

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E SUAS
APLICAÇÕES À MECÂNICA CLÁSSICA**

SANDRO AMORIM DE SOUZA

FLORIANÓPOLIS – SC

2005.

SANDRO AMORIM DE SOUZA

**ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E SUAS
APLICAÇÕES À MECÂNICA CLÁSSICA**

*Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Departamento de
Matemática da Universidade Federal de
Santa Catarina como requisito para a
obtenção do título de Licenciado em
Matemática, orientado pelo Professor
Doutor Eliezer Batista.*

FLORIANÓPOLIS – SC

2005.

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA COMO **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** NO CURSO DE MATEMÁTICA – HABILITAÇÃO E LICENCIATURA, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DESIGNADA PELA PORTARIA NÚMERO 16/CCM/05.

Prof^a Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Eliezer Batista
Orientador

Rubens Starke

Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa

Dedico este Trabalho de Conclusão de Curso à minha irmã Carla T. A. de Souza Guterro, que ainda não teve oportunidade de fazer um curso superior apesar de sua inteligência invejável. Esta conquista também pertence a ela.

AGRADECIMENTOS

A Deus;

A minha Mãe e toda minha família, Pai, Duda, Ângela, Bianca, Luiza, Carla, Beto e Dedé, pelo apoio aos meus estudos e por todo carinho que sempre recebi;

A Deda e Bete, pelo apoio e toda força que me deram aqui em Florianópolis, sem contar o dinheiro que me emprestaram e eu nunca paguei (nem vou pagar);

Um agradecimento muitíssimo especial ao meu orientador, professor Eliezer Batista por todos os ensinamentos, sua compreensão e sua humildade;

Ao professor Rubens Starke, pelos ensinamentos que me levaram a compreensão de todo conteúdo neste trabalho abordado e também por sua dedicação à profissão, esta seriedade servirá de inspiração durante toda minha carreira de educador;

A minha namorada, Fernanda Zanini, pelo carinho e companheirismo;

Aos amigos do curso de Matemática, Dheleon, Ismael e também ao meu compadre Raphael;

Um agradecimento especial ao grande amigo e irmão Thiago Bergler Bitencourt, que me emprestou o computador para que eu digitasse o TCC, me ajudou na formatação e tinha que dormir com a luz acesa enquanto eu digitava;

Aos amigos, João, Piolho, Parceria e Rafael, companheiros de “independência”;

A Dona Lourdes, Cleo e toda a família da minha namorada, por toda a ajuda e carinho;

A Yara e Silvia da secretaria, que sempre estão dispostas a ajudar.

Educai as crianças e não será preciso castigar os homens. (Pitágoras).

SUMÁRIO

RESUMO

OBJETIVOS

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO 1 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

1.1. EQUAÇÕES DE VARIÁVEIS SEPARÁVEIS.....	15
1.2. EQUAÇÕES LINEARES.....	16
1.3. EQUAÇÕES EXATAS.....	19
1.4. EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS.....	21
1.5. OUTROS EXEMPLOS DE EDO'S DE 1ª ORDEM	
1.5.1. EQUAÇÃO DE BERNOULLI.....	23
1.5.2. EQUAÇÃO DE RICCATI.....	24

CAPÍTULO 2 - EQUAÇÕES LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

2.1. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA SOLUÇÃO.....	25
2.2. SOLUÇÃO GERAL DAS EQUAÇÕES LINEARES	
2.2.1. EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS	26
2.2.2. INDEPENDÊNCIA LINEAR ENTRE FUNÇÕES.....	27
2.2.3. COMBINAÇÃO LINEAR.....	28
2.2.4. SOLUÇÃO GERAL DAS EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNIAS.....	28
2.2.5. MÉTODO D' ALAMBERT.....	29
2.2.6. EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES.....	30

CAPÍTULO 3 - ALGUMAS APLICAÇÕES DAS EDO'S DE 1ª ORDEM

3.1. CRESCIMENTO DEMOGRÁFICO.....	34
3.2. DECAIMENTO RADIOATIVO.....	36
3.3. PROBLEMAS DE AQUECIMENTO E ARREFECIMENTO.....	37
3.4. CINÉTICA QUÍMICA.....	38
3.5. TRAJETÓRIAS ORTOGONAIS.....	38
3.6. QUEDA LIVRE.....	40

CAPÍTULO 4 - OSCILADORES HARMÔMICOS	
4.1. OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES.....	44
4.2. OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO.....	51
CAPÍTULO 5 - PÊNDULO SIMPLES.....	57
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	62
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	63

RESUMO

O presente trabalho tem por finalidade estudar as equações diferenciais ordinárias que se aplicam na resolução de alguns problemas de mecânica clássica. Entretanto, para resolvermos tais problemas, precisamos conhecer os métodos de resolução específicos para cada tipo de equação em questão.

Por este motivo, antes da resolução propriamente dita destes problemas, traremos um resumo dos principais métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais. Em seguida, mostraremos outros exemplos de problemas em que há a aplicação de equações diferenciais.

OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL:

Descrever sistemas mecânicos através de suas equações diferenciais ordinárias e encontrar suas soluções.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Citar os principais métodos de resolução das equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem.
- Dar exemplos de aplicações de equações diferenciais em diversas áreas.
- Descrever explicitamente os problemas de movimentos harmônicos simples e amortecidos com suas resoluções completas.
- Descrever explicitamente o problema de pêndulo simples com sua resolução completa.

INTRODUÇÃO

Começaremos nosso estudo definindo e dando alguns exemplos de equações diferenciais ordinárias e parciais, pois são, a base que sustentará todo o desenvolvimento deste trabalho.

Podemos definir equação diferencial como sendo uma igualdade envolvendo uma função e as suas derivadas. Temos dois tipos de equações diferenciais existentes chamadas equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais.

Equações diferenciais ordinárias (EDO'S)

Definição 0.1. Uma equação diferencial ordinária é uma igualdade na qual a função y que aparece nela é uma função de uma variável x . A forma geral da equação é $F(x, y, y', y'', \dots) = 0$. A ordem da equação é a ordem da derivada de mais alta ordem que aparece na equação.

Equações de derivadas parciais (EDP'S)

Definição 0.2. Uma equação diferencial parcial é uma igualdade na qual a função u que nela aparece é uma função de várias variáveis, $u(x, z, t, \dots)$ e a equação relaciona a função u , as variáveis independentes x, z, t, \dots e as derivadas parciais de u ; $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots$.

Definição 0.3. Uma **solução explícita** da equação diferencial ordinária é qualquer função $y(x)$ que verifique a equação num intervalo $a < x < b$. Uma **solução implícita** é uma relação $G(x, y) = 0$ que verifique a equação. As soluções implícitas podem dar origem a várias soluções explícitas.

Veremos agora, alguns exemplos:

Exemplo 0.4. Dadas as funções:

$$y_1(x) = e^{5x} \quad e \quad y_2(x) = e^{-3x} \quad (0.1)$$

Mostre que elas são soluções da equação diferencial abaixo:

$$y'' - 2y' - 15y = 0 \quad (0.2)$$

Resolução:

Por simples substituição da função e as suas derivadas vê-se facilmente que cada uma das funções dada é solução:

$$25e^{5x} - 10e^{5x} - 15e^{5x} = 0$$

$$9e^{-3x} + 6e^{-3x} - 15e^{-3x} = 0$$

Exemplo 0.5. *Demonstre que a relação (0.3) é solução implícita da equação (0.4).*

$$x + y + e^{xy} = 0 \quad (0.3)$$

$$(1 + xe^{xy}) \frac{dy}{dx} + 1 + ye^{xy} = 0 \quad (0.4)$$

Resolução:

$$\frac{d}{dx}(x + y + e^{xy}) = 0 \quad (0.5)$$

$$1 + y' + e^{xy}(xy)' = 0$$

$$1 + y' + (y + xy')e^{xy} = 0$$

$$(1 + xe^{xy}) \frac{dy}{dx} + 1 + ye^{xy} = 0$$

Equações de primeira ordem

As equações diferenciais ordinárias de primeira ordem são da forma $F(x, y, y') = 0$. Geralmente, por meio de simples manipulação algébrica, consegue-se reescrever uma EDO de 1ª ordem na forma de uma ou mais equações¹ do tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (0.6)$$

A equação anterior pode ser também escrita como uma **forma diferencial**:

$$f(x, y)dx - dy = 0 \quad (0.7)$$

Uma equação diferencial de primeira ordem, em geral tem várias soluções. Dado um valor inicial $y(x_0) = y_0$, é possível calcular a derivada y' no ponto x_0 e geralmente é possível encontrar uma curva (curva integral) que passe pelo ponto (x_0, y_0) e com derivada igual a $f(x, y)$ em cada ponto.

Definição 0.6. Definimos um problema de valores iniciais pelas equações:

$$y(x_0) = y_0 \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (0.8)$$

Este problema consiste em encontrar a curva integral, ou seja, uma solução para a equação (0.8), que passe pelo ponto (x_0, y_0) .

