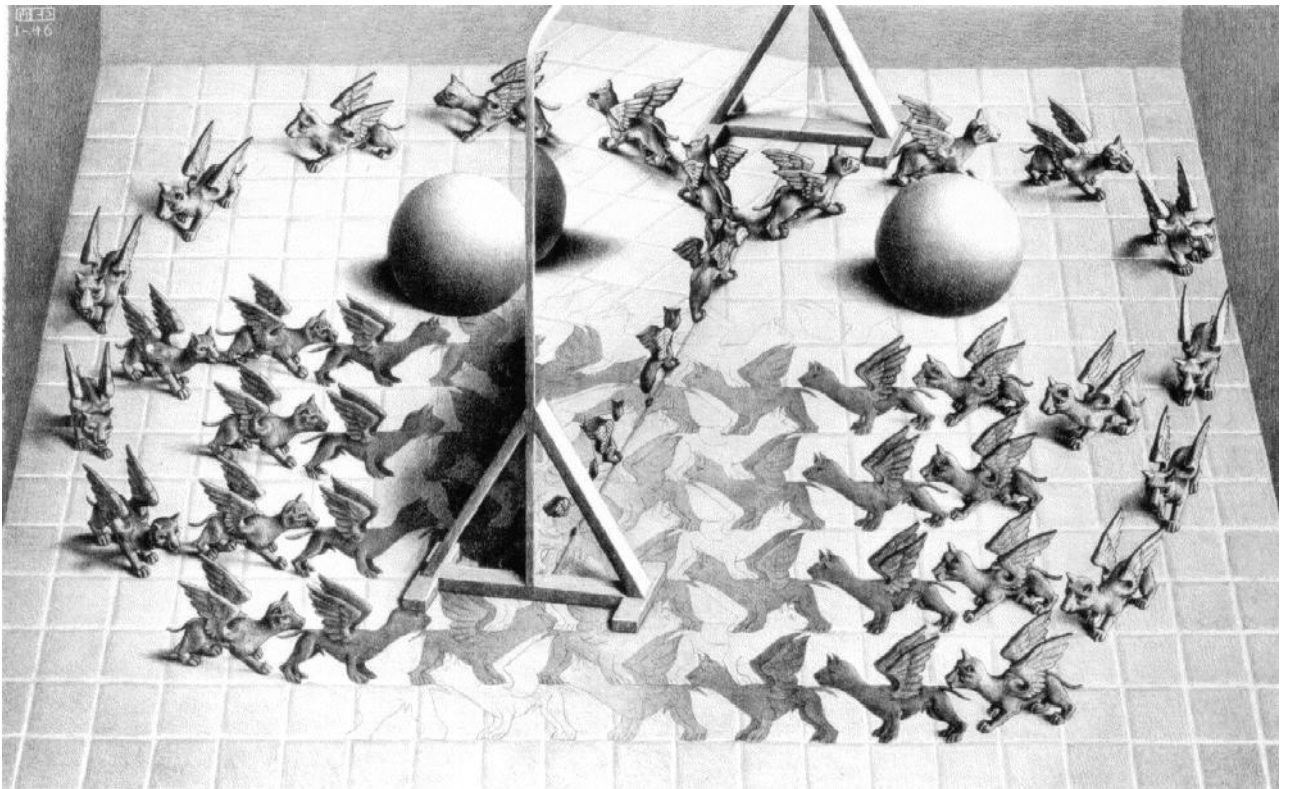


UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS  
(ISOMETRIAS) NO ENSINO FUNDAMENTAL -  
estudo de livros didáticos e sugestões de atividades**



CRISTIANE PESCADOR TONETTO

FLORIANÓPOLIS, DEZEMBRO DE 2004.

**CRISTIANE PESCADOR TONETTO**

**AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS  
(ISOMETRIAS) NO ENSINO FUNDAMENTAL -  
estudo de livros didáticos e sugestões de atividades**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura  
Departamento de Matemática  
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientadora: Dra. Neri Terezinha Both Carvalho

**FLORIANÓPOLIS - SC**  
**Dezembro de 2004**

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 75/SCG/04.

---

Prof<sup>a</sup> Carmem Suzane Comitre Gimenez  
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

---

Prof<sup>a</sup> Neri Terezinha Both Carvalho  
Orientadora

---

Prof<sup>a</sup> Rosimary Pereira

---

Prof<sup>a</sup> Marcia Maria Bernal

## Agradecimentos

A Deus por ter me concedido a vida.

Aos meus pais Humberto e Olivia e a minha irmã Cláudia, que apesar da distância e da saudade sempre apoiaram meus sonhos me dando força, incentivo, carinho e amor.

Ao meu namorado Mathias, que esteve presente em todos os momentos e inclusive mexendo em alguns arquivos meus (“*Ao matz que é bem legal*”), por seu amor.

À professora Neri, por ter aceitado me orientar neste trabalho, por sua atenção, dedicação e estímulo.

Às professoras Marcia e Rosimary, que fizeram parte da banca, pela disponibilidade e contribuição.

À minha amiga Edilênia Frezza pela amizade, que a distância não enfraqueceu.

Aos meus amigos Fabiana Travessini, Felipe Valério, Márlon Zimmermann, Micheli Roloff, Priscila Calegari e muitos outros, pelos momentos compartilhados.

A todos os professores e em especial ao professor Rubens e ao professor Pinho.

Enfim, a todos aqueles que me incentivaram e participaram da minha formação.

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Proposição sobre como e o que ensinar sobre Transformações Geométricas no Ensino Fundamental e Médio.</b>	<b>9</b>
2.1	Estudo dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) . . . . .	9
2.2	Estudo da Proposta Curricular de Santa Catarina(PCSC) . . . . .	15
2.3	Análise do Planejamento Anual das Escolas . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Estudo dos livros didáticos</b>	<b>18</b>
3.1	Estudo da Coleção: Matemática: Uma aventura do pensamento de Oscar Guelli; 5 <sup>a</sup> , 6 <sup>a</sup> , 7 <sup>a</sup> e 8 <sup>a</sup> série . . . . .	20
3.1.1	Estudo do Livro Matemática: Uma aventura do pensamento (5 <sup>a</sup> série)	20
3.1.1.1	Estudo: Laboratório de Geometria . . . . .	20
3.1.1.2	Estudo dos Exercícios do livro Matemática: Uma aventura do pensamento (5 <sup>a</sup> série) . . . . .	21
3.1.2	Estudo do Livro Matemática: Uma aventura do pensamento (6 <sup>a</sup> série)	22
3.1.3	Estudo do Livro Matemática: Uma aventura do pensamento (7 <sup>a</sup> série)	23
3.1.3.1	Estudo do capítulo: Simetria . . . . .	23
3.1.3.2	Estudo dos Exercícios do livro Matemática: Uma aventura do pensamento (7 <sup>a</sup> série) . . . . .	24
3.1.4	Estudo do Livro Matemática: Uma aventura do pensamento (8 <sup>a</sup> série)	25
3.2	Estudo da Coleção: Tudo é Matemática de Luiz Roberto Dante; 5 <sup>a</sup> , 6 <sup>a</sup> , 7 <sup>a</sup> e 8 <sup>a</sup> série. . . . .	27
3.2.1	Estudo do Livro Tudo é Matemática (5 <sup>a</sup> série) . . . . .	27

3.2.1.1	Estudo do capítulo Simetria: . . . . .	27
3.2.1.2	Estudo do sub-capítulo Simetria e classificação dos triângulos quanto aos lados, do capítulo Ângulos, polígonos e circunferências . . . . .	29
3.2.1.3	Estudo do sub-capítulo Construções em papel quadriculado, do capítulo Construções geométricas . . . . .	30
3.2.1.4	Estudo dos Exercícios do livro Tudo é matemática (5ª série)	31
3.2.2	Estudo do Livro Tudo é Matemática (6ª série) . . . . .	35
3.2.2.1	Estudo do sub-capítulo Simetria . . . . .	35
3.2.2.2	Estudo dos Exercícios do livro Tudo é matemática (6ª série)	36
3.2.3	Estudo do Livro Tudo é Matemática (7ª série) . . . . .	37
3.2.3.1	Estudo do sub-capítulo: Reflexão, translação e ampliação .	38
3.2.4	Estudo do Livro Tudo é Matemática (8ª série) . . . . .	39
3.2.4.1	Estudo do sub-capítulo: Transformações Geométricas . . .	39
3.3	Estudo da Coleção Matemática de Walter Spinelli e Maria Helena Souza; 5ª, 6ª, 7ª e 8ª série . . . . .	40
3.3.1	Estudo do Livro Matemática (5ª série) . . . . .	40
3.3.1.1	Estudo do capítulo: Simetria . . . . .	40
3.3.1.2	Estudo dos Exercícios do livro Matemática (5ª série) . . .	42
3.3.2	Estudo do Livro Matemática (6ª série) . . . . .	43
3.3.2.1	Estudo do capítulo: Simetria e translação . . . . .	43
3.3.2.2	Estudo dos Exercícios do livro Matemática (6ª série) . . .	45
3.3.3	Estudo do Livro Matemática (7ª série) . . . . .	47
3.3.3.1	Estudo do capítulo: Simetrias . . . . .	47
3.3.3.2	Estudo dos Exercícios do livro Matemática (7ª série) . . .	51
3.3.4	Estudo do Livro Matemática (8ª série) . . . . .	54

4.1	Simetria Axial . . . . .	57
4.1.1	Algumas atividades que podem ser usadas em classe para introduzir o conceito intuitivo de simetria axial. . . . .	57
4.1.2	Definição de simetria axial de eixo $d$ . . . . .	63
4.1.3	Construção com régua e compasso do simétrico de um ponto . . . . .	64
4.1.4	Exercícios de construção com régua e compasso . . . . .	65
4.1.5	Para entender melhor: . . . . .	67
4.1.6	Exercícios sobre as propriedades . . . . .	68
4.1.7	Para Fixar . . . . .	69
4.1.8	Definição de eixo de simetria de uma figura . . . . .	71
4.1.9	Simetria de figuras usuais . . . . .	71
4.1.10	Exercícios sobre simetria axial . . . . .	72
4.2	Simetria Central . . . . .	75
4.2.1	Definição de simetria central . . . . .	76
4.2.2	Construção com régua e compasso da imagem de um ponto . . . . .	76
4.2.3	Exercícios de construção com régua e compasso . . . . .	77
4.2.4	Propriedades da simetria central . . . . .	78
4.2.5	Centro de simetria de algumas figuras . . . . .	81
4.2.6	Vamos nos divertir . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>84</b>
	<b>Referências</b>	<b>86</b>
	<b>Anexo A – Planejamento das escolas</b>	<b>88</b>
A.1	Projeto Pedagógico do Colégio Coração de Jesus referente a 5 <sup>a</sup> e 6 <sup>a</sup> série. . . . .	88
A.2	Planejamento Anual do Colégio Criativo referente a 5 <sup>a</sup> , 6 <sup>a</sup> e 7 <sup>a</sup> série. . . . .	91
	<b>Anexo B – Tabelas de classificação dos exercícios</b>	<b>99</b>

B.1	Coleção Matemática: Uma aventura do pensamento; Oscar Guelli . . . . .	99
B.2	Coleção Tudo é Matemática; Luiz Roberto Dante . . . . .	101
B.3	Coleção Matemática; Walter Spinelli; Maria Helena Souza . . . . .	103
<b>Anexo C – Soluções dos exercícios</b>		<b>105</b>



# 1 *Introdução*

As transformações geométricas: simetria axial, simetria central, translação e rotação foram objeto de estudo no ensino fundamental no Brasil segundo os programas de 1965, no contexto de problemas de construção. O livro *Curso Moderno de Matemática* de Sangiorgi (1969, (1)) aborda estas transformações em um apêndice e não é conforme o programa. Na abordagem que ele faz dá ênfase as estruturas de grupo e é conforme a proposição da matemática moderna que se desencadeia oficialmente em 1970, pela implantação da lei 5692.

Com a reforma introduzida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em 1998, as transformações geométricas têm novamente um lugar no ensino da geometria.

Nosso estudo visa identificar o que e como as transformações geométricas são estudadas no ensino fundamental após 1998. Para isso buscamos conhecer nas orientações oficiais qual é tratamento dado as transformações geométricas, em que momento e de que forma elas devem ser propostas no ensino de matemática. Nosso estudo sobre as orientações oficiais é apresentado no capítulo 2.

No capítulo 3, estudamos alguns livros didáticos, buscando conhecer qual a abordagem é dada as transformações geométricas, considerando que os professores costumam utilizar algum livro didático para prepararem suas aulas.

Por último, buscamos propor uma abordagem do conteúdo simetria axial e simetria central que serve como sugestão de conteúdo de estudo.

## *2 Proposição sobre como e o que ensinar sobre Transformações Geométricas no Ensino Fundamental e Médio.*

Apresentamos o estudo realizado dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC) e Planejamentos Anuais de Escolas. O mesmo tem por objetivo explicitar o que, como e quando (em que classes ou níveis), as transformações geométricas devem ser estudadas no ensino fundamental e médio, segundo uma orientação oficial.

### **2.1 Estudo dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**

Segundo os PCN, o ensino de Matemática não precisa ter necessariamente uma ordem rígida para ser ensinada, tem-se idéia de que alguns conceitos precedem outros, mas sabemos que a organização seqüencial dos conteúdos com fim de ensino não é única, cabe ao professor a responsabilidade de organizar os conteúdos da maneira que considerar mais adequada para buscar uma aprendizagem efetiva e significativa. A organização seqüencial rígida é criticada nos PCN, pois segundo eles em geral o professor organiza a seqüência partindo das noções básicas, que nem sempre é o procedimento mais adequado.

Por vezes, essa concepção linear faz com que, ao se definir qual será o elo inicial da cadeia, tomem-se os chamados fundamentos como ponto de partida. É o que ocorre, por exemplo, quando se privilegiam as noções de “ponto, reta e plano” como referência inicial para o ensino de Geometria ou quando se tomam os conjuntos como base para a aprendizagem de números e operações, caminhos que não são necessariamente os mais adequados. (PCN; 1998; p.22; (2))

Identificamos nos PCN, uma proposição, mesmo não explícita, de desenvolver os con-

teúdos em espiral, contextualizados, e explorando diferentes representações, como podemos constatar:

O que também se observa em termos escolares é que muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento. Quando acontece de serem retomados (geralmente num mesmo nível de aprofundamento, apoiando-se nos mesmos recursos), é apenas com a perspectiva de utilizá-los como ferramentas para a aprendizagem de novas noções. De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos. (PCN ; 1998; p.22 (2))

Quanto a organização dos conteúdos, os PCN propõem 4 grandes áreas: Números e Operações, Espaço e Formas, Grandezas e Medidas, Tratamento de Informação.

Como neste trabalho nosso interesse primeiro é de conhecer a proposição dos PCN e PCSC sobre abordagem das transformações geométricas e também sobre o que ensinar e quando ensinar transformações geométricas, restringiremos o estudo dos PCN para a área “Espaço e Formas”.

Vejamos alguns aspectos que atribui os PCN a esta área.

Os PCN dão lugar explícito ao estudo das transformações geométricas, o qual deve ser detalhado propiciando assim uma visão mais ampla e objetiva dos conceitos e com a finalidade de desenvolver no aluno a percepção espacial e de saber utilizá-las como ferramenta na resolução de problemas.

Deve-se destacar também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. (PCN p.51 (2))

Uma vez que as transformações geométricas são objetos de estudo, os problemas de construção geométrica (segundo a problemática de construção com régua e compasso) tornam-se possíveis de ser trabalhados, o que também permite o estudo das propriedades das figuras geométricas.

O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. (PCN p.51 (2))

Segundo os PCN deve-se considerar as capacidades intelectuais e os conhecimentos que o aluno dispõe antes de começar a sua vida acadêmica, e através do estudo paralelo com o cotidiano, obtém-se uma aprendizagem atrativa e diversificada, tornando-o não tão abstrato e pondo em prática o que se aprende.

Além disso, é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (PCN p.51 (2))

Os PCN organizam o ensino em ciclos. O Ensino Fundamental é organizado em 4 ciclos. O primeiro ciclo está relacionado com a 1ª e 2ª série, o segundo ciclo com a 3ª e 4ª série, o terceiro ciclo com a 5ª e 6ª série e o quarto ciclo com a 7ª e 8ª série.

Verificamos em quais ciclos as Transformações Geométricas são estudadas.

No **Primeiro Ciclo** (1ª e 2ª série) noções que caracterizam as transformações geométricas estão presentes, onde um dos objetivos da matemática é a identificação de semelhanças e diferenças entre os objetos, de uma maneira informal, fazendo com que os alunos manipulem figuras e objetos.

Observação de formas geométricas presentes em elementos naturais e nos objetos criados pelo homem e de suas características arredondadas ou não, simétricas ou não, etc.(PCN p.73 (3))

No **Segundo Ciclo** (3ª e 4ª série) o aluno começa a identificar características das figuras, e passa a ter sensibilidade para observar as simetrias nos objetos, na natureza, na arte, nas construções. E é nessa hora que o professor vai passar a desempenhar um papel importante desenvolvendo atividades que façam com que o aluno observe essas simetrias.

- Identificação da simetria em figuras tridimensionais.
- Identificação de semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como números de ângulos, eixos de simetria, etc.(PCN p.88 (3))

Notemos que aqui, eixo de simetria é objeto de estudo. Também cabe salientar que a sugestão é de estudar as figuras geométricas, em particular os polígonos.

No **Terceiro Ciclo** (5ª e 6ª série) os alunos têm por volta de 11 e 12 anos, e eles passam por uma grande mudança na organização curricular, pois os conhecimentos passam a ser divididos em disciplinas distintas uma das outras. E é neste ciclo que aparecem as

figuras geométricas, não mais se observando semelhanças e diferenças, mas utilizando procedimentos como composição e decomposição, transformação, ampliação e redução. Neste ciclo um lugar explícito é dado às isometrias:

Transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície). (PCN p.73 (2))

No **Quarto Ciclo** (7<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> série) os objetivos relativos a conteúdos de transformações geométricas propostos não são claros. Percebemos que neste ciclo as transformações geométricas servem de ferramentas para o estudo de figuras planas.

Construindo figuras a partir da reflexão, por translação, por rotação, de uma outra figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura transformada são as mesmas. As atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência das figuras planas (isometrias). De forma análoga, o trabalho de ampliação e redução de figuras permite a construção da noção de semelhança de figuras planas (homotetias). (PCN p.86 (2))

Sob a rubrica “Conceitos e Procedimentos” o aspecto ferramenta das transformações e estudo das propriedades das transformações é anunciado e com sugestões de aplicações:

Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composição destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície). (PCN p.89 (2))

Neste caso a congruência é vista pela figura dada inicial e sua imagem (figuras congruentes) em função das propriedades das transformações (reflexões, translação e rotação).

“Critérios de Avaliação” para o quarto ciclo, onde as propriedades das transformações no estudo de configurações são propostos:

- Estabelecer relações de congruência e de semelhança entre figuras planas e identificar propriedades dessas relações.

Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de perceber que, por meio de diferentes transformações de uma figura no plano (translações, reflexões em retas, rotações), obtêm-se figuras congruentes e, por meio de ampliações e reduções, obtêm-se figuras semelhantes e de aplicar as propriedades da congruência e as da semelhança em situações-problemas.(PCN p.93 (2))

Os PCN apresentam também “Orientações Didáticas” que visam contribuir para a reflexão a respeito de como ensinar determinado conteúdo, dando lugar as transformações geométricas no item Espaço e Formas do:

- Primeiro e Segundo ciclo:

Um trabalho constante de observação e construção das formas é que levará o aluno a perceber semelhanças e diferenças entre elas. Para tanto, diferentes atividades podem ser realizadas: compor e decompor figuras, perceber a simetria como característica de algumas figuras e não de outras, etc. (PCN p.128 (3))

Cabe notar aqui, que por meio da construção de imagens de figuras por transformação podemos identificar as propriedades da transformação.

- Terceiro e Quarto ciclo: Aqui temos uma proposição do uso das transformações para o estudo de conceitos geométricos, ou seja, aprender a caracterizar objetos geométricos usando as transformações. É o momento de explicitar e organizar o conhecimento da própria transformação.

As atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas nesse ciclos, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais “dinâmico” para este estudo. Atualmente, existem *softwares* que exploram problemas envolvendo transformações das figuras. Também é interessante propor aos alunos situações para que comparem duas figuras, em que a segunda é resultante da reflexão da primeira (ou da translação ou da rotação) e descubram o que permanece invariante e o que muda. Tais atividades podem partir da observação e identificação dessas transformações em tapeçarias, vasos, cerâmicas, azulejos, pisos etc.(PCN p.124 (2))

Mais precisamente os PCN propõem que:

O estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência. As principais isometrias são: reflexão numa reta (ou simetria axial), translação, rotação, reflexão num ponto (ou simetria central), identidade. Desse modo as transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas.(PCN p.124 (2))

Também os PCN chamam atenção para a possível contextualização das transformações com o cotidiano do aluno.

À primeira vista as transformações podem parecer um assunto que não tem relação com o dia-a-dia, mas, refletindo e observando um pouco, nota-se, por exemplo, que as simetrias estão muito presentes no cotidiano. Em inúmeros objetos físicos ocorrem aproximações de planos de simetria de reflexão. Em representações planas desses objetos, tais planos de simetria reduzem-se a eixos de simetria. No corpo humano pode-se observar (aproximadamente) um plano de simetria. Assim, também a imagem de um objeto no espelho é simétrica a ele. Há eixos de simetria em diversas criações do homem, como desenhos de aeronaves, edifícios e móveis.

As simetrias centrais e de rotação também surgem em diversas situações: desenhos de flores, logotipos de empresas, desenhos de peças mecânicas que giram, copos, pratos, bordados etc. Os exemplos de translação também são fáceis de encontrar: grades de janelas, cercas de jardins, frisos decorativos em paredes, azulejos decorados etc. (PCN p.124 (2))

Percebemos que as transformações geométricas são citadas em todos os quatro ciclos dos PCN correspondentes ao Ensino Fundamental, e ainda recebem tratamento especial nas “Orientações Didáticas”. Percebe-se o quão importante deve ser o estudo de transformações geométricas para os alunos desde cedo, propiciando um reconhecimento de figuras bem embasado.

Quanto ao Ensino Médio os PCN não contemplam as transformações geométricas como objeto de ensino. Em um dos itens das “Unidades Temáticas” os PCN propõem na geometria plana que sejam abordados: *“semelhança e congruência; representação de figuras....Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhanças de figuras...”* ( p. 125 (4)); Neste contexto o estudo de congruência e semelhança de figuras pode dar lugar às transformações geométricas, mas é uma hipótese que fizemos.

Também podemos supor, dependendo do professor, que as transformações geométricas sejam usadas no estudo das propriedades de figuras geométricas, pois o PCN propõe:

Numa outra direção, as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (PCN-EM p.44 (5))

Ainda, segundo nossa interpretação, um lugar para transformações de figuras é dado pelos PCN+ que propõe:

- Identificar transformações entre grandezas ou figuras para relacionar variáveis e dados, fazer quantificações, previsões e identificar

desvios. As ampliações e reduções de figuras são exemplos que devem ser entendidos como transformações de uma situação inicial em outra final. (PCN+ EM p.116 (4))

Identificar transformações entre figuras e trabalhar ampliações e reduções de figuras, sugere o estudo das isometrias e da homotetia.

Podemos concluir que segundo os PCN, a abordagem das transformações geométricas no Ensino Médio fica a critério do professor e, no caso de fazê-lo, o tratamento dado deva ser como é proposto no Ensino Fundamental, ou seja, “transformação de figuras” onde o aspecto funcional não é considerado.

## 2.2 Estudo da Proposta Curricular de Santa Catarina(PCSC)

E qual será o tratamento as transformações geométricas segundo a Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC)?

Os conteúdos Matemáticos da Proposta Curricular de Santa Catarina se organizam em quatro campos do conhecimento: Campos Numéricos, Campos Algébricos, Campos Geométricos, Estatísticas e Probabilidades. Segundo esta “divisão” temos nos Campos Geométricos os seguintes sub-itens: Geometria, Sistemas de Medidas e Trigonometria, como podemos observar no seguinte quadro:

CAMPOS GEOMÉTRICOS	ENSINO FUNDAMENTAL								ENSINO MÉDIO			
	PRÉ	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	1ª	2ª	3ª
<b>1. GEOMETRIA</b>												
• Produção histórico-cultural												
• Exploração do espaço tridimensional												
• Elementos de Desenho Geométrico												
• Estudo das Representações Geométricas no Plano												
• Geometria Analítica												
<b>2. SISTEMAS DE MEDIDAS</b>												
• Produção histórico-cultural												
• Conceitos e Medidas de: Comprimento, superfície, Volume, capacidade, ângulo, Tempo, massa, peso, velocidade e temperatura												
<b>3. TRIGONOMETRIA</b>												
• Produção histórico-cultural												
• Relações trigonométricas no Triângulo retângulo												
• Funções trigonométricas												

Figura 1: Campo Geométrico



Cabe remarcar que na leitura do quadro 1 deve ser observado que a passagem gradativa da cor branca para a cor preta, em cada conteúdo, corresponde a uma também gradativa passagem de um tratamento assistemático<sup>1</sup> para sistemático.

No que diz respeito ao ensino dos Campos Geométricos o PCSC propõe um tratamento dos objetos matemáticos considerando a:

- visualização e representação das formas geométricas;
- denominação e reconhecimento das formas, segundo suas características;
- classificação de objetos segundo suas formas;
- estudo das propriedades das figuras e das relações entre elas;
- construção de figuras ou modelos geométricos; (PCSC p. 112 (6))

Notamos que o PCSC não cita diretamente as transformações geométricas como objeto matemático no Ensino Fundamental, porém entendemos que ele abre um espaço no contexto acima, no estudo do reconhecimento de formas, nas características dos polígonos, no estudo das propriedades das figuras e na construção de figuras.

## 2.3 Análise do Planejamento Anual das Escolas

Realizamos o estudo de sete planejamentos anuais relativos ao ensino fundamental (2003/ 2004). Destes planejamentos quatro são de escolas públicas e três de escola particular.

Para fins de estudo designamos os planejamentos de A, B , C, D, E, F e G.

No planejamento A o estudo de simetria é proposto na 5ª série ...*“Simetria nas formas; números simétricos;”*... na 6ª série ...*“construções geométricas: os ângulos; circunferências; simetrias; medidas dos ângulos dos polígonos regulares”*... e ainda na 7ª série ...*“Simetrias: Tipos de simetrias; Simetrias e propriedades das figuras geométricas”*... (Anexo A.2, p.91). Portanto o planejamento A dentro do conteúdo programático apresenta de maneira bem explícita somente o conteúdo de simetria no que se refere as transformações geométricas.

No planejamento B o estudo de simetria é proposto na 5ª série ...*Eixo de Simetria: trabalhando com figuras simétricas...*, na 6ª série apresenta o conteúdo de ...**Simetria...**(Anexo A.1, p. 88). Como no planejamento A, o planejamento B também apresenta

---

<sup>1</sup>Tratar assistematicamente um conteúdo significa abordá-lo enquanto noção ou significação social, sem preocupação em defini-lo simbólica ou formalmente.

de maneira bem explícita o conteúdo de simetria, destacando o estudo de eixo de simetria na 5ª série e simetria como transformação na 6ª série.

