, qual o valor de n?

2. Na seqüência (-2, 0, 2, 4, 6, 8) determine:

a) $a_3 - a_1$
b) a soma de seus termos

3. Escreva os quatro primeiros termos da seqüência dada pelo termo geral $a_n = 3n - 1$.

4. Escreva as sucessões:

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ e $n \in N^*$

b) $a_n = 2^{n-1}$ e $n \in N^*$

5. Ache os cinco primeiros termos das seqüências dadas por:

a) $a_1 = -1$ e $a_{n+1} = a_n - 2$ e $n \in N^*$

b) $a_1 = a$ e $a_{n+1} = a^n . a$ e $n \in N^*$

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

1.. a) $a_2 = 4$, $a_4 = 12$, $a_6 = 18$, $a_8 = 24$ b) n = 5

2. a) 4 b) 18

3. (2, 5, 8, 11)

4. a) (1, 1/2, 1/3, 1/4,...)
b) (1, 2, 4, 8, 16,...)

5. a) (-1, -3, -5, -7, -9,...)
b) $(a, a^2, a^3, a^4, a^5,...)$

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Vejamos inicialmente dois exemplos práticos, para que você concretize a idéia de PROGRESSÃO ARITMÉTICA.

1º. Exemplo: Um táxi cobra R$ 3,20 pela bandeirada e R$ 0,80 por quilômetro rodado. Qual o valor de uma corrida de 8 quilômetros?

Resolução:

Observe na tabela os valores marcados no taxímetro a cada quilômetro rodado:

Tempo	**R$**	**Total a ser pago**	**Ordem**
Bandeirada	**3,20**	**------**	(a_1)
1 km	3,20 + 0,80	4,00	(a_2)
2 km	4,00 + 0,80	4,80	(a_3)
3 km	4,80 + 0,80	5,60	(a_4)
4 km	5,60 + 0,80	6,40	(a_5)
5km	6,40 + 0,80	7,20	(a_6)
6km	7,20 + 0,80	8,00	(a_7)
7km	8,00 + 0,80	8,80	(a_8)
8km	8,80 + 0,80	9,60	(a_9)

Na coluna da direita aparece uma seqüência de valores onde cada termo a partir da bandeirada de R$ 3,20 é igual ao anterior somado com R$ 0,80. O 1º.termo da seqüência é a bandeirada de R$ 3,20, a razão é o valor fixo de R$ 0,80 por quilômetro rodado e o último termo da seqüência (a_9) é o valor da corrida a ser pago. Podemos então concluir que o valor a ser pago depende da quantidade de quilômetros rodados e da bandeirada e é dado por 3,20 + 8. 0,80 = 9,60.

Uma seqüência desse tipo, onde cada termo a partir do segundo é igual ao anterior somado com um número fixo, é chamado de Progressão Aritmética (P.A.)

1. DEFINIÇÃO

Considere as seqüências:

1) (4, 10, 16, 22, 28)

Nesta seqüência , observamos que:

10 = 4 + 6
16 = 10 + 6
22 = 16 + 6
28 = 22 + 6
Dado o 1º. termo, cada termo é o anterior somado com 6.

2) (12, 7, 2, -3, -8, -13)

Nesta seqüência, observamos que:

$$\begin{aligned} 7 &= 12 + (-5) \\ 2 &= 7 + (-5) \\ -3 &= 2 + (-5) \\ -8 &= -3 + (-5) \\ -13 &= -8 + (-5) \end{aligned}$$

Analogamente, dado o 1º. termo, cada termo é o anterior somado com -5.

3) (a + 1, a + 2, a + 3)

Nesta seqüência, observamos que:

$a + 2 = a + 1 + \mathbf{1}$
$a + 3 = a + 2 + \mathbf{1}$

Dado o 1º. termo a + 1, cada termo é o anterior somado com 1.

* Em todas essas seqüências, a lei de formação é:

Cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior, somado com um número fixo.

* Toda seqüência que tiver essa lei de formação será denominada progressão aritmética que abreviaremos por P.A..

* O número fixo que somamos é chamado **razão** da progressão:

Definição: **Progressão aritmética** é uma seqüência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com um número fixo, chamado **razão** da progressão.

A representação de uma P.A é:

$(a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots a_n, a_{n+1}, \ldots)$

Logo: $\boxed{a_{n+1} = a_n + r}$ $\forall\ n \in N^*$

$$\boxed{a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_{n+1} - a_n = r}$$

Note que a diferença entre termos consecutivos é constante e igual a razão.

EXEMPLOS:

1º Exemplo: Calcular r e a_5 na P.A. (3, 9, 15, 21, ...).

Resolução:

Para conhecer a razão da P.A. fazemos a diferença entre dois termos consecutivos:

$R = a_2 – a_1 = 9 - 3 = 6$

Como conhecemos o 4º termo, fazemos:
$a_5 = a_4 + r$

$a_5 = 21 + 6$

$a_5 = 27$

Resposta: A razão (r) é 6 e o 5º termo (a_5) é 27.

2º Exemplo: Quais das seqüências abaixo constituem uma progressão aritmética?

Observação: Pela definição, devemos verificar se a diferença entre qualquer termo e o anterior é sempre igual (constante).

a) (1, 6, 11, 16, 21, 26)

Resolução:

Observemos as diferenças entre dois termos consecutivos:

$a_2 - a_1 = 6 - 1 = 5$

$a_3 - a_2 = 11 - 6 = 5$

$a_4 - a_3 = 16 - 11 = 5$

$a_5 - a_4 = 21 - 16 = 5$

$a_6 - a_5 = 26 - 21 = 5$

Como as diferenças são iguais, a seqüência é uma P.A. de razão 5.

b) (28, 26,24, 20...)

Resolução:

Observemos as diferenças entre os termos a_1, a_2, a_3, a_4:

$a_2 - a_1 = 26 – 28 = -2$

$a_3 - a_2 = 24 – 26 = -2$

$a_4 - a_3 = 20 -26 = -4$

Como as diferenças não resultam num mesmo número, a seqüência não é uma

P.A..

c) (x - y, x, x+ y)

$a_1 = x - y$
$a_2 = x$
$a_3 = x + y$

$a_2 - a_1 = x - (x - y) = x - x - y = y$

$a_3 - a_2 = x + y - x = y$

Como as diferenças são constantes, a seqüência é uma P.A..

2. CLASSIFICAÇÃO DE UMA P.A.

Uma progressão aritmética pode ser: **crescente, decrescente** ou **constante,** dependendo da razão.

Crescente: a razão é positiva e cada termo é maior que o anterior.

Exemplo: (1, 8, 15, 22, 29, 36), r = 7 > 0.

Decrescente: a razão é negativa e cada termo é menor que o anterior.

Exemplo: (10, 8, 6, ...), r = -2 < 0

Constante: r = 0 e todos os termos são iguais.

Exemplo: (3, 3, 3,...), r = 0.

Quanto ao número de termos, a P.A. pode ser finita ou infinita.
Finitas, por exemplo: (1, 5,9, 13) possui 4 termos.

Infinitas, por exemplo: (0, 2, 4, 6, 8, ...) possui uma infinidade de termos.

3. FÓRMULA DO TERMO GERAL DE UMA P.A.

Neste item apresentaremos uma fórmula que permite encontrar qualquer termo de uma progressão aritmética sem precisar escrevê-la completamente. É a fórmula que relaciona o termo de ordem **n**, $\mathbf{a_n}$ com o primeiro termo, $\mathbf{a_1}$, o número de termos, **n,** e a razão **r**.

1º. termo: $a_1 = a_1$

2º. termo: $a_2 = a_1 + r$

3º. termo: $a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$

4º. termo: $a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$

.

.

.

enésimo termo: $a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-1) . r$

Portanto: $\boxed{\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) .r}}$ $\forall$ $\mathbf{n} \in \mathbf{N^*}$

$\downarrow$

Fórmula do termo geral

EXEMPLOS:

1º Exemplo: Determinar o centésimo termo a_{100} da P.A.: (2, 7, 12, ...)

Resolução:

Inicialmente vamos identificar os dados do problema:

$$\begin{cases} a_1 = 2 & \text{(primeiro termo)} \\ r = 7 - 2 = 12 - 7 = 5 & \text{(razão)} \\ n = 100 & \text{(ordem do termo que queremos)} \\ a_{100} = ? & \text{(termo que queremos encontrar)} \end{cases}$$

A fórmula do termo geral relaciona a_n, a_1, r e n. Conhecendo a_1, r e n, vamos determinar a_n.

Logo: $a_n = a_1 + (n - 1).r$ (Aplicando a fórmula do termo geral)

$a_{100} = 2 + (100 - 1).5$ (Substituindo os dados)

$a_{100} = a_1 + 99 . 5$ (Efetuando a operação entre parênteses)

$a_{100} = 2 + 495$ (Efetuando a multiplicação)

$a_{100} = 497$ (Efetuando a adição)

Resposta: O centésimo termo é 497.

2º Exemplo: Numa P.A. o vigésimo termo é 157 e o primeiro termo é 5. Qual é a razão dessa P.A.?

Resolução:

Inicialmente vamos identificar os dados do problema:

$$\begin{cases} a_1 = 5 & \text{(primeiro termo)} \\ r = ? & \text{(queremos encontrar a razão)} \\ n = 20 & \text{(ordem do termo conhecido)} \\ a_{20} = 157 & \text{(último termo)} \end{cases}$$

A fórmula do termo geral relaciona a_n, a_1, r e n. Conhecendo a_1, a_n e n, vamos determinar a razão.