Existência e unicidade da solução

As condições suficientes para a existência de uma solução única de um problema de valores iniciais para uma equação diferencial de primeira ordem são definidas pelo teorema de Picard, o qual enunciaremos sem demonstrar.

Teorema 0.7. (Teorema de Picard) *Consideremos o problema de valor inicial:*

¹ Haverá um sistema de equações quando a função y for vetorial, isto é $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$.

$$y(x_0) = y_0 \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (0.9)$$

Se a função f e a derivada parcial de f em relação a y é contínua em uma vizinhança do ponto (x_0, y_0) , existe uma solução única $y = g(x)$ em certa vizinhança do ponto (x_0, y_0) que verifica a condição inicial $g(x_0) = y_0$.

As condições do teorema de Picard são condições suficientes, mas não necessárias para a existência de solução única. Quando f ou a sua derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ não são contínuas, o teorema não nos permite concluir nada. É provável que exista solução única mesmo que as duas condições não se verifiquem.

Capítulo 1

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

1.1. Equações de variáveis separáveis

Definição 1.1. Podemos definir uma equação de variáveis separáveis como sendo uma equação de 1ª ordem com a seguinte forma.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad (1.1)$$

Para resolver este tipo de equação primeiro observemos que a equação (1.1) pode ser escrita como:

$$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x) \quad (1.2)$$

Calculando-se a primitiva em relação a x de ambos os lados da igualdade temos:

$$\int g(y) \frac{dy}{dx} dx = \int g(y) dy = \int f(x) dx + c \quad (1.3)$$

Notemos que equações do tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \quad (1.4)$$

Onde a e b são constantes, não são equações de variáveis separáveis, mas podem ser reduzidas a elas por meio da seguinte substituição:

$$v = ax + by + c \Rightarrow \frac{dv}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} \quad (1.5)$$

Substituindo em (1.4) temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \left(\frac{dv}{dx} - a \right) = f(v) \Rightarrow \frac{dv}{dx} = bf(v) + a = g(v) \quad (1.6)$$

1.2. Equações lineares

Definição 1.2. Uma equação diferencial ordinária é dita linear quando tanto a função quanto suas derivadas aparecem apenas na forma:

$$P_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_0 y = f(x) \quad (1.7)$$

Em particular, EDO'S lineares de 1ª ordem são da forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad (1.8)$$

Para resolvermos este tipo de equação, podemos tentar transformá-la a fim de obtermos uma forma mais simples. No caso particular em que a função p é uma constante a , o lado esquerdo é semelhante à seguinte derivada:

$$\frac{dy}{dx} (ye^{ax}) = e^{ax} (y' + ay) \quad (1.9)$$

Podemos multiplicar os dois lados da equação diferencial por e^{ax} e obteremos:

$$\frac{dy}{dx} (ye^{ax}) = e^{ax} f(x) \quad (1.10)$$

O que, ao integrarmos em relação a x nos dá:

$$ye^{ax} = \int e^{ax} f(x) dx + c \quad (1.11)$$

No caso igual, em que p depende de x , devemos encontrar uma função $\mu(x)$ de forma que:

$$\mu(x)(y' + p(x)y) = \frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)y' + \mu'(x)y \quad (1.12)$$

Assim:

$$\mu' = p(x)\mu$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = p(x) \Rightarrow \int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dx = \int p(x) dx \Rightarrow \ln \mu(x) = \int p(x) dx + c$$

$$\mu = e^{\left(\int p(x) dx + c\right)} = e^c e^{\int p(x) dx} = Ae^{\int p(x) dx}$$

Esta função μ é denominada fator integrante da equação (1.8).

Após multiplicarmos os dois lados da equação diferencial por μ obtém-se:

$$\frac{d}{dx}(y\mu(x)) = \mu(x)f(x) \quad (1.13)$$

$$y\mu(x) = \int \mu(x)f(x) dx + c$$

Note que a constante arbitrária A que aparece em $\mu(x)$ pode ser cancelada, pois ocorre em ambos os membros da igualdade. Então por simplicidade podemos tomar o fator integrante como:

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

Podemos resumir a discussão no seguinte Teorema:

Teorema 1.3. *A solução geral de uma (EDO) linear de 1ª ordem da forma*

$$y' + p(x)y = f(x)$$

é:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} f(x)dx + c \right]$$

Exemplo 1.4. *Encontre a solução da equação diferencial:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y^3 - 2x} \quad y(2) = 1$$

A equação não é de variáveis separáveis, também não é linear, mas se invertermos a equação, isto é, considerarmos que x é função da variável y e utilizamos a fórmula para a derivada da função inversa, verificaremos que:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^3 - 2x}{y} \tag{1.14}$$

É uma equação linear, que escrita na forma padrão fica:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2}{y}x = y^2 \tag{1.15}$$

Cujo fator integrante é:

$$\mu = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2 \ln y} = e^{\ln y^2} = y^2 \tag{1.16}$$

Ao multiplicarmos os dois lados da equação por μ obtemos:

$$\frac{d}{dy}(y^2 x) = y^4 \quad (1.17)$$

Portanto:

$$y^2 x = \frac{y^5}{5} + c \quad (1.18)$$

Para calcular o valor da constante de integração, substituímos a condição inicial:

$$2 = \frac{1}{5} + c \Rightarrow c = \frac{9}{5} \quad (1.19)$$

Logo, a solução (em forma implícita) é:

$$5y^2 x = y^5 + 9 \quad (1.20)$$

1.3. Equações exatas

Qualquer EDO de primeira ordem pode ser escrita em forma diferencial:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (1.21)$$

Esta forma é semelhante à expressão da diferencial de uma função de duas variáveis:

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \quad (1.22)$$

Esta equação nos sugere admitir que exista uma função $F(x,y)$ cujas derivadas parciais são iguais a $M(x,y)$ e $N(x,y)$; no entanto a segunda derivada parcial de F seria:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (1.23)$$

Assim, para que a conjectura da existência da função $F(x,y)$ seja consistente, é necessário que as funções M e N verifiquem a seguinte condição:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (1.24)$$

Observando-se (1.24) e algumas restrições sobre o domínio da função (x,y) a (M,N) podemos dizer que a equação é **exata** e pode ser escrita como:

$$dF(x,y) = 0 \quad (1.25)$$

Tendo como sua solução geral:

$$F(x,y) = c \quad (1.26)$$

A função F calcula-se encontrando a função $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais sejam iguais a M e N .

Exemplo 1.5. *Resolva a seguinte equação*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9x^2 + y - 1}{4y - x} \quad (1.27)$$

A equação pode ser escrita com a seguinte forma diferencial:

$$(4y - x)dy - (9x^2 + y - 1)dx = 0 \quad (1.28)$$

E verifica-se facilmente que é uma equação exata, pois

$$\frac{\partial}{\partial x}(4y - x) = -1 = \frac{\partial}{\partial y}(-9x^2 - y + 1) \quad (1.29)$$

e as funções M e N não tem restrições de domínio.

Existe uma função $F(x,y)$ tal que:

$$\frac{dF}{dy} = 4y - x \Rightarrow F = 2y^2 - xy + f(x) \quad (1.30)$$

$$\frac{dF}{dx} = -9x^2 - y + 1 \Rightarrow F = -3x^3 - xy + x + g(y) \quad (1.31)$$

Comparando os dois resultados para F vemos que:

$$f(x) = x - 3x^3 \quad (1.32)$$

$$g(y) = 2y^2 \quad (1.33)$$

E a função $F(x,y)$ é:

$$F(x,y) = 2y^2 - 3x^3 - xy + x \quad (1.34)$$

A solução geral da equação diferencial é F igual a uma constante c .

$$2y^2 - 3x^3 - xy + x = c \quad (1.35)$$

1.4. Equações homogêneas

Definição 1.6. Uma equação de primeira ordem diz-se homogênea se tiver a seguinte forma geral:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.36)$$

Para resolver este tipo de equação usa-se a substituição:

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad (1.37)$$

Esta torna a equação uma equação de variáveis separáveis. Para reconhecer facilmente se uma função racional é da forma $f\left(\frac{y}{x}\right)$ observam-se os expoentes de cada termo no numerador e denominador (soma do expoente de x mais o expoente de y) os quais deverão ser iguais. Por exemplo, das duas funções seguintes a primeira tem a forma $f\left(\frac{y}{x}\right)$, mas a segunda não:

$$\frac{xy^2 - x^3}{yx^2}; \frac{xy + y}{2 + x} \quad (1.38)$$

Existem outras equações que podem ser reduzidas a equações homogêneas. Um exemplo típico é a equação:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{px + qy + r}\right) \quad (1.39)$$