No planejamento C o estudo de simetria é proposto na 6ª série ...*Simetria: Traçar retas perpendiculares usando régua e esquadros; Traçar quadriláteros a partir do eixo de simetria; Desenhar figuras com eixos de simetria.*, e ainda introduz o conteúdo de homotetia, *Ampliações e reduções: ampliar e reduzir figuras usando régua e compasso...*

Os demais programas estudados D, E, F e G em nenhum momento dão lugar as transformações. Destacamos ainda que os programas A e B são de escolas particulares e o programa C é de escola estadual.

Assim, apesar dos PCN darem ênfase as transformações geométricas no ensino fundamental, a ausência de qualquer referência sobre o ensino de transformações geométricas em quatro dos planejamentos e as pequenas citações sobre simetria em três deles, nos permite assegurar que as transformações geométricas ainda não são objeto de ensino em todas as escolas.

Entretanto sabemos que os professores muitas vezes se baseiam em livros didáticos para a elaboração dos planejamentos anuais e na preparação de suas aulas. Então, podemos nos perguntar:

O que os livros didáticos do Ensino Fundamental dizem a respeito das transformações geométricas?

Se os livros didáticos dão lugar as transformações geométricas, como eles abordam o conteúdo? Em que séries?

### *3 Estudo dos livros didáticos*

Neste capítulo apresentamos o estudo dos livros didáticos. Estudamos os seguintes livros:

- Coleção Matemática: Uma aventura do pensamento; Guelli, Oscar; 5<sup>a</sup>, 6<sup>a</sup>, 7<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> série; Editora Ática, 8<sup>a</sup> edição (4<sup>a</sup> impressão), 2001, São Paulo-SP. (7)
- Coleção Tudo é Matemática; Dante, Luiz Roberto; 5<sup>a</sup>, 6<sup>a</sup>, 7<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> série; Editora Ática, 1<sup>a</sup> impressão, 2004, São Paulo-SP. (8)
- Coleção Matemática; Spinelli, Walter; Souza, Maria Helena; 5<sup>a</sup>, 6<sup>a</sup>, 7<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> série; Editora ática, 1<sup>a</sup> edição; 3<sup>a</sup> impressão, 1999, São Paulo-SP. (9)

Usamos como critério para escolha dos livros, a condição de ser aprovado pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC).

O objetivo deste estudo é verificar o tratamento dado as transformações geométricas nos livros didáticos.

Estudamos os livros de 5<sup>a</sup>, 6<sup>a</sup>, 7<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> série do ensino fundamental, pois os PCN enfatizam a abordagem das transformações geométricas (isometrias) no 3<sup>o</sup> e 4<sup>o</sup> ciclo do Ensino Fundamental.

Quanto aos exercícios propostos pelos livros didáticos fizemos uma classificação usando como referência a classificação feita por Both Carvalho (1997, (10)) que segue:

<b>Classificação de tipos de problemas sobre transformações geométricas relativo ao ensino fundamental:</b>		
<b>Categoria A:</b> As transformações geométricas como objeto de estudo.	<b>Classe I:</b> A transformação de um objeto inicial em um objeto final por uma transformação geométrica.	1) O objeto inicial está dado ou é a reproduzir por um desenho sobre a “pavage”.
		2) O objeto inicial está dado em linguagem natural e simbólica (desenho sobre papel branco).
	<b>Classe I’:</b> A transformação de um objeto final em um objeto inicial por uma transformação geométrica.	1) O objeto final está dado ou é a reproduzir por um desenho sobre a “pavage”.
		2) O objeto final está dado em linguagem natural e simbólica (desenho sobre papel branco).
	<b>Classe II:</b> A transformação que define a relação entre dois objetos ou uma transformação que liga dois objetos.	1) A natureza da transformação esta dada.
		2) Determinar a natureza da transformação.
	<b>Classe III:</b> A composição das transformações.	1) Objeto Inicial - As transformações - Objeto Final?
		2) Objeto Inicial - As transformações? (t1 ou t2) - Objeto Final.
<b>Categoria B</b> As transformações geométricas como ferramenta na resolução de problemas.	<b>Classe I:</b> As transformações geométricas como ferramenta quase-obrigatória na construção no contexto de ensinamento.	
	<b>Classe II</b> As transformações geométricas como ferramenta possível para resolver problemas de construção.	
	<b>Classe III:</b> As transformações geométricas como ferramenta de demonstração.	

### 3.1 Estudo da Coleção: Matemática: Uma aventura do pensamento de Oscar Guelli; 5<sup>a</sup>, 6<sup>a</sup>, 7<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> série

#### 3.1.1 Estudo do Livro Matemática: Uma aventura do pensamento (5<sup>a</sup> série)

O livro de 5<sup>a</sup> série se constitui de sete capítulos (subdividido em sub-capítulos e estes contém as seções), dos quais o capítulo 1 trata de “Sistemas de numeração - Geometria informal” e aborda na seção “Laboratório de Geometria” o conteúdo de simetria. Portanto restringimos nosso estudo neste livro ao estudo da seção: “Laboratório de Geometria”.

##### 3.1.1.1 Estudo: Laboratório de Geometria

Nesta seção destacamos abordagem do conceito de simetria e exercícios.

- Estudo da simetria em figuras do cotidiano e da natureza:

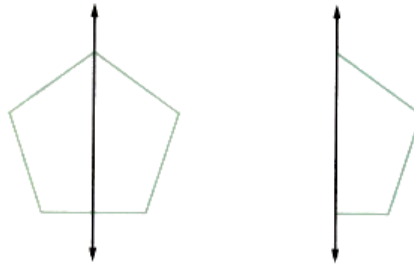
Por meio de ilustrações o autor destaca que:

A utilidade e a beleza de objetos ou seres dependem de sua simetria. Encontramos simetria na parte externa de carros, aviões, em construções, na folha de uma árvore, etc. (p.13)

Notemos que a afirmação “*A utilidade e a beleza de objetos ou seres dependem de sua simetria*”, é uma manifestação pessoal do autor, e que não tem valor de veracidade numa interpretação geral. Encontrar a simetria na folha de uma árvore como afirma o autor pode levar a produção de um obstáculo para o aluno elaborar o conceito matemático de simetria, pois nos elementos da natureza não podemos afirmar que existe simetria, conforme a definição matemática. Podemos sim, inferir a presença de certa simetria (pseudo-simetria) em objetos da natureza enquanto saber socialmente aceito. O professor deve estar atento para estas possíveis distorções. Dizer, por exemplo, que existe simetria em carros, folhas de árvore, leva-se facilmente a uma concepção errônea do conceito de simetria.

O autor introduz a noção intuitiva de simetria, usando como artifício dobraduras:

A figura abaixo é simétrica em relação a uma reta porque, dobrando uma das partes em torno dessa reta, as duas partes da figura coincidem. (p.14)



Ainda por meio de exercícios, a reta (eixo de simetria) é destacada, porém em nenhum momento o conceito de eixo de simetria é colocado explicitamente, ou seja, institucionalizado.

### 3.1.1.2 Estudo dos Exercícios do livro Matemática: Uma aventura do pensamento (5<sup>a</sup> série)

São apresentados neste livro, mais especificamente na seção Laboratório de Geometria, 9 exercícios os quais contemplam a classificação dada por Both Carvalho (10).

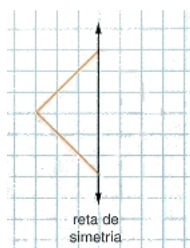
**Categoria A Classe I :** A transformação de um objeto inicial em um objeto final por uma transformação geométrica; **1)** O objeto inicial está dado ou é a reproduzir por um desenho sobre “pavage”<sup>1</sup>.

Número de exercícios: 05.

Nestes exercícios o autor usa o termo **completar** figuras simétricas.

Exemplo:

Copie e complete estas figuras simétricas numa folha de papel quadriculado. (p.15)

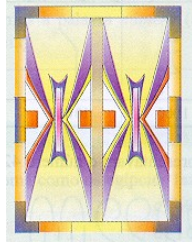


**Categoria A Classe II:** A transformação que define a relação entre dois objetos ou uma transformação que liga dois objetos; **1)** A natureza da transformação esta dada.

<sup>1</sup>Malha (exemplo: papel quadriculado)

Número de exercícios: 03.

Converse com seus colegas para descobrir exemplos de simetria nos desenhos abaixo: (p.15)



Os demais exercícios não contemplam as classes segundo a classificação de referência. Em nossas análises quando nos deparamos com situações como esta introduzimos novas classes e sub-classes.

**Categoria A Classe IV:** Desenhar/Criar/Recortar figuras onde transformações expressam uma relação entre sub-figuras.

Número de exercícios: 01.

Use uma folha sulfite para construir figuras simétricas como estas: (p.15)



Temos então neste livro um tratamento bem elementar e intuitivo da noção de simetria com relação a um eixo em figuras.

### 3.1.2 Estudo do Livro Matemática: Uma aventura do pensamento (6<sup>a</sup> série)

O livro de 6<sup>a</sup> série se constitui de sete capítulos, e em nenhum momento aborda as transformações geométricas como objeto de ensino e nem como ferramenta.

### 3.1.3 Estudo do Livro Matemática: Uma aventura do pensamento (7<sup>a</sup> série)

O livro de 7<sup>a</sup> série se constitui de sete capítulos, dos quais o capítulo 6 trata de “Triângulos Congruentes” e aborda no primeiro sub-capítulo o conteúdo de “Simetria”. Portanto restringimos nosso estudo neste livro ao estudo do sub-capítulo: “Simetria”.

#### 3.1.3.1 Estudo do capítulo: Simetria

- Estudo em figuras do cotidiano e da natureza:

Por meio de ilustrações o autor destaca, como fez no livro de 5<sup>a</sup> série, que:

Muitas vezes, a beleza, a utilidade e a funcionalidade dos objetos ou seres dependem da sua simetria.

Existe simetria com relação a uma reta ou a um plano em um hipopótamo, no desenho externo de um automóvel, no rosto de um homem ou na foto do interior de uma fábrica. (p.175)

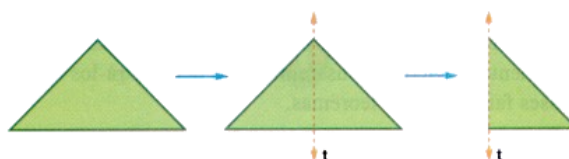
Como já chamamos atenção no estudo do livro da 5<sup>a</sup> série, a simetria tratada pelo autor sobre o corpo dos animais ou plantas, não é o conceito matemático de simetria. Remarcamos que nestes casos, trata-se de uma “pseudo-simetria”, ou seja, o corpo dos animais não são “perfeitamente” simétricos. Mais grave ainda se considerarmos o animal como um todo, isto é, simetria espacial. Pensamos que estes exemplos apresentados no livro podem dificultar (perturbar) o entendimento do conceito de simetria do ponto de vista matemático.

- Estudo do Eixo de Simetria

O autor introduz a definição de simetria, usando como artifício dobraduras como fez na 5<sup>a</sup> série.

Por exemplo:

Observe que o triângulo a seguir é simétrico em relação a uma reta  $t$ , porque, dobrando uma das partes em torno dessa reta, fazemos com que as duas partes da figura coincidam. (p.176)



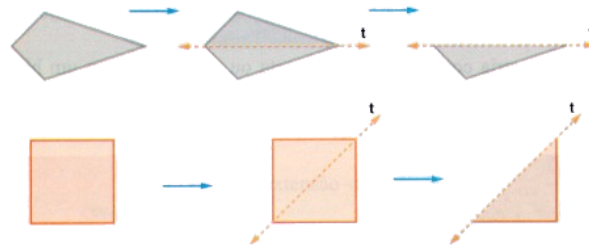


Notemos que o conceito de simetria está relacionado com a dobradura e não com a perpendicularidade e distância em relação ao eixo.

Quanto a posição do eixo de simetria a seguinte nota é dada:

A reta não é necessariamente vertical. (p.176)

E os exemplos seguintes são dados:



Temos assim a apresentação de 3 posições diferentes do eixo.

### 3.1.3.2 Estudo dos Exercícios do livro Matemática: Uma aventura do pensamento (7<sup>a</sup> série)

São apresentados neste livro, mais especificamente no capítulo “Simetria”, 35 exercícios os quais contemplam segundo a classificação que estamos considerando:

**Categoria A Classe I :** A transformação de um objeto inicial em um objeto final por uma transformação geométrica; **1)** O objeto inicial está dado ou é a reproduzir por um desenho sobre a “pavage”.

Número de exercícios: 06.

Nestes exercícios o autor também utiliza o termo **completar**, como em alguns exercícios do livro de 5<sup>a</sup> série.

Exemplo:

Nos itens a seguir, estão desenhadas a metade de cada figura simétrica e a reta de simetria de cada uma. Copie e complete o desenho numa folha de papel quadriculado.



**Categoria A Classe IV:** Desenhar/Criar/Recortar figuras onde transformações expressam uma relação entre sub-figuras.

Número de exercícios: 02.

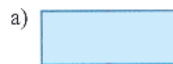
Introduzimos uma nova classe:

**Categoria A Classe V:** Estudo dos elementos que caracterizam a transformação;  
**a)** Traçar eixo/plano de simetria.

Número de exercícios: 27.

Exemplo:

Copie as figuras geométricas numa folha de papel quadriculado e desenhe uma reta de simetria vertical para cada uma. (p.177)



Podemos notar que o exercício é centrado no eixo de simetria que determina uma simetria enquanto relação entre duas sub-figuras. Mas não é a transformação que é focalizada para o aluno. O objeto passa a ser o eixo elemento da simetria e não a simetria axial.

Percebemos que o autor trata o “eixo” de simetria como “reta” de simetria nos exercícios.

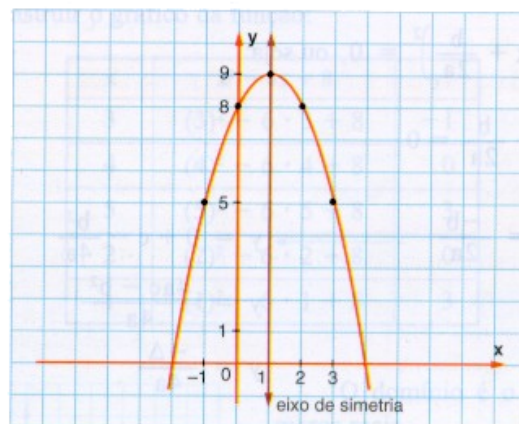
Em 09 exercícios é pedido para que se desenhe “*uma reta de simetria vertical*” das figuras dadas, fazendo com que o aluno desconsidere as possibilidades de existirem outras retas de simetria (inclinada ou horizontal), mas na teoria o autor comenta sobre 3 posições diferentes de eixo.

### 3.1.4 Estudo do Livro Matemática: Uma aventura do pensamento (8ª série)

O livro de 8ª série se constitui de seis capítulos, dos quais o capítulo 3 trata de “Funções Polinomiais do 1º e 2º graus” e na seção “Gráficos de funções quadráticas”, o autor comenta:

[...] selecionamos os valores de  $x$  mais convenientes, por exemplo pontos simétricos em relação ao ponto em que o eixo de simetria corta o eixo  $x$ , e calculamos, por substituição, os valores de  $y$ .

$x$	$-x^2 + 2x + 8$	$y$
1	$-(1)^2 + 2(1) + 8$	9
2	$-(2)^2 + 2(2) + 8$	8
3	$-(3)^2 + 2(3) + 8$	5
0	$-(0)^2 + 2(0) + 8$	8
-1	$-(-1)^2 + 2(-1) + 8$	5



[...] O eixo de simetria da curva é a reta descrita pela equação  $x = 1$ .  
(p.114)

Percebemos aqui que o autor utiliza a simetria como ferramenta para auxiliar na construção e estudo do gráfico da parábola.

Em conclusão:

Esta coleção Matemática: uma aventura do pensamento aborda de maneira intuitiva o assunto de simetria e utiliza o conceito de eixo e de sub-figuras simétricas como ferramenta no estudo da parábola. Outras transformações geométricas como a translação, rotação e simetria central não são citadas em momento algum pelo autor.

## 3.2 Estudo da Coleção: Tudo é Matemática de Luiz Roberto Dante; 5<sup>a</sup>, 6<sup>a</sup>, 7<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> série.

### 3.2.1 Estudo do Livro Tudo é Matemática (5<sup>a</sup> série)

O livro de 5<sup>a</sup> série se constitui de treze capítulos (subdividido em sub-capítulos e estes contém as seções), dos quais o capítulo 4 trata de “Simetria”, o capítulo 8 trata de “Ângulos, polígonos e circunferências” (e possui um sub-capítulo “Simetria e classificação dos triângulos quanto aos lados”) e no capítulo 12 “Construções geométricas” (e possui um sub-capítulo “Construções em papel quadriculado”).

#### 3.2.1.1 Estudo do capítulo Simetria:

Os sub-capítulos do capítulo de simetria são:

- Introdução
- Figura com simetria em relação a um eixo: Trocando idéias; Oficina de Matemática; Trocando idéias
- Figuras com simetria em relação a mais de um eixo: Oficina de Matemática; Desafio
- Simetria em contornos de formas planas: Você sabia que...
- Simétrico de uma figura: Trocando idéias
- Composição de simetrias (eixos paralelos): Revendo o que aprendemos; Brincando também se aprende; Projeto em equipe; Redação - Escrevendo sobre o capítulo; Revisão cumulativa; Para ler, pensar e divertir-se

O autor introduz a idéia de simetria através do estudo de duas fotos do Palácio da Alvorada, em Brasília(DF).

Observe estas duas fotos: na primeira, aparece uma das colunas da fachada e, na segunda, toda a fachada refletida em um espelho-d'água.



Uma coluna da fachada do Palácio da Alvorada, em Brasília (DF).



Colunas do Palácio da Alvorada em Brasília (DF) refletidas no espelho-d'água.

Estas fotos servem para ilustrar dois dos principais tópicos que serão estudados:

- como identificar figuras que apresentam simetria e figuras que não apresentam simetria (na primeira foto temos uma figura que apresenta simetria em relação a um eixo);
- como obter o simétrico de uma figura em relação a um eixo (a imagem refletida na água é o simétrico da figura da fachada). (p.90)

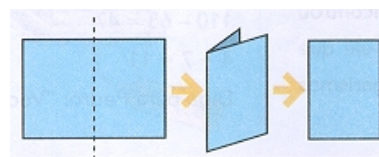
Questionamos a exemplificação por meio de: “*a imagem refletida na água é o simétrico da figura da fachada*”, a simetria conserva distância e com a imagem refletida na água não há como saber se as distâncias são as mesmas. Este pode ser um bom momento para trabalhar o fenômeno na Física: “Como se forma a imagem refletida na água?” E após isto introduzir a idéia de figuras simétricas.

Uma noção intuitiva: usando dobraduras a noção de simetria é estudada.

Imagine uma figura sendo dobrada de modo que as duas partes coincidam.

Dizemos, nesse caso, que a figura apresenta simetria ou é *simétrica*.

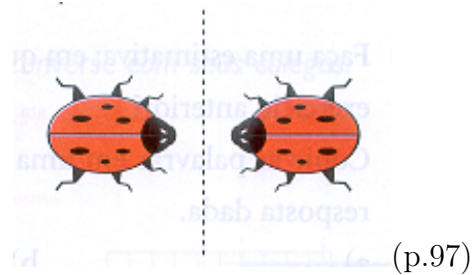
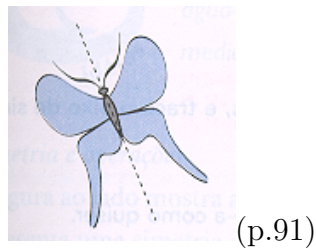
A “dobra” é o *eixo de simetria*. (p.90)



Temos aqui a institucionalização do que é uma figura que se compõe de figuras simétricas e eixo de simetria. A simetria enquanto transformação não é o objeto.

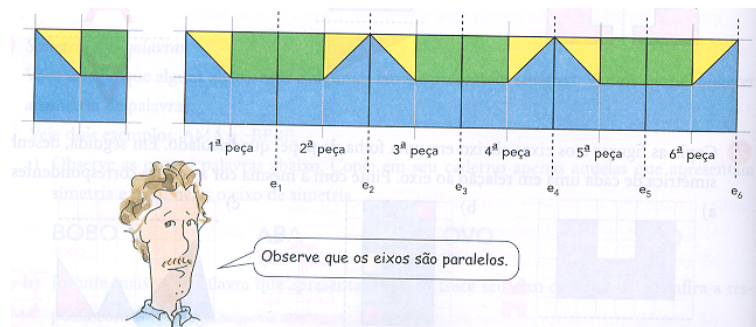
O autor comenta e mostra exemplos de figuras com mais de um eixo de simetria e distingue figura simétrica de duas figuras simétricas em relação ao eixo de simetria.

Exemplo:



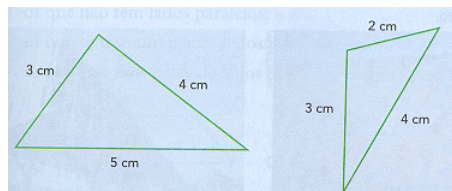
Um momento para composição: “*Composição de simetria (eixos paralelos)*”, é apresentada em uma atividade de “pavage”:

Podemos montar bonitos painéis decorativos a partir de uma peça de referência e aplicando simetria. Veja: (p.98)

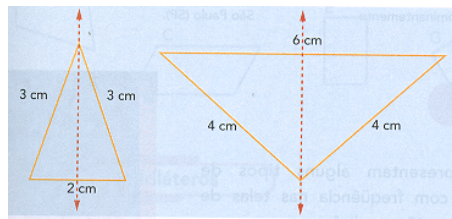


### 3.2.1.2 Estudo do sub-capítulo Simetria e classificação dos triângulos quanto aos lados, do capítulo Ângulos, polígonos e circunferências

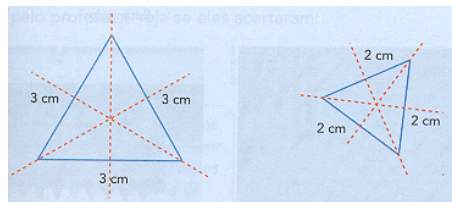
Para estudar a classificação dos triângulos o autor aborda a partir do número de eixos de simetria.



Estes triângulos não apresentam simetria. Seus três lados têm medidas de comprimento diferentes. São chamados de *triângulos escalenos*



Estes apresentam simetria em relação a um eixo. Eles têm dois lados com medidas iguais. São chamados de *triângulos isósceles*.



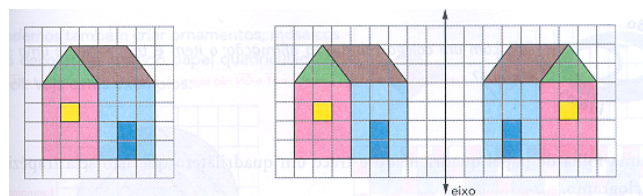
Neste caso apresentam simetria em relação a três eixos. Neles, os três lados têm medidas iguais. São chamados de *triângulos equiláteros*. (p.191)

Temos aqui que o autor busca atender a chamada dos PCN, usar as transformações para estudo de figuras planas.

### 3.2.1.3 Estudo do sub-capítulo Construções em papel quadriculado, do capítulo Construções geométricas

O autor introduz a construção de uma figura simétrica através de papel quadriculado.

Rogério gosta muito de desenhar. Ele fez em uma folha de papel quadriculado a reprodução de uma casa obedecendo à mesma posição do modelo, e depois desenhou a figura simétrica em relação a um eixo. Observe a seguir: (p.266)



### 3.2.1.4 Estudo dos Exercícios do livro Tudo é matemática (5ª série)

São apresentados neste livro 166 exercícios. Os exercícios que estudamos são apresentados no capítulo “Simetria” e na “revisão cumulativa” (onde o autor propõe em cada final de capítulo exercícios com conteúdos abordados no livro, ou seja, uma pequena revisão utilizando exercícios). Estudamos também os exercícios das seções: “Trocando idéias”, “Oficina de Matemática”, “Desafio”, “Revedo o que aprendemos”, “Brincando também se aprende”, “Projeto em equipe”, “Revisão cumulativa” e “Para ler, pensar e divertir-se”.

Vejamos:

**Categoria A Classe I :** A transformação de um objeto inicial em um objeto final por uma transformação geométrica; **1)** O objeto inicial está dado ou é a reproduzir por um desenho sobre a “pavage”.

Número de exercícios: 18.

Nestes exercícios o autor usa os seguintes termos:

Em 04 exercícios utiliza o termo **completar** figuras simétricas.

Em 01 exercício utiliza o termo **construir** figuras simétricas.

Em 04 exercícios utiliza o termo **desenhar** figuras simétricas.

Em 03 exercícios utiliza o termo **traçar** figuras simétricas.

Em 02 exercícios utiliza o termo **obter** figuras simétricas.

Em 04 exercícios utiliza o termo **determinar** figuras simétricas.

**Categoria A Classe IV:** Desenhar/Criar/Recortar figuras onde transformações expressam uma relação entre sub-figuras.

Número de exercícios: 08.

**Categoria A Classe V:** Estudo dos elementos que caracterizam a transformação;  
**a)** Traçar eixo/plano de simetria.

Número de exercícios: 79.

Nestes exercícios 74, pedem que antes de traçar o eixo de simetria, se verifique se é possível traçá-lo, ou seja, se a figura possui eixo de simetria.

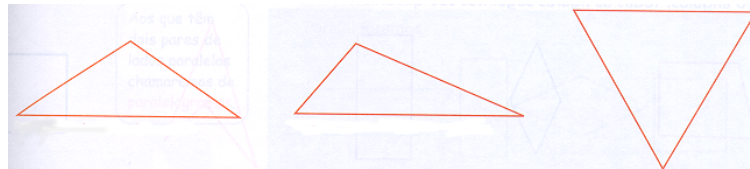
**Categoria B Classe II:** As transformações geométricas como ferramenta possível para resolver problemas de construção.



Número de exercícios: 03.

Exemplo:

Use simetria para fazer uma estimativa sobre o tipo de cada um destes triângulos (escaleno, isósceles ou equilátero). Depois, meça seus lados para conferir sua estimativa. (p.191)

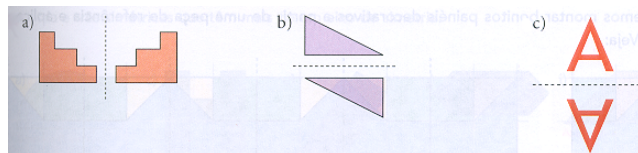


Os exercícios que apresentamos a seguir vêm ampliar a classificação já dada:

**Categoria A Classe VI:** Dadas as figuras e a transformação, identificar quais figuras a transformação determina uma relação entre figuras.

Número de exercícios: 45.

Escreva em seu caderno sim ou não, verificando se uma figura é ou não simétrica da outra em relação à linha pontilhada. (p.97)



**Categoria A Classe VII:** Identificar uma simetria em uma tabela obtida por uma operação de números (simetria associada a propriedade comutativa).

Número de exercícios: 01.

### Simetria e operações

A figura ao lado mostra a tabela da adição de números naturais. Ela apresenta uma simetria em relação à linha pontilhada, levando em consideração a posição dos números.

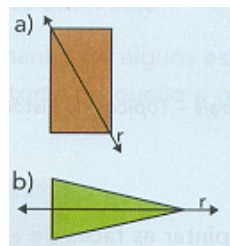
⊕	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	■	■	■
2	■	■	4	5	■	■
3	■	4	5	6	7	■
4	■	■	6	■	8	9
5	5	■	■	8	■	10

- Copie a tabela em seu caderno e complete-as. Observe que alguns quadrinhos com números em posições simétricas estão pintados com a mesma cor. Faça o mesmo com mais três pares de números nessas condições.
- Por que os números em posições simétricas são iguais?
- Na tabela da multiplicação, também haverá esse tipo de simetria? Por quê? (p.93)

**Categoria A Classe VIII:** Dada a relação entre figuras cabe identificar se o eixo dado é correto.

Número de exercícios: 06.

