

KELY CRISTINA PASQUALI

# Máximos e Mínimos em Geometria Euclidiana Plana

Florianópolis  
2004

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática - Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n.º. 32 / SGC / 2004.

---

Prof<sup>ª</sup>. Carmem Suzane Comitre Gimenez  
Professora da disciplina

Banca examinadora:

---

José Luiz Rosas Pinho  
Orientador

---

Antonio Vladimir Martins

---

Nereu Estanislau Burin

KELY CRISTINA PASQUALI

# Máximos e Mínimos em Geometria Euclidiana Plana

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura  
Departamento de Matemática  
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
Universidade Federal de Santa Catarina

**Orientador: José Luiz Rosas Pinho**

Florianópolis

Julho 2004

Gostaria de agradecer ao professor, orientador e amigo “Professor Pinho” pelo tempo dedicado para realização deste trabalho. Pelas correções, contribuições e orientações que certamente sem elas não teria sido possível a realização deste. E principalmente queria agradecê-lo pelo carinho e estímulo dedicado a minha pessoa durante toda a graduação e gostaria de agradecer ao Professor Eduardo Wagner por sugestões sobre a bibliografia.

E aos meus queridos amigos pelo apoio e carinho que a mim dedicaram. Gostaria de agradecer em especial, aos colegas Anderson, Rodrigo e Gilberto pelo apoio que me deram na digitação do trabalho em  $\text{\LaTeX}$ .

Dedico este trabalho ao meu irmão Flávio,  
ao meu namorado William e principalmente  
aos meus queridos pais Rita e Dinis, que me  
propiciaram a realização deste curso.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1 Um pouco de História</b>	<b>10</b>
<b>2 Problemas Clássicos</b>	<b>16</b>
2.1 Argumento de Continuidade . . . . .	17
2.2 Problema de Heron . . . . .	20
2.2.1 Solução do Problema de Heron . . . . .	20
2.2.2 Variações do Problema de Heron . . . . .	22
2.3 Problema de Regiomontanus . . . . .	45
2.3.1 Solução do Problema de Regiomontanus . . . . .	45
2.3.2 Variações do Problema de Regiomontanus . . . . .	49
2.4 Problema de Fagnano . . . . .	55
2.4.1 Solução de Schwarz . . . . .	55
2.4.2 Solução de Fejér . . . . .	57
2.5 Problema de Fermat . . . . .	61
2.5.1 Solução do problema de Fermat . . . . .	61
2.5.2 Variação do Problema de Fermat . . . . .	68
2.6 Problema de Dido . . . . .	70
2.6.1 Solução de Steiner . . . . .	70
2.6.2 Variações do Problema de Dido . . . . .	74
2.6.3 Problemas Isoperimétricos . . . . .	74
<b>3 Problemas Propostos</b>	<b>83</b>

Considerações Finais	85
Bibliografia	86

# Introdução

O presente Trabalho de Conclusão de Curso propõe apresentar e discutir problemas de valores extremos, ou seja, problemas de máximos e mínimos em geometria euclidiana plana. Desde os mais remotos tempos, os grandes matemáticos já mostravam interesse em problemas desse tipo. Neste trabalho temos por objetivo trabalhar com problemas históricos e suas variações, os quais denominaremos de problemas clássicos. Na resolução desses problemas utilizaremos basicamente métodos geométricos com o intuito deste trabalho servir como material de consulta para professores do ensino médio e alunos das primeiras fases do curso de matemática. Fazendo o uso apenas da geometria, acreditamos que os professores possam trabalhar em sala de aula problemas de máximos e mínimos, sem que os alunos tenham o conhecimento do cálculo.

Procuramos fazer uma abordagem histórica a mais completa e verdadeira possível, pois essas informações estão muito dispersas e na maioria das vezes não são compatíveis umas com as outras. Tentamos esclarecer os fatos históricos envolvendo cada problema de máximos e mínimos de maneira clara e concisa.

O objetivo inicial era condensar em um único trabalho a maior parte dos problemas de máximos e mínimos que, na maioria das bibliografias, encontram-se soltos, mas nos deparamos com um obstáculo: problemas deste tipo são infundáveis e, por isso, iremos abordar apenas os problemas clássicos e suas variações e generalizações.

Na resolução dos problemas faremos uma abordagem sobre a questão da existência de solução (soluções). Este aspecto de um problema é raramente discutido em problemas em geral no ensino médio. No entanto, esta questão é extremamente importante e deve ser sempre considerada. Se, sabemos, a priori, que um problema tem solução, então é possível fazer uma análise de como se pode chegar à solução e porque o resultado é de



fato solução do problema.

O tratamento que daremos aqui será um tanto informal, porém baseado em resultados rigorosos de continuidade de funções. Tal “argumento de continuidade”, como será denominado neste texto, será explicado na seção 2.1 do capítulo 2.

# Capítulo 1

## Um pouco de História

Já na antiguidade os matemáticos demonstravam um interesse por problemas de valores extremos (minimização e maximização). Euclides ( $\pm 300$  a.C.), em sua obra *Elementos*, (Livro 6, proposição 27) fala de um problema de maximização, que consiste em achar o maior produto possível de dois números cuja soma era dada. Mais tarde, Zenodorus (200 a.C a 140 a.C) estudou a área de uma figura com perímetro fixado e o volume de um sólido com superfície fixada. Ele verificou que entre todos os polígonos regulares com mesmo perímetro o polígono regular é o que abrange a maior área. Problemas deste tipo vêm sendo abordados pelos matemáticos desde os primórdios da geometria.

Os problemas de valores extremos que iremos tratar neste trabalho envolvem apenas geometria euclidiana plana. Trata-se de problemas relacionados à minimização e maximização de áreas, perímetros, ângulos etc. de figuras planas. Denominaremos alguns desses problemas como clássicos pela sua origem histórica ou por serem muito conhecidos na matemática.

Um dos problemas de maximização em geometria mais antigo foi sugerido na lenda da criação da cidade de Cartago pela princesa Dido. O problema de Dido, como ficou conhecido, é o seguinte: “Entre todas as curvas planas fechadas de um dado comprimento  $L$ , encontrar aquela que engloba a maior área”.

A lenda de Dido ficou bem conhecida através da obra épica *Eneida*, escrita pelo grande poeta romano Virgílio (Publius Vergilius Maro, 70 a.C. a 19 a.C.). Dido (Elisa ou Elisha)

era uma princesa fenícia da cidade de Tiro. Seu irmão, o rei Pigmalião, assassinou seu marido Siqueu. Dido então fugiu num navio com um grande número de seguidores dispostos a fundar uma nova cidade no norte da África, “Qart Hadash” (Cartago), em uma região do que é hoje a Túnisia. No lugar escolhido para ser Cartago tentou comprar terras do rei local Jarbas da Numídia para que pudessem se estabelecer. O arranjo que conseguiu com o rei foi que só teria em terras o que pudesse contornar com a pele de um único animal. Em todos os textos matemáticos que fazem referência à lenda, através da obra de Virgílio, dizem que Dido e seu grupo decidiram então cortar a pele em tiras tão finas quanto possível, emendaram as tiras e formaram uma longa e fina correia e cercaram com a mesma um terreno circular. No entanto, isso não é totalmente verdade, como podemos ler no seguinte trecho da obra *Eneida* [14]:

“Ela havia desposado Siqueu, o mais opulento dos fenícios, e, desventurada, o amava com imenso amor. A este o pai a dera, ainda virgem, e a unira sob os primeiros auspícios do himeneu. Mas o trono de Tiro estava ocupado por Pigmalião, seu irmão, o mais celerado de todos os homens. A discórdia, com seus furores, veio meter-se entre os dois irmãos. O ímpio, cego pelo seu amor ao ouro, surpreendeu Siqueu ao pé dos altares e o mata em segredo, sem se importar do amor da irmã; durante longo tempo conseguiu ocultar seu crime, e inventou mil pretextos, o cruel, para iludir a amante inquieta. Mas a própria imagem do esposo insepulto apareceu à esposa, durante seu sono, mostrando-lhe o rosto coberto de estranho palor; mostrou-lhe o altar ensangüentado, seu peito atravessado com o ferro e revelou todo o crime oculto à família. A seguir, persuade a esposa a fugir a toda a pressa e sair da pátria, e, a fim de auxiliá-la na viagem, mostra-lhe antigos tesouros enterrados sob a terra, monte desconhecido de ouro e prata. No seu espanto, Dido prepara-se para a fuga e procura companheiros. Ao seu redor agrupam-se aqueles que nutriam feroz ódio contra o tirano ou vivo sentimento de temor. O acaso ofereceu-lhes navios que estavam preparados, e carregam-nos de ouro. As riquezas do avaro Pigmalião são levadas pelo mar: uma mulher é o chefe da expedição. Chegados ao local onde verás agora enormes muralhas e a imponente cidadela de Cartago, compraram todo o terreno que um couro de touro podia cercar: daí vem o nome de Birsá”.

Em nenhum momento Virgílio faz alguma citação que Dido tenha cortado o couro em tiras e cercado com ele um terreno circular. É curioso que várias fontes de textos matemáticos mantenham essa versão, citando Virgílio, quanto à engenhosa solução dada por Dido em formar uma longa correia de couro, e quanto à forma do terreno (circular,

ou semi-circular em outras versões).

Na verdade a lenda de Dido foi também contada, anteriormente a Virgílio, pelo historiador grego Timaeus de Tauromenium (cerca de 356-260 a.C) em sua obra *Geografia do Mundo Ocidental*, e posteriormente pelo historiador romano Marcus Junianus Justinus (século II ou III d.C) em sua obra *Epítome da História Filípica de Pompeius Trogus* [16]. Justinus em seu Livro XVIII, Parte V, descreve que Dido mandou cortar o couro de boi em finas tiras. Vejamos o trecho da Parte V, do livro de Justinus (Tradução de Rev. John Selby Watson - 1853) [17]:

“ **V.** Their first landing place was the isle of Cyprus, where the priest of Jupiter, with his wife and children, offered himself to Elissa, at the instigation of the gods, as her companion and the sharer of her fortunes, stipulating for the perpetual honour of the priesthood for himself and his descendants. The stipulation was received as a manifest omen of good fortune. It was a custom among the Cyprians to send their daughters, on stated days before their marriage, to the sea-shore, to prostitute themselves, and thus procure money for their marriage portions, and to pay, at the same time, offerings to Venus for the preservation of their chastity in time to come. Of these Elissa ordered about eighty to be seized and taken on board, that her men might have wives, and her city a population. During the course of these transactions, Pygmalion, having heard of his sister’s flight, and preparing to pursue her with unfeeling hostility, was scarcely induced by the prayers of his mother and the menaces of the gods to remain quiet; the inspired augurs warning him that “he would not escape with impunity, if he interrupted the founding of a city that was to become the most prosperous in the world.” By this means some respite was given to the fugitives; and Elissa, arriving in a gulf of Africa, attached the inhabitants of the coast, who rejoiced at the arrival of foreigners, and the opportunity of bartering commodities with them, to her interest. Having then bargained for a piece of ground, as much as could be covered with an ox-hide, where she might refresh her companions, wearied with their long voyage, until she could conveniently resume her progress, she directed the hide to be cut into the thinnest possible strips, and thus acquired a greater portion of ground than she had apparently demanded; whence the place had afterwards the name of Byrsa. The people of the neighbourhood subsequently gathering about her, bringing, in hopes of gain, many articles to the strangers for sale, and gradually fixing their abodes there, some resemblance of a city arose from the concourse. Ambassadors from the people of Utica, too, brought them presents as relatives, and exhorted them “to build a city where they had chanced to obtain a settlement.” An inclination to detain the strangers was felt also by the Africans; and, accordingly, with the consent of all, Carthage was founded, an annual tribute being fixed for the ground

which it was to occupy. At the commencement of digging the foundations an ox's head was found, which was an omen that the city would be wealthy, indeed, but laborious and always enslaved. It was therefore removed to another place, where the head of a horse was found, which, indicating that the people would be warlike and powerful, portended an auspicious site. In a short time, as the surrounding people came together at the report, the inhabitants became numerous, and the city itself extensive.

No entanto, nem Justinus e nem Timaeus fazem qualquer referência à forma como o terreno foi cercado. O fato da cidade de Birsá (Cartago) ter sido construída em uma baixa colina de frente para o mar - e escavações arqueológicas encontraram antigos túmulos ao redor da colina - possivelmente fez concluir que a forma da cidade tenha sido inicialmente circular, o que completaria a lenda matemática [18].

Um outro conhecido problema é o de Heron de Alexandria, que viveu entre 150 a.C. e 250 d.C. Dos trabalhos geométricos feito por ele, o mais importante é sua obra *A Métrica* escrita em três livros, e só descoberta em 1896 em Constantinopla, por R. Schöne. No primeiro livro encontra-se a dedução da famosa fórmula da área de um triângulo em função dos três lados. Heron se interessava por mensuração em todas as formas, na ótica e na mecânica tanto quanto na geodésia. A lei da reflexão da luz já era conhecida por Euclides e Aristóteles, mas foi Heron quem mostrou, por um argumento geométrico simples, numa obra chamada *Catóptrica* (ou reflexão), que a igualdade dos ângulos de incidência e reflexão é uma consequência do princípio aristotélico que diz que a natureza nada faz do modo mais difícil. Isto é, se a luz deve ir de uma fonte S a um espelho MM' e, então, ao olho E de um observador, ela deve seguir o caminho mais curto e como veremos adiante, o caminho mais curto possível SPE é aquele em que os ângulos SPM e EPM' são iguais [1].

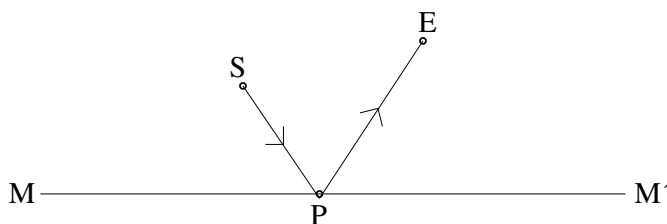


Figura 1.1: Caminho mais curto da luz para ir de S a E.

Um problema geométrico de maximização enunciado no século XV é o Problema de Regiomontanus que consiste em calcular a distância de um homem ao pedestal de uma estátua de modo a enxergá-la por um ângulo de visão máximo. Este problema é devido a Johann Müller (1436-1476), um dos maiores matemáticos do século XV, que nasceu na cidade alemã de Königsberg in Bayern e ficou conhecido pelo nome de Regiomontanus, uma latinização de sua cidade natal. Não confundir esta cidade com a cidade homônima localizada na antiga Prússia (hoje cidade de Kaliningrado na Rússia), que é conhecida na matemática devido ao famoso problema das pontes discutido pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Entre os interessantes problemas propostos por Regiomontanus, está o problema de maximização citado acima, que ficou conhecido como o primeiro problema de extremos formalmente formulado encontrado na História da Matemática desde a antiguidade [5]. Este problema foi enunciado por Regiomontanus em 1471 em uma carta à Christian Roder, professor da Universidade de Erfurt.

Um problema interessante de minimização é o problema de Fermat, proposto pelo matemático Pierre de Fermat (1601-1665) a Torricelli (1608-1647): “Encontrar um ponto no plano cuja soma das distâncias a três pontos dados A, B e C seja mínima”. Outros matemáticos como Cavalieri e Simpson também trabalharam neste problema. Depois deles, o matemático Jacob Steiner (1796-1863) no século XIX, foi atraído para o assunto ao tentar resolver um exercício de generalização proposto por Simpson no livro *Fluxions*.

Outro importante problema de minimização é o problema de Fagnano, proposto pelo matemático italiano Giulio Carlo Fagnano dei Toschi (1682-1766). O problema de Fagnano, também conhecido como problema do triângulo de Schwarz, consiste em inscrever num triângulo acutângulo um outro triângulo com o menor perímetro possível. Ele mostrou a existência da solução do problema. Em 1775 seu filho, que era matemático e padre, Giovanni Francesco Fagnano (1715-1797) completou a demonstração de seu pai usando o cálculo diferencial. Dois outros matemáticos trabalharam na resolução desse problema usando apenas métodos geométricos, o matemático alemão Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) e o matemático húngaro Lipót Fejér (1880-1959) .

No capítulo seguinte, serão feitas as demonstrações dos problemas clássicos mencionados acima e além disso, serão discutidas variações de cada um destes problemas. Nas demonstrações destes problemas, utilizaremos basicamente raciocínios geométricos, procurando mostrar a beleza e a elegância da geometria euclidiana.

## Capítulo 2

# Problemas Clássicos

Neste capítulo iremos tratar dos problemas de extremos clássicos e suas variações, com foi mencionado anteriormente. Estes problemas são ditos clássicos por terem alguma origem histórica ou por sua importância na matemática. Temos por objetivo na resolução desses problemas usar como ferramenta básica apenas métodos geométricos, sem fazer o uso do cálculo.

A maior parte dos problemas vem da antiguidade. Os matemáticos gregos antigos propuseram esses problemas e os resolveram usando as técnicas da Geometria Euclidiana. A questão da existência de solução de um problema deste tipo muitas vezes não era considerada pelos gregos, no entanto, veremos que ela é, em geral, fundamental para as soluções que discutiremos aqui. Para garantirmos a existência de solução faremos uso de um argumento de continuidade, o qual será abordado na seção 2.1 deste capítulo.

É importante observar que nem sempre um problema de extremo possui uma solução máxima e uma mínima. Muitas vezes o valor mínimo seria zero, o que corresponderia a uma figura-solução degenerada (perímetro ou área zero), ou seja, não é uma solução. O mesmo pode ocorrer com o valor máximo, com a figura degenerando-se. Assim, alguns problemas podem ter solução mínima mas não máxima, ou vice-versa, ou podem não ter nem solução mínima nem máxima. Por exemplo considere o problema: Dada uma circunferência de raio  $R$ , qual o polígono inscrito nesta circunferência que tem área mínima e qual o polígono que tem área máxima? É sempre possível inscrever na circunferência um polígono (por exemplo um triângulo) de área tão pequena quanto se queira, e é sempre



possível inscrever um polígono com área tão próxima da área do círculo quanto se queira. Assim, tal problema não tem solução mínima nem máxima.

No estudo desses problemas, na maioria das vezes, será feita uma demonstração construtiva da solução. Entretanto, em alguns casos, começaremos com a hipótese de que uma solução tenha sido encontrada, em seguida, analisaremos esta hipótese e extrairemos conclusões que finalmente nos permitirão descrever e construir a solução.

## 2.1 Argumento de Continuidade

O argumento de continuidade, que será utilizado aqui de forma intuitiva, pode ser enunciado da seguinte maneira: “Se uma certa grandeza (perímetro, área ou um ângulo), que depende de um outro valor (um lado, uma altura etc) que varia continuamente entre dois números (todos números reais), também varia de forma contínua em relação àquele valor, então esta grandeza pode assumir um valor máximo e/ou um valor mínimo”. Mais especificamente, se uma certa grandeza varia de um valor próximo a zero crescendo, e depois decrescendo novamente, então ela deve passar por um valor máximo. Se uma certa grandeza varia de um “valor grande”, decresce e volta a crescer, então ela deve passar por um mínimo. E assim há outras argumentações deste tipo.

Estes argumentos estão fundamentados de forma precisa em resultados do cálculo relativos a funções contínuas que são meras aplicações (ou exercícios) do teorema de Weierstrass:

**Teorema 1 (Teorema de Weierstrass)** *Seja  $f$  uma função contínua definida num intervalo fechado  $[a, b]$ . Então  $f$  é limitada e assume um máximo e um mínimo em  $[a, b]$ .*

Temos os seguintes exercícios (ou corolários deste teorema).

**Exercício 1** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua não negativa e não identicamente nula. Se  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , então  $f$  assume um máximo absoluto positivo em algum  $x$  real.*

**Exercício 2** Seja  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  contínua não negativa e não identicamente nula tal que  $f(0)=0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Então  $f$  assume um máximo absoluto em algum  $x > 0$ .

**Exercício 3** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Então  $f$  assume um mínimo absoluto em algum  $x$  real.

**Exercício 4** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que  $f(a)=f(b)=0$  e tal que existe um  $x_0 \in (a, b)$  com  $f(x_0) > 0$ . Então  $f$  atinge um máximo absoluto para algum  $x$  em  $(a, b)$ .

Vamos demonstrar a proposição do exercício 3:

De  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  e de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  temos que, dado  $N = f(0)$ , existem números  $a < 0 < b$  tais que se  $x < a$  ou se  $x > b$  então  $f(x) > f(0)$ . Considere então o intervalo  $[a, b]$ . Como  $f$  é contínua temos, pelo teorema de Weierstrass, que  $f$  atinge um mínimo (em relação ao intervalo  $[a, b]$ ) em um ponto  $x_0 \in [a, b]$ . Então  $f(x_0) \leq f(x)$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Em particular, como  $0 \in [a, b]$ ,  $f(x_0) \leq f(0)$ . Como  $f(0) < f(x)$  se  $x \in \mathbb{R} - [a, b]$  segue-se que  $f(x_0) \leq f(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , ou seja,  $x_0$  é mínimo absoluto de  $f$ .

O exercício 3 é aplicado na análise da existência de solução no problema de Heron, enquanto o exercício 2 é aplicado ao problema de Regiomontanus. Vamos dar um exemplo com detalhes de um problema geométrico de extremo onde se aplica o exercício 4.

**Problema:** dada uma circunferência de raio  $R$ , achar o triângulo isósceles inscrito nesta circunferência que tem área máxima.

**Solução** (usando cálculo):

Fixemos um ponto A na circunferência e consideremos a semi-reta  $\overrightarrow{AO}$ , que passa pelo centro O da circunferência, como o eixo x positivo.

Seja  $AM = x$ . Observe que se M está próximo de A, ou próximo de D, então a área do triângulo está próxima de zero. Os casos  $x = 0$  e  $x = 2R$  são soluções degeneradas, ou

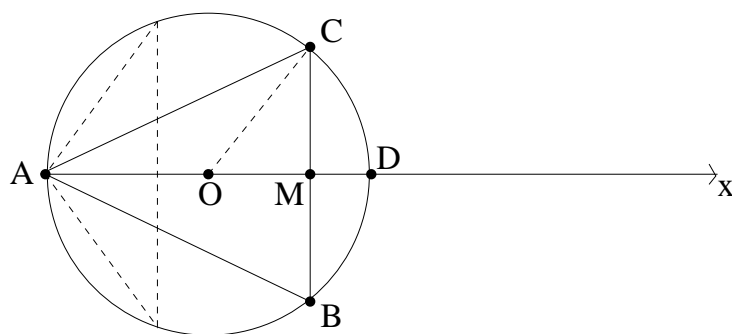


Figura 2.1: Análise do problema

seja, nestes casos o triângulo deixa de existir, e portanto a área é zero. Pelo exercício 4 existe um  $x$  tal que a área do triângulo correspondente é máxima.

Calculemos então a área do triângulo ABC, em função de sua altura  $x$ :

No triângulo OMC temos:

$$R^2 = (OM)^2 + (CM)^2 = (x - R)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

$$(BC)^2 = 4 [R^2 - (x - R)^2] = 4[2xR - x^2]$$

$$BC = 2\sqrt{2xR - x^2}$$

Daí:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{(AM)(BC)}{2} = x\sqrt{2xR - x^2} = f(x)$$

Derivando  $f$ , obtemos:

$$f'(x) = \sqrt{2xR - x^2} + x \cdot \frac{1}{2}(2xR - x^2)^{-1/2}(2R - 2x)$$

$$f'(x) = \frac{2xR - x^2 + x(R - x)}{\sqrt{2xR - x^2}} = \frac{3xR - 2x^2}{\sqrt{2xR - x^2}}$$

Então  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3xR - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = \frac{3R}{2}$ .

Note que  $f'(x) > 0$  se  $0 < x < \frac{3R}{2}$  e  $f'(x) < 0$  se  $\frac{3R}{2} < x < 2R$ .

Portanto  $x = \frac{3R}{2}$  é um ponto de máximo para  $f$ , e a área máxima será:

$$f\left(\frac{3R}{2}\right) = \frac{3R}{2} \sqrt{\frac{3R}{2} \left(2R - \frac{3R}{2}\right)} = \frac{3R^2}{4} \sqrt{3}$$

Segue-se que  $BC = 2\sqrt{2 \cdot \frac{3R}{2} \cdot R - \frac{9R^2}{4}} = 2\sqrt{\frac{3R^2}{4}} = R\sqrt{3}$ .

Portanto, como  $AM = x = \frac{3R}{2} = \frac{R\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$ , temos que o triângulo é equilátero.

Este problema pode ser resolvido sem o uso do cálculo.

Uma generalização do Teorema 1 que será utilizada no argumento de continuidade para o problema de Fermat e para problemas isoperimétricos é o seguinte:

**Teorema 2** *Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, onde  $D \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto fechado limitado. Então  $f$  atinge um máximo e um mínimo em  $D$ .*

## 2.2 Problema de Heron

**Problema:** Sejam uma reta  $l$  e dois pontos P e Q no mesmo lado de  $l$ . Achar um ponto R sobre  $l$  de tal forma que a soma  $PR + RQ$  seja mínima, ou seja, qual o caminho mais curto de P a Q tocando  $l$ ?

### 2.2.1 Solução do Problema de Heron

Pelo argumento de continuidade percebe-se que o problema tem solução. Ou seja, se o ponto R estiver “infinitamente à direita” na reta  $l$ , podemos perceber que a soma  $PR + RQ$  é muito grande. Se deslocarmos o ponto R para a esquerda em  $l$ , podemos perceber que a soma  $PR + RQ$ , variando continuamente, diminui e torna-se novamente muito grande quando estiver “infinitamente à esquerda” em  $l$ . Portanto, a soma  $PR + RQ$  passa por (pelo menos) um ponto em que ela é mínima. Logo o problema tem solução.