Onde a , b , c , p , q e r são constantes dadas. Se as constantes c e r fossem nulas, a equação seria homogênea; definimos um novo sistema de coordenadas (u, v) para substituir (x, y) , de forma a obter:

$$ax + by + c = au + bv \quad (1.40)$$

$$px + qy + r = pu + qv \quad (1.41)$$

Também de forma equivalente:

$$a(x - u) + b(y - v) = -c \quad (1.42)$$

$$p(x - u) + q(y - v) = -r \quad (1.43)$$

A solução deste sistema de equações lineares pode ser obtido por meio da regra de Cramer:

$$x - u = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -r & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}}; y - v = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ p & -r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}} \quad (1.44)$$

Note que esta solução só é possível quando:

$$aq - bp \neq 0$$

Como os lados direitos das equações (1.42) e (1.43) são constantes, também temos que $dx = du$, $dy = dv$ e a equação diferencial converte-se em uma equação homogênea:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{pu + qv}\right) \quad (1.45)$$

1.5. Outros exemplos de EDO'S de 1ª ordem

1.5.1. Equação de Bernoulli

Um tipo de equação diferencial que pode ser reduzida a equação linear, é a chamada **equação de Bernoulli**, definida como:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y^n = f(x)y \quad (1.46)$$

Onde n é um número racional, diferente de 0 e de 1. A substituição abaixo transforma a equação de Bernoulli numa equação linear.

$$v = y^{1-n} \Rightarrow v' = (1-n)y^{-n}y' \quad (1.47)$$

$$y' = \frac{1}{1-n}y^n v'$$

e portanto

$$\frac{1}{1-n} y^n v' + p(x)y^n = f(x)y$$

Dividindo por $\frac{y^n}{1-n}$ temos:

$$v' + (1-n)p(x)v = (1-n)f(x)y^{1-n}$$

O que resulta em

$$v' + (1-n)f(x)v = (1-n)p(x)$$

que é uma EDO de 1ª ordem.

1.5.2. Equação de Riccati

Outro exemplo de equação que pode ser reduzida a uma equação linear, é a equação de Riccati:

$$\frac{dy}{dx} = a(x) + b(x)y + c(x)y^2 \quad (1.48)$$

Onde $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ são três funções que dependem de x . Se conhecermos uma solução particular da equação, por exemplo, y_1 , a seguinte mudança de variável transformará a equação em equação linear:

$$y = y_1 + \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{v^2} \frac{dv}{dx} \quad (1.49)$$

Capítulo 2

EQUAÇÕES LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

2.1. Existência e unicidade da solução

Teorema 2.1. *Se as funções $p(x)$, $q(x)$ e $f(x)$ são contínuas num intervalo (a,b) , existe uma única solução da equação linear:*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (2.1)$$

No intervalo (a,b) , que verifica as condições iniciais:

$$y(c) = A \quad y'(c) = B \quad (2.2)$$

Para quaisquer números A , B e c (c dentro do intervalo (a,b)).

Em contraste com o teorema de Picard para equações de primeira ordem, o intervalo onde se verificam as condições de existência e unicidade é exatamente o mesmo intervalo onde a solução é válida; portanto, neste caso as condições do teorema de existência e unicidade são condições suficientes e necessárias.

No caso geral de ordem n

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$$

as condições iniciais serão o valor da função e das primeiras $n-1$ derivadas num ponto c , e as condições de existência e unicidade serão a continuidade das $n+1$ funções que aparecem na forma padrão da equação.

2.2. Solução geral das equações lineares

Dadas duas soluções particulares da equação linear, a diferença entre elas é solução da equação homogênea associada:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2.3)$$

De maneira recíproca, qualquer soma de uma solução da equação linear mais uma solução da equação homogênea associada, é também solução da equação linear. Assim a solução geral pode ser obtida a partir de uma única solução particular, y_p , da equação mais a solução geral da equação homogênea associada, y_h

$$y_g = y_p + y_h \quad (2.4)$$

Para resolvermos uma equação linear, começamos por resolver a equação linear homogênea associada e depois encontramos uma solução particular y_p .

2.2.1. Equações lineares homogêneas

A forma geral da equação linear homogênea de segunda ordem é:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2.5)$$

Proposição 2.2. Dadas duas soluções particulares y_1 e y_2 , qualquer combinação linear das duas soluções:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad (2.6)$$

É também solução (não será demonstrado). Consequentemente as soluções da equação formam um espaço vetorial. Para determinar a solução geral bastará determinar uma **base** do espaço vetorial, ou seja, um conjunto com o número máximo possível de soluções particulares

linearmente independentes. Primeiramente, veremos como determinar se duas soluções são linearmente independentes.

2.2.2. Independência linear entre funções

Diz-se que duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são linearmente dependentes se existem duas constantes C_1 e C_2 (pelo menos uma delas diferente de zero) tal que:

$$C_1 f + C_2 g = 0 \quad (2.7)$$

Para qualquer valor de x . A derivada da expressão anterior é:

$$C_1 f' + C_2 g' = 0 \quad (2.8)$$

Para cada valor de x , as duas últimas equações são um sistema linear. O determinante do sistema é

$$W[f, g] = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

e denomina-se **Wronskiano** (representado por W) das funções f e g . Se o Wronskiano for diferente de zero em um intervalo, as duas constantes serão nulas e, portanto, as funções linearmente independentes no intervalo. Existem também, casos em que as funções são linearmente independentes e o Wronskiano é nulo em alguns pontos isolados, mas esses casos não aparecerão em nosso estudo.

2.2.3. Combinação Linear

Proposição 2.3. *Seja a equação $f(t)x'' + g(t)x' + h(t)x = 0$ e x_1 e x_2 soluções, então $y = \alpha x_1 + \beta x_2$ também é solução, para quaisquer $\alpha, \beta \in R$.*

Demonstração 2.4.

$$f(t)y'' + g(t)y' + h(t)y = f(t)(\alpha x_1'' + \beta x_2'') + g(t)(\alpha x_1' + \beta x_2') + h(t)(\alpha x_1 + \beta x_2) \Rightarrow$$

$$f(t)(\alpha x_1'') + f(t)(\beta x_2'') + g(t)(\alpha x_1') + g(t)(\beta x_2') + h(t)(\alpha x_1) + h(t)(\beta x_2) \Rightarrow$$

$$\alpha(f(t)x_1'' + g(t)x_1' + h(t)x_1) + \beta(f(t)x_2'' + g(t)x_2' + h(t)x_2) = 0$$

2.2.4. Solução geral das equações lineares homogêneas

Teorema 2.5. *Se y_1 e y_2 são duas soluções particulares da equação linear homogênea:*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2.10)$$

Em um intervalo (a,b) , e se num ponto x_0 dentro do intervalo o Wronskiano das duas soluções é diferente de zero, então o Wronskiano será diferente de zero em qualquer outro ponto no intervalo (a,b) e as soluções serão linearmente independentes no intervalo.

Uma combinação linear das duas soluções é também solução; as condições iniciais para essa solução serão:

$$C_1 y_1(c) + C_2 y_2(c) = A \quad (2.11)$$

$$C_1 y_1'(c) + C_2 y_2'(c) = B \quad (2.12)$$

Para quaisquer valores iniciais A e B existe sempre solução única C_1 e C_2 , já que o determinante deste sistema linear é exatamente o Wronskiano das duas soluções, o qual é diferente de zero. Qualquer solução particular pode ser obtida a partir de uma combinação linear das duas soluções:

$$y_g = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (2.13)$$

Sendo esta, a solução geral.

2.2.5. Método de d'Alambert

O método de d'Alambert permite transformar uma equação diferencial linear de ordem n numa outra equação linear de ordem $n-1$, a partir de uma solução particular conhecida. No caso das equações lineares homogêneas de segunda ordem, este método permite calcular a solução geral a partir de uma solução particular. Se y_1 é solução particular da equação linear homogênea:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2.14)$$

Fazendo a substituição:

$$y = v y_1 \quad (2.15)$$

Então teremos:

$$y' = v' y_1 + v y_1'$$

$$y'' = v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1''$$

Substituindo em (2.14):

$$v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1'' + p(x)v' y_1 + p(x)v y_1' + q(x)v y_1 = 0 \Rightarrow$$

$$v'' y_1 + 2v' y_1' + p(x)v' y_1 + v(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) = 0 \Rightarrow$$

$$v'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{2y_1'}{y_1} v' - p(x)v' \quad (2.16)$$

Considerando como variável independente a função v' , esta é uma equação linear de primeira ordem. A primitiva de v' dá a função v , que multiplicada por y_1 conduz à solução geral da equação (2.14).