Logo: Logo: $a_n = a_1 + (n - 1).r$ (Aplicando a fórmula do termo geral)

$a_{20} = 5 + (20 - 1).r$ (Substituindo os dados)

$157 = 5 + 19 . r$ (Efetuando a operação entre parênteses)

$157 - 5 = 19r$ (Resolvendo a equação do 1º.grau)

Observe que a expressão acima é uma equação do 1º.grau cuja incógnita é r. Resolvendo esta equação, encontraremos a razão r:

$$152 = 19r$$

$$\frac{152}{19} = r$$

$$r = 8$$

Resposta: A razão é 8.

3º Exemplo: Determinar o número de termos da P.A. (-3, 1, 5, ..., 113).

Resolução:

Inicialmente vamos identificar os dados do problema:

$$\begin{cases} a_1 = -3 & \text{(primeiro termo)} \\ r = 1 -(-3) = 1+ 3= 4 & \text{(razão)} \\ n = ? & \text{(queremos encontrar o número de termos)} \\ a_n = 113 & \text{(último termo)} \end{cases}$$

A fórmula do termo geral relaciona a_n, a_1, r e n. Conhecendo a_1, r e a_n, vamos determinar o número de termos.

Logo: $a_n = a_1 + (n - 1).r$ (Aplicando a fórmula do termo geral)

$a_n = -3 + (n - 1).4$ (Substituindo os dados)

$113 = -3 + 4n - 4$ (Efetuando a operação entre parênteses)

$113 = -7 + 4n$ (Efetuando a soma de números inteiros)

$113 + 7 = + 4n$ (Resolvendo a equação do 1º.grau)

Observe que a expressão acima é uma equação do 1º.grau cuja incógnita é n. Resolvendo esta equação, encontraremos n:

$120 = + 4n$

$$\frac{120}{4} = n$$

$n = 30$

Resposta: O número de termos é 30.

4º Exemplo: Determinar o primeiro termo da P.A. sabendo que o décimo termo é igual a 51 e a razão é igual a 5.

Resolução:

Inicialmente vamos identificar os dados do problema:

$$\begin{cases} a_1 = ? & \text{(queremos encontrar o primeiro termo)} \\ r = 5 & \text{(razão)} \\ n = 10 & \text{(ordem do termo conhecido)} \\ a_{10} = 51 & \text{(último termo)} \end{cases}$$

A fórmula do termo geral relaciona a_n, a_1, r e n. Conhecendo a_n, r e n, vamos determinar o primeiro termo.

Logo: $a_n = a_1 + (n - 1).r$ (Aplicando a fórmula do termo geral)

$a_{10} = a_1 + (10 - 1).\ 5$ (Substituindo os dados)

$51 = a_1 + 9\ .\ 5$ (Efetuando a operação entre parênteses)

$51 = a_1 + 45$ (Efetuando a multiplicação)

$51 - 45 = a_1$ (Resolvendo a equação do 1º.grau)

$6 = a_1$

Resposta: O primeiro termo é 6.

5º Exemplo: Achar o número de múltiplos de 5 compreendidos entre 21 e 623.

Resolução:

$$21, \underbrace{\underline{25}}_{a_1}, 30, ..., \underbrace{\underline{620}}_{a_n}, 623$$

* 21 e 623 não são múltiplos de 5, logo não podem ser o 1º. termo e o último termo da P.A. de múltiplos de 5. O primeiro termo múltiplo de 5 depois do 21 é 25 e o último termo antes do 623 múltiplo de 5 é 620. Então a P.A. é (25, 30, 35, ...620).

$a_n = a_1 + (n - 1) . r$ (Aplicando a fórmula do termo geral)

$620 = 25 + (n - 1) . 5$ (Substituindo os dados)

$620 = 25 + 5n - 5$ (Efetuando operação entre parênteses)

$620 - 25 + 5 = 5n$ (Resolvendo a equação do 1º. grau)

Observe que a expressão acima é uma equação do 1º. grau cuja incógnita é n.
Resolvendo esta equação, encontraremos n:

$600 = 5n$

$$n = \frac{600}{5}$$

$n = 120$

Resposta: O número de termos é 120.

6º Exemplo: Numa P.A., $a_{10} = 130$ e $a_{19} = 220$. Calcular o quarto termo da P.A.

Resolução:

$a_{10} = 130 \Rightarrow a_1 + 9r = 130$
$a_{19} = 220 \Rightarrow a_1 + 18r = 220$

r = razão

Devemos, então, resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{array}{l} a_1 + 9r = 130 \\ a_1 + 18r = 220 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -a_1 - 9r = -130 \\ \underline{a_1 + 18r = 220} \\ 0 + 9r = 90 \\ \quad\quad r = 10 \end{array} \right.$$

Se r = 10, temos:
$a_1 + 9 . 10 = 130$
$a_1 = 130 - 90$
$a_1 = 40$

Então, vamos calcular o 4º termo sendo $a_1 = 40$ e $r = 10$

$a_4 = a_1 + 3r$ $\quad\quad a_4 = 40 + 3 . 10$ $\quad\quad a_4 = 70$

Resposta: O 4º termo é 70.

OBSERVAÇÕES ÚTEIS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE P.A.

1ª OBSERVAÇÃO:

É sempre conveniente colocar os termos em função de a_1 e r, lembrando que:

$a_2 = a_1 + r$; $a_3 = a_1 + 2r$; ... ; $a_{10} = a_1 + 9r$; e assim por diante.

2ª OBSERVAÇÃO:

Quando os problemas tratam de soma ou produto de termos consecutivos de uma P.A., é conveniente escrever a P.A. em função de um termo, que indicaremos por x.
Por exemplo: sendo r a razão,

- Se a P.A. tem 3 termos, vamos indicá-los por: $(x - r, x, x + r)$.
- Se a P.A. tem 5 termos, vamos indicá-los por: $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$.
- Se a P.A. tem 4 termos, vamos indicá-los por: $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$.

1º Exemplo: Três números estão em P.A. de tal forma que sua soma é 18 e seu produto é 66. Calcular os três números.

Resolução:

Vamos indicar: $(a_1, a_2, a_3) \Rightarrow (x - r, x, x + r)$

1º. termo: $x - r$
2º. termo: x
3º. termo: $x + r$.

Podemos formar o sistema com duas variáveis (x e r):

$$\begin{cases} (x - r) + x + (x + r) = 18 \\ (x - r) . x . (x + r) = 66 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x = 18 \\ x(x^2 - r^2) = 66 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$3x = 18 \quad \Rightarrow \quad x = 6$

$6(36 - r^2) = 66 \Rightarrow \quad 36 - r^2 = 11 \Rightarrow \quad r^2 = 25 \Rightarrow \quad r = \pm 5$

Devemos considerar as 2 possibilidades: r = 5 e r = - 5.

Para r = 5 $\Rightarrow$ 1º. termo = 6 – 5 = 1
2º. termo = 6
3º. termo = 6 + 5 = 11

Para r = -5 $\Rightarrow$ 1º. termo = 6 - (- 5) = 11
2º.termo = 6
3º.termo = 6 + (- 5) = 1

Resposta: Os números pedidos são 1, 6 e 11.

2º Exemplo: Determinar o valor de x, de modo que os números $(x + 4)^2$, $(x - 1)^2$ e $(x + 2)^2$ estejam , nessa ordem em P.A.

Resolução:

$$P.A. \left(\underset{a_1}{\underset{\downarrow}{(x + 4)^2}} , \underset{a_2}{\underset{\downarrow}{(x - 1)^2}} , \underset{a_3}{\underset{\downarrow}{(x + 2)^2}} \right)$$

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \Rightarrow \quad (x - 1)^2 - (x + 4)^2 = (x + 2)^2 - (x - 1)^2$

(Resolvendo as potências)

$(x^2 -2x + 1) - (x^2 + 8x + 16) = (x^2 + 4x + 4) - (x^2 -2x + 1)$

(Eliminando os parênteses)

$x^2 - 2x + 1 - x^2 - 8x - 16 = x^2 + 4x + 4 - x^2 + 2x - 1$

(Reduzindo os termos semelhantes)

$(x^2 - x^2 - 2x - 8x +1 - 16) = (x^2 - x^2 + 4x + 2x + 4 -1)$

(Resolvendo a equação do 1º.grau)

$(0 - 10x -15) = (0 + 6x + 3)$

$- 10x - 15 = 6x + 3$

$- 16x = 18$

$16x = - 18$

$$x = \frac{-18}{16}$$

$$x = -\frac{9}{8}$$

Resposta: $x = -\frac{9}{8}$

INTERPOLAÇÃO ARITMÉTICA

Neste item vamos aprender a intercalar números reais entre dois números dados, de tal forma que todos passem a constituir uma progressão aritmética.

EXEMPLOS:

1º Exemplo: Interpolar cinco números entre 6 e 30, de modo a formar uma P.A..

Resolução:

$$\underset{\displaystyle a_1}{\underset{\downarrow}{6}},\ \_,\ \_,\ \_,\ \_,\ \_,\ \underset{\displaystyle a_n}{\underset{\downarrow}{30}}$$

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_n = 30 \\ n = 5 + 2 = 7 \end{cases}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow \begin{array}{c} 30 = 6 + 6r \\ 24 = 6r \\ r = 4 \end{array}$$

Conhecendo o primeiro termo e a razão construímos a P.A..

