UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Funções Matriciais

Autor: Anderson Reis de Vargas

Curso: Matemática Licenciatura

Orientador: Lício Hernanes Bezerra

Florianópolis, dezembro de 2004

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática - Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº. 041 / SGC / 2004.

Profª. Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora responsável pela disciplina

Banca examinadora:

Licio Hernanes Bezerra
Orientador

Aldrovando Luís Azeredo Araújo

José Luiz Rosas Pinho

Quero agradecer todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para que essa crise passasse. Os professores que mais marcaram minha vida acadêmica, Pinho, Carmem e Licio. Meus pais que me apoiaram desde o início e continuam acreditando em mim. A Silvia e a Iara, que além da grande competência, são verdadeiras mães. Os amigos que estiveram do meu lado passo a passo e aqueles que me abandonaram no meio do caminho, pois me fizeram crescer. E, finalmente, aos meus companheiros do sindicato, as meninas que tanto amo, Aline, Renata e Juliana - vulgo Ni, Re e Ju - que vivenciaram todas as minhas alegrias, tristezas, bebedeiras, “bafões”, enfim, as circunstâncias mais adversas.

Sumário

Introdução

Calcular funções de matrizes é um dos problemas centrais de Álgebra Linear Numérica. Por exemplo, a solução, em um tempo t, de um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, com coeficientes constantes,

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(o) = v$$

é dada por

$$x(t) = e^{tA}v,$$

em que e^{tA} é a exponencial da matriz tA. É claro que, nesse caso, não é necessário o cálculo explícito da exponencial da matriz, do mesmo modo que quando resolvemos o sistema $Ax = b$ não precisamos calcular explicitamente a inversa de A.

A fim de definir exponencial de matriz, introduzimos a Forma Canônica de Jordan no primeiro capítulo. O segundo capítulo tem como objetivo definir funções de matrizes de forma consistente. São apresentadas a maioria das definições que foram usadas e sugeridas, nos últimos cento e vinte anos, por matemáticos como Sylvester, Weyr, Cartan e outros.

A exponencial de matrizes é explorada no capítulo 3. Mostramos então algumas técnicas usadas para o cálculo aproximado da exponencial: funções racionais de Padé, polimômios de Taylor, métodos baseados em espaços de Krylov (como o método de Arnoldi). Fazemos ainda nesse capítulo uma análise da sensibilidade do problema de calcular a exponencial de uma matriz.

Finalmente, no último capítulo é feito uma simples aplicação do uso da exponencial de uma matriz no campo da Física Clássica, a saber o problema do oscilador harmônico amortecido forçado.

Capítulo 1

Decomposição de Matrizes

1.1 Conceitos e resultados de Álgebra Linear

É conveniente revermos algumas convenções e definições de Álgebra Linear. A não ser que esteja declarado, toda matriz tem dimensão $n \times n$. Se $A = (a_{ij})$ então a matriz transposta A^T é definida por $A^T = (a_{ji})$ e a matriz transposta conjugada A^* por $A^* = (\overline{a_{ji}})$.

Definição 1.1.1 *Dadas as matrizes A, Q, T e D, temos o seguinte:*

(i) A é simétrica se, e somente se, $A^T = A$;

(ii) A é Hermitiana se, e somente se, $A^* = A$;

(iii) A é normal se, e somente se, $A^*A = AA^*$;

(iv) Q é ortogonal se, e somente se, $Q^TQ = I$;

(v) Q é unitária se, e somente se, $Q^*Q = I$;

(vi) T é triangular superior se, e somente se, $t_{ij} = 0$, $i > j$;

(vii) T é triangular inferior se, e somente se, $t_{ij} = 0$, $i < j$;

(viii) D é diagonal se, e somente se, $d_{ij} = 0$, $i \neq j$.

Para ver propriedades dessas matrizes, consulte [15] e [18].

Definição 1.1.2 *A norma de um vetor em $\mathbb{R}^n$ é uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que possue as seguintes propriedades:*

(i) $f(x) \geq 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ *e* $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $f(x+y) \leq f(x) + f(y) \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$

(iii) $f(\alpha x) = |\alpha| f(x) \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$

Uma classe de normas muito utilizada é a norma-p, definida por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Na maior parte do trabalho usaremos a norma-2 ou norma euclidiana:

$$\|x\| = \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (x^T x)^{\frac{1}{2}}.$$

Quando for conveniente, poderá ser utilizada a norma-∞, definida por:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Um *vetor unitário* com respeito à norma $\|\cdot\|$ é um vetor x que satisfaz $\|x\| = 1$.

Definição 1.1.3 *A definição de norma de uma matriz é equivalente à definição da norma de um vetor. Em particular, a função $f : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$ é uma norma se goza das seguintes propriedades:*

(i) $f(A) \geq 0, \ \forall\, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *e* $f(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(ii) $f(A+B) \leq f(A) + f(B) \ \forall\, A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

(iii) $f(\alpha A) = |\alpha| f(A) \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall\, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

As normas utilizadas com mais freqüência são as normas-p,

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

e a norma de Frobenius

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Essas normas gozam da seguinte propriedade:

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Além disso, elas são compatíveis com as normas de vetor $\| \cdot \|_p$ e $\| \cdot \|_2$, definidas anteriormente.

Para conhecer outras propriedades sobre normas de vetores ou matrizes, ver [5].

Definição 1.1.4 *Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial V. Diz-se que um escalar λ é um autovalor ou um valor característico de T se existe um vetor não-nulo x em V tal que $Tx = \lambda x$. Este vetor x é denominado um autovetor ou vetor característico de T associado ao autovalor λ.*

Definição 1.1.5 *Se A é uma matriz $n \times n$, um autovalor de A é um escalar λ tal que a matriz $A - \lambda I$ seja singular, ou seja, $det(A - \lambda I) = 0$. Nesse caso, λ é raiz do polinômio $f(\lambda) = det(A - \lambda I)$. Tal f é denominado polinômio característico de A.*

Definição 1.1.6 *Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial de dimensão finita V e seja $\alpha = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ uma base ordenada de V. Cada vetor $T\alpha_j$ pode se expresso como uma combinação linear*

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\alpha_j, \quad j = 1, \cdots n$$

de forma única. Assim, a matriz de T em relação à base α é a matriz quadrada A, de ordem n, cujos elementos são definidos pela equação acima.

Definição 1.1.7 *Dizemos que duas matrizes, A e B, são semelhantes se existe uma matriz P, não singular, tal que $B = PAP^{-1}$.*

Lema 1.1.1 *Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico.*

Demonstração:

$$\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - PAP^{-1}) = \det(\lambda PP^{-1} - PAP^{-1}) = \det(P(\lambda I - A)P^{-1}) =$$
$$= \det(P).\det(\lambda I - A).\det(P^{-1}) = \det(\lambda I - A).$$

■

Teorema 1.1.1 (Cayley-Hamilton) *Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial de dimensão finita V e seja f o polinômio característico de T. Então $f(T) = 0$.*

Demonstração:

Seja $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ uma base de V. Mostrar que $f(T) = 0$ é o mesmo que mostrar que $f(T)\alpha_i = 0,\ i = 1, \dots, n$.

Seja $A = T\alpha$. Seja, $\forall j,\ T\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\alpha_i$.

Considere agora os operadores $(\delta_{ij}T - A_{ij}I);\ i, j = 1, \dots, n$.

Então,

$$\sum_{i=1}^{n} (\delta_{ij}T - A_{ij}I)\alpha_i = T\alpha_j - \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\alpha_i = 0$$

Seja $B = xI - A$. Consideremos $(\forall i, j)$ os polinômios $p_{ij} = \delta_{ij}x - A_{ij} = B_{ij}$.

Seja $\tilde{B} = adjB$. Então, $B\tilde{B} = \tilde{B}B = (detB)I = f(x)I$.

Observe que $(\forall i, j)\ \ \tilde{B}_{ij}$ é um polinômio $\tilde{p}_{ij}(x)$.

Como $\sum_{i=1}^{n} p_{ij}(T)\alpha_i = 0$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_{jk}(T)p_{ij}(T)\alpha_i \ = \ 0 \ = \ \tilde{p}_{jk}(T)\sum_{i=1}^{n} p_{ij}(T)\alpha_i$$

Logo,

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_{jk}(T)p_{ij}(T)\alpha_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(T)\tilde{p}_{jk}(T) \right) \alpha_i$$

Mas,

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x)\tilde{p}_{jk}(x) = \sum_{i=1}^{n} B_{ij}\tilde{B}_{jk} = \delta_{ik}f(x)$$

Portanto,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(T)\tilde{p}_{jk}(T) \right) \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\delta_{ik}f(T) \right) \alpha_i = f(T)\alpha_k$$

■

Definição 1.1.8 *Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial de dimensão finita V. Dizemos que T é diagonalizável se existe uma base de V formada por autovetores de T.*

Na forma matricial temos o seguinte resultado:

Teorema 1.1.2 *Se $\mathbb{R}^n$ possui uma base formada por autovetores de A então, se esses vetores são as colunas da matriz S, segue que $S^{-1}AS$ é uma matriz diagonal Λ, com os autovalores de A sobre sua diagonal:*

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Demonstração:

Seja x_i os autovetores de A sobre as colunas de S. Vamos calcular o produto AS:

$$AS = A \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ Ax_1 & Ax_2 & \cdots & Ax_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_n x_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Agora, façamos o produto $S\Lambda$:

$$S\Lambda = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_n x_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $AS = S\Lambda$. Como $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são vetores linearmente independentes, temos que S é não singular, isto é, existe S^{-1}.

Portanto,

$$S^{-1}AS = \Lambda \quad \text{ou} \quad A = S\Lambda S^{-1}.$$

■

Observações:

1. Se a matriz A não tem autovalores repetidos (os números $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ são distintos) então os n autovetores são automaticamente independentes. Assim, qualquer matriz com autovalores distintos pode ser diagonalizada.

2. A matriz S não é única. Em primeiro lugar, um autovetor x pode ser multiplicado por uma constante e será um novo autovetor. Assim, podemos multiplicar cada coluna de S por uma constante não nula e produziremos uma nova S.

3. A equação $AS = S\Lambda$ só tem sentido se as colunas de S são os autovetores de A e não de outro modo. Outras matrizes S não produzirão uma matriz diagonal λ. A razão disso está na regra de multiplicação de matrizes. Assim, a posição dos autovetores em S deve obedecer a posição dos autovalores em Λ, isto é, se λ_i ocupa a i-ésima coluna de Λ então o seu autovetor correspondente v_i também ocupará a i-ésima coluna de S.

4. Nem toda matriz possui n autovetores linearmente independentes, e conseqüentemente, nem toda matriz é diagonalizável. Essas matrizes são ditas defectivas. O exemplo clássico de uma matriz defectiva é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seus autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, pois é triangular com zeros na diagonal:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2.$$

Se x é um autovetor, então satisfaz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, $\lambda = 0$ é um autovalor duplo (sua multiplicidade algébrica é 2) e o autoespaço associado tem dimensão 1, (a multiplicidade geométrica é 1) e não podemos construir S.

Podemos nos perguntar o que acontece se a matriz não possui um número completo de autovetores, ou seja, se uma matriz de dimensão n não possui n autovetores linearmente independentes. Veremos que esse problema pode ser resolvido usando uma decomposição semelhante, em que a matriz Λ é quase diagonal. Tal matriz recebe o nome de matriz de Jordan. Para a construção da matriz de Jordan, precisamos de alguns resultados importantes, como o Teorema da Decomposição Primária e o Teorema da Decomposição Racional.

Definição 1.1.9 *Seja V um espaço vetorial. Sejam W_1 e W_2 subespaços de V. Podemos definir $W = W_1 + W_2$, em que W é o subespaço de todos $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ com $\alpha_1 \in W_1$ e $\alpha_2 \in W_2$. Quando $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, a soma $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ é única e, nesse caso, diz-se que W é a soma direta de W_1 e W_2 e denota-se $W = W_1 \oplus W_2$.*

Definição 1.1.10 *Seja F um corpo. Um ideal de $F[x]$*[1] *é um subespaço M de $F[x]$ tal que fg está em M sempre que f estiver em $F[x]$ e g em M.*

Definição 1.1.11 *O* ***polinômio minimal*** *de uma matriz é o único gerador do ideal de todos os polinômios g sobre o corpo F tais que $g(A) = 0$. Quando estivermos tratando de um operador T sobre um espaço vetorial V, então o* ***polinômio minimal*** *de T é o único gerador do ideal de todos os polinômios g sobre o corpo F tais que $g(T) = 0$.*

Definição 1.1.12 *Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial V de dimensão finita. O núcleo e a imagem de T, denotados por $\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{R}(T)$, respectivamente, são subespaços de V definidos por*

$$\mathcal{N}(T) = \{v \in V; Tv = 0\}$$

e

$$\mathcal{R}(T) = \{w \in V; Tv = w \text{ para algum } v \in V\}.$$

Definição 1.1.13 *Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial V. Se W é um subespaço de V, dizemos que W é invariante sob T se para cada vetor α em W o vetor $T\alpha$ está em W.*

Teorema 1.1.3 (Teorema da Decomposição Primária) *Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial de dimensão finita V. Seja p o polinômio minimal de T,*

$$p = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$$

em que os p_i são polinômios distintos, irredutíveis e unitários[2] *e os r_i são inteiros positivos. Se W_i é o núcleo de $p_i(T)^{r_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, então*

[1] $F[x]$ denota o anel de polinômios sobre o corpo F.

[2] Diz-se que um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é um polinômio unitário se $a_n = 1$.

(a) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$;

(b) Cada W_i *é invariante sob* T;

(c) Se T_i *é o operador induzido sobre* W_i *por* T, *então o polinômio minimal de* T_i *é* $p_i^{r_i}$.

Para ter uma idéia da demonstração deste Teorema ver [10]. Este Teorema também é tratado em [16], onde a decomposição é feita em somas diretas dos auto-espaços generalizados de T. Na mesma referência também pode ser encontrada sua demonstração.

Exercício

Seja T um operador linear sobre $\mathbb{R}^3$ que é representado em relação à base ordenada canônica pela matriz

$$[T] = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Escreva o polinômio minimal p de T sob a forma $p = p_1 p_2$, sendo p_1 e p_2 unitários e irredutíveis sobre o corpo dos números reais. Seja W_i o núcleo de $p_i(T)$. Determine as bases β_1 e β_2 dos espaços W_1 e W_2, respectivamente. Se T_i é o operador induzido sobre W_i por T, determine a matriz de T_i em relação à base β_i.