Exemplo 2.6. Sabendo que y_1 é solução da equação diferencial dada, encontre a solução geral:

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad y_1(x) = x \quad (2.17)$$

A solução geral encontra-se usando o método de d'Alambert:

$$y = vy_1 \quad (2.18)$$

$$(x^2 + 1)(vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1) - 2x(vy_1' + v'y_1) + 2vy_1 = 0$$

$$(x^2 + 1)(2v'y_1' + v''y_1) - 2xv'y_1 = 0$$

$$x(x^2 + 1)v'' + 2v' = 0$$

Esta última equação pode ser considerada uma equação de primeira ordem em que a variável dependente é v' . Separando as variáveis e integrando obtém-se:

$$\int \frac{dv'}{v'} = -2 \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)} + c$$

$$v = C_1 \left(x - \frac{1}{x} \right) + C_2$$

$$y = C_1 (x - 1) + C_2 x$$

2.2.6. Equações lineares homogêneas de coeficientes constantes

Seja a equação:

$$y'' + by' + cy = 0 \quad (2.19)$$

Onde b e c são duas constantes, é uma equação linear homogênea de coeficientes constantes. A solução deste tipo de equação será uma função que seja linearmente dependente das suas primeira e segunda derivadas, já que a equação (2.19) com b e c não nulos indica que as três funções são linearmente dependentes. Uma função cuja derivada não é linearmente independente de si é a função exponencial. Consequentemente esperamos que exista alguma solução particular da forma:

$$y = e^{rx} \quad (2.20)$$

Onde r é uma constante. Para que essa função seja solução será preciso que:

$$y'' + by' + cy = r^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \quad (2.21)$$

Como a exponencial nunca é igual a zero:

$$r^2 + br + c = 0 \quad (2.22)$$

Este polinômio se denomina **polinômio característico**. As duas raízes podem ser reais ou complexas e teremos 3 casos:

1º Caso - Raízes reais diferentes

Por cada uma das duas raízes obtemos uma solução particular. O Wronskiano das duas soluções correspondentes é não-nulo (omitiremos a demonstração) e portanto a solução geral será:

$$y_g = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad (2.23)$$

2º Caso - Raízes reais iguais

Se os coeficientes do polinômio característico verificarem a relação:

$$b^2 - 4c = 0 \quad (2.24)$$

Existe uma única raiz real $r = \frac{-b}{2}$. A única solução exponencial é:

$$y_1 = e^{rx} \quad (2.25)$$

Multiplicada por qualquer constante arbitrária. Para encontrar a solução geral usa-se o método de d'Alembert :

$$y = vy_1 \quad v'' = (-2r - b) v' \quad (2.26)$$

Como a raiz da equação característica é $r = \frac{-b}{2}$, obtemos uma equação simples que permite calcular v' :

$$v'' = 0 \implies v = C_1 + C_2 x \quad (2.27)$$

A solução geral é:

$$y_g = (C_1 + C_2 x)e^{rx} \quad (2.28)$$

3º Caso - Raízes complexas

Neste caso as raízes são $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$ (raízes conjugadas) e as soluções da equação são da forma:

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^\alpha e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x))$$

$$y_2 = e^{r_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^\alpha e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) - i \operatorname{sen}(\beta x))$$

Onde utilizamos a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ para $\theta \in \mathbb{R}$. Esta fórmula pode ser verificada considerando-se as expansões em séries de Taylor das funções exponencial, seno e cosseno.

Como qualquer combinação linear de y_1 e y_2 também é solução, temos que

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x) = \frac{i}{2}(y_1 + y_2) \quad \text{e} \quad e^{\alpha x} \text{sen}(\beta x) = -\frac{i}{2}(y_1 - y_2)$$

também são soluções, portanto a solução geral será

$$y(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \text{sen}(\beta x))$$

$r = a + ib$ (a e b reais) e a outra é o complexo conjugado. A solução obtida é uma função complexa.

Porém, se tivermos y como solução, as suas partes real e imaginária também o são. Temos assim duas soluções reais (parte real e imaginária de z) que são linearmente independentes e a solução geral será:

$$y_g = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \text{sen}(\beta x) \quad (2.29)$$

Capítulo 3

ALGUMAS APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

3.1. Crescimento demográfico

A taxa de aumento de uma população é a soma das taxas de natalidade (n) e migração (g), menos a taxa de mortalidade (m):

$$a = n + g - m \quad (3.1)$$

O aumento da população num instante dado é igual ao produto da população nesse instante, vezes a taxa de aumento da população. Se a população no instante t for representada pela função $P(t)$, o aumento da população será também igual à derivada de P :

$$\frac{dP}{dt} = aP \quad (3.2)$$

Para poder resolver esta equação é preciso conhecer qual é a dependência de a com o tempo. Veremos dois casos simples:

1º caso: (Modelo de Malthus)

Se a taxa de aumento da população a for constante, a equação diferencial anterior será uma equação de variáveis separáveis:

$$\int \frac{dP}{P} = \int a dt + C \quad (3.3)$$

$$P = P_0 e^{at}$$

Onde P_0 é a população em $t = 0$. Este modelo pode ser uma boa aproximação em um certo intervalo, mas tem o inconveniente que a população cresce sem limite.

2º caso: (Modelo logístico)

Considera-se uma taxa de mortalidade que aumenta de uma forma diretamente proporcional à população, com taxas de natalidade e migração constantes. A taxa de aumento da população é dada por:

$$b - kP \quad (3.4)$$

Com b e k constantes. A equação diferencial obtida é uma equação de **Bernoulli**:

$$\frac{dP}{dt} = bP - kP^2 \quad (3.5)$$

Neste modelo a população não cresce indiscriminadamente, pois a medida que P aumenta, a taxa de aumento diminui chegando eventualmente a ser nula e nesse momento P permanece constante. Por meio da substituição $u = \frac{1}{P}$ obtém-se uma equação linear

$$\frac{du}{dt} = -bu + k \quad (3.6)$$

Que pode ser resolvida multiplicando os dois lados pelo fator integrante e^{bt} :

$$\frac{d}{dx}(ue^{bt}) = k \int e^{bt} dt + C \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{P} = \frac{k}{b} + Ce^{-bt}$$

Para um intervalo de tempo arbitrariamente grande, a população tende ao valor de

$$\frac{b}{k}.$$

3.2. Decaimento radioativo

Numa substância radioativa, cada átomo tem certa probabilidade por unidade de tempo de se transformar num átomo mais leve emitindo radiação nuclear no processo. Se p representa essa probabilidade, o número médio de átomos que se transmutam, por unidade de tempo, é pN , em que N é o número de átomos existentes em cada instante. O número de átomos transmutados por unidade de tempo é também igual a menos a derivada temporal da função N :

$$\frac{dN}{dt} = -pN \quad (3.8)$$

A massa dos correspondentes átomos, que denotaremos por x , é diretamente proporcional a N e assim obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = -px \quad (3.9)$$

Onde p é uma constante, designada de **constante de decaimento**. A solução geral desta equação é uma função que diminui exponencialmente para zero:

$$x = C e^{-pt} \quad (3.10)$$

E a solução única para a condição inicial $x = x_0$ no instante inicial é:

$$x = x_0 e^{-pt} \quad (3.11)$$

Decaimento exponencial de uma substância radioativa com constante de decaimento p .

A **meia-vida** da substância define-se como o tempo necessário para a massa diminuir até 50% do valor inicial; a partir da solução obtida temos:

$$0,5 = e^{-pt} \quad t = \frac{\ln 2}{p} \quad (3.12)$$

Quanto maior for a constante de decaimento p , mais rápido diminuirá a massa da substância.

Uma substância radioativa presente em todos os organismos vivos é o carbono 14 que decai transformando-se em azoto², com uma meia-vida de aproximadamente **5580** anos. O conteúdo de C_{14} em relação ao C_{12} de qualquer organismo vivo é o mesmo. A razão é a seguinte: no fim da cadeia alimentar dos seres vivos estão os organismos que absorvem o carbono diretamente da atmosfera e, portanto, a relação $\frac{C_{14}}{C_{12}}$ nos seres vivos é a mesma que na atmosfera. Com a

morte dos organismos, entretanto o processo de decomposição faz com que a quantidade de C_{14} diminua. Uma comparação do conteúdo de carbono 14 de um organismo morto, por exemplo, madeira obtida de uma árvore, com o conteúdo existente num organismo vivo da mesma espécie, permite determinar a data da *morte* do organismo, com uma boa precisão, visto a ordem de grandeza do tempo de meia-vida do carbono 14.

3.3. Problemas de aquecimento e arrefecimento

Outra aplicação das equações diferenciais de primeira ordem são os problemas de aquecimento e arrefecimento. Entre dois corpos em contato existe transferência de calor por condução, do corpo mais quente para o mais frio. Se a temperatura do objeto em qualquer instante é $T(t)$ e a temperatura do meio ambiente é $M(t)$, o aumento da temperatura do objeto em qualquer instante será diretamente proporcional à diferença de temperatura com o meio ambiente:

$$\frac{dT}{dt} = k(M - T) \quad (3.13)$$

² Átomo de Nitrogênio (N) que é formado pelo decaimento radioativo do carbono 14.

