UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA MATEMÁTICA

POLÍGONOS –
UM ESTUDO DIDÁTICO

MORGANA SCHOTTEN

FLORIANÓPOLIS, JULHO DE 2005

MORGANA SCHOTTEN

POLÍGONOS –
UM ESTUDO DIDÁTICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientadora: Dra. Neri Terezinha Both Carvalho

FLORIANÓPOLIS, JULHO DE 2005

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 25/CCM/05

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez

Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Profª NERI BOTH CARVALHO

Orientadora

Profª MÁRCIA MARIA BERNAL

Profº NEREU ESTANISLAU BURIN

“Após a batalha, a conquista.
A conquista desta etapa, nos torna
vitoriosos de nossas lutas.
O que ontem sonhávamos almejar,
hoje transformou-se em realidade e felicidade.
E, o amanhã... espero e acredito com
perseverança no sucesso incessante que
estará por vir!”

Morgana Schotten

DEDICATÓRIA

Dedico a vitória desta etapa de minha vida aos meus pais, Alberto e Janete, às minhas irmãs, Patrícia, Camila e Gabriela, ao meu sobrinho, Alan, ao meu noivo Jakson e à todos os amigos e familiares, que diretamente ou indiretamente, confiaram e acreditaram em meu esforço e dedicação, buscando sempre oferecer o melhor, pelo amor incondicional, presente em todas as horas e, sendo assim, são merecedores de todo o meu afeto, amor e gratidão.

AGRADECIMENTOS

A DEUS por ter me concedido a vida, a plenitude da sabedoria e por nunca ter me desamparado em todas as horas e principalmente nos momentos difíceis.

Aos meus pais Alberto e Janete, às minhas irmãs, Patrícia, Camila e Gabriela, ao meu sobrinho, Alan, que apesar da distância e saudades sempre me apoiaram e deram forças para que eu continuasse e finalizasse minha caminhada.

Ao meu noivo Jakson, que também apesar da distância e saudade sempre esteve ao meu lado, dando-me força, coragem e muito amor.

À Professora Neri, por ter me orientado ao longo de dois semestres, por sua atenção, paciência e dedicação.

Aos Professor Nereu e à Professora Márcia, que fizeram parte da banca, pela disponibilidade e contribuição.

Aos meus amigos e colegas Louise, Taciana, Piersandra, Lisi, Alex, Lauri e muitos outros, pelo companheirismo e pelos momentos compartilhados ao longo de toda a trajetória.

Enfim, a todos aqueles que participaram da minha formação, oferecendo-me auxílio, incentivo, coragem e persistência.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, buscamos conhecer como vive o objeto “Polígonos”, como saber matemático na formação de professores e relativo às classes de 7ª e 8ª séries.

Buscamos como referência a Teoria Antropológica do Saber de Yves Chevallard, que trata da organização matemática e da organização didática.

Segundo Chevallard, toda atividade humana consiste em realizar uma tarefa. Por exemplo: vestir uma roupa, tomar banho, etc. Para executar uma tarefa temos determinadas técnicas, que são os modos ou maneiras de executá-las. Assim, temos um bloco composto por tarefas e técnicas, o que na organização matemática consiste no bloco saber-fazer.

É preciso realizar a ação (fazer uso da técnica) para executar a tarefa, mas como sabemos, os conteúdos são organizados e trabalhados no contexto de diferentes teorias: Geometria, Álgebra, Aritmética, etc. Estas teorias são compostas por teoremas, definições, etc. Os elementos da teoria que justificam e garantem que uma determinada técnica aconteça, Chevallard chama de tecnologia.

Ao estudarmos as técnicas, identificamos os saberes matemáticos que são manipulados, tais como definições e teoremas, que justificam a técnica. Por exemplo: “Calcule a soma dos ângulos internos de um eneágono”. A técnica utilizada neste exemplo envolve a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo, ou seja, a tecnologia é que garante que a técnica funciona. –

Assim, ao conjunto das tarefas relativas a um conteúdo de matemática, das técnicas que podem ser usadas para executar a tarefa, da tecnologia que garante o funcionamento da técnica e da teoria onde se está trabalhando, é dito uma organização matemática.

Já as respostas à pergunta: – Como ensinar um objeto matemático?, em nosso estudo, os polígonos, vão constituir a organização didática. Esta organização diz respeito ao como fazer para propiciar ao aluno a aprendizagem e por isto a organização didática é uma tarefa atribuída ao professor.

Em nosso estudo, buscamos explicitar elementos da organização matemática e da organização didática, em livros de dois níveis de ensino. No livro “Geometria Plana; vol 9” da coleção Fundamentos de Matemática Elementar, destinado à formação de professores e nos livros didáticos de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, pois constatamos nos planejamentos anuais de escolas do ensino fundamental, que o conteúdo “Polígono” é realmente abordado nestas séries.

No capítulo 1, estudamos os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Proposta Curricular de Santa Catarina e os Planejamentos Anuais de escolas nas classes de 7ª e 8ª séries. O objetivo deste capítulo, é explicitar como e quando o objeto “Polígonos” deve ser estudado no Ensino Fundamental, segundo uma orientação oficial.

No capítulo 2, estudamos a abordagem e os exercícios dos capítulos IX e XVI do livro “Geometria Plana – vol. 9”. Buscamos saber como o livro propõe e o que propõe sobre polígonos como um saber a ensinar, uma vez que este livro foi elaborado visando a formação de professores.

No capítulo 3, apresentamos o estudo da abordagem sobre polígonos nos livros didáticos e em seus exercícios. Utilizamos como referência a tipologia de tarefas identificadas no livro “Geometria Plana – vol. 9”.

CAPÍTULO 1

1 Estudo dos Polígonos no Ensino Fundamental, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Proposta Curricular de Santa Catarina e os Planejamentos Anuais das Escolas.

Neste primeiro capítulo, buscamos identificar elementos sobre o saber "Estudo dos Polígonos" no âmbito nacional e estadual, apresentados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), a Proposta Curricular de Santa Catarina (1998) e nos Planejamentos Anuais das Escolas.

Nosso objetivo é explicitar como e quando o estudo dos polígonos deve ser realizado no ensino fundamental, segundo uma orientação oficial.

1.1 Parâmetros Curriculares Nacionais

O ensino e aprendizagem de Matemática nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental faz referência a quatro ciclos, sendo que o primeiro ciclo refere-se a 1a e 2a séries; o 2o ciclo a 3a e 4a séries; o 3o ciclo a 5a e 6a séries; e o 4o ciclo a 7a e 8a séries.

Analisamos o que é proposto para os 3o e 4o ciclos do Ensino Fundamental, pois são nestes ciclos que está inserido o estudo dos polígonos.

Relativo ao 3o ciclo:

Nos PCN encontramos objetivos e premissas no que diz respeito ao ensino da Matemática em relação a geometria, em especial, aos estudos dos polígonos.

Nos objetivos do ensino da Matemática definidos pelo PCN, em relação ao Estudo dos Polígonos temos:

Neste ciclo, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento:

> [...]
> - Do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
>
> [...]
> - Estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo a observação das figuras sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações. (PCN, p.p. 64 – 65)

Na rubrica “Conteúdos Propostos” para o Ensino de Matemática, relativo aos conceitos e procedimentos no campo Espaço e Forma, identificamos princípios estabelecidos pelos PCN de figuras no espaço:

> [...]
> - Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: corpos redondos e poliedros; poliedros regulares e não-regulares; prismas, pirâmides e outros poliedros; círculos, polígonos e outras figuras; números de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados. (PCN, p.73)
>
> [...]

Relativo ao 4o. ciclo:

Nos objetivos do ensino da matemática em relação a este ciclo, no que se refere ao pensamento geométrico, temos:

> [...]
> - Ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais. (p. 82)

Sob a rubrica “Espaço e Forma” relativo ao Estudo dos Polígonos, identificamos particularidades da abordagem proposta pelos PCN:

> [...]
> - Determinação da soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer;
> - Verificação da validade da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para os polígonos não-convexos;
> - Identificação de ângulos congruentes, complementares e suplementares em feixes de retas transversais. (PCN, p.88)
>
> [...]

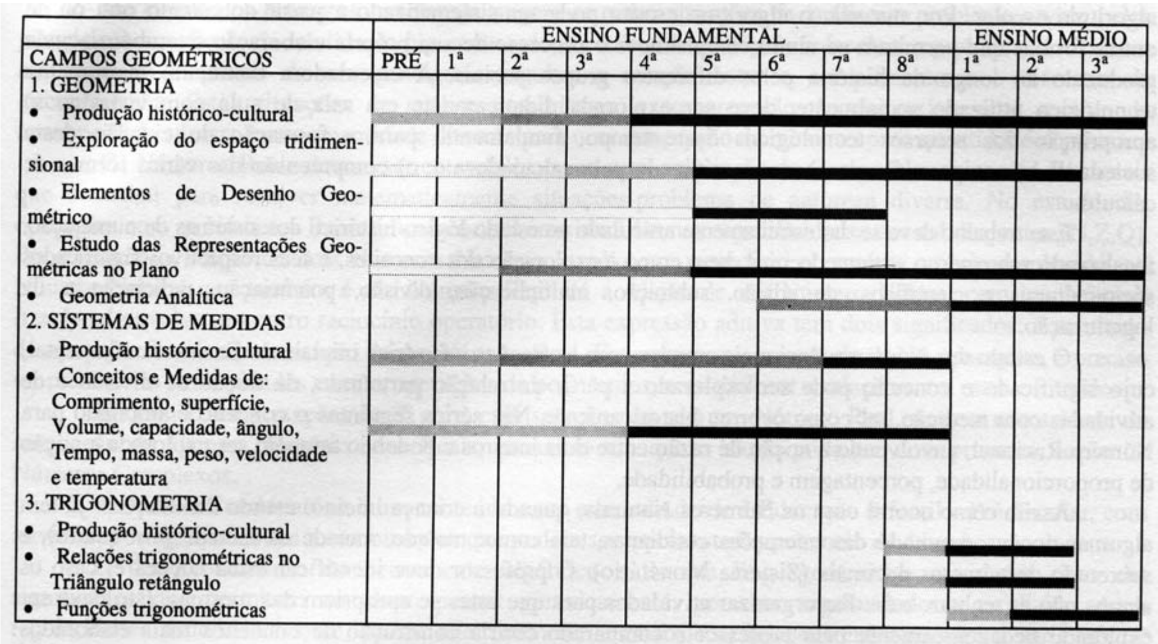
Convém salientar que, além destas particularidades propostas pelos PCN, é proposto também que o aluno desenvolva um tipo de pensamento que faça com que ele compreenda o mundo em que vive de forma organizada.

Temos então que, tanto no Conteúdo como nas orientações didáticas, os PCN fazem referência ao estudo dos polígonos explicitamente, ou seja, os polígonos são objetos de estudo no Ensino Fundamental no 3º e 4º ciclos.

1.2 Proposta Curricular de Santa Catarina

A Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC) é organizada no ensino da Matemática em quatro campos de conhecimento: Campo Numérico, Campo Algébrico, Campo Geométrico, Estatística e Probabilidades.

O PCSC apresenta um quadro de cronogramas para cada campo de conhecimento. Explicitamos aqui apenas o campo geométrico:



	ENSINO FUNDAMENTAL									ENSINO MÉDIO		
CAMPOS GEOMÉTRICOS	PRÉ	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	1ª	2ª	3ª
1. GEOMETRIA												
• Produção histórico-cultural												
• Exploração do espaço tridimensional												
• Elementos de Desenho Geométrico												
• Estudo das Representações Geométricas no Plano												
• Geometria Analítica												
2. SISTEMAS DE MEDIDAS												
• Produção histórico-cultural												
• Conceitos e Medidas de: Comprimento, superfície, Volume, capacidade, ângulo, Tempo, massa, peso, velocidade e temperatura												
3. TRIGONOMETRIA												
• Produção histórico-cultural												
• Relações trigonométricas no Triângulo retângulo												
• Funções trigonométricas												

A mudança da cor branca para a cor preta, em cada conteúdo, corresponde a uma gradativa passagem, onde os conteúdos poderão ser inicialmente trabalhados de forma informal nas séries iniciais, ou seja, pode ser introduzido o conceito sem estar definindo o que realmente é.

No entanto, esta proposta apresenta um "caráter dinâmico e processual. Isto significa dizer que ela não será definitiva, estando sempre aberta para as novas contribuições e reformulações oriundas do coletivo de professores". (PCSC, p.106)

Relativo ao Campo Geométrico, a PCSC faz uma abordagem quanto a orientação pedagógica que pauta alguns princípios para o estudo da geometria, como por exemplo:

"[...]No que diz respeito ao ensino dos Campos Geométricos é preciso primeiro refletir sobre as possíveis características e habilidades que constituem o pensamento geométrico." (PCSC, p.111)

Dentre essas características e habilidades, podemos citar algumas referente ao nosso estudo:

> [...]
> - Visualização e representação das formas geométricas;
> - Denominação e reconhecimento das formas, segundo suas características;
> - Classificação de objetos segundo suas formas;
> - Construção e justificação de relações e proposições tendo como base o raciocínio hipotético dedutivo. (PCSC, p. 112)
>
> [...]

Em relação ao estudo dos "Polígonos", convém salientar que a PCSC não aborda de forma objetiva como trabalhar com este conteúdo, apenas apresenta uma visão geral relativo ao ensino da geometria. Isto nos leva a supor que a decisão de abordar ou não "Polígonos" é deixado a cargo do professor, quando na elaboração do planejamento anual.

Entretanto, os PCN propõem o estudo de polígonos no 3º ciclo e de forma mais abrangente no 4º. ciclo, ou seja, nas 7ª e 8ª séries. A PCSC não apresenta exigências explícitas quanto à forma de trabalharmos com este conteúdo.

Considerando o que propõem os PCN, nosso trabalho ficará restrito às classes de 7ª. e 8ª. séries do Ensino Fundamental.

1.3 Estudo dos Polígonos nos Planejamentos Anuais de Escolas nas Classes de 7ª e 8ª Séries

Em relação a este estudo, foram analisados, no segundo semestre de 2004, planejamentos anuais de três escolas da Grande Florianópolis relativos as classes de 7ª e 8ª séries.

Dentre os planejamentos anuais estudados, designaremos de planejamento A, planejamento B e planejamento C.

Relativo a classe de 7ª série, os planejamentos anuais dão lugar ao estudo de polígonos, conforme segue:

- Planejamento A: Unidade XII. Polígonos, poligonais e polígonos, região convexa e não convexa (côncava), perímetro, polígonos convexos, nomenclatura, diagonais.
- Planejamento B: Unidade XI. Polígonos, elementos, diagonais, perímetro, ângulos de um polígono convexo (soma dos ângulos internos e externos), ângulos de um polígono regular.
- Planejamento C: Unidade IV. Polígonos, noção, elementos (vértice, lado e ângulo), tipos de polígonos, classificação e cálculo do número de diagonais de um polígono.

Em relação a classe de 8ª. série, os planejamentos anuais estudados propõem:

- Planejamento A: Unidade XII. Polígonos regulares, introdução e definições e propriedades.
- Planejamento B: Unidade IX. Polígonos regulares, elementos, cálculo do lado, do raio, do apótema, do ângulo central e do ângulo interno dos polígonos inscritos: quadrado, triângulo e o hexágono regular.
- Planejamento C: Neste planejamento nada consta sobre o estudo dos polígonos.

Percebemos que nos Planejamentos Anuais de 7ª e 8ª séries, com exceção do Planejamento C da classe de 8ª. série, o estudo em questão apresenta-se explicitamente, possuindo seu lugar assegurado no ensino. Segundo os planos, na 7ª série estuda-se polígono num contexto mais geral, enquanto na 8ª série o estudo é particularizado para o estudo de polígono regular.

O Planejamento C da classe de 8ª. série nada apresenta sobre o conteúdo "Polígonos". Isto pode ser explicado pela liberdade atribuída ao professor pela PCSC quanto à elaboração do planejamento.

Concluímos que o estudo dos "Polígonos" nos Planejamentos Anuais é objeto de estudo na 7ª e na 8ª séries.

CAPÍTULO 2

2 Um Saber Acadêmico – Como Saber a Ensinar: Estudo do livro "Geometria Plana[1]"; Vol. 9 da Coleção Fundamentos de Matemática Elementar

Trataremos o livro da Coleção Fundamentos de Matemática Elementar como um livro que propõem saber a ensinar, pois o mesmo é dirigido para professores.

O livro contém um total de XIX capítulos, onde cada um deles se subdivide em tópicos.

Uma breve análise deste livro nos leva a fazer uma restrição do nosso estudo a dois capítulos, onde o tema "Polígonos" está inserido: Capítulo IX – "Polígonos" e Capítulo XVI – "Polígonos Regulares".

O conteúdo desenvolvido nestes capítulos serão nossa referência como um saber acadêmico a ensinar, uma vez que este livro foi elaborado visando a formação de professores.

Como mencionado na introdução, estudaremos a abordagem, isto é, como o livro propõem e o que propõe sobre polígono. Referente a organização matemática, estudaremos os exercícios onde identificamos tipos de tarefas e técnicas de resolução.

Na organização deste livro identificamos o estudo de polígonos em dois momentos: primeiro, no Capítulo IX, onde o estudo é feito a partir de suas definições, elementos, diagonais, ângulos internos e ângulos externos de um polígono qualquer. Em segundo momento, no Capítulo XVI, a partir de seus conceitos e propriedades de um polígono regular.

Uma primeira dificuldade surge quando nos dois capítulos nos defrontamos com a seguinte questão: *"Como ensinar polígonos?"*. No capítulo IX, surge a palavra definição, e no capítulo XVI a palavra conceito. Uma outra questão se coloca: *"Qual a diferença de tratamento ou de concepção, é dada em função do uso da "definição de polígonos" e do "conceito de polígonos?". São concepções distintas, ou é simplesmente um problema de semântica?* Em nosso estudo não entraremos no mérito destas questões.

---

[1] Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo, editora Atual, 1993.

2.1 ESTUDO DO CAPÍTULO IX – POLÍGONOS

2.1.1 A Abordagem

Neste capítulo, faz-se uma abordagem clássica. O autor introduz o estudo do objeto "Polígonos" através da definição, indicando sua representação, seguido de exemplos diversos.

A definição dada é a seguinte:

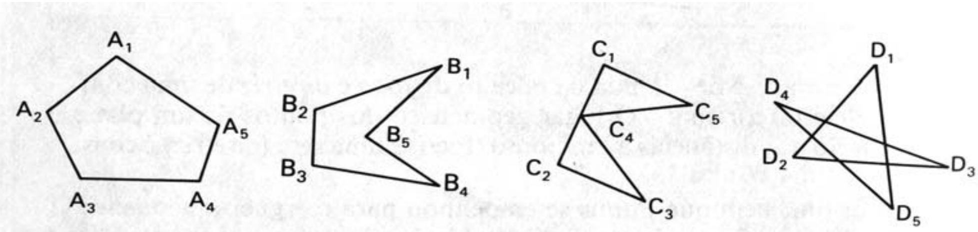
> Dada uma seqüência de pontos de um plano $(A_1, A_2, ..., A_n)$ com n≥ 3, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos $A_{n-1}, A_n\ e\ A_1$, assim como $A_n, A_1\ e\ A_2$,chama-se polígono à reunião dos segmentos: $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$. (p. 132)

Diferentes são as formas de representação:

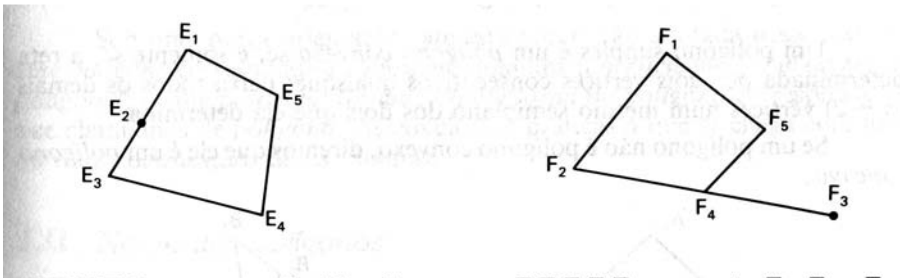
"Polígono $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ *ou, simplesmente,* $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$

$A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n = \overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup ... \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1}$ *". (p. 132)*

Exemplos:



$A_1A_2A_3A_4A_5$, $B_1B_2B_3B_4B_5$, $C_1C_2C_3C_4C_5$ e $D_1D_2D_3D_4D_5$ são polígonos.

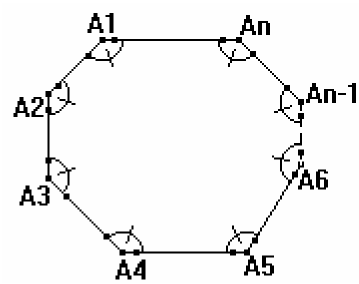


$E_1E_2E_3E_4E_5$ apresenta E_1, E_2 e E_3 colineares e **$F_1F_2F_3F_4F_5$ apresenta F_2, F_3 e F_4 colineares.**

$E_1\ E_2\ E_3\ E_4\ E_5$ e $F_1\ F_2\ F_3\ F_4\ F_5$ não são polígonos.

Na seqüência, os elementos de um polígono são listados, dentre eles: vértices, lados, ângulos, lados e ângulos consecutivos e não consecutivos e perímetro. Vejamos como estes elementos são apresentados:

Considerando o polígono $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$, temos:



- ***Vértices:*** São os pontos $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n$ de um polígono qualquer;
- ***Lados:*** São os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$;
- ***Ângulos:*** São representados da seguinte maneira:

  $\hat{A}_1 = A_n\hat{A}_1A_2, \ \hat{A}_2 = A_1\hat{A}_2A_3, ..., \ \hat{A}_n = A_{n-1}\hat{A}_nA_1$;
- ***Lados consecutivos:*** São dois lados que possuem um vértice comum ou uma extremidade comum;
- ***Lados não-consecutivos:*** São dois lados que não possuem vértice ou extremidade comum;
- ***Ângulos consecutivos:*** Dois ângulos são consecutivos se possuem um lado do polígono comum;
- ***Perímetro:*** É a soma dos lados e é representado da seguinte maneira:

$A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + ... + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_1}$. (p. 133)

A seguir, são apresentadas definições de:

a) ***Polígono Simples:***

"Um polígono é simples se, e somente se, a interseção de quaisquer dois lados não consecutivos é vazia." (p. 133)

Dos polígonos ilustrados no exemplo da página anterior, temos:

$A_1A_2A_3A_4A_5$ *e* $B_1B_2B_3B_4B_5$ *são polígonos simples*;

$C_1C_2C_3C_4C_5$ *não é polígono simples* (*é complexo*) *e*

$D_1D_2D_3D_4D_5$ *não é polígono simples* (*é complexo e ainda entrelaçado*).