Solução:

O polinômio característico de T é dado por $p(x) = (x-2)(x^2+1)$, que é também polinômio minimal.

$$\beta_1 = \{(1,0,2)\} \text{ e } \beta_2 = \{(1,1,0);(0,0,1)\}$$

Note que β_2 não é formada por autovetores de T. Assim temos

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{e portanto} \quad [T_1]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

e

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e portanto} \quad [T_2]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.1.4 *Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial de dimensão finita V e suponhamos que o polinômio minimal de T, $p = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ em que $\forall i$, p_i é da forma $(x - c_i)$. Então existe um operador diagonalizável D sobre V e um operador nilpotente[3] N sobre V tais que:*

(i) $T = D + N$;

(ii) $DN = ND$.

Os operadores D e N são determinados de forma única por (i) e (ii) e cada um deles é um polinômio em T.[4]

Demonstração:

Sejam E_1, E_2, $\cdots$, E_k as projeções associadas à decomposição primária de T. Seja $D = \lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_k E_k$. D é um operador diagonalizável (ver teoria em [10]). Consideremos agora $N = T - D$. Como

$$T = TE_1 + TE_2 + \cdots + TE_k,$$

$$N = \sum_{i=1}^{k} (T - \lambda_i T) E_i.$$

Assim,

$$N^2 = \sum_{i=1}^{k} (T - \lambda_i T)^2 E_i.$$

E em geral,

$$N^r = \sum_{i=1}^{k} (T - \lambda_i T)^r E_i.$$

Se tivermos $r \geq r_i, \forall i$, então $N^r = 0$, pois o operador $(T - \lambda_i I)^r$ será 0 sobre a imagem de E_i como nos diz o Teorema da Decomposição Primária. Ou seja, N é nilpotente.

[3]Um operador linear N é nilpotente se existe um inteiro positivo r tal que $N^r = 0$.

[4]Este Teorema também está enunciado e demonstrado em [16].

Portanto, podemos escrever $T = D + N$, em que D é diagonalizável e N é nilpotente. Note que D e N comutam com T, logo comutam entre si, isto é, $DN = ND$. Além disso, é fácil notar que D e N são polinômios em T.
Então precisamos provar a unicidade de D e N.
Suponhamos que $T = D' + N'$ sendo D' diagonalizável, N' nilpotente e $D'N' = N'D'$.
Como D' e N' comutam entre si então comutam com T. Logo, comutam com qualquer polinômio em T, ou seja, comutam com D e N. E todos esses quatro operadores comutam entre si. Agora note que

$$D + N = D' + N' \text{ ou } D - D' = N' - N$$

Como D e D' são diagonalizáveis e comutam, então eles são simultaneamente diagonalizáveis, isto é, existe uma base de V na qual cada vetor é um autovetor de D e também de D' (esta afirmação pode ser facilmente verificada) e portanto $D - D'$ é diagonalizável.
Por outro lado, como N e N' são nilpotentes e comutam temos:

$$(N' - N)^r = \sum_{i=1}^{r} \left(\begin{array}{c} r \\ i \end{array} \right) (N')^{r-i}(-N)^i$$

e então quando r for suficientemente grande todos os termos dessa expressão serão nulos e, portanto, $N' - N$ é nilpotente.
Assim, $D - D'$ é um operador diagonalizável e nilpotente. Por ser nilpotente seu polinômio minimal é da forma x^r. Mas, como o operador é diagonalizável, seu polinômio minimal não pode ter raízes múltiplas Logo, $r = 1$ e, assim, o polinômio minimal é simplesmente x. Isso nos diz que $D - D' = 0$. Portanto, $D = D'$ e, conseqüentemente, $N = N'$. ■

Exercício:

Seja T o operador linear sobre $\mathbb{R}^3$ que é representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

em relação à base ordenada canônica. Mostre que existe um operador diagonalizável D sobre $\mathbb{R}^3$ e um operador nilpotente N sobre $\mathbb{R}^3$ tais que $T = D + N$ e $DN = ND$. Determine as matrizes de D e N em relação à base ordenada canônica.

Solução:

Note que o polinômio minimal de T é dado por $p(x) = (x-1)(x-2)^2$.
Assim, pelo Teorema anterior podemos escrever T como a soma de dois operadores que comutam entre si, em que um deles é diagonalizável e o outro é nilpotente. Temos então que:

$$D = E_1 + 2E_2 \quad \text{e} \quad N = (A - I)E_1 + (A - 2I)E_2$$

Para encontrarmos as projeções E_1 e E_2 devemos proceder como o seguinte:
Sejam $p_1(x) = x - 1$, $p_2(x) = x - 2$, $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$ e definimos $f_i = \dfrac{p}{p_i^{r_i}}$.
Logo, $f_1(x) = (x-2)^2$ e $f_2(x) = x - 1$.
Sabemos ainda que existem polinômios g_1 e g_2 tais que

$$f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) = 1$$

Logo, $g_1(x) = x \quad \text{e} \quad g_2(x) = -x^2 + 3x - 1$.
Assim temos:
$E_1 = f_1(A)g_1(A) = A^3 - 4A^2 + 4A \quad \text{e} \quad E_2 = f_2(A)g_2(A) = -A^3 + 4A^2 - 4A + I$.
Portanto,
$D = E_1 + 2E_2 = -A^3 + 4A^2 - 4A + 2I \quad \text{e} \quad N = (A-I)E_1 + (A-2I)E_2 = A^3 - 4A^2 + 5A - 2I$.
Ou seja,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Definição 1.1.14 *Se α é um vetor qualquer de V, o subespaço T-cíclico gerado por α é o subespaço $Z(\alpha;T)$ dos vetores da forma $g(T)\alpha$, g polinômio. Se $Z(\alpha,T) = V$, então α é denominado um vetor cíclico de T.*

Definição 1.1.15 *Se α é um vetor arbitrário em V, o T-anulador de α é o ideal $M(\alpha, T)$ formado pelos polinômios g tais que $g(T)\alpha = 0$. O único polinômio unitário p_α que gera este ideal também será denominado o polinômio T-anulador de α.*

Definição 1.1.16 *Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial de dimensão finita V e seja W uma subespaço de V. Nesse caso, W é um subespaço T-admissível se*

(i) W é invariante sob T;

(ii) se $f(T)\beta$ está em W com $\beta \in V$, existe um vetor α (diferente de β) em W tal que $f(T)\alpha = f(T)\beta$.

Lema 1.1.2 *Seja W um subespaço T-admissível de V e seja γ um vetor de V tal que*

(i) $Z(\gamma, T)$ e W são disjuntos;

(ii) entre todos os subespaços T-cíclicos disjuntos de V, $Z(\gamma, T)$ é o que possui dimensão máxima.

Então o subespaço $W \oplus Z(\gamma, T)$ é T-admissível.

Lema 1.1.3 *Seja W um subespaço T-admissível e próprio de V. Então, existe $\gamma \neq 0$ em V tal que $Z(\gamma, T)$ e W são disjuntos. Se além disso, escolhermos γ de modo que satisfaça o item (ii) do Lema 1.1.2, podemos afirmar que:*

(a) o subespaço $W \oplus Z(\gamma, T)$ é T-admissível;

(b) se β é um vetor arbitrário tal que $W \oplus Z(\gamma, T)$ e $Z(\beta, T)$ são disjuntos, então o T-anulador de β divide o T-anulador de γ.

As demonstrações dos Lemas 1.1.2 e 1.1.3 podem ser encontradas em [10].

Teorema 1.1.5 (Teorema da Decomposição Racional) *Seja T um operador linear sobre o espaço vetorial V de dimensão finita ($dimV \geq 1$). Então existem r vetores não nulos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ em V tais que*

(a) $V = Z(\alpha_1; T) \oplus Z(\alpha_2; T) \oplus \cdots \oplus Z(\alpha_r; T)$, em que $Z(\alpha_i; T)$ representa o subespaço T-cíclico gerado por α_i;

(b) se $p_1, \cdots, p_r$ são os polinômios T-anuladores de $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, respectivamente, então para $1 \leq k \leq r-1$, p_{k+1} divide p_k.

Além disso, o inteiro r e os anuladores $p_1, p_2, \ldots, p_r$ são determinados de maneira única, pelas condições (a) e (b), mais o fato de que nenhum α_k é nulo.

Demonstração:

Tomemos o subespaço T-admissível $W = \{0\}$. Seja α_1 um vetor não nulo arbitrário de V que gere um subespaço T-cíclico de dimensão máxima. Como $W = \{0\}$ é T-admissível então $Z(\alpha_1; T)$ é admissível (como mostra o Lema 1.1.2). Assim, se $V = Z(\alpha_1; T)$, a demonstração está completa. Mas, se $V \neq Z(\alpha_1; T)$, tomemos um α_2 não nulo de V tal que $Z(\alpha_2; T)$ tenha dimensão máxima entre os subespaços T-cíclicos disjuntos de $Z(\alpha_1; T)$. Logo, pelo lema 1.1.3, temos que p_2 divide p_1. Se $V = Z(\alpha_1; T) \oplus Z(\alpha_2; T)$, a prova do Teorema acaba aqui. Caso contrário, usamos o mesmo argumento para escolher α_3 e assim sucessivamente.

Falta-nos demonstrar apenas a unicidade de r e dos anuladores $p_1, p_2, \ldots, p_r$.

Suponhamos que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ sejam vetores não nulos que satisfazem as condições (a) e (b). Suponhamos também que existem vetores não nulos $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ com T-anuladores $g_1, g_2, \ldots, g_s$ tais que

(a) $V = Z(\beta_1; T) \oplus Z(\beta_2; T) \oplus \cdots \oplus Z(\beta_r; T)$;

(b) g_{k+1} divide g_k se $k = 1, \ldots, s-1$.

Queremos provar que $r = s$ e $p_i = g_i$, $i = 1, \ldots, r$.

Seja f um polinômio sobre F e W um subespaço de V. Denotemos $f_T W$ o subespaço dos vetores $f(T)\alpha$ com $\alpha \in W$. Assim, $f_T V$ é a imagem de $f(T)$. Além disso, $f_T V = Z(f(T)\alpha_1; T) \oplus Z(f(T)\alpha_2; T) \oplus \cdots \oplus Z(f(T)\alpha_r; T)$.

Note ainda que, se α e β pertencem a V e têm o mesmo T-anulador, $f(T)\alpha$ e $f(T)\beta$ têm o mesmo polinômio anulador e, particularmente, $Z(f\alpha; T)$ e $Z(f\beta; T)$ têm mesma dimensão.

Provaremos primeiro que $p_1 = g_1$.

$$p_1(V) = p_1(Z(\alpha_1; T)) \oplus p_1(Z(\alpha_2; T)) \oplus \cdots \oplus p_1(Z(\alpha_r; T))$$

$$p_1(V) = p_1(Z(\beta_1;T)) \oplus p_1(Z(\beta_2;T)) \oplus \cdots \oplus p_1(Z(\beta_r;T))$$

Bem, $p_i(\alpha_j) = 0$ para $j = 1, \ldots, r$ pois p_j divide p_1. Assim, $p_1(V) = \{0\}$. Portanto, $p_1(\beta_j) = 0$ para $j = 1, \ldots, s$. Em particular, $p_1\beta_1 = 0$, logo g_1 divide p_1. Invertendo o raciocínio, vemos que p_1 divide g_1. Portanto $p_1 = g_1$.

Provaremos agora que $p_2 = g_2$.

Suponhamos que $r \geq 2$ então devemos, obrigatoriamente ter $s \geq 2$, pois

$$dimV = dimZ(\alpha_1;T) + dimZ(\alpha_2;T) + \cdots + dimZ(\alpha_r;T)$$

$$dimV = dimZ(\beta_1;T) + dimZ(\beta_2;T) + \cdots + dimZ(\beta_s;T)$$

e

$$\sum_{j\geq 2} dimZ(\beta_j;T) = \sum_{j\geq 2} dimZ(\alpha_j;T) > 0.$$

Consideremos agora o subespaço p_2V.

$$p_2(V) = Z(p_2(\alpha_1);T) \oplus \cdots \oplus Z(p_2(\alpha_r);T)$$

$$p_2(V) = Z(p_2(\beta_1);T) \oplus \cdots \oplus Z(p_2(\beta_s);T)$$

Como $p_2(\alpha_j) = 0$ se $j \geq 2$ então $p_2(V) = Z(p_2(\alpha_1);T)$. Como os vetores α_1 e β_1 possuem o mesmo T-anulador, $p_2(\alpha_1)$ e $p_2(\beta_1)$ possuem o mesmo T-anulador. Portanto,

$$dim(p_2(V)) = dimZ(p_2(\alpha_1);T) = dimZ(p_2(\beta_1);T)$$

Daí segue que $dimZ(p_2(\beta_1);T) = 0$ para $j \geq 2$. Em particular, $p_2(\beta_2) = 0$ e assim, g_2 divide p_2. Invertendo o argumento, provamos que p_2 divide g_2 e portanto $p_2 = g_2$.

Usando indução sobre j provamos que $p_j = g_j$ e que $r = s$.

■

Corolário 1.1.1 *Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial de dimensão finita V. Então T possui um vetor cíclico se, e somente se, o polinômio característico de T é idêntico ao seu polinômio minimal.*

Demonstração

Seja $\alpha \in V$. Logo, conforme a demonstração do Teorema da Decomposição Racional temos que a máxima dimensão que $Z(\alpha, T)$ poderá ter é o grau do polinômio minimal de T. Mas, existe um vetor α tal que $Z(\alpha, T)$ possui essa dimensão. Assim, T possui um vetor cíclico se, e somente se, o polinômio característico e minimal de T possuem o mesmo grau, ou seja, são idênticos. ■

O análogo deste Teorema para matrizes é o seguinte. Se T é um operador linear sobre um espaço vetorial de dimensão finita V, considere a decomposição como no teorema anterior. Seja β_i a "base ordenada cíclica", $\beta_i = \{\alpha_i, T\alpha_i, \ldots, T^{k_i-1}\alpha_i\}$, de $Z(\alpha_i; T)$, em que k_i indica o grau do anulador p_i. Se β é a base ordenada de V obtida pela reunião dos β_i então a matriz de T em relação à base ordenada β será uma matriz bloco diagonal, com matrizes companheiras na diagonal.