Onde k é uma constante de condução térmica. Esta equação é uma equação linear que pode ser facilmente resolvida se for conhecida a temperatura do meio $M(t)$. O caso mais simples é quando a temperatura do meio ambiente é constante; nesse caso a equação é de variáveis separáveis:

$$\int \frac{dT}{M-T} = \int k dt + C \Rightarrow T = M + (T_0 - M)e^{-kt} \quad (3.14)$$

Onde T_0 é a temperatura inicial. A temperatura do objeto aproxima-se assintoticamente à temperatura do meio.

3.4. Cinética química

Consideremos uma reação química de primeira ordem na qual um composto A reage dando origem a outros dois compostos B e C:



Cada molécula do composto A tem uma determinada probabilidade de reagir por unidade de tempo. Assim, o número de moléculas que reagem por unidade de tempo é diretamente proporcional ao número de moléculas existentes, e a velocidade da reação é diretamente proporcional à concentração $[A]$ do composto A (admitindo um volume constante). A medida que o composto reage, a sua concentração diminui e a velocidade de reação também; em qualquer instante a taxa de diminuição de $[A]$ é diretamente proporcional a $[A]$.

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A] \quad (3.16)$$

Este tipo de reação designa-se de reação de **primeira ordem**.

3.5. Trajetórias ortogonais

Uma equação da forma:

$$f(x,y) = c \quad (3.17)$$

Onde c é um parâmetro que define uma família de curvas. As trajetórias ortogonais são outra família de curvas que intersectam a primeira família em forma ortogonal: em cada ponto de uma das curvas da primeira família passa uma curva da segunda família, formando um ângulo de 90° .

Para encontrar a família de trajetórias ortogonais às curvas $f(x,y) = c$, começamos por encontrar uma equação diferencial cuja solução geral seja $f(x,y) = c$; essa equação encontra-se derivando implicitamente a equação anterior:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad (3.18)$$

A derivada $\frac{dy}{dx}$ representa em cada ponto a inclinação curva que passa por esse ponto. A inclinação da curva ortogonal será o inverso do oposto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \quad (3.19)$$

A solução geral desta equação é a família de trajetórias ortogonais.

Exemplo 3.1. *Encontre as trajetórias ortogonais da família de círculos com centro na origem.*

A equação dos círculos com centro na origem é:

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (3.20)$$

Onde o parâmetro c pode ter qualquer valor positivo. A equação diferencial cuja solução geral é essa família de círculos obtém-se por derivação implícita:

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (3.21)$$

E a equação diferencial das trajetórias ortogonais é:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (3.22)$$

A solução desta equação de variáveis separáveis é:

$$y = ax \quad (3.23)$$

Que corresponde a uma família de retas que passam pela origem; a constante de integração é a inclinação das retas.

3.6. Queda Livre

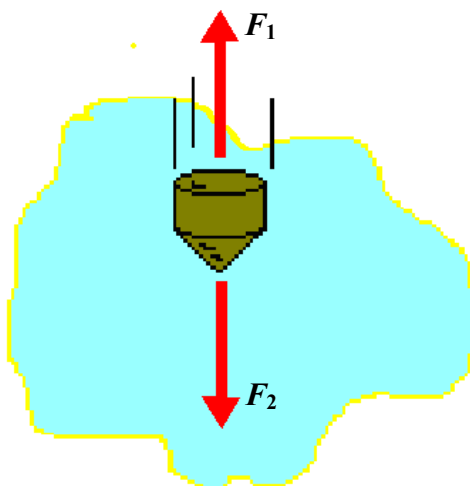


FIGURA 3.1. Representação esquemática de um objeto em queda livre

O problema consiste em estudar o movimento de um objeto em queda livre com aceleração g e sujeito a uma força de atrito devido à resistência do ar. Sendo F_1 a resistência do ar, verifica-se empiricamente que esta é proporcional a velocidade. Temos então:

$$F_1 = -cv \quad (3.24)$$

Onde c é uma constante relacionada com o atrito e o sinal negativo se dá devido ao fato da força ser dirigida no sentido contrário ao movimento. A F_2 devido à gravidade é dada por:

$$F_2 = mg \quad (3.25)$$

Onde g é a aceleração da gravidade e m é a massa do objeto.

Chamaremos de F_r a força resultante sobre o objeto em questão, esta força é dada por:

$$F_r = mg - cv \quad (3.26)$$

Sabemos também que

$$F = ma \quad (3.27)$$

onde a é a aceleração, $a = v'$, portanto

$$F = mv' \quad (3.28)$$

Das equações (3.26) e (3.28) temos:

$$mv' = mg - cv \Rightarrow$$

$$mv' + cv = mg \quad (3.29)$$

ou ainda:

$$v' + \frac{c}{m}v = g$$

No capítulo 1, vimos o método de solução de EDO'S lineares de primeira ordem deste tipo, vimos que o fator integrante deste tipo de equação é dado por:

$$\mu = e^{\frac{c}{m}t}$$

Agora:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mu v) &= \mu g \Rightarrow \\ e^{\frac{c}{m}t} v &= \int e^{\frac{c}{m}t} g dt + k \Rightarrow\end{aligned}$$

$$e^{\frac{c}{m}t} v = \frac{gm}{c} e^{\frac{c}{m}t} + k \Rightarrow$$

E enfim, chegamos à solução geral:

$$v = g \frac{m}{c} + k e^{-\frac{c}{m}t} \quad (3.30)$$

A constante k é determinada através de condições iniciais. Suponha, por exemplo, que $v(0) = 0$, então temos:

$$0 = \frac{gm}{c} + k \Rightarrow k = -\frac{gm}{c}$$

Assim, a solução ficaria:

$$v(t) = \frac{gm}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right)$$

Note que, se expandirmos $e^{\frac{c}{m}t}$ em séries teremos:

$$v(t) = \frac{gm}{c} - \frac{gm}{c} + \frac{gm}{c} \frac{c}{m} t - \frac{gm}{c} \frac{c^2}{2m^2} t^2 + \dots = gt - \frac{g}{2m} ct^2 + \dots$$

Quando a resistência do ar é desprezível ($c = 0$), temos a expressão clássica para a velocidade em queda livre.

$$v(t) = gt$$

Também podemos ver o que ocorre com a velocidade a tempos muito grandes, chamada velocidade limite, definida da seguinte forma:

$$v_l = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{gm}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right) = \frac{gm}{c}$$

Note que para massas muito pequenas, (uma formiguinha, por exemplo) ou para uma resistência de ar muito grande, (um pára-quadras, por exemplo), a velocidade limite é consideravelmente pequena.