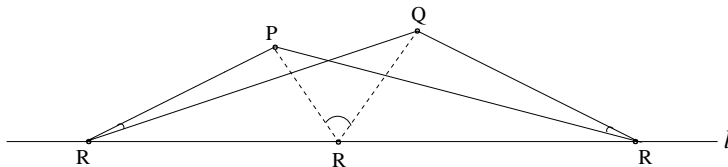


Figura 2.2: Análise da existência da solução

Para encontrar a solução do problema de Heron, basta refletirmos o ponto  $P$  em  $l$  (simétrico de  $P$  em relação a reta  $l$ ) obtendo o ponto  $P'$ , de modo que a reta  $l$  seja a mediatriz do segmento  $\overline{PP'}$ . Traçando a reta  $P'Q$ , percebemos que esta corta a reta  $l$  no ponto  $R$ . Agora é necessário provar que  $PR + RQ$  é o menor caminho de  $P$  a  $Q$  tocando em  $l$ . Escolhemos arbitrariamente um ponto  $R'$  sobre  $l$ . Vejamos que, se  $R \neq R'$  então  $PR + RQ$  é menor do que  $PR' + R'Q$ .

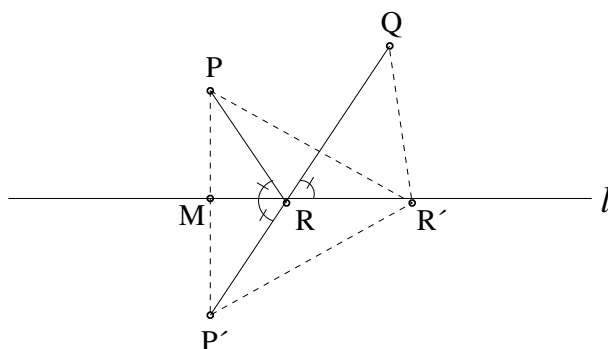


Figura 2.3: Solução do problema de Heron

Notemos que  $PR = P'R$  e  $PR' = P'R'$  portanto,  $PR + RQ = P'R + RQ = P'Q$  e  $PR' + R'Q = P'R' + R'Q$ . Analisando o triângulo  $P'R'Q$ , podemos observar que a soma  $P'R' + R'Q$  é maior do que  $P'Q$  pela desigualdade triangular: em todo triângulo cada lado é menor que a soma dos outros dois. Logo  $PR + RQ$  é o menor caminho de  $P$  a  $Q$  tocando  $l$  (a resolução seria análoga se refletíssemos o ponto  $Q$  no lugar de  $P$ , obtendo o mesmo ponto  $R$ ). Note que a solução é única pois, como vimos anteriormente, o ponto  $R$  fornece a menor soma  $PR + RQ = P'Q$  em relação a qualquer outro ponto  $R'$  em  $l$ .

Note ainda, que se a reta que passa por  $P$  e  $Q$  for perpendicular à reta  $l$ , a menor soma  $PR + RQ$  é dada pelos segmentos,  $\overline{PR}$  e  $\overline{RQ}$  perpendiculares a  $l$ , ou seja, o ponto  $R$  está situado no pé da reta perpendicular à reta  $l$  que passa por  $P$  e  $Q$ . Se a reta que passa por  $P$  e  $Q$  for paralela à reta  $l$  então é fácil ver que  $PR = RQ$ .

Observemos que as medidas  $\widehat{PRM}$ ,  $\widehat{P'RM}$ ,  $\widehat{QRR'}$  são iguais pois, os ângulos  $\angle P'RM$  e  $\angle QRR'$  são opostos pelo vértice (dois ângulos são opostos pelo vértice se os lados de um são as respectivas semi-retas opostas aos lados do outro) e portanto  $\widehat{P'RM} = \widehat{QRR'}$  e, como  $l$  é mediatriz do segmento de reta  $\overline{PP'}$ , temos que  $\widehat{PRM} = \widehat{P'RM}$ . Logo  $\widehat{PRM} = \widehat{P'RM} = \widehat{QRR'}$ , ou seja,  $R$  é o ponto tal que  $\overline{PR}$  e  $\overline{QR}$  formam ângulos iguais com  $l$ .

## 2.2.2 Variações do Problema de Heron

**Problema 1** : Dadas duas retas  $l$ ,  $m$  e dois pontos  $P$ ,  $Q$  situados entre estas retas, achar o caminho mais curto para se ir de  $P$  a  $Q$  tocando uma única vez em cada reta.

### Solução

Vamos resolver este problema indo primeiro de  $P$  a um ponto  $R$  em  $l$ , depois a um ponto  $S$  em  $m$  e finalmente de  $S$  a  $Q$ .

Para encontrar esta solução da variação do problema de Heron, basta utilizarmos o mesmo raciocínio que usamos para resolver o problema original.

Refletindo o ponto  $P$  em relação a reta  $l$  obtemos o ponto  $P'$  e refletindo o ponto  $Q$  em relação a reta  $m$  obtemos o ponto  $Q'$ . Traçando a reta  $P'Q'$ , percebemos que esta corta a reta  $l$  no ponto  $R$  e a reta  $m$  no ponto  $S$ . O que queremos provar é que a soma  $PR + RS + SQ$  é a menor possível. Agora, escolhemos arbitrariamente um ponto  $R'$  sobre  $l$  e um ponto  $S'$  sobre  $m$ , sendo  $R \neq R'$  e  $S \neq S'$ , então  $PR + RS + SQ$  é menor do que  $PR' + R'S' + S'Q$ .

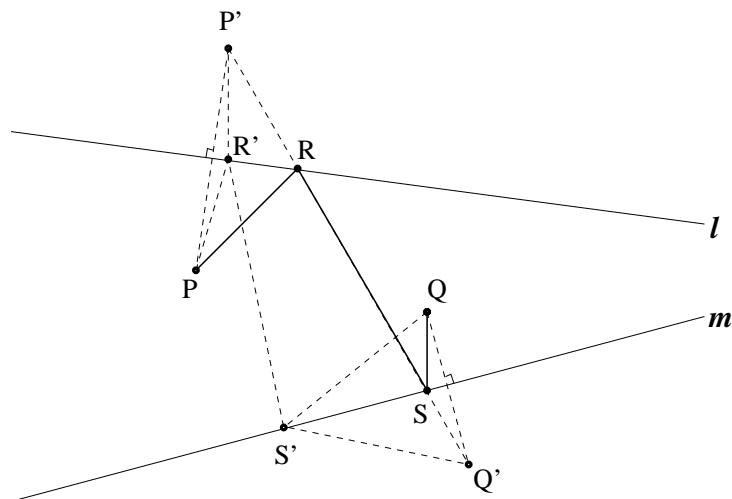


Figura 2.4: Variação do problema de Heron

Notemos que  $PR = P'R$  e  $QS = Q'S$  logo,  $PR + RS + SQ = P'R + RS + SQ' = P'Q'$ . Temos também que  $PR' = P'R'$  e  $Q'S' = Q'S'$  portanto,  $PR' + R'S' + S'Q = P'R' + R'S' + S'Q'$ . Podemos observar que a poligonal  $P'R'S'Q'$  tem comprimento maior do que o segmento  $\overline{P'Q'}$ , o que nos leva a concluir que a soma  $PR + RS + SQ$  é a menor

possível. Logo, R e S fornecem a menor soma  $PR + RS + SQ$  em relação a qualquer outros pontos R' em  $l$  e S' em  $m$ .

Também podemos achar o caminho mínimo encontrado acima de outra maneira, se refletirmos o ponto Q em relação a reta  $m$  obtemos o ponto  $Q'_1$ , depois se refletirmos o ponto  $Q'_1$  em relação a reta  $l$  obtemos o ponto  $Q''_1$ . Agora traçando o segmento  $\overline{PQ''_1}$ , podemos notar que este corta a reta  $l$  no ponto R e o segmento  $\overline{RQ'_1}$  corta a reta  $m$  no ponto S. Note que  $PR = P'R$ ,  $RQ''_1 = RQ'_1$  e  $SQ'_1 = SQ$ . Assim  $PQ''_1 = PR + RQ''_1 = PR + RQ'_1 = PR + RS + SQ = P'R + RS + SQ'_1 = P'Q'_1$ .

Portanto PRSQ é a mesma solução anterior, partindo de P, tocando primeiro em  $l$  e depois em  $m$ .

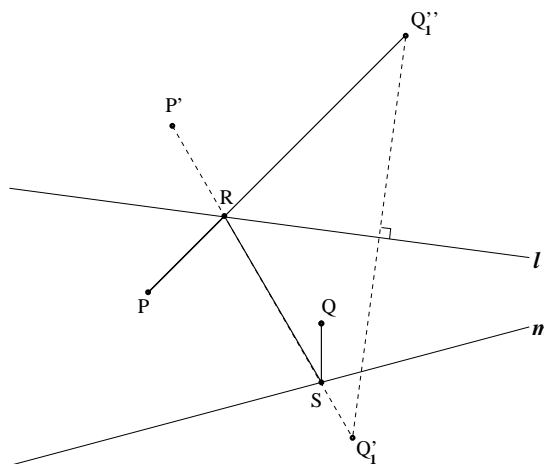


Figura 2.5:  $P'Q'_1 = PQ''_1$

Mas se agora, tomarmos R em  $m$  e S em  $l$ , ou seja, se formos primeiro de P para  $m$  e depois para  $l$  e finalmente para Q? Vamos resolver este caso de maneira análoga à solução acima. Iremos encontrar o simétrico do ponto Q em relação a reta  $l$  - o ponto  $Q'_2$  - e o simétrico do ponto  $Q'_2$  em relação a reta  $m$  - o ponto  $Q''_2$ . Traçando o segmento  $\overline{PQ''_2}$ , notemos que este corta a reta  $m$  no ponto R e o segmento  $\overline{RQ'_2}$  corta a reta  $l$  no ponto S. Logo  $PR + RS + SQ = PQ''_2$ , que é o caminho mínimo, indo de P a Q tocando primeiro em  $m$  e depois em  $l$ .

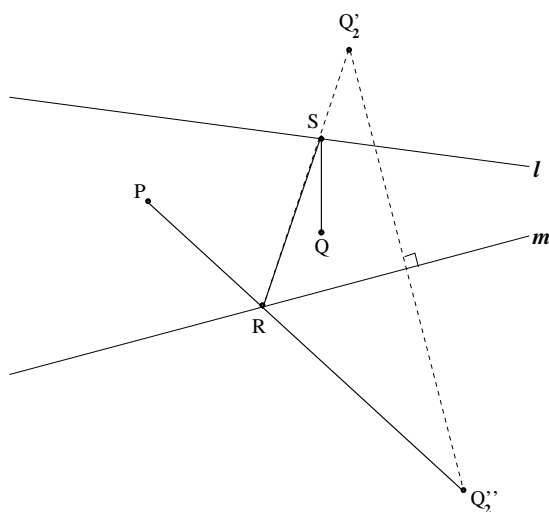


Figura 2.6:  $PQ''_2 = PR + RS + SQ$

O que queremos, é achar o caminho mínimo indo de P a Q. Partindo de P até o ponto R em  $l$ , de R até S em  $m$  e de S a Q, sabemos que o caminho da poligonal PRSQ é igual a  $PQ''_1$ . Se partirmos de P a R em  $m$ , e de R a S em  $l$ , e de S a Q, temos que o comprimento da poligonal PRSQ é igual a  $PQ''_2$ . Precisamos analisar qual caminho é menor, se é o segmento  $PQ''_1$  ou  $PQ''_2$ , e quando isso ocorre.

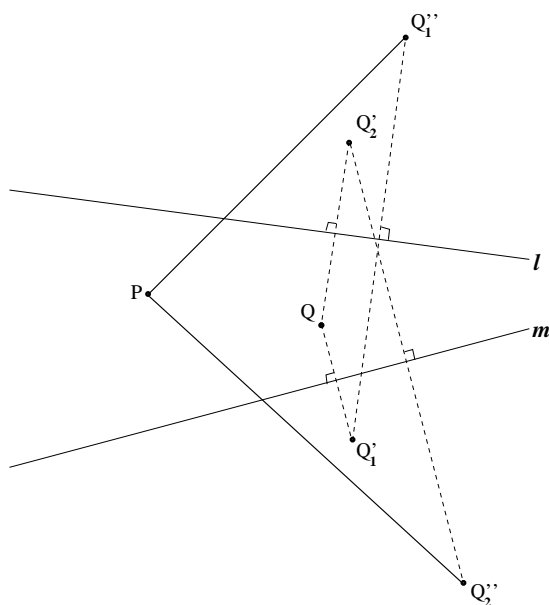


Figura 2.7: Qual o maior distância:  $PQ''_1$  ou  $PQ''_2$  ?

Agora, iremos analisar as duas situações juntas. Podemos notar que as retas  $l$  e  $m$  se



intersectam em um ponto  $O$  (no caso em que as retas  $l$  e  $m$  são concorrentes). Como  $Q$  e  $Q'_1$  são simétricos em relação à reta  $m$ , então  $QO = Q'_1O$ , e como  $Q'_1$  e  $Q''_1$  são simétricos em relação à reta  $l$ , então  $Q'_1O = Q''_1O$  (figura 2.8). Temos também que  $Q$  e  $Q'_2$  são simétricos em relação à reta  $l$ , então  $QO = Q'_2O$ . E como  $Q'_2$  e  $Q''_2$  são simétricos em relação à reta  $m$ , então  $Q'_2O = Q''_2O$ . Logo  $QO = Q'_1O = Q'_2O = Q''_1O = Q''_2O$ .

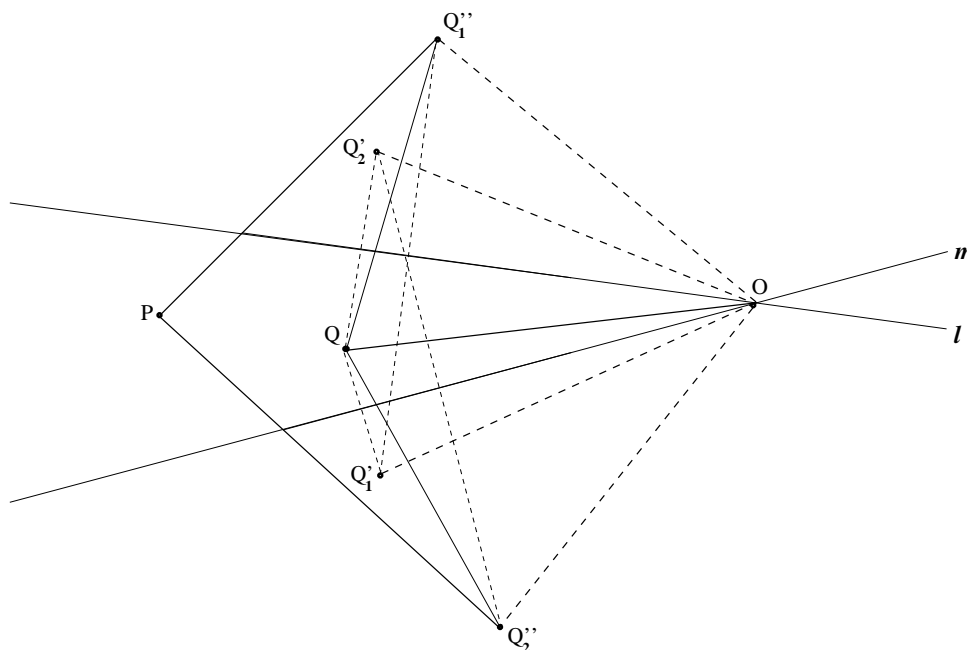


Figura 2.8:  $QO = Q'_1O = Q''_1O = Q'_2O = Q''_2O$

A reta  $l$  é bissetriz do ângulo  $\angle Q'_1OQ''_1$  e do ângulo  $\angle QOQ'_2$ . Logo  $Q'_2\hat{O}Q''_1 = Q'_1\hat{O}Q$ . A reta  $m$  é bissetriz do ângulo  $\angle Q''_2OQ'_2$  e do ângulo  $\angle Q'_1OQ$ . Logo  $Q'_2\hat{O}Q = Q'_1\hat{O}Q''_2$ . Segue-se que  $Q''_1\hat{O}Q = Q\hat{O}Q''_2$ , ou seja, a reta  $\overleftrightarrow{OQ}$  é bissetriz do ângulo  $\angle Q''_1OQ''_2$ . Assim, o triângulo  $Q''_1OQ''_2$  é isósceles (figura 2.9). Segue-se que a reta  $\overleftrightarrow{OQ}$  é perpendicular à sua base  $\overline{Q''_1Q''_2}$ .



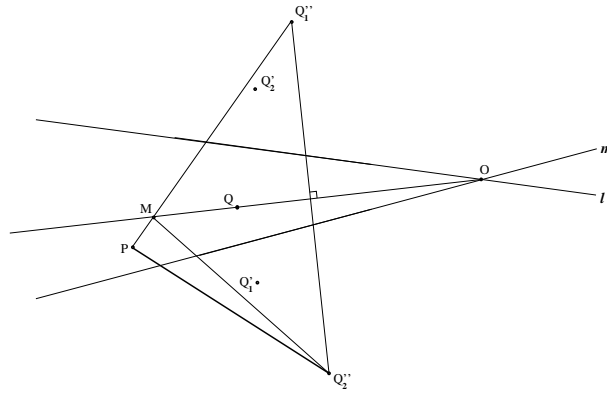


Figura 2.11: P está entre a reta que passa por O e Q e a reta  $m$

E quando P estiver sobre a reta  $\overleftrightarrow{OQ}$  teremos que,  $\overline{PQ_1''}$  é igual a  $\overline{PQ_2''}$ .

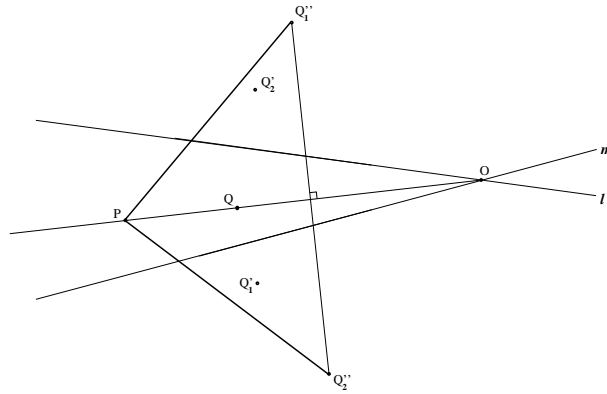


Figura 2.12: P está sobre a reta que passa por O e Q

Portanto podemos concluir que se P estiver entre a reta  $\overleftrightarrow{OQ}$  e a reta  $l$  o caminho mínimo será obtido indo primeiro de P a R em  $l$ , depois de R a S em  $m$  e finalmente de S a Q. Agora, se o ponto P estiver entre a reta  $\overleftrightarrow{OQ}$  e a reta  $m$  o caminho mínimo será obtido indo primeiro de P a R em  $m$ , depois de R a S em  $l$ , e finalmente de S a Q. E quando P estiver sobre a reta  $\overleftrightarrow{OQ}$  os caminhos serão iguais, tanto tocando primeiro a reta  $l$  ou a reta  $m$ . Neste último caso, o problema possui duas soluções distintas. Se o ponto O, intersecção das retas  $l$  e  $m$ , não estiver acessível (fora do papel) ou mesmo não existir (quando as retas  $l$  e  $m$  forem paralelas), então basta tomar a reta perpendicular ao segmento  $\overline{Q_1''Q_2''}$  que passa pelo ponto Q. Observe que quando as retas forem paralelas os pontos Q,  $Q_1'$ ,  $Q_1''$ ,  $Q_2'$  e  $Q_2''$  estão alinhados, ou seja, estão sobre a reta perpendicular às retas  $l$  e  $m$  por Q.

**Problema 2 :** Sejam dadas três retas  $l$ ,  $m$  e  $n$  sendo,  $l$  perpendicular a  $m$  e  $m$  perpendicular a  $n$ , e dois pontos  $P$  e  $Q$  entre as três retas. Encontrar o menor caminho para se ir de  $P$  a  $Q$  tocando uma única vez cada uma das três retas.

### Solução

Vamos resolver o problema indo de  $P$  a um ponto  $R$  em  $l$ , depois de  $R$  a um ponto  $S$  em  $m$ , depois de  $S$  a um ponto  $K$  em  $n$  e finalmente de  $K$  a  $Q$ .

Para resolver esse problema, basta refletirmos o ponto  $P$  em relação à reta  $l$  obtendo o ponto  $P'$ . Agora refletimos o ponto  $P'$  em relação à reta  $m$ , obtendo o ponto  $P''$  e refletindo o ponto  $Q$  em relação à reta  $n$  obtemos o ponto  $Q'$ . Traçando a reta que passa pelos pontos  $Q'$  e  $P''$ , podemos notar que esta corta a reta  $m$  em um ponto  $S$ , a reta  $n$  em um ponto  $K$  e a reta  $l$  em um ponto  $R'$ . Seja  $R$  o simétrico de  $R'$  em relação à reta  $m$  e suponha que  $S$  esteja entre as retas  $l$  e  $n$ . Então  $PRSKQ$  é o caminho mais curto para se ir de  $P$  a  $Q$  passando primeiro por  $l$ , depois por  $m$  e depois por  $n$ , ou seja,  $PR + RS + SK + KQ$  é mínimo.

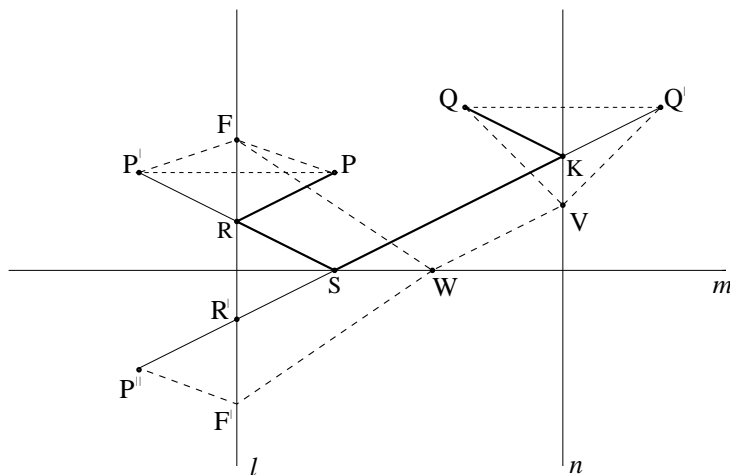


Figura 2.13:  $P''Q' < P''F' + F'W + WV + VQ'$

Vamos provar agora que  $PR + RS + SK + KQ \leq PF + FW + WV + VQ$ , para quaisquer pontos  $F$  sobre  $l$ ,  $W$  sobre  $m$  e  $V$  sobre  $n$ . Podemos notar que  $PR + RS + SK + KQ = P''Q'$  e, como  $PF = P'F = P''F'$ ,  $FW = F'W$  e  $QV = Q'V$ , teremos  $PF + FW + WV + VQ = P''F' + F'W + WV + VQ'$  (sendo  $F'$  o simétrico de  $F$  em relação à reta  $m$ ). Logo temos que a poligonal  $P''F'WVQ'$  tem comprimento maior ou igual ao do

segmento  $\overline{P''Q'}$ , a igualdade ocorrendo somente se  $F = R$ ,  $W = S$  e  $V = K$ . Portanto  $R$ ,  $S$  e  $K$  fornecem a menor soma  $PR + RS + SK + KQ$ .

O que ocorre agora se o ponto  $S$ , cruzamento de  $\overline{P''Q'}$  com a reta  $m$ , não estiver entre as retas  $l$  e  $n$ ? Sejam  $A$  e  $B$  respectivamente os pontos de cruzamento das retas  $l$  e  $m$  e de  $n$  e  $m$ . Então é fácil verificar que se  $P$  estiver entre  $\overline{Q'A}$  e a reta  $m$  (ver figura 2.14), então o segmento  $\overline{P''Q'}$  cruzará  $m$  em um ponto  $S$  à esquerda de  $l$ .

Neste caso tomando-se os pontos  $R$  e  $K$  como os pontos de cruzamento do segmento  $\overline{P''Q'}$  respectivamente com as retas  $l$  e  $n$ , o ponto  $S'$  em  $m$  como simétrico do ponto  $S$  em relação à reta  $l$ , teremos que a solução será dada pelo caminho  $PS'RKQ$ . Observe que neste caso ainda teremos  $PS' + S'R + RK + KQ = P''Q'$ .

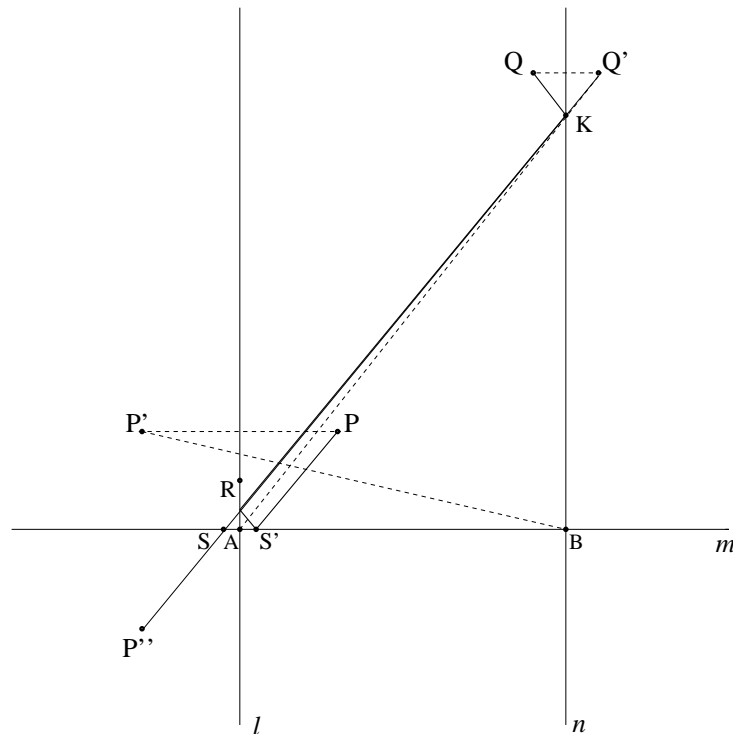


Figura 2.14:  $PS' + S'R + RK + KQ = P''Q'$

Analogamente, se  $Q$  estiver entre  $\overline{P'B}$  e a reta  $m$ , o menor caminho será de  $P$  a  $R$  em  $l$ , depois  $K$  em  $n$ ,  $S$  em  $m$  e finalmente  $Q$ .