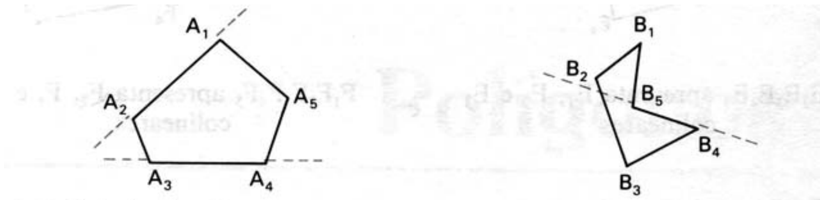
p.(133).

b) ***Polígono Convexo e Polígono Côncavo:***

Um polígono simples é um polígono convexo se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais (n – 2) vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina.

Se um polígono não é polígono convexo, diremos que ele é um polígono côncavo. (p. 134)

Vejamos os exemplos:



$A_1A_2A_3A_4A_5$ é polígono convexo. $B_1B_2B_3B_4B_5$ é polígono côncavo.

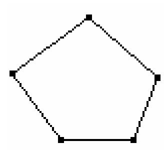
c) ***Interior e Exterior de um Polígono:***

Dado um polígono simples e um ponto não pertencente a ele, se conduzirmos uma semi-reta com origem no ponto e que não passe por nenhum vértice, mas intercepte o polígono, se o número de pontos de interseção:

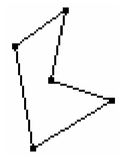
a) For **ímpar**, então o ponto é interno ao polígono;
b) For **par**, o ponto é externo ao polígono.
O conjunto dos pontos internos de um polígono é seu interior e o conjunto dos pontos externos ao polígono é seu exterior.
O interior de um polígono convexo é uma região convexa.
O interior de um polígono côncavo é uma região côncava. (p. 134)

d) *Superfície Poligonal:*

"A reunião de um polígono com o seu interior é uma região poligonal ou superfície poligonal". (p.134)



Superfície poligonal (convexa)



Superfície poligonal (côncava)

e) Tipos de Polígonos:

A classificação dos polígonos quanto ao número *n* de lados, é apresentada em uma lista, conforme segue:

$$n=3 \longrightarrow \textit{Triângulo ou trilátero} ------\longrightarrow 3\ \textit{lados}$$
$$n=4 \longrightarrow \textit{Quadrângulo ou quadrilátero} -\longrightarrow 4\ \textit{lados}$$
$$n=5 \longrightarrow \textit{Pentágono} -------------\longrightarrow 5\ \textit{lados}$$
$$n=6 \longrightarrow \textit{Hexágono} -------------\longrightarrow 6\ \textit{lados}$$
$$n=7 \longrightarrow \textit{Heptágono} -------------\longrightarrow 7\ \textit{lados}$$
$$n=8 \longrightarrow \textit{Octógono} --------------\longrightarrow 8\ \textit{lados}$$
$$n=9 \longrightarrow \textit{Eneágono} --------------\longrightarrow 9\ \textit{lados}$$
$$n=10 \longrightarrow \textit{Decágono} -------------\longrightarrow 10\ \textit{lados}$$
$$n=11 \longrightarrow \textit{Undecágono} ------------\longrightarrow 11\ \textit{lados}$$
$$n=12 \longrightarrow \textit{Dodecágono} ------------\longrightarrow 12\ \textit{lados}$$
$$n=15 \longrightarrow \textit{Pentadecágono} -----------\longrightarrow 15\ \textit{lados}$$
$$n=20 \longrightarrow I\cos \textit{ágono} -------------\longrightarrow 20\ \textit{lados}$$

Notemos que não é realizada nenhuma justificativa quanto a origem das palavras que designam os polígonos.

Há informação de que, se um polígono possui n lados para (n≥3) é denominado de n-látero.

f) Polígono Regular:

A definição de polígono regular é apresentada com ilustração. Ela será retomada no capítulo XVI. Este fato nos motivou a questionar: Será que temos aqui uma abordagem em espiral do conteúdo de polígonos no contexto do próprio livro?

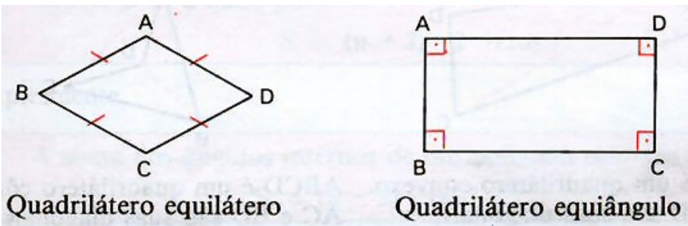
Vejamos a definição de polígono regular:

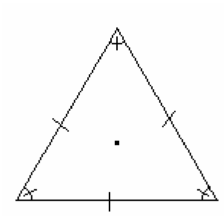
> Um polígono que possui os lados congruentes é equilátero. Se possui os ângulos congruentes, é equiângulo. Um polígono convexo é regular se, e somente se, tem todos os lados congruentes (é equilátero) e todos os ângulos congruentes (é equiângulo). (p.p. 135 – 136)

Notemos que esta definição carrega as definições de: polígono eqüilátero, polígono eqüiângulo e polígono regular. O conceito de congruência é considerado saber disponível.

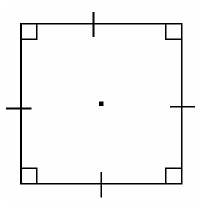
A ilustração dada permite-nos supor que os polígonos utilizados como exemplo serviram para explicar quando um polígono é eqüilátero e quando é eqüiângulo, para então chegar na definição de polígono regular.

Vejamos alguns exemplos:





O triângulo regular é o triângulo eqüilátero

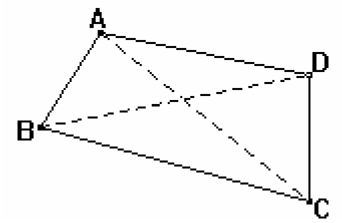


O quadrilátero regular é o quadrado.

g) Diagonais:

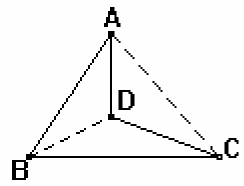
Quanto ao número de diagonais ***d,*** de um polígono de ***n*** lados (n≥3) é dado por: $\left(d = \frac{n.(n-3)}{2} \right)$ sendo que, a definição de diagonal é apresentada da seguinte maneira: "É um segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono". (p. 136)

Exemplos:



ABCD é um quadrilátero convexo

AC e BD são suas diagonais



ABCD é um quadrilátero côncavo

AC e BD são suas diagonais

Na seqüência, o autor apresenta a dedução[2] da fórmula, usando como apoio um polígono de n lados, para determinar o número de diagonais.

h) Soma dos Ângulos Internos de um Polígono Convexo:

Com base na definição de diagonal e na construção de triângulos criados a partir delas, a dedução[3] da fórmula da soma S_i dos ângulos internos de um polígono convexo de ***n*** lados (n≥3) é dada por: $S_i = (n-2).180^o$ **.**

i) Soma dos Ângulos Externos de um Polígono Convexo:

Devemos ressaltar que antes de ser apresentada a fórmula da soma dos ângulos externos de um polígono convexo S_e, o autor aborda o conceito de ângulo externo de um polígono convexo: "Ângulo externo é um ângulo suplementar adjacente a um ângulo interno do polígono". (p. 138)

[2] Anexo 1 (p. 109)
[3] Anexo 2 (p. 110)

Com apoio do conceito de ângulo externo de um polígono convexo, e sabendo-se que este ângulo é suplementar ao ângulo interno, podemos chegar na dedução[4] da fórmula: $S_e = 360^o$.

j) Expressões do Ângulo Interno (a_i) e do Ângulo Externo (a_e):

Sabendo-se que num polígono regular a soma dos ângulos internos S_i e a soma dos ângulos externos S_e, dependem respectivamente do número de ângulos congruentes internos e externos, podemos chegar nas expressões do ângulo interno (a_i) e do ângulo externo (a_e) de um polígono regular. Vejamos:

> Os ângulos internos de um polígono regular são congruentes.
>
> $$n.a_i = S_i \Rightarrow n.a_i = (n-2).180^\circ \Rightarrow ai = \frac{(n-2).180^\circ}{n}$$
>
> Os ângulos externos de um polígono regular são congruentes.
>
> $$n.a_e = S_e \Rightarrow n.a_e = 360^\circ \Rightarrow a_e = \frac{360^\circ}{n}$$
>
> *E ainda**: $a_i + a_e = 180^\circ$.** (p. 139)*

Como podemos constatar, os elementos dos polígonos são caracterizados de forma generalizada e apresentados detalhadamente em cada conceito ou definição dada.

Temos assim que as definições de um polígono qualquer, seus elementos, polígono simples, polígono convexo e côncavo, interior e exterior de um polígono e superfície poligonal são apresentadas apoiadas em figuras ilustrativas, dando a entender assim que, segundo o autor, a leitura da definição acompanhada de um desenho leva a formulação do conceito.

[4] Anexo 3 (p. 111)

2.1.2 ESTUDO DOS EXERCÍCIOS

Para a realização deste trabalho resolvemos todos os exercícios, classificamos em tipos de tarefas, contamos quantos exercícios são propostos de cada tarefa e explicitamos a técnica de resolução.

O objetivo deste estudo é de conhecer que tipos de exercícios são propostos no Capítulo IX do livro “Geometria Plana”, um livro dirigido a formação de professores.

Consideramos importante o conhecimento deste livro, pois supomos que é um livro referência para os professores, o que pode influenciar as escolhas dos mesmos no seu ensino.

O estudo dos exercícios do capítulo IX do livro “Geometria Plana”, nos permitiu identificar 10 tipos de tarefas envolvendo polígonos.

Apresentaremos a seguir um exemplo de cada tipo de tarefa, os quais foram resolvidos por nós, para identificarmos a técnica de resolução e a tipologia de tarefas que encontramos envolvendo polígonos. Explicitaremos um exemplo relativo a cada tarefa e as técnicas de resolução encontradas em todos os exercícios relacionadas aquela tarefa.

<u>Tipo 1</u> – Determinar a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo.

Condições da situação-problema:

- Resolver sem a utilização da fórmula;
- A partir de um polígono entrelaçado;
- A partir de polígonos convexos dados.

Exemplo: *Calcule a soma dos ângulos internos de um eneágono. (Ex. 299. p. 142)*

<u>Resolução</u>: Sabendo que um eneágono possui 9 lados, temos:

$S_i = (n-2).180^o \Rightarrow S_i = (9-2).180^o \Rightarrow S_i = 7.180^o \Rightarrow S_i = 1260^o$. Portanto, a soma dos ângulos internos de um eneágono mede 1260^o.

<u>Técnica</u> – Estudo da configuração, aplicação da relação entre ângulos internos e externos, conceito de ângulos suplementares e fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo.

<u>Quantidade</u>: 7

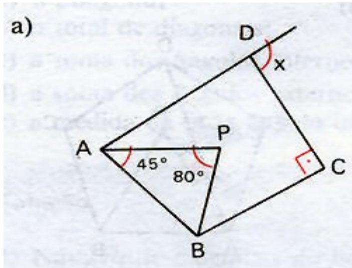
<u>Tipo 2</u> – Calcular o valor de um ângulo em um polígono:

a) Convexo

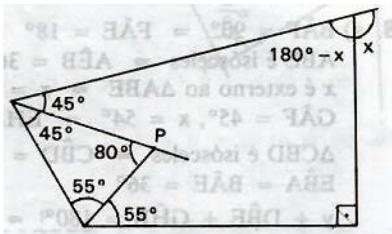
Condições da situação-problema:

- A partir de polígonos convexos dados;
- Sabendo que existem segmentos que são bissetrizes;
- Sabendo que existem segmentos que são bissetrizes e segmentos paralelos.

Exemplo: *Nos casos abaixo, determine x, sabendo que os segmentos* $\overline{AP}, \overline{BP}, \overline{CP}$ *e* $\overline{DP}$ *nas figuras em que aparecem são bissetrizes. (Ex. 294-a, p. 141)*



<u>Resolução</u>: a) Quadrilátero ABCD:



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^o \Rightarrow 90^o + 110^o + 90^o + 180^o - x = 360^o \Rightarrow x = 110^o$$

<u>Técnica</u> – Estudo da configuração, aplicação de $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ (α_i ângulo interno) de um polígono convexo, fórmula da soma dos ângulos internos, conceito de paralelismo, bissetriz e ângulos suplementares.

b) Regular Convexo

Condições da situação-problema:

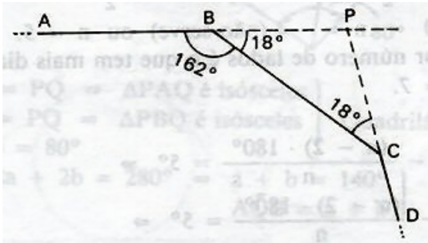
- A partir de polígonos regulares dados;
- Sabendo que o ângulo procurado é formado pelos prolongamentos de dois lados não consecutivos.

Exemplo: *Determine a medida do ângulo formado pelos prolongamentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um polígono regular ABCD... de 20 lados. (Ex. 321, p. 144)*

<u>Resolução</u>:

$n = 20 \Rightarrow a_i = 162^o \Rightarrow a_e = 18^o$

$\Delta PBC \Rightarrow \hat{P} = 180^o - 18^o - 18^o \Rightarrow \hat{P} = 144^o$



<u>Técnica</u> – Estudo da configuração, aplicação do $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ (α_i ângulo interno) de um polígono convexo, fórmula da soma dos ângulos internos, ângulos suplementares, congruência de triângulos e fórmula do ângulo interno de um polígono regular.

<u>Quantidade</u>: 16

<u>Tipo 3</u> – Determinar a medida do ângulo interno de um polígono regular convexo.

Condições da situação-problema:

- Sabendo que existem n diagonais que não passam pelo seu centro;
- A partir de polígonos regulares dados.

Exemplo: *Um polígono regular possui 30 diagonais que não passam pelo seu centro. Quanto mede cada ângulo interno dele? (Ex. 332, p. 145)*

<u>Resolução</u>: Um polígono regular só tem diagonais passando pelo centro se o número n de lados for par e o número de diagonais que passam pelo centro for $\frac{n}{2}$.

Neste problema temos que considerar dois casos:

1º.) *n é ímpar* – Não há diagonal passando pelo centro. Neste caso o número total de diagonais é d = 30. Vamos calcular o número de lados:

$d = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow 30 = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow n^2 - 3n - 60 = 0$. As raízes da equação não são números naturais ($\Delta = 249$). Logo, não existe polígono com 30 diagonais e com número ímpar de lados.

2º.) *n é par* – Há $\frac{n}{2}$ diagonais passando pelo centro. Neste caso o número total de diagonais é $d = \frac{n}{2} + 30$.

$d = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow \frac{n}{2} + 30 = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow n^2 - 4n - 60 = 0$. A raiz da equação que é número natural é n = 10. O polígono é o decágono regular.

Cálculo do ângulo interno: $a_i = 180^o - a_e = 180^o - \frac{360^o}{10} \Rightarrow a_i = 144^o$

<u>Técnica</u> – Aplicação da fórmula do ângulo interno (a_i), dedução do número de diagonais que passam pelo centro de um polígono regular com número de lados pares, fórmula do número de diagonais.

<u>Quantidade</u>: 6

<u>Tipo 4</u> – Determinar a medida do ângulo externo de um polígono regular convexo.

Exemplo: *Um polígono regular possui a partir de um de seus vértices tantas diagonais quantas são as diagonais de um hexágono. Ache: c) [...] a medida de cada ângulo externo. (Ex. 309-c, p. 143)*

<u>Resolução</u>: Primeiramente devemos encontrar o número de lados do referido polígono:

$d = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow d = \frac{6(6-3)}{2} \Rightarrow d = 9$. Sabemos que, de cada vértice partem (n – 3) diagonais:

$n - 3 = 9 \Rightarrow n = 12$. Portanto, $S_e = n.a_e \Rightarrow 360^o = 12.a_e \Rightarrow a_e = 30^o$. Portanto, cada ângulo externo mede 30^o.

<u>Técnica</u> – Aplicação da fórmula do ângulo externo (a_e).

<u>Quantidade</u>: 5

<u>Tipo 5</u> – Determinar o polígono.

Condições da situação-problema:

- **Convexo:**
  - A partir da soma dos ângulos internos;
  - A partir do número de diagonais que é dado como um múltiplo do número de lados;
  - A partir do número de diagonais;
  - Sabendo que a soma dos ângulos internos é igual a n, onde n = x.y, em que x é o número de diagonais e y é a medida de um ângulo dado;

- Sabendo que este possui $\frac{n}{2}$ diagonais passando pelo seu centro;
- A partir de três polígonos convexos: o polígono que possui o maior número de diagonais, sendo que a soma de suas diagonais é dada e o número de lados é expresso por números inteiros consecutivos.

Exemplo: *Qual é o polígono cuja soma dos ângulos internos vale 1800^o? (Ex. 302, p. 142)*

<u>Resolução</u>: Sabendo que $S_i = 1800^o$, temos:

$S_i = (n-2).180^o \Rightarrow 1800^o = 180^o.n - 360^o \Rightarrow 180^o.n = 2160^o \Rightarrow n = 12$. Portanto, o polígono encontrado é o dodecágono.

<u>Técnica</u> – Aplicação da fórmula da soma dos ângulos internos, nomenclatura, fórmula do número de diagonais, fórmula da soma dos ângulos internos, dedução de que num polígono regular e o número de diagonais que passam pelo centro é $\frac{n}{2}$.

<u>Quantidade</u>: 8

<u>Tipo 6</u> – Determinar o número de diagonais de um polígono:

a) Convexo

Condições da situação-problema:

- A partir de polígonos convexos dados;
- A partir de um dos vértices, conhecendo o número de lados;
- Conhecendo uma relação entre o número de lados e o número de diagonais;
- A partir de três polígonos convexos, com o número de lados múltiplos, conhecendo a soma dos ângulos internos;
- Sabendo que há uma relação entre o número de lados e o número de diagonais.

Exemplo: *Calcule o número de diagonais de um decágono? (Ex. 303, p. 142)*

<u>Resolução</u>: Sabendo que o decágono possui 10 lados, temos:

$d = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow d = \frac{10(10-3)}{2} \Rightarrow d = 35$. Portanto, o decágono possui 35 diagonais.

<u>Técnica</u> – Aplicação da fórmula do número de diagonais de um polígono convexo, hipótese de que, a partir de um dos vértices de um polígono convexo, podemos traçar (n – 3) diagonais e soma dos ângulos internos de um polígono convexo.

b) Regular Convexo

Condições da situação-problema:

- Sabendo o valor do ângulo externo;
- Conhecendo a soma dos ângulos internos com os ângulos externos;
- Sabendo que as mediatrizes de dois lados consecutivos formam um ângulo que mede ϕ;
- Diagonais que passam pelo centro, dado o número total de diagonais;
- Diagonais que passam pelo centro, conhecendo a medida do ângulo interno.

Exemplo: *Determine o número de diagonais de um polígono regular convexo cujo ângulo externo vale 24^o. (Ex. 314, p. 143)*

<u>Resolução</u>: Sabemos que $a_e = 24^o \Rightarrow S_e = n.a_e \Rightarrow 360^o = n.24^o \Rightarrow n = 15$. Portanto:

$d = \dfrac{n(n-3)}{2} \Rightarrow d = \dfrac{15(15-3)}{2} \Rightarrow d = 90^o$. Assim, o número de diagonais é igual a 9.

<u>Técnica</u> – Fórmula do número de diagonais de um polígono convexo, fórmula do ângulo externo (a_e) e do ângulo interno (a_i), soma dos ângulos internos de um polígono convexo, fórmula do número de diagonais, sabendo-se que o número de diagonais que passam pelo centro é $\dfrac{n}{2}$.

<u>Quantidade</u>: 12

<u>Tipo 7</u> – Determinar o número de lados de um polígono:

a) Convexo

Condições da situação-problema:

- Conhecendo o número de diagonais que partem de um só vértice;
- Sabendo que há uma relação entre o número de lados e o número de diagonais;
- A partir de três polígonos convexos com o número de lados consecutivos, sabendo a soma dos ângulos internos.

Exemplo: *Determine o número de lados de um polígono convexo, sabendo que de um de seus vértices partem 25 diagonais. (Ex. 311, p. 143)*

Resolução: De cada vértice partem n – 3 diagonais. Logo, n – 3 = 25 e, então, n = 28. Portanto, o polígono possui 28 lados.

Técnica – Aplicação da fórmula do número de diagonais de um polígono convexo, fórmula da soma dos ângulos internos, hipótese de que a partir de um dos vértices do polígono, podemos traçar (n – 3) diagonais.

b) Regular Convexo

Condições da situação-problema:

- Conhecendo a razão entre os ângulos internos e os ângulos externos;
- Conhecendo uma relação entre as bissetrizes dos ângulos e o ângulo interno;
- Sabendo que há uma relação entre o número de lados e os ângulos internos.

Exemplo: *Determine o número de lados de um polígono regular ABCDE..., sabendo que as bissetrizes $\overline{AP}$ e $\overline{CP}$ dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ formam um ângulo que vale $\frac{2}{9}$ do seu ângulo interno. (Ex. 320, p. 144)*

Resolução: Seja 2x o ângulo interno. Quadrilátero ABCP $x + 2x + x + \frac{2}{9}.2x = 360^o \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 81^o \Rightarrow a_i = 162^o \Rightarrow a_e = 18^o \Rightarrow \frac{360^o}{n} = 18^o \Rightarrow n = 20$. Portanto, o polígono tem 20 lados.