Capítulo 4

OSCILADORES HARMÔNICOS

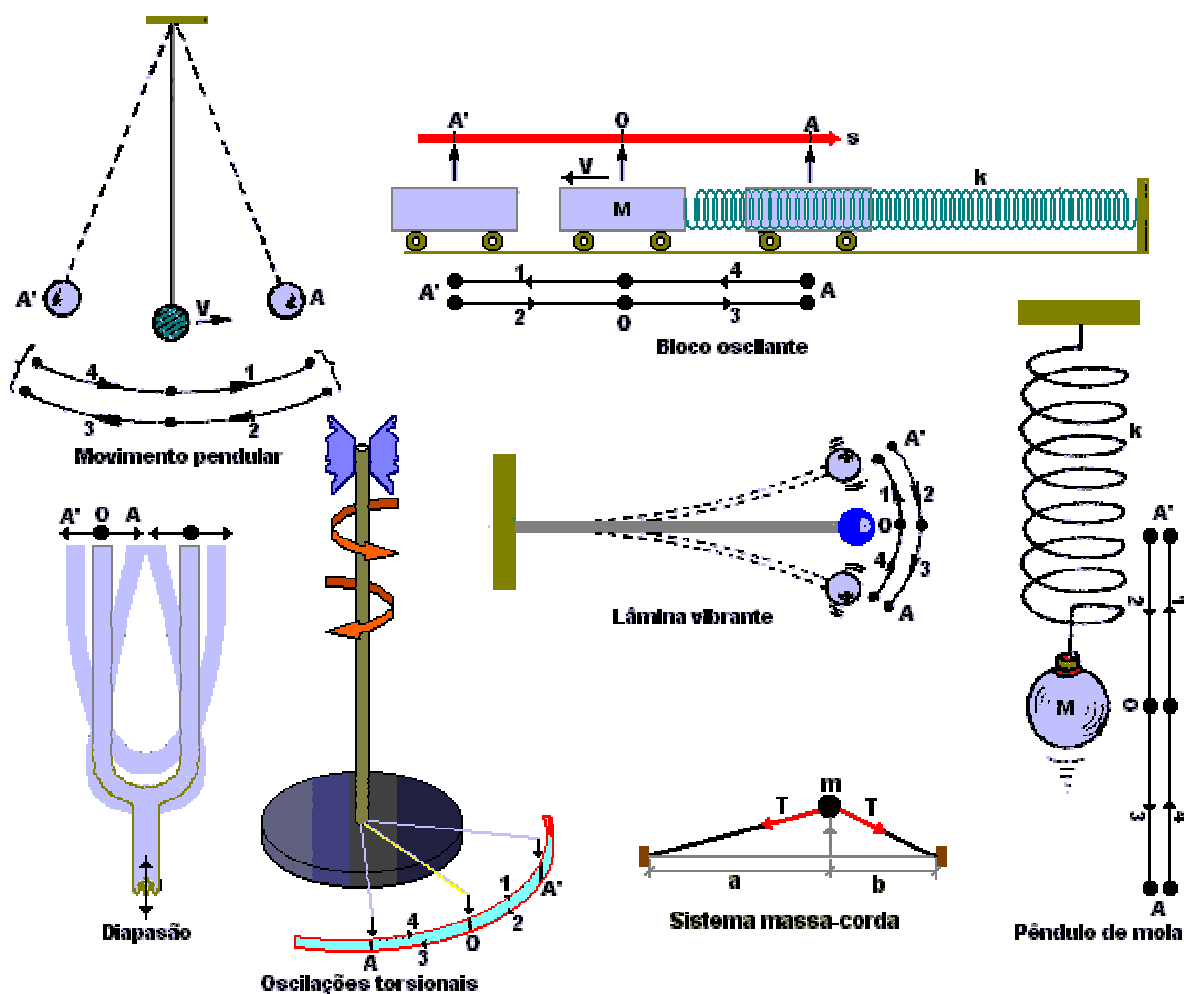


FIGURA 4.1. Exemplos de Osciladores Harmônicos

4.1. OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

Estes são alguns exemplos de osciladores harmônicos. Primeiro trataremos do caso em que não há amortecimento no sistema. Neste caso, a força é dada unicamente pela restauração da mola, que pela lei de Hooke se escreve da forma:

$$F = -kx \quad (4.0)$$

Onde k é uma constante relacionada com a mola, o sinal negativo indica que esta força é sempre aplicada no sentido contrário ao deslocamento da mola.

Pela 2ª lei de Newton temos:

$$F = ma \Rightarrow$$

$$F = mx'' \quad (4.1)$$

De (4.0) e (4.1):

$$mx'' = -kx \Rightarrow mx'' + kx = 0$$

Multiplicando os dois lados da igualdade por x' , temos:

$$mx''x' + kxx' = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mx'^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = 0 \quad (4.2)$$

constante E

Agora, seguiremos considerando a constante E . Note que esta constante é constituída de dois termos, o primeiro, $T = \frac{mx'^2}{2}$, é denominado Energia Cinética e o segundo, $V = \frac{kx^2}{2}$, é denominado Energia Potencial Elástica. A constante E é a Energia Total. Como ela é conservada, isto é, $E' = 0$, dizemos que o sistema massa-mola é conservativo.

$$E = \frac{mx'^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \Rightarrow E - \frac{kx^2}{2} = \frac{mx'^2}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{2E}{m} - \frac{kx^2}{m} = x'^2 \Rightarrow x' = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{kx^2}{m}} \Rightarrow$$

$$\frac{x'}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{kx^2}{m}}} = 1$$

Integramos dos dois lados e considerando $t_0 = 0$

$$\int_0^t \frac{x'}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{kx^2}{m}}} dt = \int_0^t 1 dt = t \Rightarrow$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{kx^2}{m}}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{kx^2}{2E}}} = t$$

substituindo

$$\sqrt{\frac{k}{2E}}x = \text{sen}\theta \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{2E}}dx = \text{cos}\theta d\theta$$

teremos:

$$\sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{\theta(x_0)}^{\theta(x)} \sqrt{\frac{2E}{k}} \frac{\text{cos}\theta d\theta}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\theta}} = t \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\text{arcsen}\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x_0\right)}^{\text{arcsen}\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right)} \frac{\text{cos}\theta}{\text{cos}\theta} d\theta = t \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{m}{k}} (\theta) \Big|_{\theta(x_0)}^{\theta(x)} = t \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\arcsen \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x \right) - \arcsen \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x_0 \right) \right) = t \Rightarrow$$

$$\arcsen \sqrt{\frac{k}{2E}} x - \theta_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} t \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{k}{2E}} x = \text{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta_0 \right) \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \text{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta_0 \right)$$

Fazendo a seguinte substituição:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{velocidade angular})$$

Chegamos a solução geral:

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \text{sen}(\omega t + \theta_0) \quad (4.3)$$

Veja por exemplo os gráficos para $\sqrt{\frac{2E}{k}} = 0,8$, $\omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ e $\theta_0 = 0$.

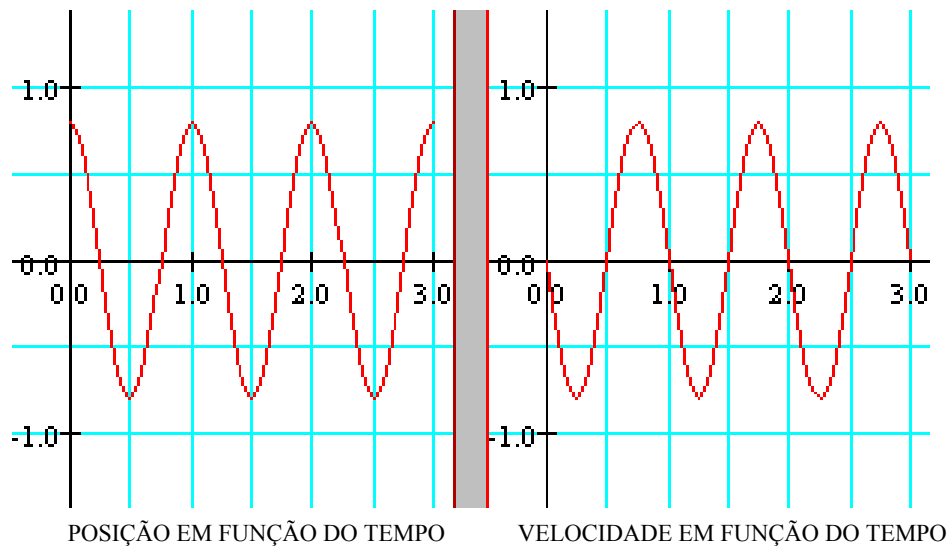


FIGURA 4.2. Representação gráfica do movimento harmônico simples

Podemos também ver a resolução da equação linear de 2ª ordem

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (4.4)$$

pelos métodos já estudados no capítulo 2.

O polinômio associado à equação (4.4) considerando-se uma solução $x = e^{\lambda t}$ é:

$$m\lambda^2 + k = 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$$

Assim, a solução geral será do tipo

$$x(t) = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}$$

Ou então, utilizando combinações lineares e relembrando a fórmula de Euler

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t,$$

Podemos ainda escrever a solução geral como

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (4.5)$$

Comparando com a solução obtida em (4.3) temos

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega t + \theta_0) \Rightarrow$$
$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \theta_0 \sin \omega t + \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \theta_0 \cos \omega t \quad (4.6)$$

As constantes A e B de (4.5) podem ser comparadas com (4.6) como

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \theta_0$$

$$B = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \theta_0$$

Note que

$$A^2 + B^2 = \frac{2E}{k}$$

Nos dois casos, temos duas constantes arbitrárias a serem fixadas. No primeiro caso, as constantes E e θ_0 , no segundo caso, as constantes A e B . Estas são fixadas dando-se duas condições iniciais.

$$x(t_0) = x_0 \quad x'(t_0) = v_0$$

Por exemplo, tomando-se $x(0) = 0$ e $x'(0) = v_0$ temos

$$0 = x(0) = A \cos \omega 0 + B \sin \omega 0 = A \Rightarrow$$

$$A = 0$$

considerando-se a velocidade

$$x'(t) = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$$

e tomando $x'(0) = v_0$

$$v_0 = x'(0) = -\omega A \sin \omega 0 + \omega B \cos \omega 0 = \omega B \Rightarrow$$

$$B = \frac{v_0}{\omega}$$

Olhando agora para a solução (4.3) temos que se $x(0) = 0$ $x'(0) = v_0$

$$E(0) = \frac{m}{2} x'^2(0) + \frac{kx^2(0)}{2} = \frac{mv_0^2}{2}$$

E o ângulo inicial é obtido colocando-se

$$\theta_0 = \arcsen \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x(0) \right) = \arcsen(0) = 0 + n\pi, \quad (\text{com } n \in \mathbb{Z})$$

Como

$$x'(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \omega \cos(\omega t + \theta_0)$$

temos que $\theta_0 = 2k\pi$ para $v_0 > 0$.

Comparando-se as duas constantes, temos:

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \operatorname{sen} \theta_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}} \operatorname{sen} 2k\pi = 0$$

$$B = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos 2k\pi = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2mv_0^2}{2k}} = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{v_0}{\omega}$$

Assim, podemos ver neste exemplo simples que as duas soluções (4.3) e (4.5), na verdade são duas formas diferentes, porém equivalentes, de se escrever a mesma função.

4.2. OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO

Agora trataremos de um oscilador harmônico com uma força de amortecimento atuando no sistema.