Em qual desenho a figura apresenta simetria, mas a reta  $r$  não é um eixo de simetria? (p.121)



**Categoria A Classe IX:** Estudo de Configurações; a) Identificar quantos eixos de simetria a figura possui.

Número de exercícios: 04.

O retângulo é um exemplo de quadrilátero que apresenta simetria. Quantos eixos de simetria possui? Confirme sua resposta fazendo um desenho. (p.94)

**Categoria C:** Escrever, reconhecer palavras e/ou números que apresentam uma simetria.

Número de exercícios: 03.

Escreva em seu caderno o maior número possível usando apenas uma vez os algarismos que apresentam simetria.

Escreva uma palavra usando apenas letras que apresentam simetria. (p.96)

Outras atividades:

- proposição de um exercício sobre pentaminós onde estuda os eixos de simetria.
- *Simetria nos algarismos*, *Simetria nas letras* e *Simetria nas palavras* são exploradas, por exemplo:

18 *Simetria nos algarismos*

Observe os dez algarismos do nosso sistema de numeração:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Copie em seu caderno apenas os algarismos que apresentam simetria e trace neles todos os eixos de simetria.

20 *Simetria nas letras*

Veja agora as letras maiúsculas do nosso alfabeto:

A B C D E F G H  
I J L M N O P Q  
R S T U V X Z

Em seu caderno, copie as letras que apresentam simetria e trace nelas todos os eixos de simetria.

22 *Simetria nas palavras*

Você já sabe que alguns algarismos e algumas letras apresentam simetria. Vamos agora conhecer a simetria de palavras.

Veja dois exemplos: (p.96)

AMA e BEBE.

O autor apresenta a noção de simetria através de figuras e com o artifício de dobraduras em alguns exercícios.

O livro propõe exercícios, mas possui pouca teoria. Todo o trabalho é feito por observação, dobradura, ou seja, uma noção intuitiva é desenvolvida.

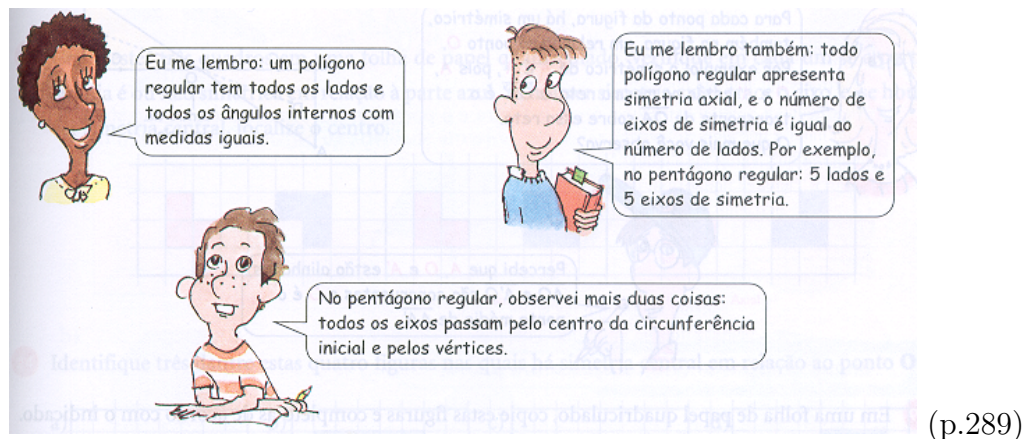
### 3.2.2 Estudo do Livro Tudo é Matemática (6ª série)

O livro de 6ª série se constitui de dez capítulos (subdividido em sub-capítulos e estes contêm as seções), dos quais o capítulo 10 trata de “Construções Geométricas e simetria” e este capítulo possui um sub-capítulo “Simetria”. Portanto restringimos nosso estudo neste livro ao estudo do sub-capítulo: “Simetria”.

#### 3.2.2.1 Estudo do sub-capítulo Simetria

O autor mostra o conceito de simetria através de figuras destacando a figura que apresenta um eixo de simetria, e figuras que são simétricas uma em relação a outra, deixando claro que pode haver simetria na própria figura e entre duas figuras uma simétrica a outra em relação a um eixo.

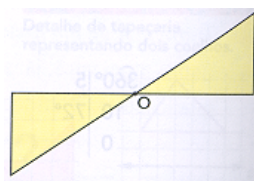
Comenta-se a simetria em polígonos regulares, destacando o pentágono. O autor busca interagir com o aluno, fazendo com que o aluno reflita sobre o assunto.



O autor introduz a noção do conceito de simetria central.

Observe esta figura:

Ela não apresenta simetria axial, pois não é possível traçar um eixo de modo que uma parte seja simétrica à outra em relação a esse eixo.



Mas essa figura apresenta um outro tipo de simetria, só que em relação a um ponto, no caso o ponto  $O$ : *é uma simetria central de centro  $O$ .*(p.290)

Pode parecer, com a redação, que quando numa figura existe simetria central não pode existir simetria axial. Porém em exercício o autor comenta: *“O quadrado apresenta simetria axial e central”*(p. 290)

### 3.2.2.2 Estudo dos Exercícios do livro Tudo é matemática (6ª série)

São apresentados neste livro 79 exercícios. Os exercícios que estudamos são apresentados no sub-capítulo “Simetria” e na “revisão cumulativa” (onde o autor propõe em cada final de capítulo exercícios com conteúdos abordados no livro, ou seja, uma pequena revisão utilizando exercícios). Estudamos os exercícios das seções que o autor chama de “Trocando idéias”, “Revendo o que aprendemos”, “Projeto em equipe”, “Revisão cumulativa” e “Para ler, pensar e divertir-se”.

Vejamos:

**Categoria A Classe I :** A transformação de um objeto inicial em um objeto final por uma transformação geométrica; **1)** O objeto inicial está dado ou é a reproduzir por um desenho sobre a “pavage”.

Número de exercícios: 18.

Destes, 10 exercícios são sobre simetria axial, dos quais 04 usam o termo **completar**, 05 usam o termo **construir** e 01 usa o termo **aplicar**.

Os outros 08 exercícios são sobre simetria central, dos quais 02 usam o termo **completar**, 05 usam o termo **construir** e 01 usa o termo **aplicar**.

**Categoria A Classe IV:** Desenhar/criar/recortar figuras onde as transformações expressam uma relação entre sub-figuras.

Números de exercícios: 01.

**Categoria A Classe V:** Estudo dos elementos que caracterizam a transformação;  
**a)** Traçar eixo/plano de simetria.

Número de exercícios: 36.

Destes exercícios, 29 pedem que antes de traçar o eixo de simetria, se verifique se é possível traçá-lo, ou seja, se a figura possui eixo de simetria.

**Categoria A Classe V:** Estudo dos elementos que caracterizam a transformação;

b) Localizar o centro de simetria.

Número de exercícios: 19.

Destes exercícios, 16 pedem que antes de localizar o centro de simetria, se verifique se é possível ter simetria central na figura, ou seja, se a figura possui centro de simetria.

Exemplo:

O quadrado apresenta simetria axial e central. Desenhe em seu caderno:

a)[...]

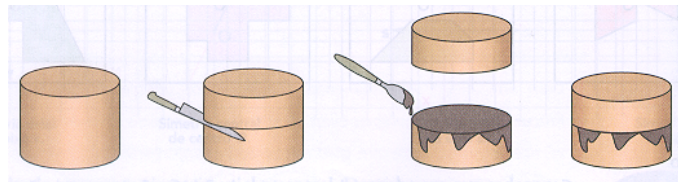
b) outro quadrado e localize seu centro de simetria.(p. 290)

**Categoria A Classe VI:** Dadas as figuras e a transformação, identificar quais figuras a transformação determina uma relação entre figuras.

Número de exercícios: 05.

**Uma abordagem:** Simetria espacial.

Dona Ângela faz bolos deliciosos. Ela preparou um bolo que tem a forma de um cilindro e resolveu recheá-lo com creme de chocolate. Veja:



Podemos dizer que esse bolo (cilindro) é um objeto que apresenta simetria espacial, pois foi possível dividi-lo em duas partes simétricas em relação à camada de recheio (“plano”). (p.292)

O autor fala de duas partes simétricas. O recheio do bolo faz o papel do plano que caracteriza a simetria espacial e representa uma relação entre as duas partes do bolo em função do plano (recheio) dado.

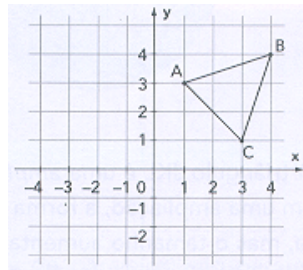
### 3.2.3 Estudo do Livro Tudo é Matemática (7ª série)

O livro de 7ª série se constitui de doze capítulos (subdividido em sub-capítulos e estes contém as seções), dos quais o capítulo 1 trata de “Números e aplicações” e este capítulo possui um sub-capítulo “Reflexão, translação e ampliação”. Portanto restringimos nosso estudo neste livro ao estudo do sub-capítulo: “Reflexão, translação e ampliação”.

### 3.2.3.1 Estudo do sub-capítulo: Reflexão, translação e ampliação

O autor apresenta o conteúdo de reflexão, translação e ampliação por meio de coordenadas cartesianas de um triângulo e a partir de multiplicações e adição. No caso da reflexão não comenta de que se trata de simetria axial estudada nos livros de 5ª e 6ª série.

Examine o triângulo de vértices **A**(1,3), **B**(4,4) e **C**(3,1) da figura ao lado.

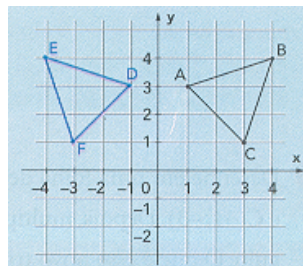


Vamos multiplicar a primeira coordenada de cada vértice por -1:

$$\mathbf{A}(1,3) \rightarrow \mathbf{D}(-1,3)$$

$$\mathbf{B}(4,4) \rightarrow \mathbf{E}(-4,4)$$

$$\mathbf{C}(3,1) \rightarrow \mathbf{F}(-3,1)$$



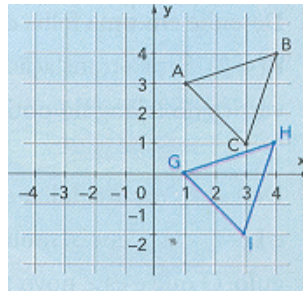
O triângulo DEF é uma *reflexão* do triângulo ABC em relação ao eixo **y**. Dizemos também que o triângulo DEF é o *simétrico* do triângulo ABC segundo o eixo **y**.

Vamos agora somar -3 à segunda coordenada de cada vértice:

$$\mathbf{A}(1,3) \rightarrow \mathbf{D}(-1,0)$$

$$\mathbf{B}(4,4) \rightarrow \mathbf{E}(-4,1)$$

$$\mathbf{C}(3,1) \rightarrow \mathbf{F}(-3,-2)$$



O triângulo GHI é uma *translação* do triângulo ABC, 3 unidades para baixo. (p.19)

O livro possui dois exercícios os quais contemplam:

**Categoria A Classe I :** A transformação de um objeto inicial em um objeto final por uma transformação geométrica; **1)** O objeto inicial está dado ou é a reproduzir por um desenho sobre a “pavage”.

Número de exercícios: 01.

Neste exercício é utilizado o termo **fazer** a translação.

**Categoria A Classe II:** A transformação que define a relação entre dois objetos ou uma transformação que liga dois objetos; **2)** Determinar a natureza da transformação.

Número de exercícios: 01.

Desenhe em uma folha de papel quadriculado um triângulo cujos vértices são  $A(-2, -1)$ ,  $B(-4, -2)$  e  $C(-1, -3)$ . Depois, multiplique a segunda coordenada de cada vértice por  $-1$ . Desenhe o novo triângulo. O que é esse novo triângulo em relação ao original? (p.20)

### 3.2.4 Estudo do Livro Tudo é Matemática (8<sup>a</sup> série)

O livro de 8<sup>a</sup> série se constitui de dez capítulos (subdividido em sub-capítulos e estes contém as seções), dos quais o capítulo 3 trata de “Semelhança”, e este capítulo possui um sub-capítulo “Transformações geométricas”. Portanto restringiremos nosso estudo neste livro ao estudo do sub-capítulo: “Transformações geométricas”.

#### 3.2.4.1 Estudo do sub-capítulo: Transformações Geométricas

A abordagem que é feita, podemos caracterizar como uma simples apresentação da Translação, Reflexão e Rotação, na qual nenhum exercício sobre transformações geomé-



tricas é proposto.

Em conclusão:

No livro de 5<sup>a</sup> série o autor propõe vários exercícios sobre simetria, e por conter pouca teoria, ele trabalha bastante uma idéia intuitiva da simetria. Na 6<sup>a</sup> série dá a definição de construção de imagem com régua e compasso da simetria axial e central, porém não estuda as propriedades. No livro da 7<sup>a</sup> série são propostos poucos exercícios e somente no tratamento de pontos no plano cartesiano. No seu livro da 8<sup>a</sup> série, apenas apresenta a definição de translação, reflexão e rotação, não propondo nenhum exercício.

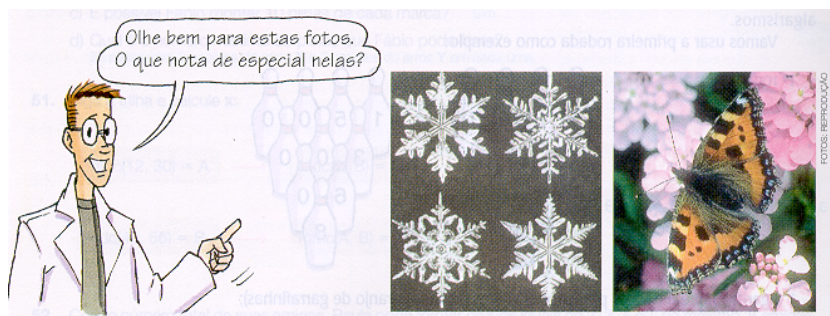
### 3.3 Estudo da Coleção Matemática de Walter Spinelli e Maria Helena Souza; 5<sup>a</sup>, 6<sup>a</sup>, 7<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> série

#### 3.3.1 Estudo do Livro Matemática (5<sup>a</sup> série)

O livro de 5<sup>a</sup> série se constitui de dezenove capítulos (subdividido em sub-capítulos e estes contém as seções), dos quais o capítulo 10 trata de “Simetria”. Portanto restringimos nosso estudo neste livro ao estudo do capítulo: “Simetria”.

##### 3.3.1.1 Estudo do capítulo: Simetria

Através de fotos o autor aborda o conteúdo de simetria.



O que mais chamou sua atenção em ambas?

Reparou que, tanto nos flocos de neve como no inseto, parece que há uma harmonia na forma? Sabe o que dá essa sensação?

Em ambos os casos há simetria nas figuras.

O que será isso?

Vamos traçar uma reta nas fotos, dividindo as figuras:



Você deve ter notado que tudo o que aparece de um lado da reta é igual do outro lado e em determinada posição. Isso acontece com figuras que são simétricas. A reta é chamada de **eixo de simetria**.

Você se sente mais a vontade com a idéia?

A natureza está cheia de figuras simétricas. Você acha seu corpo simétrico?

O lado direito do seu corpo é igual ao esquerdo? Você sabe que não, mas aproxima bastante disso. (p.166)



O autor deixa claro que a simetria no corpo humano é aproximada, mas quanto às fotos do inseto e do floco de neve ele diz que um lado é igual ao outro, em determinada posição. Em seguida, o autor comenta sobre algumas figuras geométricas que apresentam simetria, e através de dobraduras verifica se uma reta é eixo de simetria de uma figura.

Utilizando espelhos o autor explica o que seria uma figura simétrica a outra, trata o espelho como eixo de simetria e faz a seguinte observação: *“Mas, atenção! Se você estiver em frente a um espelho e levantar sua mão direita, a imagem estará com a mão esquerda levantada.* (p.173)

O autor então define:

Figuras simétricas em relação a um eixo de simetria têm mesma forma e mesmo tamanho, mas nem sempre estão na mesma posição.

O movimento que é necessário fazer para colocar uma figura exatamente sobre a sua imagem se chama **rebatimento** ou **reflexão**.

A imagem é o **reflexo** da figura original. (p.174)

O que quer dizer o autor com: “*mas nem sempre estão na mesma posição*”? O que ele considera posição?

Aqui o termo reflexão é usado para designar o movimento realizado pela figura para a obtenção da figura imagem por uma simetria de eixo.

Ao final deste capítulo o livro traz uma seção “Pensando no assunto” onde mostra, por meio de dobraduras, a divisão de figuras geométricas simétricas que consistem sub-figuras (partes) iguais.

### 3.3.1.2 Estudo dos Exercícios do livro Matemática (5<sup>a</sup> série)

São apresentados 82 exercícios no capítulo “Simetria”. Como feito no estudo dos outros livros, tomamos como referência a categorização apresentada na página 19 e consideramos a complementação já dada nos estudos anteriores, acrescentando classes caso algum exercício não seja contemplado por tarefas já estabelecidas.

**Categoria A Classe I :** A transformação de um objeto inicial em um objeto final por uma transformação geométrica; **1)** O objeto inicial está dado ou é a reproduzir por um desenho sobre a “pavage”;

Número de exercícios: 27.

Dos quais, os seguintes termos foram usados:

Em 19 exercícios o autor utiliza o termo **completar** figuras.

Em 05 exercícios o autor utiliza o termo **construir** figuras.

Em 02 exercícios o autor utiliza o termo **desenhar** figuras.

Em 01 exercícios o autor utiliza o termo **obtenha** a figura.

**Categoria A Classe IV:** Desenhar/Criar/Recortar figuras onde transformações expressam uma relação entre sub-figuras.

Número de exercícios: 07.

**Categoria A Classe V:** Estudo dos elementos que caracterizam a transformação;  
**a)** Traçar eixo/plano de simetria.

Número de exercícios: 24.

Dos quais, 05 exercícios pedem, antes de traçar o eixo, para verificar se é possível traçá-lo, ou seja, se a figura possui eixo de simetria.

**Categoria A Classe VI:** Dadas as figuras e a transformação, identificar quais figuras a transformação determina uma relação entre figuras.

Número de exercícios: 05.

**Categoria A Classe VIII:** Dada a relação entre figuras cabe identificar se o eixo dado é correto.

Número de exercícios: 07.

**Categoria A Classe IX:** Estudo de Configurações; a) Identificar quantos eixos de simetria a figura possui.

Número de exercícios: 12.

Além dos exercícios já catalogados, identificamos um exercício de pesquisa e um exercício de utilização da simetria no cotidiano:

Pesquise no dicionário e escreva em seu caderno o significado de *simetria*, *eixo*, e depois redija um pequeno parágrafo explicando o que é eixo de simetria. (p.170)

Você já notou que as ambulâncias trazem na frente a palavra AMBULÂNCIA escrita de forma espelhada? Sabe por quê? É para facilitar a sua leitura no trânsito pelo espelho retrovisor dos carros. Escreva essa palavra de forma espelhada. (p.176)

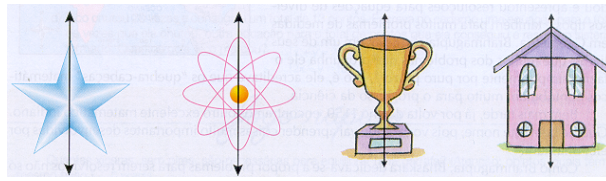
### 3.3.2 Estudo do Livro Matemática (6<sup>a</sup> série)

O livro de 6<sup>a</sup> série se constitui de vinte e um capítulos (subdividido em sub-capítulos e estes contêm as seções), dos quais o capítulo 16 trata de “Simetria e translação”. Portanto restringimos nosso estudo neste livro ao estudo do capítulo: “Simetria e translação”.

#### 3.3.2.1 Estudo do capítulo: Simetria e translação

Através de exemplos o autor apresenta a noção do conceito de simetria e diz que uma figura pode ter vários eixos de simetria.

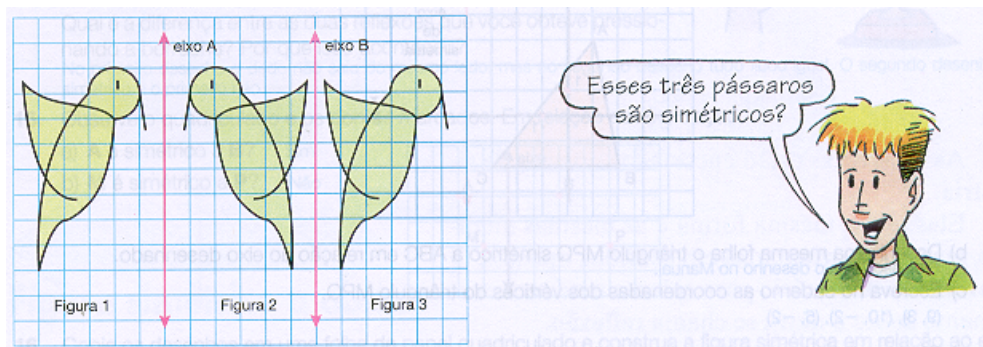
Observe as figuras. Elas são simétricas e em cada uma delas está desenhado um eixo de simetria:



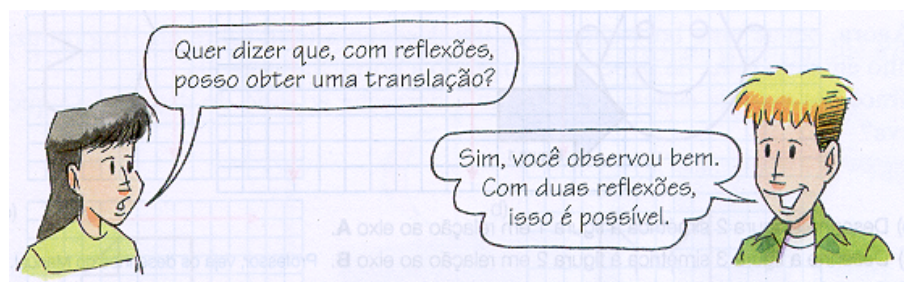
Na figura simétrica, o que está desenhado de um lado do eixo de simetria também está desenhado do outro lado, como se tivéssemos colocado um espelho sobre o eixo, de pé sobre a folha. (p.240)

Com relação a figura simétrica a outra o autor aborda o assunto exemplificando com uma figura e sua imagem no espelho.

A translação é introduzida pela aplicação repetida da simetria axial,  $s_{r_1}(A) = B$ ,  $s_{r_2}(B) = C$  e assim  $C = t(A)$ . Notemos que os elementos que caracterizam a translação não são discutidos. Na verdade aqui é visto que uma figura é transladada e não a “translação” enquanto uma transformação geométrica.



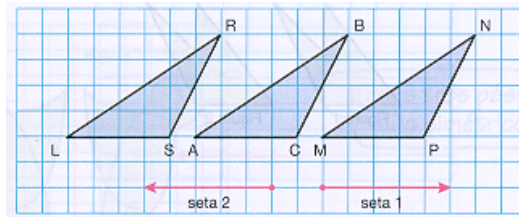
A figura 2 é simétrica à figura 1 em relação ao eixo **A** e a 3 é simétrica à figura 2 em relação ao eixo **B**. A figura 3 é uma translação da figura 1. (p.248)



Notemos aqui o uso da composição de transformação sem explicitar.

Em atividades seguintes, a translação é caracterizada por uma seta. A translação é concebida como uma transformação que exerce uma ação sobre uma figura que é transladada segundo o comprimento, direção e sentido de uma seta. Exemplos são feitos sobre papel quadriculado.

O triângulo MNP foi obtido pela translação do triângulo ABC obedecendo a indicação da seta 1. O triângulo LRS foi obtido pela translação da ABC obedecendo à indicação da seta 2.



Nos dois casos, o triângulo ABC deslocou-se 5 unidades na mesma direção, mas em sentidos opostos. (p.250)

### 3.3.2.2 Estudo dos Exercícios do livro Matemática (6ª série)

São apresentados neste capítulo, “Simetria e translação”, 79 exercícios.

**Categoria A Classe I :** A transformação de um objeto inicial em um objeto final por uma transformação geométrica; **1)** O objeto inicial está dado ou é a reproduzir por um desenho sobre a “pavage”.

Número de exercícios: 22.

Dos quais 11 destes exercícios são sobre simetria axial e: 05 utilizam o termo **construir**, 05 utilizam o termo **desenhar** e 01 utiliza o termo **obtenha**.

Os outros 11 exercícios são sobre simetria central e: 02 utilizam o termo **construir**, 06 utilizam o termo **desenhar**, 02 utilizam o termo **obtenha** e 01 utiliza o termo **Fazer**.

**Categoria A Classe II :** A transformação que define a relação entre dois objetos ou uma transformação que liga dois objetos. **2)** Determinar a natureza da transformação.

Número de exercícios: 01.

**Categoria A Classe IV:** Desenhar/Criar/Recortar figuras onde transformações expressam uma relação entre sub-figuras.

Número de exercícios: 13.

**Categoria A Classe V:** Estudo dos elementos que caracterizam a transformação;

a) Traçar eixo/plano de simetria.

Número de exercícios: 18.

Dos quais 11 exercícios pedem que antes de traçar o eixo, se verifique se é possível traçá-lo, ou seja, se a figura possui eixo de simetria.

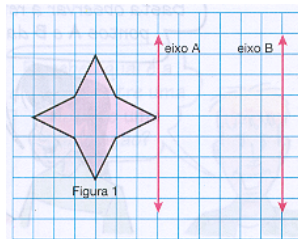
**Categoria A Classe V:** Estudo dos elementos que caracterizam a transformação;

c) Desenhar o vetor<sup>2</sup> translação.

Número de exercícios: 02.

Exemplo:

[...] b) Desenhe na mesma folha o segmento com a seta indicando a translação da figura 1 para a 3. (p.250)



**Categoria A Classe VI:** Dadas as figuras e a transformação, identificar quais figuras a transformação determina uma relação entre figuras.

Número de exercícios: 13.

Destes exercícios 10 são de simetria de eixo e 03 são de translação.

**Categoria A Classe VIII:** Dada a relação entre figuras cabe identificar se o eixo dado é correto.

Número de exercícios: 06.

**Categoria A Classe IX:** Estudo de Configurações; a) Identificar quantos eixos de simetria a figura possui.

Número de exercícios: 04.

---

<sup>2</sup>A designação “vetor” é nossa pois o tratamento dado neste livro é de “segmento com a seta”. Que objeto matemático é este?

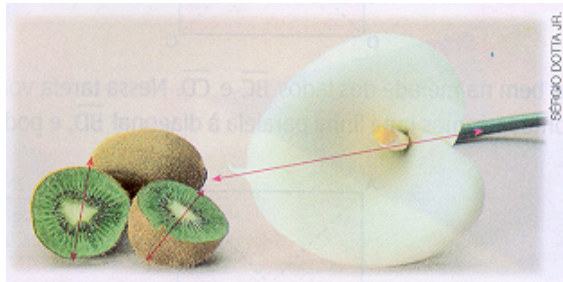
### 3.3.3 Estudo do Livro Matemática (7ª série)

O livro de 7ª série se constitui de dezoito capítulos (subdividido em sub-capítulos e estes contêm as seções), dos quais o capítulo 8 trata de “Simetrias”. Portanto restringimos nosso estudo neste livro ao estudo do capítulo: “Simetrias”.

