Universidade Federal de Santa Catarina

Departamento de Matemática

Curso de Licenciatura em Matemática

Um Estudo de Séries Numéricas em $\mathbb{R}$

por

Ismael Turazzi Pereira

Florianópolis, julho de 2005.

Esta Monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº24/CCM/05

Professora da disciplina:

Carmem Suzane Comitre Gimenez

Professor Orientador:

Nereu Estanislau Burin

Banca Examinadora:

Profº Jardel Morais Pereira

Profº Gustavo Adolfo T. F. da Costa

Data da Defesa: 04 de julho de 2005.

Agradecimentos

À Deus, pela existência e aos meus pais Sebastião e Maria, pela vida.

A todos os meus familiares que acompanharam os meus passos, desde a infância até os dias atuais. Em especial ao meu primo e amigo Edevar, companheiro de muitas conversas.

Aos colegas que encontrei durante o curso, dos quais destaco as colegas Karla e Kellen e os colegas Dheleon, Raphael, Sandro e Miguel, pelas incansáveis tardes na biblioteca.

Aos mestres, pela difícil batalha de guiar-nos através do obscuro mundo da ciência. Entre estes, de forma especial ao professor e orientador Nereu Estanislau Burin, pelo seu apoio na elaboração deste trabalho, e aos membros da banca pelo tempo dispensado à sua leitura.

Finalmente, aos matemáticos: Tales, Arquimedes, Euclides, Bhaskara, Leonardo da Vinci, Galileu Galilei, Kepler, Fermat, Descartes, Newton, Leibniz, Euler, Gauss, Lobachewsky, Riemann, Cantor, Hilbert e a tantos outros que contribuiram para o desenvolvimento da ciência.

Índice

Apresentação 1

Introdução 2

1 Seqüências em $\mathbb{R}$ 3

1.1 Introdução 3

1.2 Limite de uma Seqüência 5

1.3 Propriedades Aritméticas dos Limites 7

1.4 Seqüências de Cauchy 10

1.5 Limites Infinitos 12

1.6 Propriedades dos Limites Infinitos 12

2 Séries Numéricas em $\mathbb{R}$ 15

2.1 Convergência de Séries 16

2.2 Operações com Séries 19

2.3 Critérios de Convergência 21

2.4 Séries Alternadas 33

2.5 Algumas Aplicações 35

Considerações Finais **38**

Bibliografia **39**

Apresentação

Para a maior parte dos estudantes, e no meu caso especificamente, o primeiro contato com as "somas infinitas" ou séries se deu através do estudo das progressões geométricas, ainda no ensino médio. Naquele momento, a pergunta mais intrigante foi a seguinte: como é possível a soma de uma infinidade de parcelas, sendo todas positivas, não crescer indefinidamente? Posteriormente, já cursando matemática nesta Universidade tive a oportunidade de mais uma vez deparar-me com as ditas séries. Porém, desta vez com um aparato teórico consideralvemente maior foi possível esclarecer algumas dúvidas, como a apresentada acima, enquanto outras mais sútis surgiam.

De toda forma, a teoria de séries caminhou lado a lado com todas as disciplinas de cálculo e análise estudadas ao longo do curso. Este foi o principal motivo que impulsionou a elaboração do presente trabalho, rever e reforçar parte desta importante ferramenta da matemática.

Introdução

O presente trabalho tem como objetivo principal fazer um estudo acerca das "somas infinitas" ou séries. Para tanto, consideramos necessário um estudo preliminar sobre seqüências em $\mathbb{R}$, sendo este o assunto do primeiro capítulo.

No capítulo seguinte tratamos então das séries reais, partindo da sua definição e desenvolvendo todos os seus resultados mais importantes.

É importante obeservarmos que, muito embora a teoria de séries como apresentada neste trabalho tenha sido desenvolvida juntamente com o cálculo moderno, as idéias que resultaram nesta teoria já faziam parte dos estudos e dos resultados encontrados nos trabalhos de matemáticos gregos, entre os quais destacamos Arquimedes. Os trabalhos de Arquimedes que se ocuparam principalmente do método da exaustão aplicavam a idéia de somas infinitas. Arquimedes não sugeriu diretamente em seus trabalhos as "somas infinitas" pois processos infinitos eram mal vistos em seu tempo. Posteriormente, muitos matemáticos estudaram sobre o comportamento de determinadas séries, mas nenhum deles teve tanto êxito quanto os considerados inventores do cálculo: Isaac Newton (1642, 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646, 1716).

Capítulo 1

Seqüências em $\mathbb{R}$

Nesta seção estudamos as seqüências de números reais, partindo de sua definição e desenvolvendo a teoria a partir dos teoremas mais importantes. O bom entendimento deste capítulo se faz necessário para a compreensão do capítulo seguinte, pois a maior parte dos resultados sobre séries exige o conhecimento sobre seqüências na sua demonstração.

1.1 Introdução

Do ponto de vista intuitivo, uma seqüência em $\mathbb{R}$ pode ser entendida como uma lista ordenada $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ de números reais indexados pelos números naturais. Formalmente temos:

Definição 1.1. *Uma seqüência de números reais é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *definida no conjunto dos naturais* $\mathbb{N}$ *e tomando valores em* $\mathbb{R}$*, de forma que* $x(n) \to x_n$ *com* $n \in \mathbb{N}$*.*

Neste caso chamamos x_n de termo de ordem n da seqüência x, ou ainda n-ésimo termo da seqüência. Denotamos $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_n) para representar a seqüência x.

Definição 1.2. *Uma seqüência é limitada quando o conjunto dos seus termos for limitado, ou seja, quando existem* a *e* $b \in \mathbb{R}$ *tais que* $a \leqslant x_n \leqslant b \ \forall \ n \in \mathbb{N}$*.*

Observação: Segue da definição que: (x_n) é limitada, se e somente se, $(|x_n|)$ for limitada.

Demonstração: Sabemos que todo intervalo $[a, b]$ está contido num intervalo $[-c, c]$ $c \in \mathbb{R}$, basta para tanto tomarmos $c \geqslant$ máx $\{|a|, |b|\}$. Como a condição $x_n \in [-c, c]$ é equivalente a $(|x_n|) \leqslant c$, vimos que uma seqüência é limitada, se e somente se, existe um número real $c > 0$ tal que $(|x_n|) \leq c \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, ou seja, $(|x_n|)$ é limitada. $\square$

Quando uma seqüência (x_n) não é limitada, diz-se que ela é ilimitada.

Definição 1.3. *Uma seqüência (x_n) diz-se limitada superiormente quando existe um número real b tal que $x_n \leq b \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, ou seja, todos os termos da seqüência pertencem ao intervalo $(-\infty, b]$.*

Analogamente, define-se seqüência limitada inferiormente. Assim, (x_n) é limitada se, e somente se, (x_n) for limitada superior e inferiormente.

Exemplo 1.4. (x_n), $x_n = n$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$; isto define a seqüência $(1, 2, 3, \cdots)$, que é evidentemente limitada inferiormente por qualquer número $b \leq 1$, $b \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.5. (x_n), $x_n = \frac{1}{n}$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$; define a seqüência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots)$, limitada superiormente.

Exemplo 1.6. (x_n), $x_n = 1, \forall \ n \in \mathbb{N}$; define a seqüência constante $(1, 1, \cdots)$, que é obviamente limitada.

Definição 1.7. *Uma seqüência (x_n) chama-se crescente quando $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ isto é, $x_n < x_{n+1}$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$. Se vale $x_n \leq x_{n+1}$,$\forall \ n \in \mathbb{N}$, então a seqüência (x_n) é não-decrescente.*

Analogamente, quando $x_n > x_{n+1}$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$, dizemos que (x_n) é decrescente. Se vale $x_n \geq x_{n+1}$,$\forall \ n \in \mathbb{N}$, então a seqüência (x_n) é não-crescente.