Técnica – Fórmula do ângulo interno (a_i) e do ângulo externo (a_e), definição de bissetriz.

Quantidade: 9

Tipo 8 – Determinar o maior ângulo de um polígono convexo.

Condição da situação problema:

- Os lados internos estão entre uma razão de proporcionalidade.

Exemplo: *Determine o maior ângulo de um pentágono cujos ângulos internos estão na razão 3 : 3 : 3 : 4 : 5. (Ex. 308, p. 142)*

Resolução: Sabendo que o pentágono possui 5 lados, temos:

$S_i = (n-2).180^o \Rightarrow S_i = (5-2).180^o \Rightarrow S_i = 540^o$. Dividindo a soma dos ângulos internos em partes proporcionais à razão dada, temos:

$3x + 3x + 3x + 4x + 5x = 540^o \Rightarrow 18x = 540^o \Rightarrow x = 30^o$

Verificando quais dos cinco ângulos, é o maior: $\begin{cases} 3x = 3.30^o = 90^o \\ 4x = 4.30^o = 120^o \\ 5x = 5.30^o = 150^o \rightarrow maior\ \hat{a}ngulo \end{cases}$

Portanto, o maior ângulo do pentágono mede 150^o.

<u>Técnica</u> – Aplicação da fórmula da soma dos ângulos internos e proporcionalidade.

<u>Quantidade</u>: 1

<u>Tipo 9</u> – Determinar a soma dos ângulos externos em um polígono regular convexo.

Exemplo: *Um polígono regular possui a partir de um de seus vértices tantas diagonais quantas são as diagonais de um hexágono. Ache: d) A soma dos ângulos externos. (Ex. 309-d, p. 143)*

<u>Resolução</u>: A soma dos ângulos externos de qualquer polígono mede 360^o. Portanto, $S_e = 360^o$.

<u>Técnica</u> – Fórmula da soma dos ângulos externos de um polígono convexo.

<u>Quantidade</u>: 1

<u>Tipo 10</u> – Verificar quando um ângulo interno e um externo de um polígono convexo são congruentes.

Exemplo: *Podem os ângulos internos e externos de um polígono regular apresentar medidas iguais? Em que caso isso ocorre? (Ex. 313, p. 143)*

<u>Resolução</u>: Sabemos que, $a_i = \frac{(n-2).180^o}{n}$ e $a_e = \frac{360^o}{n}$. Portanto, devemos igualar essas expressões: $a_i = a_e \Rightarrow \frac{(n-2).180^o}{n} = \frac{360}{n} \Rightarrow 180^o - 360^o = 360^o \Rightarrow 180^o.n = 720^o \Rightarrow n = 4$.

Logo, os ângulos internos e externos coincidem-se em um quadrado.

<u>Técnica</u> – Aplicação da fórmula do ângulo interno (a_i) e do ângulo externo (a_e).

<u>Quantidade</u>: 1

- ✓ **LISTAGEM DAS TAREFAS, COM A RESPECTIVA QUANTIDADE DE EXERCÍCIOS DE CADA UMA DELAS:**

TIPOLOGIA	*QUANTIDADE*
Tipo 1 – Determinar a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo.	7
Tipo 2 – Calcular o valor de um ângulo em um polígono: a) Convexo; b) Regular Convexo.	16
Tipo 3 – Determinar a medida do ângulo interno de um polígono regular convexo.	6
Tipo 4 – Determinar a medida do ângulo externo de um polígono regular convexo.	5
Tipo 5 – Determinar o polígono convexo.	8
Tipo 6 – Determinar o número de diagonais de um polígono: a) Convexo; b) Regular Convexo.	15
Tipo 7 – Determinar o número de lados de um polígono: a) Convexo; b) Regular Convexo.	9
Tipo 8 – Determinar o maior ângulo de um polígono convexo.	1
Tipo 9 – Determinar a soma dos ângulos externos em um polígono regular convexo.	1
Tipo 10 – Verificar quando um ângulo interno e um externo de um polígono convexo são congruentes.	1
TOTAL	**69**

Como podemos notar neste capítulo, os exercícios estudados mostram uma certa ênfase no estudo de ângulos de um polígono, pois em 16 de 69 (Tipo 2) é solicitado o cálculo de um ângulo de um polígono.

Também se destaca o estudo de situações-problema envolvendo diagonais, onde 15 de 69 são do tipo 6-a e b.

Outro ponto importante no estudo deste capítulo é relativo a ângulo interno, pois 13 (Tipos 1 e 3) de 69 contemplam este tema. Ainda destacamos que 8 (Tipo 5) do total, são situações-problema para determinar o polígono convexo, e 9 (Tipo 7) de 69 envolvem na problemática os lados de um polígono.

Assim, os dados da tabela dão um indicativo de que a ênfase neste capítulo é dada no estudo de: ângulos, ângulos internos, diagonais, lados e determinação de polígonos convexos por meio da utilização de sua nomenclatura.

2.2 ESTUDO DO CAPÍTULO XVI – POLÍGONOS REGULARES

Neste livro, o capítulo XVI – Polígonos Regulares, tem por objetivo a abordagem detalhada de “Polígonos Regulares”.

2.2.1 A Abordagem

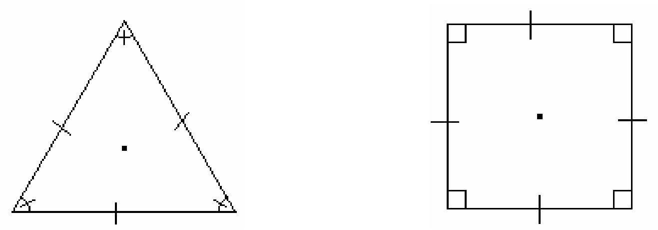
A abordagem é realizada por meio da apresentação de conceitos e propriedades, ilustrados por figuras, seguidos de exemplos complementares e demonstrações.

A definição de polígono regular, já dada no capítulo IX, é reapresentada em nova versão, usando a terminologia “congruentes” para lados e ângulos, no lugar de caracterizá-los como polígonos eqüiláteros e eqüiângulos. Esta mudança de terminologia se justifica pelo fato de que congruências e semelhanças de triângulos são objeto de estudo no capítulo IV e XIII deste livro.

Vejamos a definição dada:

“Um polígono convexo é regular se, e somente se, tem todos os lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes.” (p. 268)

Exemplos:



Em seguida, são apresentadas as propriedades com as respectivas demonstrações.

Iremos, neste estudo, detalhar as demonstrações dadas no livro.

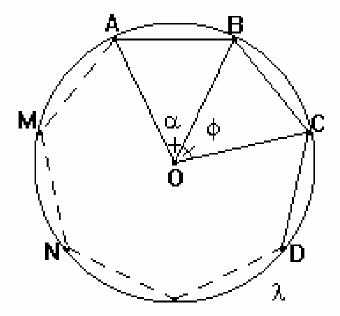
- ***Propriedades:***

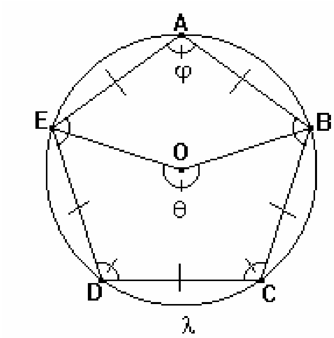
> Dividindo-se uma circunferência em n (n ≥ 3) arcos congruentes, temos:
>
> a) Todas as cordas determinadas por dois pontos de divisão consecutivos, reunidas, formam um polígono regular de n lados inscrito na circunferência;
>
> b) As tangentes traçadas pelos pontos de divisão determinam um polígono regular de n lados circunscrito à circunferência. (p. 268)

A demonstração é desenvolvida para um polígono de n lados, mas é exemplificada para um melhor entendimento em um polígono de cinco lados (pentágono).

Os conteúdos utilizados nas demonstrações (congruência, arcos, cordas, ângulo inscrito, tangentes e ângulos de segmento ou semi-inscrito) são considerados como saber disponível.

Vejamos a demonstração da parte *a)* da propriedade dada:





Sejam *A, B, C, D, ..., M* e *N* os *n* pontos de divisão da circunferência λ. O polígono *ABCD ...MN* é de n lados e é inscrito, pois todos os vértices pertencem à circunferência λ.

Sendo os arcos: $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DE \equiv ... \equiv MN \equiv NA$ congruentes, então os ângulos centrais (ϕ *e* α) são congruentes, pois a medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente. Os lados ou cordas: $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DE} \equiv ... \equiv \overline{MN} \equiv \overline{NA}$ **(1)** também são congruentes, pois numa mesma circunferência, arcos congruentes subentendem cordas congruentes. Também pela congruência de triângulos, caso *LAL*, os triângulos *COB* e *BOA* são congruentes, conseqüentemente os lados mencionados acima também são.

Os ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, ..., \hat{M}$ *e* $\hat{N}$ são ângulos inscritos congruentes **(2)**, pois cada um deles tem medida metade da soma de (n – 2) dos arcos congruentes ou do ângulo central correspondente, em que λ ficou dividida. No pentágono da ilustração acima, podemos perceber que: $\varphi = \frac{\theta}{2}$ (Sendo φ, o ângulo inscrito (Â) e θ, o ângulo central).

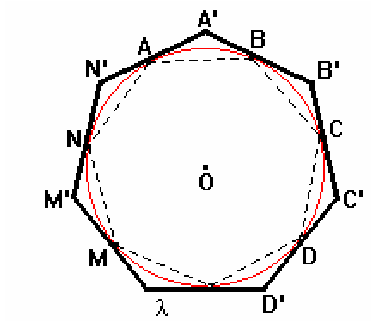
Portanto, no caso do pentágono, temos que:

$\hat{A} = \dfrac{BC + CD + DE}{2}, \hat{B} = \dfrac{CD + DE + EA}{2}, \hat{C} = \dfrac{DE + EA + AB}{2},$

$\hat{D} = \dfrac{EA + AB + BC}{2}, \hat{E} = \dfrac{AB + BC + CD}{2}.$ *Logo*, $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D} \equiv \hat{E}.$

Portanto, concluímos que, de **1)** e **2)** $ABCD...MN$ é um polígono de n lados inscrito na circunferência λ.

Vejamos a demonstração da parte *b)* da propriedade dada:



Pelos pontos de divisão A, B, C, D,..., M e N conduzimos tangentes a λ (circunferência), obtendo o polígono $A'B'C'D',...,M'N'$ de n lados e circunscrito a λ, pois todos os seus lados são tangentes à circunferência.

Notemos que, os triângulos $A'AB, B'BC, C'CD, D'DE,..., M'MN$ *e* $N'NA$ são triângulos isósceles, pois cada um dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D},..., \hat{M}$ *e* $\hat{N}$ destes triângulos são ângulos de segmento ou semi-inscrito, ou seja, são ângulos que tem medida metade da medida do ângulo central ou arco correspondente, no caso, os arcos: $AB, BC, CD, DE,..., MN, NA$**,** em que foi dividida a circunferência. Portanto, os lados $A'B$ *e* AA' são congruentes.

Os triângulos mencionados são congruentes pelo caso de congruência (ALA), visto que sendo $ABCD$ ... MN um polígono regular, os lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD},..., \overline{MN}, \overline{NA}$ são congruentes.

Assim, da congruência de triângulos decorre que:

$\hat{A}' \equiv \hat{B}' \equiv \hat{C}' \equiv \hat{D}' \equiv ... \equiv \hat{M}' \equiv \hat{N}'$ **(1)**

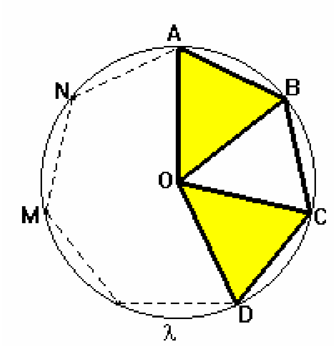
E, os lados do polígono circunscrito também são congruentes:

$\overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'D'}, ..., \overline{M'N'}, \overline{N'A'}$. Assim, de **(1)** e **(2)**, concluímos que *ABCD* ... *MN* é um polígono regular de n lados circunscrito à circunferência λ.

- ***Polígono Regular é Inscritível***

> Todo polígono regular é inscritível numa circunferência.
> ou
> Dado um polígono regular, existe uma única circunferência que passa pelos seus vértices. (p. 270)

Seja ABCD ... MN o polígono regular:



Pelos pontos A, B e C tracemos a circunferência λ e seja *O* o seu centro. Devemos provar que λ passa pelos demais vértices D, E, ..., M e N do polígono. Comecemos provando que $D \in \lambda$.

Consideremos os triângulos *OBA* e *OCD*. Estes triângulos pelo caso de congruência (LAL) são congruentes, pois: $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ (lados do polígono regular), $\overline{OB} \equiv \overline{OC}$ (raios da circunferência) e ângulos da base $O\hat{A}B \equiv O\hat{B}A \; e \; O\hat{D}C \equiv O\hat{C}D$. Considerando o triângulo isósceles *BOC*, em relação aos outros dois triângulos em questão, temos $O\hat{B}A \equiv O\hat{B}C \; e \; O\hat{C}D \equiv O\hat{C}B \Rightarrow O\hat{B}A \equiv O\hat{C}D$ (ângulos da base congruentes). Portanto, pela congruência de triângulos, os ângulos $\hat{B} \; e \; \hat{C}$ do polígono são congruentes.

Portanto, $\Delta OBA \equiv \Delta OCD \Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OD} \Rightarrow D \in \lambda$

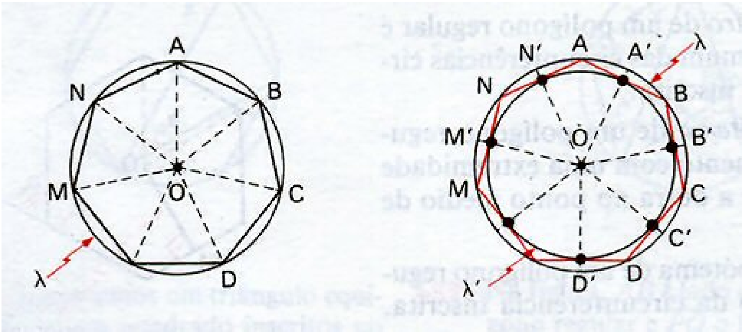
De modo análogo, temos que $E \in \lambda$ (considerando os triângulos: *OCB* e *ODE)* $... M \in \lambda \; e \; N \in \lambda$, e o polígono *ABCD* ... *MN* é inscrito na circunferência λ.

Da unicidade da circunferência que passa por A, B e C sai a unicidade de λ por A, B, C, D, ..., M, N.

- ***Polígono Regular é Circunscritível***

> Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência.
> ou
> Dado um polígono regular, existe uma única circunferência inscrita no polígono. (p. 271)

Seja ABCD ... MN o polígono regular:



Em relação ao teorema anterior, ele é inscrito numa circunferência λ.

Os lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, ..., \overline{MN}, \overline{NA}$ são cordas congruentes de λ, por isso distam igualmente do centro O.

Sendo $A', B', C', D', ..., M'\ e\ N'$ os respectivos pontos médios dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, ..., \overline{MN}, \overline{NA}$, temos: $\overline{OA'} \equiv \overline{OB'} \equiv \overline{OC'} \equiv \overline{OD'} \equiv ... \equiv \overline{OM'} \equiv \overline{ON'}$. A partir disso, se conclui que O é centro de uma circunferência λ' que passa pelos pontos $A', B', C', D', ..., M'\ e\ N'$.

E, ainda sabemos que o polígono regular *ABCD ... MN* tem lados tangentes a λ': $\overline{OA'} \perp \overline{AB}, \overline{OB'} \perp \overline{BC}, \overline{OC'} \perp \overline{CD}, \overline{OD'} \perp \overline{DE}, ..., \overline{OM'} \perp \overline{MN}, \overline{ON'} \perp \overline{NA}$.

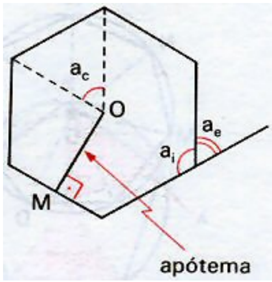
Assim, o polígono *ABCD ... MN* é circunscrito à circunferência λ'.

A unicidade da λ', ocorreria se existisse outra circunferência inscrita no polígono *ABCD ... MN* passando pelos pontos $A', B', C', D', ..., M'\ e\ N'$, sendo assim, coincidente com λ'.

Estas duas últimas propriedades designam uma caracterização própria, justificando sua regularidade.

- ***Elementos Notáveis***

Os elementos notáveis de um polígono regular são apresentados perante uma figura ilustrativa no qual são especificados e caracterizados. Vejamos:



a) ***Centro de um polígono regular (O)****: É o centro comum das* circunferências circunscrita e inscrita;

b) ***Apótema de um polígono regular****:* É o segmento com uma extremidade no centro e a outra no ponto médio de um lado;

c) ***Ângulo central*** ***(a_c):*** É o ângulo com vértices no centro e lados passando por vértices consecutivos do polígono.

Notemos aqui que outros elementos são retomados perante a figura tomada como ilustração, isto é, já são considerados conhecidos os conceitos de: *ângulo interno*, *ângulo externo e raio da circunferência.*

- ***Expressão do Ângulo Cêntrico***

> Todos os ângulos cêntricos de um polígono regular (vértices no centro e lados passando por vértices consecutivos do polígono) são congruentes; então a medida de cada um deles é dada por: $a_c = \dfrac{360^o}{n}$ ou $a_c = \dfrac{4\ retos}{n}$. (p. 272)

- ***Diagonais pelo Centro:***

> Se um polígono regular possui um número par de lados, ele possui diagonais passando pelo seu centro: que as unem vértices opostos. Se ele possui um número ímpar de lados, não há diagonais passando pelo centro. (p. 272)

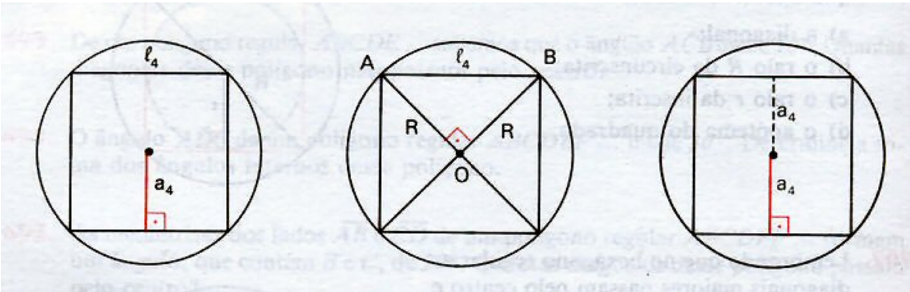
- ***Cálculo do Lado e Apótema dos Polígonos Regulares***

O lado e apótema dos polígonos regulares são calculados a partir do estudo de figuras.

Os polígonos estudados são: quadrado, hexágono regular, triângulo eqüilátero, decágono regular, pentágono regular e busca a partir destes, deduzir a fórmula geral do apótema (a_n) e do lado (l_n) do polígono regular de n lados inscrito numa circunferência, em função do raio.

Vejamos o estudo proposto:

1º.) Vamos calcular o lado (l_4) e o apótema (a_4) do quadrado, dado o raio (R) do círculo circunscrito.

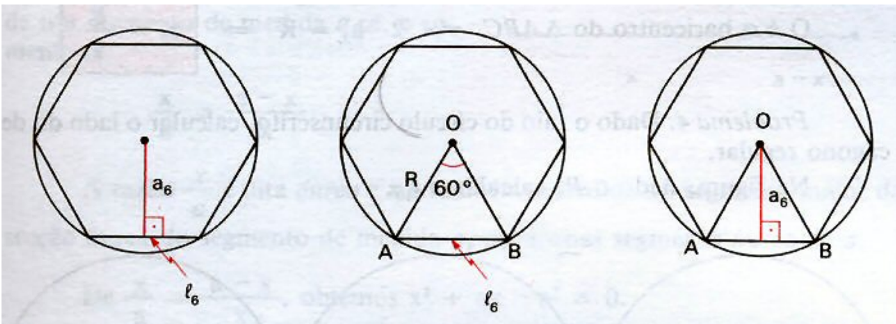


Observando a figura, temos:

$\Delta AOB \Rightarrow l_4^{\ 2} = R^2 + R^2 \Rightarrow l_4 = R\sqrt{2}$ (Lado do quadrado inscrito numa circunferência)

$a_4 = \dfrac{1}{2} l_4 \Rightarrow a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ (Apótema do quadrado inscrito numa circunferência)

2º.) Vamos calcular o lado (l_6) e o apótema (a_6) do hexágono regular, dado o raio (R) do círculo circunscrito.



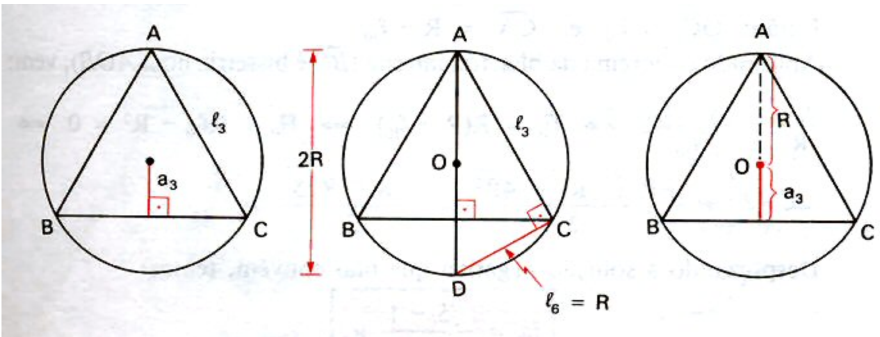
Observando a figura, temos:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta AOB,\ \ temos: A\hat{O}B = \dfrac{360^o}{6} = 60^o \\ \overline{OA} \equiv \overline{OB} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O} = \hat{A} = \hat{B} = 60^o \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Delta AOB\ \ é\ \ equilátero \Rightarrow l_6 = R\ \ (Lado\ \ do\ \ Hexágono\ \ \mathrm{Re}\,gular\ \ Inscrito\ \ numa\ \ circunferência)$

a_6 é a altura do triângulo eqüilátero de lado R $\Rightarrow a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ (Apótema do hexágono regular inscrito numa circunferência).

