

Teoria Local das Curvas

Roberto Simoni

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Teoria Local das Curvas

Roberto Simoni

Orientador: Prof. Dr. Celso Melchiades Doria

Florianópolis

2005

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**, no curso de Licenciatura em Matemática, e aprovada em sua forma final pela banca examinadora designada pela Portaria *nº 28/CCM/05*.

Prof.^a: Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Dr. Celso Melchiades Doria
Orientador

Dr. Licio Hernanes Bezerra

Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa

À Deus
À minha Mãe, Narcisa Simoni
Ao meu Pai, Róvilio Simoni

Agradecimentos

Agradeço a minha namorada, Keli Cris, que esteve comigo durante toda a graduação. Aos professores do Departamento de Matemática. Aos colegas Márcio Rostirolla Adames e Antônio João, pela leitura de parte desta monografia e sugestões.

Agradeço em especial ao Professor Celso Melchiades Doria pela dedicação que ele teve em me orientar, pela sugestão do tema desta monografia e pelas inúmeras dúvidas sanadas durante o desenvolvimento desta monografia.

Sumário

Introdução	2
1 Conceitos sobre as Curvas	5
1.1 Curvas em \mathbb{R}^n	5
1.2 Curvas Regulares	10
1.3 Projeções Ortogonais	16
1.4 Comprimento de Arco	17
1.5 Comprimento de Arco como um Parâmetro	21
2 Elementos Geométricos das Curvas	23
2.1 Vetor Tangente	23
2.2 Vetor Normal	24
2.3 Curvatura	25
2.4 Referencial Móvel em \mathbb{R}^2	33
2.5 Vetor Binormal	34
2.6 Torção	35
2.7 Referencial Móvel em \mathbb{R}^3	42
3 Teoria Local	45
3.1 Equações de Frenet	45
3.2 Teorema Fundamental das Curvas	51
4 Curvas de Bézier	53
4.1 História das Curvas de Bézier	53
4.2 O Algoritmo de Casteljau	54

4.3	A Forma dos polinômios Bernstein para uma Curva de Bézier	57
4.3.1	Os Polinômios de Bernstein	57
4.3.2	Propriedades dos Polinômios de Bernstein	58
4.4	A Forma Matricial para uma Curva de Bézier	61
4.5	Subdivisão	65
4.6	Propriedades das Curvas de Bézier	71
4.7	Aplicações das Curvas de Bézier	72
4.8	Exemplos	73
	Conclusão	78
	Referências Bibliográficas	79

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar a teoria local das curvas, ou seja, estudar o comportamento de uma curva restrita a uma vizinhança de um ponto. Para isso dividimos o trabalho em quatro capítulos.

No primeiro capítulo estudamos os conceitos fundamentais das curvas dando ênfase para as curvas regulares e ilustramos com vários exemplos. Definimos o comprimento de arco e mostramos que o mesmo é invariante por uma mudança de parâmetro e assim o introduzimos como um parâmetro ao longo de uma curva.

No segundo capítulo, associamos a cada curva duas quantidades escalares chamadas curvatura e torção. Para isso definimos em cada ponto da curva um conjunto vetores que formam uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 e são denominados de referencial móvel. A variação deste referencial nos informa o comportamento da curva numa vizinhança do ponto.

No terceiro capítulo, mostramos que o referencial móvel satisfaz um sistema de equações chamadas de equações de Frenet. Como aplicação das equações de Frenet, caracterizamos certas classes de curvas. Demonstramos o ***Teorema Fundamental de Existência e Unicidade das Curvas***, que é o objetivo principal desta monografia.

No quarto capítulo restringimo-nos ao estudo de uma classe específica de curvas, as curvas de Bézier.

Capítulo 1

Conceitos sobre as Curvas

1.1 Curvas em \mathbb{R}^n

Por \mathbb{R}^n entendemos o conjunto das n -uplas (x_1, x_2, \dots, x_n) de números reais. Nosso objetivo é caracterizar certos subconjuntos de \mathbb{R}^n , as curvas. Uma maneira de definir tais subconjuntos é por meio de funções diferenciáveis. Lembramos que uma função $x(t)$ é diferenciável de classe C^k , se todas as suas derivadas $x^{(n)}(t)$ existirem e forem contínuas, para todo $n \leq k$.

Definição 1.1 *Uma curva parametrizada diferenciável é uma aplicação $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que o intervalo $I \subset \mathbb{R}$.*

Denominaremos simplesmente de curva ao subconjunto $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$.

Existem várias maneiras de se obter curvas:

- considerando $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ e $k \in \mathbb{R}$ uma constante

$$C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = k\}.$$

Se k não for um valor crítico de f ($\nabla f(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in C_k$), então C_k é uma curva denominada **curva de nível**.

- tomando a intersecção de duas superfícies.

- em termos geométricos, uma curva pode ser interpretada como a trajetória de um objeto deslocando-se de um ponto a outro. As coordenadas do objeto são dadas em função do tempo t , onde $x = \gamma_1(t)$ e $y = \gamma_2(t)$, e t é o parâmetro da representação. Quando t varia, as quantias $x = \gamma_1(t)$ e $y = \gamma_2(t)$ também variam e descrevem uma curva, denominada **curva paramétrica**. É usual representarmos uma curva por meio de sua equação vetorial, assim $\gamma(t) = \gamma_1(t)e_1 + \dots + \gamma_n(t)e_n$, representa uma curva no espaço n -dimensional.

Por exemplo, $\gamma(t) = (t^2 - 2t)e_1 + (t + 1)e_2$, representa uma parábola.

- existem curvas que podem ser definidas por algoritmos; no capítulo IV estudaremos uma classe específica destas curvas, as curvas de Bézier.

Vejamos alguns exemplos de curvas.

Exemplo 1.1 A figura 1.1 mostra o gráfico das curvas de nível da função

$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, para $k = 0, 1, 2, 3$. As curvas de nível são

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

que correspondem a uma família de círculos concêntricos em $(0, 0)$ e raio $\sqrt{9 - k^2}$.

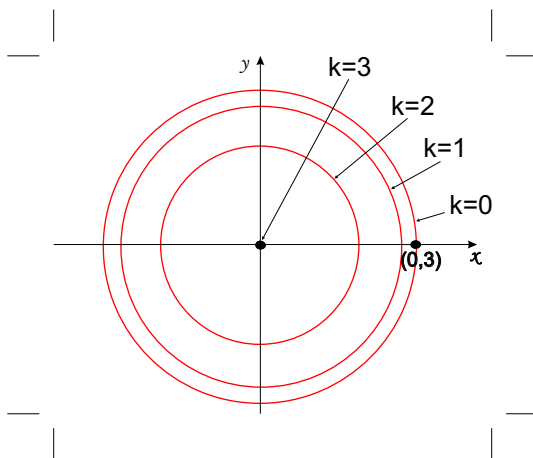


Figura 1.1: Curvas de nível da função $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, para $k = 0, 1, 2, 3$

Exemplo 1.2 Determine a equação da curva obtida na intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com o plano $y + z = 2$. Veja figura 1.2.

Chamando de γ a curva obtida na intersecção, a projeção de γ sobre o plano xy é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Substituindo $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, na equação da circunferência, encontramos na equação do plano $z = 2 - y = 2 - \sin\theta$. Escrevendo as equações paramétricas para γ temos:

$$x = \cos\theta, y = \sin\theta, z = 2 - \sin\theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

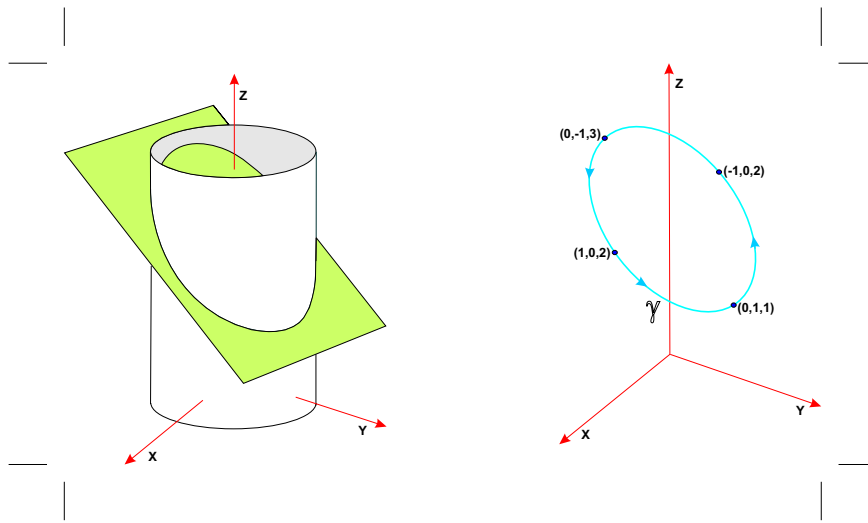


Figura 1.2: Curva γ obtida na intersecção

Exemplo 1.3 A epiciclóide é uma curva plana gerada por um ponto P da circunferência de um círculo C que rola sem deslizar sobre o exterior de um círculo C_0 fixo (veja a figura 1.3). Vamos encontrar uma representação paramétrica para a epiciclóide quando C tem raio r , C_0 está centrado na origem com raio r_0 e P está inicialmente localizado em $(r_0, 0)$.

Seja A denotado como o centro de C e θ o ângulo que OA faz com e_1 . Então

$$\begin{aligned} OA &= |OA|(\cos\theta)e_1 + |OA|(\sin\theta)e_2 \\ &= (r_0 + r)(\cos\theta)e_1 + (r_0 + r)(\sin\theta)e_2 \end{aligned}$$

Se β é o ângulo que AP faz com e_1 , então

$$\beta = \angle OAP + \theta - \pi \quad \text{ou} \quad \beta = \theta \frac{r_0}{r} + \theta - \pi = \frac{r_0 + r}{r} \theta - \pi$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
 AP &= |AP|(\cos\beta)e_1 + |AP|(\text{sen}\beta)e_2 \\
 &= r \left[\cos \left(\frac{r_0 + r}{r} \theta - \pi \right) \right] e_1 + r \left[\text{sen} \left(\frac{r_0 + r}{r} \theta - \pi \right) \right] e_2 \\
 &= -r \left[\cos \left(\frac{r_0 + r}{r} \theta \right) \right] e_1 - r \left[\text{sen} \left(\frac{r_0 + r}{r} \theta \right) \right] e_2
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \gamma(\theta) &= OP = OA + AP \\
 &= \left[(r_0 + r)\cos\theta - r\cos \left(\frac{r_0 + r}{r} \theta \right) \right] e_1 \\
 &\quad + \left[(r_0 + r)\text{sen}\theta - r\text{sen} \left(\frac{r_0 + r}{r} \theta \right) \right] e_2
 \end{aligned}$$

é a representação requerida.

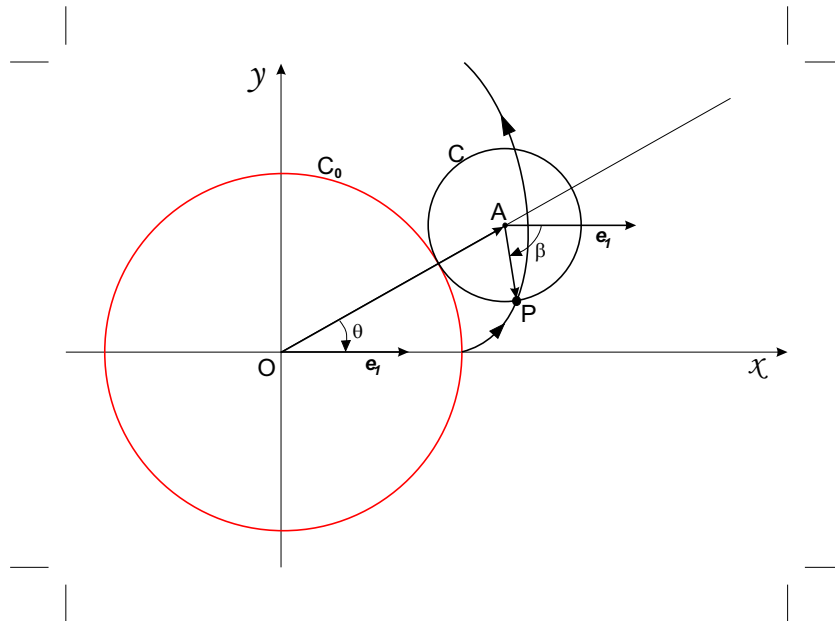


Figura 1.3: Epiciclóide

Exemplo 1.4 Exemplos importantes de curvas no espaço são as hélices. A figura 1.4 mostra o traço da **Hélice Circular** parametrizada por

$$\gamma(t) = a\cos(t)e_1 + a\text{sen}(t)e_2 + bte_3, \quad a, b \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A figura 1.5 mostra o traço da **Hélice Logarítmica** parametrizada por

$$\delta(t) = e^t \cos(t)e_1 + e^t \sin(t)e_2 + e^t e_3, \quad t \in [0, \infty).$$

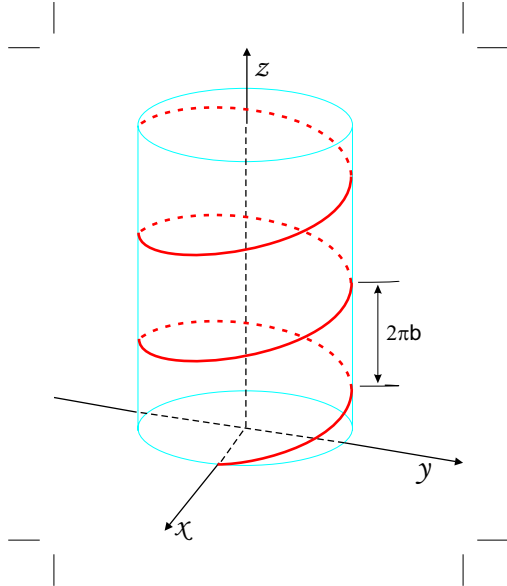


Figura 1.4: Hélice Circular

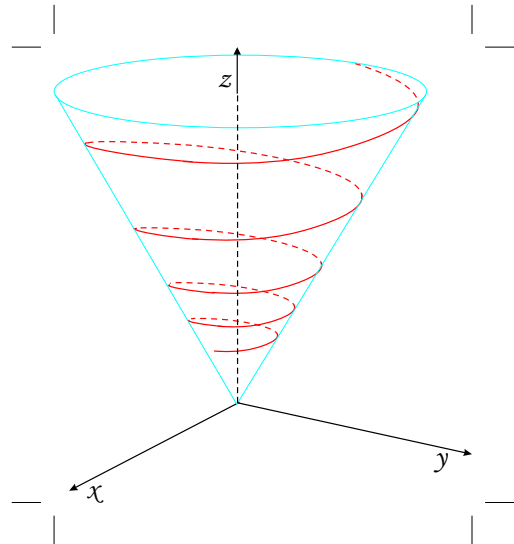


Figura 1.5: Hélice Logarítmica

A hélice circular faz uma espiral ao redor de um cilindro de raio $|a|$. A equação $\gamma_3(t) = bt$ move os pontos da curva uniformemente da direção γ_3 . Quanto t aumenta 2π , γ_1 e γ_2 retornam ao seu valor inicial. A hélice logarítmica se desenvolve num cone e sua projeção sobre o plano xy é uma curva chamada espiral logarítmica.

Exemplo 1.5 A figura 1.6 mostra o gráfico gerado por computador da curva parametrizada por

$$\gamma(t) = [(4 + \sin 20t)\cos t]e_1 + [(4 + \sin 20t)\sin t]e_2 + [\cos 20t]e_3.$$

Essa curva é chamada de **toróide espiral**, porque está contida no toro. Outra curva interessante é o **nó trevo**, que também está contida no toro e é parametrizada por

$$\lambda(t) = [(2 + \cos(1, 5t))\cos t]e_1 + [(2 + \cos(1, 5t))\sin t]e_2 + [\sin(1, 5t)]e_3$$

mostrada na figura 1.7.

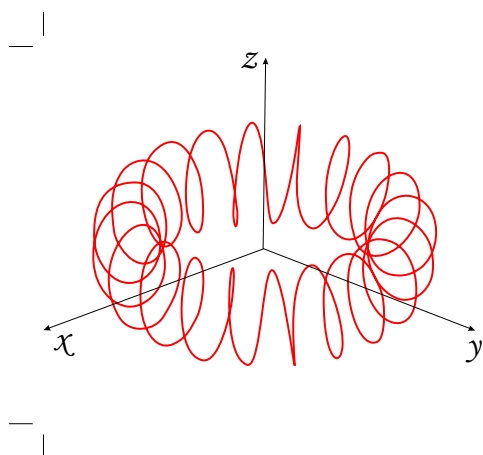


Figura 1.6: Toróide Espiral

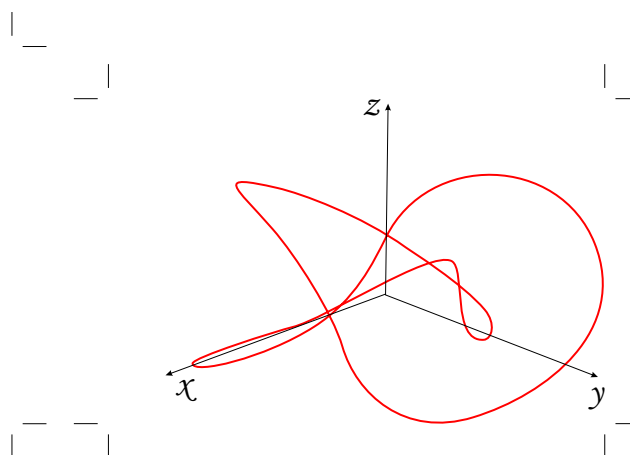


Figura 1.7: Nó Trevo

1.2 Curvas Regulares

Nesta seção, vamos nos restringir a uma certa classe de curvas. Para efeitos teóricos vamos evitar curvas que em algum ponto não tenham vetor tangente. Essa classe de curvas é denominada de curvas regulares.

Definição 1.2 Uma curva parametrizada $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita regular se

- (i) $\gamma(t)$ é da classe \mathcal{C}^1
- (ii) $|\gamma'(t)| \neq 0$, para todo $t \in I$.

No que se segue, dada uma curva parametrizada, salvo menção contrária, será considerada uma curva regular.

Uma parametrização $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de uma curva pode não ser bijetora, ou seja, pode conter pontos $t_1 \neq t_2$, para os quais $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. No entanto, é possível verificar que ao restringirmos a parametrização a uma vizinhança de um ponto $t \in I$, γ é bijetora. Essa é uma propriedade local pois depende apenas do comportamento da curva próximo ao ponto.

Exemplo 1.6 A curva mostrada na figura 1.8 é parametrizada por

$\gamma(t) = (t^3 - 4t)e_1 + (t^2 - 4)e_2$, $t \in \mathbb{R}$. Observe que $\gamma(2) = \gamma(-2) = (0, 0)$ isto é, a aplicação $\gamma(t)$ não é bijetora, no entanto, perceba que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo t . Portanto γ é regular.

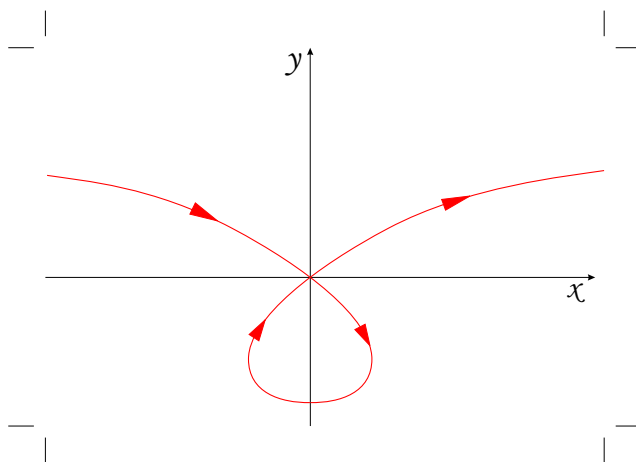


Figura 1.8: $\gamma(t) = (t^3 - 4t)\mathbf{e}_1 + (t^2 - 4)\mathbf{e}_2, t \in \mathbb{R}$

Exemplo 1.7 A curva mostrada na figura 1.9 é parametrizada por $\gamma(t) = (t + 1)\mathbf{e}_1 + (t^2 + 3)\mathbf{e}_2, t \in \mathbb{R}$, é regular, pois $\gamma'(t) = \mathbf{e}_1 + 2t\mathbf{e}_2$ é contínua e $|\gamma'(t)| \neq 0$ para todo t .

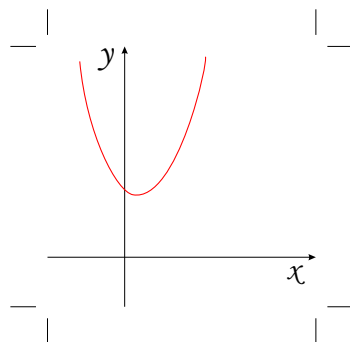


Figura 1.9: $\gamma(t) = (t + 1)\mathbf{e}_1 + (t^2 + 3)\mathbf{e}_2$

Exemplo 1.8 A curva mostrada na figura 1.10, está definida em coordenadas polares por, $r(\theta) = 2\cos\theta - 1$. Para parametrizá-la, consideramos

$$\gamma_1(\theta) = r(\theta) \cos\theta, \quad \gamma_2(\theta) = r(\theta) \sin\theta$$

e portanto sua parametrização será,

$$\gamma_1(\theta) = (\cos\theta)(2\cos\theta - 1), \quad \gamma_2(\theta) = (\sin\theta)(2\cos\theta - 1), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\text{ou} \quad \gamma(\theta) = (\cos\theta)(2\cos\theta - 1)\mathbf{e}_1 + (\sin\theta)(2\cos\theta - 1)\mathbf{e}_2.$$

Exemplo 1.9 A parametrização de Cissoide de Diocles dada por $r(\theta) = 2\text{sen}\theta \text{tg}\theta$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, não é regular. Considerando

$$\gamma_1(\theta) = r(\theta)\cos\theta \quad e \quad \gamma_2(\theta) = r(\theta)\text{sen}\theta$$

temos que

$$\gamma_1(\theta) = 2\text{sen}^2\theta, \quad \gamma_2(\theta) = 2\text{sen}^2\theta \text{tg}\theta, \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Observe que em $\theta = 0$, $|\gamma'(\theta)| = 0$, pois

$$\frac{d\gamma_1}{d\theta} = 4\text{sen}\theta\cos\theta \quad e \quad \frac{d\gamma_2}{d\theta} = 2\text{sen}^2\theta\sec^2\theta + 4\text{sen}\theta\cos\theta\text{tg}\theta$$

Pelo traço na figura 1.11 podemos ver que γ não é regular, pois existe um bico agudo neste ponto caracterizando a inexistência de vetor tangente.