Podemos concluir da análise feita acima que os caminhos serão obtidos refletindo o ponto  $P$  em relação a reta  $l$  obtendo o ponto  $P'$ , depois refletindo o ponto  $P'$  em relação a reta  $m$ , obtendo o ponto  $P''$  e refletindo o ponto  $Q$  em relação a reta  $n$  obtemos o ponto

$Q'$ . O caminho será obtido traçando o segmento  $\overline{Q'P''}$ . O outro caminho será obtido refletindo o ponto  $P$  em relação à reta  $n$ , obtendo um ponto  $P'''$  e depois refletido  $P'''$  em relação à reta  $m$ , obtendo o ponto  $P''''$  e refletindo  $Q$  em relação a reta  $l$  obtemos um ponto  $Q''$ . O caminho será obtido traçando o segmento  $\overline{Q''P''''}$ . Podemos notar que estes dois segmentos  $\overline{Q'P''}$  e  $\overline{Q''P''''}$  são as diagonais do paralelogramo  $Q'Q''P''P''''$ . De fato, os segmentos  $\overline{Q'Q''}$  e  $\overline{P''P''''}$  são paralelos à reta  $m$ , pois  $Q'$  e  $Q''$  estão à mesma distância da reta  $m$  e  $P''$  e  $P''''$  também estão à mesma distância da reta  $m$ . Além disso,  $Q'Q'' = 2AB$  e  $P''P'''' = 2AB$ . Portanto  $Q'Q''P''P''''$  é um paralelogramo.

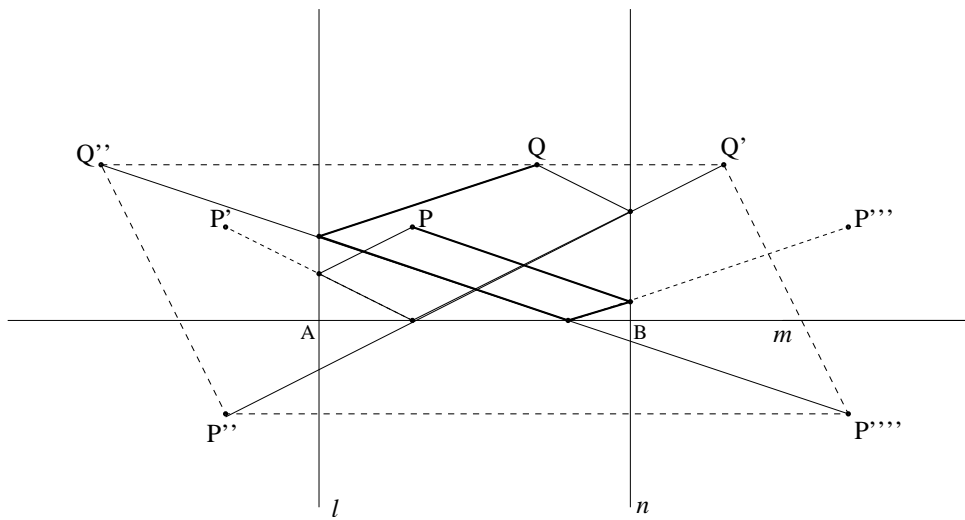


Figura 2.15:  $Q'Q''P''P''''$  é um paralelogramo

Então se os segmentos  $\overline{Q'P''}$  e  $\overline{Q''P''''}$  são as diagonais do paralelogramo  $Q'Q''P''P''''$  e sabendo que a diagonal que parte dos ângulos agudos de um paralelogramo é maior do que a diagonal que parte dos ângulos obtusos, podemos analisar qual é o menor caminho de  $P$  a  $Q$ , analisando apenas as diagonais do paralelogramo.

Agora iremos fixar o ponto  $P$  e variar o ponto  $Q$ . Traçamos a reta que passa pelo ponto  $P$  e pelo ponto  $B$  ( $B$  é o ponto de cruzamento das retas  $n$  e  $m$ ). Podemos notar que esta corta a reta  $l$  em um ponto  $U$ . Por este ponto traçamos uma reta paralela a  $m$  e refletimos o ponto  $B$  em relação a esta reta paralela, obtendo o ponto  $B'$  e então traçamos o segmento  $\overline{UB'}$  ( $UB = UB'$ ). O mesmo faremos traçando a reta que passa por  $P$  e  $A$  ( $A$  é o ponto de cruzamento das retas  $l$  e  $m$ ). Podemos notar que esta corta a reta  $n$  em um ponto  $V$  por este ponto traçamos uma reta paralela a  $m$  passando por  $V$  e refletimos o

ponto A em relação a esta reta paralela, obtendo o ponto A' e daí traçamos o segmento  $\overline{VA'}$  ( $VA = VA'$ ).

Estes dois segmentos  $\overline{UB'}$  e  $\overline{VA'}$  podem se cruzar determinando quatro regiões  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$  (veja figura 2.16). Se B' coincidir com V ou estiver abaixo de V, então a região  $D_3$  deixa de existir. Se o ponto U coincidir com A' ou estiver acima deste ponto, então a região  $D_2$  deixa de existir. Vamos analisar quais são os possíveis caminhos para se ir de P a Q no caso em que os dois segmentos  $\overline{UB'}$  e  $\overline{VA'}$  se cruzem.

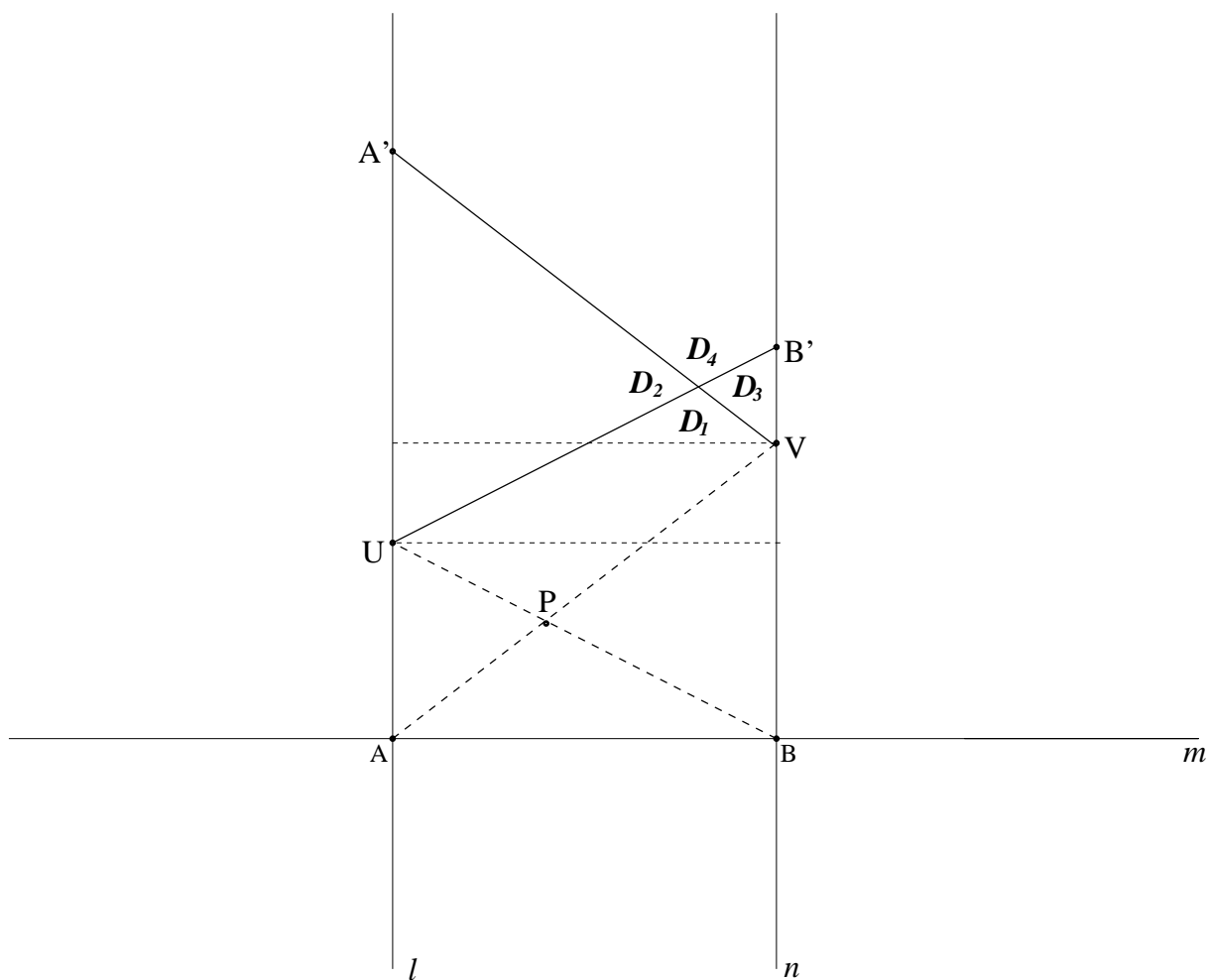


Figura 2.16: As regiões  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$ .

Como o ponto  $P$  está fixo, iremos variar o ponto  $Q$ . Inicialmente, vamos analisar o que ocorre se  $Q$  estiver na região  $D_1$  (e não estiver abaixo de  $\overline{P'B}$ ). Faremos o mesmo procedimento feito anteriormente para obter os dois caminhos possíveis para se ir de  $P$  a  $Q$ . Então um caminho será de  $P$  a  $R_1$  em  $l$ , de  $R_1$  a  $S_1$  em  $m$ , de  $S_1$  a  $K_1$  em  $n$ , e finalmente de  $K_1$  a  $Q$ , cujo comprimento é igual a  $Q'P''$ . O outro será de  $P$  a  $K_2$  em  $n$ , de  $K_2$  a  $S_2$  em  $m$ , de  $S_2$  a  $R_2$  em  $l$ , e finalmente de  $R_2$  a  $Q$ , cujo comprimento é igual a  $Q''P'''$  (figura 2.17).

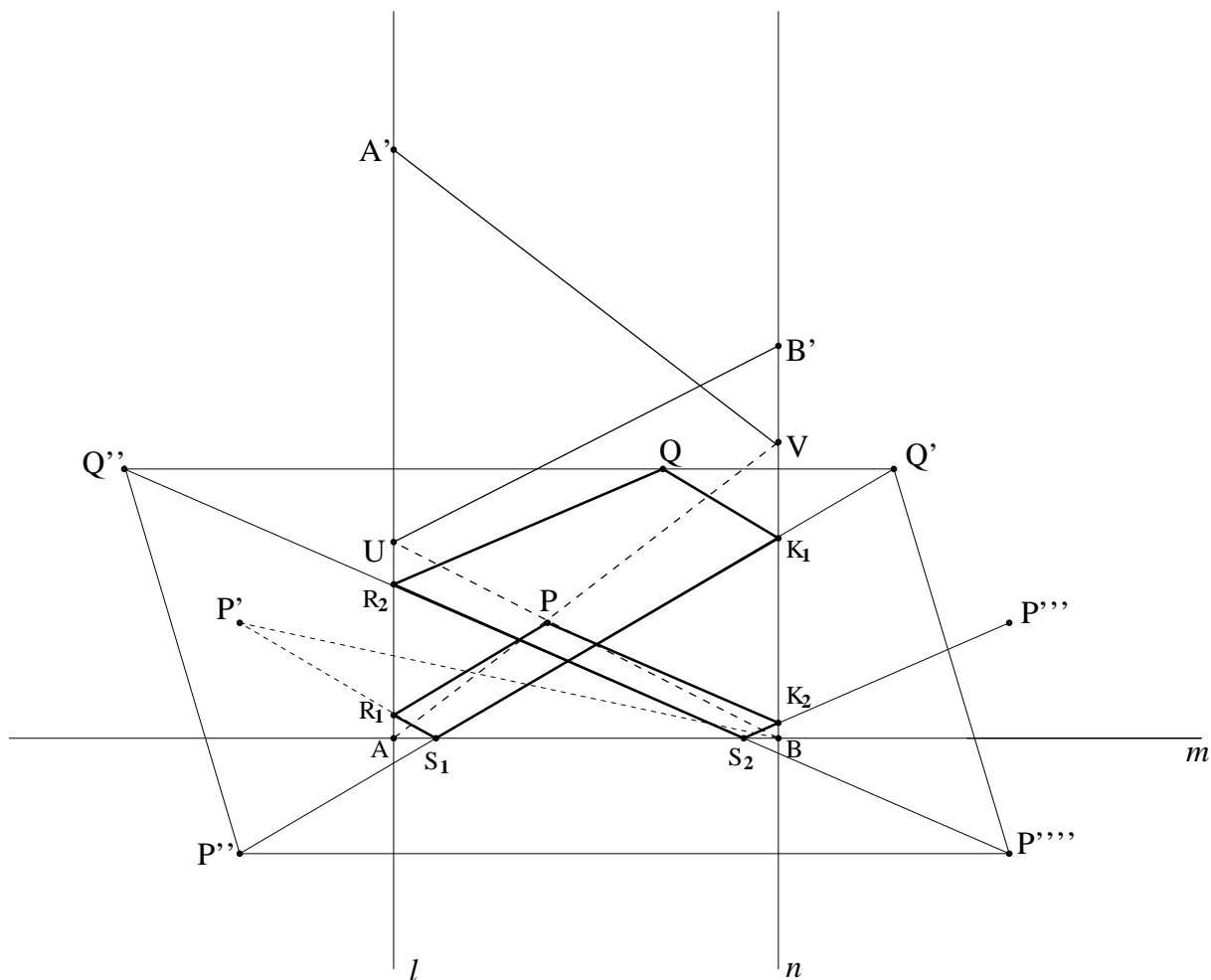


Figura 2.17:  $Q$  em  $D_1$



Se  $Q$  estiver na região  $D_2$ , então os possíveis caminhos são  $PR_1S_1K_1Q$ , com  $R_1$  em  $l$ ,  $S_1$  em  $m$  e  $K_1$  em  $n$ , de comprimento igual a  $Q'P''$ , e  $PS_2K_2R_2Q$ , com  $S_2$  em  $m$ ,  $K_2$  em  $n$  e  $R_2$  em  $l$ , e de comprimento igual a  $Q''P'''$  (figura 2.18).

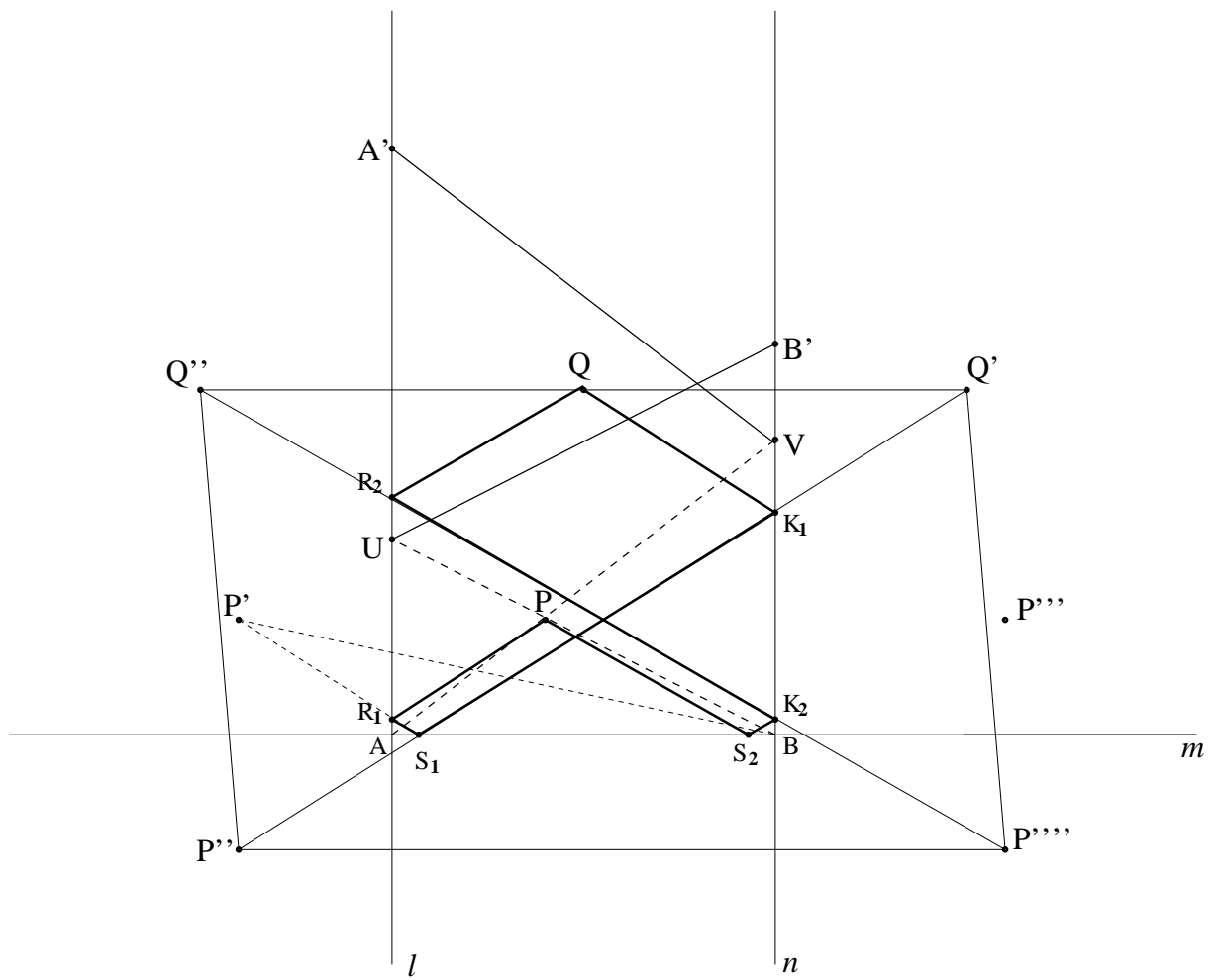


Figura 2.18:  $Q$  em  $D_2$

Se  $Q$  estiver na região  $D_3$ , então pode-se ir de  $P$  a  $Q$  por  $PS_1R_1K_1Q$ , com  $S_1$  em  $m$ ,  $R_1$  em  $l$  e  $K_1$  em  $n$ , de comprimento  $Q'P''$ , ou por  $PK_2S_2R_2Q$ , com  $K_2$  em  $n$ ,  $S_2$  em  $m$  e  $R_2$  em  $l$ , de comprimento  $Q''P''''$  (figura 2.19).

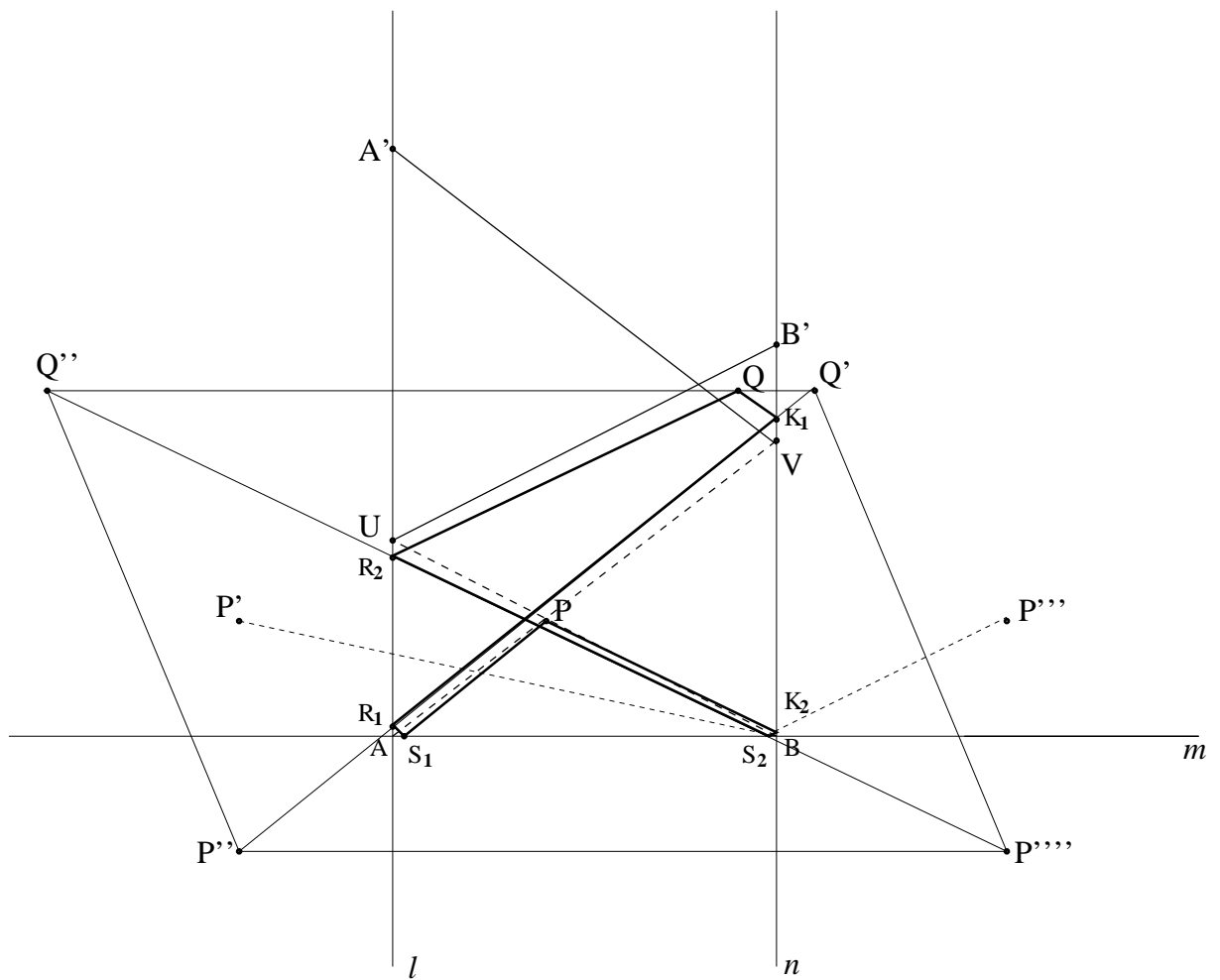


Figura 2.19:  $Q$  em  $D_3$

Finalmente, se  $Q$  estiver em  $D_4$ , então temos o caminho  $PS_1R_1K_1Q$ , com  $S_1$  em  $m$ ,  $R_1$  em  $l$  e  $K_1$  em  $n$ , de comprimento  $Q'P''$ , ou o caminho  $PS_2K_2R_2Q$ , com  $S_2$  em  $m$ ,  $K_2$  em  $n$  e  $R_2$  em  $l$ , de comprimento  $Q''P'''$  (figura 2.20).

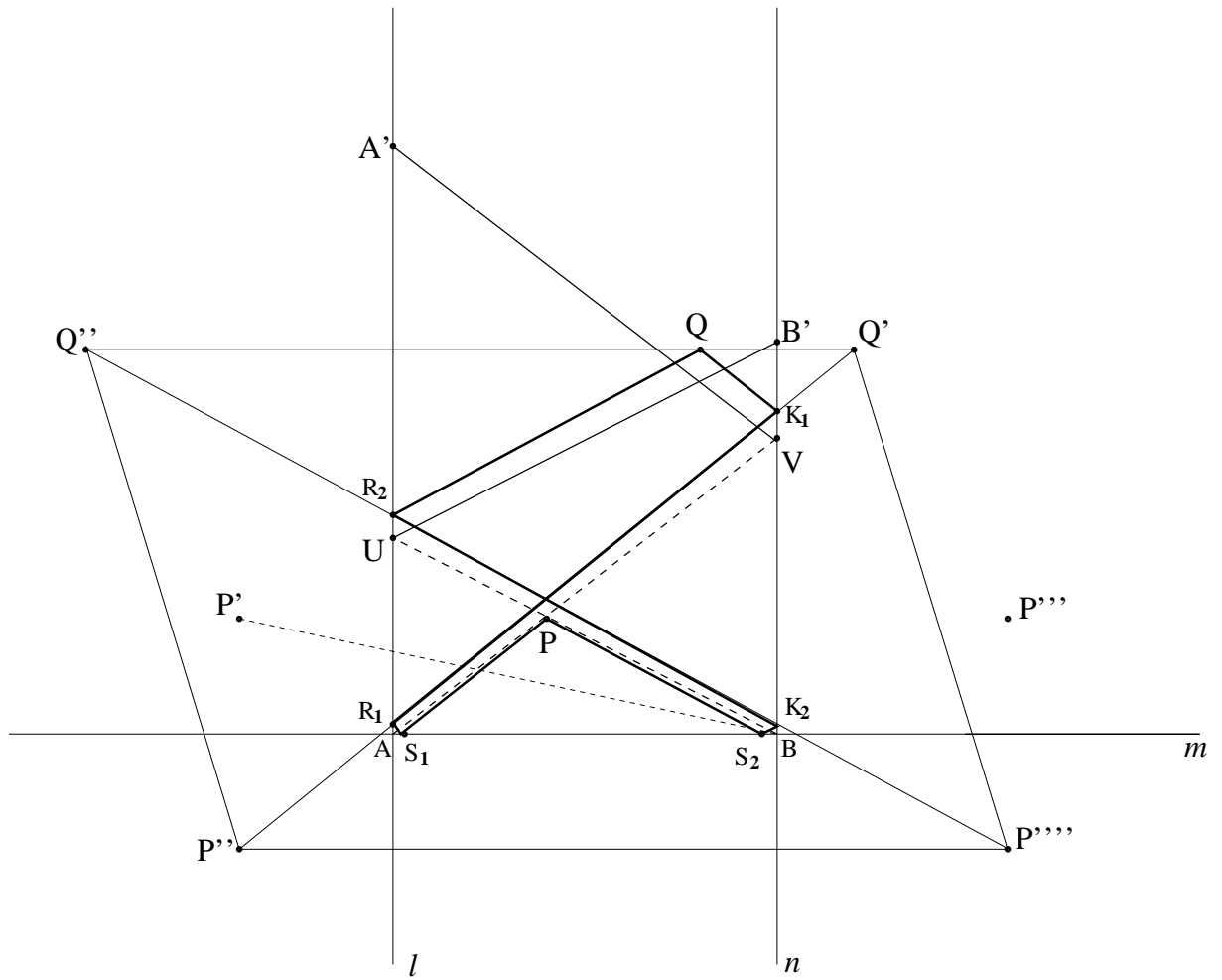


Figura 2.20:  $Q$  em  $D_4$

Em qualquer dos casos acima, a diagonal  $\overline{Q'P''}$  será menor do que a diagonal  $\overline{Q''P''''}$  se, e somente se o ponto Q estiver entre a reta  $n$  e a reta perpendicular a  $m$  que passa por P. Se Q estiver entre esta reta e a reta  $l$ , então  $Q''P'''' < Q'P''$

Podemos observar ainda que quando Q estiver alinhado com P (estiverem sobre a mesma reta perpendicular a  $m$ ) as distâncias  $Q''P''''$  e  $Q'P''$  serão iguais, pois agora teremos um retângulo  $Q'Q''P''P''''$ , e as diagonais do retângulo são iguais (figura 2.21). Neste caso, teremos duas soluções distintas para o problema.