Exemplo 1.8. (x_n), $x_n = n$; (x_n) é crescente.

Exemplo 1.9. (x_n), $x_n = \frac{1}{n}$; (x_n) é decrescente.

Exemplo 1.10. (x_n), $x_n = \begin{cases} n, & \text{se n ímpar;} \\ n - 1, & \text{se n par.} \end{cases}$

As sentenças acima definem a seqüência $(1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, \cdots)$. Logo (x_n) é não-decrescente.

As seqüências crescentes, não-decrescentes, decrescentes e não-crescentes são chamadas de **seqüências monótonas**.

Definição 1.11. *Dada uma seqüência* $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números reais, uma subseqüência de* X*, é a restrição da função* X *a um subconjunto infinito* $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_i < \cdots\}$ *de* $\mathbb{N}$*. Escreve-se* $X' = (x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ *, ou* $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_i}, \cdots)$ *, ou* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$*, para indicar a subseqüência* $X' = X|\mathbb{N}'$*.*

Exemplo 1.12. Seja $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Temos $X = (-1, 1, -1, 1, \cdots)$.

Então, $X' = (-1, -1, -1, -1, \cdots)$ é uma subseqüência de X. Trata-se da restrição de $\mathbb{N}$ ao conjunto $\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$ dos naturais ímpares.

Temos ainda a subseqüência $X'' = (1)$, constante. Neste caso é a restrição de $\mathbb{N}$ ao conjunto dos naturais pares.

1.2 Limite de uma Seqüência

Intuitivamente, dizer que a seqüência (x_n) possui limite L, $L \in \mathbb{R}$, significa dizer que para valores muito grandes de n, os termos da seqüência vão se aproximando cada vez mais de L. A definição formal é a que segue.

Definição 1.13. *Seja* (x_n) *uma seqüência dada.* L *é limite de* (x_n)*, (denota-se por* $\lim x_n = L$*) se, e somente se, para todo* $\epsilon > 0$*,* $\epsilon \in \mathbb{R}$*, existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq n_0$ *temos* $x_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$*. Nesse caso diz-se que* (x_n) *converge para* L*. Em linguagem puramente simbólica descrevemos:*

$$\lim\ x_n = L \Leftrightarrow \forall\ \epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{R}, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ /\ n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \epsilon.$$

Evidentemente, n_0 depende de ϵ e, naturalmente é de se esperar que quanto menor for dado ϵ, maior será o índice n_0 para o qual $n \geq n_0$ implica em $x_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$.

Quando (x_n) não possui limite (não converge), diz-se então que (x_n) diverge.

Exemplo 1.14. (x_n), $x_n = a$, $a \in \mathbb{R}$;

Neste exemplo, $\lim x_n = a$, pois $\forall\ \epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, temos $|x_n - a| = |a - a| = 0 < \epsilon$. Nesse caso, n_0 pode ser qualquer.

Exemplo 1.15. (x_n), $x_n = n$.

Esta seqüência diverge, pois como pode-se verificar, x_n não se aproxima de valor algum.

Teorema 1.16. (Unicidade do Limite) *Seja* (x_n) *uma seqüência dada. Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim x_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, *então* $a = b$.

Demonstração: (vamos mostrar que a distância entre a e b é menor que qualquer número positivo dado).

Seja $\epsilon > 0$. Então, existem $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$

Seja $n_2 = \text{máx}\ \{n_0, n_1\}$. Logo, $n \geq n_2 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|x_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$.

Vejamos,

$$|a-b| = |a-x_n+x_n-b| = |(a-x_n)+(x_n-b)| \leq |a-x_n|+|x_n-b| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto $|a - b| < \epsilon$. Logo $|a - b| = 0$, donde segue que $a = b$. $\square$

Teorema 1.17. *Se* $\lim x_n = a$, *então toda subseqüência de* (x_n) *converge para* a.

Demonstração: Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_i}, \cdots)$ uma subseqüência de (x_n). Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$. Como os índices da subseqüência formam um subconjunto infinito, existe entre eles um $n_{i_0} > n_0$. Então, para $n_i \geq n_{i_0}$ teremos $n_i > n_0$. Isto implica em $|x_{n_i} - a| < \epsilon$. Logo, $\lim x_{n_i} = a$. $\square$

Teorema 1.18. *Toda seqüência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $\lim x_n = a$. Então, $\forall\ \epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ / $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

Tomamos $\epsilon = 1$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ / $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in (a - 1, a + 1)$.

Consideramos o conjunto finito C $= \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n_0-1}, a - 1, a + 1\}$.

O Conjunto C, por ser finito possui um elemento máximo e um elemento mínimo. Seja a o mínimo e b o máximo de C. Assim temos $a \leq x_n \leq b$, $\forall$ $n \in \mathbb{N}$. Portanto (x_n) é limitada. $\square$

Como conseqüência do teorema acima, toda seqüência ilimitada é divergente.

Observação: A recíproca deste teorema é falsa, basta vermos que $(x_n) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots)$ é limitada, e no entanto (x_n) diverge.

Teorema 1.19. *Toda seqüência monótona limitada converge.*

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência monótona limitada. Suponhamos (x_n) não-decrescente.

Seja $\mathrm{X} = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Por hipótese X é limitado e evidentemente $\mathrm{X} \neq \{\ \}$. Logo X possui supremo. Seja $S = Sup\mathrm{X}$. (Vamos provar que $\lim x_n = S$).

Seja $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S - \epsilon < x_{n_0} < S$ (definição de supremo).

Como (x_n) é não-decrescente segue que $n \geq n_0$ implica em $x_n \geq x_{n_0}$ e portanto, $S - \epsilon < x_n \leq S$.

Assim, $x_n \in (S - \epsilon, S + \epsilon)$, $\forall\ n \geq n_0$. Logo, $\lim x_n = S$. $\square$

Corolário 1.20. *Se uma seqüência (x_n) monótona possui uma subseqüência convergente, então (x_n) é convergente.*

1.3 Propriedades Aritméticas dos Limites

Teorema 1.21. *Se* $\lim x_n = 0$ *e* (y_n) *é uma seqüência limitada, então* $\lim x_n.y_n = 0$ *(mesmo que não exista o limite de (y_n)).*

Demonstração: Sendo (y_n) limitada, existe $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$, tal que $|y_n| < k$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Seja $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$. Como $\lim x_n = 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica em $|x_n - 0| = |x_n| < \frac{\epsilon}{k}$. Logo, para todo $n \geq n_0$,

$$|(x_n.y_n) - 0| = |x_n.y_n| < |x_n|.k < \frac{\epsilon}{k}.k = \epsilon$$

Ou seja, $n \geq n_0 \Rightarrow |(x_n.y_n) - 0| < \epsilon$. Assim, $\lim x_n.y_n = 0$. $\square$

Exemplo 1.22. $\lim \frac{sen\ n}{n} = 0$, pois $\lim \frac{1}{n} = 0$ e $(sen\ n)$ é limitada.

Teorema 1.23. *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$, *então,*
(i) $\lim(x_n + y_n) = a + b$;

(ii) $\lim c.(x_n) = c.a,\ \forall\ c \in \mathbb{R}$;

(iii) $\lim(x_n.y_n) = a.b$;

(iv) $\lim(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b}$, *se* $b \neq 0$.

Demonstração: (i) Dado $\epsilon > 0$ existem n_1 e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \qquad e \qquad n \geq n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$

Seja $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Para $n \geq n_0$ temos então:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ou seja, $\forall\ n \geq n_0$ temos $|(x_n + y_n) - (a + b)| < \epsilon$. Portanto, $\lim(x_n + y_n) = a + b$.