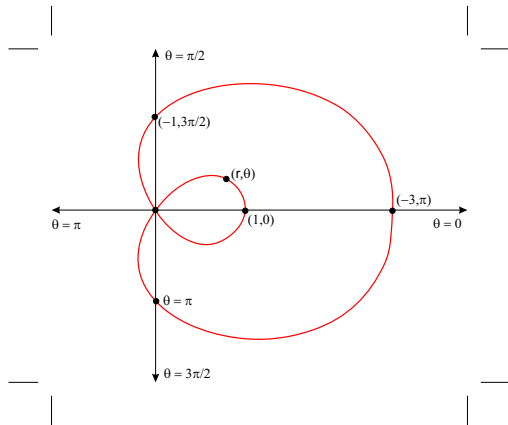


Figura 1.10: $r(\theta) = 2\cos\theta - 1$

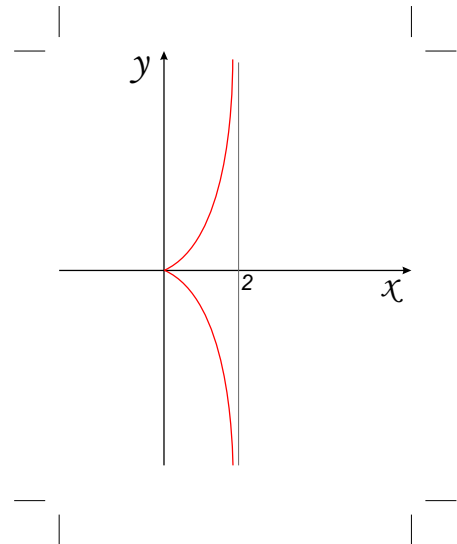


Figura 1.11: Cissoide de Diocles

Curvas parametrizadas diferenciáveis podem ter o mesmo traço.

Exemplo 1.10 As curvas

$$\gamma(t) = (t, 2t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\delta(t) = (2r + 1, 4r + 2), \quad r \in \mathbb{R}$$

têm o mesmo traço mostrado na figura 1.12. A mudança de parâmetro $t = 2r + 1$, faz com que γ e δ tenham a mesma parametrização.

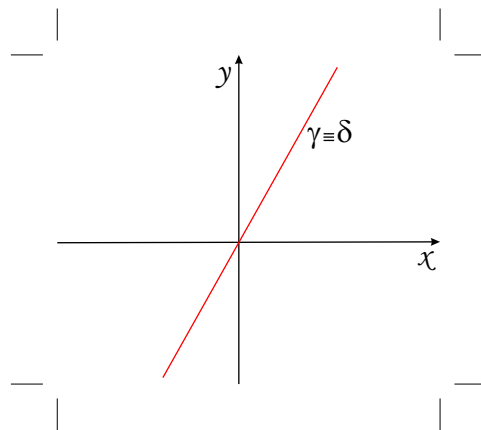


Figura 1.12: Traço de γ coincide com o traço de δ .

Definição 1.3 *Uma mudança de parâmetro é uma bijeção $f : I \rightarrow J$, entre intervalos de \mathbb{R} , que é suave, bem como sua inversa.*

Lembrando que uma função é suave se é de classe C^∞ . Na figura 1.13, representamos o esquema da mudança de parâmetro entre os intervalos I e J , onde f é dita ser a mudança de parâmetro. Assim, dada uma curva regular γ , podemos obter várias parametrizações para γ .

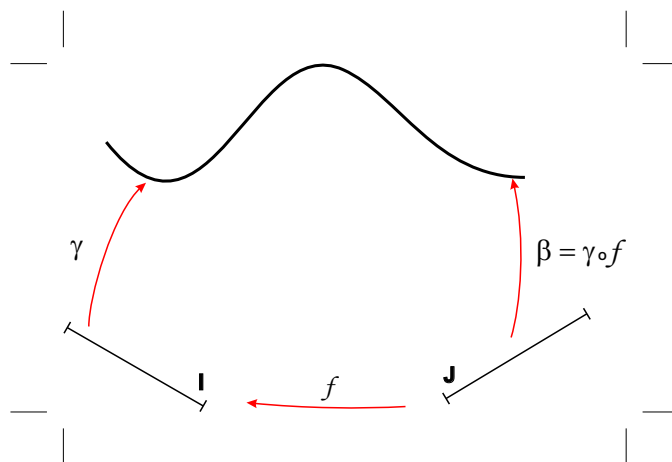


Figura 1.13: A bijeção f é a mudança de parâmetro entre os intervalos I e J .

Exemplo 1.11 *A função $t = (b - a)\theta + a$, $\theta \in [0, 1]$, $a < b$ é uma mudança de parâmetro do intervalo $\theta \in [0, 1]$ sobre $t \in [a, b]$. A inversa $\theta = (t - a)/(b - a)$ é a mudança de parâmetro do intervalo $t \in [a, b]$ sobre $\theta \in [0, 1]$.*

Exemplo 1.12 A função $t = \theta^2/(\theta^2 + 1)$ é uma mudança de parâmetro do intervalo $\theta \in (0, \infty)$ sobre $t \in [0, 1]$.

$\frac{dt}{d\theta} = \frac{2\theta}{(\theta^2 + 1)^2}$, é contínua e $\frac{dt}{d\theta} \neq 0$, $\theta \in (0, \infty)$. Assim

$$\frac{\theta^2}{(\theta^2 + 1)^2} \Big|_{\theta=0} = 0$$

e $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\theta^2}{\theta^2 + 1} = 1$, que toma o intervalo $\theta \in (0, \infty)$ sobre $t \in [0, 1]$.

Exemplo 1.13 Introduzir a mudança de parâmetro $\theta = t + 1$, $t \in [-1, 2\pi - 1]$ na curva

$$\gamma(\theta) = [\cos(\theta)2\cos(\theta)]e_1 + [\sin(\theta)2\cos(\theta)]e_2, \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (1.1)$$

representada na figura 1.14. Pela mudança de parâmetro, 1.1 é equivalente a

$$\gamma(t) = [\cos(t+1)2\cos(t+1)]e_1 + [(2\cos(t+1))]e_2, \quad t \in [-1, 2\pi - 1]$$

pois, $\gamma(\theta) = \gamma(\theta(t))$. Quando t aumenta em $t \in [-1, 2\pi - 1]$, $\theta = t + 1$ também aumenta em $\theta \in [0, 2\pi]$. Introduzindo esta mudança a equação traça o mesmo sentido e mesma direção da equação 1.1, mostrada na figura 1.15. Se introduzimos a mudança de parâmetro $\theta = -t$, $t \in [-2\pi, 0]$, obteremos uma representação equivalente

$$\gamma(t) = [\cos(t)2\cos(t)]e_1 + [\sin(t)2\cos(t)]e_2, \quad t \in [-2\pi, 0].$$

Agora quando t aumenta em $t \in [-2\pi, 0]$, $\theta = -t$ decresce em $\theta \in [0, 2\pi]$, com esta mudança de parâmetro a equação traça direção e sentido oposto, mostrada na figura 1.16.

Assim a direção e sentido em que a curva é traçada é uma propriedade da parametrização e não da curva.

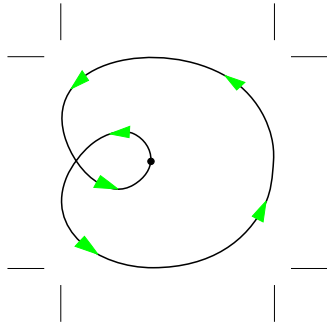


Figura 1.14:

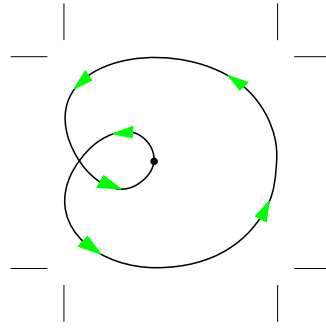


Figura 1.15:

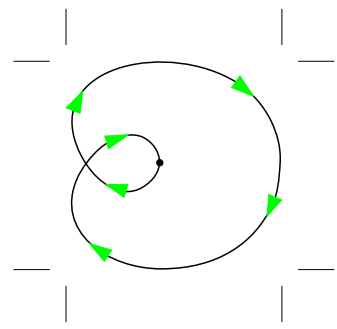


Figura 1.16:

Uma curva $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, com saltos de continuidade é chamada de **regular por partes** se existir um número finito de intervalos abertos $I_i, i = 1, 2, \dots, n$, nos quais a restrição de γ é regular.

Exemplo 1.14 A cicloide parametrizada por $\gamma(\theta) = [r(\theta - \text{sen}\theta)]e_1 + [r(1 - \text{cos}\theta)]e_2$, $\theta \in \mathbb{R}$, é regular por partes (veja Figura 1.17). Perceba que $\gamma'(\theta) = 0$ quando $\theta = 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, ou seja ela não é contínua nestes pontos. No entanto a cicloide é regular nos intervalos $\theta \in (2n\pi, (2n + 2)\pi)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim dizemos que a cicloide é regular por partes ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, a cicloide é um arco regular no intervalo $2n\pi < \theta < (2n + 2)\pi$.

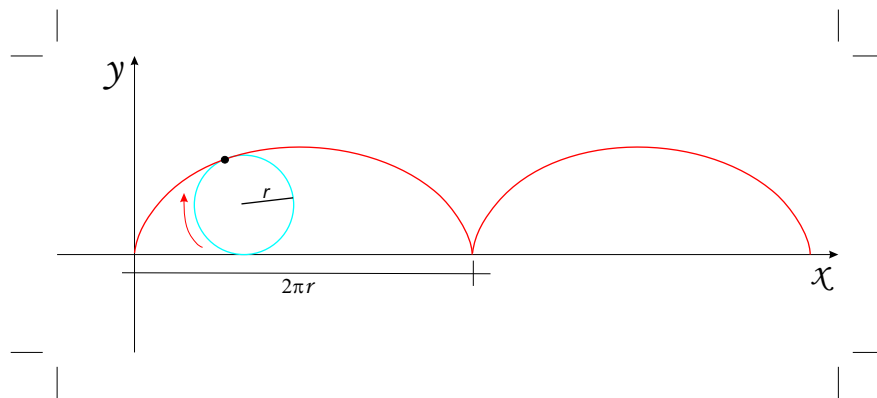


Figura 1.17: Cicloide

1.3 Projeções Ortogonais

Seja $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ a parametrização de uma curva. Fixado um t_0 , a equação

$$\zeta_\gamma(k) = \gamma_1(t_0)e_1 + \gamma_2(t_0)e_2 + ke_3, \quad k \in \mathbb{R}$$

representa a reta ortogonal ao plano xy , que passa pelo ponto $\gamma(t_0)$. Segue que a família de retas do tipo

$$\zeta_\gamma(k) = \gamma_1(t_0)e_1 + \gamma_2(t_0)e_2 + ke_3, \quad t, k \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

geram uma superfície cilíndrica ortogonal ao plano xy , que contém $\gamma(I)$.

Definição 1.4 *Seja $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ a parametrização de uma curva. A **projeção ortogonal** de γ sobre o plano xy é dada pela função*

$$\begin{aligned} P_{xy} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ P_{xy}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) &= (\gamma_1, \gamma_2) \quad \text{ou} \\ \zeta_\gamma(t) &= \gamma_1(t)e_1 + \gamma_2(t)e_2 \end{aligned}$$

As projeções ortogonais da curva γ sobre os planos yz e xz são respectivamente

$$\begin{aligned} P_{yz}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) &= (\gamma_2, \gamma_3) \\ \zeta_\gamma(t) &= \gamma_2(t)e_2 + \gamma_3(t)e_3 \\ \\ P_{xz}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) &= (\gamma_1, \gamma_3) \\ \zeta_\gamma(t) &= \gamma_1(t)e_1 + \gamma_3(t)e_3 \end{aligned}$$

A intersecção de duas superfícies cilíndricas geradas pelas famílias de retas mencionadas na Equação 1.2 determinam uma curva. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.15 *A projeção ortogonal da **cúbica retorcida** parametrizada por $\gamma(t) = te_1 + t^2e_2 + t^3e_3$, $t \in \mathbb{R}$, sobre o plano xy é a parábola $\zeta_\gamma(t) = te_1 + t^2e_2$. A projeção sobre o plano xz é a cúbica $\zeta_\gamma(t) = te_1 + t^3e_3$. A curva é representada pela intersecção das duas superfícies, uma parabólica cilíndrica ortogonal ao plano xy e a outra cúbica cilíndrica ortogonal ao plano xz . Veja figura 1.18.*

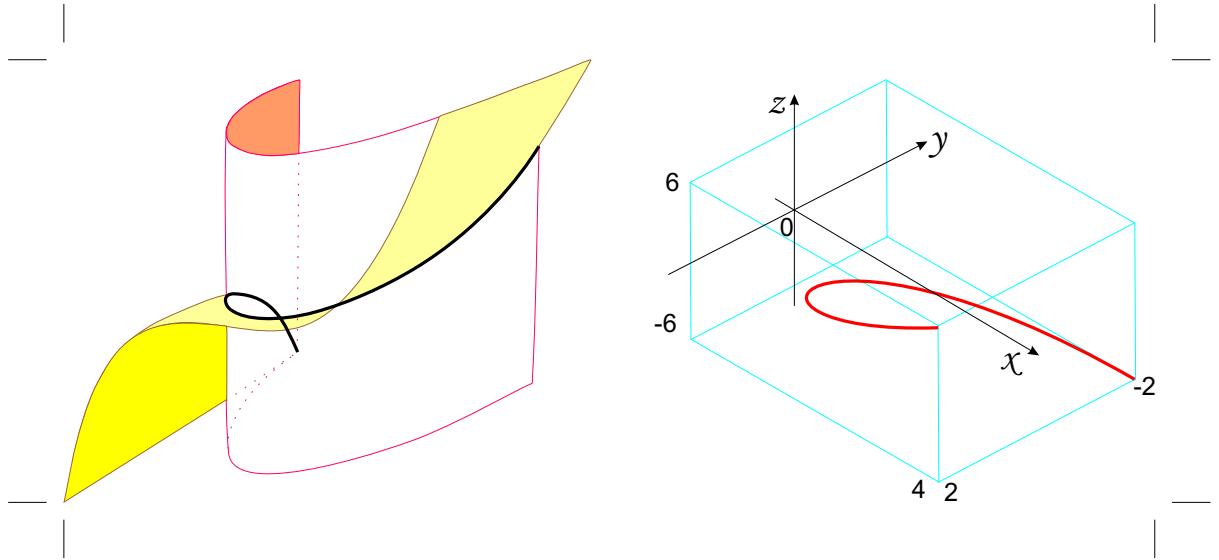


Figura 1.18: Cúbica retocida

Exemplo 1.16 A parametrização $\gamma(t) = te_1 + (t^2 + 1)e_2 + (t - 1)^3e_3$ é regular, pois $d\gamma/dt = e_1 + 2te_2 + 3(t - 1)^2e_3$ é contínua e $|d\gamma/dt| = [1 + 4t^2 + 9(t - 1)^4]^{1/2} \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Sua projeção sobre o plano xy é a parábola $\zeta_\gamma(t) = te_1 + (t^2 + 1)e_2$, e a projeção sobre o plano xz é a cúbica $\zeta_\gamma(t) = te_1 + (t - 1)^3e_3$. A curva é representada na intersecção das duas superfícies cilíndricas ortogonais aos planos xy e xz , no caso uma parabólica e outra cúbica.

1.4 Comprimento de Arco

A toda curva $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, podemos associar um número real que é o comprimento do arco de γ entre os pontos $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$. Ao considerarmos uma partição arbitrária do intervalo $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b,$$

estamos definindo uma seqüência de pontos

$$\gamma_0(t_0), \gamma_1(t_1), \cdots, \gamma_n(t_n)$$

sobre a curva γ . O seguinte somatório

$$s(P^*) = \sum_{i=1}^n |\gamma_i(t_i) - \gamma_{i-1}(t_{i-1})| \quad (1.3)$$

é o comprimento da linha poligonal obtida substituindo, para cada $1 \leq i \leq n$, o traço da curva no intervalo $[t_i, t_{i-1}]$ pelo segmento de reta que une $\gamma(t_{i-1})$ a $\gamma(t_i)$. Veja a figura 1.19.

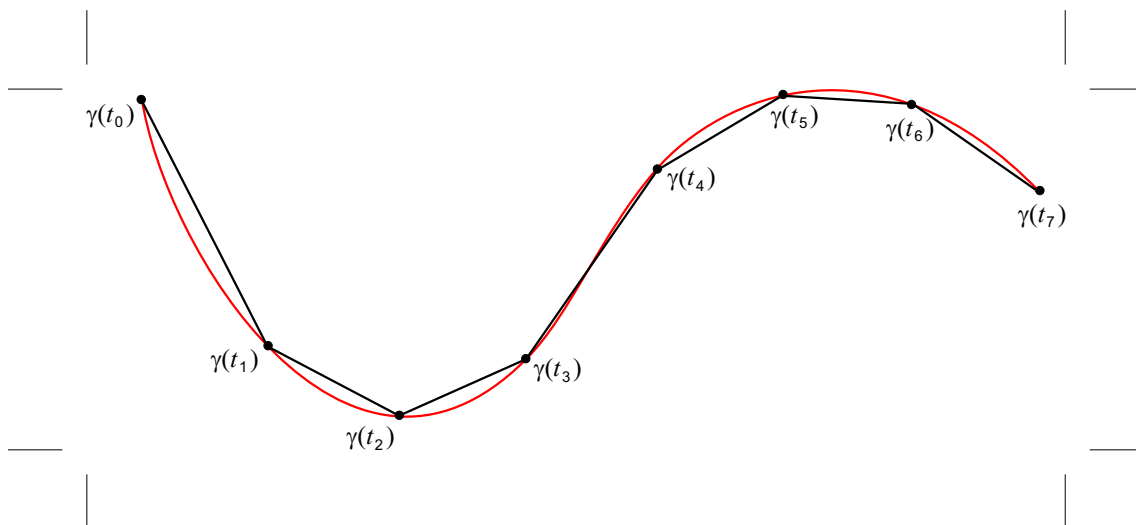


Figura 1.19: Linha poligonal

Retificaremos o arco, tomando o limite em 1.3

$$s(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |\gamma_i(t_i) - \gamma_{i-1}(t_{i-1})|. \quad (1.4)$$

Definição 1.5 Um arco é retificável, se o limite 1.4 existir.

Teorema 1.1 Seja $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular. Então o arco $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é retificável e seu comprimento é dado por

$$s = \int_a^b \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Demonstração 1.1 Considere $\epsilon > 0$, devemos mostrar que $|s - s(P)| < \epsilon$. De acordo com o teorema do valor médio e o fato de $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ser C^1 , existe $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq |\gamma'(t_i^*)|(t_i - t_{i-1}) = |\gamma'(t_i^*)|\Delta t$$

assim

$$\left| \int_a^b |\gamma'(t)| dt - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |\gamma_i(t_i) - \gamma_{i-1}(t_{i-1})| \right| \leq \left| \int_a^b |\gamma'(t)| dt - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |\gamma'(t_i^*)| \Delta t \right| = 0 < \epsilon$$

Portanto o comprimento de arco é dado por $\int_a^b |\gamma'(t)| dt$.

Proposição 1.1 O comprimento de arco da curva $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, é invariante por uma mudança de parâmetro.

Demonstração 1.2 Seja $f : J \rightarrow I$ uma bijeção entre intervalos de \mathbb{R} , ou seja, f é uma mudança de parâmetro satisfazendo $f'(s) > 0$, e $\beta(s) = \gamma \circ f(s)$ outra parametrização da curva γ , então teremos

$$s_\beta = \int_c^d |\beta'(s)| ds = \int_c^d |\gamma'(f(s))| |f'(s)| ds$$

pela regra da substituição, fazendo $t = f(s)$ teremos

$$\int_c^d |\gamma'(f(s))| |f'(s)| ds = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = s_\gamma$$

assim, $s_\beta = s_\gamma$, como queríamos.

Exemplo 1.17 O comprimento do segmento de arco da hélice circular parametrizada por $\gamma(t) = a(\cos t)e_1 + a(\sin t)e_2 + bte_3$, $t \in [0, 2\pi]$, é

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt \\ s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt \\ s &= 2\pi \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Exemplo 1.18 O comprimento s , da curva $\gamma(t) = (2\sin t)e_1 + (5t)e_2 + (2\cos t)e_3$, $t \in [-10, 10]$, é

$$\begin{aligned} |\gamma'(t)| &= \sqrt{4\cos^2 t + 25 + 4\sin^2 t} \\ |\gamma'(t)| &= \sqrt{4(\cos^2 t + \sin^2 t) + 25} = \sqrt{29} \\ s &= \int_{-10}^{10} \sqrt{29} dt = \sqrt{29} \Big|_{-10}^{10} = \sqrt{29}(10 + 10) = 20\sqrt{29} \end{aligned}$$

Exemplo 1.19 Calcular o comprimento da cicloide, parametrizada por

$$\gamma_1(\theta) = r(\theta - \text{sen}\theta), \quad \gamma_2(\theta) = r(1 - \text{cos}\theta).$$

Um arco da cicloide é descrito pelo intervalo paramétrico $\theta \in [0, 2\pi]$. Como

$$\frac{d\gamma_1}{d\theta} = r(1 - \text{cos}\theta) \text{ e } \frac{d\gamma_2}{d\theta} = r\text{sen}\theta$$

temos

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{d\gamma_1}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - \text{cos}\theta)^2 + r^2\text{sen}^2\theta} d\theta \\ s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - 2\text{cos}\theta + \text{cos}^2\theta + \text{sen}^2\theta)} d\theta \\ s &= r \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \text{cos}\theta)} d\theta \end{aligned}$$

Para avaliar esta integral usamos a identidade $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \text{cos}(2x))$ com $\theta = 2x$, que fornece $1 - \text{cos}\theta = 2\text{sen}^2(\theta/2)$. Como $0 \leq \theta \leq 2\pi$, temos $0 \leq \theta/2 \leq \pi$, e assim $\text{sen}(\theta/2) \geq 0$. Portanto

$$\sqrt{2(1 - \text{cos}\theta)} = \sqrt{4\text{sen}^2(\theta/2)} = 2|\text{sen}(\theta/2)| = 2\text{sen}(\theta/2)$$

$$\begin{aligned} s &= 2r \int_0^{2\pi} \text{sen}(\theta/2) d\theta \\ s &= 2r [-2\text{cos}(\theta/2)] \Big|_0^{2\pi} \\ s &= 2r [2 + 2] = 8r \end{aligned}$$

Exemplo 1.20 Calcular o comprimento de arco, a partir do ponto $t = 0$ até um ponto t qualquer da espiral logarítmica, parametrizada por $\gamma(t) = (e^t \text{cos}t)e_1 + (e^t \text{sen}t)e_2$, $t \in [0, \infty)$.