Temos pela lei de Hooke que a força estática da mola é:

$$F_m = -kx \quad (4.7)$$

Onde k é uma constante relacionada com a mola.

Pela 2ª lei de Newton temos:

$$F = ma \Rightarrow$$

$$F = mx'' \quad (4.8)$$

Também temos que a força de atrito devido a resistência do ar e a atritos mecânicos é proporcional a velocidade, portanto:

$$F_a = cv \Rightarrow$$

$$F_a = cx' \quad (4.9)$$

Onde c é uma constante relacionada com o atrito.

A força resultante atuando no corpo é dada por:

$$F = F_m - F_a$$

Por (4.7), (4.8), (4.9) e com m, c e $k > 0$, temos:

$$mx'' = -kx - cx' \Rightarrow$$

$$mx'' + cx' + kx = 0 \quad (4.10)$$

Observando que a equação (4.10) é uma EDO linear de 2ª ordem, utilizaremos os métodos expostos no capítulo 2.

Considerando-se $x(t) = e^{\lambda t}$ temos o polinômio associado como:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

A solução desta equação característica

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Sabemos que $c^2 - 4mk$ pode ser > 0 , $= 0$ ou < 0 .

1º CASO - $c^2 - 4mk > 0$, Oscilador Super Amortecido

Temos, que:

$$0 < c^2 - 4mk < c^2 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} < 0$$

$$\lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} < 0$$

Temos, de acordo com o capítulo 2, que a solução geral é do tipo:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

Onde A e B são determinados por condições iniciais.

Por exemplo, se tomarmos as condições iniciais, $\begin{cases} v_0 = 0 \\ x_0 > 0 \end{cases}$, então, $\lambda_1 A + \lambda_2 B = 0$ e $A + B = x_0$.

$$A = x_0 - B \Rightarrow \lambda_1 x_0 - \lambda_1 B + \lambda_2 B = 0 \Rightarrow$$

$$B(-\lambda_1 + \lambda_2) = -\lambda_1 x_0 \Rightarrow$$

$$B = \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{4.11}$$

$$x_0 - A = \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \Rightarrow x_0 - \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = A \Rightarrow$$

$$A = x_0 \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \tag{4.12}$$

Podemos ver nos gráficos abaixo um exemplo de oscilador para $x_0 = 0,8$, $v_0 = 0$, com $\lambda_1 = -2,77$ e $\lambda_2 = -5,54$.

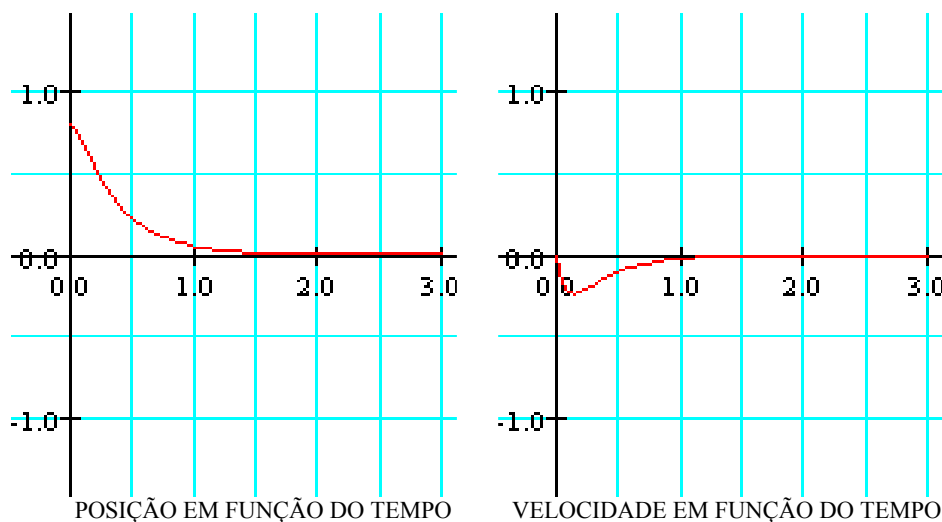


FIGURA 4.3. Representações gráficas do movimento harmônico super amortecido

2º CASO - $c^2 - 4km = 0$, Oscilador Criticamente Amortecido

Neste caso, as soluções da equação característica são:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c}{2m}$$

Como:

$$x_1 = e^{\lambda_1 t} \Rightarrow$$

$$x_1 = e^{-\frac{c}{2m} t}$$

Utilizando o método d'Alambert visto no capítulo 2 podemos obter a solução geral

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{c}{2m}t} \tag{4.13}$$

que está graficamente representada abaixo (caso particular).

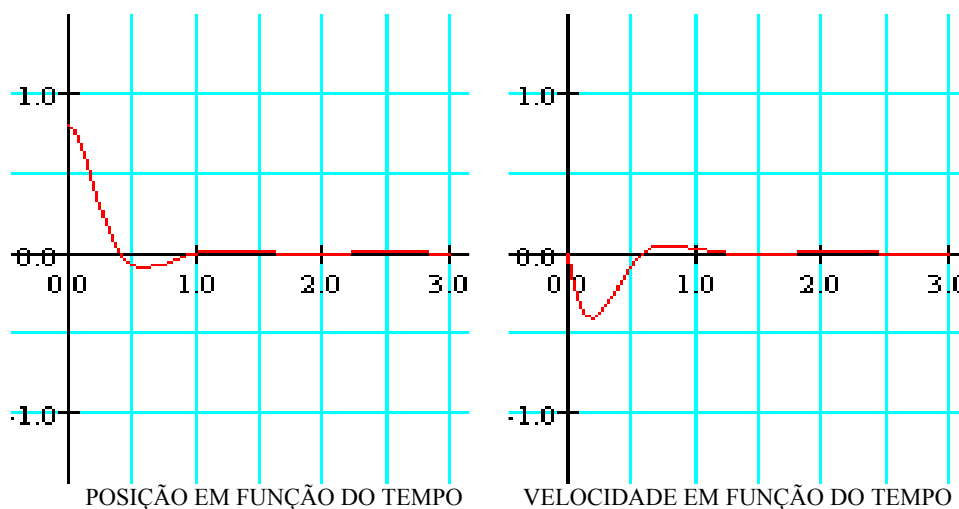


FIGURA 4.4. Representações gráficas do movimento harmônico criticamente amortecido

3º CASO - $c^2 - 4mk < 0$, Oscilador Sub-Amortecido

Consideremos que

$$i\beta = \sqrt{c^2 - 4km}$$

logo, as raízes serão da forma:

$$\lambda_1 = \frac{-c + i\beta}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-c - i\beta}{2}$$

Pelo método de resolução que equações lineares homogêneas com raízes complexas visto no capítulo 2, temos que a solução geral é da forma:

$$x(t) = e^{-\frac{ct}{2}} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

Podemos ver nos gráficos abaixo um exemplo particular deste oscilador.

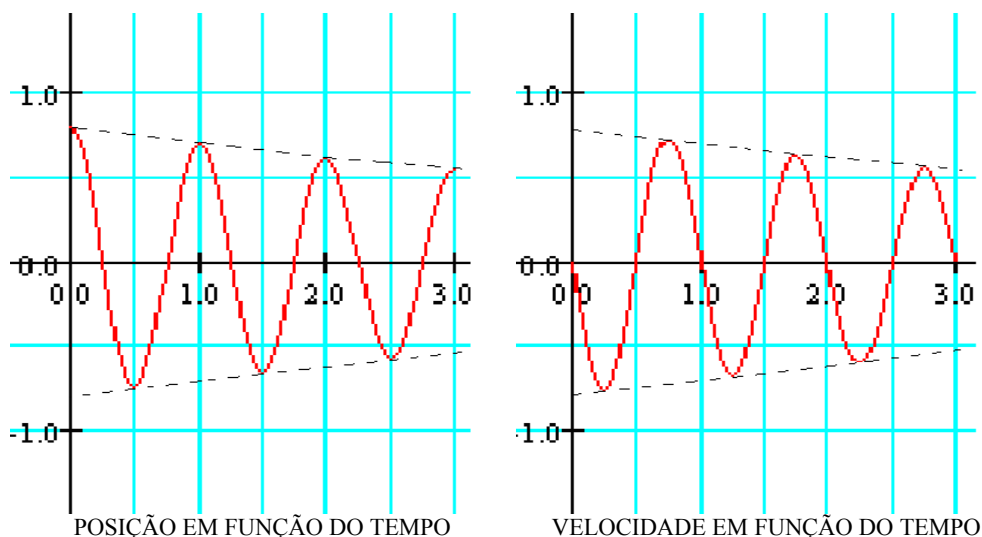


FIGURA 4.5. Representações gráficas do movimento harmônico sub-amortecido

Os gráficos a seguir representam osciladores harmônicos, primeiramente sem amortecimento (representado pelo vermelho), após com amortecimentos em vários níveis (que em ordem crescentes são representados pelas cores azul, lilás, verde e preta).