#### 3.3.3.1 Estudo do capítulo: Simetrias

- Relacionando com o cotidiano o autor introduz o conteúdo de simetria:

**Simetria** é uma palavra que vem do grego e significa “com harmonia”. As figuras simétricas nos parecem harmoniosas, equilibradas. Com bastante freqüência encontramos simetria na natureza.



As figuras simétricas escolhidas na natureza, e que forem mostradas, têm todas elas um **eixo de simetria**, uma reta imaginária que divide cada figuras em duas metades. Cada metade é como a imagem da outra metade em um espelho.

Figuras planas e também não-planas podem ser simétricas, tendo um ou mais eixos de simetria. (p.134)

Olhando bem os exemplos do autor percebemos que o eixo de simetria não divide a figura em duas partes perfeitamente iguais.

- A construção da imagem com régua e compasso:

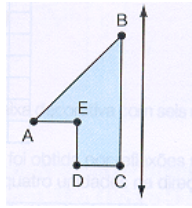
O autor apresenta a construção da imagem de uma figura por simetria axial com régua e compasso, em seguida aborda o conteúdo de simetria central através de exemplos e ensina sua construção também com régua e compasso.

Construindo figuras simétricas

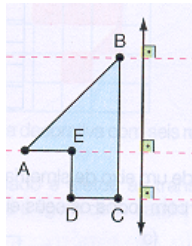
Acompanhe a seqüência de construções.

1ª) Veja a figura e o eixo de simetria:

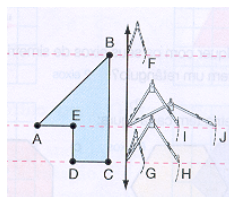




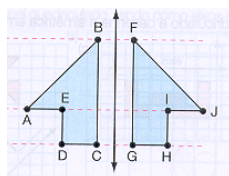
2º) Pelos vértices do polígono traçamos retas perpendiculares ao eixo. Podemos usar para isso um transferidor:



3º) Agora, com um compasso transportamos distâncias iguais e marcamos os vértices simétricos:



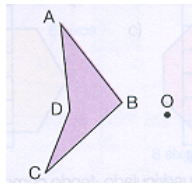
4º) Unindo com segmentos de reta os vértices simétricos, obtemos o polígono FGHIJ simétrico de ABCDE



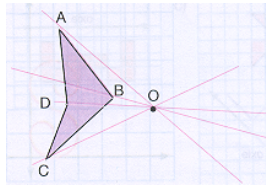
Se você dobrar o papel bem em cima do eixo, uma figura se superporá a outra. (p.137)

Construindo simetria central

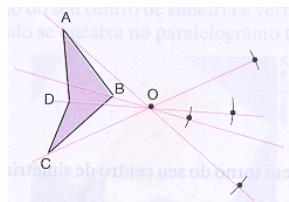
1º) Escolhemos uma figura e um ponto **O** como centro de simetria:



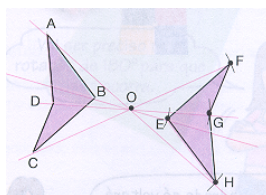
2º) Unimos com uma reta cada vértice do polígono com o ponto **O**:



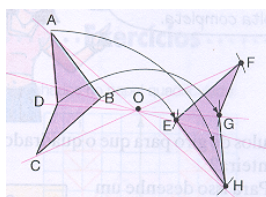
3º) Transportando medidas iguais com o compasso, obtemos os simétricos de cada vértice do polígono em relação ao ponto **O**:



4º) Unindo os pontos simétricos obtemos o novo polígono, que é simétrico ao primeiro em relação ao centro **O**:



5º) Como fazer para superpor uma figura à outra?



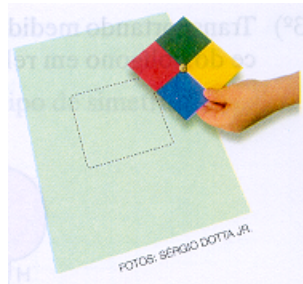
Nós *giramos* o polígono original até atingir o simétrico.

Esse movimento é chamado de rotação.

No nosso desenho efetuamos uma rotação de meia volta, isto é,  $180^\circ$ .  
(p.140)

Através do centro de simetria de um retângulo o autor aborda o conceito de rotação e ensina sua construção com régua e compasso.

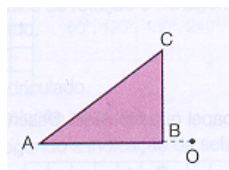
Veja o quadrado de papel-cartão preso pelo seu centro de simetria. Seu contorno foi desenhado na folha branca com segmentos tracejados.



Se girarmos o quadrado em torno de seu centro de simetria ele pode voltar a se encaixar no contorno tracejado. (p.142)

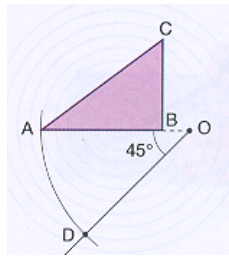
Construindo uma rotação

O triângulo ABC vai sofrer uma rotação de  $45^\circ$  no sentido anti-horário, tendo **O** como centro de rotação.

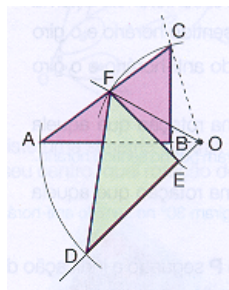


Vamos efetuar a rotação para cada ponto do triângulo.

Começemos pelo ponto **A**. Colocamos a ponta-seca do compasso no centro **O** e traçamos com o auxílio do transferidor um arco de raio  $\overline{OA}$ , de  $45^\circ$ , a partir do ponto **A**. Dessa forma obtemos o ponto **D**, pelo rotação de **A**:



Efetamos da mesma maneira a rotação dos pontos **B** e **C** para obtemos pontos **E** e **F**. Unindo os pontos **D**, **E** e **F** traçamos o novo triângulo: (p.146)



Na seção “Pensando no assunto” temos: “Um par de espelhos e simetria”, onde através de espelhos o autor estuda simetria.

No capítulo sobre congruências o autor faz uma revisão sobre transformações geométricas em triângulos para introduzir o conteúdo de congruência.

Toda vez que conseguimos sobrepor um triângulo a outro, dizemos que eles são congruentes. A sobreposição nada mais é do que uma composição de transformações por simetrias: central, axial, translação ou rotação. (p.156)

### 3.3.3.2 Estudo dos Exercícios do livro Matemática (7ª série)

São apresentados neste livro 67 exercícios:

**Categoria A Classe I :** A transformação de um objeto inicial em um objeto final por uma transformação geométrica; **1)** O objeto inicial está dado ou é a reproduzir por um desenho sobre a “pavage”.

Número de exercícios: 36.

Dos quais:

16 exercícios são de simetria axial e: 07 usam o termo **completar**, 08 usam o termo **desenhar** e 01 usa o termo **fazer** a figura simétrica.

05 exercícios são de translação e: 04 usam o termo **efetuar** e 01 usa o termo **obter** a translação.

08 exercícios são de simetria central e: 04 usam o termos **completar**, 01 usa o termo **construir** e 03 usam o termo **desenhar** a figura simétrica.

07 exercícios são de rotação e: 01 usa o termo **completar**, 04 usam o termo **desenhar** e 02 usam o termo **efetuar** a rotação.

**Categoria A Classe I :** A transformação de um objeto inicial em um objeto final por uma transformação geométrica; **2)** O objeto inicial está dado em linguagem natural e simbólica por desenho sobre papel branco.

Número de exercícios: 02.

Exemplo:

Desenhe um triângulo retângulo no seu caderno, tendo como medidas lados de 5cm, 4cm e 3cm.

Marque um ponto **P** qualquer fora do seu triângulo e desenhe o triângulo obtido pela rotação de  $60^\circ$  em relação a ele, no sentido horário. (p.158)

**Categoria A Classe II:** A transformação que define a relação entre dois objetos ou uma transformação que liga dois objetos. **2)** Determinar a natureza da transformação.

Número de exercícios: 04.

**Categoria A Classe IV:** Desenhar/Criar/Recortar figuras onde as transformações geométricas estão presentes.

Número de exercícios: 04.

**Categoria A Classe V:** Estudo dos elementos que caracterizam a transformação;  
b) Localizar centro de simetria.

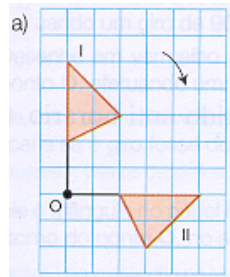
Número de exercícios: 06.

**Categoria A Classe V:** Estudo dos elementos que caracterizam a transformação;  
d) Determinar o ângulo de rotação.

Número de exercícios: 07.

Exemplo:

Copie as bandeirinhas em papel quadriculado. Usando o transferidor, descubra qual o ângulo de rotação usado para levar a bandeirinha da posição I para a posição II (p. 145)



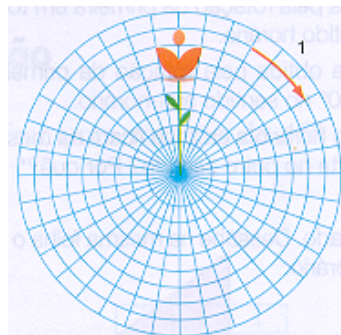
**Categoria A Classe IX:** Estudo de Configurações; **a)** Identificar quantos eixos de simetria a figura possui.

Número de exercícios: 05.

**Categoria A Classe IX:** Estudo de Configurações; **b)** Identificar quantas rotações foram efetuadas.

Número de exercícios: 01.

Desenhe uma malha polar no seu caderno e nela uma flor em qualquer posição (veja o nosso desenho). A partir dessa primeira posição, efetue várias rotações da flor obedecendo à indicação da seta 1. Você vai obter uma faixa (ou frisa) circular. Responda: quantas rotações você deve efetuar? (p. 148)

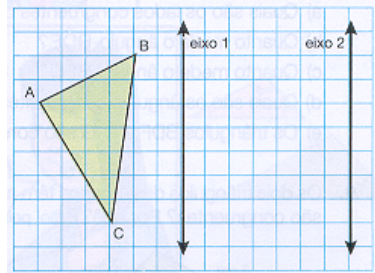


**Categoria B Classe III:** As transformações geométricas como ferramenta de demonstração.

Número de exercícios: 02.

Exemplo:

- 1.a) Copie o desenho do triângulo ABC em papel quadriculado. Desenhe também os dois eixos de simetria, eixo 1 e eixo 2.
- b) Desenhe o triângulo DEF, simétrico a ABC em relação ao eixo 1.
- c) Desenhe agora o triângulo GHI, simétrico de DEF em relação ao eixo 2.
- d) Como obter o triângulo GHI a partir do triângulo ABC?
- e) **Os três triângulos, ABC, DEF e GHI, são congruentes? Por quê?** (p.157)

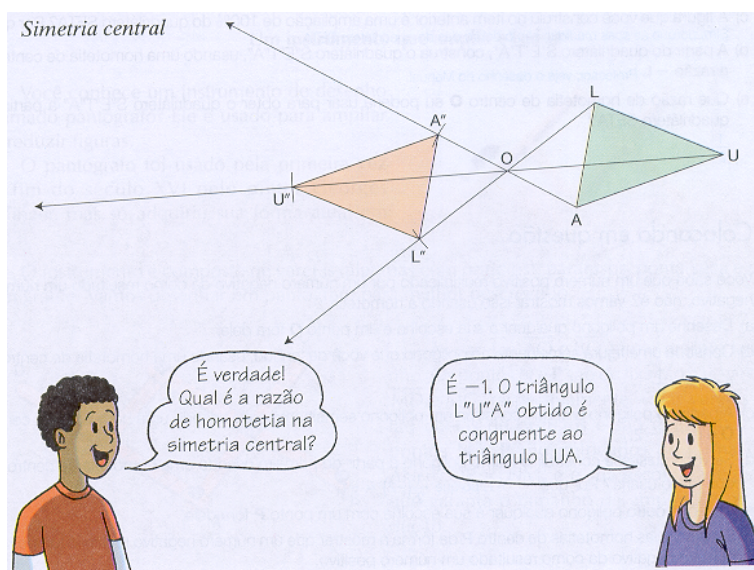


### 3.3.4 Estudo do Livro Matemática (8ª série)

O livro de 8ª série se constitui de quatorze capítulos (subdividido em sub-capítulos e estes contém as seções).

O autor pouco comenta sobre as transformações geométricas.

No estudo sobre homotetia o autor lembra:



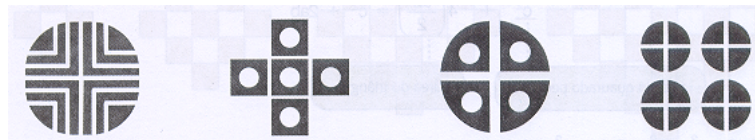
(p.127)

No estudo sobre parábolas o autor comenta:

Para calcular as coordenadas do vértice da parábola, podemos perceber que ela é uma figura simétrica, e que seu eixo de simetria passa pelo vértice. (p.303)

Em todo o livro encontramos apenas 02 exercícios, um numa abordagem sobre o teorema de Pitágoras e o outro no estudo de parábolas:

Paulus Gerdes, matemático e antropólogo de Moçambique, mostra em seu livro *Pitágoras africano* como em ornamentos e artefatos pode ser visto o uso do teorema de Pitágoras. Por exemplo, na simetria quádrupla, que aparece em figuras com simetria central e rotação de  $90^\circ$ :



Exemplos de carimbos corporais dos Ibo (Nigéria)



Vamos explorar o fato de que os quatro pontos que se correspondem nesse tipo de simetria são os vértices de um quadrado. Veja como descobrir a relação de Pitágoras num desenho de carimbo corporal dos Ibo (Nigéria):

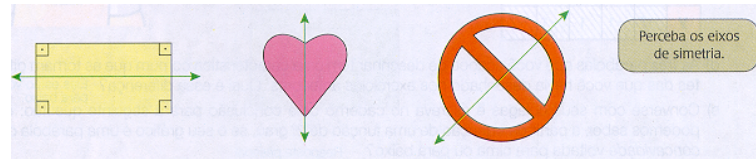


Marcamos nos círculos os pontos que se correspondem na simetria. Se os unimos, temos um quadrado: [...]

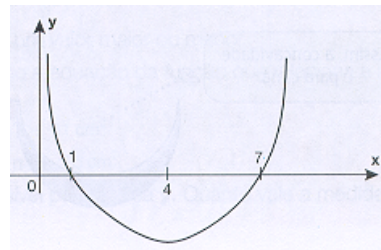
[...] b) Crie uma simetria quádrupla e descubra os quadrados da relação de Pitágoras. (p.199)



Veja estas figuras que apresentam algum tipo de *simetria axial*:



Agora observe a parábola ao lado:



- Ela apresenta simetria axial?
- Qual é o eixo de simetria da parábola da figura? (p.299)

Em conclusão:

No livro de 5<sup>a</sup> série o autor trabalha bastante com a noção intuitiva da simetria e propõe vários exercícios. Na 6<sup>a</sup> série, aborda o conteúdo de translação através da aplicação repetida da simetria axial. Na 7<sup>a</sup> série apresenta a construção da imagem de uma figura utilizando régua e compasso, para a simetria axial, simetria central e rotação. Na 8<sup>a</sup> série o autor comenta sobre a simetria central e propõe apenas 02 exercícios.

Como podemos observar, os livros didáticos estudados nos mostram que praticamente somente a simetria axial e central são estudadas no ensino fundamental e ainda de maneira intuitiva. A construção de imagens com régua e compasso é objeto de estudo, para a simetria axial e central. Somente um livro didático apresenta a construção da imagem com régua e compasso para a rotação. A translação e a rotação são muito pouco exploradas. As propriedades das transformações também não são objeto de estudos. As definições e exercícios onde as transformações são ferramentas são raros.

Esta realidade identificada nos motivou a propor exercícios e alguns elementos teóricos para aprofundar um pouco mais o estudo. Apresentamos no capítulo seguinte sugestões de atividades.

## 4 *Simetria Axial e Simetria Central - uma sugestão de conteúdo de estudo*

Faremos aqui uma listagem de atividades onde explicitaremos elementos do conteúdo relativo a simetria axial e central que julgamos importante para serem trabalhados no ensino fundamental.

### 4.1 **Simetria Axial**

A simetria axial recebe também a designação de simetria ortogonal quando estudada como relação entre figuras ou entre sub-figuras. Em geral, quando tratada enquanto transformação do plano é designada reflexão.

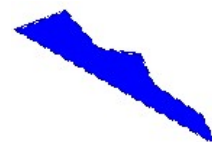
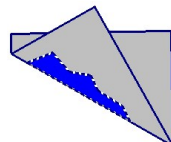
#### 4.1.1 **Algumas atividades que podem ser usadas em classe para introduzir o conceito intuitivo de simetria axial.**

Estas atividades têm por objetivo levar o aluno à descoberta da noção de simetria axial, ou seja, elaborar uma concepção de simetria em relação a uma reta.

Propomos trabalhos com dobraduras, desenho em papel quadriculado e observação de figuras.

#### **Atividades com dobraduras**

1. Dobre a folha em duas partes. Recorte um desenho como a figura abaixo. Desdobre a folha. O que dizer da figura obtida?



2. Dobre uma folha em duas partes quaisquer.

Desenhar uma figura de modo que se obtenha ao recortar e desdobrar a folha, os seguintes polígonos:

- (a) um retângulo,
- (b) um triângulo (que triângulo foi obtido?)
- (c) um losango,
- (d) um quadrado (duas soluções).

3. Copie a figura 2 em papel de seda. Dobre a folha na linha tracejada. Faça uma cópia do desenho no outro lado da folha. (Passando o lápis por cima do traçado do desenho). Desdobre a folha e compare os dois desenhos.

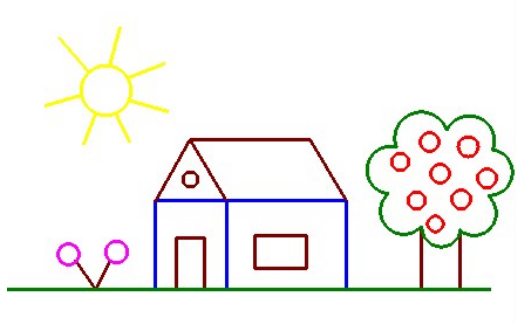


Figura 2: Casinha

**Observação:** Dizemos que duas figuras são simétricas em relação a uma reta  $r$  quando podemos sobrepor as dobrando a folha segundo uma reta  $r$ .

O que podemos concluir sobre as duas figuras obtidas na atividade acima?

### Atividades relacionando “simetria” com o cotidiano

Sugerimos que a simetria axial seja explorada em situações do cotidiano, porém lembremos de que se tratam de pseudo-simetria. É importante fazer a diferença entre o conceito matemático e os conhecimentos sobre simetria que são de uso popular ou socialmente aceitos.

1. A simetria nas construções, decoração e em jardinagem.

Identifique sub-figuras simétricas nas figuras seguintes:

- Catedral de Florianópolis

Você já ouviu falar na catedral de Florianópolis (capital de Santa Catarina)?

Vamos conhecer um pouco sua história:

A história da Catedral Metropolitana começa no ano de 1675, quando o bandeirante Francisco Dias Velho, fundador de Nossa Senhora do Desterro, começa a construir uma capela em homenagem a padroeira. Como de costume na época, escolheu o local mais alto e visível da pequena vila.

Em meados do século XVII, a capela tornou-se pequena para o número de fiéis que assistiam às missas. Isso levou José da Silva Paes, primeiro governador da antiga Capitania, a projetar uma nova igreja para o mesmo local. Iniciada em 1748, a obra foi concluída 25 anos mais tarde, já no governo de Dom José de Melo Manoel.

[...]

Um dos principais chamarizes da Catedral é o acervo de arte sacra. Seu interior abriga desde 1902 a escultura “Fuga para o Egito”, do artista tirolês Demetz, que apresenta em dois blocos de cedro a fuga da Sagrada Família em tamanho natural. Também fazem parte do acervo o órgão de tubos alemão, de 1924, o carrilhão principal com cinco sinos, de 1922 e os vitrais, feitos em São Paulo em 1949.(11)



Cristiane Pescador Tonetto

Esta atividade pode ser explorada de maneira interdisciplinar, em um estudo sobre o estado e/ou município, por exemplo.

2. A simetria pode ser observada em objetos domésticos como cadeiras, mesas e em objetos utilitários como carros.

Observe em seu ambiente de convívio.

Quando atividades deste tipo são trabalhadas devem ser evidenciados aspectos relevantes da definição da transformação..

3. A simetria axial em “sinais de trânsito”:

A simetria em sinais de trânsito pode ser estudada em um mesmo sinal e/ou entre dois sinais.

**Sugestão:** Dar para os alunos cópias das placas e solicitar a eles para agrupar aquelas em que se identifica uma simetria entre figuras ou entre sub-figuras.

(a) A simetria axial entre dois sinais de trânsito de advertência.

**Sinalização de advertência:** Tem por finalidade alertar aos usuários da via para as condições potencialmente perigosas, indicando sua natureza. Suas mensagens possuem caráter de recomendação.

Os sinais são colocados antes do perigo da via.(12)



(b) A simetria axial em um mesmo sinal de trânsito nas placas de regulamentação.

**Sinalização de Regulamentação:** Tem por finalidade informar ao usuário as condições, proibições, obrigações ou restrições no uso das vias. Suas mensagens são imperativas e seu desrespeito constitui infração. Devem ser obedecidas a partir do ponto em que são fixadas.(12)



4. Simetria axial na natureza:

Com frequência podemos observar na natureza elementos que induzem a simetria axial, podendo serem explorados através de observações minuciosas dos detalhes e características que os envolvem.

Observe a borboleta e o sapo. O que podemos dizer? Existe simetria? Reflita sobre o assunto.

(a) Borboleta



(13)

(b) Sapo



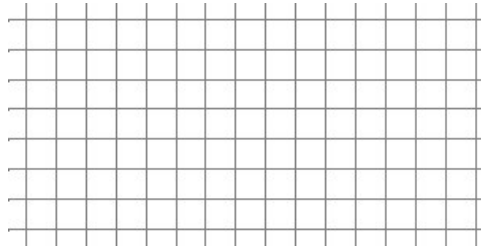
Luciana Kreutz Fretmann

**Sugestão:** Associar com estudo de ciências, português (descrição), geografia, história, etc.

5. O que você acha da bandeira de Pernambuco? E a bandeira do Brasil? A bandeira do Brasil, não é simétrica, mas possui formas geométricas como o “losango” que apresenta simetria.



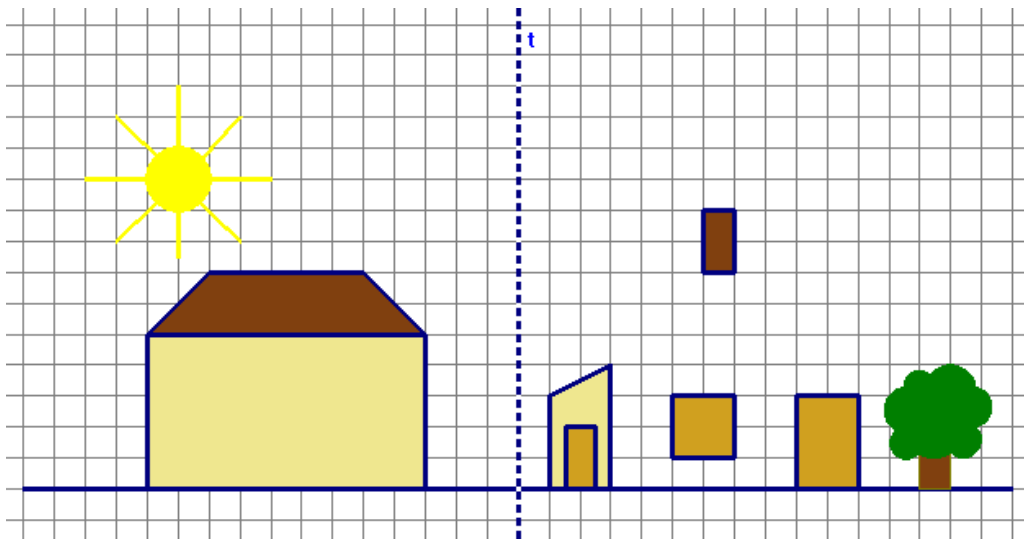
## Atividade com papel quadriculado



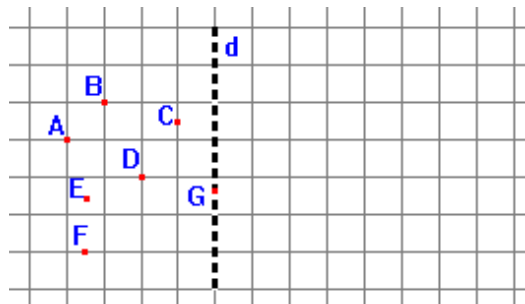
Propomos atividades até o momento exemplificando o que seria a simetria axial.

Nosso objetivo com os próximos exercícios é induzir que o aluno “descubra” a definição de simetria axial.

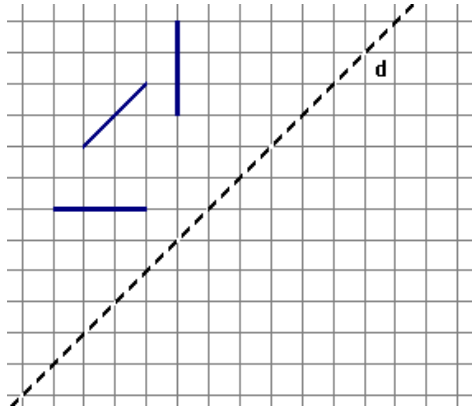
1. Faça a simetria axial da figura abaixo e descubra o que se obtém.



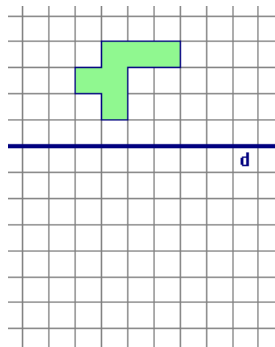
2. Faça a simetria axial dos pontos  $A, B, C, D, E, F$  e  $G$  em relação a reta  $d$ .



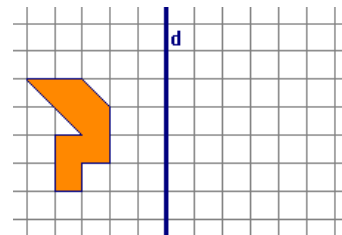
3. Faça a simetria axial dos segmentos de reta em relação a reta  $d$ .



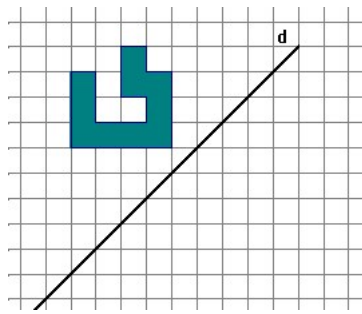
4. Faça a simetria axial das figuras abaixo em relação as retas.



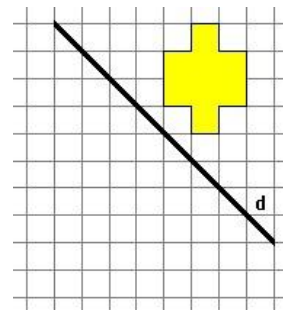
(a)



(b)



(c)



(d)

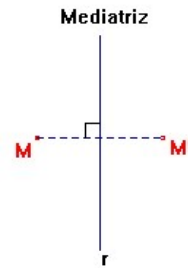
### 4.1.2 Definição de simetria axial de eixo $d$

Seja  $r$  uma reta e  $M$  um ponto.