Resposta: (6, 10, 14, 18, 22, 26, 30).

Observação: aos números que são intercalados chamamos "meios aritméticos". Neste exemplo os meios aritméticos são 10, 14,18, 22 e 26.

PROPRIEDADES DA P.A.

P_1. Dados três números a_1, a_2, a_3, em P.A., nessa ordem, temos que a_2 é a média aritmética de a_1 e a_3, ou seja,

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \qquad \text{ou} \qquad 2a_2 = a_1 + a_3$$

Exemplo: 13, 8, 3 estão em P.A. de razão -5.

Então: $\frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{13 + 3}{2} = \frac{16}{2} = 8 = a_2$

P_2. Numa P.A. finita, a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ...$

Exemplo: Considere a P.A. finita:

(3, 5, 7, 9, 11, 3, 15, 17, 19)

termo médio

eqüidistantes

eqüidistantes

eqüidistantes

extremos

Note que:

$$\underset{22}{\underbrace{3 + 19}} = \underset{22}{\underbrace{5 + 17}} = \underset{22}{\underbrace{7 + 15}} = \underset{22}{\underbrace{9 + 13}}$$

Observe que, neste caso, a soma 22 é igual ao dobro do termo médio 11. Isto acontecerá quando a P.A. tiver um número ímpar de termos.

Pergunta-desafio: qual será a soma se a P.A. tiver um número par de termos?

FÓRMULA DA SOMA DOS N TERMOS DE UMA P.A.

Consideremos a P.A. finita (6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34) onde 6 e 34 são os extremos.

$$\left.\begin{matrix}10 \text{ e } 30\\ 14 \text{ e } 26\\ 18 \text{ e } 22\end{matrix}\right\}$$ são termos eqüidistantes dos extremos.

Verifica-se, facilmente, que:

$6 + 34 = 40 \longrightarrow$ (soma dos extremos)

$$\left.\begin{matrix}10 + 30 = 40\\ 14 + 26 = 40\\ 18 + 22 = 40\end{matrix}\right\}$$ (soma de dois termos eqüidistantes dos extremos)

Pela propriedade 2:

"Numa P.A. finita, a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos," temos:

EXEMPLOS:

1º Exemplo:

6 + 10 + 14 + 18 + 22 + 26 + 30 + 34 =

=(6 + 34) + (10 + 30) + (14 + 26) + (18 + 22) =

= 40 + 40 + 40 + 40 = 4 . 40 = 160

Observe que:

A P.A. tem 8 termos e construímos 4 "somas de extremos"; a soma total dos termos será a metade da soma total dos extremos multiplicada pelo número de termos:

$$160 = 4 \,.\, 40 = 8 \,.\, \frac{40}{2} = \underbrace{8}_{\textbf{número de termos}} \,.\, \frac{\overbrace{(6+34)}^{\textbf{soma dos extremos}}}{2}$$

Pergunta desafio:O que acontece quando a P.A. tem um número ímpar de termos?

2º Exemplo: (4, 7, 10, 13, 16, 19, 22) termos extremos: 4 e 22, 4 + 22 = 26
termos eqüidistantes: 7 e 19, 7 + 19 = 26
10 e 16, 10+ 16 = 26

termo médio: 13

4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 =
(4 + 22) + (7 + 19) + (10 + 16) + 13 =
= 26 + 26 + 26 + 13 = 91

Observemos a soma 91:

$$91 = 3.26 + 13 = 3.26 + \frac{26}{2} =$$

$$= \frac{2.3.26}{2} + \frac{26}{2} = \frac{6.26 + 26}{2} = \frac{7.26}{2} = \underbrace{7}_{\textbf{número de termos}} . \frac{\overbrace{(4+22)}^{\textbf{soma dos extremos}}}{2}$$

Com estes dois exemplos temos que a soma dos termos de uma P.A. finita é dada pela metade da soma dos extremos multiplicada pelo número de termos da P.A., seja ele par ou ímpar.

Fórmula da soma de uma P.A. de n termos:

A soma S_n dos n termos da P.A. (a_1, a_2, ..., a_n) é dada por

$\mathbf{S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} . n}$, onde a_1 e a_n são os extremos e n é o número de termos.

EXEMPLOS:

1º Exemplo: Calcule a soma dos 30 primeiros termos da P.A. (5, 8, 11, ...).

Resolução:

A sucessão formada pelos 30 primeiros elementos constitui uma P.A. finita. Pela fórmula da soma dos termos de uma P.A., devemos conhecer o primeiro termo, o último termo e o número de termos. Precisamos determinar o termo a_{30}; vamos calculá-lo através da fórmula do termo geral:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ r = 8 - 5 = 3 \\ n = 30 \\ a_{30} = ? \end{cases}$$

$a_n \ = a_1 + (n - 1).r$ (Aplicando a fórmula do termo geral)
$a_{30} = 5 + (30 - 1).\ 3$ (Substituindo os dados)

$a_{30} = 5 + 29\ .\ 3$ (Efetuando a operação entre parênteses)

$a_{30} = 92$ (Efetuando multiplicação e a adição)

Agora vamos calcular a soma dos 30 primeiros termos da P.A.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2},$$

$$S_{30} = \frac{30(a_1 + a_{30})}{2},$$

$$S_{30} = \frac{(5+92)}{2}.30,$$

$$S_{30} = \frac{97.30}{2} = \frac{2910}{2} = 1455.$$

Resposta: A soma dos 30 primeiros termos da P.A. é 1455.

2º Exemplo: A soma dos seis primeiros termos de uma P.A. é 66. Sabendo que $a_1 = 1$, calcule a razão:

Resolução:

Inicialmente, vamos calcular o valor do termo a_6, aplicando a fórmula da soma dos termos de uma P.A. finita.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2},$$

$$S_6 = 6.\frac{(1+a_6)}{2}$$ (Substituindo os dados)

$$66 = 6.\frac{(1+a_6)}{2}$$ (Substituindo os dados)

$2.66 = 6(1+a_6)$ (Multiplicando os membros por 2)

$132 = 6(1+a_6)$ (Resolvendo a equação do 1º. Grau)

Observe que a expressão acima é uma equação do 1º.grau cuja incógnita é a_6.

Resolvendo esta equação, encontraremos o 6º.termo (a_6):

$$\frac{132}{6} = 1 + a_6$$

$$22 = 1 + a_6$$

$$22 - 1 = a_6$$

$21 = a_6$

Agora vamos calcular a razão aplicando a fórmula do termo geral de uma P.A.:

$a_n = a_1 + (n - 1).r$ (Aplicando a fórmula do termo geral)
$a_6 = 1 + (6 - 1).\ r$ (Substituindo os dados)

$21 = 1 + 5.\ r$ (Efetuando a operação entre parênteses)

Observe que a expressão acima é uma equação do 1º grau cuja incógnita é r.

Resolvendo esta equação, encontraremos a razão r:

$21 = 1 + 5.\ r$

$21 - 1 = 5.\ r$

$20 = 5.r$

$$\frac{20}{5} = r$$

$r = 4$

Resposta: A razão é 4.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

1. Dentre as seqüências abaixo, identifique as que são progressões aritméticas e, em caso afirmativo, dê suas respectivas razões.

a) (2, 13, 24, 35, 46)
b) (1, 2, 4, 8, 16)
c) (19, 14, 9, 4, -1)
d) (4, 4, 4, 4, 4)
e) (1, 2, 3, 5, 8)
f) $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$

2. Determine o sétimo termo da P.A.(4, 7, 10,...).

3. Calcule o primeiro termo da P.A. cujo sexto termo é 20 e a razão é 3.

4. Obtenha a razão de uma P.A., sendo o vigésimo termo igual a 192 e o primeiro termo igual a 2.

5. Qual é a razão da P.A. em que $a_1 = 10$ e $a_{27} = 114$?

6. Ache o sexagésimo número natural ímpar.

7. Obtenha uma P.A. de 5 termos, sabendo que sua soma é 25 e a soma de seus cubos é 3 025.

8. Interpole quatro meios aritméticos entre 2 e 27.

9. Calcule a soma dos 20 primeiros termos da P.A.(3, 5,7, 9,...).

10. Calcule a soma dos 40 primeiros números naturais pares.

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

1. a) r = 11, b) r = - 5, c) r = 0, d) r = ½, e) não é P.A., f) não é P.A.

2. 22

3. 5

4. 10

5. 4

6. 119

7. (-3,1 , 5, 9, 13) ou (13, 9, 5, 1, -3)

8. (2, 7, 12, 17, 22, 27)

9. 440

10. 3160

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Vejamos inicialmente dois exemplos práticos, para que você concretize a idéia de PROGRESSÃO GEOMÉTRICA.

1º Exemplo: Uma pessoa economiza R$ 0,01 no 1º dia do mês e dobra essa economia a cada dia. Quanto economizará no 10º dia do mês?

Resolução:

Observemos na tabela os valores que ela economiza a cada dia:

Dia do mês	**Economia do dia em R$**	**Ordem**
1º. dia	0,01	(a_1)
2º. dia	0,02	(a_2)
3º. dia	0,04	(a_3)
4º. dia	0,08	(a_4)
5º. dia	0,16	(a_5)
6º. dia	0,32	(a_6)
7º. dia	0,64	(a_7)
8º. dia	1,28	(a_8)
9º. dia	2,56	(a_9)
10º. dia	5,12	(a_{10})

Na coluna da direita aparece uma seqüência de valores onde cada termo a partir do R$ 0,01 é igual ao anterior multiplicado por 2. O 1º termo da seqüência é a economia do 1º dia, a razão é o valor fixo e o último termo da seqüência a_{10} é o valor total economizado naquele dia. Podemos verificar que cada termo não é a soma de um valor fixo com o termo anterior, mas sim a multiplicação de um valor fixo pelo termo anterior.