3º.) Vamos calcular o lado (l_3) e o apótema (a_3) do triângulo eqüilátero regular, dado o raio (R) do círculo circunscrito.



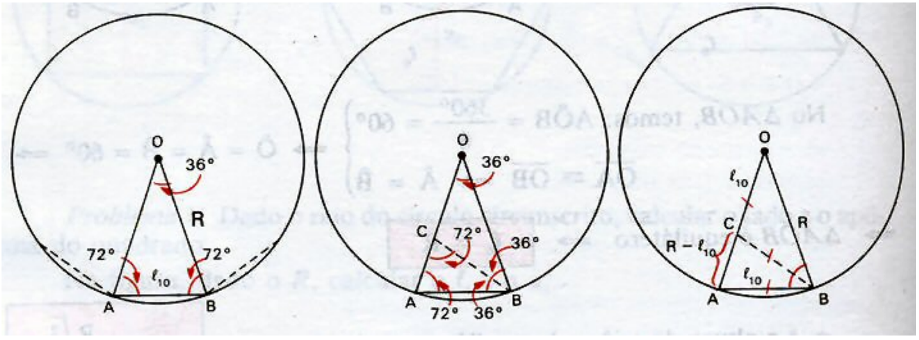
Observando a figura, temos:

Note que, sendo $\overline{BC} = l_3$, então $\overline{CD} = l_6 = R\ \ e\ \ \overline{AD}\ \ é\ \ diâmetro$.

$\Delta ACD,\ \ retângulo\ \ em\ \ C \Rightarrow l_3^{\,2} = (2R)^2 - R^2 \Rightarrow l_3 = R\sqrt{3}$ (Lado do triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência)

No ΔABC, O é baricentro $\Rightarrow 2.a_3 = R \Rightarrow a_3 = \dfrac{R}{2}$ (Apótema do triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência)

4º.) Vamos calcular o lado (l_{10}) do decágono regular, dado o raio (R) do círculo circunscrito.



Sendo $\overline{AB} = \ell_{10}$, então $A\hat{O}B = \frac{1}{10}.360^o = 36^o \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 72^o$. Traçando $\overline{BC}$, bissetriz de $\hat{B}$, temos: ΔBAC é isósceles $(\hat{A} = \hat{C} = 72^o) \Rightarrow \overline{BC} = l_{10}$ e ΔCOB é isósceles $(\hat{O} = \hat{B} = 36^o) \Rightarrow \overline{OC} = \overline{BC} = l_{10}$.

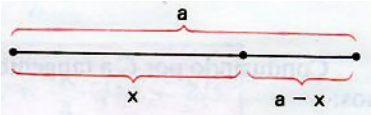
Sabendo-se que os triângulos: ΔABC *e* ΔAOB são semelhantes, e que temos: $\overline{BC}$ bissetriz no ΔAOB, temos:

$$\frac{l_{10}}{R} = \frac{R - l_{10}}{l_{10}} \Rightarrow l_{10}{}^2 = R(R - l_{10}) \Rightarrow l_{10}{}^2 + Rl_{10} - R^2 = 0 \Rightarrow \Rightarrow l_{10} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{-R \pm R\sqrt{5}}{2}$$

Desprezando a solução negativa que não convém, temos que o lado do decágono regular é: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

- ***Segmento Áureo:***

Definição:



X é a medida do segmento áureo de um segmento de medida a se, e somente se, $\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$. A razão $\frac{x}{a}$ é dita *áurea* e *x* é também a medida do segmento maior da secção áurea do segmento de medida *a*, ou apenas segmento áureo de a.

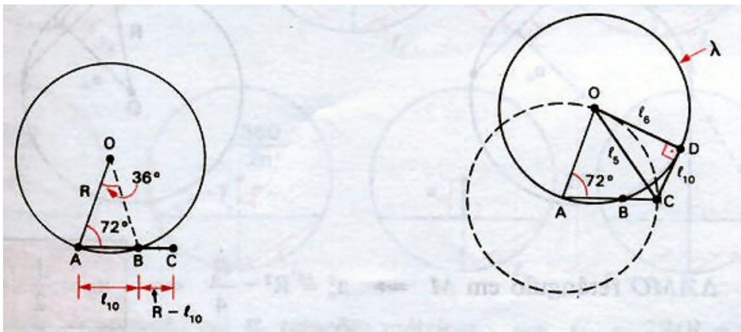
De $\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$, obtemos $x^2 + ax - a^2 = 0$. Resolvendo a equação, obtém-se $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.a$.

Em vista da definição e da dedução do problema anterior, em que se tem $\frac{l_{10}}{R} = \frac{R - l_{10}}{l_{10}}$, concluímos que o ℓ_{10} é o segmento áureo do raio. (p. 279)

Esta definição servirá para encontrarmos o lado do pentágono regular.

5º.) Vamos calcular o lado (ℓ_5) do pentágono regular, dado o raio (R) do círculo circunscrito.

Primeiramente, queremos provar a seguinte propriedade: "O ℓ_5 é hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são o ℓ_{10} e o ℓ_6 (ℓ_5, ℓ_6, ℓ_{10} relativos a um mesmo raio R).



Seja $\overline{AB} = \ell_{10}$ e na reta AB um ponto C tal que $\overline{AC}$ = R.

Considerando a circunferência de centro A e raio R, o ângulo central Â = 72º faz corresponder $\overline{OC} = \ell_5$ $\left(\text{basta provar que } 72^o = \frac{1}{5}.360^o \right)$.

Conduzindo por C a tangente $\overline{CD}$ à circunferência λ de centro O e raio R, temos que, aplicando a definição de potência de ponto no vértice C em relação a λ: $(CD)^2 = (CA)x(CB) \Rightarrow (CD)^2 = R(R - \ell_{10}) \Rightarrow \overline{CD} = \ell_{10}$, onde, CA = R e CB = R – ℓ_{10}.

Portanto, provemos que, a tangente $\overline{CD}$ é o lado do decágono.

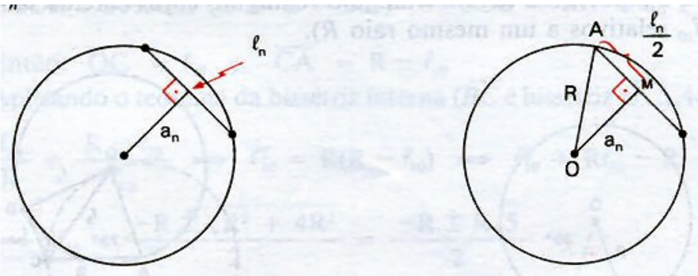
Agora, considerando o triângulo *ODC*, retângulo em D, temos: $\overline{OC} = \ell_5$ (hipotenusa), $\overline{CD} = \ell_{10}$ (cateto) e $\overline{OD}$ = R = ℓ_6 (cateto).

Aplicando o teorema de Pitágoras, para calcularmos ℓ_5, temos: $l_5{}^2 = l_6{}^2 + l_{10}{}^2 \Rightarrow l_5{}^2 = R^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}.R \right)^2 \Rightarrow l_5{}^2 = \frac{R^2}{4}(10 - 2\sqrt{5}) \Rightarrow l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

Portanto, temos que o lado do pentágono regular: $l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

- ***Dedução da Fórmula Geral do Apótema***

Dados R e ℓ_n, calcular a_n:



Analisando o ΔAMO retângulo em M $\Rightarrow a_n{}^2 = R^2 - \frac{l_n{}^2}{4} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n{}^2}$

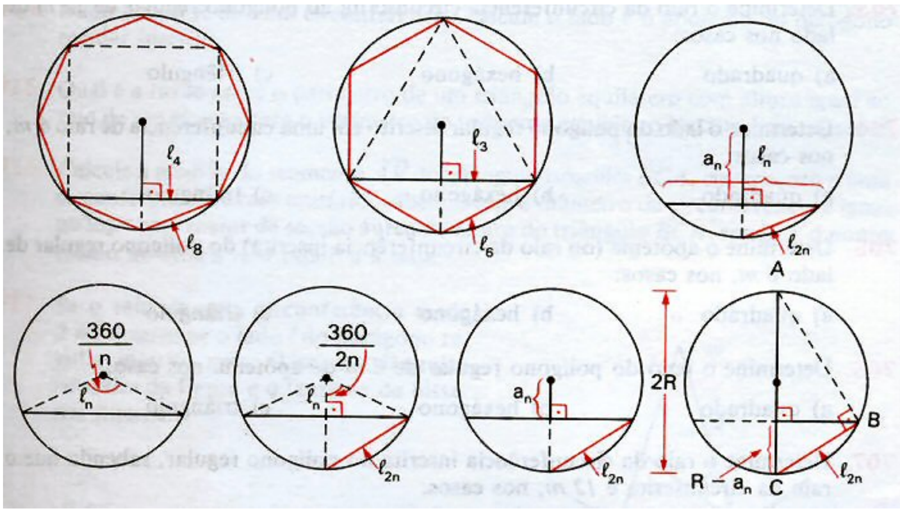
Portanto, a fórmula geral do apótema é: $a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n{}^2}$

- ***Dedução da Fórmula Geral do ℓ_{2n} (Lado do Polígono Regular de 2n lados)***

Queremos encontrar uma expressão que nos leve ao ℓ_{2n} e em função de ℓ_n e de R (raio da circunferência circunscrita).

Vejamos: Se o ℓ_n é o ℓ_4, o ℓ_{2n} é o ℓ_8 . Se ℓ_n é o ℓ_6, o ℓ_{2n} é o ℓ_{12}, e assim por diante.

De modo geral, num polígono regular inscrito numa circunferência de n lados, temos:



Pelo ΔABC, retângulo em B, podemos aplicar uma das relações métricas em um triângulo retângulo. Assim, $l_{2n}^{\ 2} = 2R(R - a_n)$. Substituindo a_n pelo valor já encontrado anteriormente: $\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^{\ 2}}$, temos:

$$l_{2n}^{\ 2} \Rightarrow 2R\left(R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^{\ 2}} \right) \Rightarrow l_{2n}^{\ 2} = R\left(2R - \sqrt{4R^2 - l_n^{\ 2}} \right) \Rightarrow l_{2n} = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - l_n^{\ 2}})}$$

Portanto, a medida do lado do Polígono Regular, de 2n lados é: $l_{2n} = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - l_n^{\ 2}})}$.

Assim, sabendo o valor de o ℓ_n podemos encontrar o valor de ℓ_{2n}.

Verificamos que, neste contexto, as demonstrações das propriedades dos polígonos regulares são caracterizadas por ilustrações, onde o autor utiliza como apoio um caso particular (pentágono) para um melhor entendimento, deixando ao lado um polígono de n lados para que se possa fazer o desenvolvimento das demonstrações para um caso genérico.

São feitas deduções do cálculo do lado e apótema em função do raio da circunferência para os casos: quadrado, hexágono regular, triângulo eqüilátero e apenas o cálculo do lado para o decágono e pentágono, ambos regulares. Também, a partir do lado do decágono regular, podemos encontrar o lado do pentágono regular, utilizando como ferramenta o segmento áureo.

São apresentadas também as deduções da fórmula geral do apótema e da fórmula geral do lado do polígono regular de 2n lados.

Devemos ressaltar que nestas deduções o Teorema de Pitágoras é um conceito chave para o cálculo do lado e apótema em função do raio.

Em todo o estudo referente a estes dois capítulos do livro “Geometria Plana”, as ilustrações são utilizadas como apoio para a formulação do conceito.

2.2.2 ESTUDO DOS EXERCÍCIOS

Para o estudo destes exercícios consideramos a tipologia das tarefas já explicitada no capítulo IX, apresentada na sessão anterior.

No estudo deste capítulo, estaremos ampliando a tipologia caso existam novas tarefas propostas. Estaremos exemplificando somente os casos de uma nova tarefa e também inserindo novas condições das situações-problema quando for o caso.

Apresentaremos a seguir os tipos de tarefas identificadas neste estudo.

Tipos de tarefas identificadas do capítulo IX:

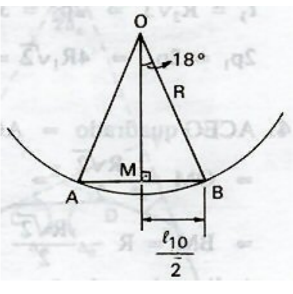
<u>Tipo 2-a</u> – Determinar o valor de um ângulo em um polígono convexo.

Condições da situação-problema:

- A partir do lado de um polígono regular inscrito numa circunferência. Determinar:
  - Ângulo seno;
  - Ângulo cosseno;
  - Ângulo seno e cosseno, sabendo que, $\text{sen}(90^o - \alpha) = \cos\alpha$, os dois ângulos seno e cosseno são complementares, ou seja, o ângulo seno de um ângulo é igual ao ângulo cosseno do outro, e vice-versa.
- Em função do outro, em um triângulo isósceles.

Exemplo: *Usando o resultado do problema (Ex. 718), determine sen18º. (Ex. 719, p. 284)*

<u>Resolução</u>:



No ΔOAB temos: $\overline{OM}$ bissetriz $\Rightarrow \left(AB = l_{10}, OB = R, MB = \frac{l_{10}}{2} \right)$

$$\text{sen}18^o = \frac{MB}{OB} = \frac{\frac{l_{10}}{2}}{R} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}.R}{2R} \Rightarrow \text{sen}18^o = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

<u>Técnica</u> – Estudo da configuração, aplicação de relações trigonométricas (seno e cosseno), definição de bissetriz e lei dos cossenos.

<u>Quantidade</u>: 9

<u>Tipo 2-b</u> – Calcular o valor de um ângulo em um polígono regular convexo.

Condições da situação-problema:

- A partir de um polígono regular inscrito numa circunferência;
- Sabendo que o ângulo procurado é formado pelos prolongamentos de dois lados não consecutivos.

<u>Quantidade</u>: 5

<u>Tipo 6-b</u> – Determinar o número de diagonais de um polígono regular convexo.

Condições da situação-problema:

- Onde estas não passam pelo centro, conhecendo a medida de um dos lados;
- Onde estas passam pelo centro, sabendo-se que as mediatrizes de quaisquer dois lados consecutivos formam um ângulo ϕ que contém estes lados;
- Sabendo-se que as retas que contém dois lados não consecutivos, formam um ângulo que contém os vértices que estão entre os referidos lados e é um múltiplo do ângulo externo.

<u>Quantidade</u>: 3

<u>Tipo 7-b</u> – Determinar o número de lados de um polígono regular convexo.

Condições da situação-problema:

- Conhecendo o valor de cada ângulo interno;
- Sabendo que há uma relação entre o número de lados e os ângulos internos;
- A partir de dois polígonos regulares, conhecendo a diferença entre o número de lados e entre os seus ângulos externos.

<u>Quantidade</u>: 3

A seguir, apresentaremos novos tipos de tarefas, que foram identificadas somente neste capítulo.

Outros tipos de tarefas:

<u>Tipo 11</u> **– Determinar o número de medidas, duas a duas diferentes, das diagonais de um polígono regular dado.**

Condições da situação-problema:

- A partir de polígonos regulares dados;
- Sabendo que as mediatrizes de dois lados de um polígono regular formam um ângulo que contém as extremidades e o ponto médio dos respectivos lados, e excede o ângulo externo em ϕ.

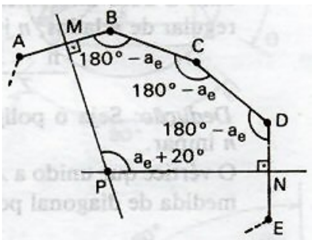
Exemplo: *As mediatrizes dos lados* $\overline{AB}$ *e* $\overline{DE}$ *de um polígono regular ABCDE... formam um ângulo, que contém B, C e D e excede o ângulo externo desse polígono em* 20^o*. Quantas medidas, duas a duas diferentes, obtemos ao medir as diagonais desse polígono? (Ex. 697, p. 274)*

<u>Resolução</u>:

Soma dos ângulos internos do polígono *MBCDNP* é igual a 720^o. Então:

$$3.(180^o - ae) + 180^o + ae + 20^o = 720^o \Rightarrow a_e = 10^o \Rightarrow \frac{360^o}{n} = 10^o \Rightarrow n = 36 .$$

Portanto, o polígono *ABCDE...* possui 36 lados, ou seja, possui um número par de lados. Portanto, esse polígono possui: $\frac{n-2}{2} = \frac{36-2}{2} = 17$ medidas duas a duas diferentes.



<u>**Técnica**</u> **–** Estudo da configuração, aplicação de $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ (α_i ângulo interno) de um polígono regular convexo, fórmula da soma dos ângulos internos e fórmula do ângulo externo.

<u>**Quantidade**</u>**:** 9

<u>Tipo 12</u> – Determinar a soma dos ângulos internos de um polígono regular convexo.

Condições da situação-problema:

- Sabendo que ao medir as diagonais de um polígono regular foram encontradas n medidas, duas a duas diferentes;
- Conhecendo a medida de um dos ângulos de um polígono regular;
- Sabendo que as bissetrizes de dois ângulos internos são perpendiculares.

Exemplo: *Ao medir as diagonais de um polígono regular foram encontradas 6 medidas, duas a duas diferentes. Determine a soma dos ângulos internos desse polígono. (Ex. 692, p. 274)*

<u>Resolução</u>: Temos:

$$\frac{n-2}{2}=6 \ \ ou \ \ \frac{n-3}{2}=6 \Rightarrow n=14 \ \ ou \ \ n=15 \Rightarrow S_i=(n-2).180^o \Rightarrow 2160^o \ \ ou$$

$$S_i=(n-2).180^o \Rightarrow 2340^o.$$

Portanto a soma dos ângulos internos desse polígono mede 2340^o ou 2160^o.

<u>Técnica</u> – Estudo da configuração, verificação quanto as medidas, duas a duas diferentes, quando medimos as diagonais de um polígono regular com número par ou ímpar de lados; aplicação da fórmula da soma dos ângulos internos e fórmula do ângulo interno.

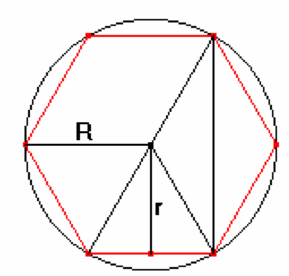
<u>Quantidade</u>: 3

<u>Tipo 13</u> – Determinar a medida dos elementos (altura, lado, raio R da circunferência circunscrita, raio r da circunferência inscrita, apótema, diagonal maior, diagonal menor e diagonal), de polígonos regulares convexos, segundo uma configuração dada.

- Sabendo que num triângulo eqüilátero, o ortocentro, o baricentro, o incentro e o circuncentro são coincidentes, e que o baricentro divide a mediana em duas partes que medem $\frac{1}{3}$ *e* $\frac{2}{3}$ desta, e conhecendo a medida do lado, determinar os respectivos elementos em um triângulo que está inscrito e circunscrito numa circunferência;
- Sabendo que num quadrado a diagonal passa pelo centro, conhecendo a medida do lado;
- Sabendo que num hexágono regular as diagonais maiores passam pelo centro e determinam nele seis triângulos eqüiláteros, conhecendo a medida do lado.
- Quadrado;
- Hexágono regular;
- Triângulo eqüilátero;

- A partir de polígonos regulares inscritos numa circunferência, sendo o número de lados igual a 2n;
- A partir de um polígono regular inscrito em um círculo de raio r, determinar o lado, utilizando a lei dos cossenos.

Exemplo: *Lembrando que no hexágono regular as diagonais maiores passam pelo centro e determinam nele 6 triângulos eqüiláteros, sendo 6m o lado do hexágono, determine:*



a) A diagonal maior;

b) *O raio R da circunscrita;*

c) *O raio r da inscrita;*

d) *A diagonal menor;*

e) *O apótema do hexágono. (Ex.702, p. 275)*

Resolução: Seja l_6 o lado do hexágono.

a) Se os triângulos são eqüiláteros, temos R = l_6. Assim, diagonal maior = 2R = $2.l_6$ = 12 m.

b) R é lado do triângulo eqüilátero $\Rightarrow R = l_6 = 6m$.

c) r é altura do triângulo eqüilátero $\Rightarrow r = \dfrac{l_6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = 3\sqrt{3}m.$

d) Diagonal menor $\Rightarrow 2r = 2.3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}m$.

e) Apótema = r $\Rightarrow a_6 = 3\sqrt{3}m$.

Técnica – Utilização do teorema de Pitágoras, definição de apótema e congruência de triângulos.

<u>Quantidade</u>: 1 – Determinar a medida da altura;

10 – Determinar a medida do lado;

12 – Determinar a medida do raio R da circunferência circunscrita;

8 – Determinar a medida do raio r da circunferência inscrita;

1 – Determinar a medida da diagonal maior;

2 – Determinar a medida da diagonal menor;

6 – Determinar a medida da diagonal;

9 – Determinar a medida do apótema.

<u>Total</u>: 49

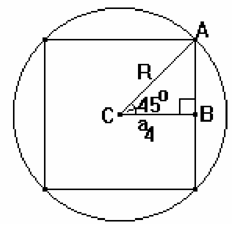
<u>Tipo 14</u> – Determinar a razão entre elementos de polígonos regulares convexos.

Condições da situação-problema:

- Entre os perímetros de um polígono regular inscrito de raio R e um polígono regular circunscrito;
- Entre o perímetro de um triângulo eqüilátero com altura igual ao raio do círculo para o perímetro deste mesmo polígono regular inscrito nesse círculo;
- Entre o apótema de dois polígonos distintos regulares inscritos em um círculo de raio R.

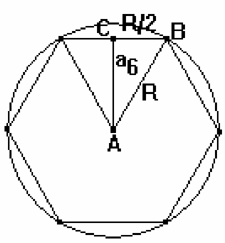
Exemplo: *Determine a razão entre o apótema do quadrado e o apótema de um hexágono regular, inscrito em um círculo de raio R. (Ex.713, p.283)*

<u>Resolução</u>: 1º.) Calculando o apótema do quadrado inscrito numa circunferência:



No ΔABC, temos: $R^2 = {a_4}^2 + {a_4}^2 \Rightarrow a_4 = \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

2º.) Calculando o apótema do hexágono inscrito numa circunferência:



No triângulo ΔABC, temos:

$$R^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + {a_6}^2 \Rightarrow {a_6}^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} \Rightarrow {a_6}^2 = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow {a_6}^2 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, a razão entre o apótema do quadrado e do hexágono inscritos numa circunferência é:

$$\frac{a_4}{a_6} = \frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{\frac{R\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \frac{a_4}{a_6} = \frac{R\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{R\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{a_4}{a_6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

<u>Técnica</u> – Estudo da configuração, aplicação do teorema de pitágoras e semelhança de triângulos.