(ii) Seja $\epsilon > 0$. Como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica em $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{|c|}$ (suponhamos $c \neq 0$).

Para $n \geq n_0$ temos então

$$|c.x_n - c.a| = |c|.|x_n - a| < |c|.\frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon$$

Portanto, $\lim c.x_n = c.a$.

Observe que para $c = 0$ a igualdade é imediata.

(iii) Vamos provar que $\lim(x_n.y_n - a.b) = 0$, o que pelos itens (i) e (ii) implica em $\lim(x_n.y_n) = a.b$. Vejamos:

$$x_n.y_n - a.b = x_n.y_n - x_n.b + x_n.b - a.b = x_n.(y_n - b) + b.(x_n - a)$$

Temos (x_n) limitada, pois (x_n) converge.

Por (i), $\lim(y_n - b) = \lim(y_n) - \lim b = b - b = 0$ ($\lim b = b$), pois b neste caso representa a seqüência constante $(b, b, b, b, \cdots)$.

Pelo teorema 1.21, $\lim x_n.(y_n - b) = 0$

Por raciocínio análogo, $\lim b.(x_n - a) = 0$. Assim,

$$\lim(x_n.y_n - a.b) = \lim x_n.(y_n - b) + \lim b.(x_n - a) = 0$$

Portanto, $\lim x_n.y_n - a.b = 0$, donde segue que $\lim x_n.y_n = a.b$.

(iv) Iremos provar que $\lim(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}) = 0$.

Observe que:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{b.x_n - a.y_n}{b.y_n} = \frac{1}{b.y_n}.(b.x_n - a.y_n)$$

para todo n tal que $y_n \neq 0$

Pelos itens (i), (ii) e (iii), temos que $\lim(b.x_n - a.y_n) = b.a - a.b = 0$.

Vamos mostrar agora que $(\frac{1}{b.y_n})$ é limitada.

Como $\lim(b.y_n) = b^2 > 0$, então para $\epsilon = \frac{b^2}{2}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica em $(b.y_n) \in (b^2 - \frac{b^2}{2}, b^2 + \frac{b^2}{2})$. Em particular, $b.y_n > \frac{b^2}{2}$ para $n \geq n_0$.

Assim, para todo $n \geq n_0$ temos $0 < \frac{1}{b.y_n} < \frac{2}{b^2}$.

Como o conjunto $\{\frac{1}{b.y_1}, \frac{1}{b.y_2}, \cdots, \frac{1}{b.y_{n-1}}\}$ é finito, segue que $(\frac{1}{b.y_n})$ é limitada.

Assim, pelo teorema 1.21,

$$\lim(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}) = \lim \frac{1}{b.y_n}. \lim(bx_n - ay_n) = 0$$

Portanto, $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$. $\square$

Teorema 1.24. *Sejam (x_n), (y_n), (z_n) seqüências que, a partir de um certo índice n^* satisfazem $x_n \leq z_n \leq y_n$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$, então $\lim z_n = a$.*

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Então existem n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n \geq n_1 \Rightarrow x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \qquad \text{e} \qquad n \geq n_2 \Rightarrow y_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$$

Seja $n_0 = max\{n_1, n_2, n^*\}$. Então, para todo $n \geq n_0$ temos:

$$a - \epsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \epsilon, \text{ ou seja } z_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon).$$

Logo, $\lim z_n = a$. $\square$

Teorema 1.25. *Toda seqüência limitada de números reais possui uma subseqüência convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência limitada. Então, existem a e b $\in \mathbb{R}$ tais que a $\leq x_n \leq$ b $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Consideremos o conjunto C $= \{y \in \mathbb{R}/y \leq x_n$ para uma infinidade de índices $n\}$.

Note que:

(1) a $\in$ C, e portanto C $\neq \{\ \}$;

(2) C é limitado superiormente. Logo, C possui supremo em $\mathbb{R}$, digamos S.

Provamos a seguir que S é limite de uma subseqüência de (x_n).

Seja $\epsilon > 0$. Por ser $S = Sup$ C, existe $y_0 \in$ C tal que $S - \epsilon < y_0 < S$.

Como $y_0 \in$ C, existe uma infinidade de índices n para os quais $x_n \geq y_0$, e portanto $x_n > S - \epsilon$.

Observamos que $S + \epsilon$ não pertence ao conjunto C, e assim, existe apenas um número finito de índices n para os quais $x_n \geq S + \epsilon$.

Construimos uma subseqüência de (x_n) que converge para S:

Seja $\epsilon = 1$ e x_{n_1} um termo de (x_n) tal que $|x_{n_1} - S| < 1$;

Seja $\epsilon = \frac{1}{2}$ e x_{n_2} um termo de (x_n) tal que $|x_{n_2} - S| < \frac{1}{2}$;

Seja $\epsilon = \frac{1}{3}$ e x_{n_3} um termo de (x_n) tal que $|x_{n_3} - S| < \frac{1}{3}$.

Assim sucessivamente, obtemos a subseqüência (x_{n_j}) com $n_1 < n_2 < \cdots$, satisfazendo $|x_{n_j} - S| < \frac{1}{j}\ \forall\ j \in \mathbb{N}$.

Mostramos que (x_{n_j}) tem limite S. Seja $\epsilon > 0$. Se $k \in \mathbb{N}$ e $k > \frac{1}{\epsilon}$, então para todo índice n_j, com $j > k$ temos $|x_{n_j} - S| < \frac{1}{j} < \frac{1}{k} < \epsilon$. Logo, (x_{n_j}) converge para S. $\square$

1.4 Seqüências de Cauchy

Informalmente, uma seqüência (x_n) é de Cauchy se, a partir de um certo índice, os termos da seqüência tornam-se cada vez mais próximos uns dos outros.

Definição 1.26. *A seqüência (x_n) é de Cauchy se para todo $\epsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $m, n \geq n_0$ tem-se $|x_m - x_n| < \epsilon$*

O teorema seguinte afirma que a classe das seqências de Cauchy é idêntica a classe das seqüências convergentes.

Teorema 1.27. *Uma seqüência (x_n) é convergente, se e somente se, (x_n) for uma seqüência de Cauchy.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Toda seqüência convergente é de Cauchy.

Seja (x_n) uma seqüência tal que $\lim x_n = a$.

Seja $\epsilon > 0$. Então, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$.

Sejam $m, n \geq n_0$. Então,

$$|x_m - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

Logo,

$$|x_m - x_n| = |x_m - a + a - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Assim, $|x_m - x_n| < \epsilon$, $\forall\ m, n \geq n_0$ e portanto, (x_n) é de Cauchy.

($\Leftarrow$) Se (x_n) é uma seqüência de Cauchy, então (x_n) converge.

Para provarmos a volta do teorema precisamos dos seguintes resultados:

(1) Toda seqüência de cauchy é limitada.

Vejamos: Seja (x_n) de Cauchy. Tomando $\epsilon = 1$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_0$ implica em $|x_m - x_n| < 1$.

Em particular,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_{n_0} - x_n| < 1, \text{ ou seja, } n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1).$$

Seja α o menor e β o maior elemento do conjunto $\mathrm{X} = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n_0} - 1,\ x_{n_0} + 1\}$.

Então, $x_n \in [\alpha, \beta]$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Logo, (x_n) é limitada.

(2) Se uma seqüência (x_n) de Cauchy possui uma subseqüência que converge para a, $a \in \mathbb{R}$, então $\lim x_n = a$.

De fato, por (x_n) ser de Cauchy,

$$\text{dado } \epsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ /\ m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Existe também $n_1 \geq n_0\ /\ |x_{n_1} - a| < \frac{\epsilon}{2}$. (Ver resultado 1 e teorema 1.25)

Portanto,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo, $\lim x_n = a$.

Visto os resultados acima, voltamos a demonstração do teorema.

Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy. Por (1), (x_n) é limitada. Pelo teorema 1.25, (x_n) possui uma subseqüência convergente. Finalmente, por (2), concluímos que (x_n) converge. $\square$

1.5 Limites Infinitos

Entre as seqüências divergentes, podemos observar a existência daquelas cujos termos, a partir de um certo índice, tornam-se arbitrariamente grandes e são positivos, e de outras, cujos termos tornam-se arbitrariamente grandes em módulo, mas são todos negativos.

Definição 1.28. *Dizemos que a seqüência* (x_n) *"tende a mais infinito", e denotamos por* $x_n \to +\infty$*, se dado qualquer* $M > 0$*,* $M \in \mathbb{R}$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \geq n_0$ *implica em* $x_n > M$*.*

Analogamente, $x_n \to -\infty$ se, dado $N < 0$, $N \in \mathbb{R}$, existe $n_1 \in N$ tal que $n \geq n_1$ implica em $x_n < N$.

Exemplo 1.29. (x_n), $x_n = n$.

É trivial provarmos que $x_n \to +\infty$, pois dado $M > 0$, basta tomarmos $n_0 > M$ e temos $x_n > M$, $\forall\ n \geq n_0$ pois $x_n = n$.

Exemplo 1.30. (x_n), $x_n = 1 - n^2$. Provamos que $x_n \to -\infty$

De fato, seja $N < 0$. Então

$x_n = 1 - n^2 < N \Leftrightarrow n^2 > 1 - N \Leftrightarrow n > \sqrt{1-N}$ (lembre-se que $N < 0$ e portanto $1 - N > 0$).

Assim, basta tomarmos n_0 como sendo qualquer inteiro maior que $\sqrt{1-N}$. Logo, $1 - n^2 \to -\infty$.

Exemplo 1.31. (x_n), $x_n = (-1)^n.n$

Esta seqüência não tende nem a menos infinito nem a mais infinito, pois seus termos oscilam na reta, sendo ora negativo, ora positivo.

Observação: Deve-se observar com toda ênfase que $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais. As seqüências (x_n) para as quais $\lim x_n = +\infty$ ou $\lim x_n = -\infty$ não são convergentes. Estas notações servem apenas para dar informação sobre o comportamento das seqüências para valores grandes de n.

1.6 Propriedades dos Limites Infinitos

(1) Sejam as seqüências (x_n) e (y_n) tais que $x_n \to +\infty$ e (y_n) é limitada inferiormente. Então, $(x_n + y_n)$ tende a $+\infty$.

Demonstração: Seja $M > 0$, $M \in \mathbb{R}$. Sendo (y_n) limitada inferiormente, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $y_n \geq K$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Como $x_n \to +\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, então $x_n > M - K$. Assim, para todo $n \geq n_0$, temos $x_n + y_n > M - K + K = M$, ou seja, $x_n + y_n > M$. Portanto $(x_n + y_n) \to +\infty$. $\square$

Exemplo 1.32. $(x_n), x_n = n^2$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Observamos que $x_n \to +\infty$ e (x_n) é limitada inferiormente.

Assim, $(x_n + x_n) = (2n^2) \to +\infty$

Exemplo 1.33. (x_n), $x_n = 2n^2$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$;

Temos que $x_n \to +\infty$.

Seja (y_n), $y_n = -n^2$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$; (y_n) não é limitada inferiormente.

Ainda assim, $(x_n + y_n) = (2n^2 - n^2) = n^2 \to +\infty$.

Este exemplo prova que a recíproca do resultado provado acima é falsa.

(2) Se $x_n \to +\infty$ e (y_n) é limitada inferiormente por um número positivo, então $x_n.y_n \to +\infty$.

Demonstração: Temos $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$ tal que $(y_n) \geq C\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Seja $M > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica em $x_n > \frac{M}{C}$.

Assim, para $n \geq n_0$ temos $x_n.y_n > \frac{M}{C}.C = M$, o que prova que $x_n.y_n \to +\infty$. $\square$

Exemplo 1.34. (x_n), $x_n = n^2$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $x_n \to +\infty$

(y_n), $y_n = 1 + \frac{1}{n^2}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$; (y_n) é limitada inferiormente por 1.

Logo, $x_n.y_n = n^2 + 1 \to +\infty$

Exemplo 1.35. (x_n), $x_n = n^2$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $x_n \to +\infty$

(y_n), $y_n = \frac{1}{n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$; não satisfaz a hipótese.

No entanto, $x_n.y_n = n \to +\infty$

Este exemplo mostra que a recíproca da propriedade (2) não é válida.

(3) Seja (x_n) uma seqüência de números reais positivos. Então $x_n \to +\infty$ se, e somente se $\lim(\frac{1}{x_n}) = 0$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha que $x_n \to +\infty$. Seja $\epsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica em $x_n > \frac{1}{\epsilon}$. Assim, para todo $n \geq n_0$ temos $\frac{1}{x_n} < \epsilon$. Como $x_n > 0$, segue que $0 < \frac{1}{x_n} < \epsilon$, ou seja, $|\frac{1}{x_n} - 0| < \epsilon$. Logo, $\lim(\frac{1}{x_n}) = 0$.

($\Leftarrow$) Suponha $\lim \frac{1}{x_n} = 0$. Seja $M > 0$.

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ temos $|\frac{1}{x_n} - 0| < \frac{1}{M}$, ou seja $\frac{1}{x_n} < \frac{1}{M}$, pois $x_n > 0$.

Logo, para $n \geq n_0$ temos $x_n > M$, donde podemos concluir que $x_n \to +\infty$. $\square$

Observação: Intuitivamente, o que o resultado acima mostra é que se os termos de uma seqüência tornam-se infinitamente grandes, então o inverso destes termos devem se tornar infinitamente pequenos, positivamente, e portanto, devendo ser zero.

(4) Sejam (x_n) e (y_n) seqüências de números reais positivos. Se (x_n) é limitada inferiormente por um número positivo e se $\lim y_n = 0$, então $\frac{x_n}{y_n} \to +\infty$.

Demonstração: Seja $c > 0$, $c \in \mathbb{R}$, tal que $x_n \geq c$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Seja $M > 0$.

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $0 < y_n < \frac{c}{M}$.

Logo, para $n \geq n_0$, $\frac{x_n}{y_n} \geq \frac{c}{y_n} > \frac{c}{\frac{c}{M}} = M$ e assim, $\frac{x_n}{y_n} > M$.

Portanto, $\frac{x_n}{y_n} \to +\infty$. $\square$

(5) Sejam (x_n) e (y_n) seqüências de números reais positivos. Se (x_n) é limitada e $y_n \to +\infty$, então $\lim(\frac{x_n}{y_n}) = 0$.

Demonstração: Seja $K > 0$ tal que $x_n \leq K$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Seja $\epsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ temos $y_n > \frac{K}{\epsilon}$. Logo, para $n \geq n_0$, temos:

$$\frac{x_n}{y_n} \leq \frac{K}{y_n} < \frac{K}{\frac{K}{\epsilon}} = \epsilon \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} < \epsilon$$

e assim se $n \geq n_0$ temos $|\frac{x_n}{y_n} - 0| < \epsilon$, e portanto $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$. $\square$

Capítulo 2

Séries Numéricas em $\mathbb{R}$

Seja $a_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A expressão $\sum\limits_{n=1}^{m} a_n$ representa a soma $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$, ou seja a soma de uma quantidade finita de números reais.

Se, no entanto, fosse escrito $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, o que isso representaria? Uma soma infinita?

Faremos agora um estudo no sentido de estendermos a operação de adição (até agora definida para um número finito de números reais) de modo a atribuir significado a uma igualdade do tipo $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$, na qual o primeiro membro é uma "soma" com uma infinidade de parcelas. É claro que não tem sentido somar uma seqüência infinita de números reais. O que o primeiro membro da igualdade acima exprime é o limite $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n})$.