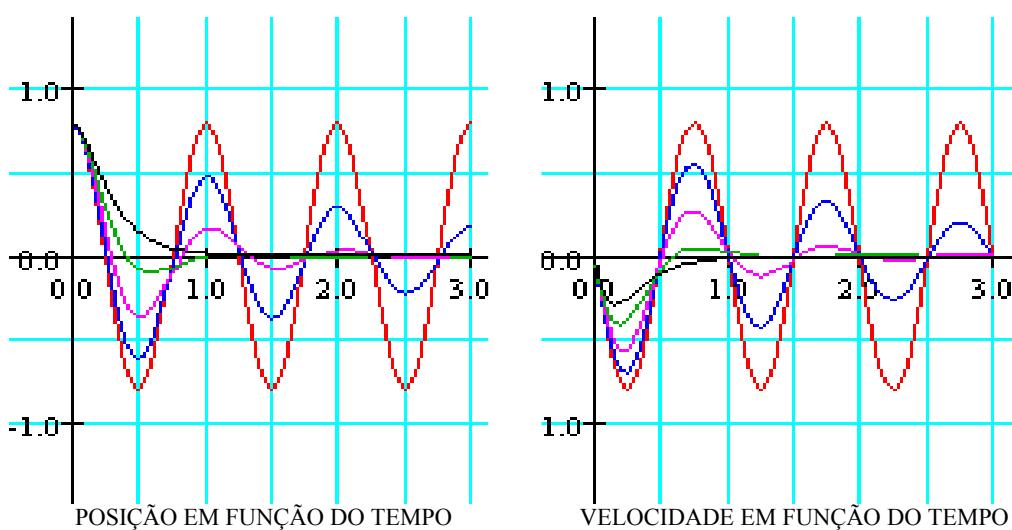


FIGURA 4.6. Representações gráficas de movimentos harmônico simples e com amortecimento sendo gradativamente aumentado.

Capítulo 5

PÊNULO SIMPLES

Vamos estudar o movimento de um corpo de massa m sustentado por um fio inextensível de comprimento l .

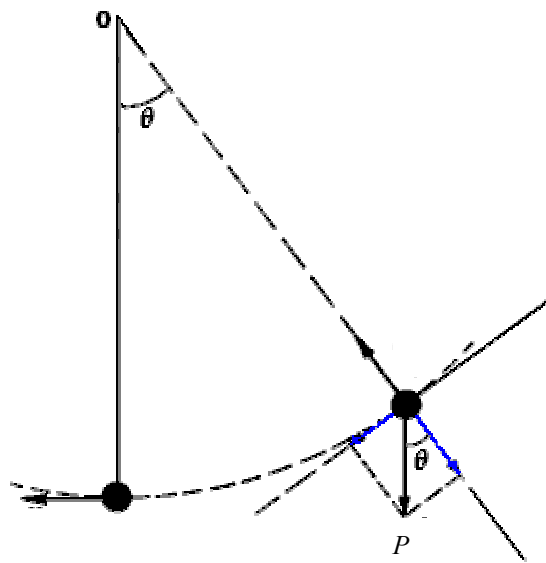


FIGURA 5.1. Representação esquemática de um pêndulo simples

Ao analisarmos a figura acima, podemos ver que a única força atuando no corpo é o seu peso, isto é, a força gravitacional dada por:

$$P = mg \quad (5.0)$$

$$P = F_{\text{normal}} + F_{\text{tangencial}} \quad (5.1)$$

Podemos escrever as coordenadas do corpo no plano como

$$\begin{cases} x(t) = l \operatorname{sen} \theta \\ y(t) = -l \cos \theta \end{cases}$$

e por consequência suas velocidades como

$$\begin{cases} x'(t) = l \cos \theta \theta' \\ y'(t) = l \operatorname{sen} \theta \theta' \end{cases}$$

Lembrando-se que θ varia em função de t .

Temos então que:

$$x'' = -l \operatorname{sen} \theta (\theta')^2 + l \cos \theta \theta'' \quad (5.2)$$

$$y'' = l \cos \theta (\theta')^2 + l \operatorname{sen} \theta \theta'' \quad (5.3)$$

De (5.0) tiramos que:

$$P = -my'' = mg \quad (5.4)$$

e

$$mx'' = 0 \quad (5.5)$$

pois, a única força aplicada é a força da gravidade que é vertical.

De (5.2) e (5.5), temos:

$$l \operatorname{sen} \theta (\theta')^2 = l \cos \theta \theta'' \Rightarrow$$

$$(\theta')^2 = \theta'' \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

De (5.3) e (5.4), temos:

$$my'' = -mg = m(l\cos\theta (\theta')^2 + l\sin\theta\theta'') \Rightarrow$$

$$-g = l \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \theta'' + l\sin\theta\theta''$$

Multiplicando os dois lados da igualdade por $\frac{\sin\theta}{l}$ teremos:

$$-\frac{g\sin\theta}{l} = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\theta'' = \theta''$$

ou seja

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\sin\theta \quad (5.6)$$

que é a **equação geral do pêndulo**.

Usando a expansão da função seno teremos:

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right)$$

O que, para valores de θ próximos de 0 podemos observar que seu comportamento se assemelha ao do oscilador harmônico $\theta'' = -\frac{g}{l}\theta$.

Vamos agora tentar integrar a equação (5.6) nos mesmos moldes que fizemos para o oscilador harmônico.

Multiplicando os dois lados da igualdade por θ' teremos:

$$m\theta'' + \frac{mg}{l}\sin\theta\theta' = 0$$

E portanto

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} m (\theta')^2 - \frac{mg}{l} \cos\theta \right] = 0 \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} m (\theta')^2 - \frac{mg}{l} \cos\theta \Rightarrow$$

energia cinética energia potencial

$$\frac{1}{2} m (\theta')^2 = E + \frac{mg}{l} \cos\theta \Rightarrow$$

$$\theta' = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{mg}{l} \cos\theta \right)} \Rightarrow$$

$$\frac{\theta'}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{mg}{l} \cos\theta \right)}} = 1 \Rightarrow$$

Integrando-se esta última igualdade de ambos os lados em relação a t temos:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{mg}{l} \cos\theta \right)}} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0 \quad (5.7)$$

Esta integral que aparece do lado esquerdo da igualdade é um exemplo de integral elíptica e não pode ser expressa em termos de funções elementares.

Mesmo assim, é possível extrair informações sobre a solução do pêndulo aproximando-se a raiz no denominador através da série binomial.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^3 + \dots$$

Assim, aplicando-se esta expansão a integral (5.7) temos:

$$t - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2g}{l} \cos\theta}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \frac{mg}{El} \cos\theta}} \Rightarrow$$

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2E}} \left[\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta - \frac{1}{2} \frac{mg}{El} \int_{\theta_0}^{\theta} \cos\theta d\theta + \frac{3}{2!2^2} \left(\frac{mg}{El}\right)^2 \int_{\theta_0}^{\theta} \cos^2\theta d\theta - \frac{3 \cdot 5}{3!2^3} \left(\frac{mg}{El}\right)^3 \int_{\theta_0}^{\theta} \cos^3\theta d\theta + \dots \right]$$

Quanto mais termos da série forem considerados, melhor será a aproximação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho caracteriza-se por tratar especificamente de equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem, trazendo seus principais métodos de resolução e exemplos de aplicações. Por fim, há a resolução mais detalhada de alguns problemas de mecânica clássica.

O primeiro problema a ter uma resolução mais detalhada foi o problema de queda livre. Após, se teve o mesmo cuidado na resolução dos problemas de oscilação harmônica simples com e sem amortecimento, o último problema discutido foi o pêndulo simples.

Com um foco bem direcionado, o trabalho pode ir mais a fundo nas discussões sobre o que se refere às aplicações das equações acima mencionadas bem como seus significados, o que é de grande valia para o aprendizado do assunto. Portanto, espera-se que este material contribua, de alguma forma, para que outras pessoas possam aprimorar seus conhecimentos sobre o tema em questão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BOYCE, W.E. **Equações diferenciais Elementares e problemas de valores de Contorno**. 3. ed. Guanabara Dois, 1979.
2. BUTKOV, E. **Física Matemática**. Guanabara Dois, 1978.
3. BARGER, V.; OLSSON, M. **Clássical Mechanics A Modern perspective**. Mcgraw Hill inc, 1995.
4. FEYMAN, R.P.; LEIGHTON, R.B.; SANDS, M. **Lectures on Physics**. Addison-Wesley, 1963.
5. STARKE, R. **Notas de aula para Calculo II**. UFSC:2002.
6. STARKE, R. **Notas de aula para Calculo III**. UFSC:2003.
7. SYMON, K.R. **Mecânica**. Campus, 1982.
8. HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física 2**. 6. ed. LTC, 2002.

Sites:

1. www.feiradeciencias.com.br
2. www.pet.dfi.uem.br