<u>Quantidade</u>: 3

<u>Tipo 15</u> – Determinar uma relação entre os raios de dois círculos, com seus respectivos polígonos distintos regulares inscritos.

Condição da situação-problema:

- Sabendo que os seus perímetros são iguais.

Exemplo: *Determine a relação entre os raios de dois círculos, sabendo que no primeiro está inscrito um triângulo eqüilátero e no segundo está inscrito um quadrado, e que os perímetros do triângulo e do quadrado são iguais? (Ex.712, p.283)*

<u>Resolução</u>: Sejam R_1 e R_2 os raios dos círculos onde estão inscritos o quadrado e o triângulo eqüilátero, respectivamente. Temos:

$$l_4 = R_1\sqrt{2} \Rightarrow 2p_1 = 4R_1\sqrt{2}$$

$$l_3 = R_2\sqrt{3} \Rightarrow 2p_2 = 3R_2\sqrt{3}$$

$$2p_1 = 2p_2 \Rightarrow 4R_1\sqrt{2} = 3R_2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{4\sqrt{6}}{9}$$

Portanto, a relação entre os raios é $\frac{4\sqrt{6}}{9}$.

<u>Técnica</u> – Aplicação do cálculo do lado de um polígono regular inscrito numa circunferência em função do raio

<u>Quantidade</u>: 1

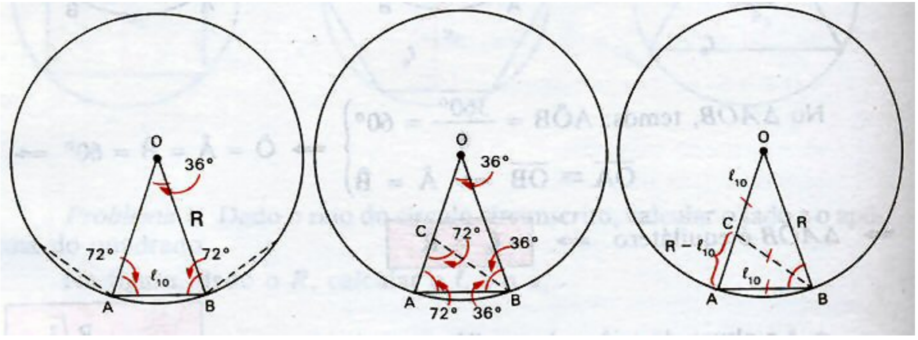
<u>Tipo 16</u> – Deduzir a fórmula que fornece o lado de um polígono regular.

Condição da situação problema:

- A partir de um polígono regular inscrito em um círculo de raio R.

Exemplo: *Deduza a fórmula que dá o lado de decágono regular inscrito em um círculo de raio R. (Ex. 718, p. 284)*

<u>Resolução</u>:



Sendo $\overline{AB} = \ell_{10}$, então $A\hat{O}B = \frac{1}{10}.360^o = 36^o \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 72^o$. Traçando $\overline{BC}$, bissetriz de $\hat{B}$, temos: ΔBAC é isósceles $(\hat{A} = \hat{C} = 72^o) \Rightarrow \overline{BC} = l_{10}$ e ΔCOB é isósceles $(\hat{O} = \hat{B} = 36^o) \Rightarrow \overline{OC} = \overline{BC} = l_{10}$.

Sabendo-se que os triângulos: ΔABC *e* ΔAOB são semelhantes, e que temos: $\overline{BC}$ bissetriz no ΔAOB, temos:

$$\frac{l_{10}}{R} = \frac{R - l_{10}}{l_{10}} \Rightarrow l_{10}^{\ 2} = R(R - l_{10}) \Rightarrow l_{10}^{\ 2} + Rl_{10} - R^2 = 0 \Rightarrow \Rightarrow l_{10} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{-R \pm R\sqrt{5}}{2}$$

Desprezando a solução negativa que não convém, temos que o lado do decágono regular é: $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}R$.

<u>Técnica</u> – Aplicação do teorema da bissetriz interna, fórmula do ângulo central, congruência de triângulos.

<u>Quantidade</u>: 1

<u>Tipo 17</u> – Considerando um polígono regular inscrito numa circunferência de lado l, com suas diagonais traçadas. Determinar:

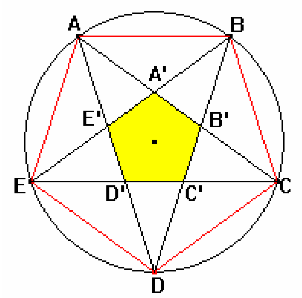
a) O lado;

b) Mostrar que o polígono sombreado é regular.

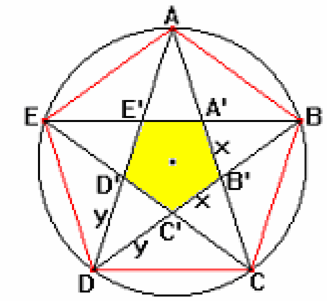
Exemplo: *Na figura temos um pentágono regular de lado l*

a) Mostre que o pentágono sombreado é regular;

b) Determine o lado do pentágono sombreado. (Ex. 732, p. 285)



<u>Resolução</u>: Analisando o pentágono regular inscrito numa circunferência:



a) Os triângulos $A'AB, B'BC, C'CD, D'DE \ e \ E'EA$ são congruentes e isósceles de bases $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE} \ e \ \overline{EA}$. Daí: $\hat{A}' = \hat{B}' = \hat{C}' = \hat{D}' = \hat{E}'$ (1) e, também: $A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = E'A'$ (2). De (1) e (2) $A' = B' = C' = D' = E'$ é pentágono regular.

b) No $\Delta A'B'B$ temos: $x = \frac{y}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (1). Sabendo que, $\overline{BD}$ é diagonal do pentágono regular então $x + 2y = \frac{l}{2}(\sqrt{5} + 1)$ (2) $\Rightarrow y = \frac{l(\sqrt{5} + 1)}{2} - 2x$. Substituindo em (1), obtemos $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} l$.

<u>Técnica</u> – Congruência de triângulos,

<u>Quantidade</u>: 1

✓ **LISTAGEM DAS TAREFAS, COM A RESPECTIVA QUANTIDADE DE EXERCÍCIOS DE CADA UMA DELAS:**

TIPOLOGIA	*QUANTIDADE*
<u>Tipo 2-a)</u> – Determinar o valor de um ângulo em um polígono convexo.	9
<u>Tipo 2-b)</u> – Calcular o valor de um ângulo em um polígono regular convexo.	5
<u>Tipo 6-b)</u> – Determinar o número de diagonais de um polígono regular convexo.	3
<u>Tipo 7-b)</u> – Determinar o número de lados de um polígono regular convexo.	3
<u>Tipo 11</u> – Determinar o número de medidas, duas a duas diferentes, em relação as diagonais de um polígono regular convexo.	9
<u>Tipo 12</u> – Determinar a soma dos ângulos internos de um polígono regular convexo.	3
<u>Tipo 13</u> – Determinar a medida dos elementos (altura, lado, raio R da circunferência circunscrita, raio r da circunferência inscrita, apótema, diagonal maior e diagonal menor), de polígonos regulares convexos, segundo uma configuração dada.	49
<u>Tipo 14</u> – Determinar a razão entre elementos de polígonos regulares convexos.	3
<u>Tipo 15</u> – Determinar uma relação entre os raios de dois círculos, com seus respectivos polígonos distintos regulares inscritos.	1

<u>Tipo 16</u> – Deduzir a fórmula que fornece o lado de um polígono regular.	1
<u>Tipo 17</u> – Considerando um polígono regular inscrito numa circunferência de lado l, com suas diagonais traçadas. Determinar: ▪ **O lado;** ▪ **Mostrar que o polígono sombreado é regular.**	1
TOTAL	**87**

Podemos notar que do total de 87 exercícios, 49 propõe a tarefa para determinar os elementos de um polígono regular, tais como: altura, lado, raio R da circunferência circunscrita, raio r da circunferência inscrita, apótema, diagonal maior e diagonal menor. Também, 14 (Tipos: 2-a e 2-b) do total trata do cálculo de um ângulo em um polígono regular convexo e um polígono convexo. O destaque também se dá ao estudo de diagonais de um polígono, onde é evidenciado em 12 exercícios, encontrando-se nos tipos 6-b e 11.

Portanto, segundo os dados da tabela, a ênfase é dada para o estudo da determinação de elementos de um polígono regular: altura, lado, raio R da circunferência circunscrita, raio r da circunferência inscrita, apótema, diagonal maior e menor, ângulo e diagonais de um polígono regular.

2.3 CONCLUSÃO

Quanto a abordagem identificamos um tratamento sistemático (definição, exemplos, propriedades e teoremas) acompanhado de uma figura que tem por função ilustrar o conteúdo de estudo.

Podemos, com esse estudo, perceber que estes dois capítulos do livro “Geometria Plana; vol. 9” tratam de forma diferenciada o objeto “Polígonos”.

No capítulo (IX), os polígonos são estudados num contexto mais geral, apresentando e explorando seus conceitos e definições.

No capítulo (XVI), o tratamento se dá aos polígonos regulares. O desenvolvimento deste contexto se dá numa intercalação de seis capítulos, depois de ter estudado “Polígonos” (cap. IX). Isso se dá pelo fato de que vários conceitos devem ser estudados para servir de base teórica para o estudo do capítulo em questão.

Convém salientar que o conceito de polígono regular é apresentado no capítulo IX e retomado com maior grau de complexidade e uma maior caracterização no capítulo XVI. Isto nos faz perceber que realmente temos uma abordagem em espiral no contexto do próprio livro.

Com relação aos tipos de tarefas e técnicas de resolução, cabe destacar que identificamos 17 tipos de tarefas em um total de 156 exercícios resolvidos. Entre as tarefas propostas, notamos que a ênfase é dada para o estudo dos elementos dos polígonos.

CAPÍTULO 3

3 Estudo dos Livros Didáticos de 7ª e 8ª Séries

Introdução

Neste capítulo será apresentado o estudo sobre "Polígonos" nos livros didáticos. Usaremos a tipologia de tarefas identificadas no estudo do livro "Geometria Plana", da coleção: "Fundamentos de Matemática Elementar".

Em função da diversidade de tarefas identificadas no estudo dos livros didáticos de 7ª e 8ª séries, fomos acrescentando cada nova tarefa à lista de tarefas anteriormente obtida.

O estudo dos livros didáticos que relatamos neste capítulo tem como objetivo, verificar como vive o objeto "Polígonos" como saber nos livros didáticos de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental. Consideremos neste caso que o saber exposto nos livros didáticos são referência para os professores prepararem as aulas.

Faremos um estudo de quatro livros didáticos, sendo dois a dois pertencentes a mesma coleção. Vejamos:

- GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JR, José Ruy. **Matemática – Pensar e Descobrir: Novo**; 7ª. série. São Paulo: FTD, 2000;
- GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JR, José Ruy. **Matemática – Pensar e Descobrir: Novo**; 8ª. série. São Paulo: FTD, 2000;
- IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática para Todos**; 7ª. Série. São Paulo: Scipione, 2002;
- IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática para Todos**; 8ª. Série. São Paulo: Scipione, 2002.

Escolhemos estes livros em função de sua aprovação na avaliação de MEC e por serem livros muito usados nas escolas.

3.1 Estudo do Livro Didático “Matemática – Pensar e Descobrir[5]– 7ª. Série”

O livro é composto por oito unidades, onde cada um deles se divide em subunidades.

O estudo da geometria é contemplado nas oito unidades[6]. No caso, o estudo dos polígonos tem lugar na unidade quatro: “Introdução ao cálculo algébrico” após a subunidade 16: “Valor Numérico de uma Expressão Algébrica”, sob a rubrica: “Tópicos em Geometria” (p. 103).

3.1.1 A Abordagem

A abordagem é seqüencial, contempla a apresentação da definição e mostra a epistemologia da palavra:

A palavra polígono é formada por dois termos gregos: poli, que significa vários, muitos e gono, que significa ângulos. Assim, polígono é uma figura com “vários ângulos”. (p. 103)

Os exemplos de polígonos, dados para ilustrar a definição, são de polígonos côncavos e convexos, entretanto é anunciado que será trabalhado somente os polígonos convexos.

Os elementos de um polígono: lados, vértices, ângulos internos, ângulos externos e diagonais, são apresentados por meio de figuras ilustrativas, expondo que o número desses elementos que compõe o polígono coincidem.

Destaca em seguida, a nomenclatura dos polígonos em relação ao número de lados. Cabe salientar que, o autor faz destaque ao prefixo utilizado a cada nomenclatura utilizada para um número de lados ($n \geq 3$). Vejamos, para: n = 3 → triângulo (tri = três); n = 4 → quadrilátero (quadri = quatro); n = 5 → pentágono (penta = cinco); n = 6 → hexágono (hexa = seis); n = 7 → heptágono (hepta = sete); n = 8 → octógono (octo = oito); n = 9 → eneágono (enea = nove); n = 10 → decágono (deca = dez); n = 11 → undecágono (undeca = onze); n = 12 → dodecágono (dodeca = doze); n = 15 → pentadecágono (pentadeca = quinze); n = 20 →

[5] **GIOVANNI,** José Ruy e **GIOVANNI JR**, José Ruy; editora FTD, 2000.
[6] Cada unidade do livro contempla um tópico de geometria que não é uma subunidade.

icoságono (icosa = vinte). Assim, os polígonos podem ser designados utilizando a nomenclatura e também representados pelas letras que compõe os vértices.

Trata também da definição de polígonos em figuras espaciais, que são estudados por meio de objetos que encontramos no dia-a-dia, denominando-os de poliedros e mostrando que suas faces são compostas por polígonos.

Uma abordagem em particular é feita para introduzir o estudo com as diagonais, buscando primeiramente verificar o número de diagonais que partem de um só vértice, para então, através de figuras ilustrativas chegar no cálculo do número de diagonais.

No cálculo do número de diagonais, parte de um polígono com número de lados (n≥3), analisando quantas diagonais partem de um só vértice, chegando a uma generalização:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Após uma sessão de exercícios propostos relativo ao que já foi listado, apresenta a definição de perímetro de um polígono: “Nos polígonos, o perímetro indica a medida de seu contorno, ou seja, a soma das medidas de seus lados.” (p.113)

Na seqüência, a definição de polígono regular é apresentada por meio de figuras ilustrativas, deixando claro a congruência de lados e ângulos. Vejamos a definição:

Um polígono é regular quando possui todos os lados congruentes eqüilátero (eqüi = igual, látero = lado) entre si e todos os ângulos internos congruentes entre si (eqüiângulo). (p. 115)

Assim neste livro, a abordagem dos conceitos de polígono e de seus elementos busca realizar um trabalho explorando os conceitos por meio de figuras que ilustram a situação problema.

As faces dos poliedros são trabalhadas por meio de representações concretas de objetos do cotidiano. Isso indica uma tentativa do autor de trabalhar com elementos próximos da vida do aluno, e com a idéia de que a matemática tem uma utilidade social.

3.1.2 ESTUDO DOS EXERCÍCIOS

No estudo dos exercícios usamos como referência a tipologia identificada e descrita no estudo do livro “Geometria Plana”. Quando um novo tipo for identificado, ampliaremos a lista de tipos de tarefas.

O estudo dos exercícios propostos nos levou a identificar as seguintes tarefas:

<u>Tipo 5</u> – Determinar o polígono convexo.

Condições da situação problema:

- A partir do número de lados;
- A partir do número de vértices;
- A partir do número de ângulos externos;
- A partir de um poliedro, identificando as suas faces;
- A partir do número de ângulos internos;
- A partir do número de diagonais dado como um múltiplo do número de lados;
- Aquele que não possui diagonais;
- Sabendo que há um relação entre o número de lados e o número de diagonais;
- Sabendo que o número de diagonais coincide com o número de lados.

<u>Quantidade</u>: 11

<u>Tipo 6-a</u> – Determinar o número de diagonais de um polígono convexo.

Condições da situação problema:

- A partir de polígonos convexos dados;
- Conhecendo a medida do lado e conseqüentemente o seu perímetro.

<u>Quantidade</u>: 10

<u>Tipo 7-a</u> – Determinar o número de lados de um polígono convexo.

Condições da situação problema:

- A partir de polígonos convexos dados;
- Para que ele tenha um número mínimo de lados.

<u>Quantidade</u>: 2

<u>Tipo 13</u> – Determinar a medida dos elementos (altura, lado, raio R da circunferência circunscrita, raio r da circunferência inscrita, apótema, diagonal maior, diagonal menor e diagonal), de polígonos regulares convexos, segundo uma configuração dada:

Condições da situação-problema:

- A partir de polígonos regulares, conhecendo a medida de um dos lados;
- Conhecendo o valor do perímetro e a medida de alguns dos seus lados;
- A partir de polígonos regulares, conhecendo o valor do perímetro;
- A partir de dois polígonos regulares, conhecendo a medida do lado de um deles e a razão entre os perímetros.

<u>Quantidade</u>: 4 – Determinar a medida do lado.

<u>Tipo 18</u> – Determinar num polígono convexo a quantidade de elementos: (vértices, ângulos internos, ângulos externos).

Exemplo: *Quantos ângulos internos possui um decágono?(Ex.38, p.107)*

<u>Resolução</u>: *Sabendo que num polígono o número de ângulo internos é o mesmo que o número de lados, temos que o decágono possui 10 lados, portanto, 10 ângulos internos.*

<u>Técnica</u> – Utilização da dedução de que num polígono, o número de lados é o mesmo que o número de ângulos internos.

<u>Quantidade</u>: 7

<u>Tipo 19</u> – Responder as questões.

Condição da situação problema:

- A partir de questões relacionadas aos conceitos de polígonos.

Exemplo: *O que é diagonal de um polígono? (Ex.40-a, p.111)*

<u>Resolução</u>: *Diagonal de um polígono é o segmento que une dois vértices não consecutivos do polígono.*

<u>Técnica</u> – Utilização da definição de diagonal de um polígono convexo.

<u>Quantidade</u>: 4

<u>Tipo 20</u> – Construir polígonos, segundo uma configuração dada.

Condições da situação problema:

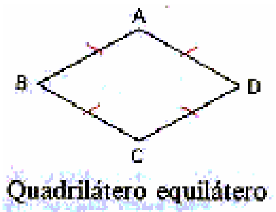
➢ Quadriláteros que sejam:

- Eqüiláteros, mas não-regular;
- Eqüiângulo, mas não-regular;
- Regulares.

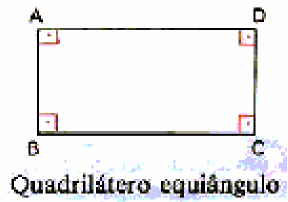
Exemplo: *Para cada item, construa no seu caderno um quadrilátero que seja: a) eqüilátero, mas não-regular; b) eqüiângulo, mas não-regular; c) regular. (Ex.58, p.116)*

<u>Resolução</u>:

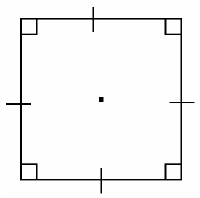
a)



b)



c)



O quadrilátero regular é o quadrado

<u>Técnica</u> – Utilização da definição: de polígono eqüilátero, eqüiângulo e regular.

<u>Quantidade</u>: 1

<u>Tipo 21</u> – Demonstrar que a fórmula da diagonal $d = \frac{n(n-3)}{2}$, para o cálculo do número de diagonais de um polígono, também é válida para um referido polígono convexo.

Exemplo: *Demonstre que a fórmula $d = \frac{n(n-3)}{2}$, para o cálculo de diagonais de um polígono, também é válida para o triângulo.(Ex.47, p.112)*

<u>Resolução</u>: *Temos que o triângulo possui três lados (n = 3).*

Então, $d = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow d = \frac{3(3-3)}{2} \Rightarrow d = 0$. *Portanto, mesmo o triângulo não possuindo diagonais, a fórmula do cálculo de diagonais também é válida para o triângulo.*

<u>Técnica</u> – Utilização do cálculo do número de diagonais.

<u>Quantidade</u>: 1

Tipo 22 – Determinar o perímetro de um polígono:

a) Convexo

Condições da situação problema:

- A partir de situações-problema, envolvendo o contexto do cotidiano;
- A partir de polígonos convexos dados.

Exemplo: *Numa sala retangular, devem ser colocados ladrilhos quadrados. Verificou-se que o comprimento da sala é igual ao comprimento de 45 ladrilhos, enquanto a largura da sala é igual à largura de 22 ladrilhos. Sabendo que o lado de cada ladrilho equivale a 1 unidade de comprimento, determine o perímetro dessa sala.(Ex.48, p.113)*

Resolução:

Sabendo que cada ladrilho equivale a 1 unidade de comprimento ao quadrado, então, calculando o perímetro da sala retangular:

$2p = 45 + 45 + 22 + 22 \Rightarrow 2p = 134$ u.c.

Portanto, o perímetro dessa sala mede 134 unidades de comprimento.

Técnica – Utilização do conceito de área de figura plana e perímetro.

b) Regular convexo

Condições da situação problema:

- A partir de polígonos regulares convexos dados;
- Generalizando para qualquer polígono regular convexo.

Exemplo: *Em um pentágono regular, um dos lados mede 4,3 cm. Determine: b) O perímetro do pentágono. (Ex. 59-b, p. 116)*

Resolução: *Sabendo que, um dos lados mede 4,3 cm, então em um polígono regular todos os lados também medirão 4,3 cm. Portanto, a medida do perímetro é:*

$2p = 5 \times 4{,}3 \Rightarrow 2p = 21{,}5$ cm

Técnica – Utilização do conceito de polígono regular e perímetro.