Definimos assim, somas infinitas através de limites. Dessa forma, é de se esperar que algumas somas possam ser efetuadas (isto é, convirjam) e outras não, já que nem toda seqüência possui limite. As expressões do tipo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serão chamadas de séries em vez do termo "soma infinita". A parcela a_n é chamada o n-ésimo termo ou termo geral da série.

O problema principal da teoria das séries é determinar quais são convergentes e quais não são, ou seja, determinar quando uma "soma" com uma infinidade de parcelas resulta num número real e quando não.

2.1 Convergência de Séries

Seja (a_n) uma seqüência de números reais, e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série.

Definimos a seqüência das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como sendo a seqüência (s_n) abaixo:

$$\begin{aligned}
&s_1 = a_1 \\
&s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2 \\
&s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3 \\
&\vdots \\
&s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s_{n-1} + a_n
\end{aligned}$$

Observe que, se (s_n) converge, digamos para S, então $\lim s_n = S$, ou seja, $\lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, donde resulta a seguinte definição:

Definição 2.1. *Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge para S se a seqüência (s_n) de suas somas parciais tem limite S. Neste caso, S é a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Se (s_n) não possui limite, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Observação: Pode-se algumas vezes representar uma série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ou $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, ou mesmo $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$. Ou seja, podemos incluir o termo a_0 ou começar a partir de um certo termo a_k que isto não acarretará problemas no estudo de convergência da série. Isto se exprime dizendo que o caráter de convergência de uma série não se altera se dela omitimos (ou acrescentamos) um número finito de termos.

De fato, suponha que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convirja, digamos para S, ou seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Logo, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_0 + S$. Portanto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente também.

Se agora fizermos $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ temos:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) = S - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}).$$

Portanto, $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ converge para $S - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})$.

Como estamos avaliando o caráter de convergência, o estudo não fica alterado se da série omitimos ou acrescentamos um número finito de termos, como já afirmado acima. Entretanto, é obvio que a retirada ou o acréscimo de certos termos irá afetar a soma e, portanto, a série modificada poderá convergir para um valor diferente daquele para o qual a série inicial converge.

Exemplo 2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

Temos: $s_1 = -1$

$s_2 = 0$

$s_3 = -1$

$s_4 = 0$

$\vdots$

A seqüência (s_n) fica assim definida:

$$s_n = \begin{cases} -1, & \text{se n é ímpar;} \\ 0, & \text{se n é par.} \end{cases}$$

Com base nos estudos sobre seqüências, podemos afirmar que (s_n) diverge e portanto, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ é divergente.

Se lhe fosse perguntado quanto vale a soma $(-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots)$ não lhe passaria pela cabeça dar o valor zero como resposta? Afinal, não se anulam aos pares as parcelas consecutivas?

Mas $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ diverge e, assim, a soma $(-1 + 1 - 1 + \cdots)$ não vale zero!

Este é um exemplo interessante que nos mostra ser necessário reavaliar nossos conceitos quando nos deparamos com uma nova realidade. Nesse caso, nossa nova realidade são as "somas infinitas" ou séries, que nem sempre estarão de acordo com os conceitos e idéias já cristalizados para somas finitas de números reais.

Exemplo 2.3. Vejamos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)}$

Para facilitar a obtenção do termo geral da seqüência das somas parciais (s_n), é interessante observar que:

$$\frac{1}{n.(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Assim,

$s_1 = 1 - \frac{1}{2}$

$s_2 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3}$

$s_3 = (1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{4}$

.

.

.

$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Vejamos,

$\lim s_n = \lim(1 - \frac{1}{n+1}) = 1 - 0 = 1.$

Portanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)}$ converge, e sua soma vale 1, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)} = 1$

Exemplo 2.4. Faremos agora um estudo sobre a série geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$, $a \in \mathbb{R}$, que provavelmente é o exemplo mais conhecido de série convergente. Vejamos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^n + \cdots = 1 + a + a^2 + \cdots$$

Vamos encontrar (s_n):

$s_1 = 1$

$s_2 = 1 + a$

$s_3 = 1 + a + a^2$

.

.

.

$s_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$

Então,

$$(s_n.a) = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$$

$$s_n - s_n a = s_n(1 - a) = 1 - a^n$$

donde chegamos a $s_n = \frac{1-a^n}{1-a}$

Precisamos agora avaliar a questão de convergência de (s_n), pois disso depende a convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$.

Para tanto, consideramos os seguintes casos: $|a| < 1$, $|a| > 1$, $|a| = 1$.

1º) Se $|a| < 1$, então $\lim |a|^n = 0$. Portanto, (s_n) converge para $\frac{1}{1-a}$.

2º) Se $|a| > 1$, então $\lim |a|^n = +\infty$ e, portanto, (s_n) diverge.

3º) Se $|a| = 1$. Vejamos:

se $a = 1$, então $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + 1^2 + 1^3 + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots$, que diverge.

se $a = -1$, então $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, que também diverge.

Assim, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$ converge se, e somente se, $|a| < 1$.

Neste caso, sua soma vale $\frac{1}{1-a}$. Observamos que este é o caso das progressões geométricas com razão q, onde $|q| < 1$.

Exemplo 2.5. Chama-se série harmônica de ordem p a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{Q}$.

Adiante será mostrado que esta série converge se $p < 1$ e diverge se $p \geq 1$.

Vejamos agora o caso em que $p = 1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Mostramos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, provando que (s_n) diverge. Vejamos:

$s_{2^n} = 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+\cdots+(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}) > 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\cdots$

$\cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \frac{n}{2}$, $\forall\ n \in N$.

Como $(s_{2^n}) > (1 + \frac{n}{2})$ e $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{n}{2}) = +\infty$, então $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2^n}) = +\infty$.

Por conseguinte $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ e, portanto, (s_n) é divergente.

2.2 Operações com Séries

A partir das propriedades aritméticas do limite de seqüências, temos os seguintes resultados:

1) Se as séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é convergente, com $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Demonstração: Suponhamos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes, com somas A e B respectivamente. Assim,

$$lim\ s_n = A \quad e \quad \lim\ t_n = B,$$

onde (s_n) e (t_n) são as seqüências das somas parciais de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente.

A seqüência das somas parciais da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ será (c_n), com $c_n = s_n + t_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Temos $\lim c_n = \lim s_n + \lim t_n = A + B$.

Assim, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge para $A + B$, ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = A + B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

$\square$

2) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e tem soma A, então para todo r em $\mathbb{R}$ temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} r.a_n = r.\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Demonstração: Seja (s_n) a seqüência das somas parciais da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Temos então $\lim s_n = A$.

A seqüência das somas parciais da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r.a_n$ é $(r.s_n)$.

Vejamos: $\lim r.s_n = r.\lim s_n = r.A$.

Assim, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r.a_n = r.A = r.\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Segue diretamente dos resultados acima que:

3) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ convergem com somas A e B, respectivamente, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ converge para $A - B$.

Para provarmos este resultado basta observarmos que $(a_n - b_n) = a_n + (-1).b_n$ e usarmos (1) e (2).

4) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ diverge.

Demonstração: Sejam (s_n) e (t_n) as seqüências das somas parciais de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente.

Seja (c_n) a seqüência das somas parciais da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$. Assim, $c_n = s_n + t_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Por hipótese (s_n) converge e (t_n) diverge, donde concluimos que (c_n) diverge.

Logo, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ diverge. $\square$

5) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ são ambas divergentes, então nada se pode afirmar acerca da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$.

Vejamos: a) Sejam $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$. Logo, $(a_n + b_n) = \frac{2}{n}$ e, portanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ diverge.

b) Sejam $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{-1}{n}$. Assim, $a_n + b_n = 0$. Logo, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ que converge.