- Se  $M$  pertence a reta  $r$ , a imagem de  $M$  em relação a reta  $r$  pela simetria axial é o próprio  $M$ . (Figura 3)



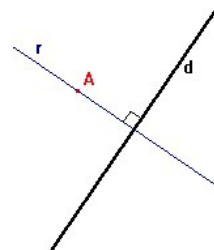
- Se  $M$  não pertence a reta  $r$ , a imagem de  $M$  em relação à reta  $r$  pela simetria axial, é o ponto  $M'$  tal que  $r$  seja a mediatriz do segmento  $[MM']$ . (Figura 4)

Figura 3:  $M$  pertencente a  $r$ Figura 4:  $M$  não pertencente a  $r$ 

### 4.1.3 Construção com régua e compasso do simétrico de um ponto

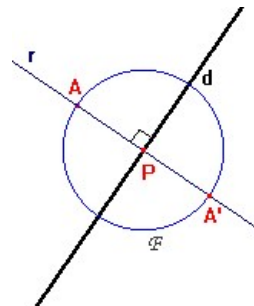
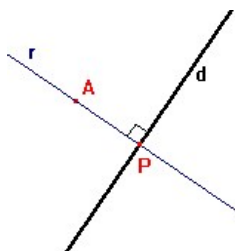
Os seguintes itens dão os passos da construção com régua e compasso da imagem de um ponto por simetria axial

1. Seja uma reta  $d$  e  $A$  um ponto.
2. Construir uma reta  $r$  perpendicular a  $d$  passando por  $A$ .



3. Determinar  $P = d \cap r$  ( $P$  é a intersecção de  $d$  com  $r$ ).

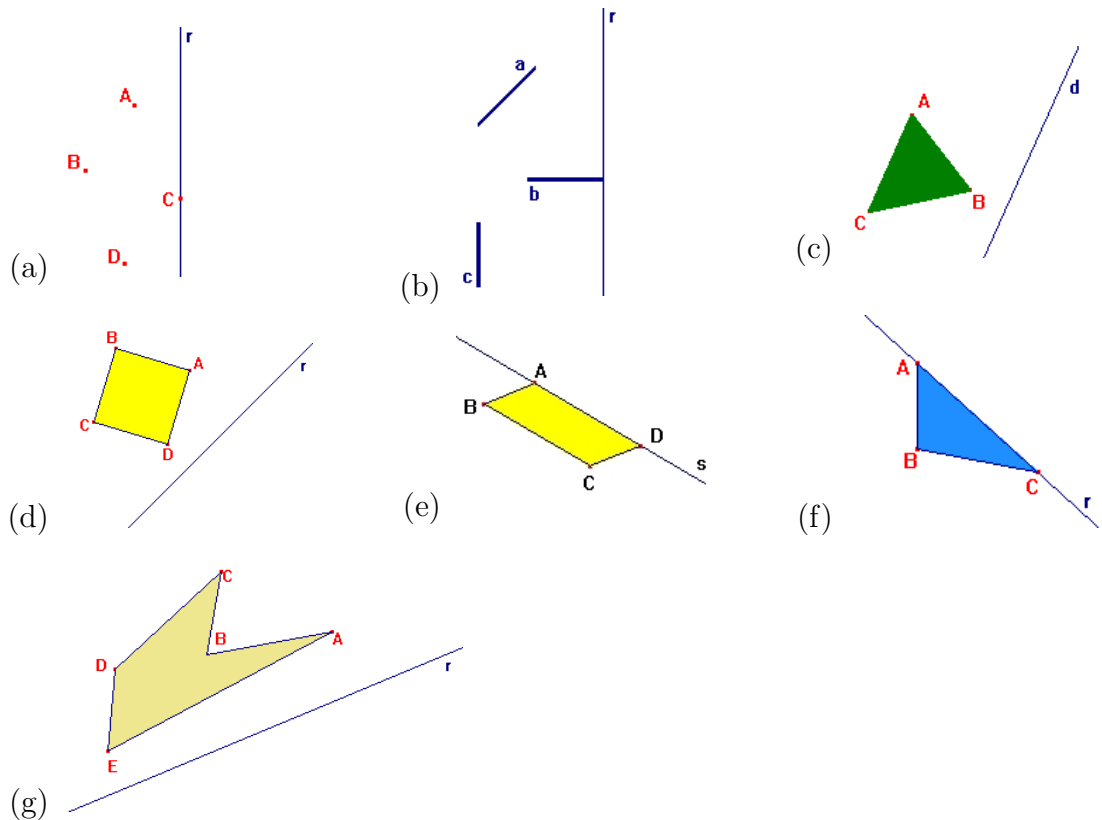
4. Com o compasso de centro  $P$  e raio  $[PA]$  traçar a circunferência  $\mathcal{F}$ . A imagem de  $A$  pela simetria axial é o ponto  $A'$  (intersecção de  $\mathcal{F}$  com  $r$ ).



### 4.1.4 Exercícios de construção com régua e compasso

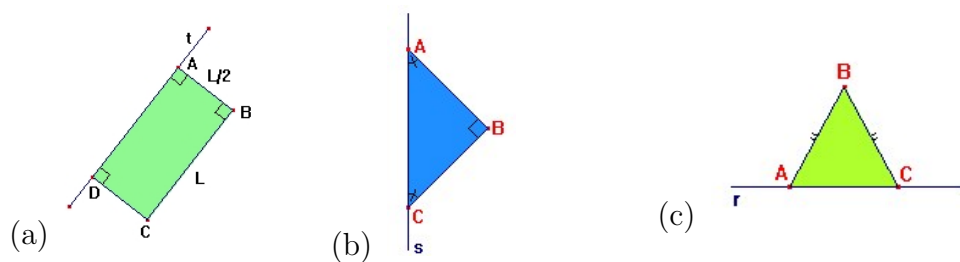
Agora que vimos a construção com régua e compasso podemos construir o simétrico de pontos, segmentos, retas e de polígonos.

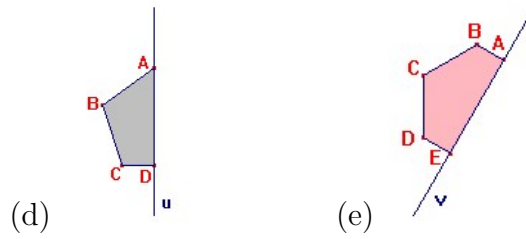
1. Faça a simetria axial das figuras abaixo segundo a reta dada.



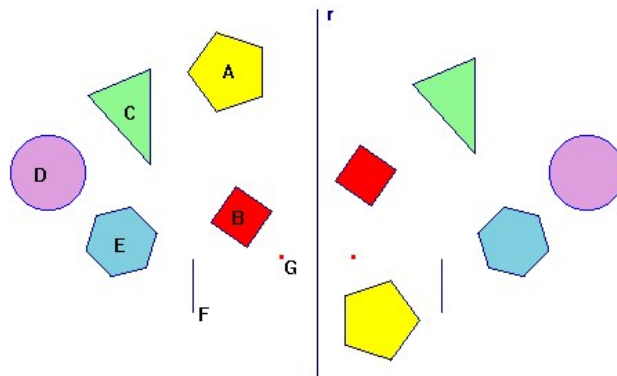
2. Faça a simetria axial das figuras abaixo segundo a reta dada, e diga que figura geométrica se obtém.

**Observação:** Neste exercício você pode incentivar o aluno a pesquisar sobre as figuras geométricas, e fazer com que ele tenha noções de formas, medidas e ângulos.

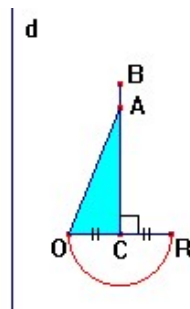




3. Diga quais são simétricos em relação a  $r$ ?



4. (a) Reproduzir a figura do barco e construir seu simétrico em relação a reta  $d$ .  
(Anote  $B'$ ,  $A'$ ,  $R'$ ,  $C'$  e  $O'$  como simétricos dos pontos  $B$ ,  $A$ ,  $R$ ,  $C$  e  $O$ .)



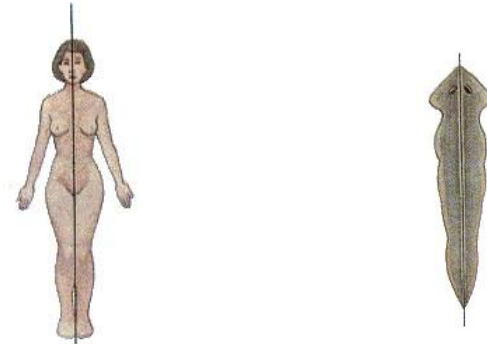
- i. Sobre a figura obtida em (a) medir  $AC$  e  $A'C'$ ,  $AO$  e  $A'O'$ ,  $RO$  e  $R'O'$ .
  - ii. Dois segmentos simétricos tem o mesmo \_\_\_\_\_
- (b) O ponto  $C$  é ponto médio do segmento  $[RO]$ . E o ponto  $C'$ ?
- (c) Os pontos  $B, A, C$  são alinhados. O que dizer dos simétricos  $B', A'$  e  $C'$ ?
5. Seja um segmento  $[AB]$ . Construir o eixo de simetria do segmento  $[AB]$ .

### 4.1.5 Para entender melhor:

Observe a foto abaixo, perceba que foi feita a simetria da foto. O que você achou? O que você pode dizer com relação a original e a sua simétrica?



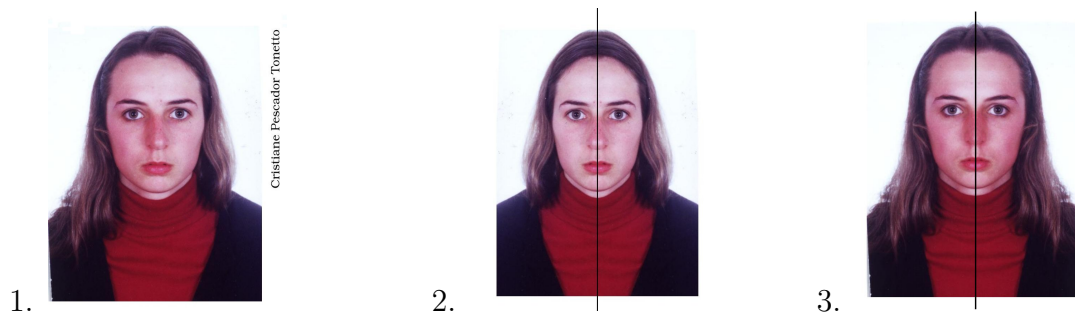
O que você acha dos animais, há simetria axial?



A Biologia trata o corpo dos animais como simétrico: “A forma do corpo está adaptada ao movimento: a maioria dos animais tem *simetria bilateral*, isto é, seu corpo pode ser dividido em apenas duas metades simétricas, garantindo seu equilíbrio e diminuindo a resistência do ar ou da água no movimento.”(14)

No entanto a matemática não considera o corpo dos animais como simétricos, mas considera que possuem uma “pseudo-simetria”, ou seja, o corpo dos animais não são “perfeitamente” simétricos. Mas para fins de estudos na Biologia considera-se que a maioria dos animais são simétricos.

Para entendermos melhor essa diferença entre o que a Matemática e a Biologia tratam como simetria, observe as seguintes fotos. Perceba que existe diferenças entre a original e as simétricas. Se os animais fossem “perfeitamente” simétricos as três fotos seguintes seriam iguais (desconsiderando o reflexo da luz).



Quando você está na frente do espelho, ocorre simetria?



#### 4.1.6 Exercícios sobre as propriedades

A seguir propomos alguns exemplos de como poderíamos trabalhar com as propriedades de simetria axial, fazendo com que o aluno tire suas próprias conclusões.

##### Simétrico de um segmento

- Trace uma reta  $d$ ; trace um segmento  $[AB]$  de 4cm.
- Com a régua, compasso e esquadro, construa os pontos  $A'$  e  $B'$ , simétricos de  $A$  e  $B$  em relação a reta  $d$ .
- Qual é o simétrico do segmento  $[AB]$ ? Trace o simétrico. Você pode determinar seu comprimento sem medir?

##### Simétrico de uma reta

- Trace uma reta  $d$  e crie dois pontos  $A$  e  $B$ , o ponto  $A$  de um lado e o ponto  $B$  do outro lado da reta  $d$ .

Com os instrumentos de sua escolha, construa os pontos  $A'$  e  $B'$ , simétricos de  $A$  e  $B$  em relação a reta  $d$ .

- b. Qual é a figura simétrica da reta  $(AB)$ ? Trace a reta  $(AB)$  e sua simétrica. O que observou?

### Simétrico de um triângulo

- Construa um triângulo  $ABC$  tal que:  $AB = 3\text{cm}$ ;  $AC = 5\text{cm}$ ;  $\hat{B}AC = 40^\circ$ .
- Construa os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  simétricos dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  em relação à uma reta  $d$ .
- Qual é o simétrico do triângulo  $ABC$ ?
- Com o transferidor, verifique que  $\hat{B}'A'C' = 40^\circ$ .
- Marque o ponto médio  $E$  de  $[AC]$ ; o ponto médio  $F$  de  $[A'C']$ . Verifique com o esquadro e o compasso que  $E$  e  $F$  são simétricos em relação à  $d$ .

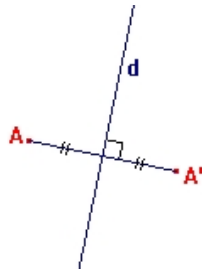
#### 4.1.7 Para Fixar

Em seguida, para fixar o conhecimento propomos que sejam estabelecidas as conclusões tiradas a partir dos exercícios anteriores.

- Simétrico de um ponto

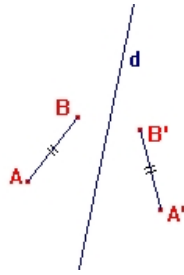
“Dois pontos distintos  $A$  e  $A'$  são simétricos em relação a uma reta  $d$  quando a reta  $d$  corta o segmento  $[AA']$  perpendicularmente em seu ponto médio.”

Dizemos também neste caso que  $A'$  é simétrico de  $A$  em relação à  $d$ .

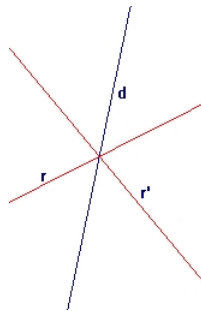


**Observação:** Se  $B$  é um ponto de  $d$ , seu simétrico em relação à  $d$  é  $B$ .

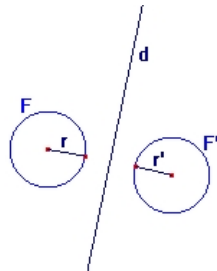
- O simétrico de um segmento é um segmento de mesmo comprimento



- O simétrico de uma reta é uma reta;



- O simétrico de um círculo é um círculo de mesmo raio.

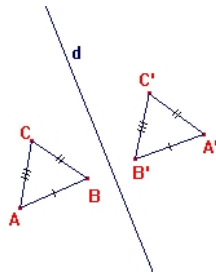


**Observação:** Se três pontos  $A, B$  e  $C$  são alinhados, seus simétricos  $A', B'$  e  $C'$  são alinhados.

- Conservação de distâncias.

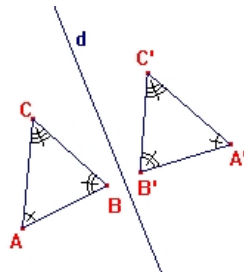
Se  $A', B'$  e  $C'$  são os simétricos dos pontos  $A, B$  e  $C$  em relação à  $d$ :

$$A'B' = AB; B'C' = BC; A'C' = AC.$$



- Conservação de ângulos.

$$A'\hat{B}'C' = A\hat{B}C; B'\hat{C}'A' = B\hat{C}A; C'\hat{A}'B' = C\hat{A}B.$$



#### 4.1.8 Definição de eixo de simetria de uma figura

A reta  $d$  é um eixo de simetria de uma figura  $F$  quando o simétrico de  $F$  em relação à  $d$  é a figura  $F$  ela mesma.

#### 4.1.9 Simetria de figuras usuais

Através de simetria podemos explorar as características e propriedades das figuras geométricas, como por exemplo: triângulos, retângulos, quadrados, losango, polígonos regulares, etc.

Abaixo citaremos um exemplo de como trabalhar com um retângulo:

1. Eixos de simetria de um retângulo:
  - (a) Trace duas retas paralelas  $d_1$  e  $d_2$  simétricas em relação à uma reta  $d$ .
    - Trace uma reta  $d_3$  perpendicular à  $d$  que corta  $d_1$  em  $A$  e  $d_2$  em  $B$ .
    - Trace uma reta  $d_4$  perpendicular à  $d$  que corta  $d_2$  em  $C$  e  $d_1$  em  $D$ .



- (b) Qual é a natureza do quadrilátero  $ABCD$ ? Justifique.
- (c) O que representa a reta  $d$  para o quadrilátero  $ABCD$ ?  
Este quadrilátero tem um segundo eixo de simetria?

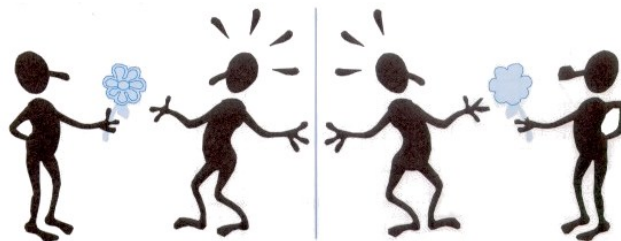
2. Propriedades de um retângulo:

- (a) Trace um retângulo  $EFGH$  tal que  $EF = 8\text{cm}$ ,  $EH = 6\text{cm}$  e construa seus eixos de simetria:  $d$  e  $d'$ . ( $d$  paralela à  $(EH)$ ;  $d'$  paralela à  $(EF)$ ).
- (b) Considerando a simetria em relação à  $d$  ou em relação à  $d'$ , justifique as igualdades dos comprimentos seguintes:  
 $[GH] = [FE]$ ;  $[EG] = [FH]$ ;  $[FG] = [EH]$ .
- (c) • Trace as retas  $(EG)$  e  $(FH)$ . O que você observou?  
• O que representa o ponto comum  $I$  dos segmentos  $[EG]$  e  $[FH]$ ? Tente justificar.
- (d) Marque sobre a figura as igualdades de comprimentos e dos ângulos.

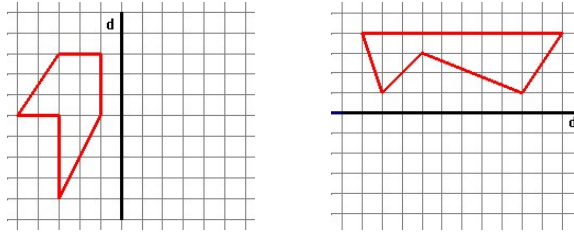
#### 4.1.10 Exercícios sobre simetria axial

Propomos agora exercícios diversos para os alunos fixarem a definição e o conceito de simetria.

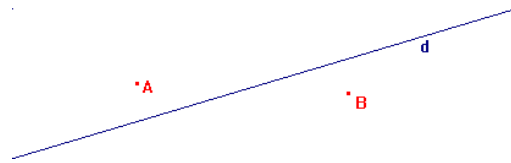
1. O desenho da direita deveria ser o simétrico do desenho da esquerda em relação a reta  $d$ . Sete erros existem sobre a figura. Quais?



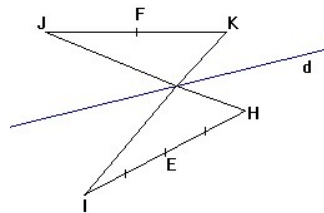
2. Construir o simétrico de cada figura em relação a reta  $d$ .



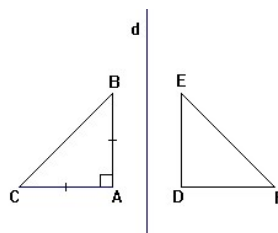
3. Com o esquadro e a com a régua graduada, construir os pontos  $C$  e  $D$  respectivamente simétricos dos pontos  $A$  e  $B$  em relação a reta  $d$ .



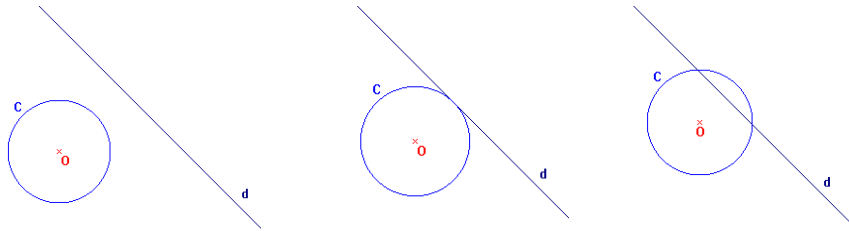
4. Na simetria em relação a reta  $d$ ,  $J$  é simétrico de  $I$ ,  $K$  é o simétrico de  $H$  e  $F$  é o simétrico de  $E$ .



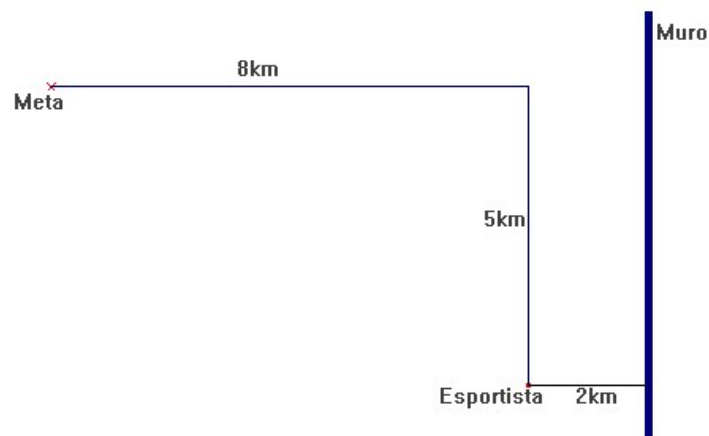
- (a) Qual é o simétrico do segmento  $[IH]$ ?
- (b) Se  $E$  é o ponto médio do segmento  $[IH]$ , o que pode você dizer do ponto  $F$ ?  
Por que?
5. Na figura abaixo,  $ABC$  é um triângulo retângulo isósceles em  $A$ . Na simetria em relação a  $d$ ,  $D$  é o simétrico de  $A$ ,  $E$  é o simétrico de  $B$  e  $F$  é o simétrico de  $C$ .



- (a) O que você pode dizer dos segmentos  $[DE]$  e  $[DF]$ ?
- (b) O que você pode dizer das retas  $(DE)$  e  $(DF)$ ?
- (c) Qual é a natureza do triângulo  $EDF$ ?
6. Em cada um dos casos seguintes, construir em vermelho o simétrico do círculo  $C$  em relação a reta  $d$ .



7. Desenhar um figura que tem três eixos de simetria, mas somente três.
8. Traçar um triângulo  $ABC$  retângulo em  $A$ . Construir sua imagem pela simetria axial, que tem por eixo a reta  $AB$ , seguido da simetria axial de eixo a reta  $AC$ .
9. Traçar duas retas  $r$  e  $s$  perpendiculares em um ponto  $O$ . Colocar um ponto  $M$ , não incidente a  $r$  e nem a  $s$ . Construir o ponto  $M'$ , imagem de  $M$  pela simetria axial de eixo  $r$ , e  $M''$  imagem de  $M'$  pela simetria axial de eixo  $s$ .  
O que se pode dizer do triângulo  $MM'M''$ ? Prove.
10. Um corredor se encontra em terreno aberto, 2km a oeste de um muro reto, construído na direção norte-sul. O esportista se encontra também a 5km ao sul e 8km a leste da meta de sua corrida (conforme figura abaixo). As regras da corrida dizem que ele deve tocar o muro uma vez antes de chegar a sua meta. Qual a menor distância, em Km, que deve correr para chegar em sua meta segundo as regras?

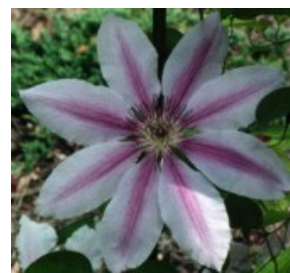


## 4.2 Simetria Central



Figura 5: Limite Circular III, 1959, de Maurits Cornelis Escher. (15)

Assim como na simetria axial, também podemos encontrar elementos no cotidiano que induzem a simetria central, como nos exemplos seguintes:



(16)

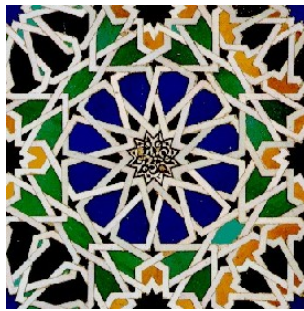


(17)

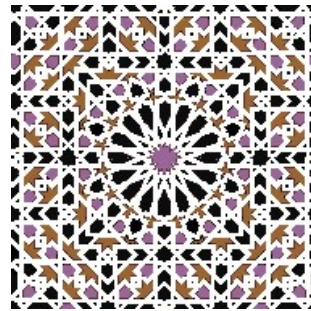


(18)

Nas construções também podemos encontrar traços da simetria central.



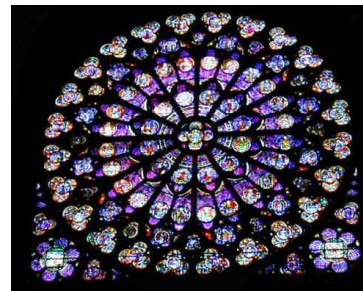
(19)



(20)



(21)



(22)

Mas lembre-se que ao estudar simetria central no cotidiano você deve estar atento de que se trata de uma “pseudo-simetria”.

#### 4.2.1 Definição de simetria central

Seja  $O$  um ponto fixo do plano. Chamamos simetria de centro  $O$  a correspondência entre os pontos do plano que associa a todo ponto  $M$  o ponto  $M'$  tal que  $O$  seja o ponto médio do segmento  $[MM']$ .

Denotamos por:  $S_o$  a simetria de centro  $O$ .

Dizemos que  $M'$  é o simétrico de  $M$  em relação à  $O$ .

A imagem de  $O$  é o próprio ponto  $O$  pela simetria  $S_o$ .  $O$  é invariante.

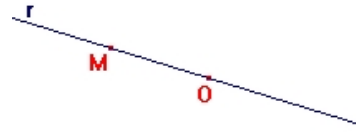
#### 4.2.2 Construção com régua e compasso da imagem de um ponto

Agora apresentaremos os passos da construção com régua e compasso da imagem de um ponto por simetria central.

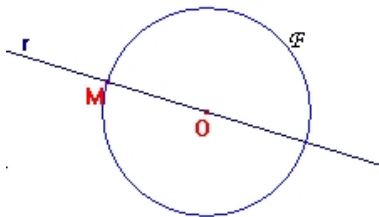
1. Sejam os pontos  $M$  e  $O$ .



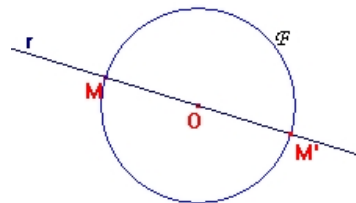
2. Traçar uma reta  $r$  que passa por  $M$  e  $O$ .



3. Construir uma circunferência  $\mathcal{F}$  de centro  $O$  e raio  $OM$ .



4. O Simétrico de  $M$  pela simetria de centro  $O$  é o ponto  $M'$  intersecção da circunferência  $\mathcal{F}$  com a reta  $r$ .