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t \sqrt{e^{2t}(\text{cos}t - \text{sen}t)^2 + e^{2t}(\text{sen}t + \text{cos}t)^2} dt \\ s &= \int_0^t \sqrt{2e^{2t}} dt \\ s &= \sqrt{2}(e^t - 1) \end{aligned}$$

Exemplo 1.21 Encontre o comprimento do arco, em função de θ , ao longo da epicicloide parametrizada por

$$\gamma(\theta) = \left((r_0 + r)\cos\theta - r\cos\left(\frac{r_0 + r}{r}\theta\right) \right) e_1 + \left((r_0 + r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{r_0 + r}{r}\theta\right) \right) e_2.$$

$$s = \int_0^\theta \left[\left(\frac{d\gamma_1}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2} d\theta$$

$$s = \int_0^\theta (r_0 + r) \left[\left(-\sin\theta + \sin\left(\frac{r_0 + r}{r}\theta\right) \right)^2 + \left(\cos\theta - \cos\left(\frac{r_0 + r}{r}\theta\right) \right)^2 \right]^{1/2} d\theta$$

$$s = (r_0 + r) \int_0^\theta [(2 + 2)\cos(r_0\theta/r)]^{1/2} d\theta$$

$$= 2(r_0 + r) \int_0^\theta \sin(r_0\theta/2r) d\theta$$

$$s = 4 \frac{(r_0 + r)r}{r_0} \cos(r_0\theta/2r) \Big|_0^\theta$$

$$s = 4 \frac{(r_0 + r)r}{r_0} [\cos(r_0\theta/2r) - 1]$$

1.5 Comprimento de Arco como um Parâmetro

Definimos a função comprimento de arco de uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$\begin{aligned} s & : [a, t] \rightarrow \mathbb{R} \\ s(t) & = \int_a^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt \end{aligned} \quad (1.5)$$

Se $t \geq a$, então $s \geq 0$. O comprimento de arco no intervalo $[a, t]$ depende da orientação, pois

$$s(t) = \int_a^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = - \int_t^a \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a derivada da equação 1.5 é dada por

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| > 0, \text{ para todo, } t \in [a, b].$$

Se γ é de classe C^k , s também é de classe C^k no intervalo $[a, t]$. O fato de γ ser regular implica que o comprimento de arco (s), pode ser introduzido como um parâmetro ao longo de uma curva regular.

Vejamos alguns exemplos onde reparametrizaremos em função do comprimento de arco curvas parametrizadas em função de um parâmetro qualquer.

Exemplo 1.22 Para obter a reparametrização por comprimento de arco para a hélice circular parametrizada por

$$\gamma(t) = (a \cos t)e_1 + (a \sin t)e_2 + bte_3, \quad (1.6)$$

consideramos

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = \int_0^t (a^2 + b^2)^{1/2} dt \\ s &= (a^2 + b^2)^{1/2} t \end{aligned}$$

e substituímos, $t = (a^2 + b^2)^{-1/2}s$ encontrado acima em 1.6, assim

$$\gamma(s) = a \cos[(a^2 + b^2)^{-1/2}s]e_1 + a \sin[(a^2 + b^2)^{-1/2}s]e_2 + b[(a^2 + b^2)^{-1/2}s]e_3$$

é a reparametrização por comprimento de arco para a hélice circular.

Exemplo 1.23 A reparametrização por comprimento de arco da espiral logarítmica parametrizada por

$$\gamma(t) = (e^t \cos t)e_1 + (e^t \sin t)e_2, \quad t \in [0, \infty) \quad (1.7)$$

pode ser calculada, considerando

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2} dt \\ s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2t}} dt \\ s &= \sqrt{2}(e^t - 1) \end{aligned}$$

então,

$$s = \sqrt{2}(e^t - 1) \iff t = \ln\left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

com isso, substituindo $t = \ln\left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$ encontrado acima em 1.7, encontramos

$$\gamma(s) = \left[\left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \cos\left(\ln\left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right), \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \sin\left(\ln\left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right) \right]$$

que é a reparametrização por comprimento de arco da espiral logarítmica.

Capítulo 2

Elementos Geométricos das Curvas

Uma questão fundamental em geometria é determinar as quantidades geométricas que caracterizam as curvas. Neste capítulo associamos a cada curva duas quantidades escalares chamadas **Curvatura e Torção**, que definem uma curva no espaço. A curvatura mede o quanto uma curva deixa de estar contida numa reta e a torção mede o quanto uma curva deixa de estar contida num plano.

No que se segue, entendemos s como sendo o comprimento de arco, $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e, mais, γ é uma curva regular de classe C^∞ .

2.1 Vetor Tangente

Dada uma curva $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, sabemos que $\gamma'(t)$ é um vetor tangente a curva γ no ponto $t \in I$.

Definição 2.1 *O vetor tangente unitário a curva $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dado por*

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}.$$

Proposição 2.1 *Se $\gamma(I)$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, então $|\gamma'(s)| = 1$.*

Demonstração 2.1

$$|\gamma'(s)| = \left| \frac{d\gamma}{ds} \right| = \left| \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \frac{\left| \frac{d\gamma}{dt} \right|}{\left| \frac{d\gamma}{dt} \right|} = 1$$

onde usamos o fato que $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|$.

A proposição acima nos leva a definir o vetor tangente unitário a curva $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ como,

$$\mathbf{T}(s) = \gamma'(s).$$

2.2 Vetor Normal

Sabemos que existem vetores ortogonais ao vetor tangente unitário $\mathbf{T}(s)$, como $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}'(s) \rangle = 0$, temos que $\mathbf{T}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{T}(s)$, no entanto $\mathbf{T}'(s)$ pode não ser unitário. Denominamos de vetor normal ao vetor na direção de $\mathbf{T}'(s)$.

Definição 2.2 O *vetor normal unitário* a curva $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dado por

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{|\mathbf{T}'(s)|} = \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}.$$

Proposição 2.2 Ao longo de uma reta o vetor normal \mathbf{N} é indeterminado.

Demonstração 2.2 Se γ é uma reta, então sua parametrização é $\gamma(t) = at + b$, com $a \neq 0$. Assim,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{a}{a} = 1 \quad e \quad \mathbf{T}'(t) = 0$$

portanto,

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}, \quad \text{fica indeterminado.}$$

Exemplo 2.1 Encontrar os vetores tangente unitário e normal unitário à hélice circular parametrizada por $\gamma(t) = a(\cos t)e_1 + a(\sin t)e_2 + bte_3$, $a, b \neq 0$.

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= -a(\sin t)e_1 + a(\cos t)e_2 + be_3 \\ \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| &= \left(a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2 \right)^{1/2} = \left(a^2 + b^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

então, o vetor tangente é

$$\mathbf{T}(t) = \frac{d\gamma}{dt} / \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = (a^2 + b^2)^{-1/2} \left(-a(\text{sent})e_1 + a(\text{cost})e_2 + be_3 \right)$$

Para encontrar o vetor normal, precisamos calcular a derivada do vetor tangente e sua norma

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'(t) &= (a^2 + b^2)^{-1/2} \left(-a(\text{cost})e_1 - a(\text{sent})e_2 \right) \\ |\mathbf{T}'(t)| &= \sqrt{(a^2 + b^2)^{-1} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t)} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

portanto o vetor normal é

$$\mathbf{N}(t) = -[(\text{cost})e_1 + (\text{sent})e_2].$$

Exemplo 2.2 Encontrar o vetor tangente unitário da cúbica retorcida, parametrizada por $\gamma(t) = te_1 + t^2e_2 + t^3e_3$, no ponto $t = 2$.

Temos que

$$\frac{d\gamma}{dt} = e_1 + 2te_2 + 3t^2e_3 \quad e \quad \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = (1^2 + 4t^2 + 9t^4)^{1/2}$$

quando $t=2$,

$$\gamma'(2) = e_1 + 4e_2 + 12e_3 \quad e \quad |\gamma'(2)| = (1 + 16 + 144)^{1/2} = (161)^{1/2}$$

portanto, o vetor tangente unitário no ponto $t = 2$ é

$$\mathbf{T}(2) = (161)^{-1/2} (e_1 + 4e_2 + 12e_3).$$

2.3 Curvatura

A curvatura é um invariante geométrico de uma curva, cuja interpretação geométrica é o quanto uma curva deixa de estar contida numa reta. O vetor tangente unitário $\mathbf{T}(s)$ mede a variação e indica a orientação da curva no ponto s .

Definição 2.3 Seja $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva. O número

$$\kappa(s) = |\gamma''(s)| = |\mathbf{T}'(s)|$$

é chamado de **curvatura** da curva γ no ponto $s \in I$.

Intuitivamente, o número $|\gamma''(s)|$ (curvatura), é a medida de quão rapidamente a curva γ muda de direção no ponto $\gamma(s)$.

Pela definição do vetor normal unitário, podemos escrever

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\kappa(s)}$$

ou

$$\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s). \quad (2.1)$$

Definimos a curvatura em termos do comprimento de arco, mas na prática, as curvas são dadas em função de um parâmetro qualquer t e não de s . Podemos expressar a curvatura em termos de um parâmetro qualquer, observando que

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad e \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} / \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} / \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|$$

assim

$$\kappa(t) = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} / \frac{d\gamma}{dt} \right|$$

ou

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\gamma'(t)|}.$$

O recíproco da curvatura, chamado de **raio de curvatura** é calculado por

$$\rho = \frac{1}{\kappa}.$$

O círculo que melhor descreve o comportamento de γ próxima do ponto $\gamma(s)$ é chamado de **círculo de curvatura** ou **círculo osculador**, pois está sobre o plano osculador de γ . O círculo de curvatura tem em comum com γ os vetores tangente e normal e curvatura, seu raio é ρ .

Em um ponto de inflexão da curva γ , onde $\mathbf{T}'(s) = 0$, a curvatura é nula e o raio de curvatura é infinito.

Exemplo 2.3 Encontre a curvatura e o raio de curvatura do círculo de raio a ,

$$\gamma(t) = a(\cos t)e_1 + a(\sin t)e_2, \quad a > 0.$$

Temos que

$$\frac{d\gamma}{dt} = -a(\sin t)e_1 + a(\cos t)e_2, \quad \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = a$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{d\gamma}{dt} / \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = -(\sin t)e_1 + (\cos t)e_2$$

e

$$\mathbf{T}'(s) = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} / \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = -\frac{1}{a} \left((\cos t)e_1 + (\sin t)e_2 \right)$$

observe que $\mathbf{T}'(s)$ aponta para a origem. A curvatura é constante e igual a

$$\kappa(s) = |\mathbf{T}'(s)| = 1/a$$

e o raio da curvatura é $\rho = 1/\kappa = a$. Como esperávamos o raio da curvatura coincide com o raio do círculo.

Exemplo 2.4 Para a hélice circular, $\gamma(t) = a(\cos t)e_1 + a(\sin t)e_2 + bte_3$, temos

$$\frac{d\gamma}{dt} = -a(\sin t)e_1 + a(\cos t)e_2 + bte_3, \quad \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{d\gamma}{dt} / \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = (a^2 + b^2)^{-1/2} \left(-a(\sin t)e_1 + a(\cos t)e_2 + be_3 \right)$$

$$\mathbf{T}'(s) = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} / \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|$$

$$\mathbf{T}'(s) = \left[(a^2 + b^2)^{-1/2} \left(-a(\cos t)e_1 - a(\sin t)e_2 \right) \right] / (a^2 + b^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{T}'(s) = -\frac{a}{a^2 + b^2} \left((\cos t)e_1 + (\sin t)e_2 \right).$$

Observe que $\mathbf{T}'(s)$ é paralelo ao plano xy e dirigido para a origem, veja a figura 2.1.

A curvatura é constante e igual a

$$\kappa(s) = |\mathbf{T}'(s)| = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

e o raio da curvatura é

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{a^2 + b^2}{a}.$$

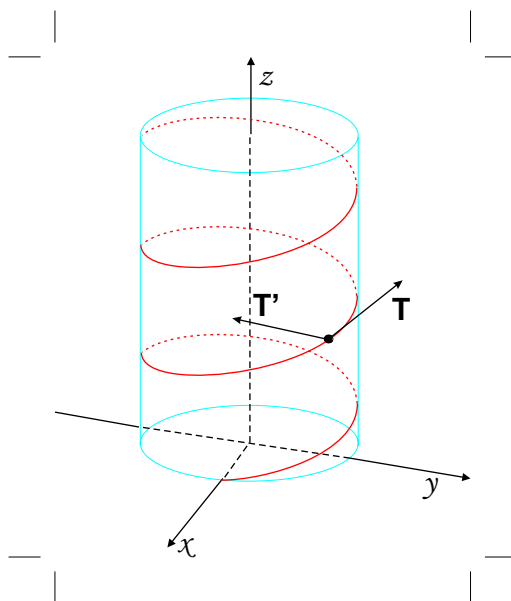


Figura 2.1: Vetor tangente da hélice circular

Exemplo 2.5 Encontrar a curvatura da curva parametrizada por,

$$\gamma(t) = te_1 + \frac{1}{2}t^2e_2 + \frac{1}{3}t^3e_3$$

no ponto $t = 1$.

$$\gamma'(t) = e_1 + te_2 + t^2e_3, \quad |\gamma'(t)| = (1 + t^2 + t^4)^{1/2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \gamma'(t)/|\gamma'(t)| = (1 + t^2 + t^4)^{-1/2}(e_1 + te_2 + t^2e_3)$$

$$\mathbf{T}'(t) = (1 + t^2 + t^4)^{-1/2}(e_2 + 2te_3) - (e_1 + te_2 + t^2e_3)(1 + t^2 + t^4)^{-3/2}(t + 2t^3)$$

$$\mathbf{T}'(t) = -(1 + t^2 + t^4)^{-3/2} \left[(2t^3 + t)e_1 + (t^4 - 1)e_2 - (t^3 + 2t)e_3 \right]$$

$$\mathbf{T}'(s) = \mathbf{T}'(t)/|\gamma'(t)| = -(1 + t^2 + t^4)^{-2} \left[(2t^3 + t)e_1 + (t^4 - 1)e_2 - (t^3 + 2t)e_3 \right]$$

Portanto quando $t = 1$ temos,

$$\kappa(1) = |\mathbf{T}'(1)| = \frac{1}{3}\sqrt{2}.$$

Definimos a curvatura em função do comprimento de arco, mas podemos obter a curvatura em função de uma parametrização arbitrária da curva γ , ou seja, podemos expressar a curvatura em termos das derivadas de uma parametrização qualquer da curva γ .

Teorema 2.1 Dada uma curva $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, a curvatura em função de um parâmetro qualquer t é dada por

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}.$$

Demonstração 2.3 Sabemos que

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \quad e \quad |\gamma'(t)| = \frac{ds}{dt}$$

portanto,

$$\gamma'(t) = |\gamma'(t)| \mathbf{T}(t) = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}(t) \quad e \quad \gamma''(t) = \frac{ds'}{dt} \mathbf{T}(t) + \frac{ds}{dt} \mathbf{T}'(t)$$

assim,

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 (\mathbf{T} \times \mathbf{T}').$$

Como $|\mathbf{T}(t)| = 1$ para todo t , $\langle \mathbf{T}(t), \mathbf{T}'(t) \rangle = 0$ e $|\mathbf{T}(t) \times \mathbf{T}'(t)| = |\mathbf{T}(t)| |\mathbf{T}'(t)|$, então

$$|\gamma'(t) \times \gamma''(t)| = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 |\mathbf{T}(t) \times \mathbf{T}'(t)|$$

$$|\gamma'(t) \times \gamma''(t)| = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 |\mathbf{T}(t)| |\mathbf{T}'(t)|$$

$$|\gamma'(t) \times \gamma''(t)| = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 |\mathbf{T}'(t)|$$

portanto,

$$|\mathbf{T}'(t)| = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{(ds/dt)^2} = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^2}.$$

Logo

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\gamma'(t)|} = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}.$$

Vejamos que a curvatura é um invariante geométrico das curvas, isto é, independe da parametrização.

Proposição 2.3 A curvatura de uma curva $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é invariante por uma mudança de parâmetro.

Demonstração 2.4 Seja $f : J \rightarrow I$ uma bijeção entre intervalos de \mathbb{R} , ou seja, f é uma mudança de parâmetro, e $\gamma(s) = \beta \circ f(s)$ outra parametrização da curva γ , sabemos que

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$$

e que,

$$\gamma'(s) = \beta'(f(s)) \cdot f'(s), \quad \gamma''(s) = \beta''(f(s)) \cdot (f'(s))^2 + \beta'(f(s)) \cdot f''(s)$$

assim,

$$|\gamma'(s) \times \gamma''(s)| = |[\beta'(f(s)) \cdot f'(s)] \times [\beta''(f(s)) \cdot (f'(s))^2 + \beta'(f(s)) \cdot f''(s)]|$$

$$|\gamma'(s) \times \gamma''(s)| = |[\beta'(f(s)) \cdot f'(s)] \times [\beta''(f(s)) \cdot (f'(s))^2]|$$

$$|\gamma'(s) \times \gamma''(s)| = |f'(s)|^3 \cdot |\beta'(f(s)) \times \beta''(f(s))|$$

e

$$|\gamma'(s)|^3 = |\beta'(f(s)) \cdot f'(s)|^3$$

$$|\gamma'(s)|^3 = |f'(s)|^3 \cdot |\beta'(f(s))|^3$$

Portanto

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma(t) &= \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} \\ \kappa_\gamma(t) &= \frac{|f'(s)|^3 \cdot |\beta'(f(s)) \times \beta''(f(s))|}{|f'(s)|^3 \cdot |\beta'(f(s))|^3} \\ \kappa_\gamma(t) &= \frac{|\beta'(f(s)) \times \beta''(f(s))|}{|\beta'(f(s))|^3} \\ \kappa_\gamma(t) &= \kappa_\gamma(s) \end{aligned}$$

Logo, a curvatura é um invariante geométrico das curvas.

Exemplo 2.6 Calcular a curvatura da cúbica retorcida, parametrizada por

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3), \text{ em } t = 0.$$

Temos que

$$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2) \quad e \quad \gamma''(t) = (0, 2, 6t)$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\mathbf{i} - 6t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$|\gamma'(t) \times \gamma''(t)| = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}.$$

A curvatura será dada por

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}$$

quando $t = 0$, temos que $\kappa(0) = 2$.

Exemplo 2.7 Determine a curvatura e o círculo osculador da parábola $\gamma(t) = t^2$ na origem. Teremos

$$\gamma'(t) = 2t \quad e \quad \gamma''(t) = 2$$

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}$$

Portanto, na origem temos $\kappa(0) = 2$. Assim o raio do círculo osculador é $\rho = 1/\kappa = 1/2$ e seu centro é $(0, 1/2)$, veja a figura 2.2. Sua equação é portanto

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

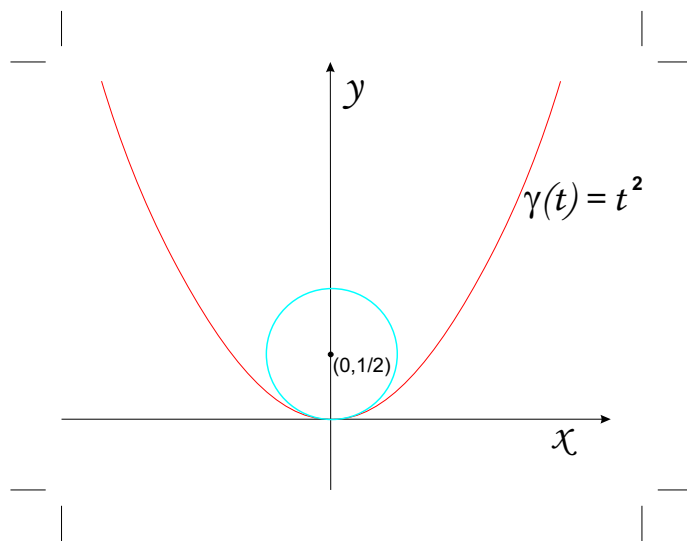


Figura 2.2: Círculo osculador da parábola

Exemplo 2.8 Calcular a curvatura da espiral logarítmica, parametrizada por

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), \quad t \in [0, \infty).$$

Temos que

$$\gamma'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$$

$$\gamma''(t) = (-2e^t \sin t, 2e^t \cos t)$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{2}e^t$$

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \begin{vmatrix} e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\sin t + \cos t) \\ -2e^t \sin t & 2e^t \cos t \end{vmatrix} = 2e^{2t}$$

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} = \frac{2e^{2t}}{(\sqrt{2}e^t)^3} = \frac{\sqrt{2}}{4e^t}$$

Quando maior o valor de t , menor é a curvatura. Veja a figura 2.3

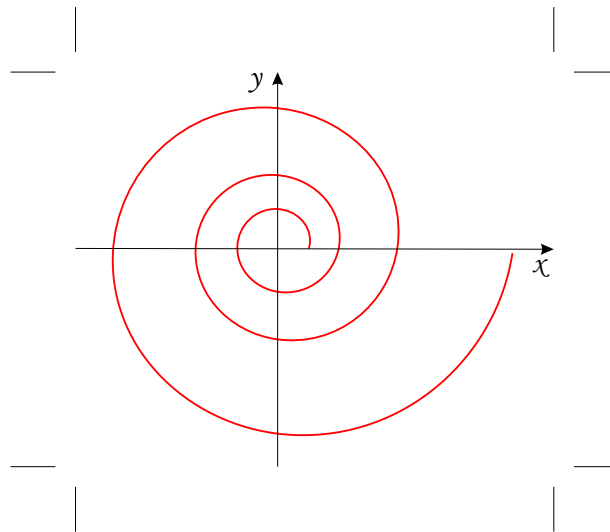


Figura 2.3: Espiral Logarítmica

2.4 Referencial Móvel em \mathbb{R}^2

Definição 2.4 Dada uma curva $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, para cada $s \in I$, o conjunto de vetores $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\}$ é denominado de **referencial móvel** ou **Diedro de Frenet** em s .