Assim, podemos afirmar que qualquer matriz A de ordem n sobre qualquer corpo K é semelhante a uma única matriz bloco diagonal

$$F = diag(C_{f_1}, \cdots, C_{f_n}) = \begin{bmatrix} C_{f_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_{f_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{f_n} \end{bmatrix} \in K^{n \times n}$$

em que cada C_{f_i} é a matriz companheira de algum polinômio mônico $f_i \in K[x]$ para $1 \leq i \leq n$, e $f_i | f_{i+1}$ para $1 \leq i < n$. A matriz companheira (também chamada de **bloco cíclico** ou **bloco de Frobenius** [5]) C_g de um polinômio mônico $g = \sum_{0 \leq i \leq r} b_i x^i \in K[x]$ tem a forma

[5] Ferdinand Georg Frobenius nasceu em 26 de outubro de 1849 em Carlottenburg, um distrito de Berlim. Iniciou seus estudos universitários na Universidade de Berlim. Frobenius recebeu o título de Doutor em 1870, orientado por Weierstrass. Trabalhou inicialmente como professor de uma escola secundária e foi considerado pela Universidade de Berlim um excelente professor de matemática. Entre 1875 e 1892, trabalhou em Zürich, onde casou e constituiu família. Após a morte de Kronecker, em dezembro de 1891, Frobenius foi trabalhar na Universidade de Berlim, quando foi eleito à Academia Prussiana de Ciências. Weirstrass e Fuchs listaram vários tópicos nos quais Frobenius teve sua maior contribuição: no desenvolvimento das funções analíticas em séries; na solução de equações algébricas, cujos coeficientes são funções de uma variável; na teoria de equações diferenciais lineares; no problema de Pfaff; em formas lineares

$$C_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{r-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{r-1} \end{bmatrix} \in K^{r \times r}$$

Se g tem grau nulo (neste caso $g \equiv 1$) então C_g é a matriz nula com linhas e colunas nulas. Uma matriz F com a propriedade acima, chamada **forma de Frobenius ou racional** de A, sempre existe e é única. Os polinômios $f_1, f_2, \cdots, f_n \in K[x]$ são os fatores primos invariantes de A, e o produto $f_1.f_2.\cdots.f_n$ é o polinômio característico de A, onde f_n é o polinômio minimal de A. Duas matrizes são semelhantes se, e somente se, têm a mesma forma de Frobenius.

1.2 A Forma de Jordan

Seja[6] N um operador nilpotente sobre o espaço V de dimensão finita. Consideremos a decomposição racional de N. Assim, podemos tomar vetores $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ não nulos em V com N-anuladores $p_1, \ldots, p_r$, tais que

$$V = Z(\alpha_1; N) \oplus \cdots \oplus Z(\alpha_r; N)$$

e p_{i+1} divide p_i, para $i = 1, \ldots, r-1$. O polinômio característico de N é x^n. Assim, cada p_i é da forma $p_i = x^{k_i}$ em que $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_r$. Vamos tomar $\beta = \bigcup_{i=1}^{r} \beta_i$, em que β_i é base cíclica de $Z(\alpha_i, N)$, $\beta_i = \{T^{k_i - 1}\alpha, \cdots, T\alpha, \alpha\}$. A matriz associada a x^{k_i} é a matriz

com coeficientes constantes; nas formas bilineares; em operadores diferenciais lineares adjuntos; na teoria das funções elípticas; na teoria das formas biquadradas; no Teorema de Sylow; e outros. No final de sua carreira, Frobenius estudou matrizes positivas e não-negativas e introduziu o conceito de irredutibilidade de matrizes. Ele morreu em Berlim, no dia 3 de agosto de 1917, aos 67 anos.

[6]Na referência [16], a Forma Canônica de Jordan é construída de uma forma um pouco mais "limpa", isto é, não tão algébrico quanto será mostrado nesta seção.

$k_i \times k_i$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, o Teorema da Decomposição Racional nos dá uma base ordenada de V em relação à qual a matriz de N é soma direta das matrizes A_i.

Observação

Em alguns livros, como [10], por exemplo, a matriz associada a x^{k_i} é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A representação da matriz depende estritamente da ordem a qual tomamos a base cíclica, nesse caso,

$$\beta_i = \{\alpha, T\alpha, \cdots, T^{k_i-1}\alpha, T^{k_i-2}\alpha\}.$$

Suponha agora que T seja um operador linear sobre V e que o polinômio característico de T é dado por $f(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \ldots (x - \lambda_k)^{d_k}$, em que $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são distintos em F e $d_i \geq 1$. Então o polinômio mínimo de T será $p(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \ldots (x - \lambda_k)^{r_k}$, em que $1 \leq r_i \leq d_i$. Se W_i é o núcleo de $(T - \lambda_i I)^{r_i}$, então pelo Teorema da Decomposição Primária temos que $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Seja $N_i = T_i - \lambda_i I$. Então N_i é nilpotente e seu polinômio minimal é x^{r_i}. Tomemos uma base do subespaço W_i correspondente à decomposição cíclica do operador N_i. Então a matriz de T_i em relação a esta base será a soma direta das matrizes

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

cada uma com $\lambda = \lambda_i$. Uma matriz dessa forma é dita uma **matriz elementar de Jordan**[7] **com autovalor** λ. Reunindo todas as bases dos W_i obtemos uma base de V. A matriz J de T em relação a essa base é dada por

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix}$$

em que cada J_i é da forma

$$J_i = \begin{bmatrix} J_1^{(i)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^{(i)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k^{(i)} \end{bmatrix}$$

[7]O matemático francês Marie Ennemond Camille Jordan, natural de Lyon, nasceu em 5 de janeiro de 1838. Estudou matemática na École Polytechnique e, em seu doutorado, fez a tese em duas partes: a primeira *Sur le nombre des valeurs des fonctions* na área de álgebra e a segunda, intitulada *Sur des périodes des fonctions inverses des intégrales des différentielles algebriques* sobre integrais da forma $\int udz$ em que u é uma função satisfazendo uma equação algébrica $f(u, z) = 0$. Jordan trabalhou em várias áreas como grupos finitos, álgebra linear e multilinear, teoria de números, topologia de poliedros, equações diferenciais e mecânica. Afim de esclarecer uma pequena confusão, a *forma normal de Jordan* recebe esse nome devido ao seu trabalho, porém a eliminação de Gauss-Jordan para resolver a equação matricial $Ax = b$, não. Esta refere-se a Wilhelm Jordan. Camille Jordan faleceu em Paris no dia 22 de janeiro de 1922.

e cada $J_j^{(i)}$ é uma matriz elementar de Jordan com autovalor λ_i. Dizemos que uma matriz $n \times n$ que satisfaz essas condições está sob a **forma de Jordan**.

Acabamos de ver que se T é um operador linear para o qual o polinômio característico se decompõe completamente sobre o corpo de escalares, então existe uma base ordenada de V em relação à qual T é representado por uma matriz que está sob a forma de Jordan. Queremos agora mostrar que tal matriz associa-se a T de forma única, a menos da ordem dos autovalores. Ou seja, se duas matrizes estão sob a forma de Jordan e elas são semelhantes, então elas podem diferir apenas quanto à ordem dos autovalores λ_i.

Suponha que exista alguma base ordenada de V em relação à qual T seja representado pela matriz de Jordan J descrita anteriormente. Se J_i é uma matriz $d_i \times d_i$, então d_i é evidentemente a multiplicidade de λ_i como uma raiz do polinômio característico de J, ou de T. Em outras palavras, o polinômio característico de T é

$$f = (x - \lambda_1)^{d_1} \cdots (x - \lambda_k)^{d_k}.$$

Isto mostra que $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ e $d_1, \cdots, d_k$ são únicos. O fato de que J é soma direta das matrizes J_i fornece uma decomposição direta $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ invariante sob T. Observe agora que W_i deve ser o núcleo de $(T - \lambda_i I)^n$, sendo $n = dim(V)$; de fato, $J_i - \lambda_i I$ é obviamente nilpotente e $J_j - \lambda_i I$ é não singular para $j \neq i$. Portanto, os subespaços W_i são únicos. Se T_i é o operador induzido sobre W_i por T, então a matriz J_i é determinada de forma única como a forma de Frobenius de $T_i - \lambda_i I$.

Na forma matricial temos que se A é uma matriz $n \times n$ sobre o corpo F e se o polinômio característico de A se decompõe completamente sobre F, então A é semelhante sobre F a uma matriz J de ordem n sob a forma de Jordan. J é única a menos da ordem dos autovetores. Assim, existe uma matriz P, não singular, tal que $A = PJP^{-1}$. Se F é um corpo algebricamente fechado, por exemplo $\mathbb{C}$, então toda matriz quadrada de ordem n sobre F é semelhante a uma matriz, essencialmente única, sob a forma de Jordan.

Nota:

É conveniente usar a forma de Jordan quando queremos uma potência de alguma matriz. De fato, se $A = PJP^{-1}$, então $A^n = PJ^nP^{-1}$. Para encontrar a potência de um bloco de

Jordan $J_r = \lambda I + N$ podemos usar a fórmula binomial de Newton

$$(\lambda I + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \lambda^k N^{n-k}.$$

Os elementos não-nulos de N^m são 1's nas posições $(1, m+1)$, $(2, m+2)$, $\cdots$, $(r-m, r)$, em que r é a ordem de N. Se $m \geq r$, então $N^m = 0$.

Exemplo 1

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

encontre matrizes P e J tais que $AP = PJ$, ou seja, a decomposição de Jordan de A.

É fácil verificar que 1 é um autovalor de multiplicidade 3 e 2 um autovalor de multiplicidade 1. Além disso, A possui apenas dois autovetores linearmente independentes, a saber $v_1 = (14, 6, 2, 1)$ e $v_2 = (-14, 0, 0, 0)$. Assim, temos:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} -14 & -14 & -14 & 14 \\ 0 & -7 & -35/6 & 6 \\ 0 & 0 & -7/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que a matriz J não é única. Poderíamos permutar seus blocos e teríamos:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 14 & -14 & -14 & -14 \\ 6 & 0 & -7 & -35/6 \\ 2 & 0 & 0 & -7/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ou seja, quando permutamos os blocos da matriz de Jordan, basta permutar as colunas da matriz P.

Exemplo 2

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

decomponha-a na forma de Jordan.

É fácil ver que A possui dois autovalores distintos, -1 e 1, com multiplicidade 1 e 3, respectivamente. Além disso, A possui 3 autovetores linearmente independentes, a saber, $v_1 = (-1/2, 1/2, 3/2, -3/2)$, $v_2 = (-1, 1, 1, -1)$ e $v_3 = (-1, 0, -1, 0)$. Dessa forma, temos:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 3/2 & 1 & -1/2 & 1 \\ -3/2 & -1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

decomponha-a na forma de Jordan.

Como A é uma matriz triangular, seus autovalores estão sobre a diagonal principal, isto é, i e 1 são autovalores de multiplicidade 3 e 2, respectivamente. Calculando P e J, temos:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{3}{2}i & \frac{3}{2}-3i & 2+i & 1+3i & -\frac{3}{2}+3i \\ i & \frac{9}{5}-\frac{7}{5}i & 0 & 2+i & 1+3i \\ 1+i & \frac{2}{5}-\frac{11}{5}i & 0 & 0 & 2+i \\ 2 & -\frac{9}{5}-\frac{8}{5}i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No **exemplo 3**, a matriz possui entradas complexas e, conseqüentemente, as matrizes P e J também. Seria interessante, se tivéssemos uma decomposição semelhante em que essas matrizes fossem sempre reais. Veremos a seguir que isso acontece sempre que a matriz A for real.

Suponha que A seja uma matriz real que possui algum autovalor complexo. Da mesma forma que fizemos anteriormente, temos que A pode ser decomposta na sua forma de Jordan como $A = PJP^{-1}$, em que P e J têm entradas complexas. Veremos agora, que nesse caso (quando A possui entradas reais) podemos encontrar uma decomposição em que P e J são matrizes reais, partindo da decomposição acima.

Notemos primeiro que se $\lambda = a + ib$ é um autovalor de A então $\overline{\lambda} = a - ib$ também é. Além disso, se $x = v + iw$ é um autovetor associado a λ então o vetor complexo conjugado $\overline{x} = v - iw$ é um autovetor associado a $\overline{\lambda}$.

Vamos analisar o bloco J_i associado a λ (suponha que λ tenha multiplicidade n)

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{n \times n} .$$

Dessa forma temos o seguinte:

$$A(v_1 + iw_1) = Av_1 + iAw_1$$
$$A(v_1 + iw_1) = \lambda(v_1 + iw_1) = (a + ib)(v_1 + iw_1) = (av_1 - bw_1) + i(bv_1 + aw_1)$$

$$A(v_2 + iw_2) = Av_2 + iAw_2$$

$$A(v_2+iw_2) = (v_1+iw_1)+\lambda(v_2+iw_2) = (v_1+iw_1)+(a+ib)(v_2+iw_2) =$$
$$= (v_1+av_2-bw_2)+i(w_1+bv_2+aw_2)$$

$$\vdots$$

$$A(v_n+iw_n) = Av_n+iAw_n$$
$$A(v_n+iw_n) = (v_{n-1}+iw_{n-1})+\lambda(v_n+iw_n) = (v_{n-1}+iw_{n-1})+(a+ib)(v_n+iw_n) =$$
$$= (v_{n-1}+av_n-bw_n)+i(w_{n-1}+bv_n+aw_n)$$

Note que se separarmos o vetor v_k+iw_k em dois vetores v_k e w_k podemos escrever as equações acima na forma matricial da seguinte maneira:

$$A\begin{pmatrix} | & | & & | & | \\ v_1 & w_1 & \cdots & v_n & w_n \\ | & | & & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | & | \\ v_1 & w_1 & \cdots & v_n & w_n \\ | & | & & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & I & & \\ & H & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & H \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

em que

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad e \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, vamos analisar o bloco J_l associado a $\overline{\lambda}$ (da mesma forma que λ, $\overline{\lambda}$ tem multiplicidade n)

$$J_l = \begin{bmatrix} \overline{\lambda} & 1 & & \\ & \overline{\lambda} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \overline{\lambda} \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Dessa forma temos o que segue:

$$A(v_1-iw_1) = Av_1-iAw_1$$
$$A(v_1-iw_1) = \overline{\lambda}(v_1-iw_1) = (a-ib)(v_1-iw_1) = (av_1-bw_1)-i(bv_1+aw_1)$$

$$A(v_2-iw_2) = Av_2-iAw_2$$
$$A(v_2-iw_2) = (v_1-iw_1)+\overline{\lambda}(v_2-iw_2) = (v_1-iw_1)+(a-ib)(v_2-iw_2) =$$

$$= (v_1 + av_2 - bw_2) - i(w_1 + bv_2 + aw_2)$$

$$\vdots$$

$$A(v_n - iw_n) = Av_n - iAw_n$$

$$A(v_n - iw_n) = (v_{n-1} - iw_{n-1}) + \overline{\lambda}(v_n - iw_n) = (v_{n-1} - iw_{n-1}) + (a - ib)(v_n - iw_n) =$$

$$= (v_{n-1} + av_n - bw_n) - i(w_{n-1} + bv_n + aw_n)$$

Se separarmos o vetor $v_k - iw_k$ em dois vetores v_k e w_k, teremos exatamente a mesma expressão que encontramos quando fizemos isso para $v_k + iw_k$. Assim, podemos concluir que a matriz

$$\begin{pmatrix} H & I & & \\ & H & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & H \end{pmatrix}$$

substitui os dois blocos associados a λ e $\overline{\lambda}$. E na matriz P, os vetores $v_1+iw_1, \cdots, v_n+iw_n$, $v_1 - iw_1, \cdots, v_n - iw_n$, são substituídos, respectivamente, por v_1, w_1, v_2, w_2, $\cdots$, v_n, w_n.