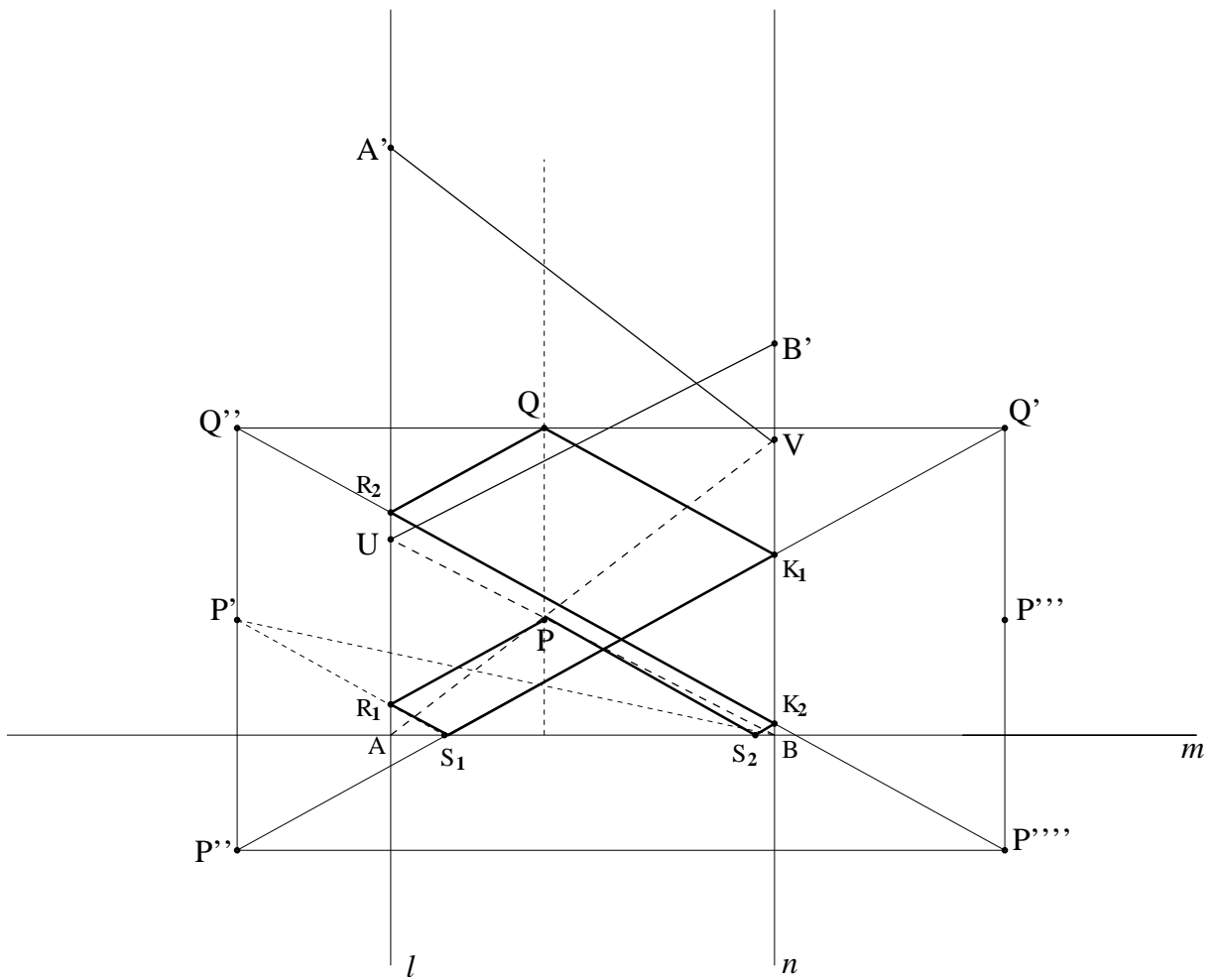


Figura 2.21: P e Q alinhados verticalmente.

Nos casos em que tivermos apenas três regiões, os caminhos serão os mesmos de acordo com a região em que Q estiver.

**Problema 3:** Dadas uma circunferência de centro em  $O$  e dois pontos  $P$  e  $Q$  fora dela (de modo que o segmento  $\overline{PQ}$  não interseccione a circunferência), encontrar um ponto  $C$  sobre a circunferência de modo que a soma  $PC + CQ$  seja mínima.

### Solução

Sabemos que uma elipse com focos em  $P$  e  $Q$  é o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a  $P$  e a  $Q$  é constante. Existem infinitas elipses com focos em  $P$  e  $Q$ .

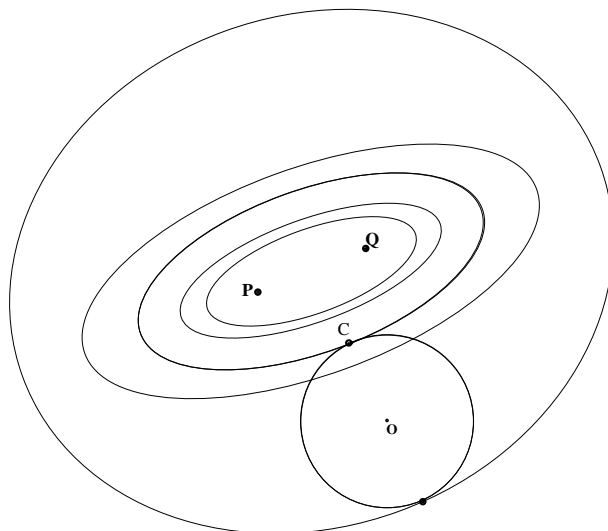


Figura 2.22: Elipses com focos em  $P$  e  $Q$

Observe que nenhuma dessas elipses se intersectam entre si. Quanto maiores forem os eixos da elipse, maior a soma das distâncias de qualquer ponto da elipse a  $P$  e a  $Q$ . Assim, o ponto  $C$  pode ser encontrado quando houver uma elipse que tangencie a circunferência (ficando a circunferência no exterior da elipse) pois, qualquer outra elipse que cruzar a circunferência (em dois pontos) terá eixo maior do que aquela elipse que tangencia a circunferência, e portanto a soma das distâncias dos pontos da intersecção a  $P$  e  $Q$  será maior.

Logo, a menor soma será obtida quando o ponto  $C$  for ponto de tangência da elipse com focos em  $P$  e  $Q$  com a circunferência de centro  $O$  (figura 2.23).

Qual a propriedade deste ponto de tangência?

Veremos que a reta que passa por  $O$  e  $C$  bissecta o ângulo  $\angle PCQ$  pois,  $\overline{OC}$  é perpendicular à reta tangente à elipse em  $C$  (que é reta tangente à circunferência também).

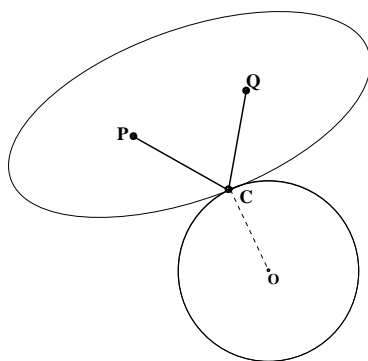


Figura 2.23: Elipse tangente a circunferência no ponto C

Como conseqüência disto teremos que  $P\hat{C}O = Q\hat{C}O$ , uma importante propriedade que será utilizada mais adiante na resolução do problema de Fermat.

Considere então a elipse com focos em F e F' e dois pontos P e Q na elipse. Seja  $r$  a reta que passa pelos pontos P e Q. O simétrico de F em relação a reta  $r$  é o ponto F''. Traçando o segmento de reta  $\overline{F'F''}$  podemos notar que este corta a reta  $r$  em um ponto A. O ponto A está entre os pontos P e Q pois,  $AF' + AF = AF' + AF'' = F'F'' < QF' + QF'' = QF' + QF$ , e portanto A está no interior da elipse. Logo A está entre P e Q.

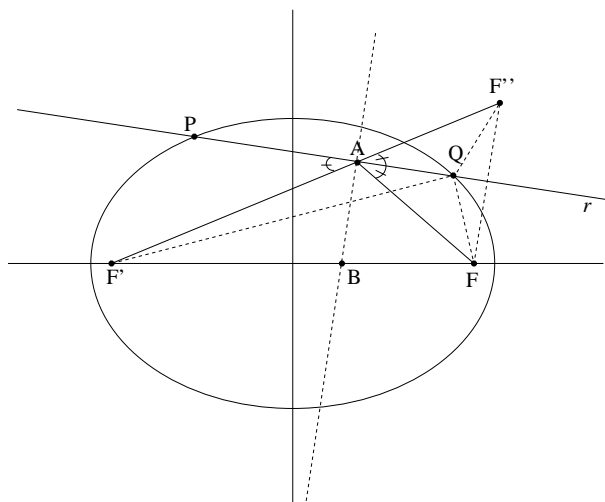


Figura 2.24: A semi-reta AB é bissetriz de  $\angle F'AF$

Agora, temos que os ângulos  $Q\hat{A}F = Q\hat{A}F'' = P\hat{A}F'$  e portanto  $F'\hat{A}B = F\hat{A}B$  (sendo B o ponto de intersecção da reta perpendicular a reta  $r$  passando pelo ponto A com o eixo dos focos da elipse). Esta propriedade será mantida quando os pontos P e Q se aproximarem, ou seja, quando a reta  $r$  for tangente a elipse.

**Problema 4:** Sejam dados a área  $S$  e um lado de um triângulo  $ABC$ . Encontrar entre todos os triângulos aquele que tem a soma mínima dos outros dois lados (ou seja, o perímetro mínimo).

### Solução

Seja  $\overline{AB}$  o lado dado do triângulo. Como a área  $S$  é dada então a sua altura  $h$  é dada por  $h = \frac{2S}{AB}$ . Escolher um lado e a área de um triângulo é equivalente a escolher o lado e a altura sobre esse lado. Então o problema consiste em encontrar um ponto  $C$  de tal forma que a distância de  $C$  ao segmento  $\overline{AB}$  seja igual a altura  $h$  dada (dada a reta perpendicular ao segmento passando pelo ponto  $C$ , temos que a distância do ponto  $C$  ao ponto de intersecção da reta com o segmento deve ser igual a altura), e tal que a soma dos lados  $AC + CB$  seja a menor possível. Portanto o ponto  $C$  deve estar sobre a reta  $l$  paralela ao segmento  $\overline{AB}$  e a uma distância  $h$  deste segmento.

A solução deste problema é dada da mesma forma da solução do problema de Heron. Basta então, refletir o ponto  $A$  em relação a  $l$ , obtendo assim o ponto simétrico  $A'$ .

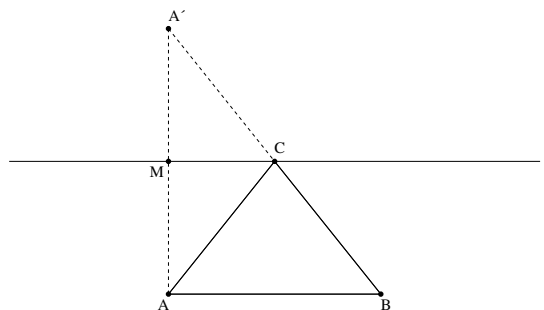


Figura 2.25:  $AC + CB$  mínima

Traçando a reta que passa pelos pontos  $A'$  e  $B$  podemos observar que esta corta a reta  $l$  em um ponto  $C$ , o qual fornece a menor soma  $AC + CB$ . Notemos ainda que a reta que passa pelos pontos  $A'$  e  $A$  corta a reta  $l$  em um ponto  $M$ , tal que  $A'M = AM$  ( $M$  é o ponto médio do segmento  $\overline{A'A}$ ). Então, como  $l$  é paralela a  $\overline{AB}$ ,  $l$  cruza o segmento  $\overline{A'B}$  em seu ponto médio (que é  $C$ ). Portanto temos que  $A'C = BC$ . Mas  $A'C = AC$ , logo  $AC = BC$ , formando assim um triângulo isósceles. Este é o caso especial do problema de Heron em que os pontos estão a uma mesma distância da reta.

**Problema 5:** Sejam dados um lado de um triângulo e a soma dos outros dois lados desse triângulo. Encontrar entre todos os triângulos o de área máxima.

**Solução**

Seja  $\overline{AB}$  o lado dado do triângulo ABC e seja  $k$  a soma dos outros dois lados:  $AC + CB = k$ . Queremos encontrar o triângulo ABC de área máxima. O lugar geométrico de todos os pontos C para os quais a soma  $AC + CB$  é dada, é a elipse, com focos em A e B com a medida do eixo maior igual à soma  $AC + CB$ . Agora, precisamos encontrar em que lugar da elipse C deve estar de modo que a área do triângulo ABC seja máxima. Esta área máxima é alcançada quando a altura for máxima. A altura máxima é obtida quando ela for a metade do eixo menor, ou seja, a reta perpendicular ao centro O da elipse corta a elipse em um ponto C, fornecendo a maior altura OC.

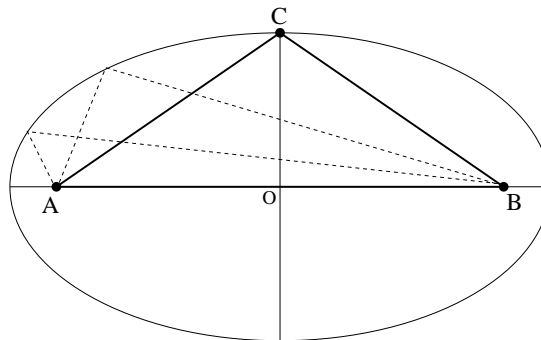


Figura 2.26: O triângulo ABC tem área máxima

Como o ponto C está sobre a reta perpendicular à origem, então  $AO = BO$ , ou seja, O é o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ . Portanto  $AC = CB$  e o triângulo procurado é o triângulo isósceles.

Este problema também pode ser resolvido alternativamente sem o uso da elipse utilizando apenas o problema 4 (o problema 5 é o “dual” do problema 4 no seguinte sentido: em ambos os problemas temos a base dos triângulos fixadas; no problema 4 a área é dada e o perímetro deve ser mínimo; no problema 5 o perímetro é dado e a área deve ser máxima).



Consideremos então o triângulo isósceles  $ABC$ , com  $AC = BC = \frac{k}{2}$ . Seja  $l$  a reta paralela ao segmento  $\overline{AB}$  passando por  $C$ .

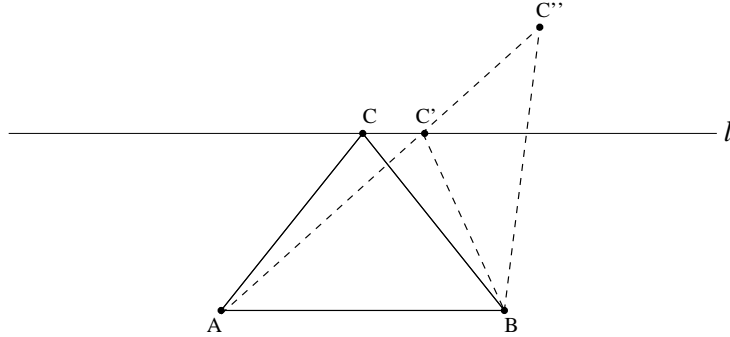


Figura 2.27:  $AC'' + C''B > AC' + C'B > AC + CB$ .

Para qualquer ponto  $C' \neq C$  em  $l$  teremos  $AC' + C'B > AC + CB$  (veja problema 4).

Para qualquer ponto  $C''$  acima de  $l$  (ou seja, tal que  $C''$  e  $\overline{AB}$  estejam em semiplanos distintos em relação à reta  $l$ ) também teremos  $AC'' + C''B = AC' + C'C'' + C''B > AC' + C'B > AC + CB$ . Logo, somente abaixo da reta  $l$  podemos ter outros pontos  $D$  tais que  $AD + DB = k$ , mas então a área do triângulo  $ABD$  será menor do que a área de triângulo  $ABC$ . Logo, o triângulo  $ABC$  tem área máxima com o perímetro dado.

**Problema 6:** Dados a reta  $l$ , um ponto  $P$  e uma circunferência  $\rho$  de centro  $O$  do mesmo lado de  $l$ , achar um ponto  $S$  sobre  $l$  e um ponto  $C$  sobre  $\rho$ , de tal forma que a soma  $PS + SC$  seja mínima.

### Solução

Inicialmente, podemos observar que a distância do centro  $O$  da circunferência a qualquer ponto sobre ela é sempre a mesma pois essa distância é o raio que é um valor constante. Então o problema se reduz em encontrar o ponto  $S$  em  $l$  de tal forma que a distância de  $P$  até  $S$  e de  $S$  até o centro  $O$  da circunferência seja mínima, ou seja, encontrar a menor soma  $PS + SO$ . Usando o mesmo raciocínio da solução do problema de Heron, basta então refletirmos o ponto  $P$  em relação a reta  $l$ , obtendo assim o ponto  $P'$ . Traçando o segmento de reta que une o centro  $O$  da circunferência com o ponto  $P'$ , podemos notar que este segmento corta a reta  $l$  em um ponto  $S$  e a circunferência  $\rho$  em

um ponto  $C$ . Do problema de Heron sabemos que o ponto  $S$  fornece a menor soma  $PS + SO$ . Vamos provar agora que  $PS + SC \leq PS' + S'C'$ , quaisquer que sejam os pontos  $S'$  em  $l$  e  $C'$  em  $\rho$ , a igualdade ocorrendo somente se  $S' = S$  e  $C' = C$ .

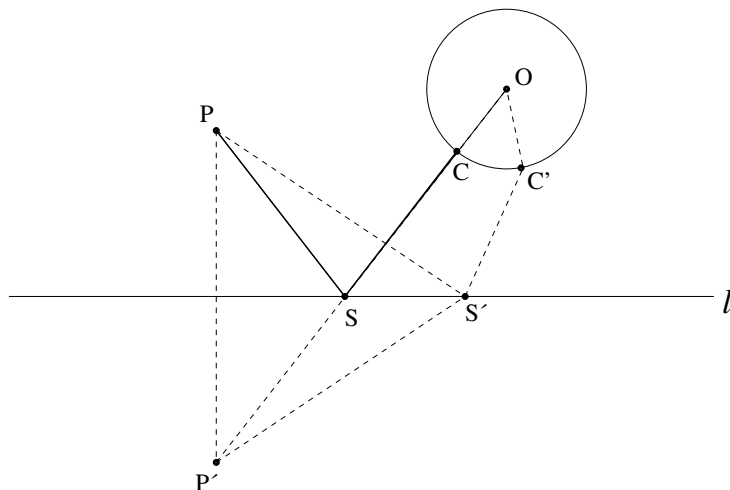


Figura 2.28:  $PS + SC \leq PS' + S'C'$

Como  $PS = P'S$  e  $PS' = P'S'$  temos então que  $PS' + S'C' + C'O = P'S' + S'C' + C'O > P'O = P'S + SC + CO = PS + SC + CO$ . Daí, como  $C'O = CO$ , temos  $PS' + S'C' > PS + SC$ , se  $C' \neq C$ .

**Problema 7:** Dadas uma reta  $l$ , e duas circunferências,  $\rho$  de centro  $O$  e  $\tau$  de centro  $U$  (ambas distintas) do mesmo lado de  $l$ , achar um ponto  $P$  sobre  $l$ , um ponto  $C$  sobre  $\rho$  e um ponto  $D$  sobre  $\tau$ , de tal forma que a soma  $CP + PD$  seja mínima.

### Solução

A solução desse problema é semelhante à solução do problema anterior. A distância de qualquer ponto de uma circunferência ao seu centro é sempre igual ao raio da circunferência, ou seja, é constante. Portanto o problema se reduz a encontrar a menor soma  $OP + PU$  e acabamos novamente na solução do problema de Heron. Então, basta encontrarmos a circunferência simétrica de  $\rho$  em relação a reta  $l$ . Seja  $\rho'$  esta circunferência e seja  $O'$  o seu centro. Se traçarmos a reta que liga os pontos  $O'$  e  $U$ , podemos observar que esta reta corta a reta  $l$  em um ponto  $P$ , a circunferência  $\rho'$ , em um ponto  $C'$  e a circunferência  $\tau$  em  $D$ . Do problema de Heron sabemos que o ponto  $P$  fornece a menor

soma  $OP + PU$ . Seja então  $C$  o simétrico de  $C'$  em relação à reta  $l$ . Então  $C$  está em  $\rho$ .

Vamos provar agora que  $CP + PD \leq RP' + P'Q$ , quaisquer que sejam os pontos  $R$  sobre  $\rho$  e  $Q$  sobre  $\tau$  e  $P'$  sobre a reta  $l$ , a igualdade ocorrendo somente se  $P' = P$ ,  $R = C$  e  $Q = D$ .

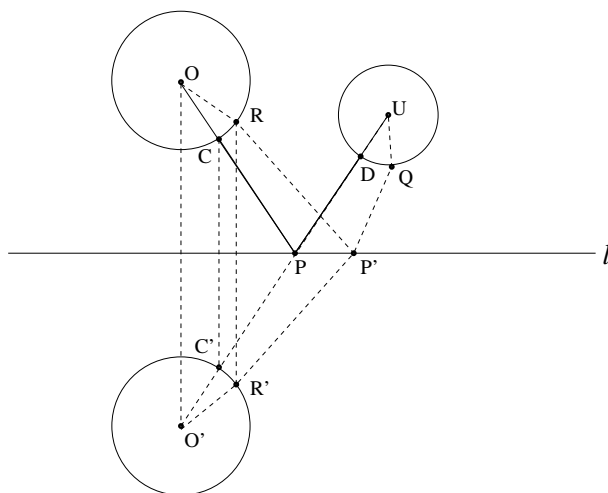


Figura 2.29:  $CP + PD < RP' + P'Q$

Seja  $R'$  o simétrico de  $R$  em relação à reta  $l$ . Então  $R'$  está na circunferência  $\rho'$ . A poligonal  $O'R'P'QU$  tem comprimento maior ou igual ao segmento  $\overline{O'U}$ . Como temos que  $OC + CP + PD + DU = O'C' + C'P + PD + DU = O'U < O'R' + R'P' + P'Q + QU = OR + RP' + P'Q + QU$  e como sabemos que a distância do centro de qualquer circunferência a qualquer ponto sobre ela é sempre a mesma (essa distância é o raio que é constante), ou seja,  $OC = OR$  e  $DU = QU$ , então podemos concluir que  $CP + PD \leq RP' + P'Q$ . Note que a igualdade ocorre somente se  $P' = P$ ,  $R = C$  e  $D = Q$ . Logo a soma  $CP + PD$  é mínima.

**Problema 8:** As paralelas  $r$  e  $s$  são as margens de um rio e os pontos  $A$  e  $B$  representam cidades em lados opostos desse rio ( $A$  do lado da margem  $r$ , e  $B$  do lado da margem  $s$ ). Deseja-se construir uma ponte  $PQ$  ( $P \in r$ ,  $Q \in s$ ), perpendicular às margens, de forma que construindo as estradas  $AP$  e  $BQ$  o percurso total de  $A$  a  $B$  seja mínimo (ou seja,  $AP + PQ + QB$  seja mínimo). Determinar a posição da ponte.

Obs.: Este problema não é, na verdade, uma variação do problema de Heron, porém está relacionado à resolução do problema de Heron.

### Solução

Para encontrarmos a posição da ponte que fornece o percurso mínimo da cidade A até à cidade B basta traçarmos a reta  $l$  perpendicular à reta  $s$  que passa pelo ponto B (notemos que  $l$  é perpendicular a  $r$  também pois,  $s$  e  $r$  são paralelas). Observamos que esta corta a reta  $s$  em um ponto S e a reta  $r$  em um ponto R. Transportando a medida SR sobre a reta  $l$  a partir de B, obtemos um ponto B' sobre  $l$ . Então  $BB' = SR$ . Agora, traçando a reta que passa pelos pontos B' e A podemos observar que esta corta a reta  $r$  em um ponto P. Traçando a reta perpendicular a  $s$  pelo ponto P, observamos que esta corta a reta  $s$  em um ponto Q. Precisamos mostrar que essa posição dos pontos P e Q fornecem a menor soma  $AP + PQ + QB$ .

Sabemos que o comprimento da ponte é constante pois as margens do rio são paralelas e a ponte é perpendicular as margens, ou seja,  $PQ$  é constante. Então o que queremos é encontrar a menor soma  $AP + BQ$ .