Sabemos que $\mathbf{T}(s)$ é perpendicular a $\mathbf{N}(s)$, assim

$$\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle = 0$$

derivando em relação a s obtemos

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle' &= 0 \\ \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle + \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}'(s) \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle &= -\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}'(s) \rangle \\ \kappa(s) &= -\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}'(s) \rangle \\ &\downarrow \\ \mathbf{N}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{T}(s)\end{aligned}$$

uma vez que $\langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle = 0$ e $\langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle = \kappa(s)$.

As equações de Frenet para curvas planas são definidas por

$$\begin{aligned}\mathbf{T}'(s) &= \kappa\mathbf{N}(s) \\ \mathbf{N}'(s) &= -\kappa\mathbf{T}(s)\end{aligned}$$

Proposição 2.4 Uma curva $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma reta se, e somente se, $\kappa = 0$.

Demonstração 2.5 Se a curvatura é nula ao longo da curva γ , ou seja,

$$\kappa(s) = |\mathbf{T}'(s)| = 0$$

então $\mathbf{T}'(s) = 0$. Integrando temos,

$$\mathbf{T}(s) = a, \quad a = \text{constante} \neq 0$$

mas, $\mathbf{T}(s) = \frac{d\gamma}{ds}$, integrando outra vez, obtemos

$$\gamma(s) = as + b, \quad b = \text{constante}$$

isto é, a curva γ é uma reta que passa pelo ponto b e é paralela ao vetor a .

Inversamente, se γ é uma reta, então sua parametrização é

$$\gamma(t) = at + b, \quad a \neq 0.$$

Assim,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{a}{a} = 1 \quad e \quad \mathbf{T}'(t) = 0$$

portanto,

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\gamma'(t)|} = 0$$

Logo, γ é uma reta se, e somente se, $\kappa = 0$.

2.5 Vetor Binormal

Definição 2.5 O vetor resultante do produto vetorial entre os vetores $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{N}(s)$, dado por

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$$

é chamado de **vetor Binormal**.

Como os vetores $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{N}(s)$ são unitários temos que $|\mathbf{B}(s)| = 1$.

Proposição 2.5 Vejamos que $\mathbf{B} \times \mathbf{T} = \mathbf{N}$.

Demonstração 2.6

$$\mathbf{B} \times \mathbf{T} = (\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \times \mathbf{T} \tag{2.2}$$

usando a identidade do cálculo vetorial

$$(a \times b) \times c = b\langle a, c \rangle - a\langle b, c \rangle \tag{2.3}$$

e aplicando a identidade 2.3 na equação 2.2 temos

$$\mathbf{B} \times \mathbf{T} = \mathbf{N}\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle - \mathbf{T}\langle \mathbf{N}, \mathbf{T} \rangle$$

Mas \mathbf{N} e \mathbf{T} são perpendiculares entre si, portanto $\langle \mathbf{N}, \mathbf{T} \rangle = 0$, e \mathbf{T} é um vetor unitário, assim $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = |\mathbf{T}|^2 = 1$, portanto

$$\mathbf{B} \times \mathbf{T} = \mathbf{N}$$

que prova a proposição.

Proposição 2.6 *Vejamos que $\mathbf{N} \times \mathbf{B} = \mathbf{T}$.*

Demonstração 2.7

$$\mathbf{N} \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \times \mathbf{T}) \times \mathbf{B} \quad (2.4)$$

aplicando a identidade 2.3 em 2.4

$$\mathbf{N} \times \mathbf{B} = \mathbf{T}\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle - \mathbf{B}\langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle.$$

Mas $\langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle = 0$ e $\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = |\mathbf{B}|^2 = 1$, assim

$$\mathbf{N} \times \mathbf{B} = \mathbf{T}$$

que prova a proposição.

2.6 Torção

A torção é outro invariante geométrico das curvas, cuja interpretação geométrica é o quanto uma curva deixa de estar contida num plano, mais precisamente do plano osculador ou ainda, o módulo da torção mede a velocidade com que varia o plano osculador. Considere uma curva $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja curvatura nunca se anule e a variação do vetor binormal, $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(s) &= \mathbf{T}'(s) \times \mathbf{N}(s) + \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) &= \kappa(s) [\mathbf{N}(s) \times \mathbf{N}(s)] + \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) &= \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}'(s) \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde usamos o fato que $\mathbf{N}(s) \times \mathbf{N}(s) = 0$ e $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$. Como $|\mathbf{N}(s)|^2 = 1$ e $\langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle = 0$, conseqüentemente $\mathbf{N}'(s)$ é paralelo ao plano retificante, portanto pode ser escrito como combinação linear de $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{B}(s)$ da seguinte forma

$$\mathbf{N}'(s) = \mu(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s)$$

substituindo a equação acima na equação 2.5 temos

$$\mathbf{B}'(s) = \mathbf{T}(s) \times [\mu(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s)]$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}'(s) &= \mu(s) [\mathbf{T}(s) \times \mathbf{T}(s)] + \tau(s) [\mathbf{T}(s) \times \mathbf{B}(s)] \\
\mathbf{B}'(s) &= \tau(s) [\mathbf{T}(s) \times \mathbf{B}(s)] \\
\mathbf{B}'(s) &= -\tau(s) \mathbf{N}(s)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Definição 2.6 Seja $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva tal que $\gamma''(s) \neq 0$, $s \in I$. O número $\tau(s)$ definido por $\mathbf{B}'(s) = -\tau(s) \mathbf{N}(s)$ é chamado de **segunda curvatura** ou **torção** de γ no ponto s .

Se tomarmos o produto interno na equação 2.6 com $\mathbf{N}(s)$, obtemos a fórmula da torção

$$\tau(s) = -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle \tag{2.7}$$

Proposição 2.7 Seja $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, então

$$\mathbf{T}'' = -\kappa^2 \mathbf{T} + \kappa' \mathbf{N} + \tau \kappa \mathbf{B}.$$

Demonstração 2.8 Derivando a expressão $\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}'' &= \kappa \mathbf{N}' + \kappa' \mathbf{N} \\
\mathbf{T}'' &= \kappa (\mathbf{B} \times \mathbf{T})' + \kappa' \mathbf{N} \\
\mathbf{T}'' &= \kappa (\mathbf{B} \times \mathbf{T}' + \mathbf{B}' \times \mathbf{T}) + \kappa' \mathbf{N} \\
\mathbf{T}'' &= \kappa^2 (\mathbf{B} \times \mathbf{N}) - \kappa \tau (\mathbf{N} \times \mathbf{T}) + \kappa' \mathbf{N} \\
\mathbf{T}'' &= -\kappa^2 \mathbf{T} + \kappa' \mathbf{N} + \tau \kappa \mathbf{B}
\end{aligned}$$

usamos o fato que $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ é uma base ortonormal, $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$, $\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}$, $\mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}$.

Proposição 2.8 Seja $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva, então, ao longo de γ temos

$$\langle (\mathbf{T} \times \mathbf{T}'), \mathbf{T}'' \rangle = \kappa^2 \tau.$$

Demonstração 2.9 Usando o resultado da proposição 2.7 temos,

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} \times \mathbf{T}' &= \mathbf{T} \times \kappa \mathbf{N} = \kappa (\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \\
\langle (\mathbf{T} \times \mathbf{T}'), \mathbf{T}'' \rangle &= \langle \kappa (\mathbf{T} \times \mathbf{N}), -\kappa \mathbf{T} + \kappa' \mathbf{N} + \tau \kappa \mathbf{B} \rangle \\
\langle (\mathbf{T} \times \mathbf{T}'), \mathbf{T}'' \rangle &= -\kappa^3 \langle (\mathbf{T} \times \mathbf{T}), \mathbf{N} \rangle + \kappa^2 \tau \langle (\mathbf{T} \times \mathbf{N}), \mathbf{B} \rangle + \kappa' \langle (\mathbf{T} \times \mathbf{N}), \mathbf{N} \rangle \\
\langle (\mathbf{T} \times \mathbf{T}'), \mathbf{T}'' \rangle &= \kappa^2 \tau \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle \\
\langle (\mathbf{T} \times \mathbf{T}'), \mathbf{T}'' \rangle &= \kappa^2 \tau
\end{aligned}$$

Assim como fizemos para a curvatura, podemos obter a torção em função das derivadas de uma parametrização arbitrária da curva γ .

Teorema 2.2 *Dada a curva $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\kappa \neq 0$. A torção em função de um parâmetro qualquer t é dada por*

$$\tau(t) = \frac{\langle (\gamma'(t) \times \gamma''(t)), \gamma'''(t) \rangle}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}.$$

Demonstração 2.10 *Sabemos que*

$$\mathbf{T}(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds}$$

Seja,

$$\frac{dt}{ds} = \dot{\mathbf{t}} \quad \text{assim,} \quad \mathbf{T}(s) = \gamma'(t) \dot{\mathbf{t}}$$

portanto,

$$\mathbf{T}'(s) = \frac{d}{ds}(\gamma'(t) \dot{\mathbf{t}}) = \gamma'(t) \ddot{\mathbf{t}} + \gamma''(t) \dot{\mathbf{t}}^2$$

e

$$\mathbf{T}''(s) = \frac{d}{ds}(\gamma'(t) \ddot{\mathbf{t}} + \gamma''(t) \dot{\mathbf{t}}^2) = \gamma'(t) \dddot{\mathbf{t}} + 3\gamma''(t) \ddot{\mathbf{t}} \dot{\mathbf{t}} + \gamma'''(t) \dot{\mathbf{t}}^3.$$

Calculamos o seguinte produto interno

$$\mathbf{T}(s) \times \mathbf{T}'(s) = (\gamma'(t) \dot{\mathbf{t}}) \times (\gamma'(t) \ddot{\mathbf{t}} + \gamma''(t) \dot{\mathbf{t}}^2)$$

$$\mathbf{T}(s) \times \mathbf{T}'(s) = \ddot{\mathbf{t}} \dot{\mathbf{t}}^3 \langle \gamma'(t) \times \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle + \dot{\mathbf{t}}^3 (\gamma'(t) \times \gamma''(t))$$

$$\mathbf{T}(s) \times \mathbf{T}'(s) = \dot{\mathbf{t}}^3 (\gamma'(t) \times \gamma''(t))$$

portanto,

$$\langle (\mathbf{T}(t) \times \mathbf{T}'(t), \mathbf{T}''(t)) \rangle = \langle \dot{\mathbf{t}}^3 (\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \times (\gamma'(t) \ddot{\mathbf{t}} + 3\gamma''(t) \ddot{\mathbf{t}} \dot{\mathbf{t}} + \gamma'''(t) \dot{\mathbf{t}}^3) \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{T}(t) \times \mathbf{T}'(t), \mathbf{T}''(t)) \rangle &= \ddot{\mathbf{t}} \dot{\mathbf{t}}^3 \langle (\gamma'(t) \times \gamma''(t)), \gamma'(t) \rangle + 3\ddot{\mathbf{t}} \dot{\mathbf{t}}^4 \langle (\gamma'(t) \times \gamma''(t)), \gamma''(t) \rangle \\ &\quad + \dot{\mathbf{t}}^6 \langle (\gamma'(t) \times \gamma''(t)), \gamma'''(t) \rangle \end{aligned}$$

como, $\langle (\gamma'(t) \times \gamma''(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle (\gamma'(t) \times \gamma''(t)), \gamma''(t) \rangle = 0$, a expressão acima se torna

$$\langle (\mathbf{T}(s) \times \mathbf{T}'(s), \mathbf{T}''(s)) \rangle = \dot{\mathbf{t}}^6 \langle (\gamma'(t) \times \gamma''(t)), \gamma'''(t) \rangle$$

mas, temos que

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{|\gamma'(t)|}$$

assim

$$\langle (\mathbf{T}(s) \times \mathbf{T}'(s)), \mathbf{T}''(s) \rangle = \frac{\langle (\gamma'(t) \times \gamma''(t)), \gamma'''(t) \rangle}{|\gamma'(t)|^6}$$

Usando o resultado da proposição 2.8 e o fato que

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$$

temos finalmente,

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \frac{\langle (\mathbf{T}(t) \times \mathbf{T}'(t)), \mathbf{T}''(t) \rangle}{\kappa^2(t)} \\ \tau(t) &= \frac{\langle (\gamma'(t) \times \gamma''(t)), \gamma'''(t) \rangle}{\kappa^2(t) |\gamma'(t)|^6} \\ \tau(t) &= \frac{\langle (\gamma'(t) \times \gamma''(t)), \gamma'''(t) \rangle}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2} \end{aligned}$$

que prova o teorema.

Assim como fizemos para a curvatura, vamos mostrar que a torção também é um invariante geométrico de uma curva.

Proposição 2.9 *A torção de uma curva $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, é invariante por uma mudança de parâmetro.*

Demonstração 2.11 *Seja $f : J \rightarrow I$ uma bijeção entre intervalos de \mathbb{R} , ou seja, f é uma mudança de parâmetro, e $\gamma(s) = \beta \circ f(s)$ outra parametrização da curva γ , sabemos que*

$$\tau(t) = \frac{\langle (\gamma'(t) \times \gamma''(t)), \gamma'''(t) \rangle}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}$$

e que,

$$\gamma'(s) = \beta'(f(s)) \cdot f'(s), \quad \gamma''(s) = \beta''(f(s)) \cdot (f'(s))^2 + \beta'(f(s)) \cdot f''(s) \quad e$$

$$\gamma'''(s) = \beta'''(f(s)) \cdot (f'(s))^3 + \beta''(f(s)) \cdot 2f'(s)f''(s) + \beta'(f(s)) \cdot (f''(s))^2 + \beta'(f(s)) \cdot f'''(s).$$

Sabemos também, da proposição 2.3 que,

$$\gamma'(s) \times \gamma''(s) = (f'(s))^3 \cdot (\beta'(f(s)) \times \beta''(f(s)))$$

e que

$$|\gamma'(s) \times \gamma''(s)|^2 = |f'(s)|^6 \cdot |(\beta'(f(s)) \times \beta''(f(s)))|^2$$

assim,

$$\langle (\gamma'(s) \times \gamma''(s)), \gamma'''(s) \rangle = (f'(s))^6 \cdot \langle (\beta'(f(s)) \times \beta''(f(s))), \beta'''(f(s)) \rangle.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \tau_\gamma(t) &= \frac{\langle (\gamma'(t) \times \gamma''(t)), \gamma'''(t) \rangle}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2} \\ \tau_\gamma(t) &= \frac{(f'(s))^6 \cdot \langle (\beta'(f(s)) \times \beta''(f(s))), \beta'''(f(s)) \rangle}{|f'(s)|^6 \cdot |(\beta'(f(s)) \times \beta''(f(s)))|^2} \\ \tau_\gamma(t) &= \frac{\langle (\beta'(f(s)) \times \beta''(f(s))), \beta'''(f(s)) \rangle}{|(\beta'(f(s)) \times \beta''(f(s)))|^2} \\ \tau_\gamma(t) &= \tau_\gamma(s) \end{aligned}$$

Logo, a torção é invariante por uma mudança de parâmetro.

Exemplo 2.9 Considere o exemplo da hélice circular parametrizada por

$$\gamma(t) = a(\cos t)e_1 + a(\sin t)e_2 + bte_3, \quad a > 0, b \neq 0.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(t) &= (-\cos t)e_1 - (\sin t)e_2 \\ \mathbf{B}(t) &= (a^2 + b^2)^{-1/2}(b(\sin t)e_1 - b(\cos t)e_2 + ae_3) \\ \mathbf{B}'(t) &= (a^2 + b^2)^{-1}(b(\cos t)e_1 + b(\sin t)e_2) \end{aligned}$$

Temos que a torção é constante e igual a

$$\begin{aligned} \tau(t) &= -\langle \mathbf{B}'(t), \mathbf{N}(t) \rangle \\ \tau(t) &= \langle (a^2 + b^2)^{-1}(b(\cos t)e_1 + b(\sin t)e_2), ((-\cos t)e_1 - (\sin t)e_2) \rangle \\ \tau(t) &= b/(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Note que se $b > 0$, temos $\tau(t) > 0$, a hélice cresce à direita, como mostra a figura 2.4. Se $b < 0$, temos $\tau(t) < 0$, a hélice cresce à esquerda, como mostra a figura 2.5.

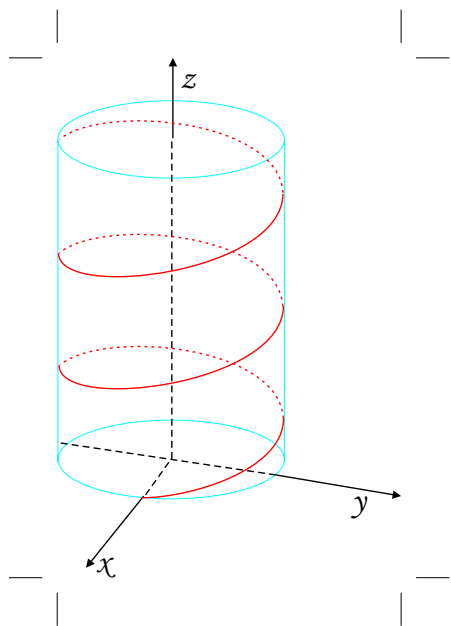


Figura 2.4: Hélice circular à direita

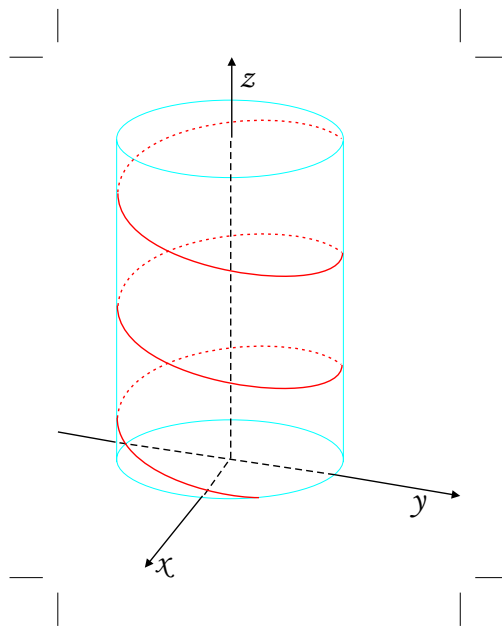


Figura 2.5: Hélice circular à esquerda

Exemplo 2.10 *Calcular a curvatura e a torção da hélice logarítmica, parametrizada por $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, $t \in [0, \infty)$. Veja a figura 2.6.*

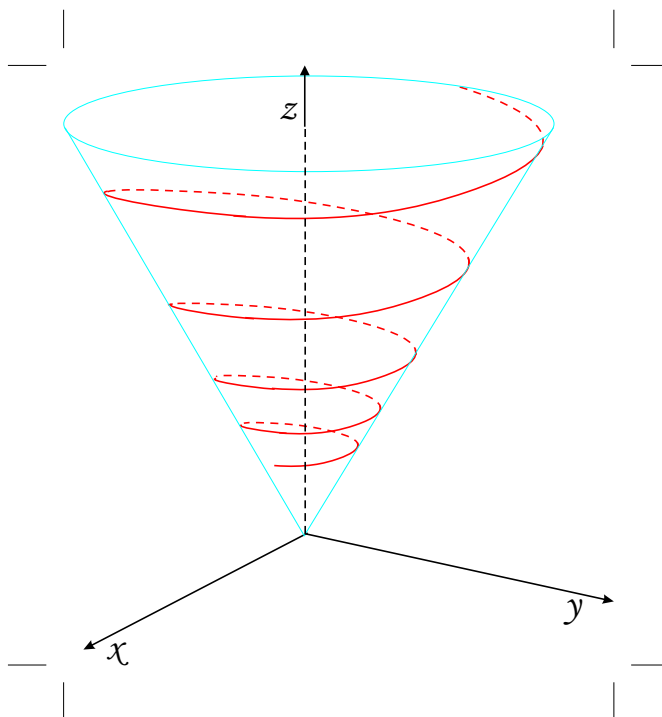


Figura 2.6: Hélice Logarítmica

Para a curvatura, calculamos

$$\gamma'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t), e^t)$$

$$\gamma''(t) = (-2e^t \sin t, 2e^t \cos t, e^t)$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{3}e^t$$

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\sin t + \cos t) & e^t \\ -2e^t \sin t & 2e^t \cos t & e^t \end{vmatrix} = (e^{2t}(\sin t - \cos t), e^{2t}(\cos t + \sin t), 2e^{2t})$$

$$|\gamma'(t) \times \gamma''(t)| = \sqrt{6}e^{2t},$$

a curvatura é dada por

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} = \frac{\sqrt{6}e^{2t}}{3\sqrt{3}e^{3t}} = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}.$$

Para a torção, calculamos

$$\gamma'''(t) = (-2e^t(\sin t + \cos t), 2e^t(\cos t - \sin t), e^t)$$

$$\begin{aligned} \langle (\gamma'(t) \times \gamma''(t)), \gamma'''(t) \rangle &= \langle (e^{2t}(\sin t - \cos t), e^{2t}(\cos t + \sin t), 2e^{2t}), \\ &\quad (-2e^t(\sin t + \cos t), 2e^t(\cos t - \sin t), e^t) \rangle \end{aligned}$$

$$\langle (\gamma'(t) \times \gamma''(t)), \gamma'''(t) \rangle = 2e^{3t},$$

a torção é dada por

$$\tau(t) = \frac{\langle (\gamma'(t) \times \gamma''(t)), \gamma'''(t) \rangle}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}$$

$$\tau(t) = \frac{2e^{3t}}{6e^{4t}}$$

$$\tau(t) = \frac{1}{3e^t}.$$

Exemplo 2.11 Usando as fórmulas dos **Teoremas 2.1** e **2.2**, encontrar a curvatura e a torção da curva

$$\gamma(t) = (3t - t^3)e_1 + 3t^2e_2 + (3t + t^3)e_3.$$

Pelo teorema 2.1 a curvatura é dada por

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} \\ \kappa(t) &= \frac{|[(3 - 3t^2)e_1 + 6te_2 + (3 + 3t^2)e_3] \times [-6te_1 + 6e_2 + 6te_3]|}{|(3 - 3t^2)e_1 - 2te_2 + (1 + t^2)e_3|^3} \\ \kappa(t) &= \frac{18|(t^2 - 1)e_1 - 2te_2 + (1 + t^2)e_3|}{27|(1 - t^2)e_1 + 2te_2 + (1 + t^2)e_3|^3} \\ \kappa(t) &= \frac{2}{3(1 + t^2)^2}\end{aligned}$$

e, pelo teorema 2.2 temos que a torção é dada por

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \frac{\langle (\gamma'(t) \times \gamma''(t)), \gamma'''(t) \rangle}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2} \\ \tau(t) &= \frac{\langle 18[(t^2 - 1)e_1 - 2te_2 + (1 + t^2)e_3], 6[-e_1 + e_3] \rangle}{18^2|(t^2 - 1)e_1 - 2te_2 + (1 + t^2)e_3|^2} \\ \tau(t) &= \frac{2}{3(1 + t^2)^2}\end{aligned}$$

Observe que para esta curva, $\kappa = \tau$.