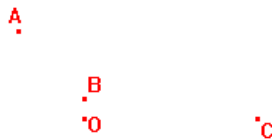
**Conclusão:** Como podemos notar, a imagem do ponto  $M$ , isto é  $M'$ , se encontra na intersecção da reta  $(OM)$  com a circunferência de centro  $O$  e raio  $r = OM$ .

### 4.2.3 Exercícios de construção com régua e compasso

Podemos então construir com régua e compasso o simétrico de ponto, segmento, reta e polígonos.

1. Faça a simetria central das figuras abaixo segundo o ponto  $O$  dado:

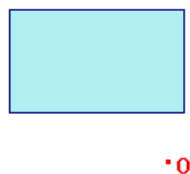
(a)



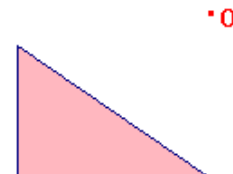
(b)



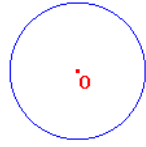
(c)



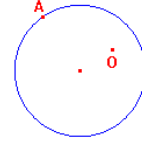
(d)



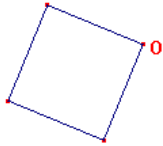
(e)



(f)

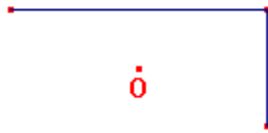


(g)

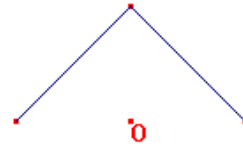


2. Faça a simetria central das figuras abaixo, segundo o ponto O dado e diga que figura se obtém.

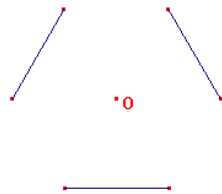
(a)



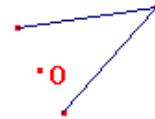
(b)



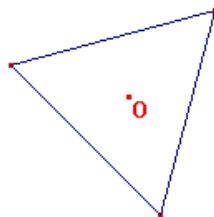
(c)



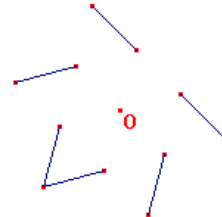
(d)



(e)



(f)

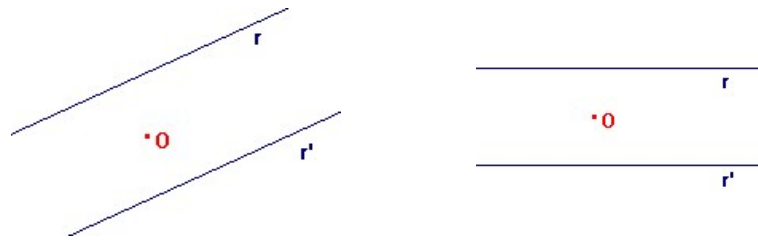


#### 4.2.4 Propriedades da simetria central

Assim como foi feito na simetria axial, propomos que antes de comentar sobre as propriedades da simetria central fossem propostos exercícios em que o aluno descobrisse sozinho as propriedades da simetria central e em seguida feitas as devidas conclusões.

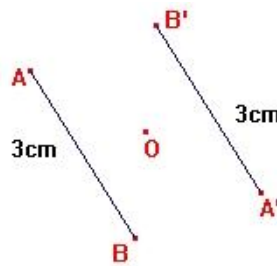
1. Estudar imagens de retas:

- (a) Observe as figuras abaixo:



A imagem de uma reta  $r$  é uma reta  $r'$  tal que  $r$  e  $r'$  sejam paralelas. Uma simetria central conserva o alinhamento.

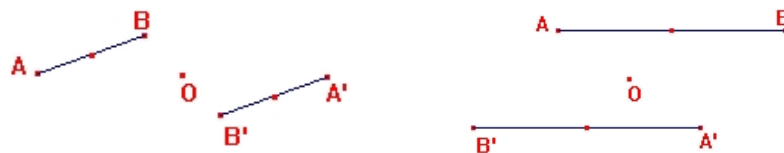
- (b) Uma simetria central conserva as distâncias. Vejamos:



**Conclusão:**  $AB = A'B'$ .

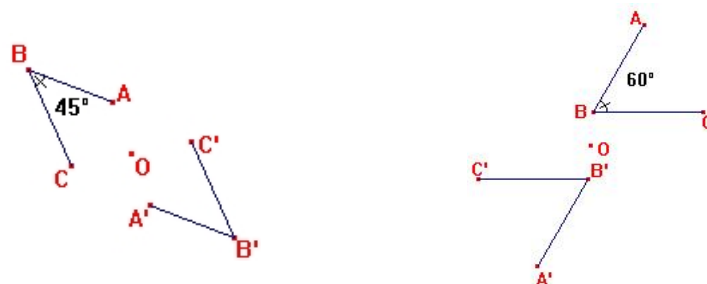
- (c) Vamos agora construir a imagem do ponto médio.

Veja o que acontece com a imagem do ponto médio do segmento.



**Conclusão:** A imagem do ponto médio de um segmento é o ponto médio do segmento imagem.

- (d) Conservação dos ângulos. Você pode medir os ângulos da figura imagem, e verificar se são iguais ao da figura original.

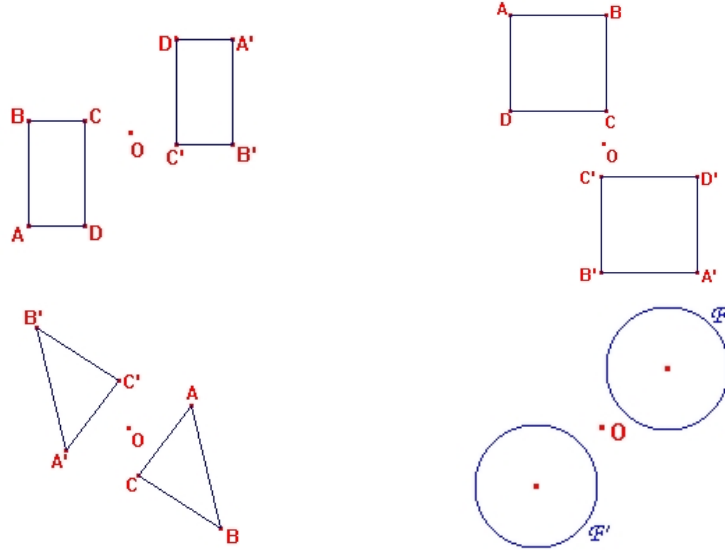


**Conclusão:** Uma simetria central conserva os ângulos.



2. Imagens de figuras simples:

- (a) Construir a imagem de diferentes quadrados, retângulos, triângulos e círculos; pedir para medir os lados, as diagonais, os raios, as alturas e comparar. O que se pode concluir?



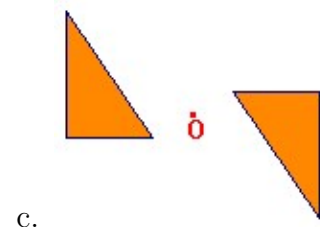
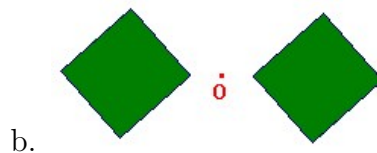
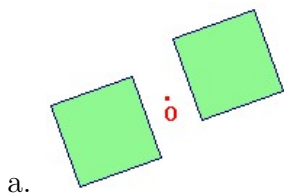
- A imagem de um retângulo é um retângulo de mesmas dimensões. Como consequência a imagem de um quadrado é um quadrado de mesma dimensão.
- A imagem de um triângulo é um triângulo de mesmas dimensões.
- A imagem de um círculo é um círculo de mesmo raio.
- A imagem de uma circunferência é uma circunferência de mesmo raio.

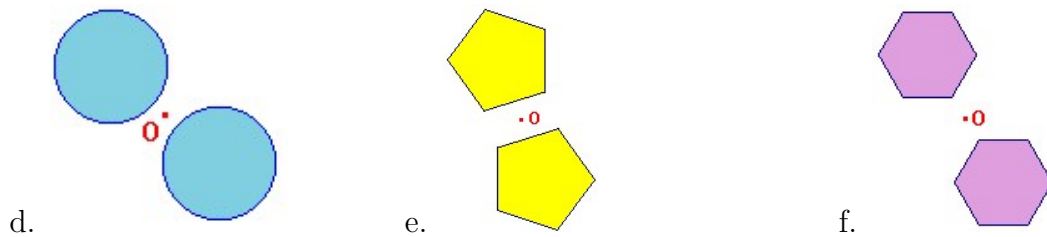
Assim temos que:

Uma simetria central conserva o alinhamento, os comprimentos e os ângulos, o que resulta que toda figura: polígonos, triângulos, circunferências, etc, tem por imagem uma figura do mesmo tipo e de mesmas dimensões, então de mesma área.

Uma simetria central conserva as áreas.

Calcule a área de cada da figura e de sua imagem:

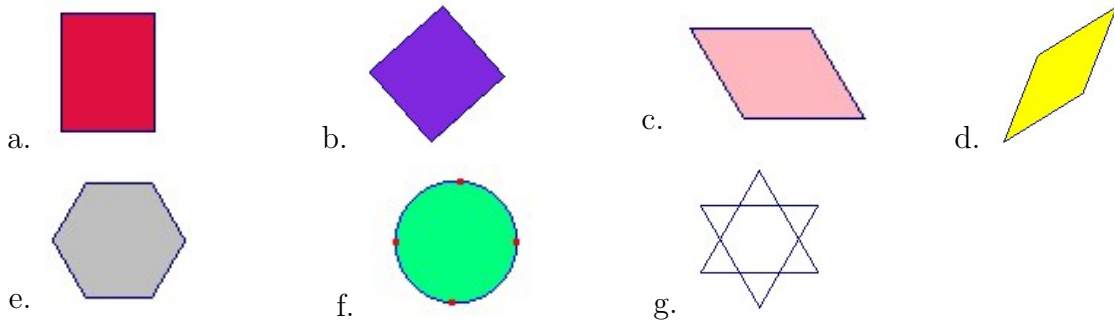




#### 4.2.5 Centro de simetria de algumas figuras

Estudo de figuras:

Identifique o centro de simetria das figuras abaixo. O que você pode concluir?



Figuras que admitem um centro de simetria: o paralelogramo, o retângulo, o quadrado e o losango admitem um centro de simetria que é o ponto de intersecção das diagonais.

A circunferência (o círculo) tem por centro de simetria seu próprio centro.

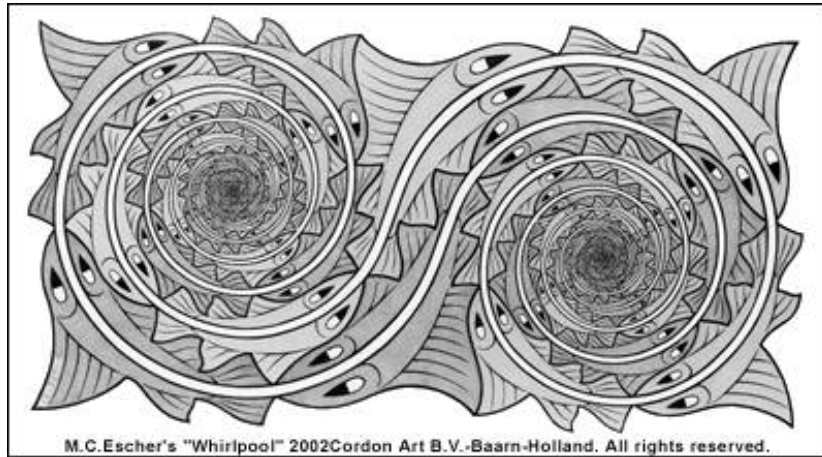
Aqui podemos relembrar que algumas figuras geométricas além de possuírem centro de simetria também apresentam eixos de simetria.

Pode-se criar exercícios para levar o aluno a concluir:

- **O retângulo:** admite dois eixos de simetria - as mediatrizes dos lados.
- **O quadrado:** admite quatro eixos de simetria - as mediatrizes dos lados e as retas suportes das diagonais.
- **O losango:** admite dois eixos de simetria - as retas suportes das diagonais.
- **O círculo:** admite uma infinidade de eixos de simetria - todos as retas suportes de seus diâmetros.
- **O triângulo isósceles:** admite um eixo de simetria - a reta suporte da mediatriz da base.
- **O triângulo equilátero:** admite três eixos de simetria - as retas suportes das três mediatrizes dos lados.

## 4.2.6 Vamos nos divertir

1. Marque o centro de simetria da figura abaixo.



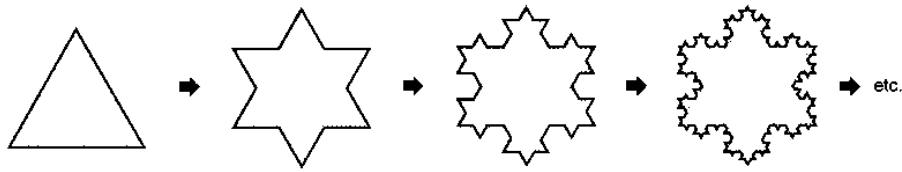
(15)

2. Dois amigos inventaram um jogo para usar as moedas inflacionadas, já que não compram mais nada. Diante de uma mesa circular, Gérson dá início à partida, pondo uma moeda deitada sobre ela. Então é a vez de Cândido, que deve colocar outra moeda sobre a mesa, sem mover nem cobrir a anterior. Vão se alternando desse modo até que um deles não tenha mais espaços para pôr outra moeda: esse será o perdedor. Sabendo-se que todas as moedas tem o mesmo tamanho e que ambos jogaram o melhor possível, descubra uma estratégia para que se possa assegurar quem é o ganhador. Justifique.(23)
3. Você já ouviu falar em Fractal? Conhece algum?

O termo “fractal” foi criado em 1975 por Benoit Mandelbrot, pesquisador da IBM e autor de trabalhos pioneiros sobre Geometria Fractal. [...]

A característica principal de uma linha ou de uma figura fractal é a repetição de padrões: o desenho visível numa determinada escala repete-se sucessivamente em escalas cada vez menores.[...]

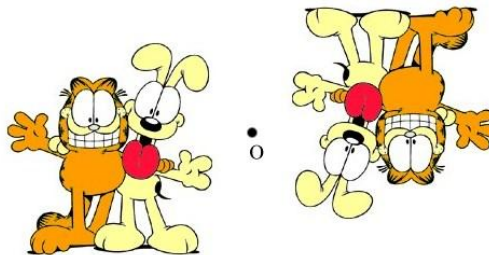
Um exemplo interessante de polígono fractal é o que representa um floco de neve no plano. Sua construção é relativamente simples. Parte-se de um triângulo equilátero e dividem-se seus lados em três partes iguais. Em cada um dos lados, apaga-se a parte do meio e constrói-se, com base no segmento central (que foi apagado), um novo triângulo equilátero de lado igual a do primitivo. Então, sobre cada lado resultante, repete-se o processo anterior várias vezes, como mostram as figuras a seguir. (24)



Quais os tipos de transformações que encontramos na figura acima?

Pesquise sobre o assunto e descubra se você consegue figuras mais interessantes, com alguma das transformações que estamos estudando.

Fica assim nossa proposta de estudo sobre simetria axial e simetria central, o que apresentamos foi só uma “pequena” idéia de como poderia ser a abordagem desse conteúdo. Acreditamos que o campo de idéias seja amplo e que muitas propostas interessantes podem ser criadas.



(25)

## 5 Conclusão

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dão lugar explicitamente as transformações geométricas nos quatro ciclos do ensino fundamental (primeiro ciclo - 1ª e 2ª série, segundo ciclo - 3ª e 4ª série, terceiro ciclo - 5ª e 6ª série e o quarto ciclo - 7ª e 8ª série).

Na Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC) traços de uma possível abordagem são encontrados. Já os Planejamentos Anuais das Escolas indicam praticamente a ausência das transformações geométricas no ensino fundamental. Apenas a simetria axial é citada em três de sete planejamentos de escolas da Grande Florianópolis analisados.

Sobre os livros didáticos, das três coleções estudadas, temos:

- Na coleção **“Matemática: uma aventura do pensamento”**, os livros de 5ª e 7ª séries apresentam o conteúdo simetria axial, e o livro de 8ª série cita a simetria axial como ferramenta no estudo da parábola, porém se centra, na verdade, no eixo de simetria e no estudo da figura (identificar que a figura “parábola” é simétrica), e não na transformação.
- Na coleção **“Tudo é matemática”** os livros de 5ª e 6ª séries apresentam o conteúdo de simetria axial, sendo que no livro de 6ª série é abordado também o conteúdo de simetria central. E neste, a construção da imagem de uma figura com régua e compasso é estudada. No livro de 7ª série o autor apresenta através de coordenadas cartesianas o conteúdo de reflexão, translação, e ampliação de figuras. E no livro de 8ª série, uma simples apresentação da translação, da rotação e da reflexão é feita, porém nenhum exercício é proposto.
- Na coleção **“Matemática”** os livros de 5ª, 6ª e 7ª séries apresentam o conteúdo de simetria axial, sendo que no livro de 6ª série é apresentada a translação, a partir da composição de simetrias axiais e não como uma transformação. No livro de 7ª série o autor apresenta a construção com régua e compasso de imagens de figura da simetria axial, simetria central e da rotação. E no livro de 8ª série o autor lembra

da simetria central e propõe apenas dois exercícios.

Os tipos de tarefas, das coleções estudadas “**Matemática: uma aventura do pensamento**”, “**Tudo é matemática**”, “**Matemática**”, revelam quanto o ensino de simetria axial é centrada no eixo de simetria. Nos livros de 5<sup>a</sup> e 7<sup>a</sup> séries da coleção “**Matemática: uma aventura do pensamento**” temos 27, de 44 exercícios, que contemplam a tarefa Traçar eixo/plano de simetria. Nos livros de 5<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup> séries da coleção “**Tudo é matemática**”, 115 de 245 exercícios são desta mesma tarefa e nos livros de 5<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup> séries da coleção “**Matemática**”, 42 de 161.

Cabe salientar que na coleção “**Tudo é matemática**”, no livro de 5<sup>a</sup> série, 45 de 166 exercícios tem por tarefa: identificar figuras onde a transformação é uma relação entre figuras.

Além disso, nos exercícios relativos a classe I .1) cuja a tarefa consiste: “O objeto inicial está dado ou é para reproduzir por um desenho sobre a “pavage”, temos:

- nos livros de 5<sup>a</sup> e 7<sup>a</sup> séries da coleção “**Matemática: uma aventura do pensamento**”, 11 de 44 exercícios.
- nos livros de 5<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup> séries da coleção “**Tudo é matemática**”, 36 de 245 exercícios.
- nos livros de 5<sup>a</sup>, 6<sup>a</sup> e 7<sup>a</sup> séries da coleção “**Matemática**”, 85 de 228 de exercícios.

Porém, destacamos que nesta tarefa o verbo “**construir**” é usado somente em 01 exercício do livro de 5<sup>a</sup> série e em 10 exercícios do livro de 6<sup>a</sup> série da coleção “**Tudo é matemática**”; a coleção “**Matemática**” usa o verbo “**construir**” em 05 exercícios do livro de 5<sup>a</sup> série, usando papel quadriculado, em 07 exercícios (05 simetria axial e 02 de simetria central) do livro de 6<sup>a</sup> série, e em 01 exercício (simetria central) do livro de 7<sup>a</sup> série. A coleção “**Matemática: Uma aventura do pensamento**” não propõe exercícios de construção.

Este estudo mostra que nos livros didáticos é dado lugar para o estudo da simetria axial na 5<sup>a</sup> série e da simetria central na 6<sup>a</sup> série. Porém, não enquanto uma transformação de figuras, o ensino é centrado no estudo de figuras onde a simetria axial e/ou central aparecem como uma característica delas. Ainda cabe salientar a ausência do estudo das propriedades das transformações, o que não permite o seu uso para a resolução de problemas.

## *Referências*

- 1 SANGIORGI, O. *Matemática: curso moderno: para os ginásios*. 6. ed. São Paulo: Nacional, 1969.
- 2 DESPORTO, S. d. E. F. Ministério da Educação e. *Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries) - Matemática*. Brasília: [s.n.], 1998.
- 3 DESPORTO, S. d. E. F. Ministério da Educação e. *Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª séries)- Matemática*. Brasília: [s.n.], 1997.
- 4 PCN+ Ensino Medio, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais; Ciências da Natureza, Matemática, e suas tecnologias. Acessado em 22 de novembro de 2004. Disponível em: <<http://www.mec.gov.br/seb/pdf/CienciasNatureza.pdf>>.
- 5 Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Medio, Ciências da Natureza, Matemática, e suas tecnologias. Acessado em 22 de novembro de 2004. Disponível em: <<http://www.mec.gov.br/seb/pdf/ciencian.pdf>>.
- 6 PROPOSTA Curricular de Santa Catarina: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio (Disciplinas Curriculares). [S.l.: s.n.], 1998.
- 7 GUELLI, O. *Matemática: Uma aventura do pensamento; 5ª, 6ª, 7ª e 8ª série*. 8ª edição (4ª impressão). ed. São Paulo-SP: Editora Ática, 2001.
- 8 DANTE, L. R. *Tudo é Matemática; 5ª, 6ª, 7ª e 8ª série*. 1ª impressão. ed. São Paulo-SP: Editora Ática, 2004.
- 9 SPINELLI, W.; SOUZA, M. H. *Matemática; 5ª, 6ª, 7ª e 8ª série*. 1ª edição; 3ª impressão. ed. São Paulo-SP: Editora ática, 1999.
- 10 CARVALHO, N. T. B. *Les problemes relatifs aux transformations geometriques au college: Essai de classification et experimentation aupres d' eleves*. Grenoble 1: Université Joseph Fourier, setembro, 1997. Memorie de D.E.A. de Didactiques des disciplines Scientifiques.
- 11 Acessado em 11 de agosto de 2004. Disponível em: <<http://www.guiafloripa.com.br/turismo/patrimonio/catedral.php3>>.
- 12 MANUAL de Formação de Condutores. Blumenau-SC: SINDOMOSC.
- 13 Acessado em 22 de setembro de 2003. Disponível em: <<http://www.photoart.com.br/membros/jorge/ex.jpg>>.
- 14 LINHARES, S.; GEWANDSNAJDER, F. *Biologia Hoje - os seres vivos*. 8ª. ed. São Paulo-SP: Editora Ática, 1998. Unidade IV, p.127.

- 15 Acessado em 26 de janeiro de 2004. Disponível em: <<http://www.mcescher.com>>.
- 16 Acessado em 24 de janeiro de 2004. Disponível em: <[http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia/parte\\_03.html](http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia/parte_03.html)>.
- 17 Acessado em 24 de janeiro de 2004. Disponível em: <<http://www.botanica.cnba.uba.ar/Trabprac/Tp5/Flornueva1.htm>>.
- 18 Acessado em 25 de janeiro de 2004. Disponível em: <<http://www.damadanoite.adm.br/images/lacestub.jpg>>.
- 19 Acessado em 25 de janeiro de 2004. Disponível em: <<http://granada.tuportal.com/mosaico.gif>>.
- 20 Acessado em 25 de janeiro de 2004. Disponível em: <<http://www.ugr.es/~gigda/img/mosaico.jpg>>.
- 21 Acessado em 26 de janeiro de 2004. Disponível em: <<http://spinayarn.com/images/mosaico.gif>>.
- 22 Acessado em 25 de janeiro de 2004. Disponível em: <<http://www.pep3.com/paris-wp/optimized/notre%20dame%206.jpg>>.
- 23 REVISTA Super Interessante. São Paulo: Editora Abril, Maio de 1992. P.80.
- 24 Acessado em 10 de agosto de 2004. Disponível em: <<http://planeta.terra.com.br/educacao/calculo/Textos/fractais.htm>>.
- 25 Acessado em 26 de janeiro de 2004. Disponível em: <<http://members.lycos.co.uk/loveatfirstright4/garfieldandodie.gif>>.



## ***ANEXO A – Planejamento das escolas***

### **A.1 Projeto Pedagógico do Colégio Coração de Jesus referente a 5<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup> série.**

#### **10.1.3.1 Conteúdo Programático de Matemática 5<sup>a</sup> Série Introdução à Geometria**

- Bloco retangular.
- Vistas de um objeto.
- Cilindros e esfera → figuras geométricas.
- Giros, cantos e ângulos: reto, agudo e obtuso.
- Estudo das linhas: paralelas, perpendiculares e oblíquas com exploração de maquetes.
- Mosaicos e polígonos explorando figuras espaciais tais como pirâmide, cubo, prismas com bases regulares e irregulares.
- Quadriláteros: trapézio, paralelogramos, losangos e retângulos.

#### **Operações Fundamentais**

- Fazendo contas de cabeça.
- Técnicas de divisão.
- Para que servem as operações.
- Concretizando na prática através de ladrilhos os conceitos abstratos.
- Operações inversas → relação adição/subtração e multiplicação/divisão.
- Reforçando as operações através de blocos.

#### **Seqüências de Múltiplos**

- Mínimo múltiplo comum → regra prática.

#### **Divisores**

- Regras de divisibilidade.

- Exploração de jogos.

### **Frações**

- Idéias básicas: explorando figuras geométricas.
- Nomenclatura.
- Problemas com dados fracionários envolvendo adição e subtração e situações cotidianas.
- Números mistos: transformação de número misto para fração imprópria e vice-versa.
- Frações equivalentes.
- Adição e subtração de frações.

### **Números Decimais e Medidas de Comprimento**

- Adição e subtração de decimais.
- Resolução de problemas cotidianos.
- Multiplicação e divisão de decimais por 10, 100, 1000, usando a regra prática.
- Multiplicação de decimais (decimal X decimal).
- Quocientes decimais.

### **Eixo de Simetria**

- Trabalhando com figuras simétricas.

### **Linguagem Matemática**

- Expressões Numéricas com parênteses, colchetes e chaves.
- Potências → trabalhando com o cubo.

### **Áreas e Perímetros**

- Quadrado.
- Retângulo.
- Polígonos regulares e irregulares.
- Unidades de medida de área.

### **Possibilidades e Estatísticas**

- Várias possibilidades.
- Tabelas e gráficos de barras.

- Média aritmética.

### **Porcentagem**

- Calculando mentalmente.
- Explorando situações práticas do cotidiano.

#### **10.1.3.2 Conteúdo Pragmático de Matemática 6ª Série**

- Quebra-cabeças: cálculos em geral, propriedades obrigatórias.
- Múltiplos, divisores e regras de divisibilidade.
- Possibilidades ( probabilidades).
- Números decimais e frações: informações numéricas, operações de decimais, frações no lugar de decimais, operações com frações.
- Formas geométricas: ângulos, paralelas e perpendiculares, polígonos, geometria espacial, mosaicos (pintura), classificação das formas geométricas.
- Instrumentos e unidades de medidas.
- Sistemas decimais de medidas.
- Grandezas diretamente proporcionais.
- Grandezas inversamente proporcionais.
- Números negativos.
- Operações com números inteiros.
- Expressões numéricas.
- Descobrimos regras para multiplicar e dividir.
- Usando letras em matemática.
- Comunicando idéias.
- Calculando com letras.
- Equações: letras para achar números, usando letras para resolver problemas, regra de três.
- Porcentagens: cálculo.
- Estatística e Gráficos.
- Gráficos de segmento e setores.
- Simetria.
- Ampliações e reduções.
- Áreas e volumes.