Nos exemplos vistos até o momento, conseguimos avaliar a convergência ou não de uma série, a partir da determinação e do estudo da seqüência das somas parciais (s_n) referentes a série dada. Porém, é frequentemente impossível e usualmente tedioso examinar a convergência de uma dada série pelo cálculo de suas somas parciais. Devemos portanto, desenvolver métodos que possibilitem a avaliação de convergência de séries a partir do seu termo geral a_n.

2.3 Critérios de Convergência

Teorema 2.6. *A série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se, e somente se, para todo* $\epsilon > 0$ *existe um natural* n_0*, dependente de* ϵ*, tal que* $|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k| < \epsilon$ *quando* $n \geq m \geq n_0$.

Demonstração: Observe que, sendo (s_n) a seqüência das somas parciais de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, então $|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k| = |s_n - s_{m-1}|$.

($\Rightarrow$) Hipótese: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Tese: $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k| < \epsilon$ quando $n \geq m \geq n_0$.

De fato, sendo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, então (s_n) é convergente (segue diretamente da definição de convergência de séries).

Como (s_n) é convergente, então (s_n) é uma seqüência de Cauchy e, assim, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k| < \epsilon$ para $n \geq m \geq n_0$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k| < \epsilon$, para $n \geq m \geq n_0$. Assim, $|s_n - s_{m-1}| < \epsilon$ e, portanto (s_n) é uma seqüência de Cauchy, ou seja, (s_n) é convergente.

Portanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. $\square$

Observação: Alguns livros apresentam este teorema com o nome de Critério de Cauchy para Séries.

Este resultado é de interesse principalmente teórico, oferecendo um critério de convergência geral para séries, mas que infelizmente é difícil aplicá-lo na prática.

Por isso, veremos os resultados seguintes, que embora careçam da generalidade do teorema acima, fornecem cômodos testes de convergência para um grande número de casos.

Teorema 2.7. *Se a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, então* $\lim a_n = 0$.

Demonstração: Seja (s_n) a seqüência das somas parciais da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, temos $S \in \mathbb{R}$ tal que $\lim s_n = S$.

Evidentemente, $\lim s_{n-1} = S$. Lembramos aqui que $s_n - s_{n-1} = a_n$. Assim,

$$\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = S - S = 0.$$

Logo, $\lim a_n = 0$. $\square$

Observamos que este teorema não fornece uma condição suficiente para afirmar se uma dada série converge. Porém, fornece condição suficiente para concluir se uma série diverge. Basta para isso que o limite do termo geral da série seja diferente de zero.

É interessante, portanto, enunciarmos o teorema acima de uma outra forma, ainda que equivalente a primeira, a saber:

Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série qualquer. Se $\lim a_n \neq 0$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exemplos de aplicação do teorema:

Exemplo 2.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2}$;

Vejamos, $a_n = \frac{n^2}{1+n^2}$; $\lim(\frac{n^2}{1+n^2}) = 1 \neq 0$.

Portanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^2}$ diverge.

Exemplo 2.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n$;

$a_n = \operatorname{sen} n$; $\lim \operatorname{sen} n$ não existe, donde concluimos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n$ diverge.

Exemplo 2.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;

$a_n = \frac{1}{n}$; $\lim(\frac{1}{n}) = 0$.

Podemos decidir alguma coisa sobre a convergência desta série?

Não! (Veja o teorema 2.7).

Teorema 2.11. *Seja $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, a seqüência das somas parciais (s_n) for limitada.*

Demonstração: Sendo $a_n \geq 0$, temos $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots$, ou seja, (s_n) é monotamente não-decrescente.

Assim, (s_n) converge se, e somente se, for limitada. (Resultado de seqüências visto na seção anterior). □

O teorema acima não é utilizado diretamente no estudo de séries quanto a sua convergência, porém, segue diretamente deste teorema o seguinte resultado.

Corolário 2.12. (Critério da Comparação) *Sejam $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ séries de termos não negativos, com $a_n \geq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,*

(i) *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge;*

(ii) *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Demonstração: Sejam (s_n) e (t_n) as seqüências das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente.

(i) Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, temos $\lim s_n = S$, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $S \in \mathbb{R}$.

Observamos que a seqüência (t_n) é monotonamente não decrescente, pois $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq \cdots$. Além disso,

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

Portanto, (t_n) é limitada. Por ser monótona e limitada (t_n) converge.

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

(ii) Suponhamos por absurdo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Então, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente (ítem (i)). Mas isto contradiz a hipótese.

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente. □

Observamos que o critério demonstrado acima exige que $a_n \geq b_n$ para todo $n \in N$. Porém, este critério continua sendo válido mesmo quando $a_n \geq b_n$ a partir de um certo índice n_0. Ou seja, dada as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de termos não negativos, tais que $a_n \geq b_n$ para todo $n \geq n_0$, então

(i) a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica na convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica na divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demonstração: Sejam (s_n) e (t_n) as seqüências das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente. Seja $c_n = max\{a_n, b_n\}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$M = \sum_{n=1}^{n_0-1} c_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{n_0-1}$$

Como $c_n \geq a_n$ e $c_n \geq b_n$, temos $\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n \leq M$ e $\sum_{n=1}^{n_0-1} b_n \leq M$.

(i) Por hipótese, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Assim, $\lim s_n = S$, ou seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, onde $S \in \mathbb{R}$.

A seqüência (t_n) é monotamente não-decrescente, pois $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \cdots \leq t_n \leq \cdots$. Além disso,

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} b_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \leq M + \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n.$$

Como $a_n \geq b_n$ para $n \geq n_0$, então

$$M + \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \leq M + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq M + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = M + S.$$

Logo, $t_n \leq M + S$ e, portanto, (t_n) é limitada.

Concluimos então que (t_n) converge e, assim, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

(ii) Suponhamos por absurdo que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente. Concluimos assim que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, o que contradiz a hipótese.

Portanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. $\square$

O critério demonstrado acima é muito útil para avaliarmos a convergência ou não de uma dada série, através da comparação desta com uma outra série previamente conhecida, agindo da seguinte forma:

Se a série cujo os termos são maiores for convergente então, obrigatoriamente, a outra será convergente.

Se a série com os termos menores divergir então a outra irá divergir também.

Fizemos um estudo das séries abaixo, quanto a sua convergência, com base no critério da comparação.

Exemplo 2.13. Consideramos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Observamos que $\sqrt{n} \leq n$, $\forall\ n \geq 1$.

Assim, $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, $\forall\ n \geq 1$.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, concluimos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Exemplo 2.14. Consideramos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

Notamos que $n^n \geq 2^n$, $\forall\ n \geq 2$.

Logo, $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n} = (\frac{1}{2})^n$, $\forall\ n \geq 2$.

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ converge, concluimos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})^n$ converge.

Exemplo 2.15. Consideramos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3+5^n}$

Observamos que $\frac{4}{3+5^n} < \frac{4}{5^n}$.

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n} = 4. \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{5})^n$ que converge, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3+5^n}$ converge.

Exemplo 2.16. Consideramos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Temos que $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n^2}$, $\forall\ n \geq 1$.

Sabemos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente. A partir disso não podemos concluir coisa alguma acerca da convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ usando o critério da comparação.

Teorema 2.17. (Critério da Integral) *Sejam $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos e $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ a função obtida pela introdução da variável contínua x no lugar da variável discreta n, ou seja, a função f é tal que $f(n) = a_n$, $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.*

Assim, se f for contínua e decrescente, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e a integral imprópria $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ convergem ou divergem simultaneamente.