Exemplo

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

terá a seguinte matriz de Jordan associada:

$$J = \begin{bmatrix} 2+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 1 & 1-i \\ i & 1 & -i & 1 \\ 1 & i & 1 & i \\ i & i & -i & -i \end{bmatrix}.$$

Usando o método descrito anteriormente, podemos encontrar P e J reais tais que

$A = PJP^{-1}$. Nesse caso, temos

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.3 Decomposição de Schur

Teorema 1.3.1 ***(Teorema de Schur[8])*** *Qualquer matriz A sobre $\mathbb{C}$ pode ser representada na forma $A = UTU^*$, onde U é uma matriz unitária e T é triangular. Além disso, A é normal se, e somente se, T é uma matriz diagonal.*

Demonstração:

Provaremos por indução sobre a ordem de A. Seja x um autovetor de A, isto é, $Ax = \lambda x$. Podemos assumir que $|x| = 1$. Seja W uma matriz unitária onde a primeira coluna é dada pelas coordenadas de x (para construir tal matriz basta complementar x com uma base ortonormal). Então

$$W^*AW = \begin{pmatrix} \lambda & * & * & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Pela hipótese de indução existe uma matriz unitária V tal que V^*A_1V é uma matriz triangular. Então, se $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$, $U = WU_1$ é a matriz desejada.

[8]Issai Schur nasceu em 10 de janeiro de 1875 em Mogilyov na atual Bielo Rússia. Estudou matemática e física na Universidade de Berlim e foi influenciado sobretudo por Frobenius. Schur é conhecido principalmente por seu trabalho na teoria de representação de grupos, mas também trabalhou em teoria de números, análise, teoria de grupos solúveis, combinatória e teoria de matrizes. Um de seus resultados mais fundamentais é o que chamamos hoje de Lema de Schur. Em 1922, foi eleito à Academia Prussiana de Ciências. Em 1933, ficou nas mãos dos nazistas passando por muita humilhação. Faleceu na Palestina no dia em que completava 66 anos.

É fácil verificar que as equações $T^*T = TT^*$ e $A^*A = AA^*$ são equivalentes. Basta provar que uma matriz normal triangular é uma matriz diagonal.

Seja

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Então $(TT^*)_{11} = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \cdots + |t_{1n}|^2$ e $(T^*T)_{11} = |t_{11}|^2$. Assim, a identidade $TT^* = T^*T$ implica que $t_{12} = \cdots = t_{1n} = 0$.

Agora, elimine a primeira linha e a primeira coluna e repita o procedimento.

■

Exemplo

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tem autovalor duplo $\lambda = 1$. O autovetor correspondente é (1,1). Assim, dividindo-o pela sua norma, $\sqrt{2}$, temos a primeira coluna da matriz U, e a outra coluna é ortogonal a ela:

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T$$

1.4 Decomposição de Gram (QR)

Teorema 1.4.1 *Seja A uma matriz $m \times n$ cujas colunas são vetores linearmente independentes. Então A pode ser fatorada como $A = QR$, sendo Q uma matriz $m \times n$ cujas colunas formam um conjunto ortonormal, e R é uma matriz triangular superior inversível $n \times n$.*

Demonstração:

Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Denotaremos por $a_1, a_2, ..., a_n$ as colunas de A. Como elas são linearmente independentes, elas formam uma base para o espaço coluna de A. Para obtermos um conjunto $q_1, ..., q_n$ de vetores ortonormais a partir das colunas de A, utilizaremos o processo de Gram[9]-Schmidt ou o processo de Gram-Schmidt modificado (ver [18]). Seja Q a matriz cujas colunas são $q_1, q_2, ..., q_n$, isto é, $Q = [q_1, ..., q_n]$. As colunas $q_1, q_2, ..., q_n$ de Q formam uma base ortonormal para o espaço coluna de A. Temos ainda que toda coluna a_i, $i = 1, ..., n$ é combinação linear dos vetores da base $q_1, ..., q_n$:

$$\begin{aligned} a_1 &= \langle a_1, q_1\rangle q_1 + \langle a_1, q_2\rangle q_2 + \cdots + \langle a_1, q_n\rangle q_n \\ a_2 &= \langle a_2, q_1\rangle q_1 + \langle a_2, q_2\rangle q_2 + \cdots + \langle a_2, q_n\rangle q_n \\ &\vdots \\ a_n &= \langle a_n, q_1\rangle q_1 + \langle a_n, q_2\rangle q_2 + \cdots + \langle a_n, q_n\rangle q_n \end{aligned}$$

[9]Jordan Pedersen Gram nasceu em 27 de junho de 1850 em Nustrup, Dinamarca. Em 1873, graduou-se Mestre e sua primeira publicação foi *Tidsskrift for Methematik* na área de álgebra moderna. A carreira matemática de Gram foi sempre uma balança entre matemática pura e muitas aplicações práticas. Trabalhou com probabilidade e análise numérica, envolvendo ambas e suas aplicações em muitas situações práticas. Sobre esses tópicos publicou o artigo *On series expansions determined by the methods of least squares.* Por causa desse trabalho, recebeu o título de Doutor em Ciências, em 1879. Gram publicou um trabalho posterior no *Journal für Mathematik* e provou ser de fundamental importância no desenvolvimento da teoria de equações integrais. Em 1884, publicou *Investigations of the number of primes less than a given numbers* mostrando seu interesse em teoria de números. Gram também trabalhou na função zeta de Riemann. Gram costuma ser lembrado pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt que constrói um conjunto de vetores ortogonais. Contudo, ele não foi o primeiro a usar esse método. Esse processo parece ser um resultado de Laplace e foi usado, principalmente, por Cauchy, em 1836. Gram morreu aos 65 anos num acidente trágico, em 19 de abril de 1916, em Copenhagen.

Agora precisamos conectar as matrizes A e Q. Sendo assim terá que existir uma terceira matriz $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Tomemos então

$$R = \begin{pmatrix} \langle a_1, q_1\rangle & \langle a_2, q_1\rangle & \cdots & \langle a_n, q_1\rangle \\ \langle a_1, q_2\rangle & \langle a_2, q_2\rangle & \cdots & \langle a_n, q_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_1, q_n\rangle & \langle a_2, q_n\rangle & \cdots & \langle a_n, q_n\rangle \end{pmatrix}$$

Multiplicando as matrizes Q e R teremos $QR = [Qr_1, Qr_2, ..., Qr_n]$ sendo $r_1, ..., r_n$ as colunas da matriz R.

Portanto:

$$Q_{r_i} = \langle a_i, q_1\rangle q_1 + \langle a_i, q_2 q_2\rangle + ... + \langle a_i, q_n\rangle q_n, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Assim $Q_{r_i} = a_i$. Logo $QR = A$.

Notemos agora que, R é uma matriz triangular superior, pois do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt temos que q_n é ortogonal aos vetores $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$, se $n \geq 2$. Logo,

$$R = \begin{pmatrix} \langle a_1, q_1\rangle & \langle a_2, q_1\rangle & \cdots & \langle a_n, q_1\rangle \\ 0 & \langle a_2, q_2\rangle & \cdots & \langle a_n, q_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle a_n, q_n\rangle \end{pmatrix}$$

Portanto temos $A = QR$, sendo Q uma matriz $m \times n$ com colunas ortogonais e R uma matriz $n \times n$ trangular superior. Falta agora mostra que R é uma matriz invertível. Seja $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ uma solução do sistema $Rx = 0$. Segue-se que $QRx = Q0$, ou seja, $Ax = 0$.

Mas, $Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n$, então $x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n = 0$. Como as colunas a_i, $i = 1, ..., n$ são linearmente independentes, então $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Logo $x = 0$. Como x é a única solução do sistema homogêneo $Rx = 0$, então R é invertível.

■

Exemplo

Decompondo a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

na sua forma QR obtemos:

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Capítulo 2

Funções de matrizes

Dada uma função escalar

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & f(z) \end{array}$$

queremos definir $f(A)$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Uma definição muito informal para $f(A)$ seria, simplesmente, substituir "z" por "A" na fórmula de $f(z)$. Por exemplo, se $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ com $z \neq 1$ então é razoável definir $f(A)$ por $f(A) = (I + A)(I - A)^{-1}$, em que $1 \notin \lambda(A)$ (aqui $\lambda(A)$ denota o espectro da matriz A). Ou, se

$$f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

então

$$f(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Note que aqui não é tão simples, já que a definição envolve convergência de séries.

Um questionamento interessante é saber se são mantidas as propriedades da função escalar, quando estendermos a definição de funções a matrizes. Por isso, L. Fantappiè estabeleceu algumas exigências que devem ser cumpridas para essa extensão de função a matrizes:

(i) se $f(z) = k$, então $f(A) = kI$;

(ii) se $f(z) = z$, então $f(A) = A$;

(iii) se $f(z) = g(z) + h(z)$, então $f(A) = g(A) + h(A)$;

(iv) se $f(z) = g(z) \cdot h(z)$, então $f(A) = g(A) \cdot h(A)$;

em que A é uma matriz admissível para cada função, isto é, na qual $f(A)$ faz sentido, e $f(A)$ denota a função de matriz que provém da função escalar $f(z)$. Essas exigências implicarão que qualquer identidade algébrica sobre funções escalares valerá para a função da matriz correspondente. Por exemplo, se definirmos $\operatorname{sen}(A)$ e $\cos(A)$ como dito anteriormente, temos que

$$(\operatorname{sen}(A))^2 + (\cos(A))^2 = I.$$

Uma última exigência mais sutil, porém não menos desejável, seria: se $f(z) = g(h(z))$, então $f(A) = g(h(A))$, para todo A admissível.

Muitas definições para função de matriz foram propostas por vários matemáticos desde 1883. Entre eles, Sylvester e Buccheim, Weyr, Cartan, Fantappiè, Giorgi, Schwerdtfeger, Cipolla, Richter.

2.1 Definição de Sylvester

Em 1883, Sylvester[1] definiu uma função de matriz correspondente a uma função escalar $f(z)$ pela extensão direta para matrizes da fórmula do polinômio interpolador de Lagrange para um polinômio $p(z)$ de grau $n-1$ passando por n pontos distintos, ou seja, da seguinte forma:

$$f(A) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i \neq j} \frac{A - \lambda_i I}{\lambda_j - \lambda_i} f(\lambda_j),$$

em que A é uma matriz como autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f(z) = e^z.$$

[1] O matemático britâncio James Joseph Sylvester (1814-1897) foi o primeiro matemático a usar o termo matriz para uma tabela de dados. Após De Morgan, que foi o primeiro presidente da Sociedade de Matemática de Londres, Sylvester se tornou o segundo presidente dessa Sociedade.

A possui três autovalores distintos $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$. Assim:

$$f(A) = \sum_{j=1}^{3} \left(\prod_{i \neq j} \frac{A - \lambda_i I}{\lambda_i - \lambda_j} f(\lambda_j) \right)$$

$$f(A) = \frac{(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)} f(\lambda_1) + \frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)} f(\lambda_2) + \frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)} f(\lambda_3)$$

$$f(A) = \frac{(A-2I)(A-3I)}{(2-1)(3-1)} f(1) + \frac{(A-I)(A-3I)}{(1-2)(3-2)} f(2) + \frac{(A-I)(A-2I)}{(1-3)(2-3)} f(3)$$

$$f(A) = \frac{e}{2} \begin{bmatrix} 6 & -10 & 6 \\ 6 & -10 & 6 \\ 6 & -10 & 6 \end{bmatrix} - e^2 \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 6 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix} + \frac{e^3}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 3e-2e^2 & -5e+6e^2-e^3 & 3e-4e^2+e^3 \\ 3e-3e^2 & -5e+9e^2-3e^3 & 3e-6e^2+3e^3 \\ 3e-3e^2 & -5e+9e^2-4e^3 & 3e-6e^2+4e^3 \end{bmatrix}$$

2.2 Definição de Buchheim

Como podemos notar, a definição de Sylvester não vale para matrizes com autovalores repetidos. Para resolver o problema, em 1886, Buchheim generalizou essa definição para o caso em que os autovalores não são necessariamente distintos.

Seja $p(z)$ um polinômio qualquer. Assim, podemos definir de forma única um polinômio $g_p(z)$, de grau menor ou igual a $n-1$ que passa pelos pontos $(a_i, p(a_i))$ com derivadas $p'(a_i), \cdots, p^{(s_i-1)}(a_i)$ e

$$n = \sum_{i=1}^{t} s_i \tag{2.2.1}$$

por:

$$g_p(z) = \sum_{k=1}^{t} \left(\prod_{i \neq k} (z-a_i)^{s_i} \sum_{j=0}^{s_k-1} \frac{1}{j!} \cdot g_k^{(j)}(a_k)(z-a_k)^j \right) \tag{2.2.2}$$

em que

$$g_k(z) = \frac{p(z)}{\displaystyle\prod_{i \neq k} (z-a_i)^{s_i}}.$$

Se o grau de $p(z)$ é menor ou igual e $n-1$ temos $p(z) = g_p(z)$. portanto $p(A) = g_p(A)$, se A é uma matriz quadrada de ordem n.

Se o grau de $p(z)$ é menor que n e A uma matriz quadrada de ordem n em que a_i é autovalor de A com multiplicidade s_i, para todo i, também temos $p(A) = g_p(A)$. De fato, se $h(z) = det(A - zI)$ é o polinômio minimal de A ($h(z)$ tem grau n) então $p(z) = h(z) \cdot q(z) + g_p(z)$, em que o grau de $g_p(z)$ é menor que n. Assim, o polinômio $p(z) - g_p(z) = h(z) \cdot q(z)$ e suas primeiras $s_k - 1$ derivadas são nulas para $z = \lambda_k$, $k = 1, 2, \cdots, t$, o que torna válida a igualdade $p(A) = g_p(A)$. Isto é,

$$\sum_{j=1}^{t} \prod_{i \neq j} (A - \lambda_i I)^{s_i} \sum_{k=0}^{s_j - 1} \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} \left[\frac{g_p(z)}{\prod_{l \neq j} (z - \lambda_l)^{s_l}} \right]_{z=\lambda_j} \cdot (A - \lambda_j I)^k =$$

$$= \sum_{j=1}^{t} \prod_{i \neq j} (A - \lambda_i I)^{s_i} \sum_{k=0}^{s_j - 1} \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} \left[\frac{p(z)}{\prod_{l \neq j} (z - \lambda_l)^{s_l}} \right]_{z=\lambda_j} \cdot (A - \lambda_j I)^k \tag{2.2.3}$$

Assim, se substituirmos $p(z)$ por uma função definida para os autovalores não repetidas de A então o termo do lado direito da equação acima terá sentido. No caso dos autovalores repetidos é necessário que $p(z)$ seja substituído por uma função analítica nesses pontos.