Uma seqüência deste tipo, onde cada termo a partir do segundo é igual ao anterior multiplicado com um número fixo, é chamada de Progressão Geométrica (P.G.).

Este exemplo descreve o tipo especial de seqüência que iremos estudar no próximo tópico: as Progressões Geométricas. Sua característica é que, cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número fixo.

1. DEFINIÇÃO

Considere as seqüências:

● (4, 8, 16, 32, 64)

Nesta seqüência observamos que, cada termo é igual a 2 vezes o anterior:

8 = 4 . 2
16 = 8 . 2
32 = 16 . 2
64 = 32 . 2

●(6, -18, 54, -162)

Nesta seqüência, também observamos que cada termo é igual ao anterior multiplicado por (-3).

$-\ 18 = 6 \cdot (-3)$
$54 = -18 \cdot (-3)$
$-\ 162 = 54 \cdot (-3)$

● $(8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32})$

Nesta seqüência, observamos que, cada termo é igual ao anterior multiplicado por $\frac{1}{4}$.

$2 = 8 \cdot \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{4}$

$\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$

$\frac{1}{32} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$

Em todas essas seqüências, a lei de formação é:

Cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior, multiplicado por um número fixo.

Toda seqüência que tiver essa lei de formação será denominada progressão geométrica, que abreviaremos por P.G.

O número fixo pelo qual estamos multiplicando cada termo é também chamado **razão** da progressão.

Progressão geométrica - é uma seqüência de números não nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número fixo chamado razão da progressão.

Observação: Na progressão aritmética a razão era anotada por "r", agora na progressão geométrica a razão é anotada por "q".

A representação de uma P.G. também é dada por:

$(a_1, a_2, a_3, ... a_{n-1}, a_n)$

Podemos então escrever:

$\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot q}$ para todo $n \in N^*$ e $q \in R$, onde q é a razão da P.G.

Observamos também que, como conseqüência , a razão q da P.G. é a razão entre 2 termos consecutivos.

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q}$$

Observação: Assim como nas progressões aritméticas, uma P.G. fica determinada quando conhecemos o 1º termo e a razão.

Exemplos de progressões geométricas: (a_1 é o primeiro termo e q é a razão)

a) (1, 2, 4, 8, ...) $a_1 = 1$ e $q = 2$

b)$(3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, ...)$ $a_1 = 3$ e $q = \frac{1}{3}$

c) $(\frac{1}{3}, -1, 3, -9, 27)$ $a_1 = \frac{1}{3}$ e $q = -3$,

d) (5, 5, 5, ...) $a_1 = 5$ e $q = 1$

CLASSIFICAÇÃO DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Dependendo do 1º termo $\underline{a_1}$ e da razão $\underline{q}$, uma progressão geométrica pode ser:

Crescente: cada termo é maior que o anterior.
Exemplo: (1, 2, 4, 8, ...) $1 < 2 < 4 < 8$ .... Neste caso, $q = 2 > 1$ e $a_1 = 1 > 0$.

Decrescente: cada termo é menor que o anterior.
Exemplo: (-3, -6, -12,...) $-3 > -6 > -12 >$ .... Neste caso $q = 2 > 1$ e $a_1 = -3 < 0$.

Constante: todos os termos são iguais.
Exemplo: (3, 3, 3,...). Neste caso, $q = 1$.

Oscilante: cada termo tem o sinal contrário ao termo anterior.
Exemplo: (3, -9, 27, -81, ...). Neste caso, $q = -3 < 0$.

Quanto ao número de termos, a P.G., pode ser:

a) finita, se possui um determinado número de termos.
Exemplo: (-2, -10, -50, -250)   4 termos

b) infinita, se possui uma infinidade de termos.
Exemplo: (2, 4, 8, 16, ...)

EXEMPLOS:

1º Exemplo: Quais das seguintes sucessões constituem P.G.?

a) (1, 4, 16, 64, 256)

Resolução:

Basta verificarmos se a razão (resultado das divisões) entre qualquer termo e o anterior é sempre igual (constante).

$$\frac{4}{1} = 4$$
$$\frac{16}{4} = 4$$
$$\frac{64}{16} = 4$$
$$\frac{256}{64} = 4 \quad .$$

Como todas as razões são iguais a 4, então q = 4, e a sucessão é uma P.G.

FÓRMULA DO TERMO GERAL DE UMA P.G.

Da mesma forma como fizemos para uma progressão aritmética, vamos construir a fórmula do termo geral de uma P.G. que permite encontrar qualquer termo sem precisar escrevê-la integralmente.

1º Exemplo: Seja a P.G. (3, 9, 27,81,...) de razão 3 e $a_1 = 3$. Observe que:

$a_1 = a_1 \cdot q^0$

$\mathbf{3 = 3 \cdot 3^0 = 3 \cdot 1}$(Lembre: todo número não nulo elevado à potência zero é igual a 1)

$a_2 = a_1 \cdot q^1$

$\mathbf{9 = 3 \cdot 3^1}$

$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q^1) \cdot q \quad a_1 \cdot q^2$

$\mathbf{27 = 9 \cdot 3 = 3 \cdot 3^2}$

$a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3$

$\mathbf{81 = 27 \cdot 3 = 3 \cdot 3^3}$

. . .

. . .

. . .

$a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 \cdot q^{n-2}) \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$, ou seja, $\mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$

2º Exemplo: Seja a P.G. (2, 4, 8, 16, ...) de razão 2 e $a_1 = 2$. Observemos que:

$a_1 = a_1 \cdot q^0$

$\mathbf{2 = 2 \cdot 2^0 = 2}$

$a_2 = a_1 \cdot q^1$

$\mathbf{4 = 2 \cdot 2^1}$

$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$

$\mathbf{8 = 4 \cdot 2 = 2 \cdot 2^2}$

$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$

$\mathbf{16 = 8 \cdot 2 = 2 \cdot 2^3}$

. . .

. . .

. . .

$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$ ou $\mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$

Nos dois exemplos pudemos observar que o n-ésimo termo de uma P.G. pode ser expresso pelo produto do 1º. termo pela razão elevada ao expoente n – 1.

Vamos generalizar este fato.

Seja a P.G. ($a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$) de razão q.

$a_1 = a_1 \cdot q^0$

$a_2 = a_1 \cdot q^1$

$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$

$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$

. . .

. . .

. . .

$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow \boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$ **Fórmula do termo geral de uma P.G.**

Em que:

a_n = termo geral
a_1 = primeiro termo
q = razão
n = número de termos

Observação: A fórmula do termo geral relaciona o 1º termo $\mathbf{a_1}$, o enésimo termo $\mathbf{a_n}$, a razão **q** e o número de termos **n**. Conhecendo três destes 4 elementos poderemos determinar o quarto termo.

EXEMPLOS:

1º Exemplo: Achar o décimo termo da P.G. (2, 6, ...).

Resolução:

Inicialmente vamos identificar os dados do problema:

$$\begin{cases} a_1 = 2 & \text{(1º. termo)} \\ q = 3 & \text{(razão da progressão)} \\ n = 10 & \text{(ordem do termo que queremos)} \\ a_{10} = ? & \text{(queremos encontrar o décimo termo)} \end{cases}$$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ (Usaremos a fórmula do termo geral)

$a_{10} = 2 \cdot 3^{10-1} = 2 \cdot 3^9$ (substituição de variáveis)

Resposta: $a_{10} = 2 \cdot 3^9 = 2 \cdot 19683 = 39366$.

2º Exemplo: Numa P.G. de quatro termos a razão é 5 e o último termo é 375. Calcular o primeiro termo dessa P.G.

Resolução:

Inicialmente vamos identificar os dados do problema:

$$\begin{cases} a_1 = ? \text{ (queremos encontrar o primeiro termo)} \\ q = 5 \quad \text{(razão)} \\ n = 4 \quad \text{(número de termos)} \\ a_4 = 375 \text{ (último termo)} \end{cases}$$

Você observou que n= 4? Isto acontece, pois o problema se refere a uma P.G. de 4 termos.

Agora, usaremos a fórmula do termo geral:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ (Fórmula do termo geral)

$a_4 = a_1 \cdot q^3$ (Vimos acima que n= 4, como temos n -1, então 4 -1 = 3)

$375 = a_1 \cdot 5^3$ (Substituindo os dados)

$375 = a_1 \cdot 125$ (Resolução da equação do 1º Grau)

Observe que a expressão acima é uma equação do 1º grau cuja incógnita é a_1.

Resolvendo esta equação, encontraremos o 1º termo (a_1):

$375 = 125a_1$

$\frac{375}{125} = a_1$

$a_1 = 3$

Resposta: O primeiro termo é 3.

3º Exemplo: Numa P.G de 6 termos, o primeiro termo é 2 e o último termo é 486. Calcular a razão dessa P.G..