Demonstração:

Suponhamos primeiro que $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ convirja. Assim, reportando-nos a figura (a) e raciocinando em termos de área, fica claro que

$$\sum_{k=2}^{n} a_k \leq \int\limits_1^n f(x)dx \leq \int\limits_1^\infty f(x)dx.$$

Seja (s_n) a seqüência das somas parciais associadas a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Por hipótese $a_n > 0$ e portanto, (s_n) é monotamente crescente.

Temos ainda que

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k \leq a_1 + \int\limits_1^\infty f(x)dx.$$

Logo, (s_n) é limitada.

Como (s_n) é monótona e limitada, (s_n) converge.

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Consideramos agora o caso em que $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ seja divergente.

Assim, a integral $\int\limits_1^{n+1} f(x)dx$ tende para o infinito quando $n \to +\infty$.

Observamos através da figura (b) que

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \geq \int\limits_1^{n+1} f(x)dx.$$

Portanto, (s_n) é ilimitada e, assim, divergente.

Concluimos então que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. $\square$

Observação: O critério da integral foi demonstrado para o caso em que $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Todavia, como em todos os resultados vistos até o momento, podemos aplicar este critério mesmo para os casos em que $a_n > 0$ para todo n maior ou igual a um certo índice n_0. Nesse caso, será necessário que a função f seja contínua e decrescente no intervalo real $[n_0, \infty)$.

Exemplo 2.18. Retornamos a série harmônica de ordem p: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{Q}$.

Já vimos que esta série diverge para $p = 1$.

Seja $f(x) = \frac{1}{x^p}$, sendo $x \geq 1$.

Se $p < 0$, obviamente a série será divergente, pois nesse caso $\lim \frac{1}{n^p} \neq 0$.

Consideramos então $p > 0$. Vejamos:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p} = \lim_{t\to\infty} (\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}) \ , \qquad \text{para p} \neq 1.$$

Se $p > 1$ então $p - 1 > 0$ e $t^{1-p} = \frac{1}{t^{p-1}}$.

Logo, $\lim\limits_{t\to\infty} t^{1-p} = 0$.

Assim, $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$, o que mostra que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge.

Se $p < 1$ então $\lim\limits_{t\to\infty} t^{1-p} = +\infty$ e, portanto, a integral diverge.

Concluimos assim que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge.

Se $p = 1$ já foi demonstrado que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge.

Conclusão: A série harmônica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge se, e somente se, $p > 1$.

Observação: As séries harmônicas e geométricas constituem um conjunto muito útil, para o qual a questão de convergência está completamente resolvida. Utilizando-se estas séries juntamente com o teste da comparação, pode ser tratado e resolvido um grande número de exemplos.

Quando tratamos de séries cujo os termos são todos não negativos, a seqüência das somas parciais associada a estas são todas monotamente não-decrescentes e, por conseguinte, estas séries convergem ou divergem conforme sua seqüência das somas parciais for limitada superiormente ou não. Para séries mais gerais, entretanto, a questão de convergência depende muito fortemente da grandeza e da distribuição dos seus termos positivos e negativos. A seguir, fizemos um estudo das séries que são absolutamente convergentes e das séries cujo os termos alteram os sinais.

Definição 2.19. *Uma série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente quando* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge.*

Segue diretamente da definição que toda série convergente que não possui termos negativos é absolutamente convergente.

Teorema 2.20. *Toda série absolutamente convergente é convergente. Ou seja, se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *também converge.*

Demonstração: Por hipótese $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge e assim, pelo teorema 2.6 para qualquer $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\sum_{k=m}^{n} |a_k|| < \epsilon, \quad \text{para n} \geq \text{m} \geq \text{n}_0.$$

Observamos que

$$|\sum_{k=m}^{n} |a_k|| = \sum_{k=m}^{n} |a_k| \quad e \quad |\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k|$$

pois o módulo de uma soma é menor ou igual a soma dos módulos.

Como $\sum_{k=m}^{n} |a_k|$ pode tornar-se arbitritariamente pequeno, bastando para tanto tomarmos m suficientemente grande, então a seqüência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é de Cauchy e, assim, convergente.

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. □

Uma outra demonstração para este teorema é a seguinte:

Definimos $b_n = a_n + |a_n|$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Assim, $a_n = b_n - |a_n|$.

Provando que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge estará demonstrado o teorema, pois a diferença entre séries convergentes resulta em uma série convergente.

Vejamos,

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

Somando $|a_n|$ a cada membro da desigualdade acima, temos

$$0 \leq b_n \leq 2.|a_n|, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

Segue diretamente da hipótese que $\sum_{n=1}^{\infty} 2.|a_n|$ converge.

Pelo critério da comparação concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Exemplo 2.21. Seja a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Observamos que esta série é absolutamente convergente, pois a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (série harmônica com $p = 2$).

Portanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

Exemplo 2.22. Consideramos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Esta série não é absolutamente convergente, pois como já demonstrado, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Observação: A recíproca do teorema acima não é verdadeira. O contra-exemplo típico é a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, que mesmo não sendo absolutamente convergente (como visto no exemplo 2.22), a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente. (Esta conclusão carece do estudo de séries de funções. Apenas informamos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \log 2$).

Quando uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é divergente, dizemos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente.

Teorema 2.23. (Critério da Razão) *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série com todos os termos não nulos. Seja* $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L$, $L \in \mathbb{R}$. *Então,*
(i) *Se* $L < 1$ *a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge;*
(ii) *Se* $L > 1$ *ou se* $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty$, *a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Demonstração: (i) Suponhamos $L < 1$. Seja r um número real fixo tal que $0 \leq L < r < 1$.

Da definição de limite podemos afirmar que existe um natural n_0 suficientemente grande, tal que $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < r$, para todo $n \geq n_0$, ou seja, $|a_{n+1}| < r.|a_n|$.

Assim, para $n \geq n_0$ temos

$$|a_{n_0+1}| < r.|a_{n_0}|$$

$$|a_{n_0+2}| < r.|a_{n_0+1}| < r^2.|a_{n_0}|$$

$$|a_{n_0+3}| < r.|a_{n_0+2}| < r^3.|a_{n_0}|,$$

de modo geral

$$|a_{n_0+n}| < r^n.|a_{n_0}|, \quad \forall\, n \in N.$$

Como $0 < r < 1$ e $|a_{n_0}|$ é uma constante, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n.|a_{n_0}|$ converge pois,

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n.|a_{n_0}| = |a_{n_0}|.\sum_{n=1}^{\infty} r^n \quad \text{(série geométrica de razão } r\text{)}$$

Pelo critério da comparação, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{n_0+n}|$ converge.

Observamos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{n_0+n}| = \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n|$. Como a omissão de um número finito de termos não altera o caráter de convergência de uma série, concluimos que também a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Assim, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

Logo, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(ii) Suponhamos $L > 1$ ou $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty$.

Assim, existe um natural n_1, suficientemente grande, que satisfaz $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$, para todo $n \geq n_1$.

Então, $|a_{n+1}| > |a_n|$, para todo $n \geq n_1$.

Concluimos assim, que a seqüência cujo termo geral é $|a_n|$ é crescente a partir do termo de ordem n_1. Portanto, $\lim |a_n| \neq 0$.

Logo, $\lim a_n \neq 0$, donde segue que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente. $\square$

Observação: Se $L = 1$ nada se pode afirmar, pois nesse caso, a série pode convergir ou divergir, como apresentado abaixo:

Exemplo 2.24. Consideramos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Temos $a_n = \frac{1}{n}$; Calculamos L:

$$L = \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}| = |\frac{n}{n+1}| = 1$$

Como sabemos, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Exemplo 2.25. Consideramos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Neste caso $a_n = \frac{1}{n^2}$; Calculamos L:

$$L = \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}| = |\frac{n^2}{(n+1)^2}| = 1$$

No entanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (série harmônica de ordem 2).