Desse modo, Buchheim define função de matriz da seguinte forma:

$$f(A) = \sum_{j=1}^{t} \prod_{i \neq j} (A - \lambda_i I)^{s_i} \sum_{k=0}^{s_j - 1} \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} \left[\frac{f(z)}{\prod_{l \neq j} (z - \lambda_l)^{s_l}} \right]_{z=\lambda_j} \cdot (A - \lambda_j I)^k \tag{2.2.4}$$

em que s_i é a multipicidade de λ_i, que é um autovalor de A.

Exemplo 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f(z) = e^z.$$

Os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 5$, com multiplicidade 2 e 1, respectivamente. Dessa forma, temos:

$$f(A) = \sum_{j=1}^{2} \prod_{i \neq j} (A - \lambda_i I)^{s_i} \sum_{k=0}^{s_j - 1} \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} \left[\frac{f(z)}{\prod_{l \neq j} (z - \lambda_l)^{s_l}} \right]_{z=\lambda_j} \cdot (A - \lambda_j I)^k$$

$$f(A) = \prod_{i \neq 1} (A - \lambda_i I)^{s_i} \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} \left[\frac{f(z)}{\prod_{l \neq 1} (z - \lambda_l)^{s_l}} \right]_{z=\lambda_1} \cdot (A - \lambda_1 I)^k$$

$$+ \prod_{i \neq 2} (A - \lambda_i I)^{s_i} \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} \left[\frac{f(z)}{\prod_{l \neq 2} (z - \lambda_l)^{s_l}} \right]_{z=\lambda_2} \cdot (A - \lambda_2 I)^k$$

$$f(A) = (A - \lambda_2 I) \left[\frac{f(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{d}{dz} \left(\frac{f(z)}{z - \lambda_2} \right)_{z=\lambda_1} \cdot (A - \lambda_1 I) \right] + (A - \lambda_1 I)^2 \frac{f(\lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}$$

$$f(A) = (A - \lambda_2 I) \left[\frac{f(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{f'(\lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2) - f(\lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \cdot (A - \lambda_1 I) \right] + (A - \lambda_1 I)^2 \frac{f(\lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}$$

$$f(A) = (A - 5I) \left[\frac{e}{-4} + \frac{e(-4) - e}{16} (A - I) \right] + (A - I)^2 \frac{e^5}{16}$$

$$f(A) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3e + e^5 & -2e + 2e^5 & e - e^5 \\ -e + e^5 & 2e + 2e^5 & e - e^5 \\ e - e^5 & 2e - 2e^5 & 3e + e^5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f(z) = e^z.$$

Os autovalores de A são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$, com multiplicidade 1 e 3, respectivamente. Dessa forma, temos:

$$f(A) = \sum_{j=1}^{2} \prod_{i \neq j} (A - \lambda_i I)^{s_i} \sum_{k=0}^{s_j - 1} \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} \left[\frac{f(z)}{\prod_{l \neq j} (z - \lambda_l)^{s_l}} \right]_{z=\lambda_j} \cdot (A - \lambda_j I)^k$$

$$f(A)=\prod_{i\neq 1}(A-\lambda_iI)^{s_i}\sum_{k=0}^{0}\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{f(z)}{\prod_{l\neq 1}(z-\lambda_l)^{s_l}}\right]_{z=\lambda_1}\cdot(A-\lambda_1I)^k$$

$$+\prod_{i\neq 2}(A-\lambda_iI)^{s_i}\sum_{k=0}^{2}\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{f(z)}{\prod_{l\neq 2}(z-\lambda_l)^{s_l}}\right]_{z=\lambda_2}\cdot(A-\lambda_2I)^k$$

$$f(A)=(A-\lambda_2I)^3\frac{f(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)^3}+(A-\lambda_1I)\left[\frac{f(\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{z-\lambda_1}\right)_{z=\lambda_2}\cdot(A-\lambda_2I)\right]$$

$$+(A-\lambda_1I)\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{f(z)}{z-\lambda_1}\right)_{z=\lambda_2}\cdot(A-\lambda_2I)^2\right]$$

$$f(A)=(A-\lambda_2I)^3\frac{f(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)^3}+(A-\lambda_1I)\left[\frac{f(\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{f'(\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)-f(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\cdot(A-\lambda_2I)\right]$$

$$+(A-\lambda_1I)\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)^2-f'(\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)+f(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}\cdot(A-\lambda_2I)^2\right]$$

$$f(A)=-e^3(A-2I)^3+(A-3I)\left[-e^2-2e^2(A-2I)-\frac{3}{2}e^2(A-2I)^2\right]$$

$$f(A)=\begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 0 & 0\\ 0 & e^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2e^2-e^3 & e^3-e^2\\ 0 & 0 & 2e^2-2e^3 & 2e^3-e^2\end{bmatrix}$$

2.3 Definição de Weyr

Em 1887, o matemático E. Weyr[2] publicou o primeiro artigo que definia funções matriciais através de séries de potências.

Seja $f(z)$ uma função analítica para $z=z_0$ e,

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\cdots+\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k+\cdots \tag{2.3.1}$$

[2]Emil Weyr nasceu em 21 de julho de 1848 na Áustria e morreu em 25 de janeiro de 1894. Estudou em Viena e na Itália. Juntamente com seu irmão, Eduard Weyr, foram os membros mais importantes da escola austríaca de geometria. Se interessaram por geometria descretiva, projetiva e geometria algébrica.

então, por simples substituição, podemos definir

$$f(A) = f(z_0)I + f'(z_0)(A - z_0 I) + \cdots + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(A - z_0 I)^k + \cdots \tag{2.3.2}$$

desde que a série convirja. O que acontece de acordo com o Teorema de Hensel.

Teorema 2.3.1 Hensel[3] *A série de potências*

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(A - z_0 I)^k$$

converge se, e somente se, todo autovalor λ_i de A está no interior ou na fronteira do círculo de convergência de $f(z)$, e para todo autovalor λ_i de multiplicidade s_i, a s_i-ésima derivada da série acima converge em λ_i para $f^{(s_i-1)}(\lambda_i)$.

As condições do Teorema de Hensel são bem mais fortes que as condições exigidas na definição de Buchheim. Para podermos observar essa dificuldade tomemos uma matriz A de forma que algum autovalor $\lambda_i - z_0$ esteja fora do círculo de convergência de $f(z)$ (lembrando que f é analítica em z_0). Seja $t \in \mathbb{C}$ tal que os autovalores $t\lambda_i - tz_0$ de $tA - tz_0 I$ são menores em valor absoluto que o raio de convergência de $f(z)$, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.

Seja $A = PJP^{-1}$ a decomposição de Jordan de A, assim temos:

$$\begin{aligned}
f(tA) &= f(z_0)I + f'(z_0)t(PJP^{-1} - Pz_0P^{-1}) + \cdots + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}t^k(PJP^{-1} - Pz_0P^{-1})^k + \cdots \\
&= Pf(z_0)P^{-1} + f'(z_0)tP(J - z_0 I)P^{-1} + \cdots + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}t^k[P(J - z_0 I)P^{-1}]^k + \cdots \\
&= Pf(z_0)P^{-1} + Pf'(z_0)t(J - z_0 I)P^{-1} + \cdots + P\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}t^k(J - z_0 I)^k P^{-1} + \cdots \\
&= P[f(z_0) + f'(z_0)t(J - z_0 I) + \cdots + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}t^k(J - z_0 I)^k + \cdots]P^{-1}
\end{aligned}$$

Mas $J = diag(J_1,\ J_2,\ \cdots,\ J_r)$, então basta calcularmos para cada J_i, tomando $z_o = \lambda_i$, $f(tJ_i)$:

$$f(tJ_i) = f(\lambda_i)I + f'(\lambda_i)t(J_i - \lambda_i I) + \cdots + \frac{f^{(s_i-1)}(\lambda_i)}{(s_i-1)!}t^{s_i-1}(J_i - \lambda_i I)^{s_i-1} \tag{2.3.3}$$

[3]A demonstração do Teorema de Hensel pode ser encontrada em [17]

em que s_i é a multiplicidade de λ_i.

Dessa forma, temos que $f(tA) = P(tA)$ em que P é um polinômio. Como qualquer polinômio está definido para toda matriz, em particular, $P(tA)$ está definido para $t = 1$. Portanto, por continuidade analítica[4] $f(A) = P(A)$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad f(z) = 1 + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2} + \cdots$$

Note que $f(x)$ é uma série geométrica. Logo, $f(x)$ converge para $x < 2$ ou $x > 4$. Ou seja, $f(2)$ não converge.

Porém, de acordo com Weyr podemos simplesmente calcular $f(A)$ da seguinte forma:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x-3)^k} = \frac{x-3}{x-4}$$

Então

$$f(A) = (A - 3I)(A - 4I)^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 12 & 16 & -5 \\ 0 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

[4]**Continuidade analítica:** Sejam duas funções f e g analíticas tais que $f(z) = g(z)$ para $z \in B$, em que $B \subset \mathbb{C}$ é um conjunto denso. Então, $f \equiv g$.

2.4 Definição de Cartan

Uma definição elegante foi proposta por E. Cartan[5], em 1928, e que envolve uma integral de linha. Suponha $f(z)$ analítica no interior de uma curva fechada Γ que contém $\lambda(A)$. Assim, definimos $f(A)$ pela matriz

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z)(zI - A)^{-1} dz, \tag{2.4.1}$$

em que a integral é tomada para cada elemento da matriz $f(z)(zI - A)^{-1}$ em torno de um caminho fechado contendo no seu interior cada uma das raízes características de A.

Note que as entradas de $(zI - A)^{-1}$ são analíticas sobre Γ e que $f(A)$ está definida sempre que $f(z)$ for analítica numa vizinhança de $\lambda(A)$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f(z) = e^z.$$

Iniciemos calculando a matriz $(zI - A)^{-1}$:

$$(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{z-4}{(z-1)(z-2)} & \dfrac{4z-14}{(z-1)(z-2)(z-3)} & \dfrac{-2(z-4)}{(z-1)(z-2)(z-3)} \\[2ex] \dfrac{-3}{(z-1)(z-2)} & \dfrac{(z+1)(z-3)-6}{(z-1)(z-2)(z-3)} & \dfrac{6}{(z-1)(z-2)(z-3)} \\[2ex] \dfrac{-3}{(z-1)(z-2)} & \dfrac{z-11}{(z-1)(z-2)(z-3)} & \dfrac{(z+1)(z-4)+12}{(z-1)(z-2)(z-3)} \end{bmatrix}$$

[5]Élie Joseph Cartan nasceu em Dolomieu, Savoie, França, em 9 de abril de 1869 e morreu em Paris em 6 de maio de 1951. Sem dúvida, Cartan foi um dos maiores matemáticos da primeira metade do século XX. Fez contribuições fundamentais na teoria dos grupos de Lie, equações diferenciais e geometria diferencial. Cartan aproveitou-se em seus trabalhos do grande conhecimento que tinha acerca dos trabalhos de Grassman e de Clifford, do primeiro na teoria das formas diferenciais e dos segundo na teoria dos "spinors". Cartan teve um filho, Henri, que foi também um grande matemático; outros dois, entretanto, tiveram finais trágicos: Louis foi um físico engajado na resistência e executado pelos nazistas e Jean um compositor talentoso que morreu aos 25 anos.

Agora, basta calcularmos a integral de linha de cada entrada da matriz acima. Sejam b_{ij} as entradas da matriz $f(A)$. Assim:

$$b_{11} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^z(z-4)}{(z-1)(z-2)}dz = \frac{3}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-1}dz - \frac{2}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-2}dz = 3e - 2e^2$$

$$b_{12} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^z(4z-14)}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz$$

$$= -\frac{5}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-1}dz + \frac{6}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-2}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-3}dz = -5e + 6e^2 - e^3$$

$$b_{13} = -\frac{2}{2\pi i}\oint \frac{e^z(z-4)}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz$$

$$= \frac{3}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-1}dz - \frac{4}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-2}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-3}dz = 3e - 4e^2 + e^3$$

$$b_{21} = b_{31} = -\frac{3}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{(z-1)(z-2)}dz = \frac{3}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-1}dz - \frac{3}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-2}dz = 3e - 3e^2$$

$$b_{23} = \frac{6}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz$$

$$= \frac{3}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-1}dz - \frac{6}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-2}dz + \frac{3}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-3}dz = 3e - 6e^2 - 3e^3$$

$$b_{22} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^z(z+1)}{(z-1)(z-2)}dz - \frac{6}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz$$

$$= -\frac{2}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-1}dz + \frac{3}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-2}dz - (3e - 4e^2 - e^3)$$

$$= -2e + 3e^2 - (3e - 6e^2 - 3e^3) = -5e + 9e^2 + 3e^3$$

$$b_{32} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^z(z-11)}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz$$

$$= -\frac{5}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-1}dz + \frac{9}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-2}dz - \frac{4}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-3}dz = 3e - 6e^2 - 3e^3$$

$$b_{33} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^z(z+1)(z-4)}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz + \frac{12}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz$$

$$= -\frac{3}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-1}dz + \frac{6}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-2}dz - \frac{2}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z-2}dz + 2(3e - 6e^2 + 3e^3)$$

$$= -3e + 6e^2 - 2e^3 + 2(3e - 6e^2 - 3e^3) = 3e - 6e^2 + 4e^3$$

Portanto $f(A)$ será da forma

$$f(A) = \begin{bmatrix} 3e - 2e^2 & -5e + 6e^2 - e^3 & 3e - 4e^2 + e^3 \\ 3e - 3e^2 & -5e + 9e^2 - 3e^3 & 3e - 6e^2 + 3e^3 \\ 3e - 3e^2 & -5e + 9e^2 - 4e^3 & 3e - 6e^2 + 4e^3 \end{bmatrix}$$

que confere com o resultado encontrado no exemplo dado na **seção 2.1**.

2.5 Outras definições

Em 1928, o matemático italiano Luigi Fantappiè impôs as condições I-IV (início deste capítulo) e mais uma sobre a dependência analítica de $f(At)$ em relação a t. Sua definição é equivalente à de Cartan, informalmente falando, apenas uma maneira diferente de fazer o cálculo.