Quantidade: 11

<u>Tipo 23</u> – Determinar medida do lado de um polígono convexo.

Condição da situação problema:

- Conhecendo o valor do perímetro e uma relação entre os lados.

Exemplo: *As medidas dos três lados de um triângulo são dadas por 3 números inteiros e consecutivos. Sabendo que o perímetro desse triângulo é 132 cm, quais as medidas dos 3 lados desse triângulo?(Ex. 56, p. 115)*

<u>Resolução</u>: *Conhecendo a medida do perímetro e sabendo que a medida dos lados do triângulo são dados por 3 números consecutivos, temos:*

$2p = x + x + 1 + x + 2 \Rightarrow 132 = 3x + 3 \Rightarrow 3x = 129 \Rightarrow x = 43$. *Portanto, cada um dos lados do triângulo mede: 43 cm, 44 cm e 45 cm.*

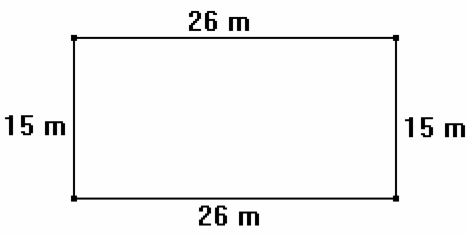
<u>Técnica</u> – Conceito de perímetro.

<u>Quantidade</u>: 1

<u>Tipo 24</u> – Determinar a quantidade de tijolos ou metragens de tela, necessários para executar uma determinada obra.

Exemplo: *Um terreno de forma retangular tem 15 m de frente por 26 m de lateral. Para murar totalmente o contorno desse terreno, quantos tijolos serão necessários, se para cada metro desse muro são usados 40 tijolos? Supondo que o pedreiro precise de 10% a mais de tijolo, para compensar eventuais quebras e tijolos defeituosos, quantos tijolos devem ser comprados? (Ex. 51, p. 114)*

<u>Resolução</u>:



Temos que, o terreno possui 82 m de perímetro. Sabemos que, para cada metro do muro são utilizados 40 tijolos, portanto:

1 m -------- 40 tijolos

82 m ------- x $\Rightarrow$ *x = 3 280 tijolos*

E, supondo que o pedreiro precise de 10% a mais de tijolos para eventuais quebras, temos:

$3\,280 \cdot \frac{10}{100} = 328$ *tijolos a mais.*

Portanto, devem ser comprados 3 280 + 328 = 3 608 tijolos.

<u>Técnica</u> – Utilização do conceito de perímetro e porcentagem.

<u>Quantidade</u>: 2

✓ **LISTAGEM DAS TAREFAS, COM A RESPECTIVA QUANTIDADE DE EXERCÍCIOS DE CADA UMA DELAS:**

TIPOLOGIA	*QUANTIDADE*
Tipo 5 – Determinar o polígono convexo.	11
Tipo 6-a) – Determinar o número de diagonais de um polígono convexo.	10
Tipo 7-a) – Determinar o número de lados de um polígono convexo.	2
Tipo 13 – Determinar a medida dos elementos (altura, lado, raio R da circunferência circunscrita, raio r da circunferência inscrita, apótema, diagonal maior, diagonal menor e diagonal), de polígonos regulares convexos, segundo uma configuração dada.	4
Tipo 18 – Determinar num polígono convexo a quantidade de elementos: (vértices, ângulos internos, ângulos externos).	7
Tipo 19 – Responder as questões.	4
Tipo 20 – Construir polígonos, segundo uma configuração dada.	3
Tipo 21 – Demonstrar que a fórmula da diagonal $d = \frac{n(n-3)}{2}$ **, para o cálculo do número de diagonais de um polígono, também é válida para um referido polígono convexo.**	1
Tipo 22 – Determinar o perímetro de um polígono: **a) Convexo;** **b) Regular Convexo.**	12
Tipo 23 – Determinar medida do lado de um polígono convexo.	1

<u>Tipo 24</u> – Determinar a quantidade de tijolos ou metragem de tela, necessários para executar uma determinada obra.	2
TOTAL	**55**

Segundo a disposição dos dados na tabela, percebemos que a ênfase é dada no estudo de perímetro de um polígono, onde 12 exercícios do total os envolvem (Tipo 22). Também, 11 exercícios (Tipo 5) de 55, tratam da determinação de polígonos convexos. Notemos também que, 10 exercícios (Tipo 6-a) envolvem a determinação de diagonais de um polígono convexo, 7 exercícios (Tipo 18) tratam da determinação da quantidade de elementos que há em um polígono convexo e 5 exercícios (Tipos 13 e 23) envolvem a problemática da determinação da medida do lado de um polígono.

Portanto, notemos que a ênfase é dada no estudo de: perímetro, determinação de polígonos convexos por meio da utilização de sua nomenclatura, quantidade de elementos, diagonais e lados.

3.2 Estudo do Livro Didático “Matemática – Pensar e Descobrir – 8ª Série”

O livro a ser estudado é composto por sete unidades, onde cada um deles se divide em subunidades.

Pertence à mesma coleção do livro que fizemos o estudo anteriormente (7ª série). O estudo da geometria apresenta-se em tópicos após estar titulada as unidades.

O estudo dos polígonos regulares encontra-se na unidade seis: “Função Polinomial do 1º grau”, no tópico 28: “Zero da função polinomial do 1º grau”, sob a rubrica “Tópicos de Geometria” (p. 266).

3.2.1 A Abordagem

A abordagem desse livro busca explorar os conteúdos relativos a “Polígonos Regulares Inscritos na Circunferência” por meio de figuras que ilustram a situação problema, isto é, o autor propõe atividades que conduz o aluno a descobrir resultados teóricos e a formular os conceitos envolvidos.

Assim, a fim de tornar significativo o aprendizado, o conteúdo é introduzido sob a rubrica: “Pense e Descubra”. O autor explora o conceito de polígonos regulares por meio da construção dos mesmos, dando ênfase a três polígonos regulares inscritos numa circunferência: triângulo eqüilátero, quadrado e hexágono regular.

Essa construção, parte de uma circunferência, que é dividida em n arcos congruentes. Unindo-se os pontos dessa divisão, obtêm-se cordas consecutivas e partir daí polígonos regulares inscritos numa circunferência.

Na seqüência, os elementos de um polígono regular inscrito são listados acompanhados de figuras que tem por função ilustrar a informação teórica designando e representando os seguintes elementos: raio do polígono regular, ângulo central, ângulos internos e apótema.

Trata em particular, das propriedades[7] dos polígonos regulares inscritos, seguido de exemplos complementares.

As "Relações Métricas em Polígonos Regulares" são colocadas em evidência pelo autor, fazendo uso de figuras para ilustrar os dados e para fazer deduções de resultados teóricos como o caso da dedução do lado (l) e apótema (a) em função do raio da circunferência.

Essas relações são trabalhadas em três polígonos regulares: quadrado, hexágono regular e triângulo eqüilátero.

Para cada polígono regular inscrito, a dedução da fórmula do lado e do apótema é feita através do Teorema de Pitágoras e por uma relação trigonométrica.

3.2.2 ESTUDO DOS EXERCÍCIOS

Tarefas identificadas nos exercícios propostos:

<u>Tipo 3</u> – Determinar a medida do ângulo interno de um polígono regular convexo.

---

[7] Propriedades:

1ª.) Em dois polígonos regulares inscritos e com o mesmo número de lados, os perímetros são proporcionais aos comprimentos dos respectivos raios.

2º.) Em dois polígonos regulares inscritos e com o mesmo número de lados, os perímetros são proporcionais aos comprimentos dos respectivos lados.

3ª.) Em dois polígonos regulares inscritos e com o mesmo número de lados, os perímetros são proporcionais aos comprimentos dos respectivos apótemas. (p. 268)

Condição da situação-problema:

- Polígono regular inscrito numa circunferência.

Tipos de polígonos apresentados: Triângulo eqüilátero, quadrado, hexágono regular e vários outros polígonos que o número de lados são seus múltiplos.

Quantidade: 6

Tipo 13 – Determinar a medida dos elementos (altura, lado, raio R da circunferência circunscrita, raio r da circunferência inscrita, apótema, diagonal maior, diagonal menor e diagonal), de polígonos regulares convexos, segundo uma configuração dada:

Condições da situação-problema:

- A partir de polígonos regulares distintos e inscritos em circunferências distintas, possuindo o mesmo número de lados;
- A partir de dois polígonos regulares, conhecendo a razão entre as medidas dos lados destes, o perímetro de um deles e sabendo que um deles está inscrito numa circunferência;
- A partir de uma situação-problema envolvendo um contexto do cotidiano, dado um polígono regular inscrito numa circunferência, conhecendo a soma das medidas dos apótemas;
- Dado um polígono regular inscrito numa circunferência, conhecendo a medida do lado;
- A partir de dois polígonos regulares com o mesmo número de lados, porém distintos, conhecendo as medidas dos perímetros e a medida do lado de um deles;
- A partir de polígonos regulares inscritos em circunferências distintas possuindo o mesmo número de lados;
- Determinar a medida do segmento que passa pelo centro de uma circunferência e divide os respectivos lados do polígono regular que está inscrito nela, ao meio, conhecendo a medida do raio.

Quantidade: 6 – Determinar o raio;
1 – Determinar a medida do lado;
2 – Determinar a medida do apótema.

Total: 9

Tipo 14 – Determinar a razão entre os elementos de polígonos regulares convexos.

Condição da situação-problema:

- A partir de um polígono regular: inscrito e circunscrito numa mesma circunferência, conhecendo a medida do raio.

<u>Quantidade</u>: 1

<u>Tipo 22-b</u> – Determinar o perímetro de um polígono regular convexo.

Condições da situação-problema:

- A partir de polígonos regulares inscritos em circunferências distintas, possuindo o mesmo número de lados, porém distintos;
- A partir de uma situação-problema envolvendo o contexto do cotidiano, dado um polígono regular inscrito numa circunferência e conhecendo a medida do diâmetro da circunferência;
- A partir de um polígono regular inscrito numa circunferência, conhecendo a medida do apótema.

<u>Quantidade</u>: 3

<u>Tipo 25</u> – Determinar a medida do ângulo central de um polígono regular.

Condição da situação-problema:

- A partir de um polígono regular inscrito numa circunferência.

Exemplo: *Determine a medida do ângulo central de cada um dos seguintes polígonos inscritos:*

a) Triângulo eqüilátero *b) Quadrado* *c) Hexágono regular*

d) Octógono regular *e) Decágono regular* *f) Dodecágono regular*

(Ex.44, p.268)

<u>Resolução</u>: *a) Triângulo eqüilátero:* $a_c = \frac{360^o}{n} \Rightarrow a_c = \frac{360^o}{3} \Rightarrow a_c = 120^o$.

<u>OBS</u>*: A resolução dos outros exercícios seguem da mesma forma, isto é, fazendo a utilização da fórmula.*

<u>Técnica</u> – Utilização da fórmula do ângulo central.

<u>Quantidade</u>: 6

<u>Tipo 26</u> – Determinar a soma da medida do lado com a medida do apótema.

Condição da situação-problema:

- A partir de um polígono regular inscrito numa circunferência, conhecendo a medida do raio.

***Exemplo**: Um triângulo eqüilátero está inscrito numa circunferência de raio 14 cm. Determine, em centímetros, a soma da medida do lado com a medida do apótema do triângulo. (Considere $\sqrt{3}$ = 1,73) (Ex. 50, p. 271)*

***<u>Resolução</u>:** Sabemos que o raio possui medida igual a 14 cm. Portanto, podemos calcular a medida do lado e do apótema do triângulo eqüilátero:*

$l = r\sqrt{3} \Rightarrow l = 14\sqrt{3}\ cm$ *e* $a = \frac{r}{2} \Rightarrow a = \frac{14}{2} \Rightarrow a = 7\ cm$. *Assim, temos que a soma da medida do lado com a medida do apótema é:*

$S = 14\sqrt{3} + 7 \Rightarrow S = 14{,}3.1{,}73 + 7 \Rightarrow S = 24{,}22 + 7 \Rightarrow S = 31{,}22$

<u>Técnica</u> – Utilização da fórmula do lado e apótema de um triângulo eqüilátero em função do raio.

<u>Quantidade</u>: 1

<u>Tipo 27</u> – Calcular a área de um polígono regular.

Condição da situação-problema:

- A partir de um polígono regular convexo inscrito numa circunferência, conhecendo o comprimento da circunferência;
- A partir de um polígono regular inscrito numa circunferência, sabendo que a medida da diagonal de um referido polígono convexo, corresponde ao raio da circunferência.

***Exemplo:** (Faap – SP) Um quadrado de lado x está inscrito numa circunferência cujo comprimento é 62,8 cm. Considerando* $\pi = 3{,}14$*, calcule a área do quadrado. (Ex. 51, p. 271)*

***<u>Resolução</u>:** Conhecendo a medida do comprimento da circunferência, podemos encontrar o valor do raio da circunferência:* $C = 2\pi r \Rightarrow 62{,}8 = 2.3{,}14.r \Rightarrow 62{,}8 = 6{,}28r \Rightarrow r = 10\ cm$. *Sabendo o valor do raio do quadrado inscrito, podemos encontrar o valor do lado:* $l = r\sqrt{2} \Rightarrow l = 10\sqrt{2}\ cm$. *Portanto, a área do quadrado inscrito é dada por:* $A = l.l \Rightarrow A = 10\sqrt{2}.10\sqrt{2} \Rightarrow A = 200\ cm^2$.

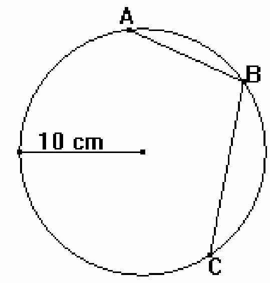
<u>Técnica</u> – Utilização da fórmula do comprimento da circunferência, lado do quadrado inscrito numa circunferência e área.

<u>Quantidade</u>: 3

<u>Tipo 28</u> – Determinar a distância entre dois vértices não consecutivos em uma circunferência.

Condição da situação-problema:

- Dado dois lados distintos de polígonos regulares inscritos numa mesma circunferência, conhecendo a medida do raio.



Exemplo: *Na figura, o segmento* $\overline{AB}$ *corresponde ao lado de um hexágono regular inscrito, enquanto o segmento* $\overline{BC}$ *corresponde ao lado de um quadrado inscrito. Considerando* $\sqrt{2} = 1{,}41$*, qual é a distância que se percorre, indo em linha reta, de A até C, passando por B? (Ex. 52, p. 271)*

<u>Resolução</u>: *Sabemos que:* $\overline{AB} = l_6, \overline{BC} = l_4$*, r = 10 cm.*

Calculando o lado do quadrado: $l_4 = r\sqrt{2} \Rightarrow l_4 = 10\sqrt{2} \Rightarrow l_4 = 10.1{,}41 \Rightarrow l_4 = 14{,}1\ cm$.

Calculando o lado do hexágono: $l_6 = r \Rightarrow l_6 = 10\ cm$.

Portanto, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \Rightarrow \overline{AC} = 14{,}1 + 10 \Rightarrow \overline{AC} = 24{,}1\ cm$

<u>Técnica</u> – Utilização da fórmula do lado do quadrado e do hexágono regular inscritos em uma circunferência.

<u>Quantidade</u>: 1

<u>Tipo 29</u> – Determinar o comprimento de uma circunferência.

Condições da situação-problema:

- A partir de uma situação-problema, envolvendo o contexto do cotidiano, dado um polígono regular inscrito numa circunferência, conhecendo o valor do diâmetro da circunferência;
- A partir de dois polígonos regulares inscritos na mesma circunferência, conhecendo a soma das medidas dos apótemas;
- A partir de uma situação-problema, envolvendo o contexto do cotidiano, conhecendo a medida do raio e o número de voltas.

Exemplo: *Um terreno circular tem 40 m de diâmetro. Nesse terreno, um paisagista construiu um jardim e um passeio de pedras com a forma de um hexágono regular inscrito no terreno.*

a) Qual é o comprimento do contorno do terreno? (Ex. 57-a, p. 271)

Resolução: *Conhecendo a medida do diâmetro, podemos saber a medida do raio. Assim,* $d = 2.r \Rightarrow 40 = 2.r \Rightarrow r = 20$ *m. Portanto, o comprimento do contorno do terreno é:*

$C = 2\pi r \Rightarrow C = 2.3{,}14.20 \Rightarrow C = 125{,}6\ m$.

Técnica – Utilização da fórmula do comprimento da circunferência.

Quantidade: 3

Tipo 30 – Determinar o arco de uma circunferência.

Condição da situação-problema:

- Envolvendo o contexto do cotidiano, conhecendo a medida do ângulo e o comprimento do pêndulo de um relógio.

Exemplo: *O pêndulo de um relógio tem 60 cm de comprimento e seu ângulo de oscilação é de 9º. O comprimento do arco descrito pela extremidade do pêndulo é: a) 9,42 cm b) 94,2 cm c) 4,71 cm d) 47,1 cm e) 18,84 cm. (Ex. 3 da auto-avaliação, p. 272)*

Resolução: *Conhecendo a medida do raio (pêndulo do relógio) e seu ângulo de oscilação, podemos encontrar o comprimento do arco, por:*

360º ------- 2πr

9º -------- x $\Rightarrow$ *360.x = 1080* $\Rightarrow$ *x = 9,42. Portanto, o arco descrito pela extremidade do pêndulo mede: 9, 42 cm.*

Técnica – Utilização do conceito do comprimento de uma circunferência.

Quantidade: 1

✓ **LISTAGEM DAS TAREFAS, COM A RESPECTIVA QUANTIDADE DE EXERCÍCIOS DE CADA UMA DELAS:**

TIPOLOGIA	*QUANTIDADE*
Tipo 3 – Determinar a medida do ângulo interno de um polígono regular convexo.	6
Tipo 13 – Determinar a medida dos elementos (altura, lado, raio R da circunferência circunscrita, raio r da circunferência inscrita, apótema, diagonal maior,	9

diagonal menor e diagonal), de polígonos regulares convexos, segundo uma configuração dada.	
Tipo 14 – Determinar a razão entre os elementos de polígonos regulares convexos.	1
Tipo 22-b – Determinar o perímetro de um polígono regular convexo.	3
Tipo 25 – Determinar a medida do ângulo central de um polígono regular convexo.	6
Tipo 26 – Determinar a soma da medida do lado com a medida do apótema.	1
Tipo 27 – Calcular a área de um polígono regular convexo.	3
Tipo 28 – Determinar a distância entre dois vértices não consecutivos em uma circunferência.	1
Tipo 29 – Determinar o comprimento de uma circunferência.	3
Tipo 30 – Determinar o arco de uma circunferência.	1
TOTAL	**37**

Como podemos notar neste capítulo, a ênfase é dada ao estudo dos elementos de um polígono regular convexo, pois 9 exercícios (Tipo 13) de 37 os envolvem. O tratamento também é dado à medida do ângulo central de um polígono regular inscrito numa circunferência, pois 6 exercícios (Tipo 25) do total os envolvem. Outro ponto importante no estudo deste capítulo é relativo a ângulo interno de um polígono regular convexo, pois 6 (Tipo 3) do total contemplam este tipo.

Portanto, podemos afirmar que os exercícios estudados se centram mais precisamente na determinação de elementos de um polígono regular convexo.

3.3 CONCLUSÃO

No estudo feito dos livros didáticos de 7ª e 8ª séries da Coleção “Matemática – Pensar e Descobrir”, concluímos que na 7ª série estuda-se polígonos num contexto mais geral, ou seja, o estudo é feito a partir de suas definições e elementos, enquanto que na 8ª série o estudo é particularizado para o estudo de polígonos regulares.

Devemos ressaltar que na abordagem de 7ª série o conceito de polígono regular é apresentado, e retomado na 8ª série de modo particularizado, ou seja, estuda os elementos e explicita as deduções do cálculo do lado e apótema em função do raio nos polígonos regulares: quadrado, hexágono regular e triângulo eqüilátero.

Nos contextos apresentados destes dois livros, a ilustração de figuras apresenta-se como ponto crucial, para que o aluno receba a informação teórica e consiga chegar a formulação de um determinado conceito.

Portanto, estas abordagens relacionam-se com o conteúdo estudado no livro “Geometria Plana; vol. 9”, ou seja, o capítulo IX corresponde à 7ª série e o capítulo XVI à 8ª série. Com isso, percebemos que ocorre uma transferência do livro “Geometria Plana” para o ensino.

Quanto aos tipos de tarefas, identificamos nesta coleção (7ª e 8ª série) um total de 18 tarefas, das quais, apenas duas são comuns (Tipos 22-b e 13) nos dois livros didáticos. Isto nos mostra a não repetição do estudo nas duas séries.

Com relação ao livro “Geometria Plana”, o livro de 7ª série propõe 11 tarefas e o livro “Geometria Plana” propõe 17 tarefas, onde somente 4 são as mesmas (Tipos: 5, 6-a, 7-a e 13).

O livro de 8ª série propõe 10 tarefas, das quais 3 são contempladas já no livro “Geometria Plana” (Tipos: 3, 13 e 14).

Segundo estes dados, notamos uma diferença significativa na organização matemática dos livros didáticos de 7ª e 8ª séries se comparados com o livro de “Geometria Plana”, pois poucos são os tipos de tarefas comuns existentes. Portanto, notamos uma semelhança entre as abordagens propostas no livro “Geometria Plana” em relação aos livros didáticos, ou seja, nas organizações didáticas. Notamos também uma diferença entre as tipologias de tarefas propostas, ou seja, na organização matemática.

Cabe salientar que os exercícios que envolvem situações do cotidiano só foram identificados nos livros didáticos.

3.4 Estudo do Livro Didático “Matemática para Todos[8] – 7ª. Série”

O livro é composto por 14 capítulos, dos quais o estudo dos polígonos possui seu lugar assegurado no capítulo 6: “Ângulos, paralelas e polígonos”, sob a rubrica “Soma dos ângulos internos de um polígono” (p. 98).

3.4.1 A Abordagem

A abordagem é explorada por meio de uma aprendizagem por descoberta, ou seja, o autor na maioria das vezes não explicita os conceitos que deverão ser aprendidos, mas fornece problemas, exemplos e exercícios que levam o aluno a trabalhar e a elaborar o conhecimento aplicando o raciocínio lógico e dedutivo.