Resolução:

Inicialmente vamos identificar os dados do problema:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \quad (1^{\underline{o}}.\ \text{termo}) \\ q = ? \quad (\text{queremos encontrar a razão}) \\ n = 6 \quad (\text{número de termos}) \\ a_6 = 486\ (\text{último termo}) \end{cases}$$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ (Fórmula do termo geral)

$a_6 = 2 \cdot q^{6-1}$ (Substituindo os dados)

$486 = 2 \cdot q^5$ (Substituindo a_6)

$$\frac{486}{2} = q^5$$

$243 = q^5$

$\sqrt[5]{243} = q$ (Fatorando 243 temos:

$$\begin{array}{r|l} 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

, $243 = 3^5$)

$\sqrt[5]{3^5}$

$q = 3$

Resposta: A razão é 3.

4º Exemplo: Numa P.G. de razão 4, o primeiro termo é 8 e o último é 2^{31}. Quantos termos tem essa P.G.?

Resolução:

Inicialmente vamos identificar os dados do problema:

$$\begin{cases} a_1 = 8 \quad (1^{\underline{o}}.\ \text{termo}) \\ q = 4 \quad (\text{razão}) \\ n = ? \quad (\text{queremos encontrar o número de termos}) \\ a_n = 2^{31}\ (\text{último termo}) \end{cases}$$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ (Fórmula do termo geral)

$2^{31} = 8 \cdot 4^{n-1}$ (substituição de variáveis)

$2^{31} = 2^3 \cdot 2^{2(n-1)}$ (fatoração de 8 e 4)

$2^{31} = 2^3 \cdot 2^{2n-2}$ (equação exponencial,conteúdo do módulo 04)

$2^{31} = 2^{2n+1}$

$2n + 1 = 31$

$2n = 30$

$\frac{30}{2} = n$

$n = 15$

Resposta: O número de termos é 15.

5º Exemplo: Numa P.G. o 2º termo é 8 e o 5º termo é 512. Escrever essa P.G.

Resolução:

$$\begin{cases} a_2 = 8 \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q^1 \\ a_5 = 512 \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot q = 8 & 1 \\ a_1 \cdot q^4 = 512 & 2 \end{cases}$$

(Temos aqui um sistema de 2 equações e duas incógnitas)

$a_1 \cdot q^4 = 512$

$\underbrace{a_1 . q} \cdot q^3 = 512$

$8 \cdot q^3 = 512$ (substituindo 1)

$q^3 = \frac{512}{8}$

$q^3 = 64$ (Fatorando 64 temos: $\begin{array}{r|l} 64 & 4 \\ 16 & 4 \\ 4 & 4 \\ 1 & \end{array}$, $64 = 4^3$)

$q = \sqrt[3]{64}$

$q = \sqrt[3]{4^3}$

$q = 4$

Substituindo $q = 4$ na equação 1, temos:

$a_1 . 4 = 8 \Rightarrow a_1 = 2$

Resposta: (2, 8, 32, 128, 512).

PROPRIEDADES DA P.G.

P_1 . Dados três números a, b, c em P.G., nessa ordem, temos a relação:

$\mathbf{b^2 = a . c}$ **ou** $\mathbf{b = \pm\sqrt{a.c}}$

Explicação: Por definição de P.G., $q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

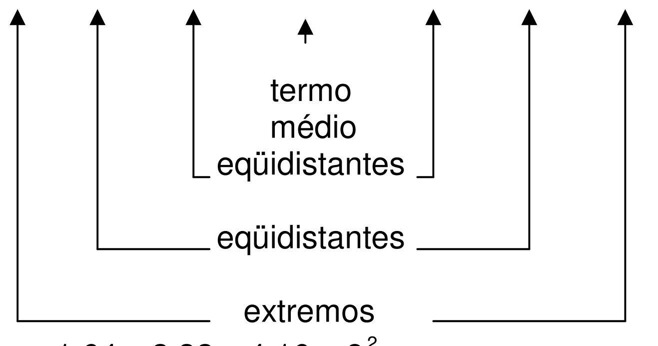
Logo, $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = a.c$

P_2. Numa P.G. finita, o produto de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos:

$a_1.a_n = a_2.a_{n-1} = a_3.a_{n-2} = ... = (a_p)^2$, onde a_p é o termo médio (quando existe).

Exemplo: Considere a P.G, finita

(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64)



Note que: $\underbrace{1.64}_{64} = \underbrace{2.32}_{64} = \underbrace{4.16}_{64} = \underbrace{8^2}_{64}$

Pergunta desafio: o que acontece quando a P.G. tem um número par de termos?

INTERPOLAÇÃO GEOMÉTRICA

Interpolar k meios geométricos entre os números a e b significa obter uma P.G. de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$, com $n = k + 2$ termos. Para determinar os meios dessa P.G. é necessário calcular a razão. Assim temos:

$a_n = a_1 \,.\, q^{n-1} \Rightarrow a_n = a_1 \,.\, q^{k+2-1} \Rightarrow \quad a_n = a_1 \,.\, q^{k+1} \Rightarrow \quad q = \sqrt[k+1]{\frac{a_n}{a_1}}$.

Exemplo: Interpolar ou inserir três meios geométricos entre 3 e 48.

Resolução:

O problema consiste em formar uma P.G. onde:
$a_1 = 3$ $a_n = 48$ $n = 3 + 2 = 5$

(3,________,_________,__________48)

Devemos, então, calcular q:

$a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$

$48 = 3 \,.\, q^4$

$48 = 3q^4$

$\frac{48}{3} = q^4$

$16 = q^4$

$\pm \sqrt[4]{16} = q$

$q = \pm 2$

Teremos, então duas possibilidades:

Para $q = 2 \Rightarrow$ (3, 6, 12, 24, 48)

Para $q = -2 \Rightarrow$ (3, -6, 12, -24, 48) não serve, pois -6 e -24 não estão entre 3 e 48.

Logo, a resposta é: (3, 6, 12, 24, 48)

FÓRMULA DA SOMA DOS N TERMOS DA P.G. FINITA

Vejamos inicialmente um exemplo prático, para que você concretize a idéia da soma dos termos de uma PROGRESSÃO GEOMÉTRICA.

1º Exemplo: Um vazamento em um tanque de gasolina provocou a perda de 2 litros no 1º dia. Como o orifício responsável pelas perdas foi aumentando, no dia seguinte o vazamento foi o dobro do dia anterior. Se essa perda foi dobrando a cada dia, quantos litros de gasolina foram desperdiçados no total, após o 10º dia?

Resolução:

Observe na tabela os valores do vazamento a cada dia:

Dia	Litros vazados nesse dia	Ordem
1º dia	2 litros	(a_1)
2º dia	4 litros;	(a_2)
3º dia	8 litros;	(a_3)
4º dia	16 litros;	(a_4)
5º dia	32 litros;	(a_5)
6º dia	64 litros;	(a_6)
7º dia	128 litros;	(a_7)
8º dia	256 litros;	(a_8)
9º dia	512 litros;	(a_9)
10º dia	1024 litros;	(a_{10})

Na coluna do meio aparece uma seqüência de valores onde cada termo a partir do segundo é igual ao anterior multiplicado por 2. Logo esta seqüência é uma P.G. de razão (2), o 1º termo é 2 e o último termo é 1024. Como o problema pede a soma total dos litros vazados, devemos somar todos valores do vazamento:
$2 + 4+ ...+ 1024 =2046$. Pergunta-se: Se esse vazamento se estendesse durante 50 dias? Iríamos ficar somando todos os termos? Claro que não, daria muito trabalho.
Observe que:

$S_{10} = 2 + 4 + ...+ 1024$

$S_{10} = 2 + 2^2 + 2^3 +...+ 2^{10}$ **(1)**

Multiplicando ambos os membros por 2:

$2. S_{10} = 2. (2 + 2^2 +...+ 2^{10}) = 2^2 + 2^3 +...+ 2^{11}$ **(2)**

Subtraindo **(1)** de **(2)**, temos:

$2 . S_{10} - S_{10} = 2^2 + 2^3 +...+ 2^{11} - (2 + 2^2 + 2^3 +...+ 2^{10}) = 2^{11} - 2$

$S_{10} = 2^{11} - 2 = 2 (2^{10} - 1) = 2. (1024 - 1) = 2046$

Veremos agora uma fórmula para calcular mais rapidamente estes valores.

Seja a P.G. finita $(a_1, a_2, a_3, . . ., a_n)$ ou $(a_1, a_1q, a_1q^2,..., a_1.q^{n-1})$ de razão q, e a soma dos termos S_n.

1º caso: q = 1

$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots a_1 . q^{n-1}$

$S_n = a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1$

$$\boxed{S_n = n . a_1}$$

2º Caso: q $\neq$ 1

$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots a_1 . q^{n-2}, a_1 . q^{n-1}$ 1

multiplicando ambos os membros por q:

$q . S_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1 . q^{n-1} + a_1 . q^n$ 2

Subtraindo 2 **-** 1**,** temos: $qS_n - S_n = - a_1 + a_1 q^n$

$S_n (q - 1) = a_1(q^n - 1) \Rightarrow$ $\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$

Vamos resolver alguns exercícios aplicando esta fórmula.

1º Exemplo: Dada a progressão geométrica (1, 3, 9, 27, ...) calcular:

a) A soma dos 6 primeiros termos.
b) O valor de n para que a soma dos n primeiros termos seja 29524.