No mesmo ano, G. Giorgi definiu função de matriz baseado em uma propriedade das funções polinomiais $p(z)$, a saber, se P é uma matriz não singular então $p(PAP^{-1}) = Pp(A)P^{-1}$. Assim, usando a forma canônica de Jordan (**seção 2.1**), definiu $f(J)$ de modo que $f(z)$ deve ser analítica para os zeros repetidos do polinômio minimal e apenas definida para os não repetidos (caracterizando a equivalência com a definição de Buchheim).

M. Cipolla, em 1932, reescreveu a definição de Giorgi utilizando uma função multivalente ao invés de uma univalente[6], que se utiliza da decomposição de Jordan de A para calcular $f(A)$.

Em 1935, H. Scwerdtfeger definiu funções matriciais levando em consideração a separação do polinômio minimal $M(z)$ em frações parciais da seguinte forma:

$$\frac{1}{M(z)} = \sum_{k=1}^{t} \frac{h_k(z)}{(z - \lambda_k)^{s_k}}$$

em que $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$ são as raízes distintas de $M(z)$.

Assim a função fica definida por

$$f(A) = \sum_{k=1}^{t} G_k \sum_{i=0}^{s_k - 1} f^{(i)}(\lambda_k) \frac{(A - \lambda_k I)^i}{i!},$$

[6]Uma função é univalente num conjunto S se ela tem um único valor correspondente a cada valor de z em S. Quando isso não acontece, a função é dita ser multivalente. De um modo geral, o estudo sobre funções multivalentes pode ser feito lidando com funções univalentes.

em que

$$G_k = g_k(A) \quad e \quad g_k(z) = \frac{h_k(z)M(z)}{(z-\lambda_k)^{s_k}}.$$

A definição mais recente, datada de 1951, feita pelo matemático Richter, é baseada em aproximações por séries de potência para um bloco de Jordan.

Todas as definições feitas até o momento estão relacionadas. Por exemplo, as definições de Buchheim, Giorgi, Schwerdtfeger e Richter, são essencialmente equivalentes. Assim como as definições de Cartan e Fantappiè. Algumas são mais restritas, como as de Sylvester e Weyr. E, finalmente, a mais completa, a definição de Cipolla. É possível mostrar as equivalências citadas e "hierarquizar" tais definições de acordo com o conjunto de matrizes em que podem ser aplicadas. Isso pode ser encontrado em [17].

Como nosso interesse é trabalhar, em particular, com a função exponencial, não há porque nos preocuparmos com a definição que iremos utilizar, já que esta função é analítica em todo o plano complexo. De qualquer modo, adotaremos daqui em diante, a definição de Cartan, por sua elegância.

2.6 Caracterização de Jordan

Embora um pouco inútil do ponto de vista computacional, a definição de Cartan pode ser usada para derivar caracterizações mais práticas de $f(A)$. por exemplo, se $f(A)$ está definida e

$$A = XBX^{-1} = X\,diag(B_1, \cdots, B_p)X^{-1}, \;\; B_i \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$$

então é fácil verificar que

$$f(A) = Xf(B)X^{-1} = X\,diag(f(B_1), \cdots, f(B_p))X^{-1}.$$

No caso em que B_i são blocos de Jordan, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.6.1 *Seja* $XAX^{-1} = J = diag(J_1, \cdots, J_p)$ *a Forma Canônica de Jordan de*

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (seção 2.1) com

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

sendo um bloco de Jordan $r_i \times r_i$. Se $f(z)$ é analítica sobre um conjunto aberto contendo $\lambda(A)$, então

$$f(A) = X diag(f(J_1), \cdots, f(J_p))X^{-1}$$

em que

$$f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \dfrac{f^{(2)}(\lambda_i)}{2!} & \cdots & \dfrac{f^{(r_i-1)}(\lambda_i)}{(r_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & f(\lambda_i) & \ddots & \dfrac{f^{(2)}(\lambda_i)}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & f'(\lambda_i) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

Demonstração:

Como já foi comentado na seção 2.1, um bloco de Jordan pode ser decomposto numa soma de uma matriz diagonal λI e uma matriz nilpotente $N = (\delta_{i,j-1})$. Assim, vamos analisar $f(G)$ em que $G = \lambda I + N$ é um bolco de Jordan de ordem q.

Suponha que $(zI - G)$ é não singular. Como

$$(zI - G)^{-1} = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{(z-\lambda)^{k+1}}$$

segue da equação (2.4.1) que

$$f(G) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(z)(zI-G)^{-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(z)\sum_{k=0}^{q-1}\frac{N^k}{(z-\lambda)^{k+1}}dz$$

$$= \sum_{k=0}^{q-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-\lambda)^{k+1}}dz\right]N^k = \sum_{k=0}^{q-1}\frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}N^k.$$

Além disso, do fato que $N = (\delta_{i,j-1})$ então $N^k = (\delta_{i,j-k})$. Assim, o teorema fica demonstrado. ■

Capítulo 3

A Matriz Exponencial

Uma das funções de matrizes mais computadas é a exponencial

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}.$$

Vários algoritmos para computar e^{tA} foram propostos, mas muitos deles são de qualidade duvidosa, como mostram Moler and Van Loan em [14]. Mostraremos aqui alguns desses métodos, as dificuldades apresentadas e sua eficiência. Começaremos com uma análise de sensibilidade da exponencial de uma matriz.

3.1 A sensibilidade do problema

Estamos interessados na perturbação relativa

$$\varphi(t) = \frac{\|e^{t(A+E)} - e^{tA}\|}{\|e^{tA}\|}.$$

Nos três teoremas seguintes que são provados em [14], resumimos alguns limitantes superiores para $\varphi(t)$.

Teorema 3.1.1 *Se* $\alpha(A) = max\{Re(\lambda); \lambda$ *é autovalor de* $A\}$ *e* $\mu(A) = max\{\mu; \mu$ *é autovalor de* $(A^* + A)/2\}$, *então*

$$\varphi(t) \leq t\|E\|e^{[\mu(A)-\alpha(A)+\|E\|]\,t} \quad (t \geq 0).$$

Teorema 3.1.2 *Se $A = PJP^{-1}$ é a decomposição de Jordan de A e m é a dimensão do maior bloco de Jordan em J, então*

$$\varphi(t) \leq t\|E\|(M_j(t))^2 e^{M_j(t)\|E\|\,t} \quad (t \geq 0),$$

em que

$$M_j(t) = m \cdot cond(P) \cdot \max_{0\leq j\leq m-1} \left(\frac{t^j}{j!}\right),$$

e

$$cond(P) = \|P\|\|P^{-1}\|.$$

Teorema 3.1.3 *Se $A = Q(D+N)Q^*$ é a decomposição de Schur de A, em que D é uma matriz diagonal e N estritamente triangular superior ($n_{ij} = 0$, $i \geq j$), então*

$$\varphi(t) \leq t\|E\|(M_s(t))^2 e^{M_s(t)\|E\|\,t} \quad (t \geq 0),$$

em que

$$M_s(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\|N\|\,t)^k}{k!}.$$

Corolário 3.1.1 *Se A é uma matriz normal, então*

$$\varphi(t) \leq t\|E\|e^{\|E\|t}.$$

Demonstração:

Usando a decomposição de Schur da matriz A, temos $A = Q(D+N)Q^*$ e $A^* = Q(D+N)^*Q^*$, como no teorema anterior. Mas A é normal, ou seja, $AA^* = A^*A$. Logo,

$$Q(D+N)Q^*Q(D+N)^*Q^* = Q(D+N)^*Q^*Q(D+N)Q^*.$$

Conseqüentemente,

$$(D+N)(D+N)^* = (D+N)^*(D+N).$$

Portanto, $D+N$ é uma matriz normal e triangular superior. Logo, $D+N$ é uma matriz diagonal e assim, N é identicamente nula. Então, no Teorema anterior temos $M_s(t) = 1$ e finalmente

$$\varphi(t) \leq t\|E\|e^{\|E\|t}.$$

Este corolário prova que a perturbação $\varphi(t)$ para matrizes normais é tão pequena quanto se pode esperar. O que mostra que o problema e^A é bem condicionado quando A é normal. Esta observação é confirmada pelo comportamento do *número de condição da matriz exponencial* $v(A,t)$, definido por

$$v(A,t) = \max_{\|E\|\leq 1} \left\| \int_o^t e^{A(t-s)} E e^{As} ds \right\| \cdot \frac{\|A\|}{\|e^{At}\|}$$

A partir daí podemos mostrar que existe uma matriz E tal que

$$\frac{\|e^{t(A+E)} - e^{tA}\|}{\|e^{tA}\|} \approx v(A,t) \frac{\|A\|}{\|E\|}.$$

Então, se $v(A,t)$ é grande, pequenas mudanças em A podem causar grandes mudanças em e^{At}. Além disso, é fácil verificar que

$$v(A,t) \geq t\,\|A\|$$

com igualdade apenas quando A é normal.

3.2 Métodos de aproximações racionais

3.2.1 Aproximantes de Taylor

Inicialmente, podemos criar um algoritmo para aproximar e^A baseado apenas na definição

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots ,$$

através do truncamento dessa série.

Dessa forma, seja

$$T_k(A) = \sum_{j=0}^{k} \frac{A^j}{j!}.$$

É fácil verificar que, para k suficientemente grande, temos

$$\|T_k(A) - e^A\| \leq \frac{\|A\|^{k+1}}{(k+1)!} \left(\frac{1}{1 - \|A\|/(k+2)} \right) \tag{3.2.1}$$

e portanto dado um erro δ tolerado, podemos encontrar k tal que

$$\|T_k(A) - e^A\| < \delta$$

e a partir daí calcular T_k.

Da equação (3.2.1) podemos ver que, se a matriz A tiver norma menor que 1 então, k será pequeno e, conseqüentemente, o resultado será satisfatório. Caso contrário, k será grande e o cálculo das potências de A resultará em muito erro de arredondamento, devido à memória de armazenamento da máquina. Ou seja, na maioria dos casos, esse algoritmo é ineficiente.

Em MATLAB, o algoritmo da aproximação de Taylor[1] se utiliza do **Algoritmo 11.2.2** de [5] no cálculo das potências de A, a fim de reduzir o custo computacional:

Algoritmo 3.2.1 *Dado um inteiro positivo s e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, o seguinte algoritmo computa $F = A^s$.*

> `Seja` $s = \sum_{k=0}^{t} \beta_k 2^k$ `a expansão binária de` s `com` $\beta_t \neq 0$.
> $Z = A; q = 0$
> **enquanto** $\beta_q = 0$
> $Z = Z^2; q = q + 1$
> **fim**
> $F = Z$
> **para** $k = q + 1 : t$
> $Z = Z^2$
>   **se** $\beta_k \neq 0$
> $F = FZ$
>   **fim**
> **fim**

Esse algoritmo requer em torno de $2floor[log_2(s)]$ multiplicações matriciais. Se s é uma potência de 2, então somente $log_2(s)$ multiplicações matriciais são necessárias.

[1] O matemático inglês Brook Taylor nasceu em 18 de agosto de 1685 na cidade de Middlesex, Inglaterra e faleceu em 29 de dezembro de 1731, em Londres. Como membro da Royal Society, esteve no meio do grande conflito em atribuir a invenção do cálculo a Newton ou a Leibniz.

Exemplo:

Seja A a matriz de Hilbert[2] de ordem 5. Logo, o menor k que satisfaz a equação (3.2.1), considerando $\delta = 10^{-6}$, será $k = 11$ e portanto temos a seguinte aproximação para e^A

$$e^A \approx T_{11}(A) = \begin{pmatrix} 3.3206 & 1.2579 & 0.8769 & 0.6768 & 0.5525 \\ 1.2579 & 1,7774 & 0.5718 & 0.4543 & 0.3776 \\ 0.8769 & 0.5718 & 1.4344 & 0.3524 & 0.2973 \\ 0.6768 & 0.4543 & 0.3524 & 1.2904 & 0.2478 \\ 0.5525 & 0.3776 & 0.2973 & 0.2478 & 1.2134 \end{pmatrix}.$$

Veremos mais adiante que esta é uma boa aproximação para a matriz exponencial.

3.2.2 Aproximantes de Padé

A (p, q)-aproximação de Padé[3] para e^A é definida por

$$R_{pq}(A) = \frac{N_{pq}(A)}{D_{pq}(A)}$$

em que

$$N_{pq}(A) = \sum_{j=0}^{p} \frac{(p+q-j)!p!}{(p+q)!j!(p-j)!} A^j$$

e

$$D_{pq}(A) = \sum_{j=0}^{p} \frac{(p+q-j)!q!}{(p+q)!j!(q-j)!} (-A)^j.$$

Pode-se garantir a não singularidade de $D_{pq}(A)$, se p e q forem suficientemente grandes ou, então, se os autovalores da matriz A forem negativos.

[2] A matriz de Hilbert $H_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é definida por $h_{ij} = 1/(i+j-1)$, [7]

[3] Henri Eugène Padé nasceu em Abbeville na região de Picardy na França em 17 de dezembro de 1863. Estudou no Lyceé St Louis e freqüentou a École Normale Supérieure em Paris. Em 1892, apresentou sua tese de doutorado *Sur la représentation approchee d'une fonction par des fractions rationelles* em Paris, orientado por Hermite, grande matemático da época. Em sua tese, Padé fez o primeiro estudo sistemático do que chamamos hoje de aproximantes de Padé. Após completar seu doutorado, Padé continuou estudando aproximantes, principalmente para a função exponencial. Em 1906, recebeu o Grand Prix da Academia de Ciências da frança. Padé faleceu em 8 de julho de 1953 em Aix-en-Provence, França.

Infelizmente, os aproximantes de Padé são bons somente próximos da origem, como mostra a seguinte identidade [5]:

$$e^A = R_{pq}(A) + \frac{(-1)^q}{(p+q)!} A^{p+q+1} D_{pq}(A)^{-1} \int_0^1 u^p (1-u)^q e^{A(1-u)} du. \qquad (3.2.2)$$

O erro de arredondamento e o custo computacional das aproximações de Taylor e Padé crescem muito quando $t\|A\|$ cresce ou quando a expansão dos autovalores da matriz A aumenta. Ambas as dificuldades podem ser controladas fazendo uso de uma propriedade da função exponencial:

$$e^A = (e^{A/m})^m.$$

A idéia é escolher m sendo uma potência de 2 para que $e^{A/m}$ possa ser calculada confiável e eficientemente, e então formar a matriz $e^A = (e^{A/m})^m$ elevando-se ao quadrado repetidamente. Um critério geralmente utilizado para escolher m é tomar a menor potência de 2 de forma que $\frac{\|A\|}{m} \leq 1$. Com esta restrição, $e^{A/m}$ pode ser calculada satisfatoriamente por aproximações de Taylor ou Padé. Quando bem implementado, o algoritmo resultante, conhecido como "scaling and squaring" é um dos mais efetivos que conhecemos. Dessa forma, temos:

$$e^A = (e^{A/2^j})^{2^j}.$$

Lema 3.2.1 [4] *Se* $\|A\| \leq \frac{1}{2}$*, então* $R_{pq}(A) = e^{A+F}$ *em que*

$$\|F\| \leq 8 \, \|A\|^{p+q+1} \frac{p!q!}{(p+q)!(p+q+1)!}.$$

Um resultado essencial na construção desse algoritmo é dado pelo Teorema 3.2.1.