Neste livro, o estudo dos polígonos é iniciado a partir da soma dos ângulos internos de um polígono, considerando como conhecimentos prévios, o paralelismo e a soma dos ângulos internos de um triângulo, os quais servirão de base teórica para a construção e formulação do conceito.

O autor parte de casos particulares de polígonos convexos. Para descobrir a soma dos ângulos internos, traça-se diagonais que partem de um só vértice de um polígono, com isso forma-se triângulos para então verificar e calcular a soma dos ângulos internos.

A partir destes casos particulares, faz-se com que o aluno descubra quanto mede a soma dos ângulos internos de outros polígonos, explorando a situação: “Que cálculos devemos fazer para encontrar a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono qualquer de n lados? (p. 100)”. Devemos ressaltar que a partir dos exercícios propostos é que a ressalva é trabalhada até que o aluno tenha plena compreensão e entendimento do conceito a que se quer chegar.

Outros conceitos são trabalhados nos exercícios propostos, tais como: ângulos externos, ângulos internos e polígonos regulares.

Após uma sessão de exercícios, os polígonos são estudados mediante uma classificação: figuras planas e não-planas. O autor denota os polígonos como figuras planas bidimensionais, por estarem contidas num plano, mas não explicita o seu conceito, deixando isto como tarefa para o aluno refletir.

---

[8] IMENES, Luiz Macio; LELLIS, Marcelo; editora Scipione, 2002.

Ainda, por meio de figuras, cuja função na situação é ilustrar, faz-se a diferença daquelas que são polígonos e não-polígonos.

Também o critério de classificação quanto ao número de lados com a respectiva nomenclatura é explicitado.

Na seqüência, a definição de polígono regular é apresentada por meio de figuras ilustrativas, onde é explícito claramente a distinção entre polígonos: eqüiláteros e não-eqüiláteros e eqüiângulos e não-eqüiângulos. Por fim, a conclusão de que polígonos regulares são eqüiláteros e eqüiângulos é colocada em evidência.

Por fim, por meio de diagramas, trata dos polígonos como um conjunto universo, os polígonos eqüiláteros e eqüiângulos como os seus subconjuntos e os polígonos regulares como sendo a intersecção desses dois subconjuntos.

Portanto, os conceitos trabalhados nesta série são: soma dos ângulos internos de um polígono, diagonais, ângulo externo e ângulo interno de um polígono regular convexo, nomenclatura e definição de: polígono regular, eqüilátero e não eqüilátero, eqüiângulo e não-eqüiângulo.

3.4.2 ESTUDO DOS EXERCÍCIOS

Tarefas identificadas nos exercícios propostos:

Tipo 1 – Determinar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo.

Condições da situação-problema:

- A partir de um polígono convexo, onde suas diagonais que partem de um só vértice já estão traçadas;
- Resolver, dividindo o polígono convexo em triângulos, a partir da construção das diagonais que partem de um só vértice;
- Dado o número de lados, resolver sem a utilização da fórmula;
- Dado o número de lados, resolver com a utilização da fórmula.

Quantidade: 11

Tipo 2-b – Calcular o valor de um ângulo em um polígono regular convexo.

Condição da situação-problema:

- A partir de uma configuração, formada por polígonos regulares (polígonos regulares que não se encaixam perfeitamente).

Quantidade: 1

Tipo 3 – Determinar a medida do ângulo interno de um polígono regular convexo.

Condição da situação-problema:

- A partir do número de lados.

Quantidade: 2

Tipo 4 – Determinar o ângulo externo de um polígono regular convexo.

Condição da situação-problema:

- A partir do número de lados.

Quantidade: 6

<u>Tipo 7-b</u> – Determinar o número de lados de um polígono regular convexo.

Condições da situação problema:

- Dada a medida do ângulo externo;
- Dada a medida do ângulo interno.

<u>Quantidade</u>: 2

<u>Tipo 31</u> – Determinar o número de triângulos formados pelas diagonais que partem de um só vértice em um polígono convexo.

Condição da situação-problema:

- A partir do número de lados.

Exemplo: *Dividindo polígonos em triângulos (como no exercício anterior), pode-se obter sempre a soma das medidas de seus ângulos. Usando essa idéia, copie e complete a tabela em seu caderno.*

Atenção: *n é o número de lados do polígono, t é o número de triângulos e s é a soma das medidas dos ângulos. (Ex. 34, p. 100)*

n	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***
t	*1*	*2*	*////////*	*////////*	*////////*	*////////*
s	*180º.*	*360º.*	*540º.*	*720º.*	*900º.*	*1080º.*

<u>Resolução</u>: *Verificando o número de lados dos polígonos em questão, podemos fazer um esboço para cada caso traçando as diagonais que partem de um só vértice, e assim observar quantos triângulos foram formados. Vejamos:*

Para n = 5 → *t = 3;*

Para n = 6 → *t = 4;*

Para n = 7 → *t = 5;*

Para n = 8 → *t = 6.*

<u>Técnica</u> – Traçar diagonais que partem de um só vértice em um polígono convexo.

<u>Quantidade</u>: 4

<u>**Tipo 32**</u> **– Identificar entre várias fórmulas dadas qual é verdadeira.**

Condição da situação-problema:

- Em relação a fórmula da soma das medidas dos ângulos de um polígono de n lados.

<u>**OBS**</u>**:** A estratégia de resolução proposta no exercício encaminha para o estudo de uma regularidade trabalhado no exercício anterior. A solução esperada é conseqüência de uma conjectura.

Exemplo: *Faça o que se pede: [...] b) Imagine agora um polígono de n lados. Diga qual destas fórmulas dá a soma das medidas dos ângulos:*

$S = 180^{o} . n - 2$ $\qquad$ $S = 180^{o} - 2.n$ $\qquad$ $S = 180^{o}. n$ $\qquad$ $S = (n - 2).180^{o}$

(Ex. 35, p. 100)

<u>***Resolução***</u>***:*** *Verificando a resolução do exercício anterior (ex. 34), podemos deduzir que a fórmula que se enquadra na soma dos ângulos internos de um polígono é:* $S = (n - 2). 180^{o}$.

<u>**Técnica**</u> **–** Dedução de que, em um polígono convexo, podemos traçar (n – 2) diagonais partindo de um de seus vértices, conseqüentemente formaremos triângulos, onde a soma dos seus ângulos internos medem 180º.

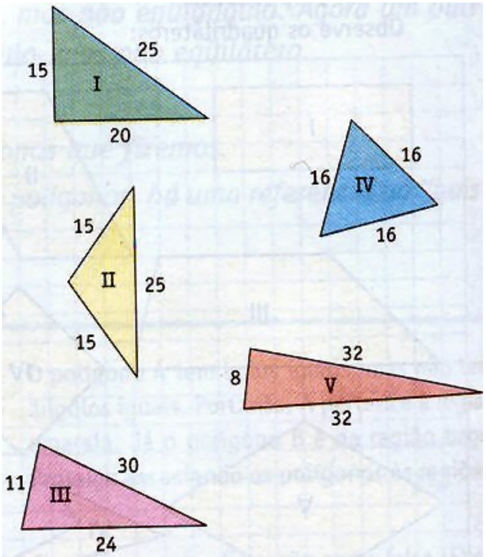
<u>**Quantidade**</u>**:** 1

<u>**Tipo 33**</u> **– Classificar os polígonos convexos.**

Condições da situação-problema:

- Perante condições dadas que envolvem o conceito de polígonos: regulares, eqüiláteros e não-eqüiláteros, eqüiângulos e não-eqüiângulos;
- Em triângulos quaisquer, quanto aos seus lados.

Exemplo: *Observe os triângulos (medidas em mm):*



No caderno, copie e complete a tabela:

	I	*II*	*III*	*IV*	*V*
Eqüilátero	*não*	*///////*	*///////*	*///////*	*não*
Isósceles	*///////*	*///////*	*///////*	*sim*	*///////*
Escaleno	*///////*	*não*	*///////*	*///////*	*///////*

(Ex. 54, p. 108)

Resolução: *A tabela a seguir mostra as respectivas respostas, a partir de espaços não preenchidos, vejamos:*

	I	*II*	*III*	*IV*	*V*
Eqüilátero	*Não*	*não*	*não*	*sim*	*não*
Isósceles	*Não*	*sim*	*não*	*sim*	*sim*
Escaleno	*Sim*	*não*	*sim*	*não*	*não*

Técnica – Classificação de triângulos quaisquer quanto os seus lados.

Quantidade: 2

Tipo 34 – Verificar se uma afirmação, referente a caracterização de polígonos, é verdadeira ou falsa.

Condições da situação-problema:

- Perante afirmações que envolvem o conceito de polígonos: regulares, não-regulares, eqüiláteros e eqüiângulos;
- A partir de afirmações que envolvem os conceitos de tipos de quadriláteros;
- Perante afirmações que envolvem a classificação de triângulos em relação aos seus lados.

***Exemplo**: Classifique cada afirmação como falsa (F) ou verdadeira (V):*

a) Todo polígono eqüilátero é obrigatoriamente eqüiângulo.

b) Um polígono eqüilátero pode ser também eqüiângulo.

c) Todo polígono eqüiângulo é regular.

d) Todo polígono regular é eqüiângulo.

e) Um polígono não-regular pode ter os lados iguais.

f) Um polígono não-regular pode ter todos os lados iguais e todos os ângulos iguais. (Ex. 46, p. 106)

***Resolução:** Itens com as respectivas respostas: a) F; b) V; c) F; d) V; e) V; f) F.*

Técnica – Utilização do conceito de: polígono regular, eqüilátero e eqüiângulo.

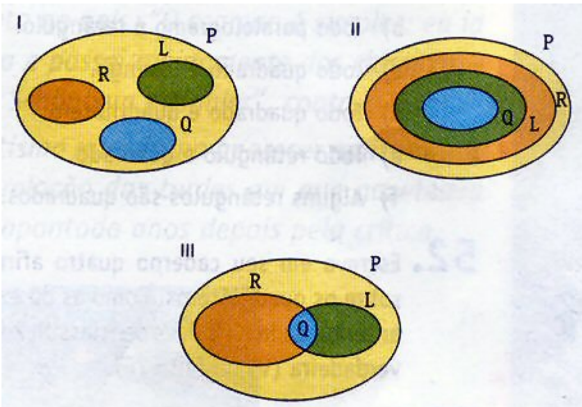
Quantidade: 5

Tipo 35 – Identificar um diagrama correto.

Condição da situação-problema:

- Sendo dados: região dos paralelogramos, região dos losangos, região dos retângulos e a região dos quadrados.

***Exemplo**: Sejam P a região dos paralelogramos, L a região dos losangos, R a região dos retângulos e Q a região dos quadrados. De acordo com as definições apresentadas no problema anterior (Ex. 47), qual é o diagrama correto? Explique sua resposta.*



(Ex. 48, p. 107)

***Resolução:** A alternativa correta é a III.*

Neste diagrama, temos o conjunto universo como sendo dos paralelogramos (são quadriláteros que possuem dois pares de lados opostos paralelos), possuindo como subconjuntos: losangos (são paralelogramos que possuem lados iguais), retângulos (são paralelogramos que possuem ângulos retos) e quadrados (são paralelogramos que possuem ângulos retos e seus lados iguais), onde o quadrado é a intersecção dos losangos e dos quadrados.

<u>Técnica</u> – Utilização dos conceitos dos tipos de quadriláteros.

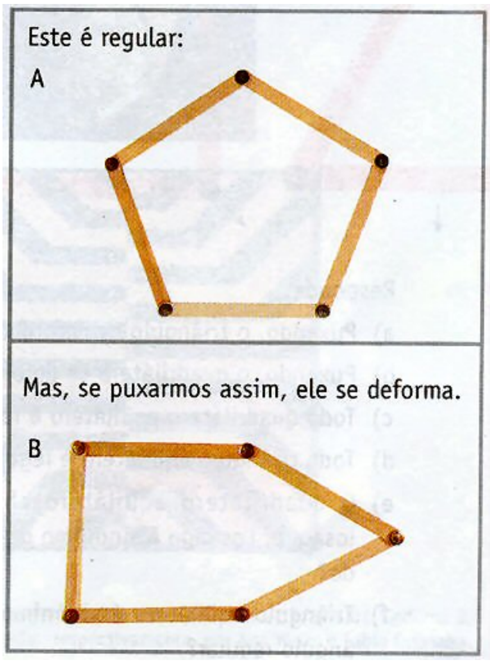
<u>Quantidade</u>: 1

<u>Tipo 36</u> – Estudar as características de um polígono particular.

Condição da situação-problema:

- A partir de polígonos convexos (pentágono, triângulo e quadrado) construídos com palitos de picolé e percevejo.

Exemplo: *Pode-se construir um pentágono com palitos de picolé e percevejos:*



Responda:

a) *O pentágono A é eqüilátero?*
b) *O pentágono B tem todos os lados iguais?*
c) *O pentágono B é regular?*
d) *Um pentágono pode ser eqüilátero, mas não eqüiângulo?*
e) *Todo pentágono regular é eqüilátero?*

f) Todo pentágono eqüilátero é regular? (Ex. 50, p. 107)

Resolução: *Itens com as respectivas respostas: a) Sim; b) Sim; c) Não, pois deixa de ser regular, pois seus ângulos internos possuem medidas diferentes; d) Sim; e) Sim; f) Não, pois para um polígono ser regular, deve possuir lados e ângulos congruentes e neste item apenas está relevando o fato de ser eqüilátero.*

Técnica – Utilização do conceito de: polígono regular, eqüilátero e eqüiângulo.
Quantidade: 12

Tipo 37 – Estudar as variações das medidas da soma dos ângulos internos e da medida dos ângulos internos de um polígono regular convexo, em função da variação do número de lados.

Exemplo: *Na tabela que você completou no exercício anterior (Ex. 40):*

a) Se n aumenta 1, quanto aumenta s?

b) Se n aumenta 1, i aumenta sempre o mesmo número de graus? (Ex. 41, p. 102)

Resolução: *Esta resolução possui como base a seguinte tabela:*

n	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***
s	*180º*	*360º*	*540º*	*720º*	*900º*	*1080º*
i	*60º*	*90º*	*108º*	*120º*	*128,6º*	*135º*
e	*120º*	*90º*	*72º*	*60º*	*51,4º*	*45º*

a) Se n (número de lados) aumenta 1, s (medida da soma dos ângulos internos) aumenta 180º.

b) Não. O valor do ângulo interno varia, não obedecendo um padrão.

Técnica – Dedução a partir da observação das medidas da soma dos ângulos internos e do ângulo interno.
Quantidade: 1

✓ **LISTAGEM DAS TAREFAS, COM A RESPECTIVA QUANTIDADE DE EXERCÍCIOS DE CADA UMA DELAS:**

TIPOLOGIA	*QUANTIDADE*
Tipo 1 – Determinar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo.	11
Tipo 2-b) – Calcular o valor de um ângulo em um polígono regular convexo.	1
Tipo 3 – Determinar a medida do ângulo interno de um polígono regular convexo.	2
Tipo 4 – Determinar o ângulo externo de um polígono regular convexo.	6
Tipo 7-b) – Determinar o número de lados de um polígono regular convexo.	2
Tipo 31 – Determinar o número de triângulos formados pelas diagonais que partem de um só vértice em um polígono convexo.	4
Tipo 32 – Identificar entre várias fórmulas dadas qual é verdadeira.	1
Tipo 33 – Classificar os polígonos convexos.	2
Tipo 34 – Verificar se uma afirmação, referente a caracterização de polígonos, é verdadeira ou falsa.	5
Tipo 35 – Identificar um diagrama correto.	1
Tipo 36 – Estudar as características de um polígono particular.	12

<u>Tipo 37</u> – Estudar as variações das medidas da soma dos ângulos internos e da medida dos ângulos internos de um polígono regular convexo, em função da variação do número de lados.	1
TOTAL	**48**

Podemos perceber que a ênfase é dada ao estudo das características de um polígono convexo, onde 17 exercícios (Tipo 34 e 36) do total de 48 os envolvem. O destaque também é dado à soma dos ângulos internos de um polígono convexo, onde 11 exercícios (Tipo 1) tratam deste conceito. Temos também que 6 exercícios (Tipo 4) do total tratam do estudo de ângulo externo.

Portanto, segundo os dados da tabela, a ênfase é dada para a caracterização de polígonos (polígono regular, não-regular, eqüilátero, não-eqüilátero, eqüiângulo e não-eqüiângulo), soma dos ângulos internos de um polígono convexo e ângulo externo.

3.5 Estudo do Livro Didático "Matemática para Todos – 8ª Série"

O livro a ser estudado pertence a mesma coleção do livro que fizemos o estudo anteriormente.

É composto por 14 capítulos, dos quais o estudo dos polígonos está inserido no capítulo 7: "Geometria dedutiva", sob a rubrica "Ângulos nos polígonos" (p. 129) e no capítulo 9: " Trigonometria", sob a rubrica "Polígonos inscritos e circunscritos" (p. 171).

3.5.1 A Abordagem

A abordagem é introduzida a partir do que já fora estudado no livro da série anterior ("Soma dos ângulos internos de um polígono").

Esse conceito é retomado com o objetivo de mostrar a dedução da fórmula: $S = (n-2).180^o$, para um polígono de n lados, sendo que anteriormente apenas foi apresentada implicitamente através de exercícios propostos.

A partir desta fórmula, a dedução da soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo é apresentada com apoio de uma figura ilustrativa e representa o resultado de que os teoremas da soma das medidas dos ângulos internos e dos ângulos externos valem somente para polígonos convexos. Cabe salientar que, a partir disso, o conceito de polígono convexo e não-convexo é implementada de modo informal.

Para os polígonos não-convexos este fato foge da regra, pois possui uma reentrância com um ângulo de medida superior a 180°, sendo que $a_i + a_e = 180^\circ$.

Outros conceitos são trabalhados nos exercícios propostos, tais como, ângulo central de um polígono regular e polígono regular inscrito numa circunferência.

Esses conceitos são implementados implicitamente com o objetivo de, ao chegarmos na rubrica "Polígonos inscritos e circunscritos", o aluno já tenha trabalhado com esses conceitos de modo informal.

Neste contexto, os polígonos inscritos e circunscritos são estudados associados a objetos do cotidiano.

O conceito de polígono regular inscrito e circunscrito numa circunferência, é explorado por meio da construção dos mesmos, partindo de uma circunferência, na qual é dividida em n partes iguais, sendo que conseqüentemente os ângulos centrais possuirão medidas congruentes. Assim, unindo-se os pontos de divisão, obtêm-se um polígono regular inscrito.

Na seqüência, é feita também a construção de um polígono regular circunscrito a uma circunferência, onde a partir de retas perpendiculares aos raios da circunferência os obtemos.

São trabalhados e explorados outros conceitos nos exercícios propostos, como por exemplo, perímetro, apótema e as relações métricas em polígonos inscritos e circunscritos. Os polígonos regulares enfatizados são: o quadrado, o triângulo eqüilátero e o hexágono regular.

Vejamos que, como no livro estudado anteriormente (7ª série) desta mesma coleção, a proposta do autor segue uma linearidade, ou seja, a aprendizagem dos conceitos se dá por descoberta. Os conceitos na maioria das vezes são implementados mas não formalizados, até que se chegue no conceito esperado.

3.5.2 ESTUDO DOS EXERCÍCIOS

Tarefas identificadas nos exercícios propostos:

<u>Tipo 2-a</u> – Calcular o valor de um ângulo em um polígono convexo.

Condições da situação-problema:

- A partir de polígonos convexos dados;
- Sabendo-se que existem segmentos que são bissetrizes.

<u>Quantidade</u>: 4

<u>Tipo 2-b</u> – Calcular o valor de um ângulo em um polígono regular convexo.

Condições da situação-problema:

- Sabendo que o ângulo procurado é formado pelos prolongamentos de dois lados não consecutivos, conhecendo o número de lados;
- Sabendo que o ângulo procurado é formado pelos prolongamentos de dois lados consecutivos, conhecendo o número de lados;
- A partir de polígonos regulares (quadrado e hexágono regular) inscritos numa circunferência;
- A partir de polígonos regulares (hexágono regular e quadrado) circunscritos a uma circunferência.

<u>Quantidade</u>: 6

<u>Tipo 4</u> – Determinar a medida do ângulo externo de um polígono regular convexo.

Condições da situação-problema:

- Conhecendo o número de lados;
- Deduzir a fórmula do ângulo externo, a partir de um polígono de n lados.

<u>Quantidade</u>: 2

<u>Tipo 5</u> – Determinar o polígono.

Condições da situação problema:

➢ **Regular Convexo:**

- Em que o ângulo interno é o triplo do externo;
- Conhecendo a medida do ângulo interno;
- Em que o ângulo interno mais o ângulo externo formam um ângulo de 180º.

<u>Quantidade</u>: 3

<u>Tipo 7-b</u> – Determinar o número de lados de um polígono regular convexo.

Condições da situação problema:

- Conhecendo a medida do ângulo interno;
- Conhecendo a medida do ângulo central.

<u>Quantidade</u>: 3

<u>Tipo 13</u> – Determinar a medida dos elementos (altura, lado, raio R da circunferência circunscrita, raio r da circunferência inscrita, apótema, diagonal maior, diagonal menor e diagonal), de polígonos regulares convexos, segundo uma configuração dada:

Condições da situação problema:

- Em um polígono regular (quadrado e hexágono regular) circunscrito a uma circunferência em função do raio;
- Em um polígono regular (triângulo eqüilátero e um quadrado) inscrito numa circunferência em função do raio;
- A partir de um polígono regular inscrito numa circunferência, envolvendo um contexto do cotidiano;
- A partir de um polígono regular inscrito numa circunferência (triângulo eqüilátero).

<u>Quantidade</u>: 5 – Determinar a medida do lado;
1 – Determinar a medida do apótema.

<u>Total</u>: 6

<u>Tipo 16</u> – Deduzir a fórmula que fornece o lado de um polígono regular convexo.

Condição da situação problema:

- A partir de polígonos regulares: triângulo eqüilátero, quadrado e hexágono regular, inscritos e circunscritos a uma circunferência de raio r, utilizando resultados obtidos em problemas anteriores.