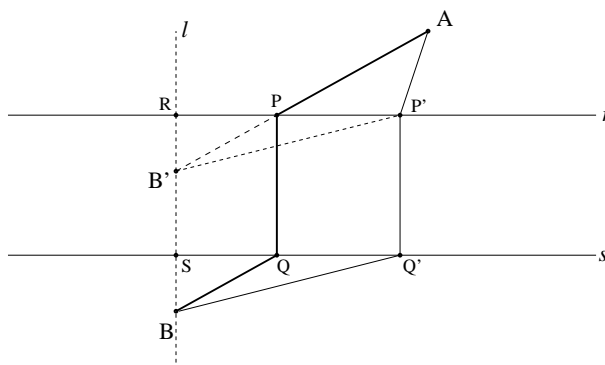


Figura 2.30:  $AP + PQ + QB$  mínima

Como  $\overline{BB'}$  e  $\overline{PQ}$  são paralelos concluímos que  $BQP B'$  é um paralelogramo e portanto  $BQ = B'P$ . Logo  $AP + BQ = AP + B'P = AB'$ . Escolhendo arbitrariamente um ponto  $P' \neq P$  sobre  $r$ , traçando a perpendicular a reta  $s$  por  $P'$ , esta corta a reta  $s$  em um ponto  $Q'$ . Como  $\overline{BB'}$  e  $\overline{P'Q'}$  são paralelos e têm a mesma medida, então  $BQ'P'B'$  é um paralelogramo e portanto  $B'P' = BQ'$ . Da desigualdade triangular, temos que  $AP' + P'B' > AB' = AP + B'P$ , ou seja,  $AP' + P'Q' + Q'B > AP + PQ + QB$ .

## 2.3 Problema de Regiomontanus

**Problema:** Suponha uma estátua de altura  $h$  sobre um pedestal de altura  $p$ . Um homem de altura  $m$  ( $m < p$ ) enxerga do pé ao topo da estátua sob um ângulo  $\alpha$ , que varia de acordo com a distância  $d$  entre o homem e a base do pedestal. Determinar  $d$  para que o ângulo de visão  $\alpha$  seja o maior possível (um maior ângulo de visão determinará uma imagem maior na retina ou, de outra forma, uma visão mais completa do objeto).

### 2.3.1 Solução do Problema de Regiomontanus

Apresentaremos aqui uma solução simples do problema de Regiomontanus usando apenas geometria em sua resolução. Não se sabe se Regiomontanus foi o autor desta solução.

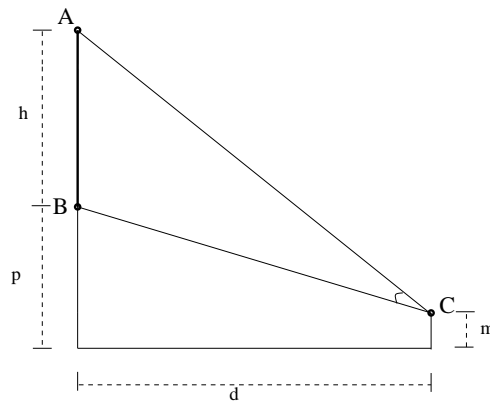


Figura 2.31: Representação geométrica do problema

Inicialmente, iremos denominar o ponto A como sendo o topo da estátua, o ponto B como sendo o pé da estátua e o ponto C como sendo os olhos do observador. Usando o argumento de continuidade podemos perceber que o problema tem solução. Se o ponto C estiver “infinitamente à direita” da estátua, podemos notar que o ângulo de visão é muito pequeno. Se o ponto C for se aproximando da estátua, poderemos notar que o ângulo de visão aumenta, e a partir de um determinado momento ele passa a diminuir novamente, até tornar-se zero( quando o observador encontra-se no pé da estátua). O mesmo ocorre, se o observador estiver à esquerda da estátua. Assim, deve existir uma posição para o ponto C tal que o ângulo  $\alpha = \widehat{ACB}$  de visão é máximo, e portanto o problema tem solução.

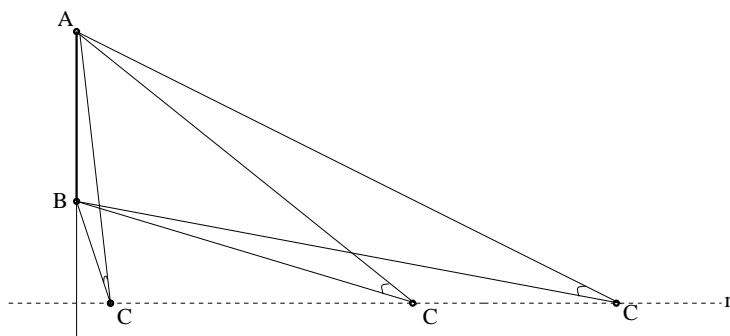


Figura 2.32: Análise da existência da solução

Um ângulo é dito inscrito em uma circunferência se seu vértice pertencer à circunferência e seus lados forem semi-retas secantes a ela. Prova-se que todo ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do arco delimitado por seus lados, ou seja, é igual à metade da medida do ângulo central correspondente àquele arco.

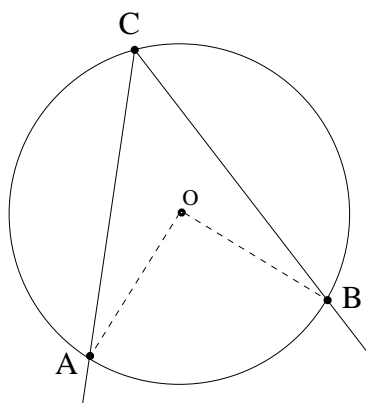


Figura 2.33:  $2\hat{A}CB = \hat{A}OB$

Daí, o teorema dos ângulos internos (arco-capaz): qualquer ponto C sobre o arco AB (em um mesmo semiplano relativo à reta que passa por A e B) determina um ângulo  $\angle ACB$  de medida única e igual à metade da medida do ângulo central  $\angle AOB$ .

Além disso, qualquer ponto P no interior da região delimitada pela corda  $\overline{AB}$  e pelo arco AB no mesmo semiplano do arco AB forma, com A e B um ângulo maior do que o ângulo inscrito no arco AB, e qualquer ponto Q no exterior desta região, e no mesmo semiplano do arco AB, forma com A e B um ângulo menor do que o ângulo inscrito no arco AB.

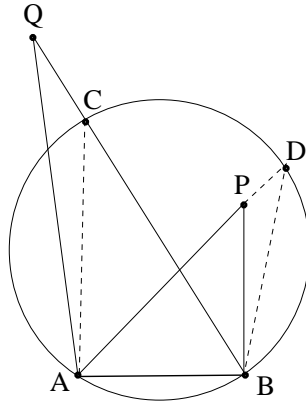


Figura 2.34:  $A\hat{Q}B < A\hat{C}B = A\hat{D}B < A\hat{P}B$

Isto nos sugere que a solução do problema de Regiomontanus pode ser obtida traçando-se a circunferência que passa por A e B e é tangente à reta paralela à linha do chão e que passa pelo olho do observador (C). Qualquer outro ponto desta reta pertencerá a uma circunferência passando por A e B de raio maior do que a circunferência tangente, e portanto exterior a esta, produzindo assim um ângulo de observação menor.

Para construirmos então a solução traçamos a reta  $r$  paralela à linha do chão que passa pelo ponto C. Agora, traçamos então a (única) circunferência que passa pelos pontos A e B que tangencia a reta  $r$ . Esta circunferência tem centro na mediatriz do segmento  $\overline{AB}$  e raio igual à distância do ponto médio do segmento  $\overline{AB}$  até a reta  $r$ . Encontrado o raio, traça-se a circunferência que passa pelos pontos A e B e tangencia a reta  $r$  em um ponto  $C'$ . O que queremos mostrar agora é que o ponto de tangência  $C'$  fornece a distância para que o ângulo de visão seja o maior possível.

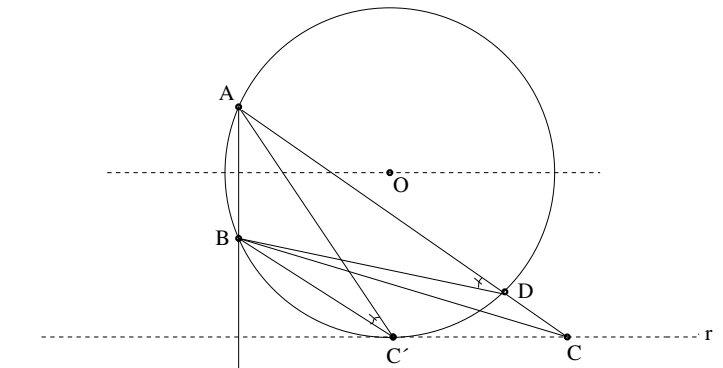


Figura 2.35:  $A\hat{C}'B$  é máximo

Consideremos que o ponto C percorre livremente a reta  $r$ . Para uma determinada posição de C o ângulo  $\alpha$  será o maior possível. Queremos mostrar que  $\widehat{A\hat{C}'B} > \widehat{A\hat{C}B}$ . Seja D o ponto de intersecção da reta que passa pelos pontos A e C com a circunferência. Note que  $\widehat{A\hat{C}'B} = \widehat{A\hat{D}B}$ , pelo Teorema dos ângulos internos, o que nos permite escrever que ( $\angle ADB$  é ângulo externo relativo ao vértice D no  $\triangle DBC$ ):

$$\widehat{A\hat{C}'B} = \widehat{A\hat{D}B} = \widehat{A\hat{C}B} + \widehat{D\hat{B}C} > \widehat{A\hat{C}B}.$$

Portanto o ponto de tangência  $C'$  forma o ângulo máximo de visão. Seja  $d$  a distância do ponto de tangência  $C'$  (observador) à base do pedestal.

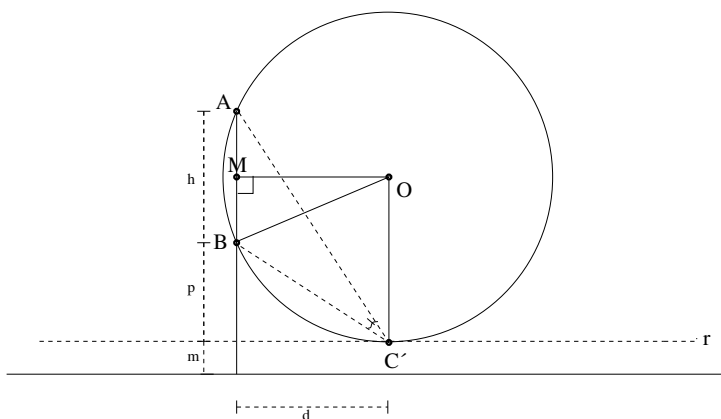


Figura 2.36:  $d^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$

Verificado que  $C'$  é o ângulo de campo visual máximo, iremos determinar agora, usando o teorema de Pitágoras, a distância  $d$  entre o observador e a base da estátua. Sabemos que o raio  $R = h/2 + (p-m)$ . Logo aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo BMO (sendo M o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ , O o centro da circunferência e B o pé da estátua) obtemos:

$$d^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} \Rightarrow d^2 = (p - m)(p - m + h).$$



### 2.3.2 Variações do Problema de Regiomontanus

**Problema 1:** São dados os pontos A e B de um mesmo lado de uma reta  $r$ . Determinar o ponto P sobre  $r$  de forma que o ângulo  $\hat{A}PB$  seja máximo.

#### Solução

Podemos observar que o problema tem solução fazendo a mesma análise que fizemos para a existência da solução do problema de Regiomontanus. No problema de Regiomontanus os pontos A e B estavam sobre a reta perpendicular a reta  $r$ , e a solução do problema era dada pela circunferência tangente a reta  $r$  passando pelos pontos A e B, o ponto de tangência fornecendo o ângulo de visão máxima. Agora o que temos são dois pontos A e B em posições quaisquer do mesmo lado da reta  $r$ . Então a solução deste problema é dada da mesma maneira que o problema de Regiomontanus. Porém, não é tão simples encontrar a circunferência tangente à reta  $r$  passando por A e B.

O que queremos então é encontrar o ponto P de tangência da circunferência que passa pelos pontos A e B com a reta  $r$ . Para construirmos a solução do problema traçamos inicialmente a reta que passa pelos pontos A e B. Podemos notar que se  $r$  não for paralela à reta  $\overleftrightarrow{AB}$  então esta cortará a reta  $r$  em um ponto C. Se C é um ponto fixo fora da circunferência, o produto  $(CA).(CB)$  é constante. Este produto  $(CA).(CB)$  é também denominado a potência do ponto C em relação à circunferência. Como a reta secante passando pelos pontos A e B e a reta tangente passando pelo ponto de tangência à circunferência se intersectam no ponto C temos que:  $(CP)^2 = (CA).(CB)$ .

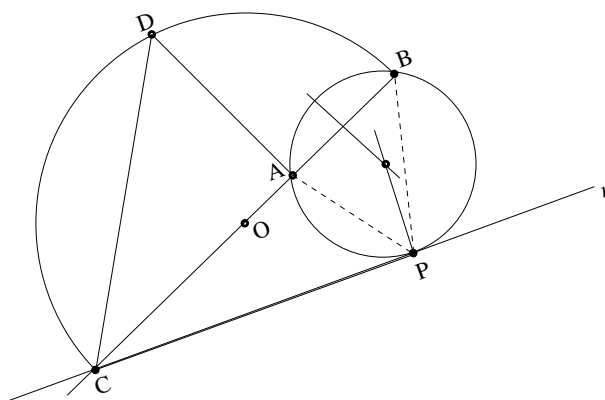


Figura 2.37:  $\hat{A}PB$  é máximo

Então, obtendo o ponto médio  $O$  do segmento  $\overline{BC}$  e com um compasso centrado em  $O$  e raio  $\overline{OC}$ , traçamos uma semi-circunferência (arco-capaz de  $90^\circ$ ). O segmento vertical traçado para cima a partir de  $A$  encontrará a semi-circunferência em um ponto  $D$ . Das relações métricas do triângulo retângulo temos  $(CA).(CB) = (CD)^2$  o que nos permite concluir que  $(CD)^2 = (CP)^2$ . Então basta traçarmos uma circunferência com raio de medida  $CD$ , esta corta a reta  $r$  no ponto  $P$ , o qual fornece o maior ângulo  $\hat{A}PB$ . Portanto, para encontrarmos o centro da circunferência que tangencia  $r$  em  $P$  basta levantarmos a perpendicular à reta  $r$  pelo ponto  $P$  e a mediatriz do segmento  $\overline{AB}$ , o ponto intersecção será o centro da circunferência tangente à reta  $r$ .

Este problema também é conhecido como o problema do cinema, ou seja, em que lugar em uma arquibancada inclinada devemos sentar para termos o maior ângulo de visão da tela, o qual é resolvido da mesma maneira, considerando a arquibancada como sendo a reta  $r$  e o segmento  $\overline{AB}$  como sendo a tela do cinema (note que, qualquer que seja o ângulo de inclinação entre  $r$  e  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $CP$  é a mesma). O problema original de Regiomontanus pode ser resolvido desta maneira.

Agora, se  $r$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  forem paralelas, então o ponto  $P$  é obtido diretamente da intersecção da mediatriz de  $\overline{AB}$  com a reta  $r$  (o centro da circunferência é obtido então pela intersecção da mediatriz de  $\overline{AP}$  com a mediatriz de  $\overline{AB}$ ).

**Problema 2:** São dados os pontos  $A$  e  $B$  e uma circunferência  $\rho$  de centro  $O$ . Determinar o ponto  $T$  sobre  $\rho$  de forma que o ângulo  $\hat{A}TB$  seja máximo.

### Solução

A existência da solução deste problema é consequência do Teorema 2, da seção 2.1, e o problema terá valor máximo e valor mínimo.

Agora, temos em vez de uma reta uma circunferência  $\rho$  de centro em  $O$ . A solução deste problema será a mesma do problema de Regiomontanus e do problema acima, ou seja, será o ponto de tangência da circunferência que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  com a circunferência  $\rho$  dada. Mas não é tarefa tão simples encontrar esta circunferência. Aqui temos vários casos: os pontos  $A$  e  $B$  exteriores a  $\rho$  e  $\overline{AB}$  não cruzando  $\rho$ ; os pontos  $A$  e  $B$

exteriores a  $\rho$  e  $\overline{AB}$  cruzando, ou tangenciando  $\rho$ ; o ponto A exterior e o ponto B interior; ambos os pontos no interior de  $\rho$ .

Vamos analisar o caso em que A e B são exteriores a  $\rho$  e  $\overline{AB}$  não cruza  $\rho$ . O ponto de tangência das duas circunferências estará no lugar geométrico dos pontos cujas tangentes às duas circunferências são iguais que é chamado de eixo radical. Mas como iremos traçar o eixo radical se não conhecemos a outra circunferência? Inicialmente iremos traçar uma circunferência qualquer que passe pelos pontos A e B e cruze a circunferência  $\rho$  em dois pontos C e D. Traçando a reta que passa pelos pontos A e B e a reta que passa pelos pontos C e D percebemos que estas se cruzam em um ponto P fora da circunferência  $\rho$  (se a mediatriz de  $\overline{AB}$  passar pelo centro O da circunferência  $\rho$  então  $\overleftrightarrow{CD}$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  serão paralelas; neste caso os pontos de tangência serão os pontos de intersecção daquela mediatriz com  $\rho$ ). O eixo radical será a reta tangente a  $\rho$  passando por P. Construindo o arco-capaz de  $90^\circ$  em relação ao segmento  $\overline{PO}$  (O é centro de  $\rho$ ), podemos perceber que este corta a circunferência  $\rho$  nos pontos T e U. O ponto T, mais próximo de  $\overline{AB}$ , é o ponto de tangência das duas circunferências e que fornece o ângulo  $\widehat{ATB}$  máximo. Para encontramos o centro da circunferência tangente, basta traçarmos a mediatriz do segmento  $\overline{AB}$  e a perpendicular ao eixo radical por O, a reta  $\overleftrightarrow{OT}$ . O ponto de inteseção destas retas é o centro da circunferência tangente.

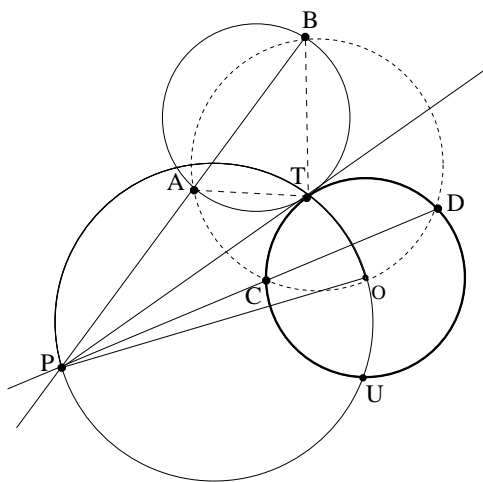


Figura 2.38:  $\widehat{ATB}$  é máximo.

Observe que no ponto U a circunferência circunscreve a circunferência  $\rho$ . Este ponto de tangência U é tal que  $\widehat{AUB}$  é mínimo.

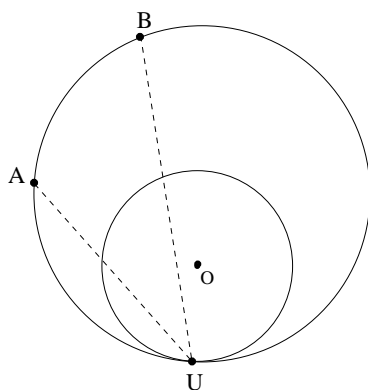


Figura 2.39:  $\widehat{AUB}$  é mínimo.

Se o segmento  $\overline{AB}$  cruza  $\rho$ , ou seja, se existirem pontos M e N de  $\rho$  entre A e B, então teremos 2 soluções máximas (M e N, com ângulo de  $180^\circ$ ) e uma solução mínima (que corresponde a um ponto de tangência de  $\rho$  internamente a uma circunferência que passa por A e B). Uma outra circunferência que passa por A e B e é tangente internamente a  $\rho$  não nos dá nem máximo nem mínimo, exceto no caso em que  $\overline{AB}$  passa pelo centro O de  $\rho$ , quando teremos 2 soluções de mínimo.

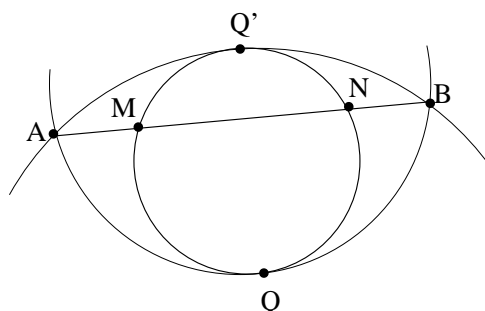


Figura 2.40: M e N máximos; Q mínimo; Q' nem máximo nem mínimo.

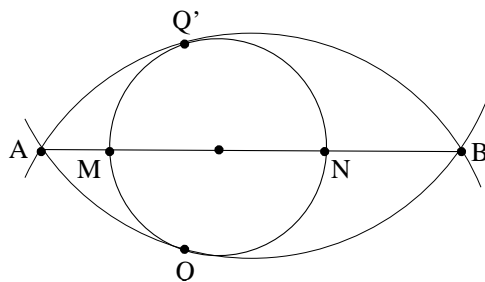


Figura 2.41: Q e Q' mínimos; M e N máximos.

No caso em que a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  cruzar  $\rho$ , ou seja, em que existirem pontos M e N de  $\overleftrightarrow{AB}$  (mas não em  $\overline{AB}$ ) em  $\rho$ , então M e N serão soluções mínimas (ângulo de  $0^\circ$ ) e teremos uma solução máxima (circunferência passando por A e B e tangente a  $\rho$ ), exceto quando  $\overleftrightarrow{AB}$  passar por O. Neste caso teremos 2 pontos de máximo (veja problema 3).

Se  $\overleftrightarrow{AB}$  tangência  $\rho$  em um ponto Q, então teremos um máximo em Q (ângulo de  $180^\circ$ ) se este ponto estiver entre A e B, e teremos um mínimo em Q (ângulo de  $0^\circ$ ) se este ponto não estiver entre A e B. A circunferência que passa por A e B e é tangente a  $\rho$  produzirá o ponto de mínimo ou de máximo, respectivamente.

Se um dos pontos estiver no interior de  $\rho$  e o outro no exterior de  $\rho$  então teremos o máximo ( $180^\circ$ ) no ponto de  $\overline{AB}$  que pertence a  $\rho$ , e um mínimo ( $0^\circ$ ) no ponto de  $\overleftrightarrow{AB}$  que não está em  $\overline{AB}$ .

Se ambos os pontos A e B estiverem no interior de  $\rho$  então teremos 2 pontos de mínimo ( $0^\circ$ ) nos pontos de cruzamento de  $\overleftrightarrow{AB}$  com  $\rho$ , e um ponto de máximo na tangência de uma circunferência que passa por a e B internamente a  $\rho$ .

Finalmente os casos degenerados. Se um dos pontos está sobre  $\rho$  então poderemos ter apenas um máximo ou um mínimo ou nenhum (caso em que  $\overleftrightarrow{AB}$  é tangente a  $\rho$  em A, por exemplo), pois neste caso a função ângulo não será contínua. Se A está sobre  $\rho$  e o segmento  $\overline{AB}$  cruza  $\rho$  em Q, então teremos um máximo em Q ( $180^\circ$ ) mas o mínimo não será atingido (o ângulo diminui aproximando-se, sem atingir, do ângulo do maior arco que é o arco-capaz relativo ao segmento  $\overline{AQ}$  - se  $\overline{AB}$  contém o centro de  $\rho$ , então este ângulo é  $90^\circ$ ). Se A está sobre  $\rho$  e Q não está no segmento  $\overline{AB}$  então o mínimo é atingido em Q ( $0^\circ$ ), mas o máximo não será atingido e novamente se aproxima do ângulo do menor arco que é o arco-capaz relativo ao segmento  $\overline{AQ}$  (se  $\overleftrightarrow{AB}$  contém o centro O, então este ângulo é  $90^\circ$ ). Se A e B estão ambos sobre  $\rho$  então teremos infinitos pontos de máximo e de mínimo dados pelos arco-capazes que são os arcos AB de  $\rho$ .

**Problema 3:** Qual a posição P de um observador em Saturno de maneira a enxergar um dos anéis  $\overline{AB}$  sob o maior ângulo possível.

### Solução

Este problema é o mesmo que o anterior, só que agora iremos considerar Saturno como sendo uma circunferência de centro em O, e A e B as extremidades do anel  $\overline{AB}$ . Teremos os pontos A, B e o centro da circunferência alinhados, ou seja, estão sobre a mesma reta. A solução deste problema é dada de forma análoga ao problema anterior, só que agora teremos dois pontos que fornecem o maior ângulo, os pontos P e P'.