## A.2 Planejamento Anual do Colégio Criativo referente a 5<sup>a</sup>, 6<sup>a</sup> e 7<sup>a</sup> série.

COLÉGIO CRIATIVO - ENSINO FUNDAMENTAL  
PLANEJAMENTO ANUAL DE 2003

### 1. EIXOS E CONTEÚDOS

MATEMÁTICA		
5 <sup>o</sup> série		
EIXO NORTEADOR	CONTEÚDOS	
NÚMEROS	A Matemática	Leitura e escrita de números grandes Interpretação de gráficos de barras A diversidade do conhecimento matemático Pesquisa de formas geométricas Contagem possibilidades Resolução de problemas
GEOMETRIA	As formas espaciais ou tridimensionais	Identificação de prismas e pirâmides Vistas de um objeto Cilindro, cone e esfera
NÚMEROS	As operações fundamentais	Técnicas de divisão A utilidade das operações Operações inversas Resolução de problemas

GEOMETRIA	Formas planas	<p>Giros, cantos e ângulos</p> <p>Perpendiculares e paralelas</p> <p>Mosaicos e polígonos</p> <p>Quadriláteros</p>
NÚMEROS	Múltiplos e divisores	<p>Sequências</p> <p>Sequências de múltiplos</p> <p>Múltiplos comuns e o mmc</p> <p>Divisibilidade e divisores</p>
NÚMEROS	Frações e porcentagens	<p>Utilização de frações</p> <p>Nomenclatura das frações</p> <p>Números mistos e medidas</p> <p>Porcentagens que substituem frações</p>
GEOMETRIA	Construções geométricas	<p>Construções em papel quadriculado</p> <p>Construções com régua e esquadro</p> <p>Construções com régua e compasso</p>
MEDIDAS	Medidas e números decimais	<p>Medidas de comprimento</p> <p>Números “com vírgula” (decimais)</p>
NÚMEROS	Operações com números decimais	<p>Adição e subtração</p> <p>Multiplicação e divisão por 10, 100, 1000 (potências com base 10)</p> <p>Produto entre dois números decimais</p> <p>Quocientes decimais</p>
ÁLGEBRA	Linguagem matemática	<p>Expressões com parênteses, colchetes e chaves</p> <p>Potenciação</p>

GEOMETRIA	Áreas e Perímetros	Noção de áreas Áreas de retângulos Unidades de medidas de áreas
GEOMETRIA	Simetrias	Simetria nas formas Números simétricos
ESTATÍSTICA	Generalizações	Análise e obtenção de conclusões geral
NÚMEROS	Operações com frações	Frações equivalentes Adição e subtração de frações Problemas envolvendo frações
<b>6º série</b>		
<b>EIXO NORTEADOR</b>	<b>CONTEÚDOS</b>	
NÚMEROS	Os números e algarismos	A escrita dos números Sistema decimal e sistema posicional Conceituação do sistema indo-arábico O sistema decimal de numeração A relação entre frações e decimais
GEOMETRIA	Construções geométricas	Os ângulos Circunferências Simetrias Medidas dos ângulos dos polígonos regulares
NÚMEROS	Padrões numéricos	Observação de padrões Determinação de padrões Padrões de divisibilidade Descoberta e justificção dos critérios de divisibilidade Resolução de problemas envolvendo possibilidades e sequências

NÚMEROS	Cálculos com números decimais e frações	Operações com números decimais, envolvendo somas, diferenças e produtos Obtenção de quocientes decimais Resolução de problemas Cálculos com frações
MEDIDAS	Unidades e grandezas de Medidas	Instrumentos e unidades de medida Unidades do sistema métrico Conversão de unidades de medidas Problemas Unidades de medidas de tempo
NÚMEROS	Números negativos	Os números negativos e os positivos Adição de números com sinais Subtração de números com sinais Expressões numéricas envolvendo adições e subtrações entre números com sinais
MEDIDAS	Proporcionalidade	Grandezas direta e inversamente proporcionais
MEDIDAS	Mapas e localização	Vistas, mapas e plantas Localização de pontos no plano
ESTATÍSTICA	Tratamento da informação	Informações numéricas Cálculos de taxas percentuais Gráficos
NÚMEROS	Multiplicação e divisão entre números com sinais	Obtenção de produtos entre números relativos Determinação de quocientes entre relativos Cálculo de expressões numéricas

ÁLGEBRA	Utilização de letras em Matemática	Comunicação de idéias Cálculo com a utilização de letras
GEOMETRIA	Áreas e Volumes	Cálculo de áreas e volumes Volumes de blocos retangulares
ÁLGEBRA	Equações	Letras no cálculo de incógnitas Resolução de equações Resolução de problemas através de equações Regra de três (simples e composta)
GEOMETRIA	Geometria tridimensional	Poliedros Classificação das formas geométricas
<b>7ª série</b>		
EIXO NORTEADOR	CONTEÚDO	
NÚMEROS	Números primos e números compostos	Números primos Decomposição de um número em seus fatores primos Cálculo do menor múltiplo comum
NÚMEROS	Frações e suas operações	Revisão dos conceitos básicos sobre frações Adição e subtração Multiplicação Divisão
GEOMETRIA	Construções geométricas	Os instrumentos de desenho Construção de formas espaciais ou tridimensionais
ÁLGEBRA	A Matemática e suas aplicações	Aplicação da Matemática no dia-a-dia Utilização da porcentagem, principalmente como ferramenta na resolução de problemas



ÁLGEBRA	Noções básicas de Álgebra	<p>Conceito de fórmula e de equação</p> <p>Aplicação de fórmulas</p> <p>Resolução de equações simples</p> <p>Cálculo de expressões literais simples</p> <p>Resolução de problemas</p>
GEOMETRIA	Paralelas, ângulos e polígonos	<p>Os ângulos e algumas de suas propriedades</p> <p>Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo</p> <p>Classificação de polígonos</p>
NÚMEROS	Potências e raízes	<p>Potências com expoentes menores que 1(um)</p> <p>Notação científica</p> <p>Raízes</p>
GEOMETRIA	Simetrias	<p>Tipos de simetrias</p> <p>Simetrias e propriedades das figuras geométricas</p>
ESTATÍSTICA	Estatística e possibilidades	<p>Possibilidades e chances</p> <p>Obtenção de conclusões através da estatística</p>
ÁLGEBRA	Cálculo algébrico	<p>Dedução de fórmulas e cálculos algébricos</p> <p>Redução de termos semelhantes</p> <p>Fatoração</p> <p>Produtos entre polinômios</p>
GEOMETRIA	Áreas e volumes	<p>Idéias e recursos para a determinação de áreas e volumes</p> <p>Fórmulas para o cálculo de áreas</p>

GEOMETRIA	Geometria	O Teorema de Pitágoras
ÁLGEBRA	Sistemas de equações do 1º grau, com duas incógnitas	O método da adição O método da substituição Resolução de problemas através de um sistema de equações
GEOMETRIA	Geometria experimental	Relação de proporcionalidade Figuras semelhantes Perímetro da circunferência

*ANEXO B – Tabelas de classificação dos  
exercícios*



Categoria B: As transformações geométricas como ferramenta na resolução de problemas.	Classe I: As transformações geométricas como ferramenta quase-obrigatória na construção no contexto de ensinamento.	--	--
	Classe II: As transformações geométricas como ferramenta possível de construção.	--	--
	Classe III: As transformações geométricas como ferramenta de demonstração.	--	--
Categoria C: Escrever, reconhecer, palavras e ou números que apresentam simetria.	Total	09	35



	Classe VI: Dadas figuras e a transformação, identificar quais figuras a transformação determina uma relação entre figuras.	45	05	--
	Classe VII: Identificar uma simetria em uma tabela obtida por uma operação (simetria associada a propriedade comutativa).	01	--	--
	Classe VIII: Dadas a relação entre figuras (as figuras são simétricas) cabe identificar se o eixo dado é correto.	06	--	--
	Classe IX: Estudo de configurações.	a) Identificar quantos são os eixos de simetria a figura possui.	04	--
		b) Identificar quantas rotações foram efetuadas.	--	--
Categoria B: As transformações geométricas como ferramenta na resolução de problemas.	Classe I: As transformações geométricas como ferramenta quase-obrigatória na construção no contexto de ensinamento.	--	--	--
	Classe II: As transformações geométricas como ferramenta possível de construção.	03	--	--
	Classe III: As transformações geométricas como ferramenta de demonstração.	--	--	--
Categoria C: Escrever, reconhecer, palavras e ou números que apresentam simetria.		03	--	--
Total		166	79	02

(\*) 74 destes exercícios pedem para verificar se é possível traçar o eixo de simetria.

(\*\*) 29 destes exercícios pedem para verificar se é possível traçar o eixo de simetria.

(\*\*\*) 16 destes exercícios pedem para localizar o centro de simetria





Categoria B: As transformações geométricas como ferramenta na resolução de problemas.	Classe VII: Identificar uma simetria em uma tabela obtida por uma operação (simetria associada a propriedade comutativa)	--	--	--
	Classe VIII: Dadas a relação entre figuras (as figuras são simétricas) cabe identificar se o eixo dado é correto	07	06	--
Categoria C: Escrever, reconhecer, palavras e ou números que apresentam simetria.	Classe IX: Estudo de simetria a figura possui	12	04	05
	a) Identificar quantos são os eixos de simetria a figura possui b) Identificar quantas rotações foram efetuadas	--	--	01
Categoria B: As transformações geométricas como ferramenta na resolução de problemas.	Classe I: As transformações geométricas como ferramenta quase-obrigatória na construção no contexto de ensinamento.	--	--	--
	Classe II: As transformações geométricas como ferramenta possível de construção.	--	--	--
	Classe III: As transformações geométricas como ferramenta de demonstração.	--	--	02
Total		82	79	67

(\*) 5 destes exercícios pedem para verificar se é possível traçar o eixo de simetria.

(\*\*) 11 destes exercícios pedem para verificar se é possível traçar o eixo de simetria. O livro de 8ª série possui 2 exercícios.

(SA) Simetria Axial  
(SC) Simetria Central

(R) Rotação  
(T) Translação

## *ANEXO C – Soluções dos exercícios*

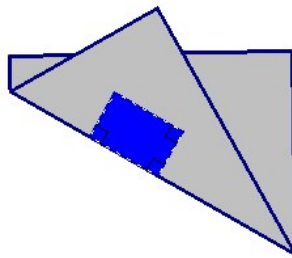
Seção: 4.1 - Simetria Axial

Sub-seção 4.1.1

2.b) Dobre uma folha em duas partes quaisquer.

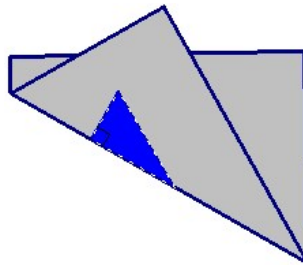
Desenhar uma figura de modo que se obtenha ao recortar e desdobrar a folha, os seguintes polígonos:

(a) um retângulo,



(b) um triângulo (que triângulo foi obtido?)

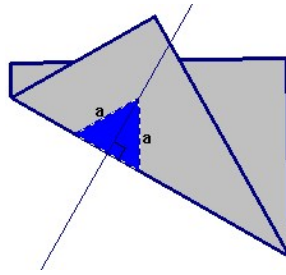
Sempre se obtém um triângulo isósceles.



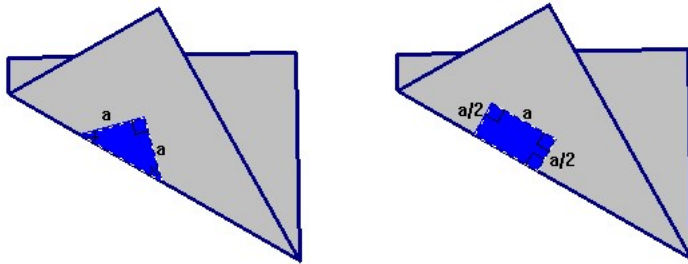
(c) um losango

Lembre-se que em um losango seus lados são congruentes e sua diagonais perpendiculares.

Para começar a desenhar deve-se traçar uma reta perpendicular (a reta perpendicular é só para auxiliar no desenho).

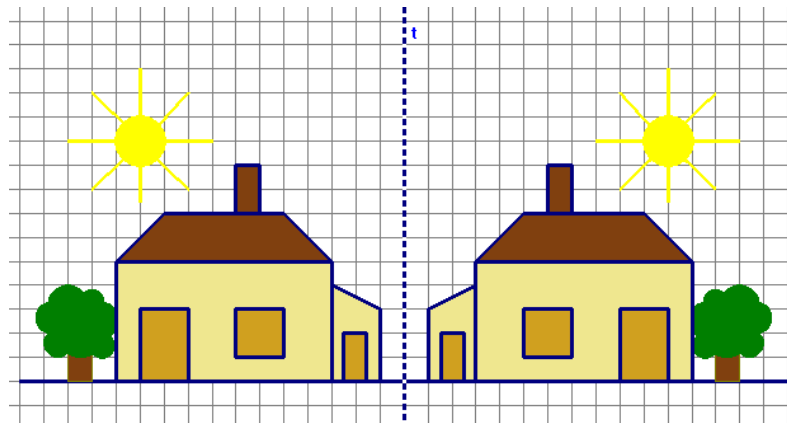


(d) um quadrado (duas soluções).

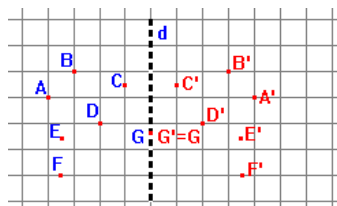


#### Sub-seção 4.1.1

1. Faça a simetria axial da figura abaixo e descubra o que se obtém.



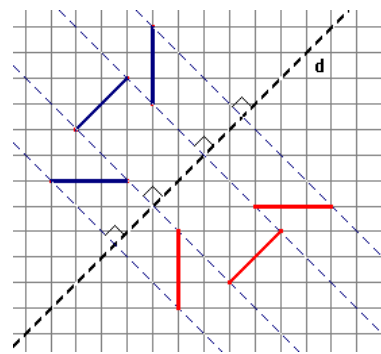
2. Faça a simetria axial dos pontos  $A, B, C, D, E, F$  e  $G$  em relação a reta  $d$ .



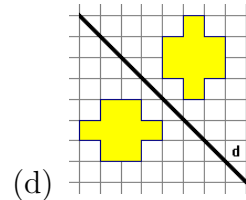
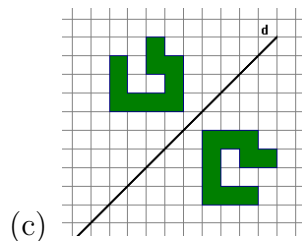
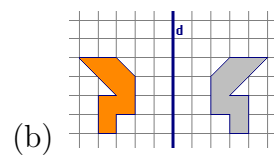
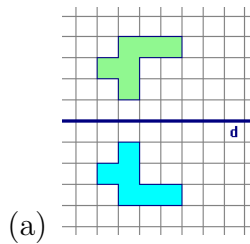
Observe que  $G'$  coincide com  $G$ .

3. Faça a simetria axial dos segmentos de reta em relação a reta  $d$ .

Tome os pontos extremos dos segmentos de reta e por esses pontos trace retas perpendiculares a  $d$ , em seguida com o auxílio do papel quadriculado descubra a distâncias dos pontos extremos até a reta  $d$ , que será a mesma distância da imagem dos pontos extremos até a reta  $d$  (sendo que os pontos imagens também estarão sobre as retas perpendiculares). Logo os segmentos de reta imagens são encontrados unindo os pontos imagens.

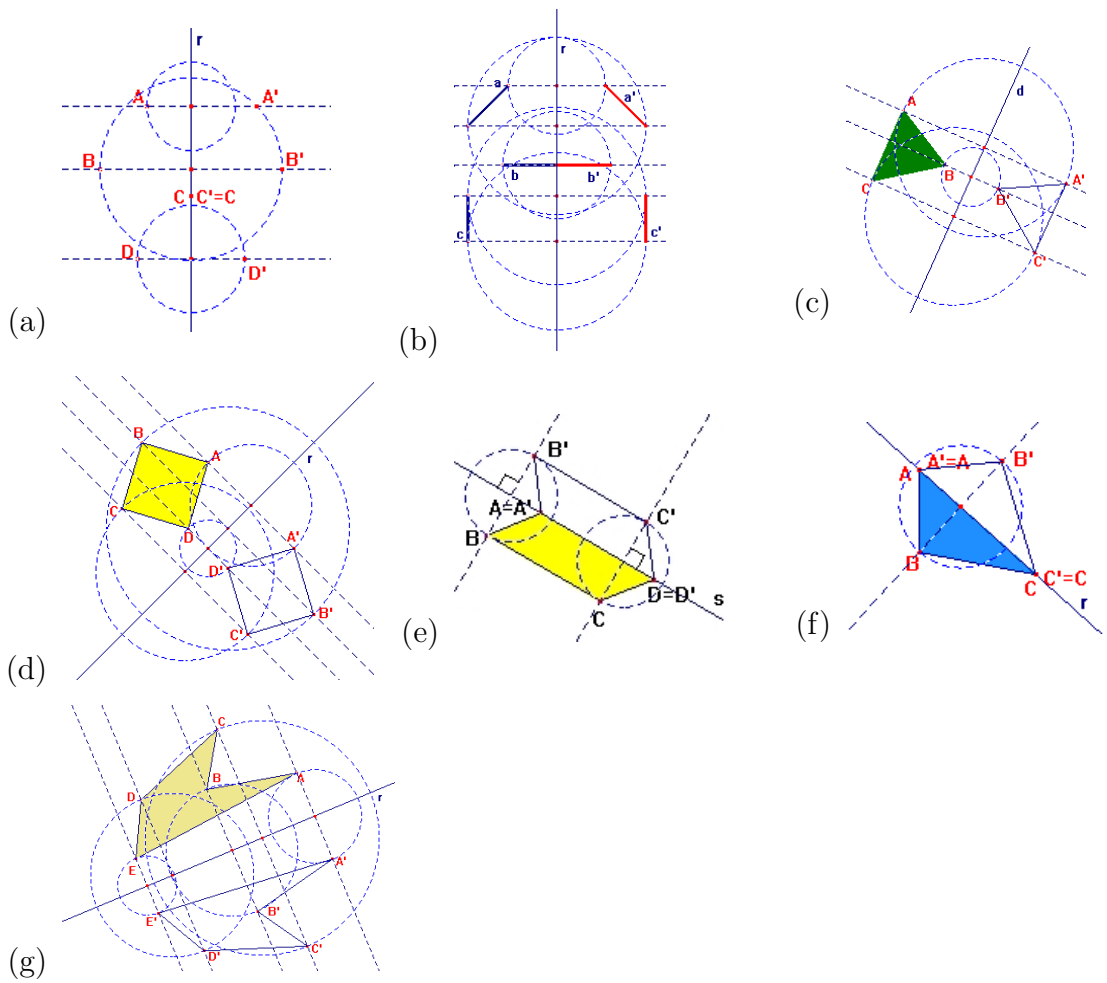


4. Faça a simetria axial das figuras abaixo em relação as retas.



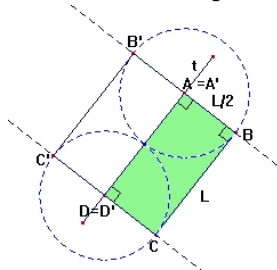
#### Sub-seção 4.1.4

1. Faça a simetria axial das figuras abaixo segundo a reta dada.

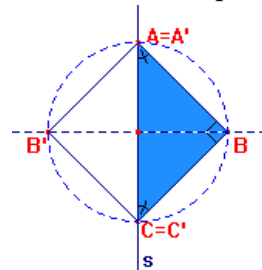


2. Faça a simetria axial das figuras abaixo segundo a reta dada, e diga que figura geométrica se obtém.

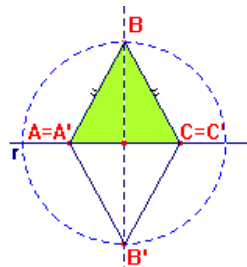
(a) Obtém-se um quadrado.



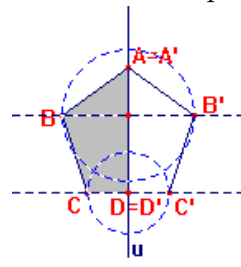
(b) Obtém-se um quadrado.



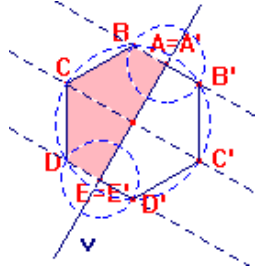
(c) Obtém-se um losango.



(d) Obtém-se um pentágono.



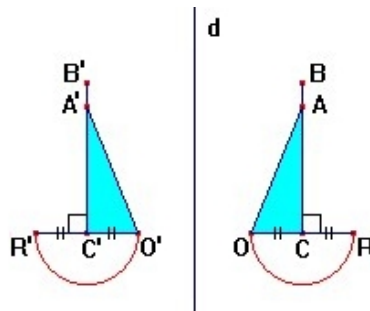
(e) Obtém-se um hexágono.



3. Diga quais são simétricos em relação a  $r$ ?

Os simétricos em relação a  $r$  são:  $D$  (circunferência),  $E$  (hexágono),  $F$  (segmento de reta),  $G$  (ponto).

4. (a) Reproduzir a figura do barco e construir seu simétrico em relação a reta  $d$ .  
(Anote  $B'$ ,  $A'$ ,  $R'$ ,  $C'$  e  $O'$  como simétricos dos pontos  $B$ ,  $A$ ,  $R$ ,  $C$  e  $O$ .)



i. Sobre a figura obtida em (a) medir  $AC$  e  $A'C'$ ,  $AO$  e  $A'O'$ ,  $RO$  e  $R'O'$ .

ii. Dois segmentos simétricos tem o mesmo comprimento.

(b) O ponto  $C$  é ponto médio do segmento  $[RO]$ . E o ponto  $C'$ ?

É o ponto médio de  $[R'O']$ , porque a simetria conserva distância.

(c) Os pontos  $B$ ,  $A$ ,  $C$  são alinhados. O que dizer dos simétricos  $B'$ ,  $A'$  e  $C'$ ?

Os pontos  $B'$ ,  $A'$  e  $C'$  são alinhados.

5. Seja um segmento  $[AB]$ . Construir o eixo de simetria do segmento  $[AB]$ .

Seja o segmento  $[AB]$ .

Com o compasso em  $A$  e raio maior que  $[AB]$  trace uma circunferência.

Com o compasso em  $B$  e raio maior que  $[AB]$  trace uma outra circunferência.

Seja  $C$  e  $D$  os pontos de intersecção das duas circunferências.

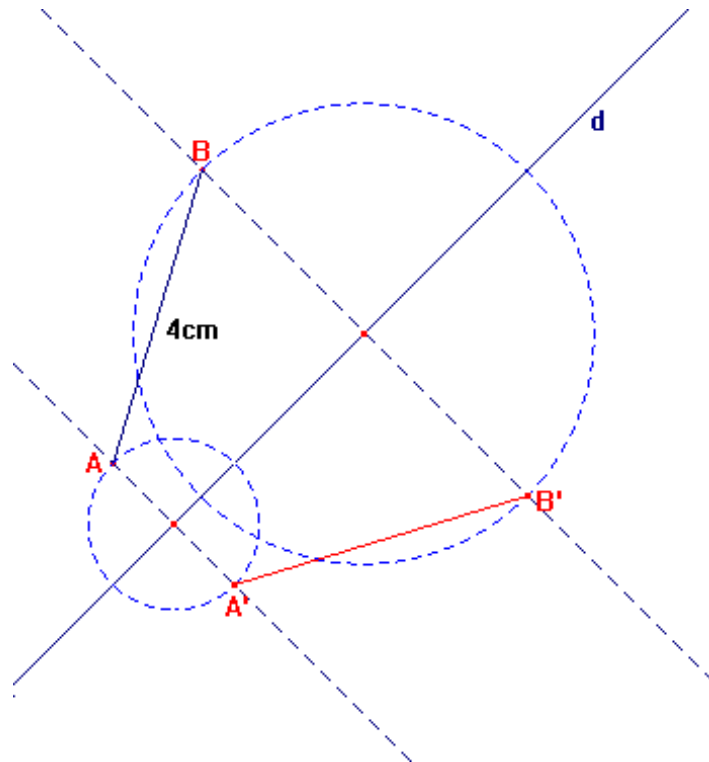
Trace uma reta  $r$  passando por  $C$  e  $D$ .

Temos que a reta  $r$  é a mediatriz do segmento  $[AB]$ . Logo a reta  $r$  é o eixo de simetria do segmento  $[AB]$ .

Sub-seção 4.1.6

### Simétrico de um segmento

- Trace uma reta  $d$ ; trace um segmento  $[AB]$  de 4cm.
- Com a régua, compasso e esquadro, construa os pontos  $A'$  e  $B'$ , simétricos de  $A$  e  $B$  em relação a reta  $d$ .



- Qual é o simétrico do segmento  $[AB]$ ? Trace o simétrico. Você pode determinar seu comprimento sem medir?

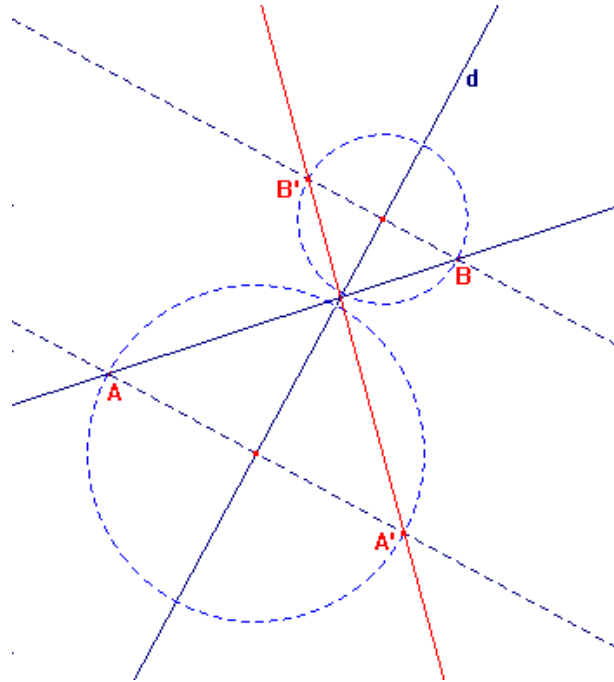
O simétrico de  $[AB]$  é  $[A'B']$ . Seu comprimento é 4cm.

### Simétrico de uma reta

- Trace uma reta  $d$  e crie dois pontos  $A$  e  $B$ , o ponto  $A$  de um lado e o ponto  $B$  do outro lado da reta  $d$ .

Com os instrumentos de sua escolha, construa os pontos  $A'$  e  $B'$ , simétricos de  $A$  e  $B$  em relação a reta  $d$ .

- b. Qual é a figura simétrica da reta  $(AB)$ ? Trace a reta  $(AB)$  e sua simétrica. O que observou? Pode você prever?