2.7 Referencial Móvel em \mathbb{R}^3

Definição 2.7 Dada uma curva $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, para cada $s \in I$, o conjunto de vetores $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ é denominado de **referencial móvel** ou **Triedro de Frenet** em s .

A variação dos vetores $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{N}(s)$ deste referencial, respectivamente

$$\mathbf{T}'(s) = \kappa\mathbf{N}(s) \quad e \quad \mathbf{B}'(s) = -\tau\mathbf{N}(s)$$

nos fornece os elementos geométricos (κ e τ) das curvas em \mathbb{R}^3 , que informam sobre o comportamento da curva numa vizinhança do ponto s .

Se a curva $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é de classe C^∞ e a curvatura e a torção não se anularem, teremos o referencial móvel bem definido e o calculamos da seguinte forma,

$$\mathbf{T}(s) = \gamma'(s)$$

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{|\mathbf{T}'(s)|}$$

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s).$$

Cada par de vetores do referencial móvel determinam um plano. O plano de \mathbb{R}^3 gerado pelos vetores \mathbf{N} e \mathbf{B} é o **plano normal** da curva γ , dado por

$$\langle \gamma(s) - \gamma(s_0), \mathbf{T} \rangle = 0.$$

O plano de \mathbb{R}^3 gerado pelos vetores \mathbf{N} e \mathbf{T} é o **plano osculador** de γ , dado por

$$\langle \gamma(s) - \gamma(s_0), \mathbf{B} \rangle = 0.$$

O plano de \mathbb{R}^3 gerado pelos vetores \mathbf{T} e \mathbf{B} é o **plano retificante** de γ , dado por

$$\langle \gamma(s) - \gamma(s_0), \mathbf{N} \rangle = 0.$$

Veja a representação na figura 2.7.

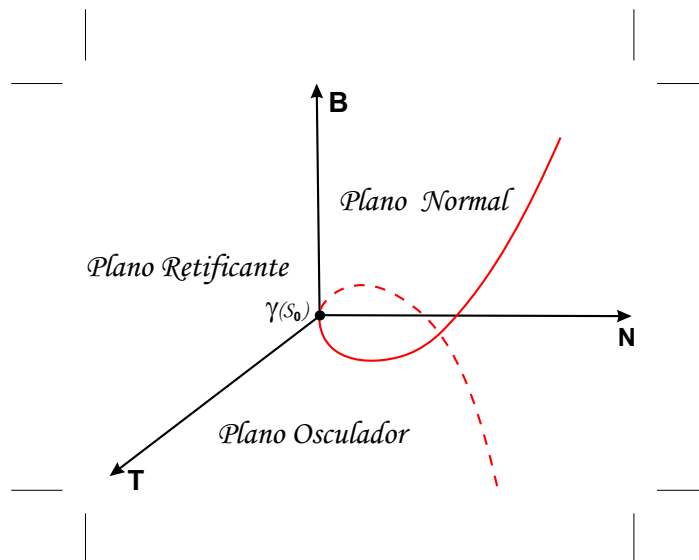


Figura 2.7: Planos definidos pelo referencial móvel

Proposição 2.10 *Vajamos que \mathbf{B}' é perpendicular a \mathbf{T} .*

Demonstração 2.12 *Temos que*

$$\begin{aligned}\mathbf{B}' &= (\mathbf{T} \times \mathbf{N})' = \mathbf{T}' \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' &= \kappa \mathbf{N} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{T} \times \mathbf{N}'\end{aligned}$$

logo, \mathbf{B}' é perpendicular a \mathbf{T} .

Exemplo 2.12 *Calcular o referencial móvel para a hélice circular parametrizada por, $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, com $a > 0$ e $b \neq 0$.*

Sabemos que,

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(t) &= (a^2 + b^2)^{-1/2}(-a \sin t, a \cos t, b) \\ \mathbf{N}(t) &= -(\cos t, \sin t)\end{aligned}$$

e assim,

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a(a^2 + b^2)^{-1/2}(\sin t) & a(a^2 + b^2)^{-1/2}(\cos t) & b(a^2 + b^2)^{-1/2} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B}(t) = (b(a^2 + b^2)^{-1/2} \sin t) \mathbf{i} + (b(a^2 + b^2)^{-1/2} \cos t) \mathbf{j} + (a(a^2 + b^2)^{-1/2}) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B}(t) = (a^2 + b^2)^{-1/2}(b \sin t, b \cos t, a).$$

Capítulo 3

Teoria Local

3.1 Equações de Frenet

Teorema 3.1 *Dada uma curva $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\kappa > 0$, $\forall s \in I$, o referencial móvel satisfaz as seguintes equações*

$$\mathbf{T}'(s) = \kappa \mathbf{N}(s) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{N}'(s) = -\kappa \mathbf{T}(s) + \tau \mathbf{B}(s) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{B}'(s) = -\tau \mathbf{N}(s) \quad (3.3)$$

chamadas de **Equações de Frenet**.

Demonstração 3.1 *As equações 3.1 e 3.3 foram obtidas respectivamente nas equações 2.1 e 2.6.*

Como

$$\mathbf{N}(s) = \mathbf{B}(s) \times \mathbf{T}(s)$$

derivando temos

$$\mathbf{N}'(s) = \mathbf{B}'(s) \times \mathbf{T}(s) + \mathbf{B}(s) \times \mathbf{T}'(s)$$

substituindo $\mathbf{T}'(s)$ e $\mathbf{B}'(s)$ pelas equações 3.1 e 3.3 obtemos

$$\mathbf{N}'(s) = -\kappa \mathbf{T}(s) + \tau \mathbf{B}(s).$$

Observe que se escrevermos as equações de Frenet como

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(s)' &= 0\mathbf{T}(s) + \kappa\mathbf{N}(s) + 0\mathbf{B}(s) \\ \mathbf{N}(s)' &= -\kappa\mathbf{T}(s) + 0\mathbf{N}(s) + \tau\mathbf{B}(s) \\ \mathbf{B}(s)' &= 0\mathbf{T}(s) - \tau\mathbf{N}(s) + 0\mathbf{B}(s)\end{aligned}\tag{3.4}$$

os coeficientes do referencial $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$, formam a matriz antissimétrica

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$$

e assim, podemos escrever o sistema 3.4 como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}(s)' \\ \mathbf{N}(s)' \\ \mathbf{B}(s)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{pmatrix}.$$

Como aplicação das equações de Frenet, veremos que as curvas planas são caracterizadas por terem torção nula.

Proposição 3.1 *Dada a curva $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\kappa > 0$, $s \in I$. Se γ é plana, então $\gamma(I)$ está contida no plano osculador de γ .*

Demonstração 3.2 *Se γ é plana, existe um plano de \mathbb{R}^3 que contém $\gamma(I)$. Seja w um vetor não nulo ortogonal a esse plano, veremos que w é paralelo a $\mathbf{B}(s)$, $\forall s \in I$. Assim*

$$\langle \gamma(s) - \gamma(s_0), w \rangle = 0$$

é o plano com normal w . Derivando duas vezes obtemos

$$\langle \gamma'(s), w \rangle = 0$$

$$\langle \gamma''(s), w \rangle = 0$$

portanto

$$\langle \mathbf{T}(s), w \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{T}'(s), w \rangle = \kappa \langle \mathbf{N}(s), w \rangle = 0.$$

Como $\kappa > 0$, concluímos que w é ortogonal a $\mathbf{T}(s)$ e a $\mathbf{N}(s)$.

Logo w é paralelo a $\mathbf{B}(s)$, $\forall s \in I$, isto é, o plano osculador da curva γ contém $\gamma(I)$.

Como consequência desta proposição temos:

Proposição 3.2 Uma curva $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é plana se, e somente se, $\tau = 0$.

Demonstração 3.3 Se γ é plana, então pela proposição anterior $\mathbf{B}(s)$ é constante, portanto $\mathbf{B}'(s) = 0$, $\forall s \in I$. Logo, concluímos que $\tau = -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle = 0$, $\forall s \in I$.

Inversamente, se $\tau = 0$, $\forall s \in I$, então

$$\mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N} = 0$$

portanto $\mathbf{B} = \mathbf{b}_0 = \text{constante}$. Consideramos a função

$$f(s) = \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), \mathbf{b}_0 \rangle$$

e mostraremos que $f(s) = 0$. Derivando obtemos

$$f'(s) = \langle \gamma'(s), \mathbf{b}_0 \rangle = \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{b}_0 \rangle = 0$$

portanto, $f(s)$ é constante. Como $f(s_0) = 0$, concluímos que $f(s) = 0$ para todo s , isto é, $\gamma(I)$ está contida no plano que contém $\gamma(s_0)$ e é ortogonal ao vetor $\mathbf{B}(s)$.

Logo, γ é plana se, e somente se, $\tau = 0$.

Vamos caracterizar uma curva regular com curvatura constante e torção nula.

Proposição 3.3 O traço de $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um arco circular de raio r se, e somente se, $\tau = 0$ e $|\kappa| = \frac{1}{r}$.

Demonstração 3.4 Suponha que $\gamma(I)$ é um arco circular de raio r centrado em P_0 , então

$$|\gamma(s) - P_0|^2 = r^2. \quad (3.5)$$

Pela proposição anterior, para todo $s \in I$, onde $\tau = 0$ temos

$$\langle \gamma(s) - P_0, \mathbf{b}_0 \rangle = 0$$

onde $\mathbf{B}(s) = \mathbf{b}_0 = \text{constante}$. Derivando a equação 3.5, obtemos

$$\langle \gamma'(s), \gamma(s) - P_0 \rangle = \langle \mathbf{T}(s), \gamma(s) - P_0 \rangle = 0$$

isso implica que

$$\gamma(s) - P_0 = \mathbf{r}\mathbf{N}(s).$$

Derivando obtemos

$$\gamma'(s) = \mathbf{r}\mathbf{N}'(s)$$

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}\mathbf{N}'(s)$$

$$\mathbf{T}(s) = -\mathbf{r}\kappa\mathbf{T}(s)$$

$$\kappa = -\frac{1}{\mathbf{r}}$$

$$|\kappa| = \frac{1}{\mathbf{r}}$$

Inversamente, suponha $|\kappa| = \frac{1}{\mathbf{r}}$. Como γ está parametrizada pelo comprimento de arco e pelas equações de Frenet, temos

$$\gamma'(s) = \mathbf{T}(s) \quad \Rightarrow \quad \gamma''(s) = \mathbf{T}'(s) = \frac{\varepsilon}{\mathbf{r}}\mathbf{N}(s)$$

onde $\varepsilon = \pm 1$. Além disso,

$$\mathbf{N}'(s) = -\frac{\varepsilon}{\mathbf{r}}\mathbf{T}(s).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\gamma(s) + \varepsilon\mathbf{r}\mathbf{N}(s))' &= \gamma'(s) + \varepsilon\mathbf{r}\mathbf{N}'(s) \\ &= \gamma'(s) - \varepsilon^2\mathbf{r}\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbf{T}(s) = 0 \end{aligned}$$

que implica em

$$\gamma(s) + \varepsilon\mathbf{r}\mathbf{N}(s) = P_0$$

$$\gamma(s) - P_0 = \varepsilon\mathbf{r}\mathbf{N}(s).$$

Como $\varepsilon = \pm 1$ e $|\varepsilon\mathbf{N}(s)| = 1$, temos

$$|\gamma(s) - P_0|^2 = \mathbf{r}^2$$

Portanto, $\gamma(I)$ é um arco circular de raio \mathbf{r} .

Vamos caracterizar hélices.

Definição 3.1 Dada uma curva $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\kappa, \tau \neq 0$. Então $\gamma(I)$ é uma hélice, se existe um vetor unitário w que forma um ângulo constante com $\gamma'(t)$, $\forall t \in I$, ou seja, $\frac{\langle \gamma'(t), w \rangle}{|\gamma'(t)|}$ é constante.

Proposição 3.4 O traço de $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\kappa, \tau \neq 0$, é uma hélice se, e somente se, $\frac{\kappa}{\tau}$ é constante.

Demonstração 3.5 Se $\gamma(I)$ é uma hélice, por definição existe um vetor unitário w , tal que

$$\langle \gamma'(s), w \rangle = c_0 = \text{constante}.$$

Portanto

$$\langle \gamma''(s), w \rangle = 0 \Rightarrow \kappa \langle \mathbf{N}(s), w \rangle = 0.$$

Como $\kappa \neq 0$, temos que w pertence ao plano gerado por $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{N}(s)$, $\forall s \in I$.

Considere o vetor

$$w = \cos(\theta(s)) \mathbf{T}(s) + \sin(\theta(s)) \mathbf{B}(s)$$

derivando e usando as equações de Frenet, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= -\sin(\theta(s))\theta'(s) \mathbf{T}(s) + \cos(\theta(s)) \mathbf{T}'(s) \\ &\quad + \cos(\theta(s))\theta'(s) \mathbf{B}(s) + \sin(\theta(s)) \mathbf{B}'(s) \\ 0 &= -\sin(\theta(s))\theta'(s) \mathbf{T}(s) \\ &\quad + (\kappa \cos(\theta(s)) - \tau \sin(\theta(s))) \mathbf{N}(s) \\ &\quad + \cos(\theta(s))\theta'(s) \mathbf{B}(s). \end{aligned}$$

Portanto, $\forall s \in I$ teremos

$$\begin{aligned} \sin(\theta(s))\theta'(s) &= 0 \\ \cos(\theta(s))\theta'(s) &= 0 \\ \kappa \cos(\theta(s)) - \tau \sin(\theta(s)) &= 0 \end{aligned}$$

As duas primeiras equações determinam $\theta'(s) = 0$, $\forall s \in I$. Portanto $\theta(s)$ é constante. Além disso, a constante $\cos(\theta(s))$ é não nula, caso contrário teríamos $\tau = 0$, o que

contradiz a hipótese. Da terceira equação temos

$$\begin{aligned}\kappa \cos(\theta(s)) - \tau \sin(\theta(s)) &= 0 \\ \frac{\kappa}{\tau} &= \operatorname{tg}(\theta(s))\end{aligned}$$

como $\theta(s)$ é constante, então $\operatorname{tg}(\theta(s))$ é constante.

Logo $\frac{\kappa}{\tau}$ é constante, como queríamos.

Inversamente, se $\frac{\kappa}{\tau}$ é constante, fixemos θ tal que

$$\operatorname{tg}(\theta) = -\frac{\kappa}{\tau}$$

então

$$w = \cos(\theta) \mathbf{T}(s) + \sin(\theta) \mathbf{B}(s)$$

é um vetor unitário constante e $\forall s \in I$, teremos $\langle \mathbf{T}(s), w \rangle = \cos(\theta)$ é constante.

Logo se $\frac{\kappa}{\tau}$ é constante, então, γ é uma hélice.

Exemplo 3.1 Para a hélice circular temos

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\frac{a}{a^2+b^2}}{\frac{b}{a^2+b^2}} = \frac{a}{b}.$$

Para a hélice logarítmica temos

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3e^t}}{\frac{1}{3e^t}} = \sqrt{2}.$$

A curva parametrizada por $\gamma(t) = (3t - t^3)e_1 + 3t^2e_2 + (3t + t^3)e_3$, vista no exemplo 2.11, é uma hélice, pois encontramos

$$\kappa = \tau = \frac{2}{3(1+t^2)^2}$$

e assim $\frac{\kappa}{\tau} = 1$.

3.2 Teorema Fundamental das Curvas

Dadas funções suaves $\kappa = \kappa(s)$ e $\tau = \tau(s)$, podemos determinar uma curva tal que κ é a curvatura e τ é a torção desta curva e as equações de Frenet são satisfeitas, e mais, a curva é única. O teorema abaixo nos fornece este resultado.

Teorema 3.2 (Teorema Fundamental da Existência e Unicidade das Curvas)

Sejam $\kappa(s) = \kappa$ e $\tau(s) = \tau$ funções diferenciáveis contínuas. Então existe uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja curvatura é κ e a torção é τ . Se existir outra curva parametrizada pelo comprimento de arco $\tilde{\gamma}(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ com a mesma curvatura e mesma torção, então existe um movimento rígido $\mathcal{M} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\tilde{\gamma}(s) = \mathcal{M} \circ \gamma$.

Um movimento rígido de \mathbb{R}^3 é uma função $\mathcal{M} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ da forma $\mathcal{M} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$, onde \mathcal{R} é uma rotação em torno da origem e \mathcal{T} é uma translação, no sentido do teorema, não importa a ordem.

Demonstração 3.6 *Dividiremos a demonstração deste teorema em duas etapas: existência e unicidade.*

1) **Existência:**

Para provar a existência basta mostrar que existe um triedro ortonormal $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ que satisfaz as equações de Frenet, em seguida definir $\gamma(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{T}(s) ds$ e ver que κ é a curvatura e τ é a torção de γ .

Considere as equações de Frenet

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'_i(s) &= \kappa(s) \mathbf{N}_i(s) \\ \mathbf{N}'_i(s) &= -\kappa(s) \mathbf{T}_i(s) + \tau(s) \mathbf{B}_i(s) \quad 1 \leq i \leq 3 \\ \mathbf{B}'_i(s) &= -\tau(s) \mathbf{N}_i(s) \end{aligned} \tag{3.6}$$

como um sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^9 \times I$.

Segue-se do teorema de existência e unicidade de soluções de sistemas de equações diferenciais lineares que fixado em \mathbb{R}^3 um triedro ortonormal $\{\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0\}$ com orientação positiva e um valor $s_0 \in I$, existe uma família de triedros $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$, $s \in I$, com $\mathbf{T}(s_0) = \mathbf{T}_0$, $\mathbf{N}(s_0) = \mathbf{N}_0$, $\mathbf{B}(s_0) = \mathbf{B}_0$.

Mostraremos que esta família mantém-se ortonormal para todo $s \in I$. Observe que as equações 3.6 são essencialmente as equações de Frenet, decorre que

$$\frac{d}{ds}(\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle) = 0$$

e portanto

$$\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle = \text{constante} = \langle \mathbf{T}(s_0), \mathbf{N}(s_0) \rangle = 0.$$

Analogamente, verificamos que

$$\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{B}(s) \rangle = \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{N}(s) \rangle = 0$$

e

$$|\mathbf{T}(s)| = |\mathbf{N}(s)| = |\mathbf{B}(s)| = 1$$

isto é, o triedro $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ é de fato ortonormal para todo $s \in I$.

Definimos a curva $\gamma(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{T}(s) ds$. Como $\mathbf{T}(s)$ é unitário, teremos que γ está parametrizada pelo comprimento de arco s . É claro que $\gamma'(s) = \mathbf{T}(s)$ e $\gamma''(s) = \kappa \mathbf{N}(s)$ e portanto κ é a curvatura de γ em s . Além disso das proposições 2.7 e 2.8

$$\gamma''' = -\kappa^2 \mathbf{T} + \kappa' \mathbf{N} + \tau \kappa \mathbf{B}$$

portanto a torção de γ será dada por

$$\frac{\langle \gamma' \times \gamma'', \gamma''' \rangle}{\kappa^2} = -\frac{\langle \mathbf{T} \times \kappa \mathbf{N}, (-\kappa^2 \mathbf{T} + \kappa' \mathbf{N} + \tau \kappa \mathbf{B}) \rangle}{\kappa^2} = \tau$$

Logo γ é a curva procurada.

2) Unicidade:

Resta mostrar que γ é única a menos de translações e rotações do \mathbb{R}^3 .

Seja $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ outra curva com $\tilde{\kappa}(s) = \kappa(s)$ e $\tilde{\tau}(s) = \tau(s)$, $s \in I$, e seja $\{\tilde{\mathbf{T}}_0, \tilde{\mathbf{N}}_0, \tilde{\mathbf{B}}_0\}$ o triedro de Frenet de $\tilde{\gamma}$ em s_0 . É claro que por uma translação \mathcal{T} e uma rotação \mathcal{R} é possível levar o triedro $\{\tilde{\mathbf{T}}_0, \tilde{\mathbf{N}}_0, \tilde{\mathbf{B}}_0\}$ a coincidir com o triedro $\{\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0\}$ (ambos com orientação positiva). Aplicando o teorema de existência e unicidade de soluções de sistemas de equações diferenciais lineares, obtida a solução $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$, prova-se com um raciocínio análogo ao da parte (1), que trata-se de um triedro ortonormal de \mathbb{R}^3 . Como γ deve satisfazer $\gamma'(s) = \mathbf{T}(s)$, segue-se que $\gamma(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{T}(s) ds + P_0$, donde γ está parametrizada pelo comprimento de arco s .

Capítulo 4

Curvas de Bézier

4.1 História das Curvas de Bézier

As *Curvas de Bézier* surgiram por volta de 1960. Foram desenvolvidas independentemente por dois matemáticos franceses que trabalhavam na indústria automobilística francesa. *Piere Bézier* (1910 – 1999), trabalhava para a Renault e *Paul de Faget de Casteljau* trabalhava para a Citroën. Embora Casteljau tenha concluído o trabalho sobre as curvas antes que Bézier, devido as companhias Renault e Citroën serem muito secretas quanto a seus trabalhos, Casteljau não o publicou. Bézier conseguiu uma autorização da Renault e publicou seu trabalho, por isso o campo retém o nome de *Curvas de Bézier*. Entretanto o algoritmo fundamental que dá a base para as construções e o cálculo das Curvas de Bézier é creditado a Casteljau.

Bézier e Casteljau desenvolveram as curvas com o intuito de modelar as formas aerodinâmicas dos automóveis modernos. Entretanto, hoje, elas tem inúmeras aplicações, principalmente em CAD (Computer-Aided Design). A maioria dos Softwares de computação gráfica usam o conceito de Curvas de Bézier.