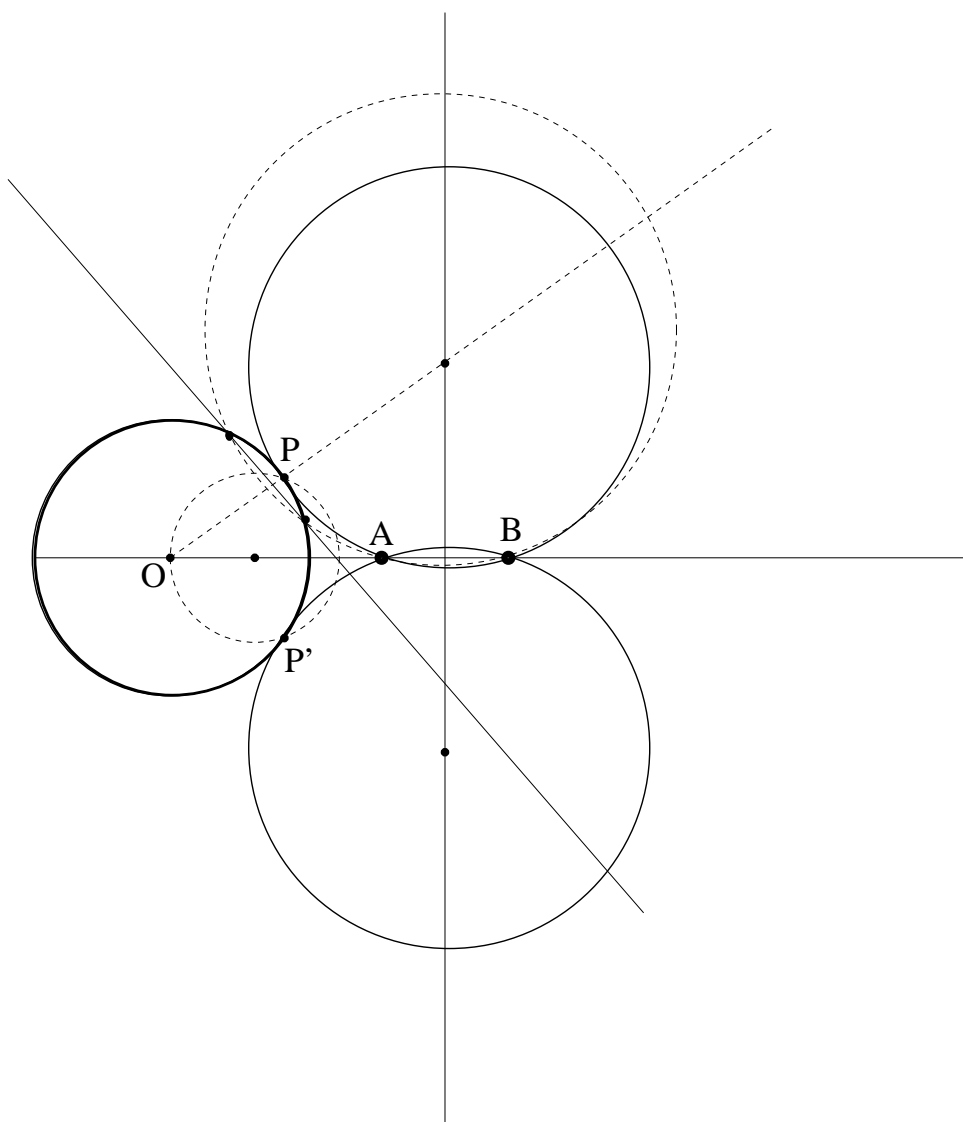


Figura 2.42:  $\hat{A}PB$  e  $\hat{A}P'B$  são máximos.

## 2.4 Problema de Fagnano

**Problema:** Dado um triângulo acutângulo inscrever nele um outro triângulo com o menor perímetro possível.

### 2.4.1 Solução de Schwarz

Dado um triângulo ABC, acutângulo, suponhamos que o triângulo PQR seja a solução do problema. Para resolver este problema, Schwarz partiu da hipótese que existe somente um único triângulo que satisfaz as condições exigidas pelo problema e esse triângulo tem seus vértices nos pés das alturas do triângulo dado. O triângulo solução é chamado de triângulo órtico.

Partindo da hipótese que o triângulo órtico solucione o problema apresentado, Schwarz provou inicialmente a propriedade de mínimo perímetro para ele. Para provar essa propriedade pelo método de reflexão ele usou um Teorema que diz: em cada vértice P, Q, R os dois lados do triângulo órtico formam ângulos iguais com o lado do triângulo original; este ângulo é igual ao ângulo no vértice oposto do triângulo original.

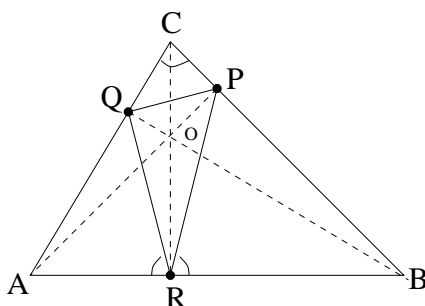


Figura 2.43:  $\widehat{PRB} = \widehat{QRA} = \widehat{C}$

Para provarmos o teorema mencionado acima iremos denominar o ponto de intersecção das alturas, o ortocentro, como sendo o ponto O. Observemos que o quadrilátero formado por OPBR pode ser inscrito em um círculo pois,  $\angle OPB$  e  $\angle ORB$  são ângulos retos. Conseqüentemente, pelo Teorema dos ângulos internos  $\widehat{PBO} = \widehat{PRO}$  pois, eles subtendem o mesmo arco PO no círculo circunscrito. Como  $\angle PBO$  é complementar a  $\angle C$  (a soma de suas medidas é igual a  $90^\circ$ ) uma vez que o triângulo CBQ é retângulo, e  $\angle PRO$  é complementar a  $\angle PRB$ , temos que  $\widehat{PRB} = \widehat{C}$ . A propriedade para os outros ângulos

prova-se de forma análoga.

O resultado acima nos permite enunciar uma propriedade de reflexão do triângulo órtico: uma vez que por exemplo,  $\widehat{AQR} = \widehat{CQP}$ , a reflexão do segmento  $\overline{RQ}$  no lado  $\overline{AC}$  é o prolongamento do segmento  $\overline{PQ}$ , e vice-versa; isto é válido também para os outros lados.

Agora iremos demonstrar a propriedade de mínimo do triângulo órtico.

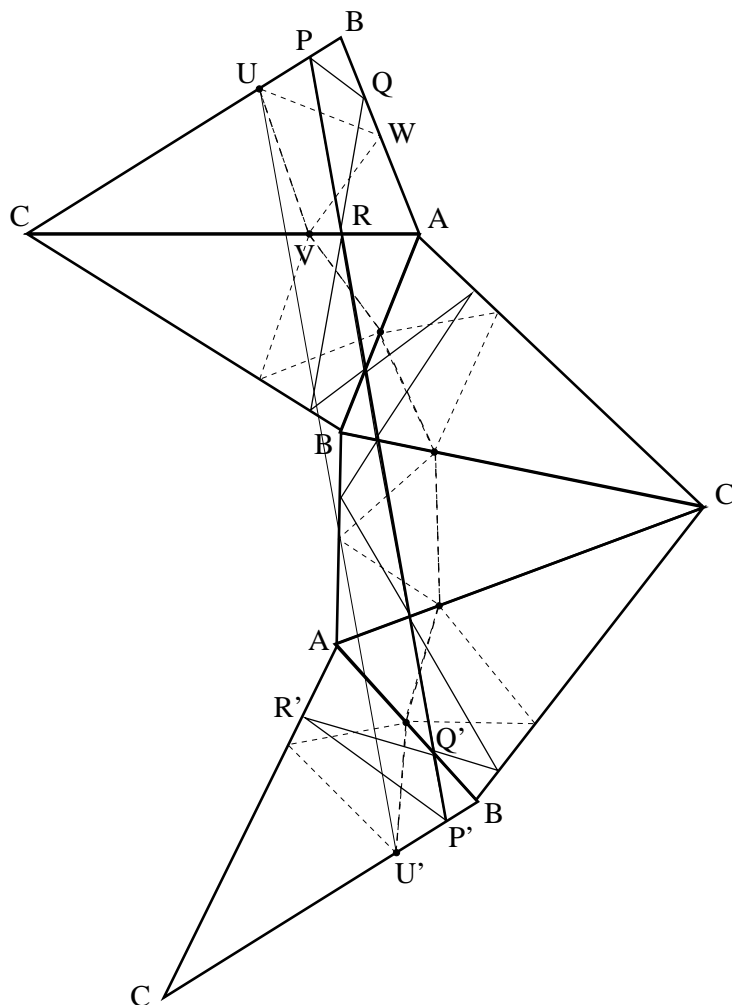


Figura 2.44: Figura solução

No triângulo ABC consideremos juntamente com o triângulo órtico PQR um outro triângulo UVW qualquer também inscrito no triângulo ABC. Fazendo a reflexão da figura toda primeiramente no lado AC do triângulo ABC, depois repetindo a operação com o triângulo resultante sobre o lado AB, em seguida sobre BC, depois sobre AC e finalmente sobre AB, obtemos seis triângulos congruentes. Inicialmente verificamos que os lados BC



do triângulo superior e do triângulo inferior são paralelos. Para ver isso observe que, sendo o  $\triangle PQR$  (e  $\triangle P'Q'R'$ ) o triângulo órtico de  $\triangle ABC$ ,  $B\hat{P}Q = R\hat{P}U$  e  $B\hat{P}'Q' = B\hat{P}Q$ . Daí  $B\hat{P}'Q' = R\hat{P}U$ , e os lados  $BC$  são cortados pela transversal  $PP'$  formando ângulos alternos internos congruentes. Portanto estes lados estão contidos em retas paralelas. Observe ainda que  $P'B = PB$ .

Observe agora que, se  $U$  é um ponto sobre  $BC$  (superior) e é vértice de outro triângulo qualquer inscrito no  $\triangle ABC$  então, pelas repetidas reflexões,  $U'$  é o vértice correspondente a  $U$  sobre  $BC$  (inferior), e  $U'B = UB$ . Assim temos que  $U'P' = UP$  e portanto  $UU'P'P$  é um paralelogramo. Logo  $UU' = PP'$ . Mas, como  $PP'$  é igual ao dobro do perímetro do triângulo órtico  $\triangle PQR$ , e como o comprimento da poligonal tracejada na figura, unindo  $U$  a  $U'$ , é o dobro do perímetro do triângulo tracejado com vértice  $U$  inscrito em  $\triangle ABC$ , e é maior do que o comprimento do segmento  $\overline{UU'}$ , temos que este último perímetro é maior do que o perímetro do triângulo órtico. Como o triângulo tracejado é qualquer, e como somente o triângulo órtico, pelas múltiplas reflexões, gera um segmento  $\overline{PP'}$  cujo comprimento é o dobro do perímetro, temos que este triângulo é o triângulo inscrito de perímetro mínimo.

A análise da existência da solução do problema, será feita posteriormente à solução de Fejér.

## 2.4.2 Solução de Fejér

Seja o triângulo  $ABC$  um triângulo acutângulo. Queremos encontrar um triângulo  $XYZ$  inscrito no triângulo  $ABC$  de menor perímetro possível tal que os vértices  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  devem estar respectivamente nos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ .

Iremos considerar inicialmente que o vértice  $Z$  está situado arbitrariamente no lado  $\overline{AB}$ . Refletindo o ponto  $Z$  em relação ao lado  $\overline{BC}$  obtemos o ponto  $H$  e refletindo o ponto  $Z$  em relação ao lado  $\overline{AC}$  obtemos o ponto  $K$ . O segmento de reta que une os pontos  $H$  e  $K$  intercepta o lado  $\overline{BC}$  em um ponto  $X$  e o lado  $\overline{AC}$  em um ponto  $Y$ , formando assim o triângulo  $XYZ$ , com  $Z$  fixado sobre  $\overline{AB}$ , que terá o menor perímetro possível. (A justificativa de que a reta que passa por  $H$  e  $K$  cruza os lados do triângulo será feita mais adiante, o que explicará também porque o triângulo deve ser acutângulo).

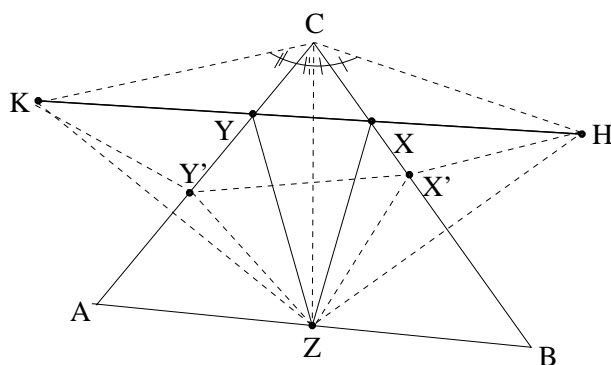


Figura 2.45:  $KH < KY'X'H$

Precisamos verificar que para  $Z$  fixo em  $\overline{AB}$  o triângulo  $XYZ$  é aquele que tem o menor perímetro. Para qualquer outros dois pontos  $X'$  e  $Y'$  sobre  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$  respectivamente, obtemos outro triângulo inscrito no triângulo  $ABC$ . Podemos perceber que  $ZX=XH$  e  $ZY=YK$  pois  $K$  e  $H$  são reflexões de  $Z$  em relação a  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  respectivamente. Analogamente, traçando o segmento de reta que une os pontos  $X'$  e  $Z$ ,  $X'$  e  $H$ ,  $Y'$  e  $Z$ ,  $Y'$  e  $K$  temos que  $ZX'=X'H$  e  $ZY'=Y'K$ . Fazendo a comparação dos perímetros dos triângulos  $XYZ$  e  $X'Y'Z$  notemos que

$$2p_{\Delta XYZ} = ZX + XY + ZY = HX + XY + KY = HK \text{ e}$$

$$2p_{\Delta X'Y'Z} = ZX' + X'Y' + ZY' = HX' + X'Y' + KY' > HK$$

Portanto o triângulo  $XYZ$  possui menor perímetro que o triângulo  $X'Y'Z$ .

Agora, queremos encontrar a posição em que o ponto  $Z$  deve estar em  $\overline{AB}$ , de tal maneira que o segmento  $\overline{HK}$  seja o menor possível (o qual representa o perímetro do triângulo  $XYZ$ ). Notemos que  $CZ = CH = CK$  (pois  $C$  está nas mediatrizes de  $\overline{ZH}$  e  $\overline{ZK}$ ),  $Z\hat{C}B = H\hat{C}B$  e  $Z\hat{C}A = K\hat{C}A$ . Por isso, o ângulo  $\angle HCK$  tem medida igual ao dobro da medida do ângulo  $\angle ACB$  (isto explica porque a reta que passa por  $H$  e  $K$  cruza os lados do triângulo  $ABC$ : se o ângulo  $\angle ACB$  é agudo então  $K\hat{C}H < 180^\circ$  e portanto as semi-retas  $\overrightarrow{CA}$  e  $\overrightarrow{CB}$  estão no interior do ângulo  $\angle KCH$ , o que implica que o segmento  $\overline{KH}$  cruza  $\overline{CA}$  e  $\overline{CB}$ ; e se  $\angle ACB$  for obtuso isto não ocorrerá). O segmento de reta  $\overline{HK}$  é a base do triângulo isósceles  $KHC$ . O segmento  $\overline{HK}$  é mínimo quando  $CH = CK$  for mínimo, ou seja, quando  $\overline{CZ}$  for mínimo.  $\overline{CZ}$  é mínimo quando for a altura do triângulo  $ABC$  (considerando  $AB$  como base do triângulo  $ABC$ ), isto é, quando  $\overline{CZ}$  for perpendicular a  $\overline{AB}$ , ou seja, quando  $Z$  for o pé da altura relativa ao lado  $\overline{AB}$ .

A questão da existência da solução pode ser resolvida não por um argumento de continuidade e sim pela própria construção descrita acima. Considerando  $Z$  como o pé da altura relativa ao lado  $\overline{AB}$ , existe um (único) triângulo de perímetro mínimo inscrito no triângulo  $ABC$ , dentre todos aqueles que têm  $Z$  como vértice. Considere agora as soluções análogas, sendo  $X$  o pé da altura relativa ao lado  $\overline{BC}$  e aquela com  $Y$  sendo o o pé da altura relativa ao lado  $\overline{AC}$ . Uma das três tem que ter o menor perímetro possível (daí a existência). O que se quer argumentar agora é que as três soluções são a mesma solução. Suponhamos que uma delas é a mínima (por exemplo, aquela obtida com  $Z$  sendo o pé da altura relativa ao lado  $\overline{AB}$ ). Se, nesta solução, o ponto  $X$  obtido sobre  $\overline{BC}$  não fosse o pé da altura relativa a este lado, então a solução obtida com  $X$  no pé da altura relativa a  $\overline{BC}$  teria perímetro menor ainda, o que é uma contradição. Logo, os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  devem ser, respectivamente, os pés das alturas relativas aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ .

Podemos verificar que o triângulo  $ABC$  deve ser acutângulo para existir o triângulo de perímetro mínimo inscrito nele. Vamos supor que o ângulo  $\hat{A}CB = 90^\circ$ . Fixando o ponto  $P$  em  $\overline{AB}$ , sejam  $P'$  e  $P''$  respectivamente os simétricos de  $P$  em relação a  $\overline{BC}$  e a  $\overline{AC}$ . Observe que  $P'$ ,  $C$  e  $P''$  são colineares pois  $\hat{P}'CP' + \hat{P}CP'' = 2\hat{A}CB = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$ . Escolhendo arbitrariamente os pontos  $N$  em  $\overline{AC}$  e  $M$  em  $\overline{BC}$ , temos que  $PM + PN + MN = P'M + P''N + MN > P'P'' = 2CP$ . Como temos que  $h = CH < CP$ , e como existem triângulos com o perímetro arbitrariamente próximo de  $2h$ , então não existe triângulo de perímetro mínimo inscrito no triângulo  $ABC$ .

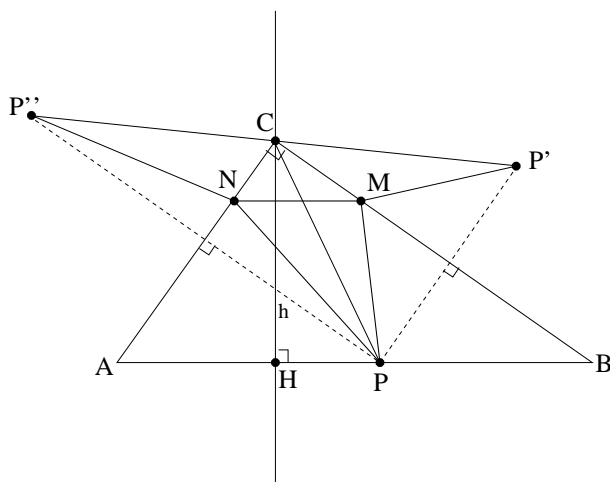


Figura 2.46:  $\hat{A}CB = 90^\circ$

Agora, vamos considerar que o ângulo  $\hat{A}CB > 90^\circ$ . Note que  $\hat{P}CP' + \hat{P}CP'' > 180^\circ$  e  $\overline{P'P''}$  não cruza os lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  do triângulo ABC. Então temos que  $PM + PN + MN = P'M + P''N + MN > P'C + P''C = 2CH$ . Como existem triângulos com perímetro arbitrariamente próximos de  $2CH$  então não existe triângulo de perímetro mínimo inscrito no triângulo ABC. Portanto o triângulo deve ser acutângulo.

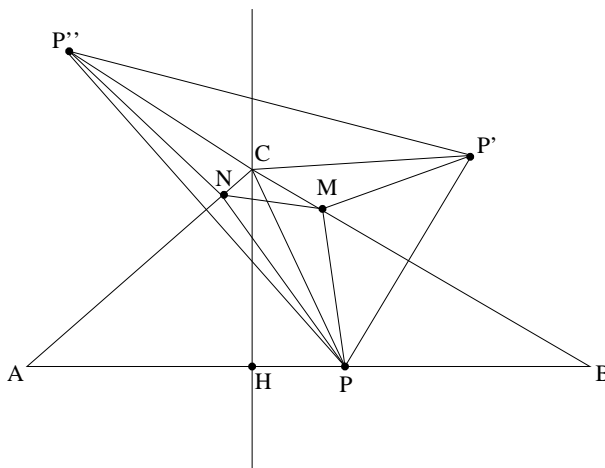


Figura 2.47:  $\hat{A}CB > 90^\circ$

## 2.5 Problema de Fermat

**Problema:** Três pontos A, B, C são dados em um plano, e um quarto ponto P no plano é procurado de modo que a soma  $PA + PB + PC$  seja mínima.

### 2.5.1 Solução do problema de Fermat

Este problema foi proposto por Fermat em seu *Métodos de determinação de máximos e mínimos e tangentes a curvas*. Evangelisto Torricelli lendo este trabalho, resolveu este problema em algum período antes de 1640, localizando o ponto solução do problema (chamado ponto de Fermat, Torricelli ou Steiner). Isto é conhecido pelo fato que seu aluno Vincenzo Viviane (1622 - 1703) publicou a solução de seu mestre no livro *De maximis et minimis* (1659).

Se A, B e C forem colineares e se B estiver entre A e C, então B é o ponto solução do problema.

Quando A, B e C são não colineares, considere o triângulo ABC formado por estes três pontos. Note inicialmente que se P for um ponto exterior ao triângulo ABC, então existe um ponto  $P'$  no triângulo ABC tal que  $P'A + P'B + P'C < PA + PB + PC$  (figura 2.48).

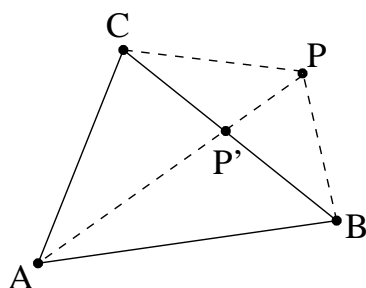


Figura 2.48:  $PA + PB + PC > PA + BC > P'A + P'B + P'C$

Assim, basta analisar o problema para o ponto no triângulo ABC ou no seu interior, que é um conjunto fechado e limitado. Pelo teorema 2 da seção 2.1 existe um ponto P no triângulo ABC, ou no seu interior, onde a soma mínima  $PA + PB + PC$  é atingida.

Vejamos inicialmente, com um exemplo simples, que o ponto P pode estar no interior do triângulo ABC. Suponha que ABC seja um triângulo equilátero. Então P é o centro

deste triângulo pois, traçando por A, B e C respectivamente paralelas aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , obtemos um triângulo equilátero MNQ. Se P' for qualquer outro ponto distinto de P, no triângulo ABC ou no seu interior, então se C' for o pé da perpendicular a  $\overline{QN}$  por P', se B' for o pé da perpendicular a  $\overline{MN}$  por P' e se A' for o pé da perpendicular a  $\overline{MQ}$  por P', teremos:  $P'A + P'B + P'C > P'A' + P'B' + P'C'$ .

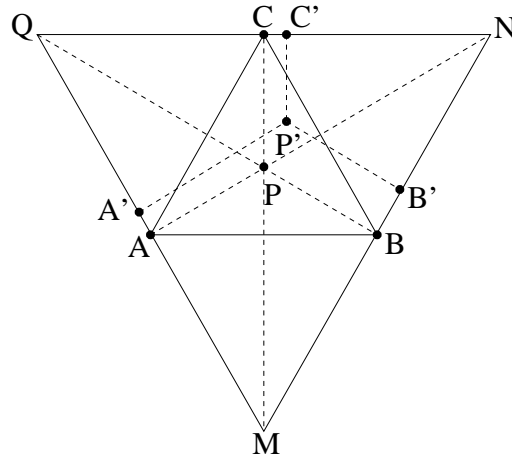


Figura 2.49:  $P'A + P'B + P'C > P'A' + P'B' + P'C'$ .

Pelo teorema de Viviani, que diz que a soma das distâncias de qualquer ponto em um triângulo equilátero ou no seu interior, é constante e igual ao valor das alturas (iguais) deste triângulo, temos que:  $P'A' + P'B' + P'C' = PA + PB + PC$ . Logo,  $P'A + P'B + P'C > PA + PB + PC$ .

Suponhamos então que o ponto P solução do problema esteja no interior do triângulo ABC. Consideremos que a soma  $PA + PB$  esteja fixada. O lugar geométrico de todos os pontos P para os quais a soma  $PA + PB$  é dada, é a elipse com focos A e B e a medida do eixo maior igual a  $PA + PB$ . Agora, precisamos encontrar o ponto P da elipse para o qual a distância de P até o ponto C é mínima. A menor distância de C à elipse vai ser alcançada quando a circunferência de centro C tangencia a elipse.

Mas, então teremos que  $\hat{C}PA = \hat{C}PB$  de acordo com o problema 3 da seção 2.2.2. Agora, fixando a soma  $PB + PC$  chegaremos analogamente à conclusão que  $\hat{C}PA = \hat{B}PA$ . Portanto concluímos que  $\hat{C}PA = \hat{C}PB = \hat{B}PA = 120^\circ$ .

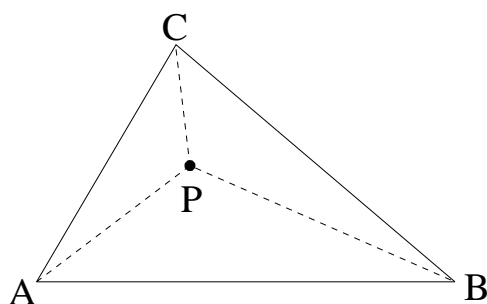


Figura 2.50:  $\widehat{C^PA} = \widehat{C^PB} = \widehat{B^PA} = 120^\circ$

Este mesmo argumento nos mostra que o ponto P não pode estar sobre os lados pois, suponhamos que P estivesse no lado  $\overline{AB}$  do triângulo ABC. Então  $\widehat{C^PA} = \widehat{C^PB}$  se e somente se esta medida for igual a  $90^\circ$  e não a  $120^\circ$ .

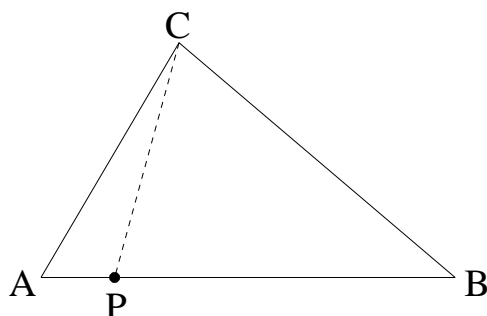


Figura 2.51:  $\widehat{C^PA} \neq 120^\circ$  ou  $\widehat{C^PB} \neq 120^\circ$

O ponto P pode estar sobre um vértice? Observe que para que  $\widehat{C^PA} = \widehat{C^PB} = \widehat{B^PA} = 120^\circ$  o ponto P deve estar na interseção dos arcos-capazes de  $120^\circ$  relativos aos segmentos (no mesmo semi-plano do triângulo ABC)  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AB}$  respectivamente.

Suponhamos que  $\overline{AB}$  seja o maior lado do triângulo ABC. Então  $\angle C$  é o maior ângulo do triângulo ABC. Considere o arco-capaz de  $120^\circ$  relativo ao lado  $\overline{AB}$ .