Teorema 3.2.1 *Se* $\frac{\|A\|}{2^j} \leq \frac{1}{2}$ *então existe* $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tal que* $(R_{pq}(A/2^j))^{2^j} = e^{A+E}$*, em que*

$$\|E\| \leq 2^{3-(p+q)} \frac{p!q!}{(p+q)!(p+q+1)!} \|A\|.$$

Demonstração:

Do Lema 3.2.1, $R_{pq}(A/2^j) = e^{A/2^j+F}$ em que

$$\|F\| \leq 8 \left(\frac{\|A\|}{2^j}\right)^{p+q+1} \frac{p!q!}{(p+q)!(p+q+1)!}.$$

[4] A prova do Lema pode ser encontrada em [14]

Note que se $E = 2^j F$, então

$$(R_{pq}(A/2^j))^{2^j} = (e^{A/2^j + F})^{2^j} = e^{A+E}.$$

■

Os parâmetros p e q podem ser determinados de acordo com algum erro relativo tolerado. Assim, se

$$\epsilon(p,q) = 2^{3-(p+q)} \frac{p!q!}{(p+q)!(p+q+1)!}.$$

temos que $\epsilon(p,q)$ é minimizado quando $p = q$.

Corolário 3.2.1 *Se* $\dfrac{\|A\|}{2^j} \leq \dfrac{1}{2}$ *então existe* $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tal que* $(R_{pq}(A/2^j))^{2^j} = e^{A+E}$, *em que*

$$\|E\| \leq \epsilon(q,q)\|A\|.$$

Corolário 3.2.2 *Se* $\dfrac{\|A\|}{2^j} \leq \dfrac{1}{2}$ *então* $(T_k(A/2^j))^{2^j} = e^{A+E}$, *em que*

$$\frac{\|E\|}{\|A\|} \leq 8\left(\frac{\|A\|}{2^j}\right)^k \cdot \frac{1}{k+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-3} \frac{1}{k+1}.$$

Notemos que nas condições dos corolários acima, a aproximação de Taylor T_k é satisfatória. Além disso, esses corolários podem ser usados para determinar q e j. Por exemplo, se ϵ é um erro tolerável, podemos escolher entre os muitos pares (q,j) de forma que as desigualdades dos corolários impliquem

$$\frac{\|E\|}{\|A\|} \leq \epsilon.$$

Como para se calcular $(R_{qq}(A/2^j))^{2^j}$ exigem-se aproximadamente $\left(q + j + \dfrac{1}{3}\right)n^3$ operações no seu cálculo, é interessante escolhermos o par (q,j) de forma que $q+j$ seja mínimo e assim minizarmos o custo computacional. A Tabela 1 mostra esse pares "ótimos" para vários valores de ϵ e $\|A\|$. Com efeito de comparação, também incluímos o par correspondente (k,j) associado com a aproximação $(T_k(A/2^j))^{2^j}$. Para esse cálculo, são necessárias aproximadamente $\left(k + j + \dfrac{1}{3}\right)n^3$ operações.

Para enterdermos a Tabela 1, dados ϵ e $\|A\|$, o par ordenado de cima é o (q,j) ótimo associado com $(R_{qq}(A/2^j))^{2^j}$, enquanto o par ordenado de baixo especifica a escolha mais eficiente de (k,j) associada com $(T_k(A/2^j))^{2^j}$.

Tabela 3.1: Parâmetros ótimos para as aproximações de Padé e Taylor

	$\epsilon = 10^{-3}$	$\epsilon = 10^{-6}$	$\epsilon = 10^{-9}$	$\epsilon = 10^{-12}$	$\epsilon = 10^{-15}$
$\|A\| = 10^{-2}$	(1,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(3,0)
	(1,0)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)
$\|A\| = 10^{-1}$	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(4,0)
	(3,0)	(4,0)	(4,2)	(4,4)	(5,4)
$\|A\| = 10^{0}$	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	(5,1)	(7,1)	(6,3)	(8,3)	(7,5)
$\|A\| = 10^{1}$	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
	(4,5)	(6,5)	(8,5)	(7,7)	(9,7)
$\|A\| = 10^{2}$	(2,8)	(3,8)	(4,8)	(5,8)	(6,8)
	(4,8)	(5,9)	(7,9)	(9,9)	(10,10)
$\|A\| = 10^{3}$	(2,11)	(3,11)	(4,11)	(5,11)	(6,11)
	(5,11)	(7,11)	(6,13)	(8,13)	(8,14)

Com base na tabela, verificamos que aproximações de Padé são geralmente mais eficientes que aproximações de Taylor. Quando a norma de A é pequena, a aproximação de Padé requer cerca de metade do trabalho para alguma precisão dada. Quando $\|A\|$ aumenta, essa vantagem decresce devida a grande quantidade de "scaling" exigida.

O erro relativo limite pode ser derivado dos resultados anteriores. E, admitindo que E e A são matrizes comutativas, temos

$$\frac{\|(R_{qq}(A/2^j))^{2^j} - e^A\|}{\|e^A\|} = \frac{\|e^A(e^E - I)\|}{\|e^A\|} \leq \|E\|\, e^{\,\|E\|} \leq \epsilon\|A\|\, e^{\,\epsilon\|A\|}.$$

Um erro semelhante pode ser derivado para a aproximação de Taylor.

Essa análise e a tabela não levam em consideração o erro de arredondamento, embora esse seja o ponto fraco do método.

Numericamente, o algoritmo da aproximação de Padé por "scaling and squaring" é o seguinte

Algoritmo 3.2.2 *Dado $\delta > 0$ e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, o seguinte algoritmo computa $F = e^{A+E}$ em que $\|E\| \leq \delta\|A\|$*

```
j=max(0, 1+floor(log₂‖A‖))
```
$A = A/2^j$

`Seja` q `o menor inteiro não negativo tal que` $\epsilon(q,q) \leq \delta$

$D = I;\ N = I;\ X = I;\ c = 1$

para $k = 1 : q$

$\quad c = c(q-k+1)/[(2q-k+1)k]$

$\quad X = AX;\ N = N + cX;\ D = D + (-1)^k cX$

fim

`Resolva o sistema usando eliminação Gaussiana`

para `k=1:j`

$\quad F = F^2$

fim

O Algoritmo acima é usado na função *expm1* do MATLAB, fazendo $c = \frac{1}{2}$ e $q = 6$, ou seja, é utilizada a (6,6)-aproximação de Padé (aproximação racional em que numerador e denominador são polinômios de grau 6).

Exemplos:

Sejam as matrizes A e B de Hilbert e de Vandermonde, respectivamente, de ordem 5. Elas possuem os seguintes espectros:

$$\lambda_A = \{0, 0.0003, 0.0114, 0.2085, 1.5671\}$$

$$\lambda_B = \{0.0375, -0.8496, 6.7954, -28.9437, 45.9604\}$$

Usando a função *expm1* do MATLAB encontramos os seguinte resultados:

$$e^A = \begin{pmatrix} 3.3201 & 1.2579 & 0.8769 & 0.6768 & 0.5525 \\ 1.2579 & 1,7774 & 0.5718 & 0.4543 & 0.3776 \\ 0.8769 & 0.5718 & 1.4344 & 0.3524 & 0.2973 \\ 0.6768 & 0.4543 & 0.3524 & 1.2904 & 0.2478 \\ 0.5525 & 0.3776 & 0.2973 & 0.2478 & 1.2134 \end{pmatrix}$$

$$e^B = 1.0e+020 * \begin{pmatrix} 0.2537 & 0.0721 & 0.0254 & 0.0123 & 0.0081 \\ 0.5857 & 0.1664 & 0.0587 & 0.0283 & 0.0187 \\ 1.4078 & 0.4000 & 0.1412 & 0.0681 & 0.0449 \\ 3.1277 & 0.8886 & 0.3137 & 0.1512 & 0.0997 \\ 6.2857 & 1.7858 & 0.6304 & 0.3039 & 0.2003 \end{pmatrix}$$

A matriz A, embora seja mal condicionada, possui seu espectro bem próximo da origem o que aproxima sua norma de zero. Dessa forma o algoritmo funciona perfeitamente bem, como mostra a equação (3.2.2). Já a matriz B é mais bem condicionada que a matriz A, porém seu espectro está muito espalhado, e bem distante da origem, o que torna o resultado um tanto quanto ruim.

3.3 Método dos autovetores

Os métodos que se utilizam de decomposição de matrizes são provavelmente os mais eficientes para problemas que envolvem matrizes grandes. Se A for simétrica (hermitiana), então esses métodos se reduzem a um algoritmo bem simples.

As decomposições de matrizes são baseadas em transformações de semelhança da forma $A = SBS^{-1}$. Dessa forma, é fácil verificar que

$$e^{tA} = Se^{tB}S^{-1}.$$

A idéia é encontrar S tal que e^{tB} seja fácil de computar. A dificuldade é que S pode ser quase singular, o que torna a matriz de autovetores extremamente mal condicionada.

Quando a matriz é simétrica (hermitiana), podemos usar o Teorema Espectral, que afirma que toda matriz simétrica (hermitiana) pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal (unitária), ou seja, existe uma matriz ortogonal (unitária) Q tal que, $A = QDQ^{-1}$, em que D é uma matriz diagonal. Nesse caso, não há problema algum, pois o cálculo de e^{tD} é bem fácil.

O problema surge quando a matriz, não simétrica, não possui um conjunto completo de autovetores. Nesse caso podemos recorrer a uma decomposição de Jordan $A = XJX^{-1}$, em que J é a matriz de Jordan [3] e teremos uma forma fechada para a exponencial de cada bloco de Jordan. A dificuldade do método se concentra no fato que a decomposição de Jordan não pode ser computada usando aritmética do ponto flutuante. Um simples erro de arredondamento pode tornar autovalores a princípio distintos em autovalores múltiplos ou vice-versa, alterando toda a estrutura de J e X.

Em MATLAB, a função *expm3* computa a matriz exponencial usando a decomposição espectral e por isso falha quando a matriz é defectiva. Além disso, a precisão é determinada pelo número de condição da matriz de autovetores, e conseqüentemente, se ela for quase singular, a precisão não será boa.

3.4 Método dos subespaços de Krylov

Até agora nos preocupamos com o cálculo explícito da matriz exponencial, porém, em muitas aplicações isso não é necessário, somente o produto $e^{tA}v$, como no caso do Problema de Valor Inicial $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = v$. Freqüentemente, A é grande e esparsa, em particular se a EDO surgir da discretização espacial de uma EDP. Como e^{tA} será densa mesmo com A esparsa, gostaríamos de evitar o cálculo dessa matriz.

Com esse objetivo são propostos dois métodos baseados nos subespaços de Krylov[5]: o *método de Arnoldi* e o *método de Lanczϕs*.

3.4.1 Método de Arnoldi

Seja A uma matriz quadrada complexa de dimensão (grande) N, e $v \in \mathbb{C}^N$, um vetor unitário dado. O *processo de Arnoldi* gera uma base ortonormal $V_m = [v_1, \ldots, v_m]$ do espaço de Krylov $K_m = span\{v, Av, A^2v, \ldots, A^{m-1}v\}$ e uma matriz Hessemberg[6] superior H_m de dimensão m tal que

$$AV_m = V_mH_m + h_{m+1,m}v_{m+1}e_m^T \tag{3.4.1}$$

[5]O matemático russo Nikolai Mitrofanovich Krylov, nascido em 29 de novembro de 1879 na cidade de St Petersburg, publicou mais de 200 artigos nas áreas de análise e físico-matemática. Trabalhou, principalmente, em interpolação e soluções numéricas para equações diferenciais, onde obteve muitos resultados efetivos para os erros. Morreu em Moscou em 11 de maio de 1955.

[6]H é dita Hessemberg superior se $h_{ij} = 0$, quando $i \geq j + 2$.

em que e_i é o i-ésimo vetor unitário de $\mathbb{R}^m$ e V_m+1 é ortogonal a $V_1, \cdots, V_m$. Por indução, isso implica que

$$q_{m-1}(A)v = V_m\, q_{m-1}(H_m)\, e_1 \tag{3.4.2}$$

para todos os polinômios q_{m-1} de grau menor ou igual a $m-1$.

Um uso clássico do processo de Arnoldi está na solução de sistemas de equações lineares, quando é usada a aproximação

$$(\lambda I - A)^{-1} v \approx V_m (\lambda I - H_m)^{-1}\, e_1, \tag{3.4.3}$$

em que λ não é um autovalor de A nem de H_m. A última condição é sempre satisfeita quando λ não está no *campo de valores* de A

$$\mathcal{F}(A) = \{x^* A x\,;\, x \in \mathbb{C}^N\,,\, \|x\| = 1\}. \tag{3.4.4}$$

Como (3.4.1) implica $H_m = V_m^* A V_m$,

$$\mathcal{F}(H_m) \subset \mathcal{F}(A). \tag{3.4.5}$$

Agora, seja f analítica numa vizinhança de $\mathcal{F}(A)$. Então, por (2.4.1), temos

$$f(A)v = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(\lambda)(\lambda I - A)^{-1} v d\lambda, \tag{3.4.6}$$

em que Γ é uma curva que circunda $\mathcal{F}(A)$. De (3.4.3), podemos reescrever (3.4.6) da seguinte forma:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(\lambda)\, V_m\, (\lambda I - H_m)^{-1}\, e_1\, d\lambda = V_m\, f(H_m)\, e_1. \tag{3.4.7}$$

Assim temos a seguinte aproximação

$$f(A)v \approx V_m\, f(H_m)\, e_1. \tag{3.4.8}$$

Na prática, temos que o cálculo da expressão $f(H_m)\, e_1$, quando $m \ll N$, é geralmente muito mais fácil que computar $f(A)\, v$, por exemplo, pela diagonalização de H_m. Essa é a vantagem do método, ele faz uma redução muito grande na ordem do problema.

É claro que, como estamos interessados na função exponencial, teremos a seguinte aproximação

$$e^A v \approx V_m \, e^{H_m} \, e_1. \tag{3.4.9}$$

Em [9], são deduzidos alguns resultados sobre limitações para o erro $\epsilon_m = \|e^{tA}v - V_m e^{tH_m} e_1\|$, supondo-se que A seja hermitiana semidefinida negativa ou, então, que A seja anti-hermitiana.