Essas curvas são extremamente úteis para modelar projetos e se adaptam facilmente a sistemas computadorizados. Podem ser definidas como um conjunto de pontos encontrados através do Algoritmo de Casteljau ou explicitamente em função dos polinômios de Bernstein. Trata-se de curvas paramétricas geralmente definidas no intervalo paramétrico $[0, 1]$. Além disso, essa classe de curvas possui outros parâmetros

controladores que são pontos no espaço. Cada um desses pontos tem uma influência sobre a curva, sendo que uma curva de Bézier de grau "n" emprega "n + 1" pontos de controle. Uma curva de Bézier emprega no mínimo 3 pontos para sua definição, podendo chegar a "n" pontos de controle. Entretanto, sua forma mais utilizada é a de terceiro grau, ou seja, a **Cúbica de Bézier**, que é definida por quatro pontos de controle, tais pontos são: 2 "endpoints" (pontos iniciais) e 2 "control points" (pontos de controle), sendo que a curva necessariamente passa pelos pontos iniciais e não passa pelos pontos de controle, mas estes definem sua forma.

Se todos os pontos estão no plano, teremos uma curva de Bézier plana, ou seja $\kappa \geq 0$ e $\tau = 0$; se pelo menos um ponto estiver fora do subespaço vetorial gerado pelos outros "n - 1" pontos, então a curva é espacial, ou seja, $\kappa \neq 0$ e $\tau \neq 0$.

4.2 O Algoritmo de Casteljau

O algoritmo de Casteljau nos permite calcular pontos de uma curva de Bézier. Trata-se de um algoritmo recursivo e extremamente simples, mas fundamental para descrever curvas para design de superfícies.

Definição 4.1 O Algoritmo de Casteljau

Sejam $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n \in \mathbb{R}^3$ e $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$\mathbf{P}_i^r(t) = (1 - t)\mathbf{P}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{P}_{i+1}^{r-1}(t), \quad \begin{cases} r = 1, 2, \dots, n \\ i = 0, 1, \dots, n - r \end{cases}$$

onde $\mathbf{P}_i^0(t) = \mathbf{P}_i$. Então $\mathbf{P}_0^n(t)$ é um ponto para um determinado valor do parâmetro t , sobre a curva de Bézier $\mathbf{B}^n(t)$.

Definição 4.2 Denominamos de **curva de Bézier de grau "n"** ao conjunto de pontos $\mathbf{P}_0^n(t)$, $t \in [0, 1]$, obtidos através do algoritmo de Casteljau, ou seja $\mathbf{B}^n(t) = \{\mathbf{P}_0^n(t); t \in [0, 1]\}$.

O polígono formado pelos pontos $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ é chamado de **polígono de Bézier** ou **polígono de controle** da curva $\mathbf{B}^n(t)$. Similarmente os \mathbf{P}_i são chamados

de *pontos de Bézier* ou *pontos de controle*. A figura 4.1 mostra uma cúbica de Bézier, caso $n = 3$ e $t = 1/4$. A curva foi obtida pelo processo de interpolação entre os pontos $\mathbf{P}_0^3(t)$.

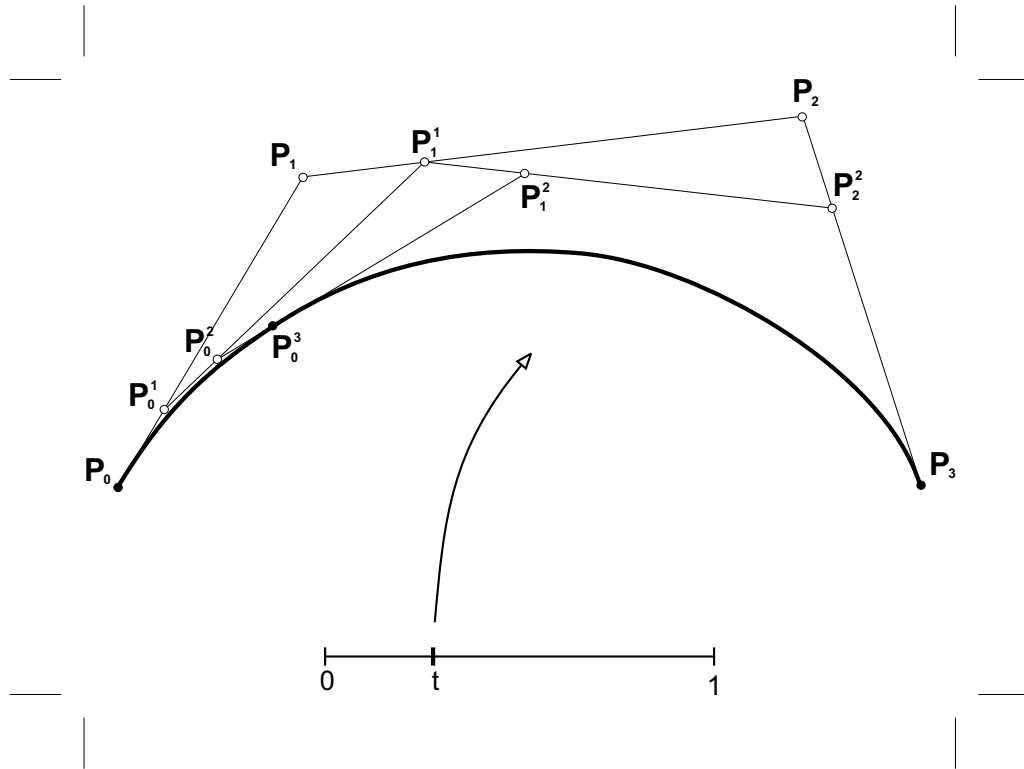


Figura 4.1: O ponto $\mathbf{P}_0^3(t)$ sobre a curva foi obtido pelo *Algoritmo de Casteljau*.

Podemos encontrar a representação de uma curva de Bézier de grau 2 através do algoritmo de Casteljau, observando que

$$\mathbf{P}_0^2(t) = (1 - t)\mathbf{P}_0^1(t) + t\mathbf{P}_1^1(t) \quad (4.1)$$

onde

$$\mathbf{P}_0^1(t) = (1 - t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 \quad (4.2)$$

e

$$\mathbf{P}_1^1(t) = (1 - t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2 \quad (4.3)$$

substituindo as equações 4.2 e 4.3 em 4.1, temos

$$\mathbf{P}_0^2(t) = \mathbf{B}^2(t) = (1 - t)\mathbf{P}_0^1(t) + t\mathbf{P}_1^1(t)$$

$$\mathbf{B}^2(t) = (1-t)[(1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1] + t[(1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2]$$

$$\mathbf{B}^2(t) = (1-t)^2\mathbf{P}_0 + t(1-t)\mathbf{P}_1 + t(1-t)\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2$$

$$\mathbf{B}^2(t) = (1-t)^2\mathbf{P}_0 + 2t(1-t)\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2.$$

Veja a curva obtida na figura 4.2.

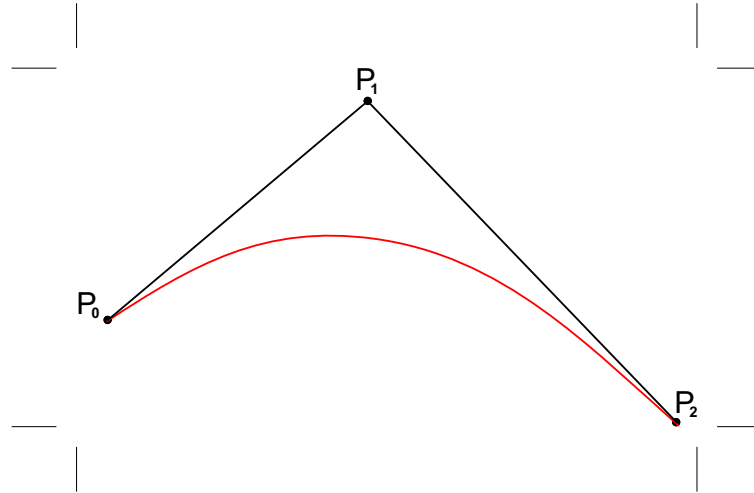


Figura 4.2: Quadrática de Bézier, caso $n = 2$.

Para a curva de grau 3 ou cúbica de Bézier temos,

$$\mathbf{P}_0^3(t) = (1-t)\mathbf{P}_0^2(t) + t\mathbf{P}_1^2(t) \quad (4.4)$$

onde

$$\mathbf{P}_0^2(t) = (1-t)^2\mathbf{P}_0 + 2t(1-t)\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2 \quad (4.5)$$

e

$$\mathbf{P}_1^2(t) = (1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2 \quad (4.6)$$

e

$$\mathbf{P}_2^1(t) = (1-t)\mathbf{P}_2 + t\mathbf{P}_3 \quad (4.7)$$

substituindo as equações 4.3, 4.5, 4.6 e 4.7 em 4.4, temos

$$\mathbf{P}_0^3(t) = \mathbf{B}^3(t) = (1-t)\mathbf{P}_0^2(t) + t\mathbf{P}_1^2(t)$$

$$\mathbf{B}^3(t) = (1-t)[(1-t)^2\mathbf{P}_0 + 2t(1-t)\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2] + t[(1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2]$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^3(t) &= (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 2t(1-t)^2\mathbf{P}_1 + t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t(1-t)\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2 \\
\mathbf{B}^3(t) &= (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 2t(1-t)^2\mathbf{P}_1 + t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t(1-t)[(1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2] \\
&\quad + t^2[(1-t)\mathbf{P}_2 + t\mathbf{P}_3] \\
\mathbf{B}^3(t) &= (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3.
\end{aligned}$$

A figura 4.1 mostra uma cúbica de Bézier.

Para os demais casos o procedimento é o mesmo.

4.3 A Forma dos polinômios Bernstein para uma Curva de Bézier

Definimos as curvas de Bézier de grau "n", como um conjunto de pontos da forma $\mathbf{P}_0^n(t)$ encontrados através do algoritmo de Casteljau. Nesta seção descreveremos as curvas de Bézier por meio de uma representação explícita, utilizando os polinômios de Bernstein.

Uma curva de Bézier de grau "n" é dada por

$$\mathbf{B}^n(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)\mathbf{P}_i$$

onde os $B_i^n(t)$ representam os polinômios de Bernstein [6].

4.3.1 Os Polinômios de Bernstein

Vejam a definição dos polinômios de Bernstein.

Definição 4.3 Os polinômios de Bernstein de grau "n" são dados por

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}.$$

Os coeficientes binomiais são

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & \text{se } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{se } 0 > i > n \end{cases}.$$

Pela definição dos polinômios de Bernstein, podemos representar uma cúbica de Bézier, como

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^3(t) &= \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) \mathbf{P}_i \\ \mathbf{B}^3(t) &= (1-t)^3 \mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t) \mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{P}_3\end{aligned}$$

Vista a a forma dos polinômios de Bernstein para uma curva de Bézier, percebemos que para um valor de "n" muito grande, implica em calcular polinômios de grau mais elevado o que requer um custo computacional mais alto, por isso, entre as curvas de Bézier, as cúbicas são as mais utilizadas.

4.3.2 Propriedades dos Polinômios de Bernstein

1. Os polinômios de Bernstein satisfazem a seguinte recursão

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

onde

$$B_0^0(t) = 1 \quad e \quad B_j^n(t) = 0, \quad \text{para } j \notin \{0, 1, \dots, n\}.$$

Prova: Da relação de Stiffel, temos

$$\begin{aligned}B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ B_i^n(t) &= \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} \\ B_i^n(t) &= (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t).\end{aligned}$$

2. Os polinômios de Bernstein formam uma partição unitária, ou seja

$$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) = 1.$$

Prova: Para fazer esta prova usamos o teorema binomial

$$1 = [t + (1-t)]^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} = \sum_{j=0}^n B_j^n(t).$$

3. Os polinômios de Bernstein são todos positivos no o intervalo $[0,1]$.

Prova: Da definição,

$$B_j^n(t) = \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}$$

como, $0 \leq t \leq 1$ e $n, j \in \mathbb{N}$, temos que $t^j(1-t)^{n-j} \geq 0$.

Graficamante, temos

- os polinômios de grau 1 são,

$$B_0^1(t) = 1 - t, \quad B_1^1(t) = t$$

para $t \in [0, 1]$, são traçados como mostra a figura 4.3

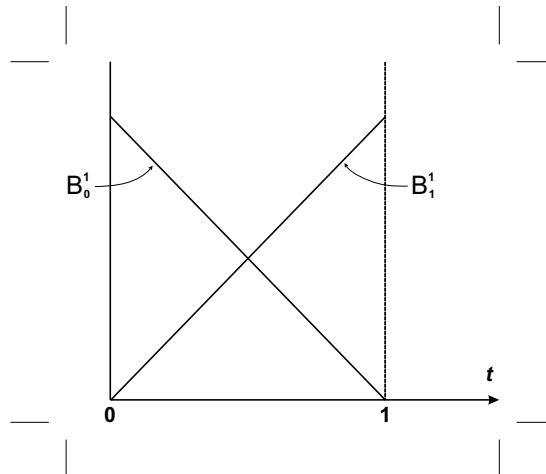


Figura 4.3: Polinômios de Bernstein de grau 1.

- os polinômios de grau 2 são,

$$B_0^2(t) = (1-t)^2, \quad B_1^2(t) = 2t(1-t), \quad B_2^2(t) = t^2$$

para $t \in [0, 1]$, são traçados como mostra a figura 4.4

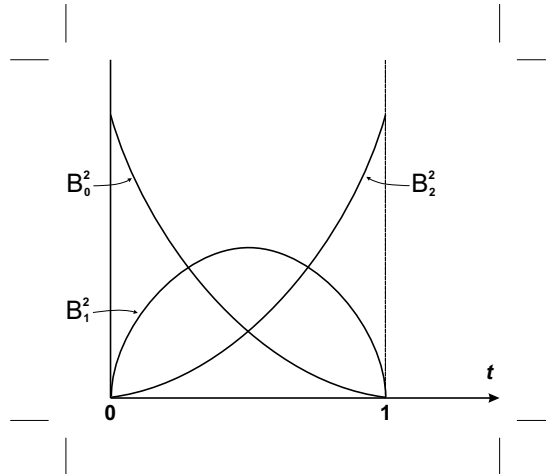


Figura 4.4: Polinômios de Bernstein de grau 2.

- os polinômios de grau 3 são,

$$B_0^3(t) = (1-t)^3, \quad B_1^3(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_2^3(t) = 3t^2(1-t), \quad B_3^3(t) = t^3$$

para $t \in [0, 1]$, são traçados como mostra a figura 4.5

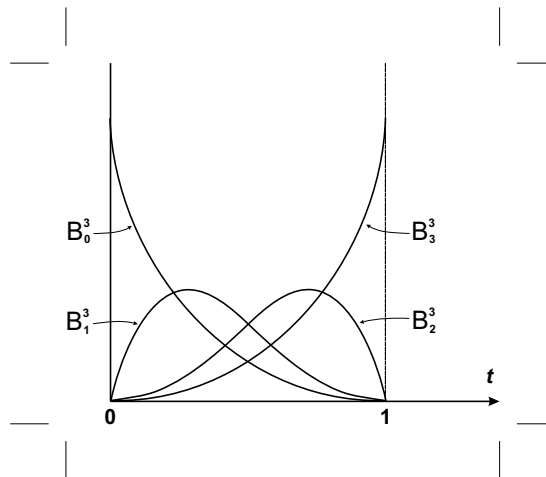


Figura 4.5: Polinômios de Bernstein de grau 3.

e assim sucessivamente. Percebemos claramente que para $t \in [0, 1]$, os polinômios de Bernstein são todos positivos.

3. Os polinômios de Bernstein são simétricos em relação a (t) e $(1 - t)$, isso pode ser visto graficamente na propriedade acima.

Segue que

$$\begin{aligned} B_j^n(t) &= \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \\ B_j^n(t) &= \binom{n}{n-j} (1-t)^{n-j} t^j \\ B_j^n(t) &= B_{n-j}^n(1-t). \end{aligned}$$

4. Os polinômios de Bernstein são de classe C^∞ , ou seja, suas derivadas são contínuas de todas as ordens. Isso é automático para polinômios.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_i^n(t) &= \frac{d}{dt} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ \frac{d}{dt} B_i^n(t) &= \frac{in!}{i!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{(n-i)!n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \\ \frac{d}{dt} B_i^n(t) &= \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{n(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \\ \frac{d}{dt} B_i^n(t) &= n \left[B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t) \right]. \end{aligned}$$

4.4 A Forma Matricial para uma Curva de Bézier

A representação matricial para uma curva de Bézier é útil para encontrar pontos sobre a curva. Visto que a cúbica de Bézier é a mais utilizada, desenvolveremos sua forma matricial, que é idêntica para outros casos.

Uma curva cúbica de Bézier pode ser escrita em um formulário matricial, expandindo a definição analítica da curva em seus coeficientes, os polinômios de Bernstein, e então escrevendo estes coeficientes em uma matriz, usando a base canônica dos polinômios.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^3(t) &= \sum_{i=0}^3 \mathbf{P}_i B_i^3(t) \\ \mathbf{B}^3(t) &= (1-t)^3 \mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t) \mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{P}_3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}^3(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^3(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix}$$

E assim uma curva cúbica de Bézier pode ser escrita de forma matricial como

$$\mathbf{B}^3(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix}$$

onde,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

A Matriz \mathbf{M} é chamada de Matriz de Bézier, e define os polinômios cúbicos de Bernstein. Esta é uma representação extremamente valiosa se pudermos multiplicar matrizes rapidamente, para encontrar pontos na curva.

Dado o polígono de controle formado pelos pontos, $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$, $\mathbf{P}_1(x_1, y_1)$, $\mathbf{P}_2(x_2, y_2)$ e $\mathbf{P}_3(x_3, y_3)$, sabemos que a curva é a cúbica de Bézier, que é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^3(t) &= (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3 \\ \mathbf{B}^3(t) &= (1-t)^3(x_0, y_0) + 3t(1-t)^2(x_1, y_1) + 3t^2(1-t)(x_2, y_2) + t^3(x_3, y_3) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sabemos também, que uma curva de Bézier de grau "n" é representada por um polinômio de grau "n". Assim, uma cúbica de Bézier em \mathbb{R}^2 pode ser representada da seguinte forma

$$\mathbf{B}^3(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

onde

$$\gamma_1(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3$$

e

$$\gamma_2(t) = d_0 + d_1t + d_2t^2 + d_3t^3$$

Expandindo a equação 4.8, obtemos

$$\gamma_1(t) = x_3t^3 + 3x_2t^2 - 3x_2t^3 + 3x_1t - 6x_1t^2 + 3x_1t^3 - 3x_0t + 3x_0t^2 - x_0t^3$$

$$\gamma_1(t) = x_0 + (-3x_0 + 3x_1)t + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2)t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)t^3$$

e

$$\gamma_2(t) = y_3t^3 + 3y_2t^2 - 3y_2t^3 + 3y_1t - 6y_1t^2 + 3y_1t^3 - 3y_0t + 3y_0t^2 - y_0t^3$$

$$\gamma_2(t) = y_0 + (-3y_0 + 3y_1)t + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2)t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)t^3$$

portanto,

$$x_0 + (-3x_0 + 3x_1)t + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2)t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)t^3 = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3$$

$$y_0 + (-3y_0 + 3y_1)t + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2)t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)t^3 = d_0 + d_1t + d_2t^2 + d_3t^3$$

pela igualdade de polinômios, temos

$$\begin{bmatrix} (c_0, d_0) \\ (c_1, d_1) \\ (c_2, d_2) \\ (c_3, d_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_0, y_0) \\ (-3x_0 + 3x_1, -3y_0 + 3y_1) \\ (3x_0 - 6x_1 + 3x_2, 3y_0 - 6y_1 + 3y_2) \\ (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3, -y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3) \end{bmatrix}.$$

Pela representação matricial, obteríamos

$$\begin{bmatrix} (c_0, d_0) \\ (c_1, d_1) \\ (c_2, d_2) \\ (c_3, d_3) \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_0, y_0) \\ (x_1, y_1) \\ (x_2, y_2) \\ (x_3, y_3) \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4.1 Dado o polígono de Bézier formado pelos pontos $P_0(0, 1)$, $P_1(1, 3)$, $P_2(2, 4)$ e $P_3(4, 2)$ representado na figura 4.6, encontramos a parametrização da curva de Bézier através da representação matricial, observando que

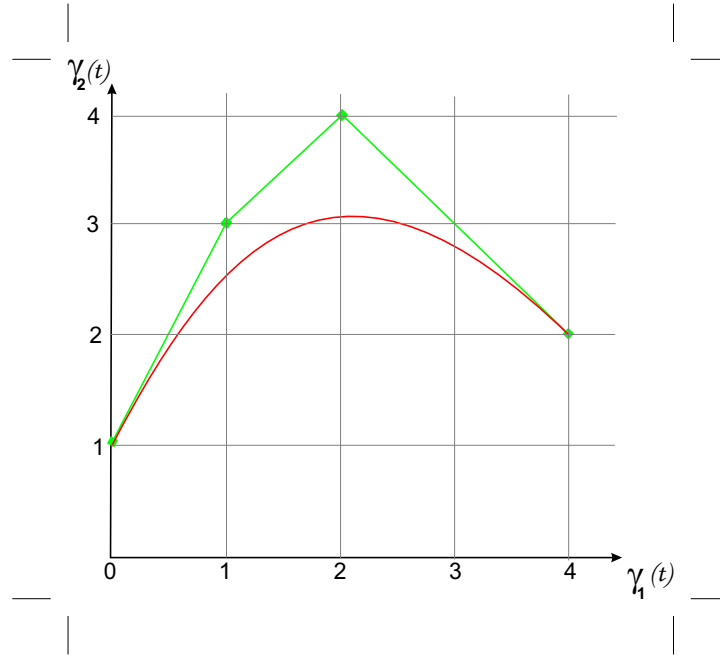


Figura 4.6: Cúbica de Bézier.

$$\begin{bmatrix} (c_0, d_0) \\ (c_1, d_1) \\ (c_2, d_2) \\ (c_3, d_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0, 1) \\ (1, 3) \\ (2, 4) \\ (4, 2) \end{bmatrix}$$

temos

$$\begin{bmatrix} (c_0, d_0) \\ (c_1, d_1) \\ (c_2, d_2) \\ (c_3, d_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0, 1) \\ (3, 6) \\ (0, -3) \\ (1, -2) \end{bmatrix}$$

do resultado acima, encontramos a seguinte parametrização

$$B^3(t) = (3t + t^3, 1 + 6t - 3t^2 - 2t^3).$$

Exemplo 4.2 Dado o polígono de Bézier formado pelos pontos $\mathbf{P}_0(0, 1)$, $\mathbf{P}_1(4, 2)$, $\mathbf{P}_2(2, 4)$ e $\mathbf{P}_3(1, 0)$ representado na figura 4.11, encontramos a parametrização da curva de Bézier através da representação matricial, observando que

$$\begin{bmatrix} (c_0, d_0) \\ (c_1, d_1) \\ (c_2, d_2) \\ (c_3, d_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0, 1) \\ (4, 2) \\ (2, 4) \\ (1, 0) \end{bmatrix}$$

temos

$$\begin{bmatrix} (c_0, d_0) \\ (c_1, d_1) \\ (c_2, d_2) \\ (c_3, d_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0, 1) \\ (12, 3) \\ (-18, 3) \\ (7, -7) \end{bmatrix}$$

do resultado acima, encontramos a seguinte parametrização

$$\mathbf{B}^3(t) = (12t - 18t^2 + 7t^3, 1 + 3t + 3t^2 - 7t^3).$$

4.5 Subdivisão

Uma curva de Bézier é usualmente definida no intervalo $[0,1]$, mas ela também pode ser definida em um intervalo qualquer $[0,c]$, $0 < c < 1$. A parte da curva correspondente a $[0,c]$ também define um polígono de Bézier, veja a figura 4.7.