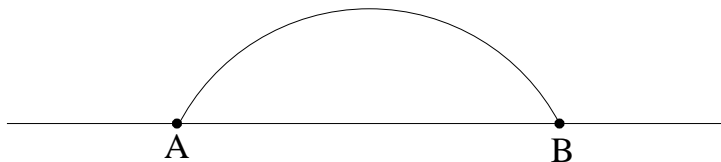


Figura 2.52: Arco-capaz de  $120^\circ$  relativo ao lado  $\overline{AB}$

Temos três possibilidades para o ponto C no semi-plano determinado pela reta  $\overleftrightarrow{AB}$  que contem aquele arco-capaz:

(a)  $C$  está no exterior do arco-capaz.

Neste caso  $\widehat{ACB} < 120^\circ$  e o arco-capaz relativo ao segmento  $\overline{AC}$  (ou  $\overline{BC}$ ) cruzará o arco-capaz relativo ao segmento  $\overline{AB}$  em um ponto no interior do triângulo.

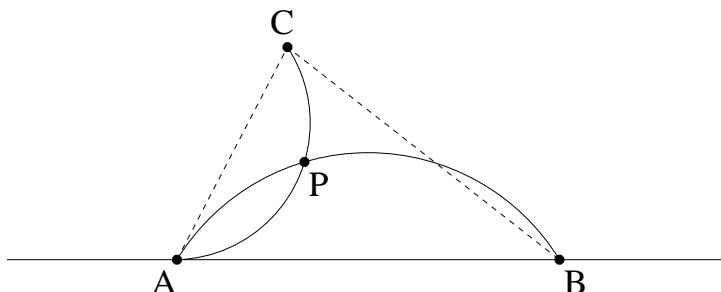


Figura 2.53:  $C$  está no exterior do arco-capaz

(b)  $C$  está sobre o arco-capaz de  $120^\circ$  relativo ao lado  $\overline{AB}$ .

Neste caso  $C$  é o ponto de intersecção dos três arcos-capazes relativos aos lados do triângulo. Observe que para qualquer ponto  $Q$  no interior ou sobre os lados do triângulo, exceto o ponto  $C$ ,  $\widehat{AQB} > 120^\circ$ . Como o problema tem solução, e como tal solução não está no exterior nem nos lados do triângulo, então a solução  $P$  deve estar em um dos vértices. Mas este vértice deve ser  $C$  pois  $AC + BC < AC + AB$  e  $AC + BC < BC + AB$ .

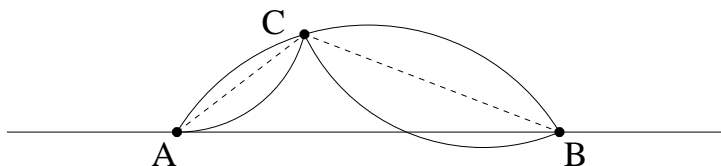


Figura 2.54:  $C$  está no sobre o arco-capaz

(c)  $C$  está entre o arco-capaz de  $120^\circ$  relativo ao lado  $\overline{AB}$  e a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .

Neste caso, pelo mesmo argumento usado no caso anterior, podemos concluir que  $P$  só pode ser o ponto  $C$ .



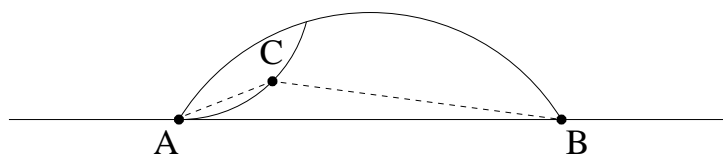


Figura 2.55: C está no interior do arco-capaz

Como vimos acima, quando o maior ângulo do triângulo ABC for menor de que  $120^\circ$ , o ponto P é a intersecção dos arcos-capazes de  $120^\circ$  relativos aos lados do triângulo. Acontece que, estes arcos-capazes estão respectivamente contidos nas circunferências circunscritas aos triângulos equiláteros construídos externamente sobre os lados do triângulo ABC.

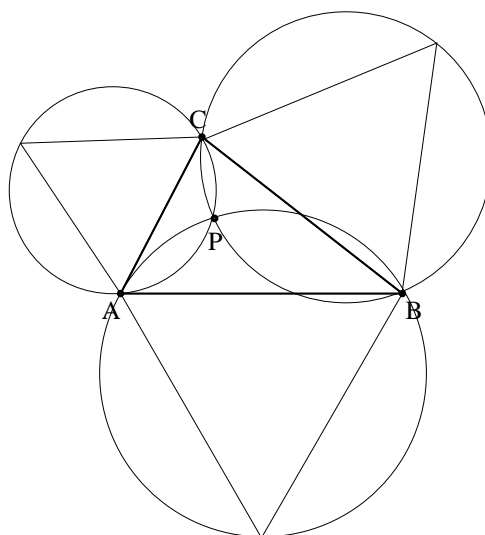


Figura 2.56: O ponto de Torricelli P

Em 1647 Bonaventura Francesco Cavalieri (1598 - 1647) mostrou em seu livro *Exercitationes Geometricae* que os três ângulos  $\angle APC$ ,  $\angle BPC$  e  $\angle APB$  têm a mesma medida de  $120^\circ$ .

Mais tarde, em 1750 o matemático inglês Thomas Simpson (1710 - 1761) publicou no seu livro *Doctrine and Application of Fluxions* que o ponto de Torricelli, isto é, o ponto de intersecção das três circunferências circunscritas respectivamente aos triângulos equiláteros construídos sobre cada lado do triângulo ABC pode ser obtido, ligando-se os vértices A, B e C aos vértices externos daqueles triângulos equiláteros (figura 2.57).

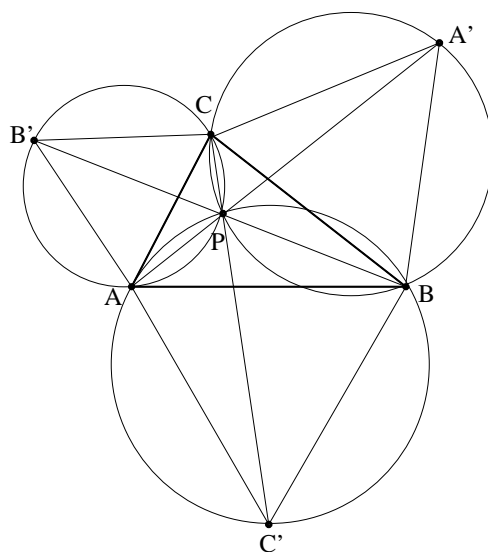


Figura 2.57: Solução de Simpson

Vejamos como provar este resultado. Liguemos os vértices A, B e C ao ponto P e prolonguemos cada segmento até cruzar as circunferências circunscritas aos triângulos equiláteros externos nos pontos A', B' e C' respectivamente (figura 2.57).

Como os ângulos  $\angle APC'$  e  $\angle A'PC$  são congruentes, pois são opostos pelo vértice, e como  $\hat{A}PC' + \hat{B}PC' = \hat{A}PB = 120^\circ = \hat{B}PC = \hat{A}'PB + \hat{A}'PC$  segue-se que  $\hat{A}'PB + \hat{A}PC' = 120^\circ$  e que  $\hat{B}PC' + \hat{A}'PC = 120^\circ$ . Como  $\hat{A}PC' + \hat{B}PC' + \hat{A}'PB = 180^\circ$  e como  $\hat{B}PC' + \hat{A}'PB + \hat{A}'PC = 180^\circ$  segue-se que  $\hat{B}PC' = \hat{A}'PB = 60^\circ$ . Conclui-se que  $\hat{C}'AB = \hat{A}C'B = 60^\circ$ , e portanto o triângulo  $AC'B$  é equilátero, e que  $\hat{B}CA' = \hat{B}A'C = 60^\circ$ , e portanto o triângulo  $BA'C$  é equilátero. Analogamente mostra-se que o triângulo  $AB'C$  é equilátero. Logo, o ponto P é intersecção dos segmentos que unem os vértices A', B' e C', dos triângulos equiláteros construídos sobre as bases, respectivamente com os vértices A, B e C do triângulo ABC.

Vamos provar agora que, se P é o ponto de Torricelli do triângulo ABC (com  $\hat{A} < 120^\circ$ ,  $\hat{B} < 120^\circ$  e  $\hat{C} < 120^\circ$ ) então  $PA + PB + PC$  é igual à altura máxima entre todos os triângulos equiláteros circunscritos ao triângulo ABC.

Considere os arcos exteriores das circunferências circunscritas aos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo ABC. Tais arcos são arcos-capazes de  $60^\circ$ .

Seja agora a reta  $m$ , perpendicular ao segmento  $\overline{PC}$ , passando por C, e sejam M e N os pontos de cruzamento de  $m$  respectivamente com os arcos-capazes AC e BC (figura 2.58).

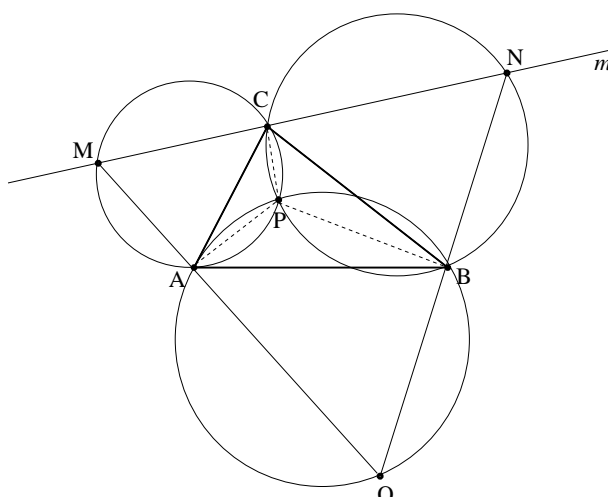


Figura 2.58: O triângulo equilátero MNQ

Então as retas  $\overleftrightarrow{MA}$  e  $\overleftrightarrow{NB}$  devem se cruzar em um ponto Q sobre o arco-capaz AB pois, como  $\widehat{CMA} = \widehat{CNB} = 60^\circ$ , então  $\widehat{MQN} = 60^\circ$ . Além disso, a reta  $\overleftrightarrow{MA}$  é perpendicular ao segmento  $\overline{PA}$  pois, o quadrilátero MCPA é inscritível e  $\widehat{MCP} = 90^\circ$ . Logo  $\widehat{MAP} = 90^\circ$ . Analogamente tem-se que a reta  $\overleftrightarrow{NB}$  é perpendicular ao segmento  $\overline{PB}$ . Segue-se então que  $PA + PB + PC$  é igual à altura do triângulo MNQ (Teorema de Viviani). Este é o triângulo equilátero, circunscrito ao triângulo ABC, de maior altura possível. Vejamos por que:

Seja agora DEF outro triângulo equilátero qualquer circunscrito ao triângulo ABC. Então  $\overline{DE}$  e  $\overline{PC}$  não são perpendiculares, nem  $\overline{DF}$  e  $\overline{PA}$  e nem  $\overline{EF}$  e  $\overline{PB}$ . Sejam G, H e I respectivamente os pés das perpendiculares por P aos lados  $\overline{DE}$ ,  $\overline{DF}$  e  $\overline{EF}$  do triângulo DEF.

Então,  $PG < PC$ ,  $PH < PA$  e  $PI < PB$ . Logo,  $PG + PH + PI < PC + PA + PB$ . Mas  $PG + PH + PI$  é igual à altura do triângulo equilátero DEF. Logo o triângulo MNQ é o triângulo equilátero circunscrito ao triângulo ABC de maior altura possível.

O matemático Jacob Steiner (1796 - 1863) trabalhou na generalização deste problema, ou seja, encontrar um ponto no plano (ou no espaço euclidiano d-dimensional) cuja soma das distâncias a n pontos dados  $A_1, \dots, A_n$  seja mínima.

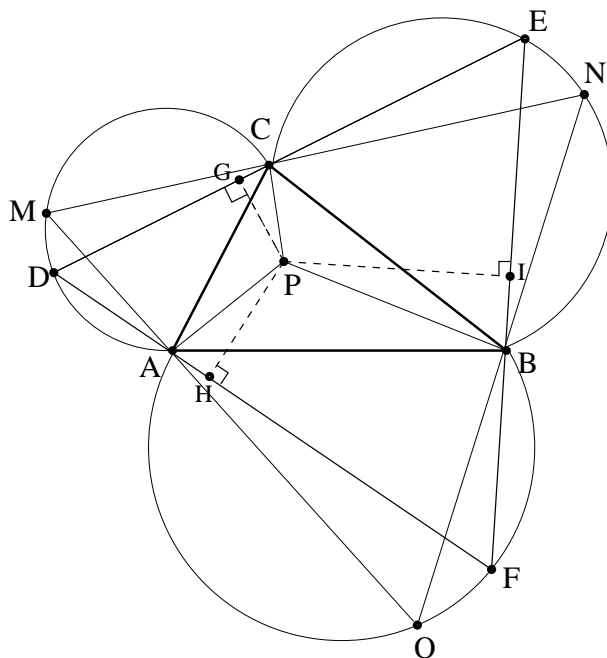


Figura 2.59: O triângulo equilátero MNQ tem altura máxima

## 2.5.2 Variação do Problema de Fermat

**Problema 1** :As paralelas  $r$  e  $l$  são as margens de um rio e os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  representam cidades em lados opostos desse rio ( $A$  e  $B$  do lado da margem  $r$ , e  $C$  do lado da margem  $l$ ). Deseja-se construir uma cidade  $T$  e uma ponte  $\overline{MN}$ , perpendicular às margens do rio, de forma que a soma  $AT + BT + TM + MN + NC$  seja mínima.

### Solução

Tracemos a reta  $s$  perpendicular a  $r$  e a  $l$  por  $C$ . Podemos notar que esta corta a reta  $r$  em  $R$  e  $l$  em  $L$ . Então transportamos a medida  $LR$  sobre a reta  $s$  a partir de  $C$ , obtendo um ponto  $C'$  sobre a reta  $s$ , ou seja,  $CC' = LR$ . Seja  $T$  o ponto de Torricelli do triângulo  $ABC'$  e suponha que  $T$  esteja no mesmo lado dos pontos  $A$  e  $B$  (figura 2.60). Notemos que  $\overline{TC'}$  corta a reta  $r$  em um ponto  $M$ , a partir de  $M$  traçamos a reta perpendicular a  $l$ , cruzando-a  $l$  em um ponto  $N$ . Então precisamos mostrar que  $AT + BT + TM + MN + NC$  é mínimo. Temos que  $NC = MC'$ , assim  $TM + NC = TM + MC' = TC'$  então a soma  $AT + BT + TM + MN + NC = AT + BT + TC' + MN$  é mínima.

Seja  $P$  qualquer outro ponto do mesmo lado de  $A$  e  $B$  e  $M'$  qualquer ponto na margem

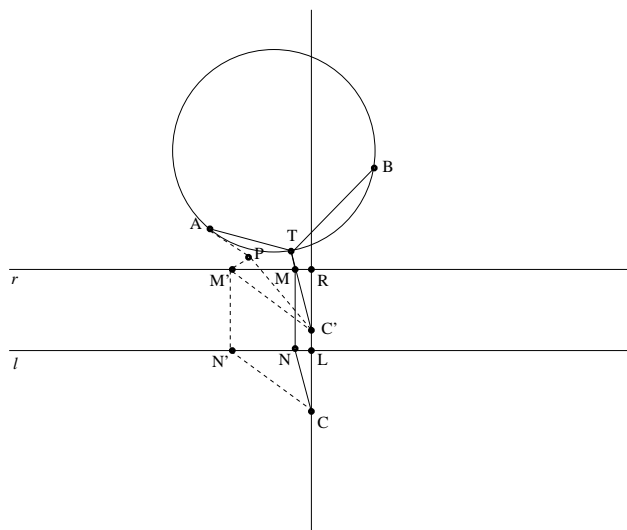


Figura 2.60:  $AT + BT + TM + MN + NC$  é mínima.

do rio ( $M'$  sobre a reta  $r$ ) e  $N'$  a intersecção da perpendicular a  $l$  por  $M'$ . Então  $AP + BP + PM' + M'N' + N'C = AP + BP + PM' + M'C' + M'N' > AP + BP + C'P + M'N' > AT + BT + TC' + MN$  pois, sabemos pela solução do problema de Fermat que o ponto de Torricelli fornece a menor soma, portanto  $AT + BT + TM + MN + NC$  é mínimo.

Observe que se o ponto de Torricelli estiver dentro do rio, teremos que encontrar um ponto  $P$  sobre a margem  $r$  tal que  $AP + BP + C'P$  seja mínimo (figura 2.61). Tal problema é difícil de resolver em geral (sem cálculo).

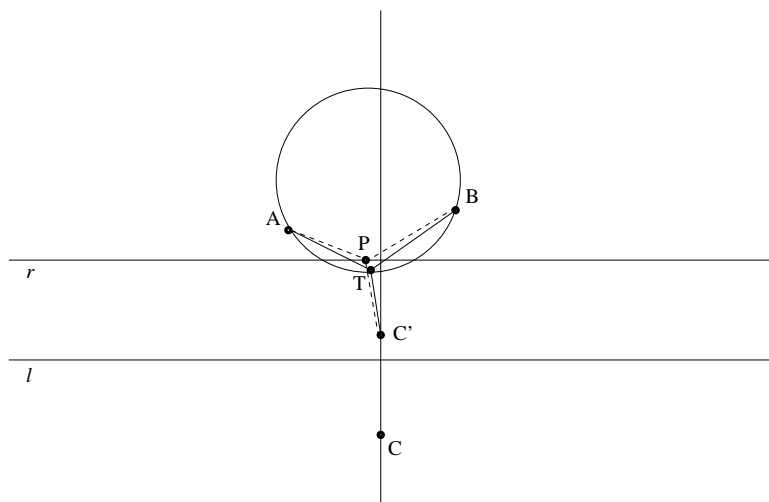


Figura 2.61: Encontrar  $P$  tal que  $AP + BP + C'P$  seja mínimo

## 2.6 Problema de Dido

**Problema:** Entre todas as curvas planas fechadas de um dado comprimento  $L$  encontrar aquela que engloba maior área.

### 2.6.1 Solução de Steiner

A solução do problema de Dido foi feita em 1836 pelo matemático Jacob Steiner. Steiner provou que a circunferência encerra a maior área entre todas as curvas fechadas com um comprimento dado.

A demonstração de Steiner parte da hipótese de que a solução do problema existe, supondo que a curva  $C$  com comprimento  $L$  seja a solução do problema.

Steiner provou inicialmente que a curva  $C$  procurada deve ser convexa, no sentido de que ela delimita uma região convexa (qualquer segmento de reta unindo dois pontos quaisquer da região deve estar inteiramente contido na região - a curva  $C$  incluída na região).

Suponhamos que a curva  $C$  não seja convexa, ou seja, possui uma reentrância  $\sigma$  entre dois pontos quaisquer  $A$  e  $B$  sobre  $C$ . Mais exatamente, se  $C$  não é convexa então existem dois pontos  $A$  e  $B$  de  $C$  tais que nenhum ponto do segmento  $\overline{AB}$  (exceto  $A$  e  $B$ ) está na região delimitada por  $C$ . Fazendo a reflexão da reentrância  $\sigma$  em relação à reta  $AB$ , obtém-se o arco  $\sigma'$  que forma juntamente com o resto do arco  $AB$  uma curva de mesmo comprimento  $L$  que engloba maior área que a curva  $C$  inicial. Isto contradiz a suposição inicial de que  $C$  englobaria a maior área para uma curva fechada de comprimento  $L$ . Portanto, a curva  $C$  procurada deve ser convexa.

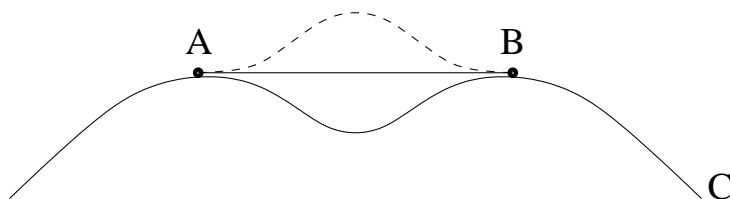


Figura 2.62: A figura convexa tem área maior

Considere agora, dois pontos  $A$  e  $B$  sobre a curva  $C$  (de comprimento  $L$ ), de modo que eles dividam a curva em dois arcos com o mesmo comprimento  $\frac{L}{2}$  (é sempre possível,

partindo de um ponto A na curva, encontrar um outro ponto B nesta mesma curva tal que eles dividam a curva em duas curvas de mesmo comprimento; a justificativa para isso é vista com maior rigor utilizando a noção de comprimento de arco visto em cálculo). Então a reta que passa pelos pontos A e B divide a área da curva em duas partes de mesma área pois, caso contrário, se uma das partes tivesse área maior, refletindo tal parte em relação à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , obteríamos uma outra curva  $C'$  com o mesmo comprimento de  $C$ , só que englobando maior área do que  $C$ .

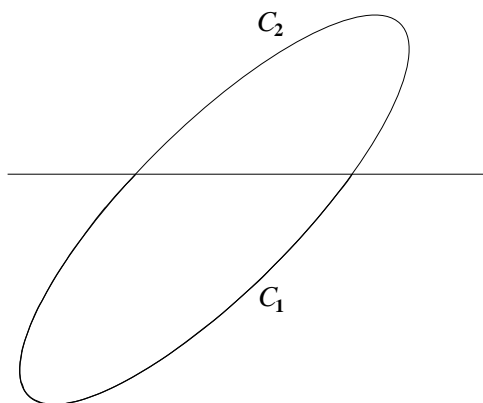


Figura 2.63:  $C = C_1 \cup C_2$

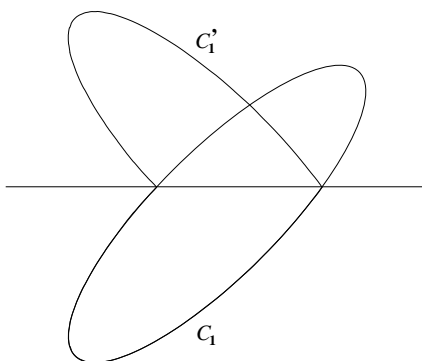


Figura 2.64:  $C' = C_1 \cup C'_1$

Considerando então apenas metade da solução (pois, as duas partes possuem mesma área e mesmo comprimento), o que queremos é encontrar o arco de comprimento  $\frac{L}{2}$  delimitado pela reta  $\overleftrightarrow{AB}$  que encerra maior área entre o arco e a reta. Se encontramos a solução da metade do problema teremos encontrado a solução completa para o problema de Dido.

Seja P um ponto qualquer sobre o arco AB. Fixando o ponto P de maneira que os segmentos  $\overline{AP}$  e  $\overline{BP}$  não se alterem e de maneira que os arcos  $C_1$  e  $C_2$  também não se alterem (ou seja, de modo que as regiões  $R_1$  e  $R_2$  não se alterem - ver figura), e se variarmos o ângulo  $\angle APB$ , então o comprimento do arco APB não se alterará (igual a  $\frac{L}{2}$ ) mas a área englobada por ele e pelo segmento  $\overline{AB}$  variará.

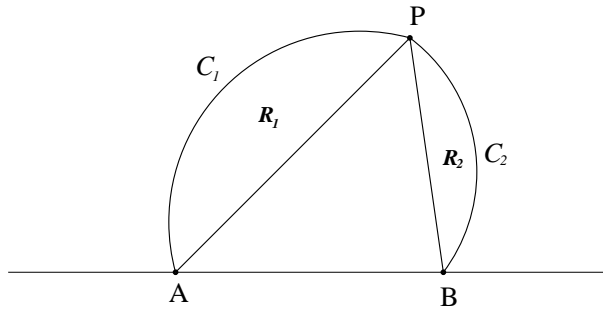


Figura 2.65: Análise do problema

Para obtermos a curva APB que engloba a maior área, basta encontrarmos o triângulo de maior área inscrito nela. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ , portanto  $0 < \hat{A}PB < 180^\circ$ , se  $\hat{A}PB$  for 0 ou  $180^\circ$  a área do triângulo APB irá se degenerar (área zero).

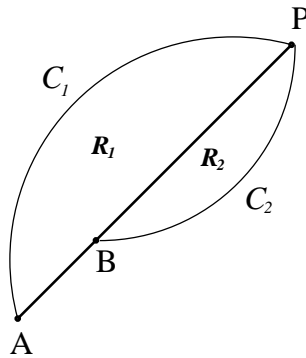


Figura 2.66:  $\hat{A}PB = 0^\circ$

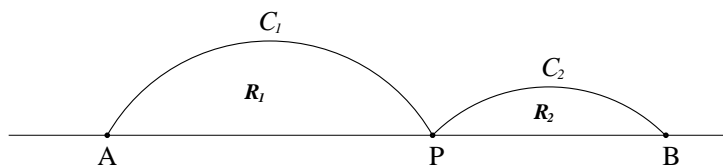


Figura 2.67:  $\hat{A}PB = 180^\circ$



Podemos perceber que se o  $\angle APB$  partir do zero e aumentar até  $180^\circ$  a área desse triângulo aumenta e a partir de um determinado  $\angle APB$  ela diminui, ou seja, em um certo ângulo  $\angle APB$  a área será máxima.

Isso ocorre quando o ângulo  $\hat{A}PB = 90^\circ$  pois, fixados dois lados do triângulo (o outro lado  $AB$  variando), aquele que possui maior área é o triângulo retângulo.

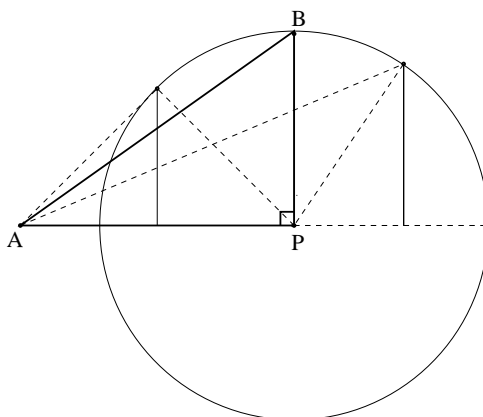


Figura 2.68: Triângulo de área máxima com  $AP$  e  $BP$  fixados

Como o ponto  $P$  é um ponto qualquer sobre o arco  $AB$  e como o lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que  $\hat{A}PB = 90^\circ$  é uma circunferência de diâmetro  $AB$ . Concluimos que a curva  $APB$  é uma semi-circunferência. Se a metade da solução é uma semi-circunferência, então a solução inteira do problema de Dido é o círculo.