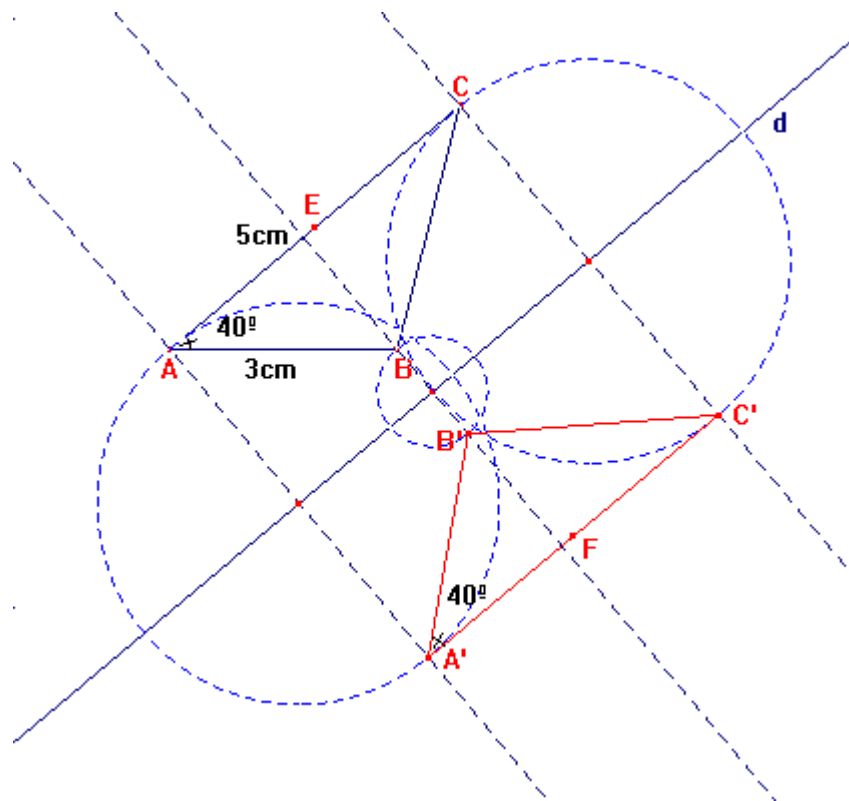


A figura simétrica de  $(AB)$  é  $(A'B')$ . O simétrico de uma reta é uma reta.

### Simétrico de um triângulo

- Construa um triângulo  $ABC$  tal que:  $AB = 3\text{cm}$ ;  $AC = 5\text{cm}$ ;  $\hat{BAC} = 40^\circ$ .
- Construa os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  simétricos dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  em relação à uma reta  $d$ .
- Qual é o simétrico do triângulo  $ABC$ ?  
O simétrico do triângulo  $ABC$  é o triângulo  $A'B'C'$ .
- Com o transferidor, verifique que  $\hat{B'A'C'} = 40^\circ$ .
- Marque o ponto médio  $E$  de  $[AC]$ ; o ponto médio  $F$  de  $[A'C']$ . Verifique com o esquadro e o compasso que  $E$  e  $F$  são simétricos em relação à  $d$ .



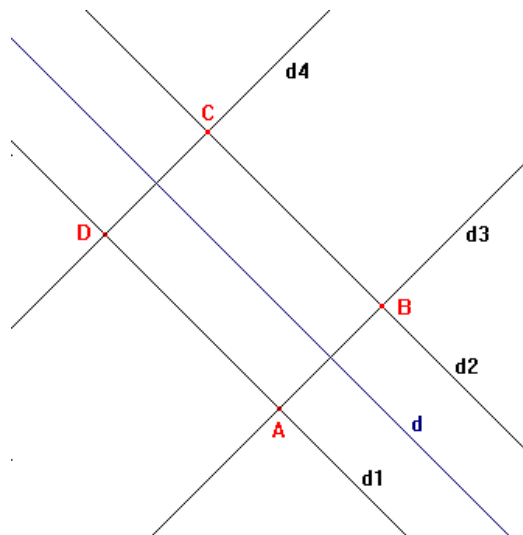


### Sub-seção 4.1.9

#### 1. Eixos de simetria de um retângulo:

(a) Trace duas retas paralelas  $d_1$  e  $d_2$  simétricas em relação à uma reta  $d$ .

- Trace uma reta  $d_3$  perpendicular à  $d$  que corta  $d_1$  em  $A$  e  $d_2$  em  $B$ .
- Trace uma reta  $d_4$  perpendicular à  $d$  que corta  $d_2$  em  $C$  e  $d_1$  em  $D$ .



- (b) Qual é a natureza do quadrilátero  $ABCD$ ? Justifique.

O quadrilátero  $ABCD$  é um retângulo, possui todos os ângulos retos.

Justificativa:

Temos que  $[AD] \parallel [BC]$  (pois  $[AD] \subset d_1$  e  $[BC] \subset d_2$ ).

Temos que  $[AB] \parallel [DC]$  (pois  $[AB] \subset d_3 \perp d$  e  $[DC] \subset d_4 \perp d$ ).

Logo  $ABCD$  é um paralelogramo.

Temos que  $d_3 \perp d$  e  $d_4 \perp d$  (por hipótese).

Como  $d_1 \parallel d_2$  e  $d_1$  e  $d_2$  são simétricas em relação a reta  $d$ , então  $d \parallel d_1 \parallel d_2$ .

Portanto,  $d_3 \perp d_1$ ,  $d_3 \perp d_2$ ,  $d_4 \perp d_1$  e  $d_4 \perp d_2$ .

Logo o paralelogramo possui os quatro ângulos retos.

Então o quadrilátero é um retângulo.

- (c) O que representa a reta  $d$  para o quadrilátero  $ABCD$ ?

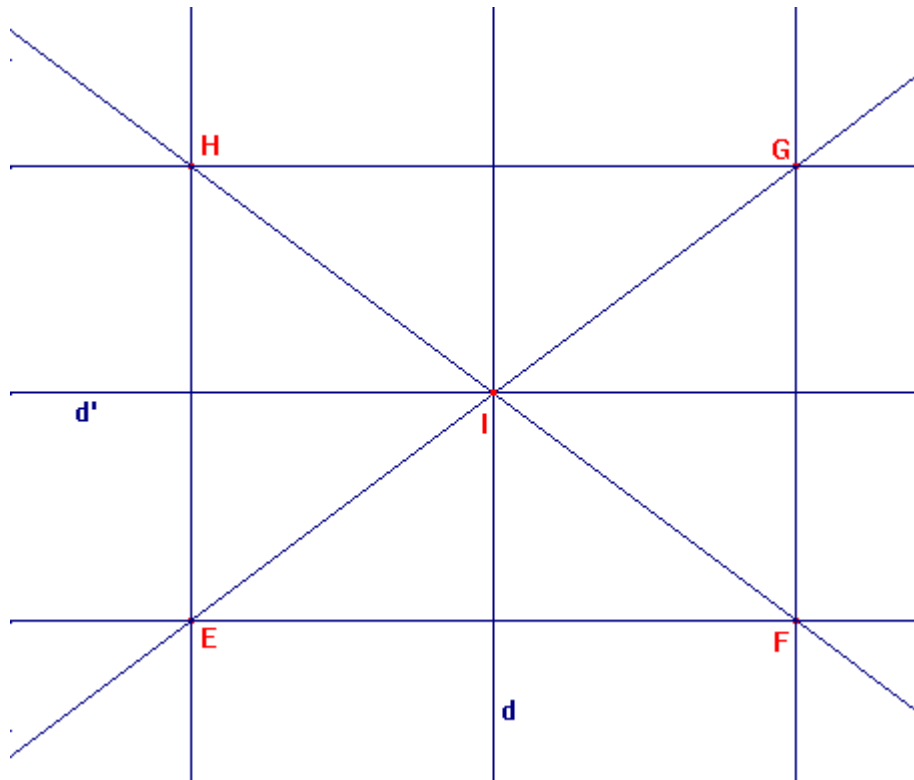
Este quadrilátero tem um segundo eixo de simetria?

A reta  $d$  é o eixo de simetria do quadrilátero  $ABCD$ .

O quadrilátero possui um segundo eixo de simetria (perpendicular a  $d$  passando pelos pontos médios dos segmentos  $[AB]$  e  $[CD]$ ).

## 2. Propriedades de um retângulo:

- (a) Trace um retângulo  $EFGH$  tal que  $EF = 8\text{cm}$ ,  $EH = 6\text{cm}$  e construa seus eixos de simetria:  $d$  e  $d'$ . ( $d$  paralela à  $(EH)$ ;  $d'$  paralela à  $(EF)$ ).



(b) Considerando a simetria em relação à  $d$  ou em relação à  $d'$ , justifique as igualdades dos comprimentos seguintes:

$$[GH] = [FE]; [EG] = [FH]; [FG] = [EH].$$

- $[GH] = [FE]$ , os segmentos  $[GH]$  e  $[FE]$  são simétricos em relação a  $d'$ , e a simetria axial conserva comprimento.
- $[EG] = [FH]$ , os segmentos  $[EG]$  e  $[FH]$  são simétricos em relação a  $d$  e  $d'$ , e a simetria axial conserva comprimento.
- $[FG] = [EH]$ , os segmentos  $[FG]$  e  $[EH]$  são simétricos em relação a  $d$ , e a simetria axial conserva comprimento.

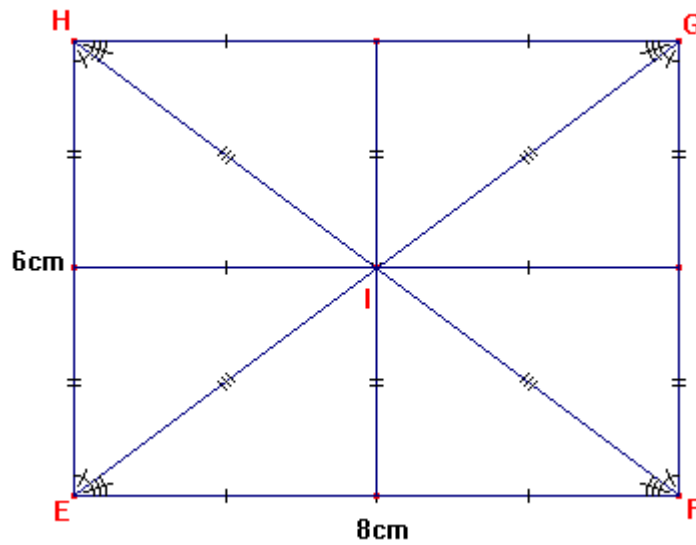
(c) • Trace as retas  $(EG)$  e  $(FH)$ . O que você observou?

As retas  $(EG)$  e  $(FH)$  contém as diagonais do retângulo e se cruzam em um ponto  $I$ .

- O que representa o ponto comum  $I$  dos segmentos  $[EG]$  e  $[FH]$ ? Tente justificar.

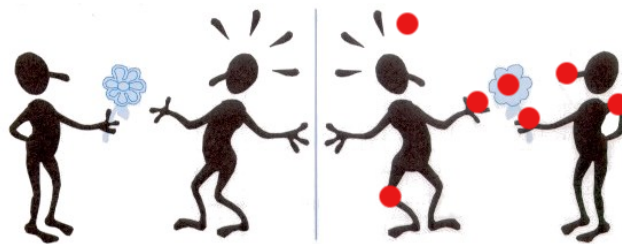
O ponto  $I$  representa o ponto médio dos segmentos  $[EG]$  e  $[FH]$ .

(d) Marque sobre a figura as igualdades de comprimentos e dos ângulos.

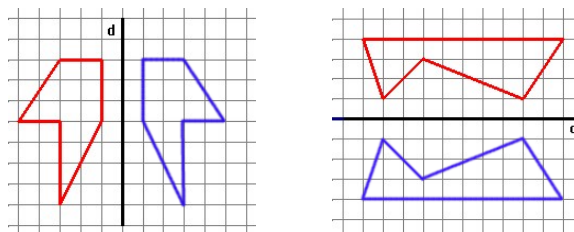


Sub-seção 4.1.10

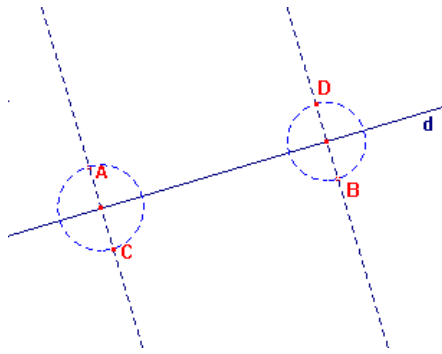
1. O desenho da direita deveria ser o simétrico do desenho da esquerda em relação a reta  $d$ . Sete erros existem sobre a figura. Quais?



2. Construir o simétrico de cada figura em relação a reta  $d$ .



3. Com o esquadro e a com a régua graduada, construir os pontos  $C$  e  $D$  respectivamente simétricos dos pontos  $A$  e  $B$  em relação a reta  $d$ .



4. Na simetria em relação a reta  $d$ ,  $J$  é simétrico de  $I$ ,  $K$  é o simétrico de  $H$  e  $F$  é o simétrico de  $E$ .

(a) Qual é o simétrico do segmento  $[IH]$ ?

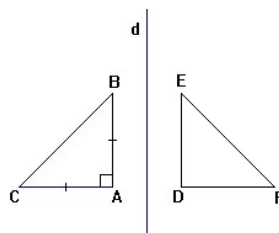
O simétrico de  $[IH]$  é  $[JK]$ .

(b) Se  $E$  é o ponto médio do segmento  $[IH]$ . O que você pode dizer do ponto  $F$ ?  
Por que?

O ponto  $F$  é o ponto médio de  $[JK]$ , pois  $[IH]$  e  $[JK]$  são simétricos, logo  $F$  e  $E$  são simétricos.

A simetria axial conserva distância, comprimento e alinhamento.

5. Na figura abaixo,  $ABC$  é um triângulo retângulo isósceles em  $A$ . Na simetria em relação a  $d$ ,  $D$  é o simétrico de  $A$ ,  $E$  é o simétrico de  $B$  e  $F$  é o simétrico de  $C$ .



(a) O que você pode dizer dos segmentos  $[DE]$  e  $[DF]$ ?

Os segmentos  $[DE]$  e  $[DF]$  são de mesmo comprimento.

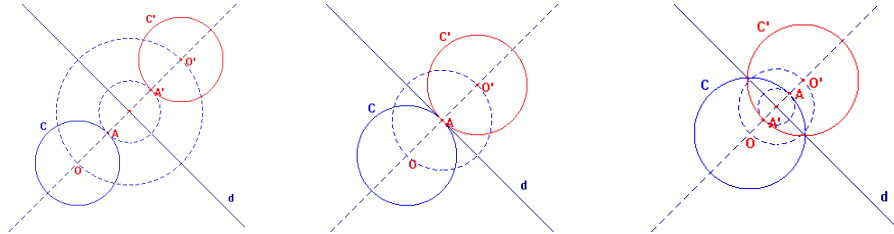
(b) O que você pode dizer das retas  $(DE)$  e  $(DF)$ ?

As retas  $(DE)$  e  $(DF)$  são perpendiculares em  $D$ .

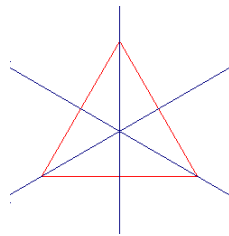
(c) Qual é a natureza do triângulo  $EDF$ ?

Temos que  $EDF$  é um triângulo retângulo isósceles.

6. Em cada um dos casos seguintes, construir em vermelho o simétrico do círculo  $C$  em relação a reta  $d$ .

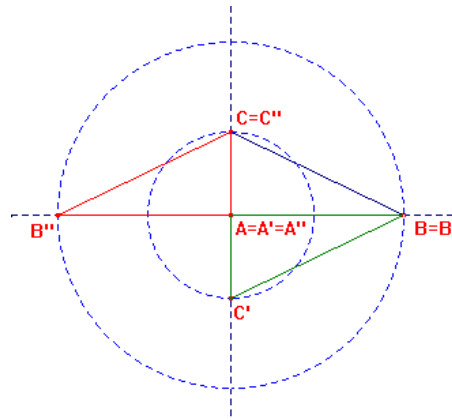
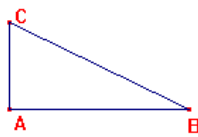


7. Desenhar um figura que tem três eixos de simetria, mas somente três.



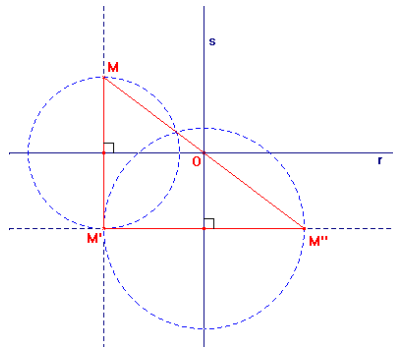
Um triângulo eqüilátero possui 3 eixos de simetria.

8. Traçar um triângulo  $ABC$  retângulo em  $A$ . Construir sua imagem pela simetria axial, que tem por eixo a reta  $AB$ , seguido da simetria axial de eixo a reta  $AC$ .



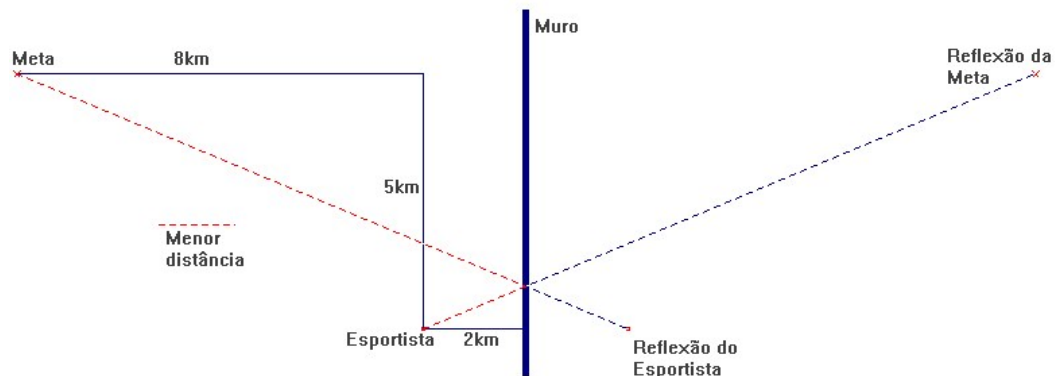
9. Traçar duas retas  $r$  e  $s$  perpendiculares em um ponto  $O$ . Colocar um ponto  $M$ , não incidente a  $r$  e nem a  $s$ . Construir o ponto  $M'$ , imagem de  $M$  pela simetria axial de eixo  $r$ , e  $M''$  imagem de  $M'$  pela simetria axial de eixo  $s$ .

(a) O que você pode dizer do triângulo  $MM'M''$ ? Prove.



O triângulo  $MM'M''$  é retângulo em  $M'$ . Temos que  $r$  e  $s$  são retas perpendiculares. O segmento  $[MM']$  é perpendicular a  $r$  (definição de simetria axial). O segmento  $[M'M'']$  é perpendicular a  $s$  (definição de simetria axial). Logo os segmentos  $[MM']$  e  $[M'M'']$  são perpendiculares (propriedade de um quadrilátero, se três de seus ângulos é reto o quarto ângulo também será reto).

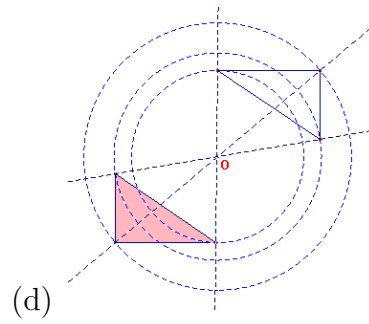
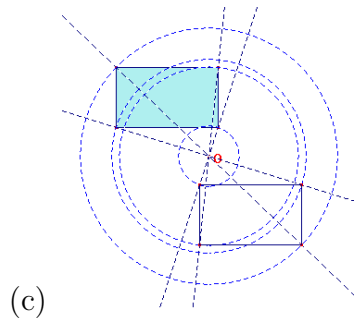
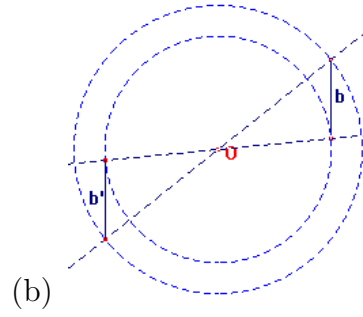
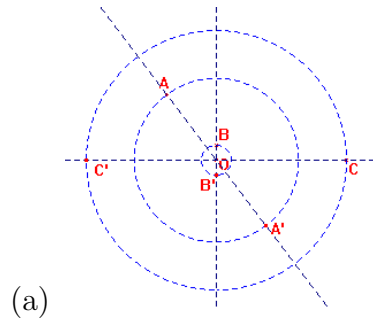
10. Um corredor se encontra em terreno aberto, 2km a oeste de um muro reto, construído na direção norte-sul. O esportista se encontra também a 5km ao sul e 8km a leste da meta de sua corrida (conforme figura abaixo). As regras da corrida dizem que ele deve tocar o muro uma vez antes de chegar a sua meta. Qual a menor distância, em Km, que deve correr para chegar em sua meta segundo as regras?



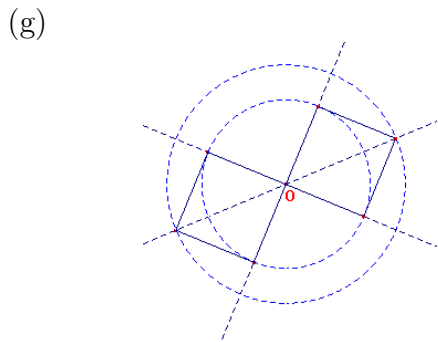
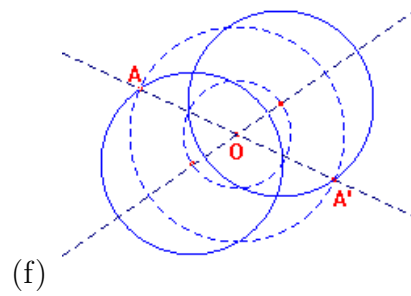
Seção: 4.2 Simetria Central

Sub-seção 4.2.3

1. Faça a simetria central das figuras abaixo segundo o ponto O dado:

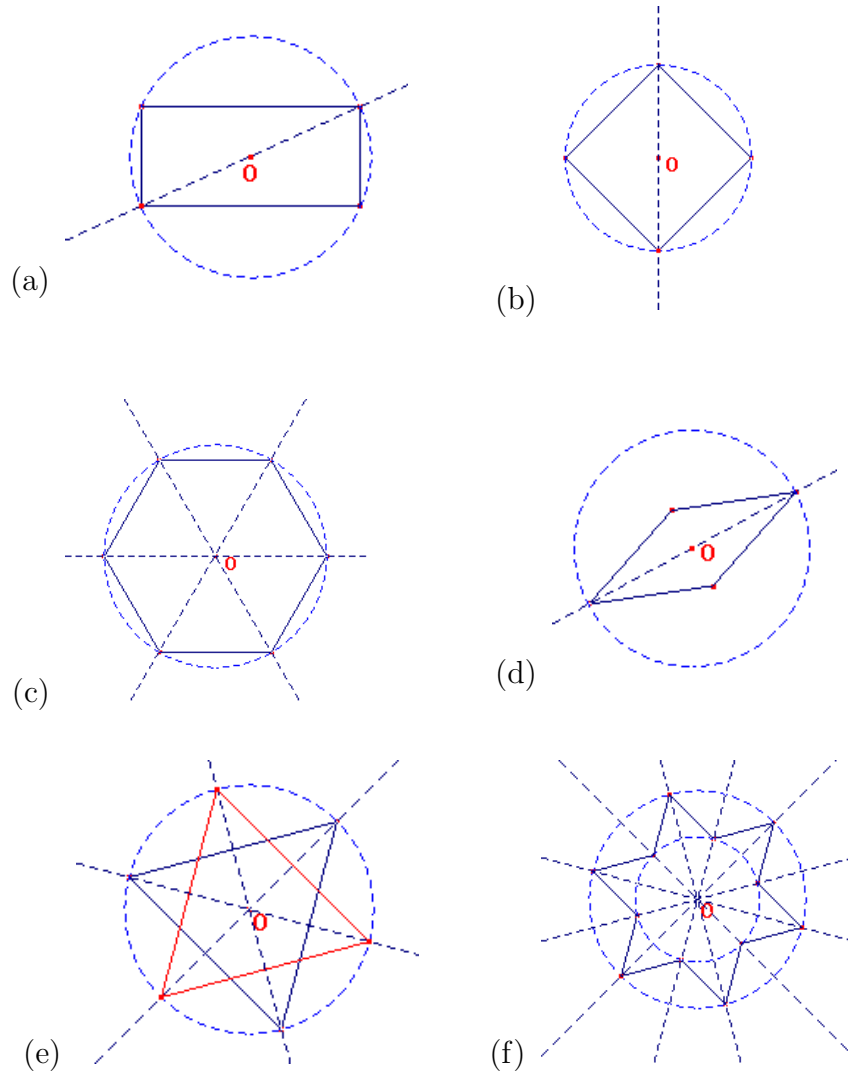


(e) A simetria de centro O (onde O é o centro da circunferência) é a própria circunferência.

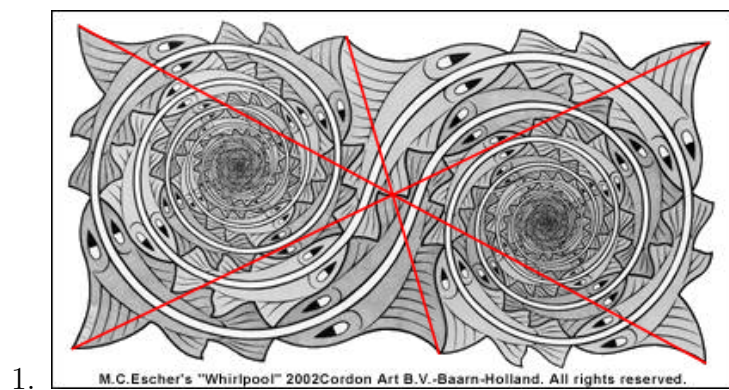




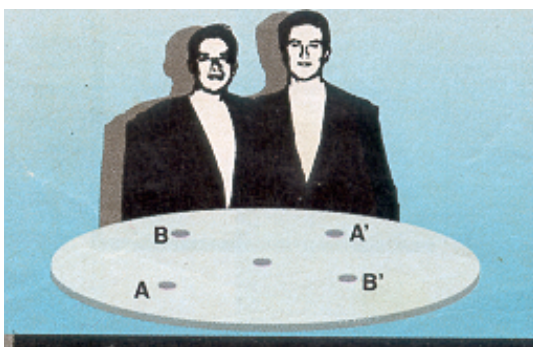
2. Faça a simetria central das figuras abaixo, segundo o ponto O dado e diga que figura se obtém.



Sub-seção 4.2.6



2. Dois amigos inventaram um jogo para usar as moedas inflacionadas, já que não compram mais nada. Diante de uma mesa circular, Gérson dá início à partida, pondo uma moeda deitada sobre ela. Então é a vez de Cândido, que deve colocar outra moeda sobre a mesa, sem mover nem cobrir a anterior. Vão se alternando desse modo até que um deles não tenha mais espaços para pôr outra moeda: esse será o perdedor. Sabendo-se que todas as moedas tem o mesmo tamanho e que ambos jogaram o melhor possível, descubra uma estratégia para que se possa assegurar quem é o ganhador. Justifique.



Ao contrário do que parece à primeira vista, nem é preciso conhecer o tamanho das moedas nem o da mesa. Esta possui um ponto central, em relação ao qual podem-se estabelecer pares de pontos simétricos (veja, por exemplo, os pares  $AA'$  e  $BB'$ ). Se o primeiro jogador colocar a primeira moeda exatamente sobre esse ponto central, ganhará a partida. Basta que ele responda a cada jogada do adversário jogando no ponto simétrico (por exemplo, se o oponente jogar em  $B$ , ele joga em  $B'$ ). Assim, enquanto o segundo jogador puder encontrar um espaço vago para pôr uma nova moeda, o primeiro terá à sua disposição necessariamente um espaço igual e simétrico em relação à moeda central. (23)