Arnoldi Básico

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Seja $Q = (q_1 \cdots q_n)$ uma matriz ortogonal tal que $Q^T AQ = H$, H Hessemberg superior. Logo, $AQ = QH$ e, comparando colunas, temos que:

$$Aq_k = \sum_{i=1}^{k+1} h_{ik} q_i \quad 1 \le k \le n-1.$$

Assim,

$$h_{k+1,k} q_{k+1} = Aq_k - \sum_{i=1}^{k} h_{ik} q_i = r_k$$

e $h_{ik} = q^T A q_k$, $i = 1, \cdots, k$. Logo, se $r_k \neq 0$,

$$q_{k+1} = r_k / h_{k+1,k}, \qquad h_{k+1,k} = \|r_k\|.$$

Dado então um vetor q_1 unitário, o procedimento de Arnoldi é o seguinte:

Algoritmo 3.4.1

$r_0 = q_1$

$h_{1,0} = 1$

$k = 0$

enquanto $h_{k+1,k} \neq 0$

  $q_{k+1} = r_k / h_{k+1,k}$

  $k = k + 1$

  $r_k = Aq_k$

  para $i = 1, \cdots, k$

  $h_{ik} = q_i^T w$

$r_k = r_k - hikq_i$

fim

$h_{k+1,k} = \|r_k\|$

fim

Se $w = Aq_k$, o *loop* externo realiza o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt; se $w = r_k$, o *loop* realiza o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt modificado. Podemos observar que os vetores $q_1, \cdots, q_k$ formam uma base para o espaço de Krylov $K_k = span\{q_1,\, Aq_1,\, A^2q_1, \ldots,\, A^{k-1}q_1\}$. O método gera, a cada k passos, uma matriz Q_k com k colunas ortonormais tal que $AQ_k = Q_kH_k + r_ke_k^T$, em que H_k é uma matriz Hessemberg superior. Observemos que o método depende crucialmente da escolha do vetor inicial q_1.

3.4.2 Método de Lanczos

Infelizmente, o método de Arnoldi exige longas repetições para a construção da base de Krylov. O *método de Lanczos* supera essa dificuldade computando uma base auxiliar $W_m = [w_1, \ldots, w_m]$ que gera o subespaço de Krylov relativo à matriz A^* e o vetor w_1. Os vetores de Lanczos v_j e w_j são construídos de forma que satisfaçam uma condição de biortogonalidade. Isso resultará em (3.4.1), mas agora com uma matriz tridiagonal em blocos $H_m = D_m^{-1}\, W_m^*\, A\, V_m$. Contudo, diferente do caso de Arnoldi, nem V_m nem W_m são matrizes ortogonais.

Capítulo 4

Uma aplicação da matriz exponencial

4.1 O problema do oscilador harmônico amortecido forçado

Vamos tratar aqui de um exemplo simples e conhecido da Mecânica Clássica. Trata-se do problema do oscilador harmônico amortecido forçado[1]. Esse sistema é descrito pela equação diferencial linear de segunda ordem

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \gamma\dot{x}(t) + f(t) \tag{4.1.1}$$

que nada mais é que a segunda lei de Newton para uma partícula de massa m ligada a uma mola com constante de elasticidade k e se movendo em um meio (viscoso) que exerce sobre a partícula uma força do tipo $-\gamma v(t)$ ($v(t)$ é a velocidade da partícula no tempo t). Além disso, age sobre a partícula uma força externa $f(t)$ que depende apenas do tempo. Nos dados acima temos que $m > 0$, $k \geq 0$ e $\gamma \geq 0$.

Dividindo a equação (4.1.1) por m, podemos escrevê-la como

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) - \rho\dot{x}(t) + g(t) \tag{4.1.2}$$

em que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \rho = \frac{\gamma}{m}, \quad g(t) = \frac{1}{m}f(t).$$

[1]Não é pretensão deduzirmos a equações desse sistema.

A equação (4.1.2) pode ser transformada em um sistema de duas equações de primeira ordem. Fazendo $v(t) = \dot{x}(t)$, temos:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\omega_0^2 x(t) - \rho v(t) + g(t) \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Na forma matricial temos o seguinte:

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + F(t) \tag{4.1.4}$$

em que

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\rho \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Note que a matriz A tem coeficientes constantes. Sabemos que a solução dessa equação, com uma condição inicial que fixa a posição e a velocidade da partícula em $t = 0$

$$Y(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

é dada por

$$Y(t) = e^{At}Y(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} \cdot F(s)ds. \tag{4.1.5}$$

Como podemos ver, precisamos calcular e^{At} para a matriz A da equação (4.1.4).

É fácil verificar que os autovalores de A são

$$\lambda_1 = \frac{-\rho + \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{-\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

e os autovetores associados são

$$v_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{-\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2\omega_0^2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad v_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{-\rho + \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2\omega_0^2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se $\sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2} \neq 0$, ou seja, $\rho \neq 2\omega_0$, a matriz A tem autovalores distintos e é, portanto, diagonalizável. Porém, se $\rho = 2\omega_0$, tem-se $v_1 = v_2$ e a matriz A não é diagonalizável. Vamos tratar os dois casos separadamente.

Caso $\rho \neq 2\omega_0$:

Nesse caso A é diagonalizável, ou seja,

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-\rho + \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2} \end{pmatrix},$$

em que

$$P = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2\omega_0^2} & \dfrac{-\rho + \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{2\omega_0^2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando-se a inversa, tem-se

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\omega_0^2}{\sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}} & \dfrac{-\rho + \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{\sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}} \\ \dfrac{\omega_0^2}{\sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}} & \dfrac{\rho + \sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}}{\sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}} \end{pmatrix}.$$

Daí, segue que

$$e^{At} = P{\cdot}e^{Dt}{\cdot}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 4\omega_0^2}} \begin{pmatrix} -\lambda_2 e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} \\ \omega_0^2(-e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}) & \lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Suponha que $\rho < 2\omega_0$ e defina $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{\rho^2}{4}}$. Assim, a solução do problema é dada pela equação (4.1.5), substituindo e^{At} pela matriz encontrada acima. Dessa forma, $x(t)$ será

$$x(t) = e^{-\rho t/2}\left(x_0 \cos(\omega_1 t) + \frac{\rho x_0 + 2v_0}{2\omega_1}\mathrm{sen}(\omega_1 t)\right) + \frac{1}{m\omega_1}\int_0^t e^{\rho(t-s)/2}\mathrm{sen}[\omega_1(t-s)]f(s)ds.$$

Agora, suponha que $\rho > 2\omega_0$ e defina $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{\rho^2}{4} - \omega_0^2}$. Assim, a solução do problema é dada pela equação (4.1.5), substituindo e^{At} como fizemos anteriormente. Dessa maneira, obtém-se

$$x(t) = e^{-\rho t/2}\left(x_0 \cosh(\omega_2 t) + \frac{\rho x_0 + 2v_0}{2\omega_2}\mathrm{senh}(\omega_2 t)\right) + \frac{1}{m\omega_2}\int_0^t e^{\rho(t-s)/2}\mathrm{senh}[\omega_2(t-s)]f(s)ds.$$

De maneira análoga, podemos encontrar uma expressão para $v(t) = \dot{x}(t)$.

Caso $\rho = 2\omega_0 > 0$:

Nesse caso a matriz A fica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{\rho^2}{4} & -\rho \end{pmatrix}$$

e como dissemos anteriormente, A possui apenas um autovalor de multiplicidade algébrica 2, a saber $\lambda = -\dfrac{\rho}{2}$.

Decompondo A na sua forma de Jordan, $J = P^{-1}AP$, temos

$$J = \begin{pmatrix} -\rho/2 & 1 \\ 0 & -\rho/2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \rho/2 & 1 \\ -\rho^2/4 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -4/\rho^2 \\ 1 & 2/\rho \end{pmatrix}.$$

Note que $J = D + N$, em que

$$D = \begin{pmatrix} -\rho/2 & 0 \\ 0 & -\rho/2 \end{pmatrix} \quad e \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que D e N comutam e que $N^2 = 0$. Assim,

$$e^{At} = P\, e^{(D+N)t}\, P^{-1} = P\, e^{Dt}\, e^{Nt}\, P^{-1},$$

sendo que

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{-\rho t/2} & 0 \\ 0 & e^{-\rho t/2} \end{pmatrix}$$

e

$$e^{Nt} = I + Nt = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \left(1 + \dfrac{\rho t}{2}\right) e^{-\rho t/2} & t e^{-\rho t/2} \\ -\dfrac{\rho^2 t}{4} e^{-\rho t/2} & \left(1 - \dfrac{\rho t}{2}\right) e^{-\rho t/2} \end{pmatrix}.$$

Substituindo e^{At} da equação (4.1.5) pela matriz acima, obtém-se

$$x(t) = e^{-\rho t/2}\left(\left(1 + \frac{\rho t}{2}\right) x_0 + t v_0\right) + \frac{1}{m}\int_0^t (t-s) e^{-\rho(t-s)/2} f(s) ds.$$

Da mesma forma, pode-se obter $v(t)$.

Caso $\rho = 0$:

Vamos analisar agora o caso em que não há o termo de amortecimento $-\gamma v(t)$ na equação de movimento da partícula, ou seja, $\rho = 0$. Nesse caso,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que os autovalores de A são $\lambda_1 = \omega_0 i$ e $\lambda_2 = -\omega_0 i$. Logo, A é diagonalizável e

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \omega_0 i & 0 \\ 0 & -\omega_0 i \end{pmatrix},$$

em que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \omega_0 i \\ -1 & -\omega_0 i \end{pmatrix}.$$

Calculando P^{-1}, temos

$$P^{-1} = \frac{1}{2\omega_0 i}\begin{pmatrix} \omega_0 i & 1 \\ -\omega_0 i & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \frac{1}{\omega_0}\text{sen}(\omega_0 t) \\ -\omega_0\text{sen}(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}.$$

Agora, como nos outros casos, usando a equação (4.1.5), obtém-se

$$x(t) = \left(x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\text{sen}(\omega_0 t)\right) + \frac{1}{m}\int_0^t \text{sen}(\omega_0(t-s))f(s)ds$$

e

$$v(t) = -x_0\text{sen}(\omega_0 t) + v_0\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{m}\int_0^t \cos(\omega_0(t-s))f(s)ds.$$

Caso $k = 0$ e $\gamma = 0$:

Finalmente, vamos analisar o caso em que a partícula é submetida apenas à força externa dependente do tempo.

Usando a notação anterior,

$$\ddot{x}(t) = g(t),$$

ou seja,

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + F(t)$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz A é nilpotente com $A^2 = 0$. Logo,

$$e^{At} = I + At = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(s) \end{pmatrix} ds.$$

Assim, obtém-se

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t (t-s) f(s) ds$$

e

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t f(s) ds.$$

Considerações Finais

A principal motivação do trabalho foi o fato de que este tópico não faz parte da ementa de nenhuma disciplina do currículo de licenciatura, apenas do bacharelado. Tive o primeiro contato com a Forma Canônica de Jordan no curso de Álgebra Linear II (disciplina do bacharelado) e juntamente com o Licio desenvolvi um projeto de iniciação científica cujo objetivo foi estudar formas canônicas de matrizes. Nesse trabalho entrei em contato com muita álgebra linear e fiquei muito excitado com o resultado de Jordan. No ano seguinte, o Licio propôs que eu trabalhasse com funções matriciais, especialmente o caso da exponencial de uma matriz. Achei a idéia interessante e como ninguém da graduação havia feito qualquer trabalho sobre isso, resolvi adotá-la. Como podemos ver, surtiu efeito e resultados.

Espero que este trabalho sirva de exemplo para futuros graduandos que se interessem por ele e queiram se aprofundar mais nesse assunto. Fica aberto para trabalhos futuros a possibilidade de tratar de outras funções de matrizes além da exponencial. Além disso, fazer um estudo numérico mais detalhado dos métodos. Principalmente o método que se utiliza dos subespaços de Krylov e o método de Lanczos que estão sendo muito utilizados atualmente e que não foram muito explorados neste trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] BOLDRINI, J. L.*Álgebra Linear*, São Paulo, Editora Harper & Row do Brasil, 1980.

[2] CHENG S. H., HIGHAM, N. J., KENNEY, C. S., AND LAUB, A. J. *Approximating the Logarithm of a matrix to specified accuracy*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 22 (2001), pp 1112-1125.

[3] GANTMACHER, F. R. *The Theory of Matrices*, vols. 1 and 2, AMS, Providence-1998.

[4] GIESBRECHT, M.; STORJOHANN, A. *Computing Rational Forms of Integer Matrices*, J. Symbolic Computation, 2002.

[5] GOLUB, G.; LOAN, C. F. van. *Matrix Computations*, 3rd ed., Johns Hopkins, Baltimore, 1996.

[6] HIGHAM D.; HIGHAM, N. J. - *MATLAB Guide*, SIAM J., Philadelphia, 2000.

[7] HIGHAM, N. J. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms* , Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1996.

[8] HIGHAM, N. J. *Evaluating Padé approximants of the matrix logarithm*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 22 (2001), pp 1126-1135.

[9] HOCHBRUCK, M. and LUBICH, C. *On Krylov Subspace Approximations to the Matrix Exponential Operator*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 34, Número 5 (1997), pp 1911-1925.

[10] HOFFMANN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*, EDUSP, São Paulo, 1971.

[11] HORN, R.; JOHNSON, C. R. *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, Uk. 1991.

[12] LAY, D. C. *Álgebra Linear e suas Aplicações*, LTC Editora S.A., Rio de Janeiro, 1999.

[13] MATLAB *Reference Guide*, The Mathworks Inc., Natick, 1992.

[14] MOLER C. B. and VAN LOAN, C. *Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later*, SIAM J. Matrix Rev. 45 (2003), pp 3-49.

[15] PRASOLOV, V. V. *Problems and Theorems in Linear Algebra*, Translations of Mathematical Monographs vol. 134, AMS, Providence, 1994.

[16] SMALE, S.; HIRSCH, M. W. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Unviersity of California, Berkeley, Academic Press, 1974.

[17] SOUZA, J. A. *Cálculo numérico da exponencial de uma matriz*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1993.

[18] STRANG G. *Introduction to applied Mathematics*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts 1986.

[19] WATKINS, D. S. *Fundamentals of Matrix Computations*, John Wiley & Sons, New York, 1991.

[20] BIOGRAPHY-CENTER. Site oficial: *www.biography-center.com*, acessado em 30 de outubro de 2004.

[21] INSTITUT DE MATHÉMATIQUE ÉLIE CARTAN. Site oficial: *www.iecn.u-nancy.fr*, acessado em 30 de outubro de 2004.