Resolução:

Inicialmente vamos identificar os dados do problema:

a) $\begin{cases} a_1 = 1 & \text{(primeiro termo)} \\ q = 3 & \text{(razão da progressão)} \\ n = 6 & \text{(número de termos)} \\ S_6 = ? & \text{(queremos encontrar a soma dos 6 primeiros termos da P.G.)} \end{cases}$

$S_n = \frac{\mathbf{a_1(q^n - 1)}}{\mathbf{q - 1}}$ (Fórmula da soma dos n termos de uma P.G. finita)

$S_6 = \frac{1\,(3^6 - 1)}{3 - 1}$ (substituindo os dados)

$$S_n = \frac{729-1}{2}$$

$S_6 = 364$

b) $\begin{cases} a_1 = 1 & \text{(primeiro termo)} \\ q = 3 & \text{(razão da progressão)} \\ n = ? & \text{(queremos encontrar o número de termos)} \\ S_n = 29524 & \text{(resultado da soma dos n termos da P.G.)} \end{cases}$

$$S_n = \frac{\mathbf{a_1(q^n - 1)}}{\mathbf{q - 1}}$$ (Fórmula da soma dos n primeiros termos da P.G.)

$$29524 = \frac{1(3^n - 1)}{3 - 1}$$ (Substituindo os dados)

$$29524 = \frac{1(3^n - 1)}{2}$$

$29524 \,.\, 2 = 3^n - 1$

$59048 + 1 = 3^n \Rightarrow 3^n = 59049$

$3^n = 59\,049$ (equação exponencial, conteúdo do módulo 04, fatorar 59 049)

$3^n = 3^{10}$

$n = 10$

Resposta: a) 364 b) 10

SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G. INFINITA

Dada a P.G. infinita (a_1, a_2, a_3, ...) de razão **q**, $q \neq 0$, para determinar a soma S dos seus infinitos termos, temos:

a) se $q < -1$ ou $q > 1$ ($| q | > 1$), a soma **S** não pode ser determinada pois os termos aumentam em valor absoluto.

b) se $-1 < q < 1$ ($| q | < 1$), a soma S pode ser determinada a partir da fórmula da soma dos **n** primeiros termos de uma P.G. $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Quando **n** cresce e | q | < 1, $\mathbf{q^n}$ se torna cada vez menor. Dizemos que "$\mathbf{q^n}$ tende a zero" e pode ser desprezado na fórmula, observe: se $q = \frac{1}{2}$; $q^{10} = \frac{1}{1024}$, $q^{30} = \frac{1}{1073741824}$. Neste caso a fórmula da soma é dada por:

$$\boxed{\mathbf{S = \frac{a_1}{1 - q}}}$$

Observação: A dedução da fórmula acima envolve a idéia de "limite"; em alguns livros esta soma é anotada por $\mathbf{\lim S = \frac{a_1}{1 - q}}$

EXEMPLOS:

1º Exemplo: Calcule a soma dos infinitos termos da P.G. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...$

Resolução:

Inicialmente vamos identificar os dados do problema:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = \frac{1}{3} < 1 \end{cases}$$

Como a razão é positiva e menor que 1, a soma pode ser calculada.

Aplicando a fórmula da soma dos termos, vem:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 . \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Resposta: A soma dos termos da P.G. é $\frac{3}{2}$

2º Exemplo: Calcule a geratriz da dízima periódica 0,353535...

Resolução:

Podemos escrever uma dízima periódica por meio de uma soma de números ou frações decimais:

$$0{,}353535... = 0{,}35 + 0{,}0035 + 0{,}000035 + ... = \frac{35}{100} + \frac{35}{10000} + \frac{35}{1000000} + ...$$

Dessa maneira, temos uma soma de infinitos termos de uma P.G. decrescente, em que:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{35}{100} \\ \\ q = \dfrac{\dfrac{35}{10000}}{\dfrac{35}{100}} = \dfrac{1}{100} \end{cases}$$

Assim:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\dfrac{35}{100}}{1-\dfrac{1}{100}} = \frac{\dfrac{35}{100}}{\dfrac{99}{100}} = \frac{35}{99}$$

A soma das infinitas frações decimais que constituem uma dízima periódica é a fração geratriz dessa dízima.

Resposta: A geratriz da dízima é $\frac{35}{99}$.

OBSERVAÇÕES ÚTEIS PARA FACILITAR A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE P.G.

1ª OBSERVAÇÃO:

Em alguns problemas, é sempre conveniente colocar os termos em função de a_1 e q, lembrando que: $a_2 = a_1 \cdot q$; $a_3 = a_1 \cdot q^2$; $a_4 = a_1 \cdot q^3$;. . ., $a_{10} = a_1 \cdot q^9$, e assim por diante.

Exemplo: Em uma P.G., a soma do segundo termo com o terceiro é 18 e a soma do sexto com o sétimo é 288. Calcular a razão dessa P.G.

Resolução:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = 18 \\ a_6 + a_7 = 288 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1q + a_1q^2 = 18 & \Rightarrow a_1q\ (1 + q) = 18 \quad 1 \ \text{(Colocando } a_1q \text{ em evidência)} \\ a_1q^5 + a_1q^6 = 288 & \Rightarrow a_1q^5\ (1 + q) = 288 \quad 2 \ \text{(Colocando } a_1q^5 \text{ em evidência)} \end{cases}$$

$a_1\ q\,.\,q^4\ (1+q) = 288$

$\underbrace{a_1\ q\,(1+q)}_{\text{Substituindo}}\ q^4 = 288$ 1

$18\,.\,q^4 = 288$

$q^4 = \frac{288}{18}$

$q^4 = 16$

$q = \pm 2$

Resposta: Temos duas possibilidades para a razão q = 2 ou q = -2.

2ª OBSERVAÇÃO:

Quando se trata de problemas de P.G. com três termos consecutivos, dando-se a soma e o produto desses termos, é sempre conveniente escrever a P.G. em função do termo do meio, que indicaremos por x. Assim, se a P.G. tem 3 termos, esses serão:

$\frac{x}{q}$, x, xq

Exemplo: A soma de três números em P.G. é 39 e o produto deles é 729. Calcular os três números.

Resolução:

Vamos indicar:

1º número = $\frac{x}{q}$ 2º número = x 3º número = xq

Então:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} + x + xq = 39 \\ \frac{x}{q}\,.\,x\,.\,xq = 729 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{q} + x + xq = 39 \\ x^3 = 729 \end{cases}$$

$x^3 = 729$

$x = \sqrt[3]{729}$

$x = 9$

Substituindo, temos:

$\frac{9}{q} + 9 + 9q = 39 \Rightarrow 9 + 9q + 9q^2 = 39q \Rightarrow 9q^2 - 30q + 9 = 0$

ou $3q^2 - 10q + 3 = 0$. Resolvendo a equação do 2º grau:

$\Delta = 100 - 36 = 64$

$q = \frac{-(-10) \pm \sqrt{64}}{2.3}$

$q = \frac{10 \pm 8}{6}$ $\begin{cases} q' = 3 \\ q'' = \frac{1}{3} \end{cases}$

Quando q = 3 1º número = 3

2º número = 9

3º número = 27

Quando $q = \frac{1}{3}$: 1º número = 27

2º número = 9

3º número = 3

Resposta: Os números são 3, 9, e 27.

PROBLEMAS ENVOLVENDO P.A. E P.G., SIMULTANEAMENTE

Para completar o nosso estudo, vamos considerar alguns problemas que envolvem P.A. e P.G. ao mesmo tempo.

1º Exemplo: São dados quatro números positivos: 12, x, y, 4. Sabendo que os três primeiros estão em P.A. e os três últimos estão em P.G., achar x e y.

Resolução:

Se 12, x, y estão em P.A., então, $x - 12 = y - x \Rightarrow 2x - 12 = y$

Se x, y, 4 estão em P.G., então, $\frac{y}{x} = \frac{4}{y} \Rightarrow y^2 = 4x$

Devemos resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x - 12 = y & (1) \\ y^2 = 4x & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2),

$(2x - 12)^2 = 4x \Rightarrow 4x^2 - 48x + 144 - 4x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 52x + 144 = 0 \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$

Resolvendo a equação do 2º.grau,

$\Delta = 169 - 144 = 25$

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{25}}{2\,.\,4}$$

$$x = \frac{13 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x` = 9 \\ x`` = 4 \end{cases}$$

$x = 9 \Rightarrow y^2 = 4\,.\,9 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = 6$ ou $y = -6$
$x = 4 \Rightarrow y^2 = 4\,.\,4 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = 4$ ou $y = -4$

Vamos analisar os resultados da equação:

(i) Para x = 9, temos y = 6 ou y = -6.

Descartamos y = -6 pois o problema pede números positivos.

Se tomarmos y = 6, teremos que 12, 9, 6 é uma P.A. de razão -3 e 9, 6, 4 é uma P.G. de razão $\frac{2}{3}$.

Assim, x = 9 e y = 6 é uma solução do problema.

(ii) Para x = 4, temos y = 4 ou y = - 4.

Descartamos a solução y = -4.

Se tomarmos y = 4, os três primeiros números 12, 4, 4 não formam P.A., como exige o problema.

Assim, a solução do problema será x = 9 e y = 6.

2º Exemplo: A soma de três números que formam P.G. crescente é 19. Calcular esses três números, sabendo que, se subtrairmos 1 do primeiro, sem alterar os outros dois, eles passam a constituir P.A..