Observe que a solução de Steiner só é possível se de fato, admitirmos a *existência* de uma solução para o problema. Steiner aceitou inicialmente essa existência como óbvia, embora o matemático alemão Peter Dirichlet (1805 - 1859) tenha ressaltado essa falha. O problema só foi resolvido rigorosamente pelo matemático alemão Karl Weierstrass (1815 - 1897) em algum período entre 1879 à 1882 usando cálculo de variações. Weierstrass não publicou este resultado devido a sua saúde precária na época, mas as notas de aula de seus alunos foram publicadas em 1927.

## 2.6.2 Variações do Problema de Dido

**Problema 1** : Cercar a região de área máxima delimitada por uma reta  $m$  e por um arco de comprimento  $L$ , cujas extremidades devem estar sobre esta reta.

### Solução

Dada uma reta  $m$  e assumindo a existência da solução do problema, consideremos a curva  $C$  de comprimento  $L$ , com extremidade sobre  $m$ , que maximiza a área. Para resolvermos este problema teremos apenas que refletir a curva  $C$  em relação à reta  $m$ , obtendo uma nova curva fechada de comprimento  $2L$ . Da solução do problema de Dido, sabemos que entre todas as curvas fechadas de um dado comprimento  $2L$  aquela que engloba a maior área é a circunferência. Portanto a região de área máxima é a metade da solução do problema de Dido, que é a semi-circunferência de comprimento  $L$ .

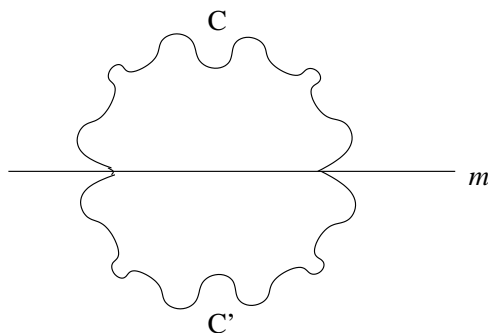


Figura 2.69: Curva de comprimento  $2L$ .

## 2.6.3 Problemas Isoperimétricos

**Problema 1** : Entre todos os triângulos de perímetro dado qual o que possui área máxima?

### Solução

Pelo argumento de continuidade podemos perceber que o problema tem solução. Fixado o perímetro consideremos todos as possíveis bases de triângulos isósceles (porque os triângulos isósceles são os que têm maior área, fixados a base e o perímetro - ver problema 5 da seção 2.2.2). Ou seja, podemos partir de uma base muito pequena e termos

uma certa altura do triângulo isósceles em relação a essa base (a altura não poderá ser maior do que a metade do perímetro dado), e neste caso a área estará próxima de zero. No início, à medida que aumentarmos a base (a altura diminuindo), a área aumentará. Depois, quando a altura se aproximar de zero, a base não sendo maior do que a metade do perímetro dado pois, pela desigualdade triangular a soma de dois lados de um triângulo é maior do que o terceiro lado, e a área estará novamente próxima de zero. Portanto, podemos perceber que este triângulo de perímetro dado alcança uma área máxima com uma determinada base.

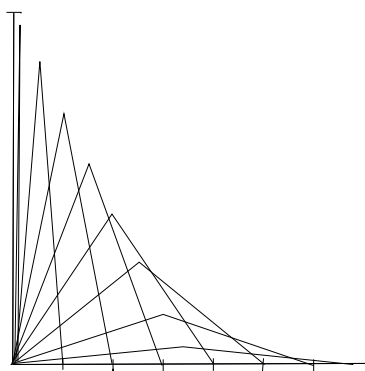


Figura 2.70: Análise da existência da solução

Seja  $ABC$  o triângulo solução. Se fixarmos inicialmente como base o lado  $\overline{AB}$  e a soma dos outros dois lados desse triângulo estará fixada. O que tem área máxima é o triângulo isósceles, como vimos anteriormente, e então temos que  $AC = BC$ .

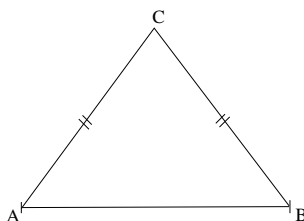


Figura 2.71:  $AC = BC$

Agora se olharmos o triângulo  $ABC$ , considerando como a base o lado  $\overline{BC}$ , a soma dos outros dois lados estará fixada. O triângulo que tem a maior área continua sendo o isósceles, logo temos que  $AB = AC$ .

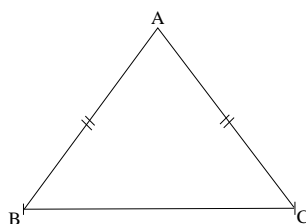


Figura 2.72:  $AB = AC$

Portanto podemos concluir que  $AB = AC = BC$ , ou seja, os lados do triângulo são todos iguais. Logo entre todos os triângulos de perímetro dado o que engloba a maior área é o triângulo equilátero.

**Problema 2 :** Entre todos os retângulos de perímetro dado qual o que possui área máxima?

### Solução

Inicialmente iremos analisar se o problema tem solução. Partindo de uma base muito pequena teremos uma certa altura em relação a essa base (o retângulo irá se degenerar quando tivermos a base igual a zero e a altura igual à metade do perímetro dado). À medida que formos aumentando a base podemos perceber que a altura em relação a essa base diminui (a base não poderá ser maior do que a metade do perímetro dado e a altura ficará próxima de zero, ou seja, a área do retângulo estará próxima de zero). Pelo argumento de continuidade percebemos que a área do retângulo começa muito pequena, vai aumentando e torna-se novamente muito pequena, ou seja, passa por uma base onde atinge a área máxima, e portanto o problema tem solução.

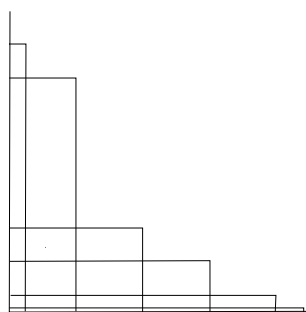


Figura 2.73: Análise da existência da solução

A área  $S$  de um retângulo pode ser calculada pelo produto da base pela altura. Suponhamos que o semi-perímetro dado seja  $p = x + y$ , então  $S = x.y$ . O que queremos é maximizar a área  $S$ . Então usando média geométrica podemos calcular este produto geometricamente de uma forma bastante simples. Sejam  $AC = x$  e  $y = CB$  as medidas de dois segmentos de reta. O segmento de reta que representa o semi-perímetro é dada pela junção dos segmentos de medida  $x$  e  $y$ , ou seja  $p = AC + CB = AB$ . Obtendo o ponto médio  $O$  do segmento  $\overline{AB}$  e com um compasso centrado em  $O$  e raio  $\frac{AB}{2}$ , tracemos uma semi-circunferência. O segmento vertical traçado para cima a partir de  $C$  encontrará um ponto  $D$  na semi-circunferência. A medida do segmento  $\overline{CD}$  corresponde à média geométrica das medidas dos segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{CB}$ , ou seja,  $CD^2$  representa geometricamente a área do retângulo. Teremos a maior média geométrica (maior área) quando  $\overline{CD}$  for igual ao raio da semi-circunferência e neste caso  $AC = CB$ . Portanto teremos área máxima quando  $x = y$ , o que nos leva a concluir que o retângulo de perímetro dado que tem área máxima é o quadrado (figura 2.74).

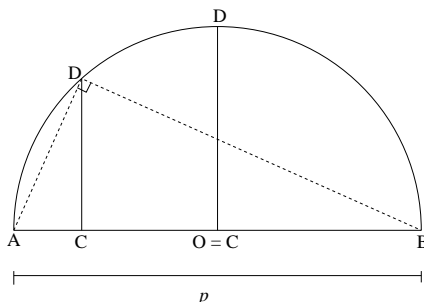


Figura 2.74: Média geométrica:  $CD = \sqrt{AC \cdot CB}$

Partindo-se do quadrado com perímetro igual ao perímetro dado, pode-se mostrar que qualquer outro retângulo de mesmo perímetro tem área menor do que a área deste quadrado. Então consideremos que o quadrado  $ABCD$  tenha o perímetro dado. Inicialmente, iremos traçar o segmento  $\overline{EF}$ , com a extremidade  $E$  no lado  $\overline{AD}$  e a extremidade  $F$  no lado  $\overline{BC}$ , paralelo aos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  do quadrado. Agora se transferirmos os segmentos  $\overline{AE}$  e  $\overline{BF}$  como continuação dos segmentos  $\overline{EF}$  e  $\overline{DC}$  respectivamente, obteremos segmentos  $\overline{EG}$  e  $\overline{DH}$  sendo,  $EG = EF + FG = AB + AE$  e  $DH = DC + CH = DC + BF$  ( $AE = BF = FG = CH$ ). Agora, se traçarmos o segmento  $\overline{GH}$  podemos perceber que  $GH = CF$ .

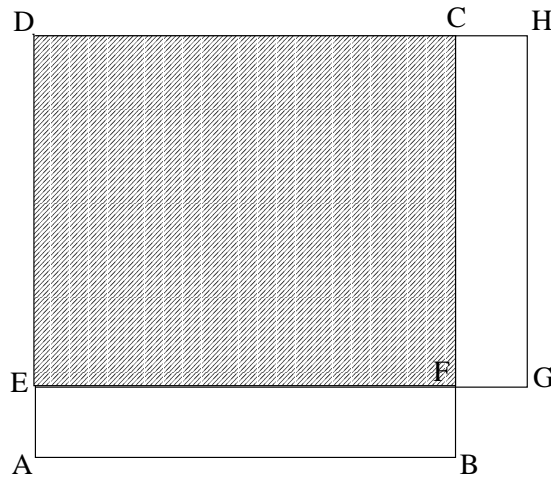


Figura 2.75: O quadrado é o retângulo de área máxima

O perímetro do quadrado ABCD é igual ao perímetro do retângulo EGHD, mas a área do quadrado é maior que a do retângulo. Vejamos por que. A área do retângulo EFCD é comum a ambos, mas a área do retângulo ABFE (incluído no quadrado ABCD) é maior que a área do retângulo FGHC (incluído no retângulo EGHD) pois,  $AE = BF = FG = CH$  e  $AB = EF > GH = FC = CB - FB = AB - FB$ . Analogamente, podemos tomar E em  $\overline{DC}$  e F em  $\overline{AB}$  e prolongamos  $\overline{DA}$  e  $\overline{EF}$  obtendo um retângulo de mesmo perímetro do quadrado ABCD, porém com área menor. Portanto o quadrado ABCD é o retângulo de perímetro dado que engloba a maior área.

**Problema 3 :** Entre todos os quadriláteros de perímetro dado qual o que possui área máxima?

### Solução

Seja ABCD um quadrilátero qualquer de perímetro dado. Traçando o segmento  $\overline{BD}$ , podemos observar que este divide o quadrilátero em dois triângulos BAD e BCD. A soma das áreas dos dois triângulos é igual a área do quadrilátero. Então podemos analisar o triângulo BAD, o lado BD é fixo e a soma  $AB + AD$  é constante. Do problema 5 da seção 2.2.2 temos que dado um lado e a soma dos outros dois lados de um triângulo, o triângulo que possui área máxima é o isósceles. Seja então A' tal que  $A'B + A'D = AB + AD$  e  $A'B = A'D$ , e seja C' tal que  $C'B + C'D = CB + CD$  e  $C'D = C'B$ .

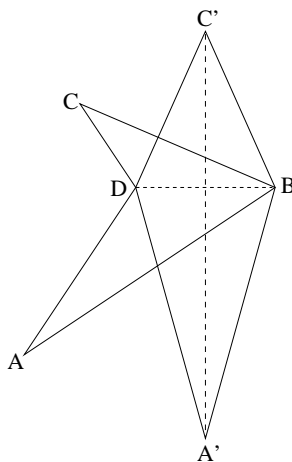


Figura 2.76:  $A'B = A'D$  e  $C'D = C'B$

Agora, temos um novo quadrilátero  $A'BC'D$  de perímetro igual ao perímetro do quadrilátero  $ABCD$  mas com área maior ou igual (se  $A = A'$  e  $C = C'$  teremos a igualdade) à daquele quadrilátero. Traçando agora o segmento  $\overline{A'C'}$  percebemos que ele divide o novo quadrilátero em dois outros triângulos  $A'DC'$  e  $A'BC'$ , o lado  $\overline{A'C'}$  é fixo para ambos e  $A'D + C'D = A'B + C'B$ . Escolhendo agora pontos  $D'$  e  $B'$  tais que  $A'D' + C'D' = A'D + C'D$  com  $A'D' = C'D'$ , e ainda  $A'B' + C'B' = A'B + C'B$  com  $A'B' = C'B'$ , teremos um outro quadrilátero  $A'B'C'D'$ , de perímetro igual ao perímetro dos outros dois anteriores, e tal que  $A'B' = B'C' = C'D' = D'A'$  e com área maior ou igual à área de  $A'BC'D$ .

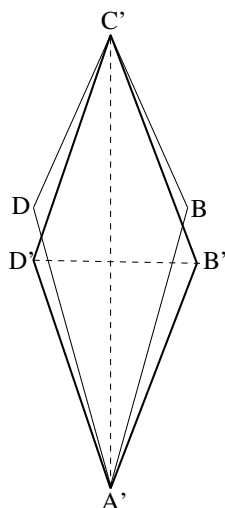


Figura 2.77:  $A'B' = B'C' = C'D' = D'A'$

O quadrilátero que possui os quatro lados iguais é o losango. Vamos agora mostrar que o quadrado é o losango que encerra a maior área para o quadrilátero de perímetro dado.

Podemos ver na figura, que o quadrado encerra a maior área entre todos os losangos de perímetro dado.

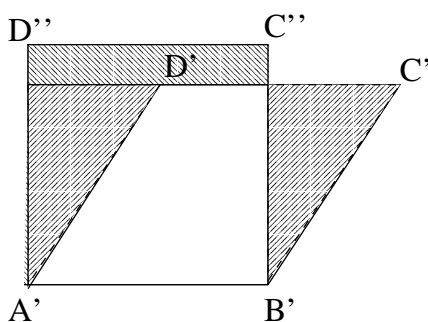


Figura 2.78: O quadrado é o losango de maior área

De fato, temos o quadrilátero  $A'B'C'D'$  e o quadrado  $A'B'C''D''$ , os dois com o mesmo perímetro. Podemos fazer a comparação destes dois quadriláteros, ou seja, as áreas hachuradas dos triângulos na figura são iguais. O quadrado possui área maior pois, a área total do quadrado é a área do losango mais a área do retângulo hachurado na figura. Portanto o quadrado é o quadrilátero de perímetro dado que possui a maior área.

**Problema 4 :** Entre todos os polígonos de  $n$  lados e perímetro fixado  $l$ , o que tem maior área é o polígono regular.

### Solução

A existência deste problema é consequência do teorema 2 da seção 2.1 pois, a área é uma função contínua de  $2n$  variáveis (as coordenadas dos  $n$  vértices) sujeita à restrição de que o polígono tenha perímetro fixado (e isto restringe o domínio a um conjunto fechado e limitado em  $\mathbb{R}^{2n}$ ).

Inicialmente provamos que o polígono solução é equilátero, ou seja, todos os lados têm o mesmo comprimento. Suponha que isto não ocorre. Então existem dois lados consecutivos de medidas distintas, digamos  $AB \neq BC$ . Mas então, substituindo o ponto  $B$  por um ponto  $B'$  tal que  $AB' = B'C$  com  $AB' + B'C = AB + BC$  teremos que a área do triângulo  $AB'C$



será maior do que a área do triângulo ABC (veja problema 5 da seção 2.2.2), e obtemos um novo polígono com área maior do que o polígono original, o que contradiz o fato de que ele teria área máxima.

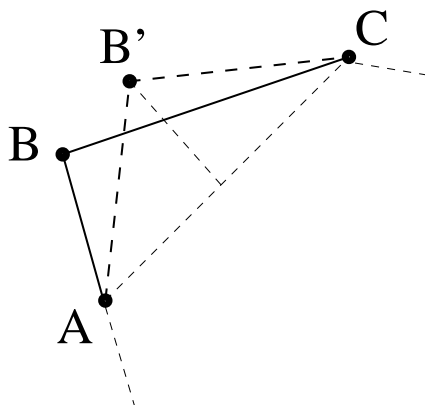


Figura 2.79:  $AB' + B'C = AB + BC$

Agora vamos provar que o polígono solução é equiângulo. Suponhamos que  $n$  seja par, ou seja,  $n = 2k$ . Então, se  $A_1, A_2, \dots, A_{2k}$  são os vértices do polígono, a reta  $\overleftrightarrow{A_1 A_k}$  dividirá o polígono em duas partes de mesma área (caso contrário, poderíamos refletir a parte de área maior na reta  $\overleftrightarrow{A_1 A_k}$  e obter um polígono de área maior). Vamos então analisar uma dessas partes.

Considere então qualquer vértice  $A_j$  entre  $A_1$  e  $A_k$ . Então  $\angle A_1 \hat{A}_j A_k = 90^\circ$ , caso contrário poderíamos modificar este ângulo até  $90^\circ$  (mantendo as partes entre  $A_1$  e  $A_j$ , e  $A_j$  e  $A_k$  inalteradas - exatamente como na argumentação do problema de Dido) obtendo então uma área maior para a metade do polígono, e que contradiria o fato do polígono original ser a solução.

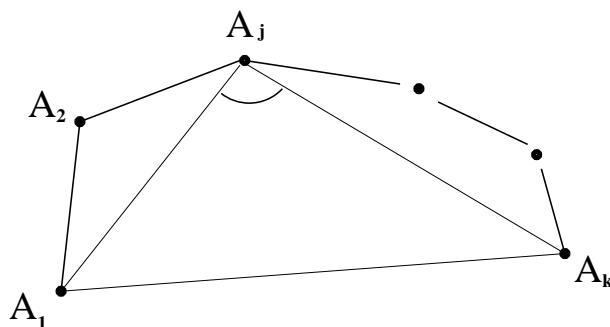


Figura 2.80:  $\angle A_1 \hat{A}_j A_k = 90^\circ$

Logo, como  $\widehat{A_1 A_j A_k} = 90^\circ$  para todo  $1 < j < k$ , e teremos que o polígono solução terá que ser, necessariamente inscrito em uma circunferência e, como ele é equilátero, ele deve ser regular. Portanto, se  $n$  é par, só existe um polígono de perímetro dado e área máxima: o polígono regular.

Suponha agora que  $n$  seja ímpar. Seja  $P$  o polígono de  $n$  lados com perímetro  $l$ , que é solução do problema e suponha que  $P$  não seja equiângulo, ou seja, possui 2 ângulos internos adjacentes distintos. Seja  $P_n$  o polígono regular de  $n$  lados e perímetro  $l$ . Construamos sobre  $P_n$  o polígono regular de  $2n$  lados inscrito no mesmo círculo que circunscreve  $P_n$ . Chamemos de  $P_{2n}$  tal polígono que terá um perímetro  $l' > l$ . Pela argumentação anterior, este é o único polígono de  $2n$  lados e, de perímetro  $l'$  e área máxima. Observe que, ligando 2 vértices alternados de  $P_{2n}$ , obtemos uma diagonal que é igual aos lados de  $P_n$  (e de  $P$ ). Agora, se a área de  $P_n$  for menor ou igual à área de  $P$ , então recortando os  $n$  triângulos formados por 2 lados consecutivos de  $P_{2n}$  e pela diagonal de vértices alternados, e colando-os sobre os lados de  $P$ , obteríamos um polígono de  $2n$  lados com perímetro  $l'$  mas não regular, e com área maior ou igual à área de  $P_{2n}$ . Mas isto é uma contradição já que  $P_{2n}$  é o único polígono de  $2n$  lados e perímetro  $l'$  de área máxima.

Assim termina a prova de que o polígono de  $n$  lados e perímetro  $l$  dado deve ser o polígono regular.

## Capítulo 3

# Problemas Propostos

Neste capítulo apresentamos uns poucos problemas coletados na bibliografia, alguns já clássicos em livros de geometria ou de cálculo.

1. Seja  $P$  em um dos lados do triângulo  $ABC$ . Qual a posição de  $P$  para que  $PA + PB + PC$  seja mínima?
2. Seja  $A$  um ponto sobre o círculo de centro  $O$  e raio  $a$  e seja  $P$  um ponto sobre a extensão de  $OA$  através de  $A$ . Uma linha secante a  $P$  intercepta o círculo nos pontos  $Q$  e  $Q'$ . Dada uma posição fixa de  $P$  determinar a área máxima do triângulo  $AQQ'$ .
3. Dado o triângulo  $ABC$ , escolha  $MN \parallel AB$  de modo que a área do triângulo  $MNP$  ( $P$  sobre  $AB$ ) seja máxima?
4. Dado o triângulo  $ABC$  e  $P$  sobre  $AB$  fixado. Escolher pontos  $M$  e  $N$  sobre  $BC$  e  $AC$ , respectivamente, de modo que a área do triângulo  $PMN$  seja máxima?
5. Existe um triângulo de área máxima inscrito em uma circunferência dada?
6. Dada uma circunferência de raio  $R$  achar o triângulo de área máxima inscrito na circunferência com uma das alturas igual a  $h$ ?
7. Dados uma reta  $l$  e dois pontos  $P$  e  $Q$  em lados opostos de  $l$  encontrar um ponto  $R$  em  $l$  tal que a quantidade  $|p - q|$ , isto é, o valor absoluto da diferença das distâncias de  $P$  e  $Q$  para  $R$ , seja um máximo?

8. De todos os triângulos de mesma base e com mesmo ângulo oposto a base, qual tem área máxima?
9. Determinar a menor e a maior distância de um ponto P a uma determinada curva.
10. Dados uma reta XY e fora desta reta dois pontos A e B, achar sobre XY o ponto M tal que  $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2$  é mínimo?
11. Dadas as retas  $r$  e  $s$  concorrentes e um ponto M no interior do ângulo por elas formado, encontrar os pontos B sobre  $r$  e C sobre  $s$  de forma que BC passe por M e a área de ABC seja mínima.
12. Dadas as retas  $r$  e  $s$  concorrentes e um ponto M no interior do ângulo por elas formado, encontrar os pontos B sobre  $r$  e C sobre  $s$  de forma que BC passe por M e BC seja mínima (este é o conhecido problema da escada em cálculo).
13. Construir o quadrilátero convexo ABCD conhecendo o ângulo  $\widehat{A}$ , os comprimentos das diagonais, o ângulo entre elas e sabendo que a soma AD+BC é mínima.
14. Dada um circunferência encontrar o polígono de n lados inscrito nesta circunferência que tem área máxima.
15. Dada uma semi-circunferência encontrar o trapézio de área máxima com vértices nesta circunferência.

# Considerações Finais

Gostaríamos de ter conseguido alcançar o nosso objetivo inicial, que consistia em abordar, em um único trabalho, a maioria dos problemas envolvendo máximos e mínimos em geometria euclidiana plana. Mas isso não é possível pois estes problemas são infundáveis.

Esperamos que as pessoas que tiverem acesso a este trabalho possam se encantar com a beleza da geometria e percebam que com apenas argumentos puramente geométricos é possível resolver problemas que fazendo o uso do cálculo tornam-se extremamente complicados e com o uso da geometria a solução se torna simples e elegante.

Quem sabe, futuramente, alguém se sinta motivado a continuar este trabalho fazendo uma abordagem dos problemas propostos deixados no capítulo 4, ou fazendo uma coletânea mais completa destes problemas. Também deixamos como proposta para futuros trabalhos a idéia de abordar os problemas de máximos e mínimos em geometria espacial e de superfícies, ou até mesmo problemas deste tipo com o uso do cálculo.

# Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1974.
- [2] CARONNET, TH. *Exercícios de Geometria*. Tomo III, Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1961.
- [3] CHAPUT, F. I. *Elementos de Geometria*. 12<sup>a</sup> edição. Rio de Janeiro: Editora F. Briguiet & Cia., 1945.
- [4] COURANT, R.; ROBBINS, H. *O Que é Matemática*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.
- [5] DÖRRIE, H. *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. New York: Dover Publications, 1965.
- [6] FIGUEIREDO, D. G. *Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana*. Revista Matemática Universitária, número 9/10, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1989.
- [7] GABRIEL-MARIE, F. *Exercices de Géométrie*. Sceaux: Ed. J. Gabay, 1991.
- [8] NAHIN, P. J. *When Least is Best*. Princeton and Oxford: Editora Princeton University Press, 2004.
- [9] NIVEN, I. *Maxima and Minima Without Calculus*. Dolciani Mathematical Expositions, número 6, The Mathematical Association of America, 1981.
- [10] OGILVY, C. S. *Excursions in Geometry*. New York: Dover Publications, 1990.

- [11] PEREIRA, A. L.; POSSANI, C. *Revista do Professor de Matemática n. 54*. Qual é maior terreno que sua cerca pode delimitar? Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.
- [12] REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, n. 1 à 54, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1982 - 2004.
- [13] REVISTA EUREKA, n. 1 à 18, Olimpíada Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998-2003.
- [14] VIRGÍLIO. *Eneida*. São Paulo: Círculo do Livro Ltda., 1994.
- [15] WAGNER, E. *Construções Geométricas*. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.
- [16] [http://latin204.tripod.com/essays/dido\\_myth\\_before\\_vergil.html](http://latin204.tripod.com/essays/dido_myth_before_vergil.html). 18/03/2004.
- [17] [http://www.earlychristianwritings.com/fathers/justinus\\_04\\_books11to20.htm](http://www.earlychristianwritings.com/fathers/justinus_04_books11to20.htm). 18/03/2004.
- [18] <http://www.phoenicia.org/colonies.html>. 18/03/2004.