<u>Quantidade</u>: 6

<u>Tipo 20</u> – Construir polígonos, segundo uma configuração dada.

Condições da situação problema:

- Polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência, conhecendo a medida do raio e o número de divisões que devem ser feitas.

Quantidade: 3

Tipo 22-b – Determinar o perímetro de um polígono regular convexo.

Condição da situação problema:

- Em polígonos regulares inscritos e circunscritos: triângulo eqüilátero, quadrado e hexágono regular, a uma circunferência de raio r.

Quantidade: 6

Tipo 25 – Determinar a medida do ângulo central de um polígono regular.

Condições da situação problema:

- A partir do número de lados;
- Deduzir a fórmula da medida do ângulo do ângulo central para um polígono de n lados.

Quantidade: 2

Tipo 32 – Identificar entre várias fórmulas dadas qual é verdadeira.

Condições da situação problema:

- Fórmulas que contém relações entre: ângulo interno, ângulo externo e ângulo central.

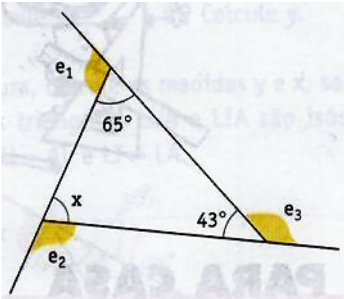
Quantidade: 1

Tipo 38 – Determinar a medida do ângulo externo em um polígono convexo.

Condição da situação problema:

- A partir de polígonos convexos dados.

***Exemplo**: Observe a figura:*



[...] b) Quais são os valores de e_1, e_2 e e_3? (Ex. 10-b, p. 131)

***Resolução**: Conforme a figura dada temos:*

$e_1 + 65^o = 180^o \Rightarrow e_1 = 180^o - 65^o \Rightarrow e_1 = 115^o$
$e_2 + 72^o = 180^o \Rightarrow e_2 = 180^o - 72^o \Rightarrow e_2 = 108^o$
$e_3 + 43^o = 180^o \Rightarrow e_3 = 180^o - 43^o \Rightarrow e_3 = 137^o$

Técnica – Utilização do conceito de que: $a_i + a_e = 180^o$.

Quantidade: 2

Tipo 39 – Determinar a soma dos ângulos externos em um polígono convexo.

Condições da situação problema:

- A partir de um polígono convexo;
- A partir de um polígono convexo, que é ilustrado de diferentes maneiras para uma melhor visualização, para a determinação da soma dos ângulos externos.

Exemplo: *(OBS: Para este tipo, iremos utilizar o mesmo enunciado do exercício do tipo anterior).*

[...] c) Efetue a soma $e_1 + e_2 + e_3$. *(Ex. 10-c, p. 131)*

Resolução*: Tendo já os resultados obtidos no exercício do tipo anterior, apenas devemos efetuar a soma:* $e_1 + e_2 + e_3 = 115^o + 108^o + 137^o = 360^o$.

Técnica – Utilização do conceito de que: $a_i + a_e = 180^o$.

Quantidade: 2

Tipo 40 – Deduzir a fórmula que expresse a medida do ângulo interno de um polígono regular convexo de n lados.

Exemplo: *Faça o que se pede: a) Escreva em seu caderno uma fórmula que dê a medida i do ângulo interno de um polígono regular de n lados.(Ex. 12-a, p. 131)*

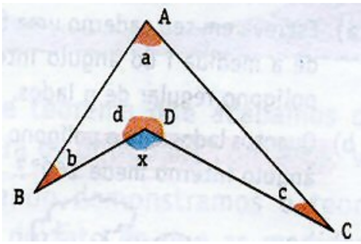
Resolução*: Sabendo que, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é dada por:* $S = (n-2).180^o$, *e que, em um polígono regular convexo, os ângulos internos são congruentes, podemos expressar a fórmula da medida do ângulo interno como:* $a_i = \frac{(n-2).180^o}{n}$.

Técnica – Utilização da fórmula da soma dos ângulos internos, para deduzir a fórmula da medida do ângulo interno de um polígono regular convexo.

<u>Quantidade</u>: 1

<u>Tipo 41</u> – Provar que a soma dos ângulos internos de um polígono não-convexo medem 360º.

<u>Exemplo</u>: *O quadrilátero da figura é não-convexo.*



a) Prove que $a + b + c + d = 360^o$ usando o teorema sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo. ***Dica****: ligue A com D. (Ex. 15-a, p. 132)*

<u>Resolução</u>*: Ligando os vértices A com D, obtemos dois triângulos, portanto se, a soma dos ângulos internos de um triângulo medem 180º, então no polígono ABCD temos que seus ângulos internos medem 360º.*

<u>Técnica</u> – Utilização da soma dos ângulos internos de um triângulo.

<u>Quantidade</u>: 1

<u>Tipo 42</u> – Provar que a medida do ângulo externo x de um polígono não-convexo é a soma das medidas dos ângulos internos do polígono, não opostos com x pelo vértice.

<u>Exemplo</u>: *(OBS: Para este tipo, iremos utilizar o mesmo enunciado do exercício do tipo anterior)*

[...] b) Prove que $x = a + b + c$. (Ex. 15, p. 132)

<u>Resolução</u>: Sabemos que, todo ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a esse ângulo externo. Assim, ligando os vértices D e A, obtemos dois triângulos, onde concluímos que: $x = a + b + c$.

<u>Técnica</u> – Utilização do conceito de ângulo externo.

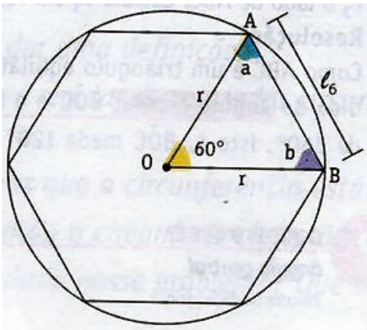
<u>Quantidade</u>: 1

Tipo 43 – Verificar a relação existente entre elementos de um polígono regular convexo.

Condições da situação problema:

- Entre os elementos: lado e raio, a partir de um polígono regular (hexágono regular) inscrito numa circunferência;
- Entre os elementos: ângulo central e ângulo externo.

Exemplo: *Considere um hexágono regular inscrito num círculo de raio r. Que relação existe entre o lado do hexágono l_6 e o raio r? (Ex. 35, p. 174)*



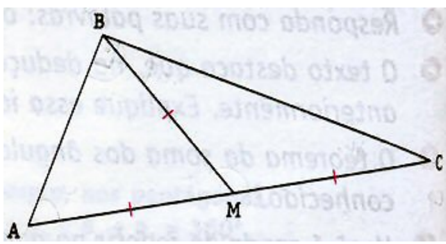
Resolução*:Como OA = OB = r, o triângulo AOB é isósceles e $\hat{A}$ = $\hat{B}$.Como $A\hat{O}B$ mede 60º, resulta que 60º + a + b = 180º ou que 60º + a + a = 180º, donde 2a = 120º e, portanto a = 60º. Portanto, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ medem 60º, e OAB é um triângulo eqüilátero com l_6 = r.*

Técnica – Utilização do somatório dos ângulos internos de um triângulo.

Quantidade: 2

Tipo 44 – Provar que, sendo ABC um triângulo, M ponto médio de AC, $AM = MB = MC \Rightarrow$ o ângulo ABC é reto.

Exemplo: *Na figura, temos MA = MB = MC. Prove que, nessas condições, o ângulo ABC é reto. (Ex. 14, p. 132)*



Resolução*: A partir do ΔABC temos:* $x + x + y + y = 180^o \Rightarrow 2x + 2y = 180^o \Rightarrow x + y = 90^o$.

Portanto, o ângulo $A\hat{B}C$ *mede 90º.*

<u>Técnica</u> – Utilização do somatório dos ângulos internos de um triângulo e classificação de triângulos quaisquer quanto os seus lados.

<u>Quantidade</u>: 1

✓ **LISTAGEM DAS TAREFAS, COM A RESPECTIVA QUANTIDADE DE EXERCÍCIOS DE CADA UMA DELAS:**

TIPOLOGIA	***QUANTIDADE***
<u>Tipo 2-a)</u> – Calcular o valor de um ângulo em um polígono convexo.	4
<u>Tipo 2-b)</u> – Calcular o valor de um ângulo em um polígono regular convexo.	6
<u>Tipo 4</u> – Determinar a medida do ângulo externo de um polígono regular convexo.	2
<u>Tipo 5</u> – Determinar o polígono.	3
<u>Tipo 7-b)</u> – Determinar o número de lados de um polígono regular convexo.	3

<u>Tipo 13</u> – Determinar a medida dos elementos (altura, lado, raio R da circunferência circunscrita, raio r da circunferência inscrita, apótema, diagonal maior, diagonal menor e diagonal), de polígonos regulares convexos, segundo uma configuração dada.	6
<u>Tipo 16</u> – Deduzir a fórmula que fornece o lado de um polígono regular convexo.	6
<u>Tipo 20</u> – Construir polígonos, segundo uma configuração dada.	3
<u>Tipo 22-b)</u> – Determinar o perímetro de um polígono regular convexo.	6
<u>Tipo 25</u> – Determinar a medida do ângulo central de um polígono regular.	2

<u>Tipo 32</u> – Identificar entre várias fórmulas dadas qual é verdadeira.	1
<u>Tipo 38</u> – Determinar a medida do ângulo externo em um polígono convexo.	2
<u>Tipo 39</u> – Determinar a soma dos ângulos externos em um polígono convexo.	2
<u>Tipo 40</u> – Deduzir a fórmula que expresse a medida do ângulo interno de um polígono regular convexo de n lados.	1
<u>Tipo 41</u> – Provar que a soma dos ângulos internos de um polígono não-convexo medem 360º.	1
<u>Tipo 42</u> – Provar que a medida do ângulo externo x de um polígono não-convexo é a soma das medidas dos	1

ângulos internos do polígono, não opostos com x pelo vértice.	
<u>Tipo 43</u> – Verificar a relação existente entre elementos de um polígono regular convexo.	2
<u>Tipo 44</u> – Provar que, sendo ABC um triângulo, M ponto médio de AC, $AM = MB = MC \Rightarrow$ **o ângulo ABC é reto.**	1
TOTAL	**46**

No estudo destes exercícios, podemos notar que a ênfase é dada ao estudo de ângulo de um polígono regular convexo e em um polígono convexo, onde 10 do total envolvem este conceito (Tipos: 2-a e 2-b). O destaque também é dado para o conceito de perímetro de um polígono regular convexo, onde 6 exercícios (Tipo 22-b) de 46 o abordam. A determinação de elementos (lados e apótema) também são tratados, onde 6 exercícios (Tipo 13) do total envolvem este contexto. Por fim, é considerado importante para o estudo a dedução da fórmula que fornece a medida do lado em função do raio em um polígono regular convexo, onde 6 exercícios (Tipo 16) do total envolvem este contexto.

Portanto, percebe-se que os exercícios enfatizam o estudo de: ângulo, perímetro e os elementos: lado e apótema de um polígono regular convexo.

3.6 CONCLUSÃO

No estudo feito dos livros didáticos de 7ª e 8ª séries da Coleção “Matemática para Todos”, verificou-se que a abordagem é explorada por meio de uma aprendizagem por descoberta.

No livro de 7ª série, estuda-se polígonos num contexto mais geral. O estudo é feito a partir de suas definições e elementos. Alguns conceitos não definidos no livro de 7ª série, tais como: fórmula da soma dos ângulos internos e externos de um polígono convexo, polígono convexo e não-convexo, o autor expõe explicitamente no livro de 8ª série, além de que nesta série trata do estudo de “Polígonos Inscritos e Circunscritos”.

Na 8ª série, os elementos dos polígonos e algumas definições são explicitadas juntamente com as deduções do cálculo do lado e apótema em função do raio nos polígonos regulares (quadrado, hexágono regular e triângulo eqüilátero).

Entretanto, no contexto desses dois livros, os conceitos são explicitados de modo informal, dando ao aluno todas as condições para que ele possa chegar nas devidas deduções dos conceitos apresentados.

Percebemos que nesta coleção também há uma transferência de conteúdo do livro “Geometria Plana” para o ensino, pois os temas tratados no livro da 7ª série correspondem a um contexto geral em relação aos conteúdos do capítulo IX do livro “Geometria Plana”, enquanto no livro de 8ª série os assuntos correspondem ao capítulo XVI.

Nos livros didáticos de 7ª e 8ª série desta coleção, identificamos um total de 26 tarefas de um total de 94 exercícios estudados, dos quais somente quatro tipos de tarefas são comuns (Tipos: 2-b, 4, 7-b e 32).

Com relação ao livro "Geometria Plana", o livro de 7ª série propõe 12 tarefas e o livro "Geometria Plana" propõe 17 tarefas, onde 5 são as mesmas (Tipos: 1, 2-b, 3, 4 e 7-b).

O livro de 8ª série propõe 19 tarefas, das quais 7 são contempladas no livro "Geometria Plana" (Tipos: 2-a, 2-b, 4, 5, 7-b, 13 e 16).

Segundo estes dados, notamos que também nesta coleção há uma diferença significativa na organização matemática dos livros didáticos de 7ª e 8ª séries se comparados com o livro de "Geometria Plana", pois poucos são os tipos de tarefas comuns existentes. Portanto, notamos uma semelhança entre as abordagens propostas no livro "Geometria Plana" em relação aos livros didáticos, ou seja, nas organizações didáticas. Notamos também uma diferença entre as tipologias de tarefas propostas, ou seja, na organização matemática.

Cabe salientar que, de um total de 97 exercícios estudados na 7ª e 8ª séries, 40 exercícios envolvem o conceito de ângulo em diferentes condições do enunciado.

CONCLUSÃO

Na organização do livro “Geometria Plana – vol 9” da coleção Fundamentos da Matemática Elementar, identificamos o estudo de polígonos em dois momentos:

- No capítulo IX, a partir de suas definições, elementos, diagonais, ângulos internos e ângulos externos de um polígono regular; e

- No capítulo XVI, a partir de seus conceitos e propriedades de um polígono regular.

Os conceitos apresentam-se separadamente. Isto se torna necessário pelo fato de que os conceitos tratados no capítulo XVI dependem diretamente dos conceitos tratados em capítulos anteriores, que serão considerados como um saber disponível quando adentrarmos no capítulo mencionado.

Notemos que há uma variedade de exercícios, tanto no capítulo IX como no capítulo XVI. No capítulo IX, estudamos 69 exercícios, onde percebemos que a ênfase é dada para o estudo de: ângulos de um polígono, diagonais, ângulo interno, determinação de polígonos convexos por meio da utilização de sua nomenclatura e lados do polígono.

No capítulo XVI, estudamos num total de 87 exercícios, onde a ênfase é dada para o estudo de: ângulos, elementos de um polígono regular e diagonais.

Ao estudarmos os livros de 7ª e 8ª séries, percebemos que estes seguem uma mesma seqüência de conteúdo apresentada no livro “Geometria Plana – vol. 9”, ou seja, os capítulos IX e XVI correspondem respectivamente aos conteúdos tratados na 7ª série e 8ª série.

Com isso, percebemos que ocorre uma elementarização dos conteúdos do livro “Geometria Plana – vol. 9” para os livros didáticos.

No livro de 7ª série da coleção “Matemática – Pensar e Descobrir”, estuda-se polígonos num contexto mais geral, ou seja, o conteúdo é trabalhado em polígonos quaisquer.

Os exercícios enfatizados são relativos a: perímetro, determinação de polígonos convexos por meio da utilização da nomenclatura, quantidade de elementos, diagonais e lados.

No livro de 8ª série da coleção “Matemática – Pensar e Descobrir”, o estudo é particularizado para o tratamento de polígonos regulares, onde estuda os elementos e explicita as deduções do lado e apótema em função do raio nos polígonos regulares: hexágono regular, quadrado e triângulo eqüilátero.

Quanto aos exercícios, a ênfase é dada em situações que envolvam: ângulo central, ângulo interno e determinação de elementos de um polígono regular convexo.

Notemos que a abordagem destes dois livros busca realizar um trabalho explorando os conceitos por meio de figuras que têm por função ilustrar a situação problema. Porém, faz a apresentação do conceito seguido de exemplos complementares.

No livro de 7ª série da coleção "Matemática Para Todos", a abordagem trata das definições e elementos, ou seja, o estudo sobre polígonos enquadra-se num contexto mais geral, trabalhando com polígonos quaisquer.

Nos exercícios estudados a predominância se dá em: soma dos ângulos internos de um polígono convexo, ângulo externo e caracterização de polígonos.

No livro de 8ª série da coleção "Matemática Para Todos", o tratamento é dado ao estudo de polígonos inscritos e circunscritos. Os elementos e algumas definições são explicitadas juntamente com as deduções do cálculo do lado e apótema em função do raio, dos polígonos regulares: hexágono regular, quadrado e triângulo eqüilátero.

Em relação aos exercícios, a ênfase é dada ao estudo de: ângulo, perímetro e lados de um polígono regular convexo.

Temos que a abordagem dos conteúdos é feita tendo como princípio a aprendizagem por descoberta, ou seja, na maioria das vezes os conceitos são introduzidos de maneira informal, na qual por meio de exemplos e exercícios o aluno é levado a trabalhar e elaborar o conhecimento aplicando o raciocínio lógico e dedutivo.

As abordagens encontradas nos livros didáticos relacionam-se com os conteúdos estudados no livro "Geometria Plana"; vol. 9, ou seja, há semelhanças na organização didática. Já em relação a organização matemática, notamos uma significativa diferença, pois poucos são as tarefas comuns entre os livros didáticos e o livro destinado à formação de professores.

Este estudo nos proporcionou uma amostragem de como é proposto o objeto "Polígonos" na 7ª e 8ª séries do ensino fundamental e no livro "Geometria Plana; vol. 9" destinado a formação de professores.

Além deste aporte, resolver os exercícios do livro "Geometria Plana" nos permitiu revisar e aprofundar nossos conhecimentos sobre polígonos.

Cabe salientar que este estudo foi um ensaio de pesquisa relevante para minha formação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHEVALLARD, Y. **Conceitos Fundamentais da didáctica: As perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica.** In: BRUN, J. Didáctica das Matemáticas. Lisboa. Pt: Instituto Piaget, 1996.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Geometria Plana – Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. 7ª. edição. São Paulo: Editora Atual, 1993.

GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JR, José Ruy. **Matemática – Pensar e Descobrir: Novo**; 7ª. série. São Paulo: FTD, 2000.

GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JR, José Ruy. **Matemática – Pensar e Descobrir: Novo**; 8ª. série. São Paulo: FTD, 2000.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática para Todos**; 7ª. Série. São Paulo: Scipione, 2002.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática para Todos**; 7ª. Série. São Paulo: Scipione, 2002.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN) – Matemática – 5ª à 8ª série; 1998.

PLANEJAMENTOS ESCOLARES – Ensino Fundamental – 7ª e 8ª séries.

PROPOSTA CURRICULAR DE SANTA CATARINA – Educação Infantil – Educação Fundamental e Médio; 1998.

ANEXOS

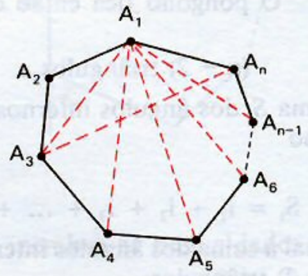
ANEXO 1

Dedução

Seja $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ um polígono de *n* lados.

Com extremidade num dos vértices do polígono (vértice A_1, por exemplo), temos:

$$(n - 3) \text{ diagonais.}$$



Se com extremidade em *cada* vértice temos

$$(n - 3) \text{ diagonais,}$$

então com extremidades nos *n* vértices, temos:

$$n(n - 3) \text{ diagonais.}$$

Porém, nesta conta

$$n(n - 3)$$

cada diagonal é contada duas vezes, pois tem extremidades em 2 vértices.

(Por exemplo, na conta acima, $\overline{A_1A_3}$ e $\overline{A_3A_1}$ são contadas como duas diagonais, quando na realidade é uma só $\overline{A_1A_3} = \overline{A_3A_1}$.)

Logo, o número *d* de diagonais é:

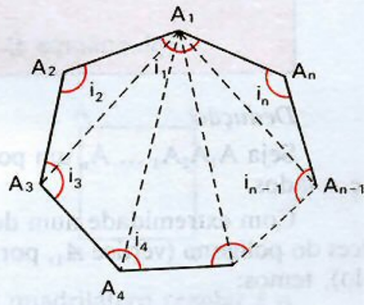
$$\boxed{d = \frac{n(n-3)}{2}}$$

ANEXO 2

Dedução

Seja $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ um polígono convexo de n lados.

De um vértice qualquer conduzimos todas as diagonais que têm esse vértice como extremo.



O polígono fica então dividido em

$(n - 2)$ triângulos e

a soma S_i dos ângulos internos do polígono

$$S_i = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_n$$

é igual à soma dos ângulos internos dos $(n - 2)$ triângulos.

Logo,

$\boxed{S_i = (n - 2) \cdot 2 \text{ retos}}$ ou $\boxed{S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ}$

ANEXO 3

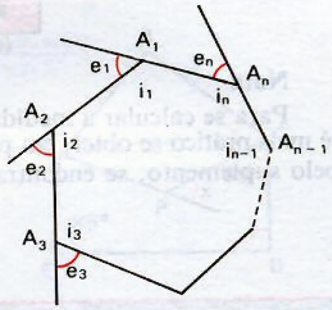
Seja $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ um polígono convexo de n lados.

Considerando os ângulos externos

$e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$

suplementares adjacentes aos respectivos ângulos internos

$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$



temos:

$$\left.\begin{array}{l} e_1 + i_1 = 180° \\ e_2 + i_2 = 180° \\ e_3 + i_3 = 180° \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ e_n + i_n = 180° \end{array}\right\} \text{ somando membro a membro as } n \text{ igualdades}$$

$$\overline{S_e + S_i = n \cdot 180°}$$

Substituindo-se S_i por $(n - 2) \cdot 180°$, vem:

$$S_e + (n - 2) \, . \, 180° = n \, . \, 180°$$

$$S_e + \cancel{n \cdot 180°} - 360° = \cancel{n \cdot 180°}$$

$$\boxed{S_e = 360°}$$