Resolução:

Anotemos por a, b, c os números que formam P.G. e por a – 1, b, c os que formam a P.A

P.G. (a, b, c) P.A. (a -1, b, c)

Pelo problema: a + b + c = 19

Se formam P.G., então $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = ac$

Se formam P.A., então: $b - (a - 1) = c - b \Rightarrow$

$\Rightarrow b - a + 1 = c - b \Rightarrow$

$\Rightarrow 2b + 1 = a + c$

Vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 19 \\ b^2 = ac \\ 2b + 1 = a + c \end{cases}$$

Da 1ª. equação: a + c = 19 – b

Da 3ª. equação: a + c = 2b + 1

Então: $2b + 1 = 19 - b \Rightarrow 2b + b = 19 - 1 \Rightarrow 3b = 18 \Rightarrow b = 6$

Daí teremos o novo sistema:

$$\begin{cases} 36 = ac \\ 13 = a + c \Rightarrow c = 13 - a \Rightarrow 36 = a(13 - a) \Rightarrow 36 = 13a - a^2 \end{cases}$$

$a^2 - 13a + 36 = 0$

$\Delta = 169 - 144 = 25$

$$a = \frac{13 \pm 5}{2} \qquad \begin{cases} a' = 9 \\ a'' = 4 \end{cases}$$

$a = 9 \Rightarrow c = 13 - 9 = 4$

$a = 4 \Rightarrow c = 13 - 4 = 9$

Para a = 4, temos b = 6 e c = 9; (4, 6, 9) formam P.G. crescente de razão $\frac{3}{2}$ e (4 – 1, 6, 9) formam P.A. de razão 3.

Para a = 9, temos b = 6 e c = 4; (9, 6, 4) não forma P.G. crescente. Logo, os números procurados são 4, 6 e 9.

Exercícios propostos:

1.1 Verifique quais seqüências abaixo são P.G.:

a) (48, 12, 3, ...)
b) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, 1, 3, ...)$
c) $(\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, ...)$

1.2 Calcule o sétimo termo da P.G. (5, 10, 20,...)

1.3 Determine o primeiro termo da P.G., cujo sexto termo é 96 e a razão é 2.

1.4 Determine o número de termos da P.G. (-1, -2, -4, -8,..., -512).

1.5 Calcule a razão de uma P.G. de seis termos, cujos extremos são 3 e 96.

1.6 Insira 4 meios geométricos entre 1 e 243.

1.7 Calcule a soma dos cinco primeiros termos da P.G., onde a_1 = 106 e q =2.

1.8 Uma pessoa aposta na Loteria Esportiva durante 6 semanas, de tal forma que em cada semana sua aposta é o dobro da aposta da semana anterior. Se a aposta da primeira semana foi R$ 20,00, qual o total apostado após as 6 semanas?

1.9 Calcule a soma dos termos das progressões infinitas abaixo:

a) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...)$

a) (4, -2, 1, ...)

c) $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, ...)$

d) (0,2; 0,02; 0,002; ...)

1.10 Dada uma P.A. de 5 termos, com $r \neq 0$ (razão):

a) determine-os, sabendo que o 1º, o 2º e o 4º termos, nesta ordem, formam uma P.G. cuja soma é 14.

b) Calcule o 5º. Termo da P.G.

2.1 Um professor de Educação Física, utilizando 1540 alunos, quer alinhá-los de modo que a figura formada seja um triângulo. Se na primeira fila for colocado 1 aluno, na segunda 2, na terceira 3 e assim por diante, quantas filas serão formadas?

2.2 Você faz uma compra para pagar em 10 prestações. A primeira prestação é de R$ 1.200,00 e, depois disso cada prestação sofre um acréscimo de R$ 400,00 em relação à prestação anterior. Qual é o valor da última prestação?

2.3 Um cinema possui 15 poltronas na 1ª fila, 19 poltronas na 2ª fila, 23 poltronas na 3ª fila, 27 na 4ª fila, e as demais filas se compõem na mesma seqüência. Quantas filas são necessárias para que a casa tenha 150 lugares?

2.4 Um matemático (com pretensões a carpinteiro) compra uma peça de madeira de comprimento suficiente para cortar os 20 degraus de uma escada de obra. Se os comprimentos dos degraus formam uma progressão aritmética, se o primeiro degrau mede 50 *cm* e o último 30 cm e supondo que não há desperdício de madeira no corte, determine o comprimento mínimo da peça.

2.5 Sabendo que a população de certo município foi de 120 000 habitantes em 1990 e que essa população vem crescendo a uma taxa de 3% ao ano, determine a melhor aproximação para o número de habitantes desse município em 1993.

2.6 Um químico tem 12 litros de álcool. Ele retira 3 litros e os substitui por água. Em seguida, retira 3 litros da mistura e os substitui por água novamente. Após efetuar essa operação 5 vezes, aproximadamente quantos litros de álcool sobram na mistura?

2.7 Um vazamento em um tanque de gasolina provocou a perda de 3 litros no 1º. dia. Como o orifício responsável pelas perdas foi aumentando, no dia seguinte o vazamento foi o dobro do dia anterior. Se essa perda foi dobrando a cada dia, quantos litros de gasolina foram desperdiçados no total, após o 9º. dia?

2.8 Um painel contém lâmpadas vermelhas e azuis. Em um instante inicial, acendem-se, simultaneamente, uma lâmpada vermelha e 38 azuis e, a partir daí, de 5 em 5 segundos, acendem-se vermelhas segundo uma P.G. de razão 2 e apagam-se azuis segundo uma P.A.. Após 20 segundos, o processo é paralisado e o painel apresenta entre as lâmpadas acesas somente 2 azuis. Determine:

a) o número a_n de lâmpadas vermelhas acesas;

b) a razão r da P.A.:

TESTES DE VESTIBULARES

1. (CESESP-82) Um relógio bate as horas dando uma pancada a 1 hora, 2 pancadas às 2 horas, e assim por diante até as 12 horas. Às 13 horas volta novamente a dar 1 pancada, 2 às 14 horas e assim por diante até as 24 horas. Bate ainda uma única pancada a cada meia hora. Começando a funcionar à zero hora, após 30 dias completos, sem interrupção, o número de pancadas dado será:

a) 5 400 b) 5 340 c) 5 460 d) 5 520 e) 4 800

2. (PUC-SP-85) Um escritor escreveu em um certo dia, as 20 primeiras linhas de um livro. A partir desse dia, ele escreveu, em cada dia, tantas linhas quantas havia escrito no dia anterior, mais 5 linhas . O livro tem 17 páginas, cada uma exatamente 25 linhas. Em quantos dias o escritor terminou de escrever o livro?

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 17

3. (CESESP-86) Dois andarilhos iniciam juntos uma caminhada. Um deles caminha uniformemente 10 *Km* por dia e o outro caminha 8 *km* no 1º. Dia e acelera o passo de modo a caminhar mais ½ km cada dia que se segue.
Assinale a alternativa correspondente ao número de dias caminhados para que 0 2º. Andarilho alcance o primeiro.

a) 10 b) 9 c) 3 d)5 e) 21

4. (CESGRANRIO-84) A soma dos números naturais menores do que 100 e que divididos por 5 deixam resto 2 é:

a) 966 b) 976 c) 990 d) 991 e) 998

5. (U.F.GO-84) Em um teste de loteria esportiva(13 jogos),houve n_1 resultados na coluna 1,n_2,resultados na coluna do meio e n_3 resultados na coluna 2.Se n_1,n_2,e n_3, nesta ordem,estão em Progressão Geométrica crescente,sua razão é:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

6. (FAAP-SP) Nas recentes eleições municipais realizadas numa cidade do interior do Estado, todos os eleitores votaram: candidatos A e B, ou em branco. O resultado foi 58% votaram A, 32% em B e os 700 eleitores restantes votaram em branco. Então, podemos afirmar que o número de eleitores que votaram no candidato A foi:

a) 4060 b) 2660 c) 5500 d) 3000 e) 5800

7. (UNICAMP-SP) Um vendedor propõe a um comprador de um determinado produto as seguintes alternativas de

Pagamento:

a) Pagamento à vista com 65% de desconto sobre o preço da tabela.

b) Pagamento em 30 dias com desconto de 55% sobre o preço da tabela.

b) Qual das duas alternativas é mais vantajosa para o comprador, considerando-se que ele consegue, com uma aplicação de 30 dias, um rendimento de 25%?''

8. (ACAFE-SC) Dado um triângulo de perímetro 10, unindo-se os pontos médios de seus lados, forma-se um 2º triângulo, unindo-se os pontos médios deste 2º triângulo, obtém-se um 3º triângulo, e assim por diante, indefinidamente. Dar a soma dos perímetros de todos estes triângulos.

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

1.1 a) é P.G. b) não é P.G. c) é P.G.

1.2 $a_7 = 320$

1.3 $a_1 = 3$

1.4 10 termos

1.5 r = 2

1.6 (15,45 135, 405)

1.7 $S_5 = 3286$

1.8 R$ 1 260,00

1.9 a) 2 b)8/3 c) 4/3 d) 2/9

1.10 a) (2, 4, 6, 8, 10) b) 32

2.1 55 filas

2.2 R$ 4.800,00

2.3 6 filas

2.4 8m

2.5 131 127

2.6 2,85 l

2.7 1022

2.8 a) 16 b) -9

RESPOSTA DOS TESTES DE VESTIBULARES

1. a
2. c
3. b
4. c
5. c
6. a
7. a
8. 01

CAPÍTULO 4

4. EXPERIMENTAÇÃO

Neste capítulo fizemos uma experimentação com quatro alunos da cooperativa de educação catarinense (COPEREDUCA), sendo eles alunos do ensino médio da EJA que no momento cursavam a disciplina de matemática.