Cada $c_i = \mathbf{P}_0^i(t)$ subdivide a curva em duas novas curvas, c_i é o ponto final da curva de Bézier \mathbf{B}^i no intervalo $[0,c]$ e é ponto inicial no intervalo $[c,1]$.

O processo da subdivisão é baseado na aplicação de algoritmo de Casteljau para sucessivos valores do parâmetro t , obtendo assim quantos pontos quisermos sobre a curva de Bézier. Por este processo graficamos a curva geometricamente.

Apresentamos aqui o procedimento básico da subdivisão para o caso $n = 2$, para os demais o processo é o mesmo.

Para uma curva quadrática de Bézier, teremos 3 pontos de controle, \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 . Neste procedimento utilizamos o valor do parâmetro t como sendo $t = 1/2$, isso facilita a descrição do processo pois basta localizar o ponto médio do segmento $\overline{\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}}$.

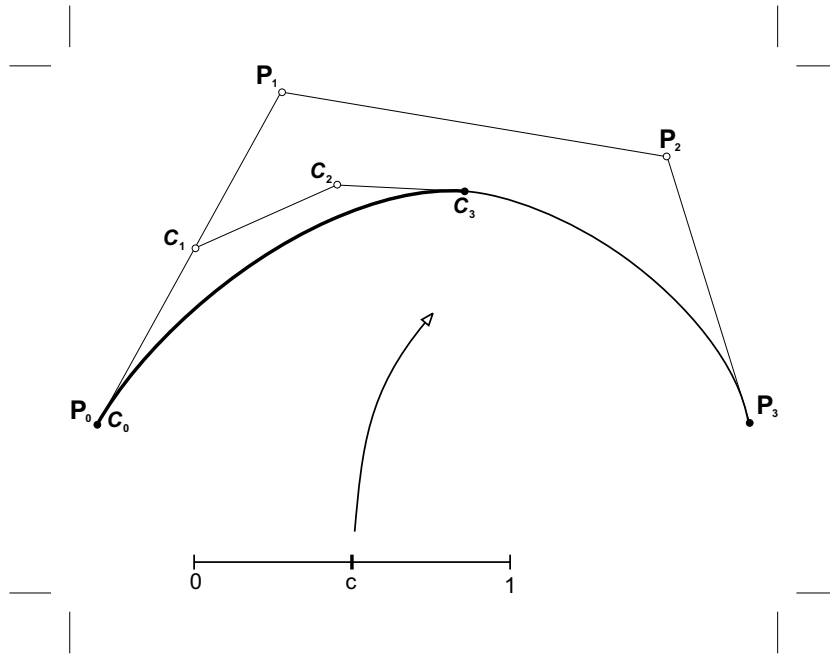
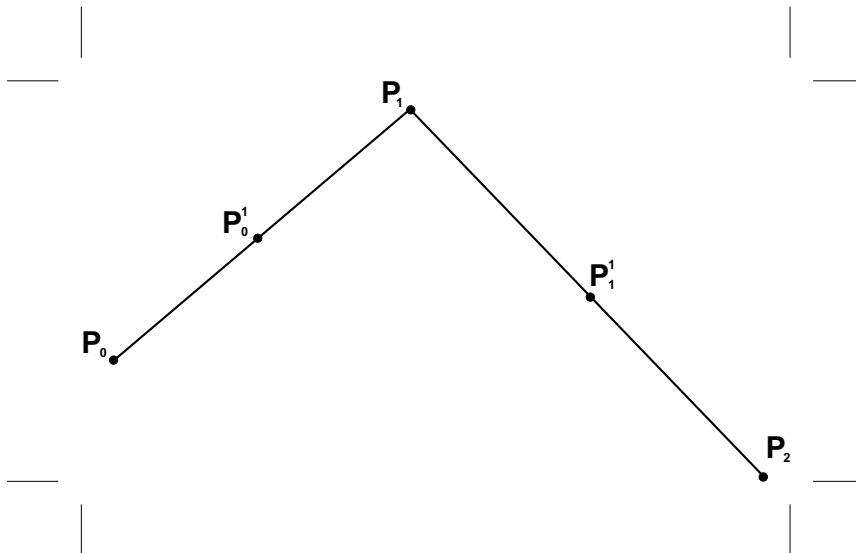
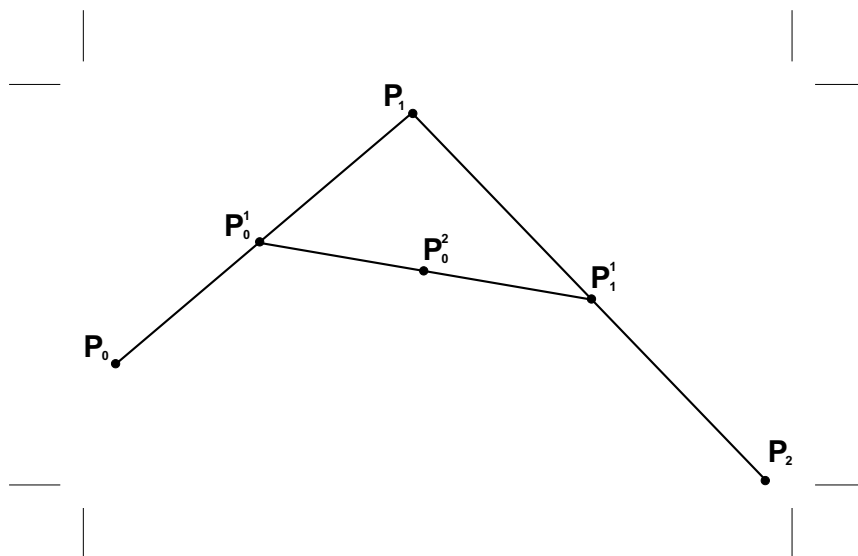


Figura 4.7: **Subdivisão**: Polígono formado pelos P_i é associado ao parâmetro $t \in [0, 1]$ e o polígono formado pelos c_i é associado com $t \in [0, c]$.

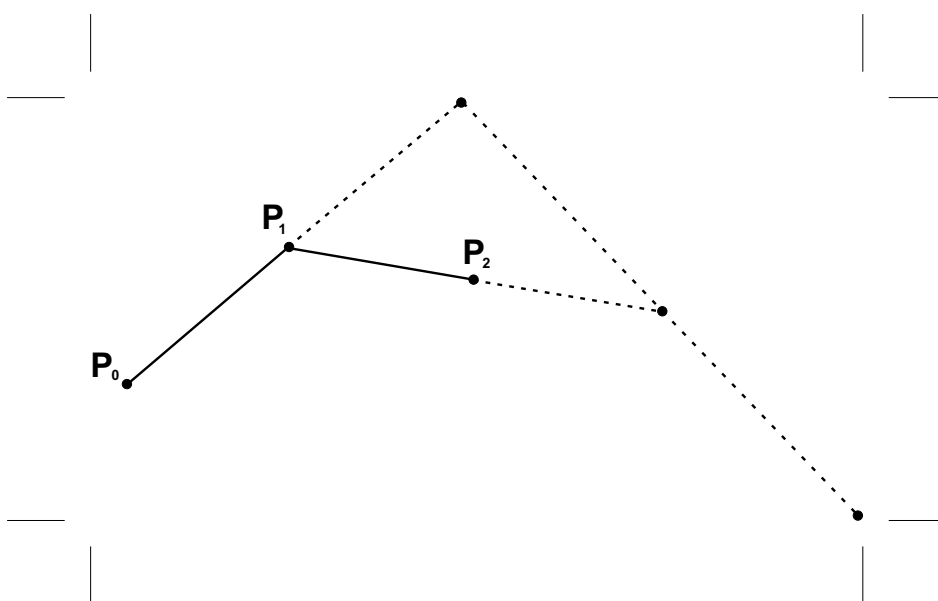
Para P_0 , P_1 e P_2 , 3 pontos quaisquer, tome P_0^1 como sendo o ponto médio do segmento $\overline{P_0P_1}$ e P_1^1 como sendo o ponto médio do segmento $\overline{P_1P_2}$.



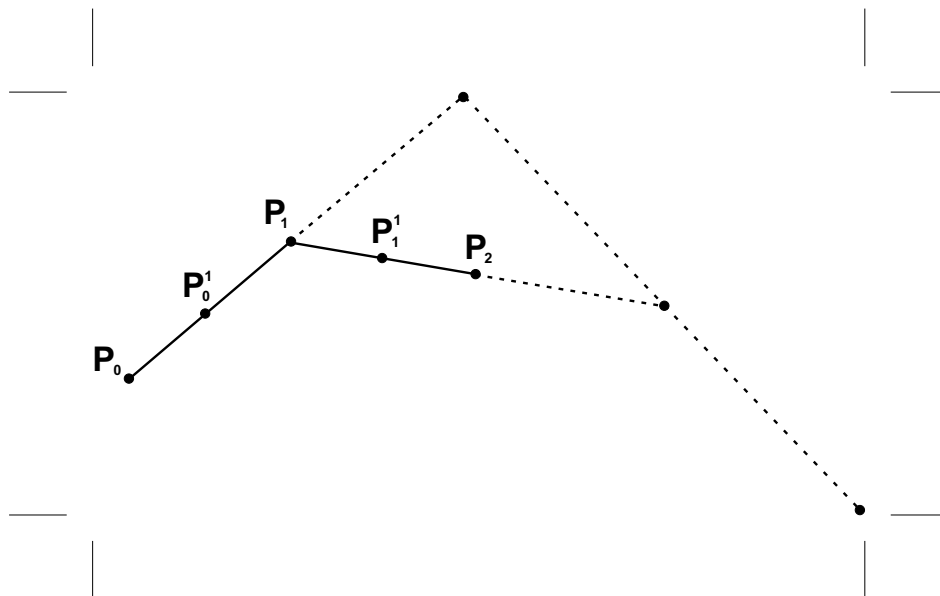
Seja finalmente \mathbf{P}_0^2 o ponto médio do segmento $\overline{\mathbf{P}_0^1\mathbf{P}_1^1}$.



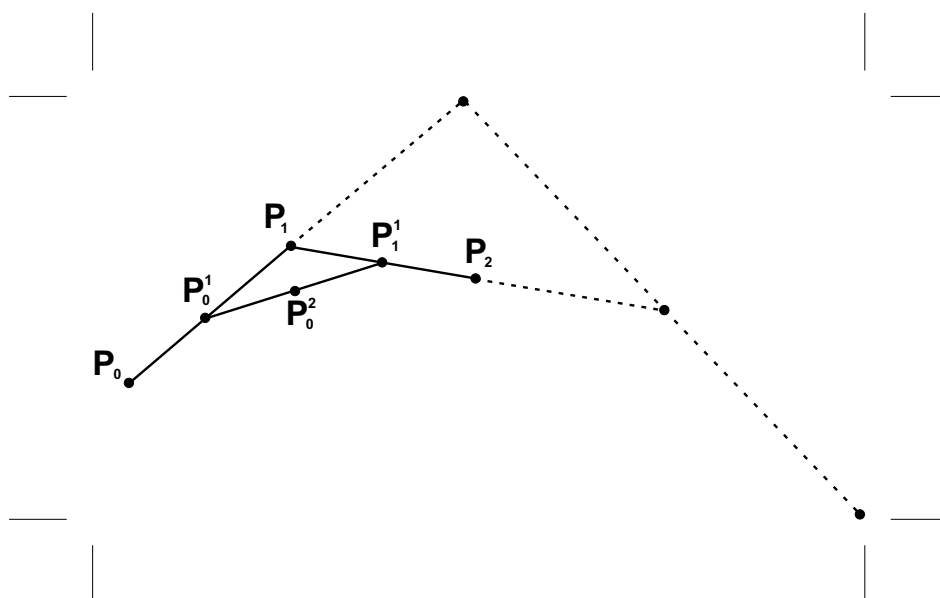
Definimos através do Algoritmo de Casteljau que $\mathbf{P}_0^2 = c_2$ é um ponto na curva de Bézier $\mathbf{B}^2(t)$. Com isso subdividimos a curva em duas novas curvas, com dois novos jogos de pontos de controle, $\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_0^1, \mathbf{P}_0^2\}$ e $\{\mathbf{P}_0^2, \mathbf{P}_1^1, \mathbf{P}_2\}$. Executamos o processo outra vez para ambas as curvas, primeiro para a curva definida pelos pontos $\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_0^1, \mathbf{P}_0^2\}$, para facilitar o entendimento, os renomeamos como $\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2\}$, respectivamente.



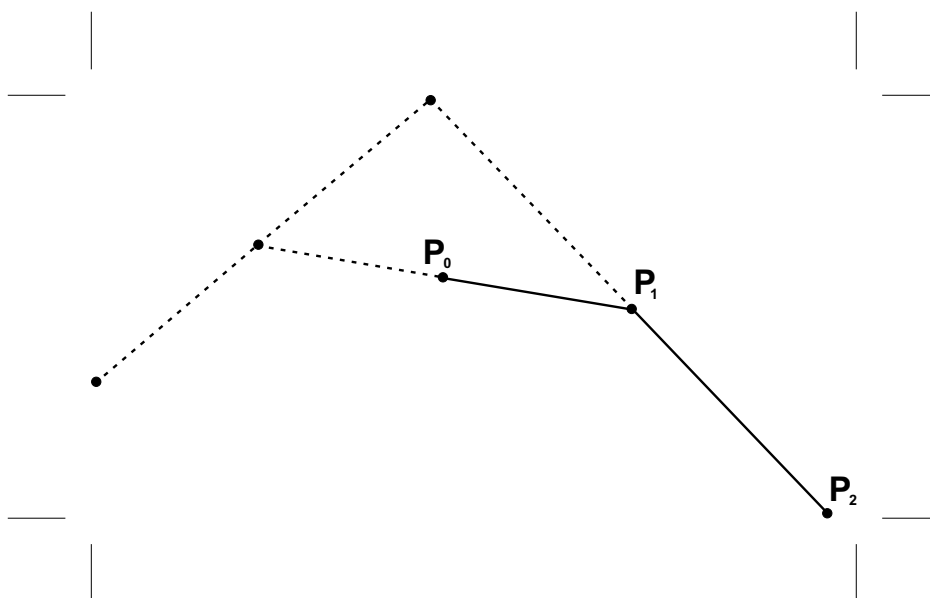
Seja P_0^1 o ponto médio do segmento $\overline{P_0P_1}$ e P_1^1 o ponto médio do segmento $\overline{P_1P_2}$.



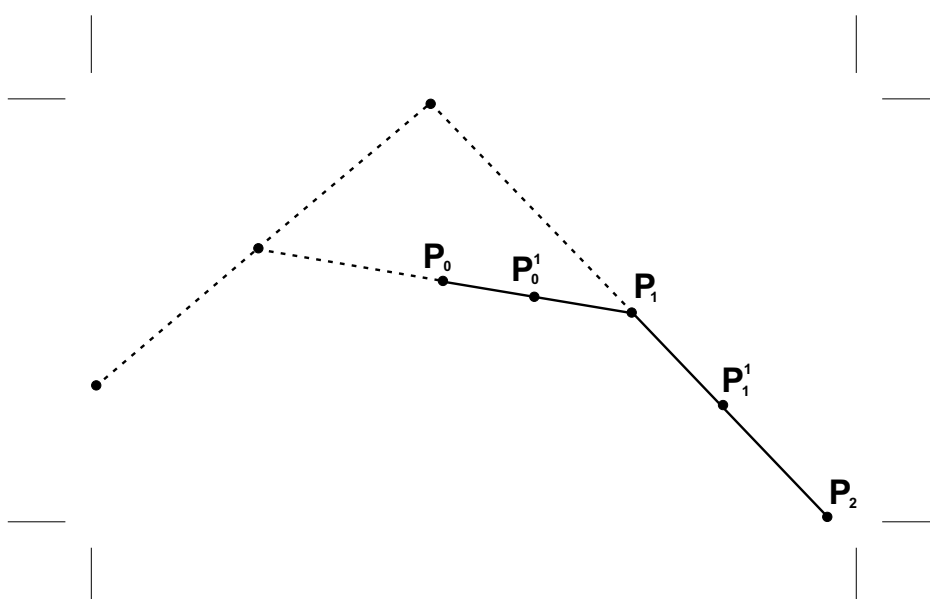
Seja finalmente P_0^2 o ponto médio do segmento $\overline{P_0^1P_1^1}$.



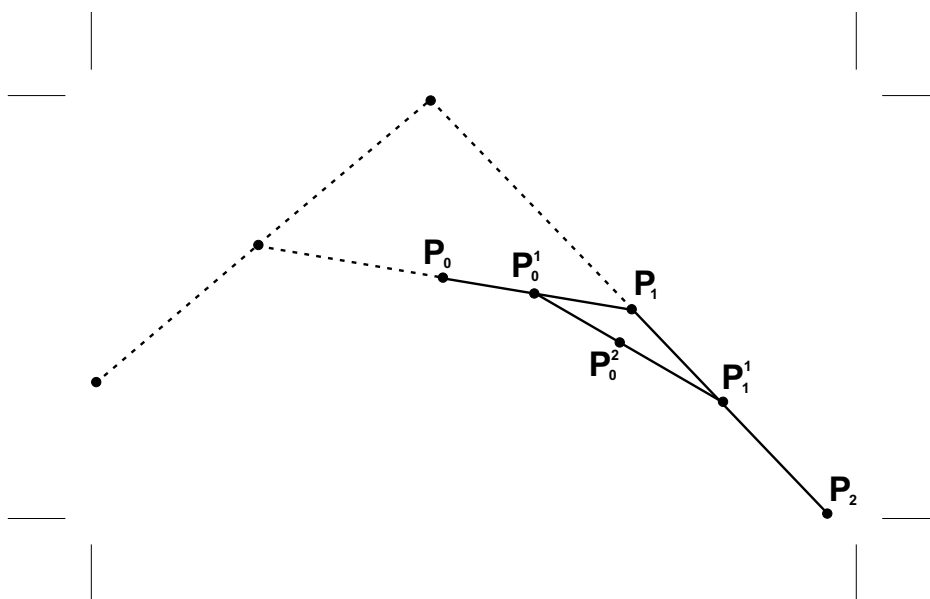
Agora aplicamos o mesmo processo para a curva definida pelos pontos $\{\mathbf{P}_0^2, \mathbf{P}_1^1, \mathbf{P}_2\}$. Para facilitar o entendimento, os renomeamos como $\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2\}$, respectivamente.



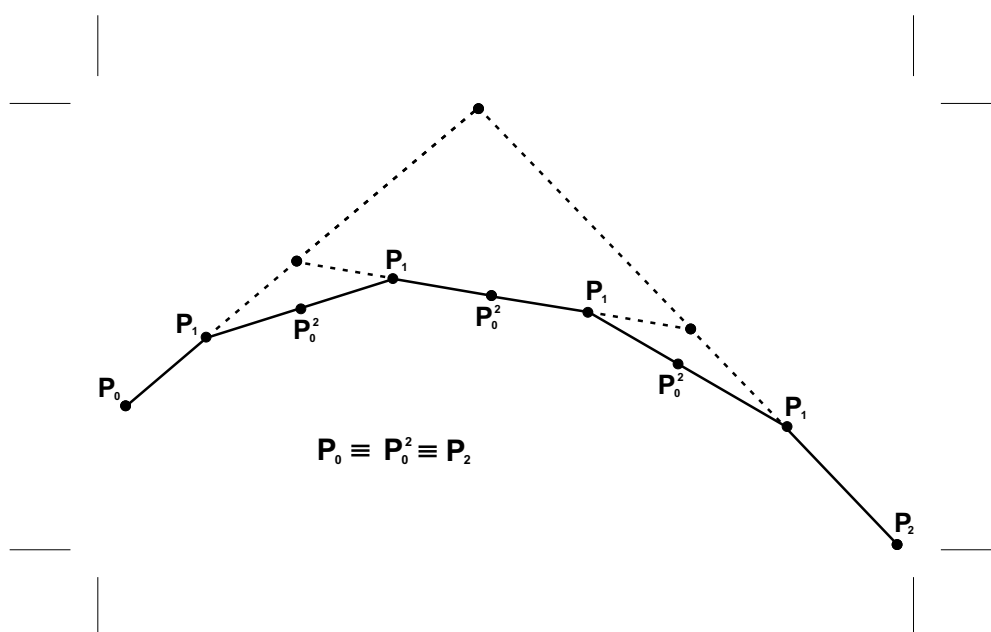
Seja \mathbf{P}_0^1 o ponto médio do segmento $\overline{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1}$ e \mathbf{P}_1^1 o ponto médio do segmento $\overline{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}$.



Seja finalmente P_0^2 o ponto médio do segmento $\overline{P_0^1 P_1^1}$.



Após este procedimento, encontramos mais dois pontos na curva, agora esta está subdividida em quatro novas curvas, veja



Assim, podemos encontrar quantos pontos quisermos sobre a curva de Bézier e pelo processo de interpolação encontramos a curva que melhor se adapta a esses pontos. Veja a curva obtida na figura 4.8.