O primeiro aluno, com dezoito anos, concluiu o ensino fundamental na educação de jovens e adultos da COPEREDUCA. O segundo aluno, com dezenove anos, concluiu o ensino fundamental numa escola regular. O terceiro aluno, com vinte anos, concluiu a primeira série do ensino médio na escola regular. E o quarto aluno, com vinte e três anos, também concluiu a primeira série do ensino médio na escola regular.

O módulo (capítulo III), foi entregue a eles com o objetivo de avaliarmos seus desempenhos e para que eles avaliassem a proposta de novo módulo, fazendo suas críticas e dando sugestões sobre definições, linguagem, quantidade de exercícios resolvidos e propostos. Os alunos ficaram com o módulo por cinco dias.

O primeiro aluno teve acesso ao módulo utilizado na COPEREDUCA. Os outros três não tiveram acesso a este módulo.

Os alunos responderam a um questionário com três perguntas, cujo resultado mostramos a seguir:

<u>Questionário</u>

Agora que você já estudou o módulo e realizou a prova, por favor responda as perguntas abaixo:

1) Em relação ao módulo de P.A. e P.G., preencha a tabela abaixo:

a) As definições são claras?

(   ) sim   (   ) não   (4) em parte

b) As explicações do conteúdo são suficientes para o entendimento?

(2) sim   (   ) não   (2) em parte

c) O vocabulário é adequado?

(4) sim   (   ) não   (   ) em parte

d) A quantidade de exercícios resolvidos é suficiente?

(2) sim   (   ) não   (2) em parte

e) A quantidade de exercícios propostos é suficiente?

(3) sim   (   ) não   (1) em parte

2) Faça em linhas gerais uma avaliação do módulo. (Transcrição das respostas dos alunos)

Aluno 1 - *O modulo é bem explicativo os conteudo é bem mais conpleso.*

Aluno 2 - *É um módolo bem definido com varias explicações bem definida.Mas a prova foi muito difícil.*

Aluno 3 - *tive uma dificuldade na introdução (problema do coelho) mas tive um bom intendimento do módulo, poderia ser um pouco mas detalhado e em relação a prova, tava muito difícil.*

Aluno 4 - *As explicações do módulo é suficiente para o entendimento, mas achei complicado introdução o problema do coelho, mas entendi as progressões. A prova éstava muito difícil.*

3) Faça uma comparação deste módulo com o módulo que você já conhece.

Observação: Só o aluno 1 respondeu esta questão.

Aluno 1 - *E bem melhor para entender o módulo as explicação e melhor.*

Dois alunos tiveram dificuldades no problema da introdução (Problema dos coelhos).

Todos os quatro alunos consideraram o módulo bem explicado e um deles sugeriu mais detalhes.

Em relação à prova do módulo (Anexo), os alunos comentaram que não tiveram tempo suficiente para estudar, por isso o desempenho não foi muito bom.

A avaliação dos alunos mostra que o módulo não está "acabado", podendo ser melhorado em alguns aspectos dependendo da necessidade dos alunos. A utilização do módulo poderá indicar as mudanças necessárias.

CONCLUSÃO

O trabalho de conclusão de curso realmente foi um grande trabalho. Fazer o módulo foi bem difícil, pois a escolha de abordagens e conteúdos deveriam estar de acordo com o objetivo do módulo: a autonomia do aluno no estudo do conteúdo.

O trabalho me permitiu entender, através do nosso processo histórico, porque tantos alunos não concluem o ensino fundamental e médio e, a importância da Educação de Jovens e Adultos (EJA) para a sociedade. Além disso, estudar o conteúdo "progressões" nos livros didáticos desde a década de 50 até os dias hoje deu-me mais segurança na escolha de diferentes formas de abordagem.

A maioria dos nossos alunos não gosta, não suporta ou tem uma grande dificuldade em matemática; nós professores de matemática, realmente necessitamos de paciência e uma dedicação maior aos nossos alunos, pois só assim conseguiremos mudar a concepção que todos tem em relação à disciplina e aos professores. Em particular, os alunos atendidos pela EJA necessitam de uma atenção especial por parte dos professores e das Instituições, principalmente na produção de material didático adequado para todas as disciplinas. O perfil dos alunos exige uma estrutura ainda mais complexa do que a estrutura do ensino regular. Após a experimentação, os alunos comentaram que haviam gostado do módulo, mas tiveram dificuldade para fazer a prova; confessaram que se estudassem mais tempo teriam se saído melhor.

Espero que este trabalho venha a contribuir para os objetivos da EJA, proporcionando aos alunos uma melhor compreensão do conteúdo "Progressões". Acredito que iniciativas desta natureza sejam um incentivo à elaboração de novos módulos.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Conselho Nacional de Educação**. Lei nº 9.394/96 de 20 de dezembro de 1996, estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.** Ministério da Educação e Cultura, 1996.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio.** Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. – Brasília: 1999.

CATUNDA, Osmar. **Matemática 2º ciclo, ensino atualizado:** Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1971.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática 2º grau volume I:** São Paulo: FTD, 1997.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar 4:** seqüências, matrizes, determinantes, sistemas:exercícios resolvidos, exercícios propostos com resposta, testes de vestibular com resposta: 6. ed. São Paulo: Atual,1993.

IEZZI, Gelson. **Matemática 2º.grau 1ª.série:** São Paulo: Atual, 1993.

LOPES, Luís. **Manual de Progressões:** Rio de Janeiro: Interciência, 1998.

MAEDER, Algacyr Munhoz. **Curso de Matemática, 1ª série - ciclo colegial:** São Paulo: Melhoramentos, 1951.

MARCONDES, Carlos Alberto; GENTIL, Nelson; GRECO, Sérgio Emílio. **Matemática Ensino Médio: volume único:** São Paulo: Ática, 2000.

MARQUETI, Celso. **Matemática: ensino médio:** São Paulo: Frase, 2001.

MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C. **Progressões e Matemática Financeira,** SBM: Rio de Janeiro: Editoração Eletrônica e Folitos, 2001.

NETTO, Scipione di Pierrô; ALMEIDA, Nilze Silveira. **Matemática Curso Fundamental, volume 2- 2º. grau:** São Paulo: Scipione, 1992.

NETTO, Scipione di Pierrô, **Elementos de Matemática: 1ª e 2ª série, núcleo comum, 2º grau: São Paulo:** Scipione, 1979.

PROJETO POLÍTICO PEDAGÓGICO, **Educação de Jovens e Adultos** (COPEREDUCA): Florianópolis, 2003.

SCHOR, Damian; TIZZIOTTI, José Guilherme. **Matemática 2º. Grau volume I:** São Paulo: Ática, 1977.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO**. Educação de Jovens e adultos, ensino médio – matemática módulo 06:** Florianópolis, 2004.

STARKE, Rubens. **Cálculo I: Notas de aula:** Florianópolis, 2000.

YOUSSEF, Antonio Nicolau. **Matemática: volume único: ensino médio:** São Paulo: Scipione, 2000.

ANEXO

COOPERATIVA DE EDUCAÇÃO CATARINENSE
CENTRO DE EDUCAÇÃO CONTINUADA DA COPEREDUCA
MUNICÍPIO: PALHOÇA
UNIDADE EXECUTORA: ARIRIÚ, BARRA DO ARIRIÚ E CAIC
DISCIPLINA: MATEMÁTICA
PROFESSORA: IRIMAR MOREIRA
ENSINO MÉDIO: MÓDULO 06

As grandes conquistas da humanidade só foram possíveis graças à conquista da MATEMÁTICA.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

FÓRMULA DO TERMO GERAL DE UMA P.A

$$a_n = a_1 + (n - 1) . r$$

FÓRMULA DA SOMA DOS N TERMOS DE UMA P.A.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} . n$$

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

FÓRMULA DO TERMO GERAL DE UMA P.G.

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

FÓRMULA DA SOMA DOS N TERMOS DA P.G. FINITA

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

FÓRMULA SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G. INFINITA

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

1ª Questão: Verifique se as seqüências abaixo são progressões aritméticas ou geométricas e também se são crescentes ou decrescentes:

a) (2, 4, 6, 8,...);

b) (2, 4, 8, 16,...);

c) (-1, -3, -5, -7,...);

d) (-81, -27, -9, -3, -1);

2ª QUESTÃO: Um casal teve 11 filhos, sempre com diferença de dois anos entre um nascimento e outro. Se o terceiro filho tem hoje 35 anos, qual é a idade do mais novo?

3ª.QUESTÃO: O cometa Halley é visto da Terra de 76 em 76 anos. Ele foi visto em 1910. Quantas vezes ele foi visto após o nascimento de Cristo?

4ª.QUESTÃO: Calcule a soma dos 41 primeiros números ímpares positivos.

5ª.QUESTÃO: Numa viagem, um automóvel percorreu 30 Km no 1º dia, 60 Km no 2º dia, 120Km no 3º dia e assim sucessivamente até o 5º dia. Quantos quilômetros o automóvel percorreu durante essa viagem de 5 dias?

6ª.QUESTÃO: A população humana de um conglomerado urbano é de 10 milhões de habitantes e a de ratos é de 200 milhões. Admitindo-se que ambos as populações cresçam em progressão geométrica, de modo que a humana dobre a cada 20 anos e a de ratos dobre a cada ano, dentro de 10 anos, quantos ratos haverá por habitante?

7ª.QUESTÃO: Calcule a geratriz da dízima periódica 0,5555...

Boa Prova.
Até a próxima!