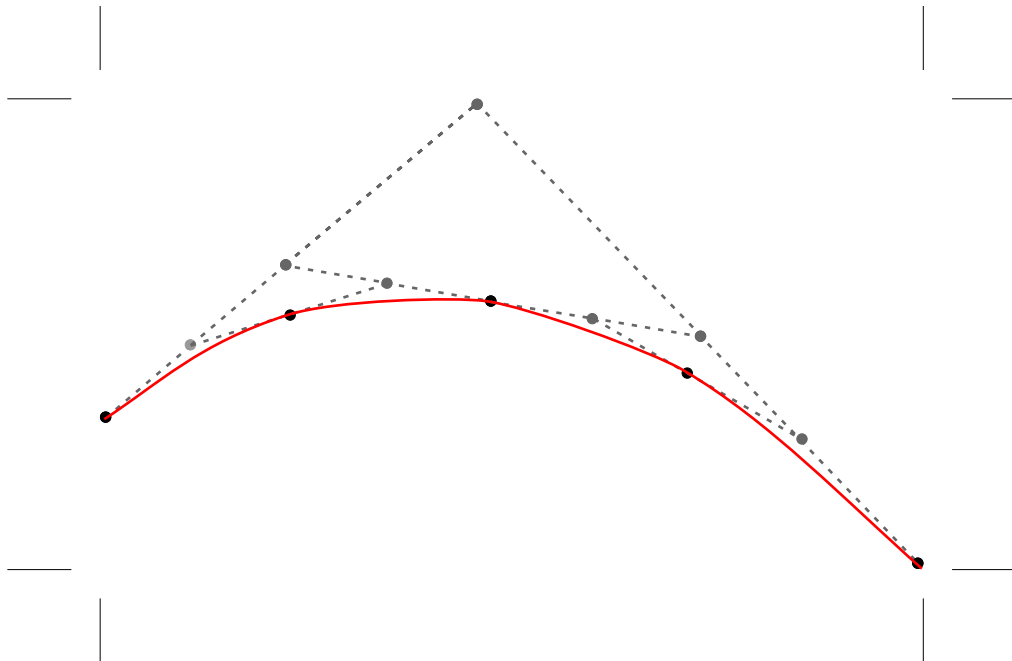


Figura 4.8: Quadrática de Bézier, obtida pelo processo de subdivisão.

4.6 Propriedades das Curvas de Bézier

Vejam algumas propriedades das curvas de Bézier, as quais podem ser facilmente verificadas.

1. **Endpoint interpolation:** A curva passa pelos pontos de controle \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_n , pois temos que $\mathbf{B}^n(0) = \mathbf{P}_0$ e $\mathbf{B}^n(1) = \mathbf{P}_n$.
2. **Hull Convex:** A curva de Bézier está contida dentro do maior polígono convexo formado pelos seus pontos de controle.
3. **Derivadas:** Uma curva de Bézier é de classe C^∞ , ou seja, possui derivadas contínuas de todas as ordens, isso é imediato, vista como propriedade dos polinômios de Bernstein.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B}^n(t) = n \sum_{i=0}^n \left[B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t) \right] \mathbf{P}_i$$

sabemos que $B_j^n(t) = 0$ para $j \notin \{0, 1, \dots, n\}$, então

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B}^n(t) = n \sum_{i=1}^n B_{i-1}^{n-1}(t) \mathbf{P}_i - n \sum_{i=0}^n B_i^{n-1}(t) \mathbf{P}_i$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{B}^n(t) &= n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)\mathbf{P}_{i+1} - n \sum_{i=0}^n B_i^{n-1}(t)\mathbf{P}_i \\ \frac{d}{dt}\mathbf{B}^n(t) &= n \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i) B_i^{n-1}(t)\end{aligned}$$

Percebemos que as tangentes a curva de Bézier nos pontos iniciais, são determinadas pelos vetores $\overline{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0}$ e $\overline{\mathbf{P}_n\mathbf{P}_{n-1}}$, pois

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B}^n(0) = n(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$$

e

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B}^n(1) = n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1})$$

Assim, a inclinação da curva em $t = 0$ é igual ao vetor $n(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$ e a inclinação em $t = 1$ é igual ao vetor $n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1})$.

4. **O Grau:** O grau da curva está relacionado com o número de pontos de controle. Por isso, usar muitos pontos de controle para controlar a forma de uma curva, significa que teremos polinômios de grau elevado para avaliação.
5. Se os pontos de controle são todos colineares, então, a curva é uma reta. Isso decorre da primeira propriedade, **Endpoint Interpolation**, a curva passa pelos pontos iniciais.
6. **Versatilidade:** Para mudar o formato de uma curva de Bézier basta apenas mudar a posição de seus pontos de controle. Isso faz com que a curva seja amplamente utilizada em softwares de computação gráfica.

4.7 Aplicações das Curvas de Bézier

Existem inúmeras aplicações para as curvas de Bézier, a maioria delas em CAD(Computer-Aided Design). A grande maioria dos softwares gráficos disponíveis no mercado utilizam o conceito de curva de Bézier, em função da grande versatilidade desse tipo de representação para curvas. Entre eles destacamos o Adobe Illustrator, o CorelDRAW, o AutoCAD e o Paint Shop Pro, todos mundialmente conhecidos. Elas

também podem ser utilizadas para realizar animações. Uma animação com curvas de Bézier pode ser encontrada como proteção de tela do sistema operacional Windows XP.

As curvas de Bézier são utilizadas em algumas impressoras a laser para modelar o formato das letras.

4.8 Exemplos

Vejamos alguns exemplos de curvas de Bézier.

Exemplo 4.3 Dado $(4, 2) \in \mathbf{B}^2(1/2)$, encontre \mathbf{P}_2 , sabendo que $\mathbf{P}_0(1, 4)$ e $\mathbf{P}_1(4, 0)$.

Do algoritmo de Casteljau, sabemos que se $(4, 2) \in \mathbf{B}^2(1/2)$, então $\mathbf{P}_0^2(1/2) = (4, 2)$ e

$$\mathbf{P}_0^2(t) = (1-t)\mathbf{P}_0^1(t) + t\mathbf{P}_1^1(t) \quad (4.9)$$

também,

$$\mathbf{P}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 \quad (4.10)$$

$$\mathbf{P}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2 \quad (4.11)$$

substituindo as equações 4.10 e 4.11 em 4.9, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0^2(t) &= (1-t)\left[(1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1\right] + t\left[(1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2\right] \\ \mathbf{P}_0^2\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\mathbf{P}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{P}_1\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{P}_2\right] \\ \mathbf{P}_0^2\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4}\mathbf{P}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{P}_2 \\ (4, 2) &= \frac{1}{4}(1, 4) + \frac{1}{2}(4, 0) + \frac{1}{4}(x, y) \\ (4, 2) &= \left(\frac{1}{4}, 1\right) + (2, 0) + \left(\frac{x}{4}, \frac{y}{4}\right) \\ (4, 2) &= \left(\left(\frac{9}{4} + \frac{x}{4}\right), \left(1 + \frac{y}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

Resolvendo para x e y , obtemos $\mathbf{P}_2(7, 4)$.

Exemplo 4.4 Dado o polígono de Bézier formado pelos pontos $\mathbf{P}_0(0,4)$, $\mathbf{P}_1(3,1)$ e $\mathbf{P}_2(6,6)$, encontre o ponto $\mathbf{P}_0^2(1/4)$.

Do exemplo acima sabemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0^2(t) &= (1-t)\left[(1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1\right] + t\left[(1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2\right] \\ \mathbf{P}_0^2\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{3}{4}\left[\frac{3}{4}\mathbf{P}_0 + \frac{1}{4}\mathbf{P}_1\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{3}{4}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{P}_2\right] \\ \mathbf{P}_0^2\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{9}{16}\mathbf{P}_0 + \frac{6}{16}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{16}\mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_0^2\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{9}{16}(0,4) + \frac{6}{16}(3,1) + \frac{1}{16}(6,6) \\ \mathbf{P}_0^2\left(\frac{1}{4}\right) &= \left(0, \frac{36}{16}\right) + \left(\frac{18}{16}, \frac{6}{16}\right) + \left(\frac{6}{16}, \frac{6}{16}\right) \\ \mathbf{P}_0^2\left(\frac{1}{4}\right) &= \left(\left(\frac{18}{16} + \frac{6}{16}\right), \left(\frac{36}{16} + \frac{6}{16} + \frac{6}{16}\right)\right) \\ \mathbf{P}_0^2\left(\frac{1}{4}\right) &= \left(\frac{3}{2}, 3\right) \end{aligned}$$

que é o ponto procurado, e está sobre a curva de Bézier.

Exemplo 4.5 Dado o polígono de Bézier formado pelos pontos $\mathbf{P}_0(0,1)$, $\mathbf{P}_1(1,2)$, $\mathbf{P}_2(2,2)$ e $\mathbf{P}_3(3,1)$, encontrar o vetor tangente da curva de Bézier. Veja a figura 4.9.

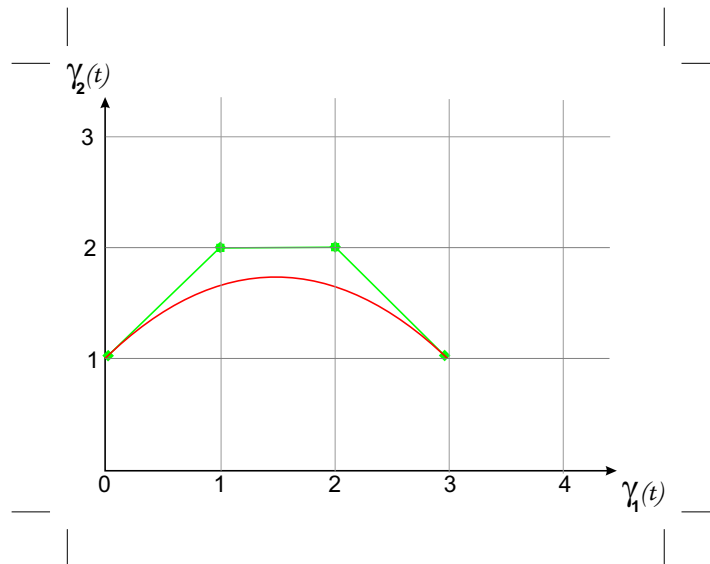


Figura 4.9: Cúbica de Bézier.

Sua parametrização será

$$\mathbf{B}^3(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3$$

$$\mathbf{B}^3(t) = (1-t)^3(0, 1) + 3t(1-t)^2(1, 2) + 3t^2(1-t)(2, 2) + t^3(3, 1)$$

$$\mathbf{B}^3(t) = (3t, -3t^2 + 3t + 1)$$

O vetor tangente é dado por

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B}^3(t) = (3, -6t + 3).$$

Exemplo 4.6 Dado o polígono de Bézier formado pelos pontos $\mathbf{P}_0(0, 1)$, $\mathbf{P}_1(3, 1)$, $\mathbf{P}_2(2, 4)$ e $\mathbf{P}_3(4, 2)$, encontrar o vetor tangente da curva de Bézier. Veja a figura 4.10.

Sua parametrização será

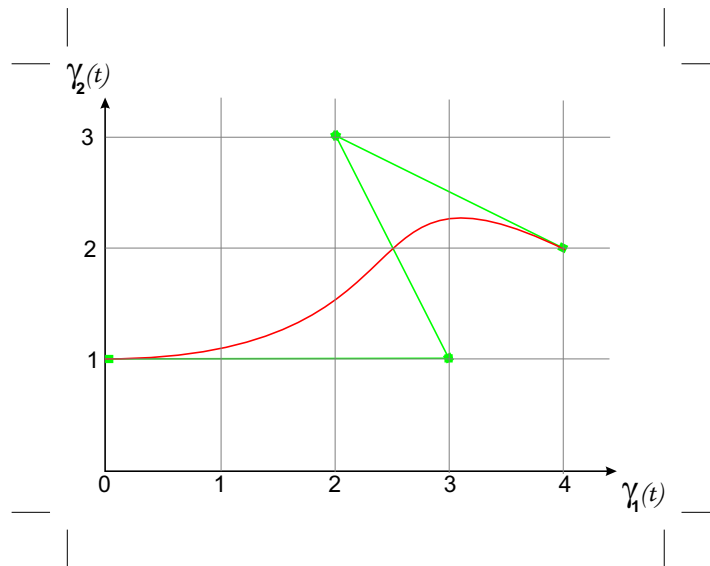


Figura 4.10: Cúbica de Bézier.

$$\mathbf{B}^3(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3$$

$$\mathbf{B}^3(t) = (1-t)^3(0, 1) + 3t(1-t)^2(3, 1) + 3t^2(1-t)(2, 4) + t^3(4, 2)$$

$$\mathbf{B}^3(t) = (7t^3 - 12t^2 + 9t, -8t^3 + 9t^2 + 1)$$

portanto, o vetor tangente é dado por

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B}^3(t) = (21t^2 - 24t + 9, -24t^2 + 18t).$$

Exemplo 4.7 Dado o polígono de Bézier formado pelos pontos $P_0(0, 1)$, $P_1(4, 2)$, $P_2(2, 4)$ e $P_3(1, 0)$, encontrar o vetor tangente da curva de Bézier. Veja a figura 4.11.

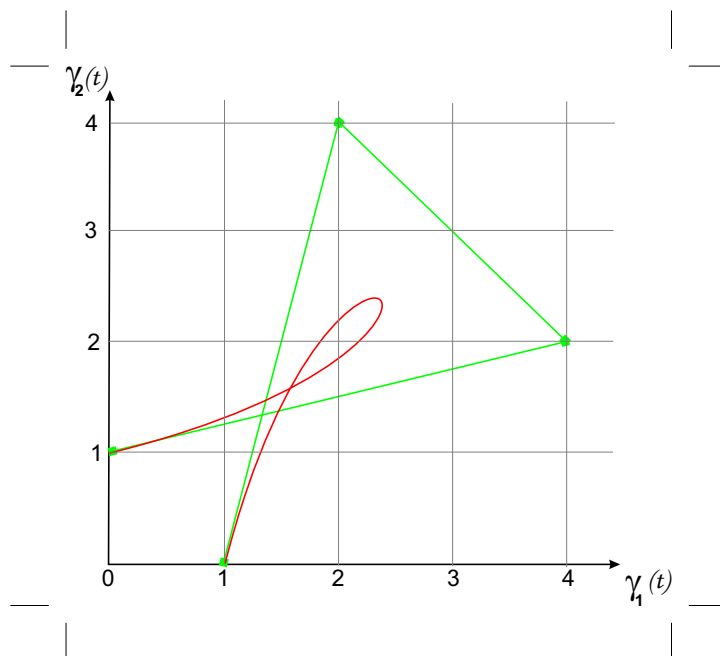


Figura 4.11: Cúbica de Bézier.

Sua parametrização será

$$\mathbf{B}^3(t) = (1-t)^3 \mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t) \mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{P}_3$$

$$\mathbf{B}^3(t) = (1-t)^3(0, 1) + 3t(1-t)^2(4, 2) + 3t^2(1-t)(2, 4) + t^3(1, 0)$$

$$\mathbf{B}^3(t) = (7t^3 - 18t^2 + 12t, -7t^3 + 3t^2 + 3t + 1)$$

portanto, o vetor tangente é dado por

$$\frac{d}{dt} \mathbf{B}^3(t) = (21t^2 - 36t + 12, -21t^2 + 6t + 3).$$

Vejamos alguns exemplos de curvas de Bézier em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 4.8 Dado o polígono de Bézier formado pelos pontos $\mathbf{P}_0(1, 0, 1)$, $\mathbf{P}_1(5, 2, 2)$, $\mathbf{P}_2(4, 4, 0)$ e $\mathbf{P}_3(2, 4, 4)$, encontrar a parametrização para a curva de Bézier. Veja a figura 4.12.

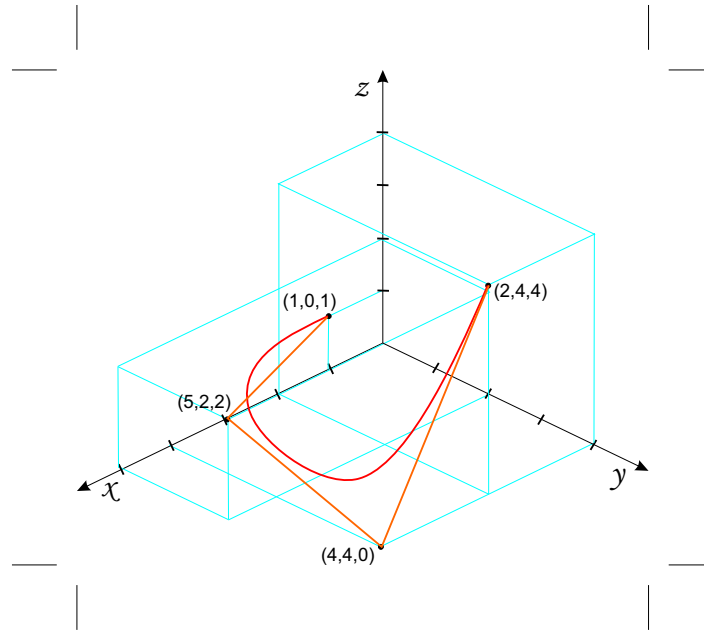


Figura 4.12: Cúbica de Bézier em 3D.

Sua parametrização será

$$\mathbf{B}^3(t) = (1-t)^3 \mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t) \mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{P}_3$$

$$\mathbf{B}^3(t) = (1-t)^3(1, 0, 1) + 3t(1-t)^2(5, 2, 2) + 3t^2(1-t)(4, 4, 0) + t^3(2, 4, 4)$$

$$\mathbf{B}^3(t) = (4t^3 - 15t^2 + 12t + 1, -2t^3 + 6t, 9t^3 + 9t^2 + 3t + 1).$$

Exemplo 4.9 Dado o polígono de Bézier formado pelos pontos $\mathbf{P}_0(0, 0, 0)$, $\mathbf{P}_1(5, 2, 4)$, $\mathbf{P}_2(4, 4, 1)$ e $\mathbf{P}_3(0, 2, 0)$, encontrar a parametrização para a curva de Bézier. Veja a figura 4.13.

Sua parametrização será

$$\mathbf{B}^3(t) = (1-t)^3 \mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t) \mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{P}_3$$

$$\mathbf{B}^3(t) = (1-t)^3(0, 0, 0) + 3t(1-t)^2(5, 2, 4) + 3t^2(1-t)(4, 4, 1) + t^3(0, 2, 0)$$

$$\mathbf{B}^3(t) = (3t^3 - 18t^2 + 15t, -4t^3 + 6t, 9t^3 - 21t^2 + 12t).$$

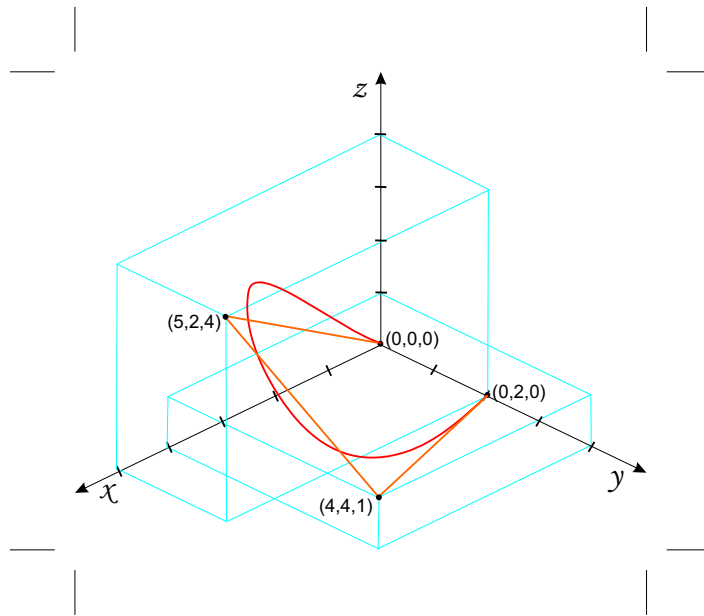


Figura 4.13: Cúbica de Bézier em 3D.

Exemplo 4.10 A figura 4.14 mostra uma sequência de cúbicas de Bézier modelando uma letra.

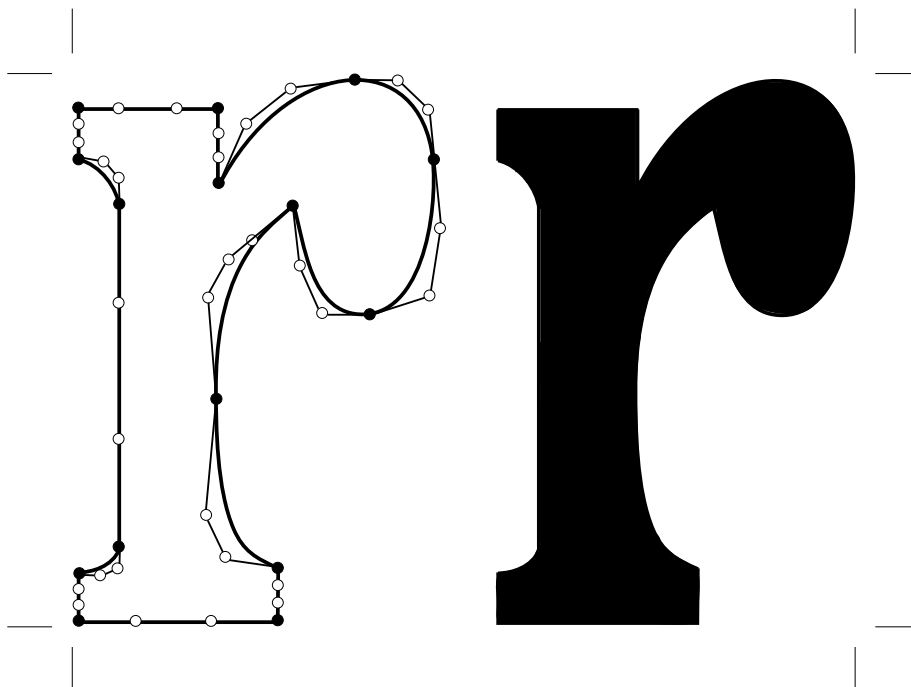


Figura 4.14: Font Design

Conclusão

Este trabalho foi rico em novos conhecimentos: o assunto que não é abordado no curso, o inglês, o \LaTeX , e o maior desafio que foi escrever matemática.

O estudo da Teoria Local introduziu técnicas de Geometria Diferencial e aprimorou o conhecimento de Cálculo. Possibilitou entender o comportamento das curvas que são os elementos mais simples em Geometria.

O contato da teoria local com curvas de Bézier deu maturidade para entender as curvas de Bézier que por sua vez possuem uma definição simples.

Referências Bibliográficas

- [1] Do Carmo, M., *Differential Geometry. Of Curves and Surfaces Prentice Hall*, 1997.
- [2] Klingenberg, W., *A Course in Differential Geometry*, 1994.
- [3] Araújo, P. V., *Geometria Diferencial, IMPA*, 2001.
- [4] Tenenblat, K., *Introdução à Geometria Diferencial, UNB*, 1988.
- [5] Stewart, J., *Cálculo, Editora Pioneira Thomson Learning*, 2001.
- [6] Farin, G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Design, Academic Press*, 1997.