Teorema 2.26. (Critério da Raiz) *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série numérica qualquer. Seja* $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$. *Então,*

(i) *Se* $L < 1$ *a série converge;*

(ii) *Se* $L > 1$ *a série diverge, mesmo quando* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$.

Demonstração: (i) Suponhamos $L < 1$. Seja r um número real fixo tal que $0 \leq L < r < 1$.

Da definição de limite podemos afirmar que existe um natural n_0, suficientemente grande, tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < r$, para todo $n \geq n_0$.

Assim, $|a_n| < r^n$, para todo $n \geq n_0$.

Como $0 < r < 1$ a série $\sum_{n=n_0}^{\infty} r^n$ converge e, a partir do critério da comparação segue que $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ converge. Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge e assim, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Suponhamos $L > 1$.

Existe um natural n_1, suficientemente grande, satisfazendo $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ para todo $n \geq n_1$.

Assim, $|a_n| > 1$ para todo $n \geq n_1$. Portanto, $\lim |a_n| \neq 0$. Logo, $\lim a_n \neq 0$.

Concluimos então que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. □

Observação: Novamente nada se pode afirmar com respeito a convergência quando $L = 1$. Da mesma forma que o critério da razão, quando $L = 1$ a série pode convergir ou não.

Exemplo 2.27. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

Usamos o critério da razão:

$$\lim |\frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}}| = \lim \frac{(n+1)!.2^n}{2^{n+1}.n!} = \lim \frac{n+1}{2} = \infty$$

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ diverge.

Exemplo 2.28. Consideramos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

Usamos o critério da raiz:

$$\lim \sqrt[n]{(\frac{1}{\ln n})^n} = \lim \frac{1}{\ln n} = 0$$

Portanto, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ converge.

O critério da razão é frequentemente mais fácil de aplicar do que o critério da raiz, pois em geral é mais fácil calcular quocientes do que calcular raízes n-ésimas. Entretanto, o critério da raiz é mais abrangente que o da razão, uma vez que sempre que existir o limite de $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ existirá também o limite de $\sqrt[n]{|a_n|}$, e terão o mesmo valor. Porém, é possível que exista o limite de $\sqrt[n]{|a_n|}$ sem que exista o limite de $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$.

2.4 Séries Alternadas

Seja $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. As séries do tipo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n.a_n$ ou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.a_n$ são chamadas de séries alternadas.

Exemplos de tais séries são:

Exemplo 2.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.\frac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$

Exemplo 2.30. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{\ln m+1} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots.$

Para avaliar o caráter de convergência de uma série alternada, o melhor que se tem a fazer é verificar se a série converge absolutamente, pois nesse caso, a série alternada é convergente também. Pode porém acontecer que a série não seja convergente absolutamente. Nesse caso, para concluir sobre a convergência da série alternada podemos usar o resultado abaixo.

Teorema 2.31. (Critério de Leibnitz) *Seja* (a_n) *uma seqüência de termos positivos. Se* (a_n) *é decrescente e* $\lim a_n = 0$*, então a série alternada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.a_n$ *converge.*

Demonstração: (Provamos que a seqüência (s_n) das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.a_n$ converge).

De fato, observamos que os termos de ordem ímpar da série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.a_n$ são todos positivos e os termos de ordem par são todos negativos.

Consideramos a subseqüência $(s_{2n}) = (s_2, s_4, s_6, \cdots)$. Temos:

$$s_{2n} = \sum_{n=1}^{2n}(-1)^{n+1}.a_n = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

Sendo (a_n) decrescente, $(a_{2k-1} - a_{2k}) > 0$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

Assim, $s_2 < s_4 < s_6 < \cdots$, donde concluimos que (s_{2n}) é monotamente crescente.

Vejamos ainda que

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

Como $(a_{2k} - a_{2k+1}) > 0$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, segue que $s_{2n} \leq a_1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Logo, (s_{2n}) é monotonamente crescente e limitada superiormente por a_1, portanto, convergente.

Seja então $S \in \mathbb{R}$ tal que $\lim s_{2n} = S$.

Consideramos agora a subseqüência $(s_{2n-1}) = (s_1, s_3, s_5, \cdots)$

Temos

$$\lim s_{2n} - s_{2n-1} = \lim a_{2n} = \lim a_n = 0$$

Logo, $\lim s_{2n} = \lim s_{2n-1} = S$

Concluimos então que as duas subseqüências de (s_n) possuem o mesmo limite, S. Como a seqüência (s_n) é completamente definida por essas duas subseqüências, temos também $\lim s_n = S$.

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.a_n$ converge. $\square$

Observação: Considerando todas as hipóteses do teorema acima, podemos afirmar que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.a_n$ também converge, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.a_n = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.a_n.$$

Exemplo 2.32. Consideramos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

Esta série não converge absolutamente, pois $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Observamos entretanto que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{1}{n}$.

Como $\frac{1}{n} > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $(\frac{1}{n})$ é decrescente e $\lim \frac{1}{n} = 0$, concluimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

Exemplo 2.33. Vejamos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Esta série converge, pois converge absolutamente.

Exemplo 2.34. Consideramos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

Esta série não é absolutamente convergente, uma vez que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ diverge (série harmônica com $p < 1$).

No entanto, $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $(\frac{1}{\sqrt[3]{n}})$ é decrescente e $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$.

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ converge.

2.5 Algumas Aplicações

Agora apresentamos alguns exemplos que justificam a teoria estudada.

Consideramos a seguinte situação: A extremidade de um pêndulo, partindo do repouso, percorre um arco de 30 cm de comprimento. Depois, a cada movimento sucessivo ele percorre um arco que tem 90% do comprimento do anterior. Considerando esta situação ideal e desprezando qualquer outra influência, qual será o espaço total percorrido pela extremidade do pêndulo até o repouso?

Solução do problema:

1º movimento $\rightarrow$ 30 cm (espaço percorrido)

2^o movimento $\rightarrow 30.\frac{90}{100}$ cm (espaço percorrido)

3^o movimento $\rightarrow 30.(\frac{90}{100})^2$ cm (espaço percorrido)

.
.
.

n-ésimo movimento $\rightarrow 30.(\frac{90}{100})^{n-1}$ cm (espaço percorrido)

Assim, o espaço total percorrido (E_p) até o n-ésimo movimento, em cm será

$$E_p = 30 + 30.\frac{90}{100} + 30.(\frac{90}{100})^2 + \cdots + 30.(\frac{90}{100})^{n-1}$$

Neste momento é necessário uma consideração importante. Como sabemos, o pêndulo pára após uma certa quantia de movimentos (a experiência nos mostra isso). Porém, teoricamente consideramos que o pêndulo jamais pare seu movimento, ainda que este movimento torne-se infinitamente pequeno (o que na prática representa o repouso). Assim, o espaço total E_t percorrido pela extremidade do pêndulo até o repouso, em cm será

$$E_t = 30 + 30.\frac{90}{100} + 30.(\frac{90}{100})^2 + 30.(\frac{90}{100})^3 + \cdots = 30.\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{9}{10})^n$$

Como sabemos, $30.\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{9}{10})^n = 30.(\frac{1}{1-\frac{9}{10}}) = 300$

Portanto, a extremidade do pêndulo percorre 300 cm até o repouso.

Este é um exemplo simples da aplicabilidade da teoria de séries na solução de problemas reais.

Vejamos o exemplo seguinte. Nosso objetivo é provar que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge para um valor menor ou igual a 2.

De fato, como já provado, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge (série harmônica com $p > 1$).

Observamos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1.1} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \cdots$. Consideramos agora a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots$$

que converge e sua soma vale 1 como provado no Exemplo 2.3.

Assim, $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.(n+1)} = 2$.

Como os termos de $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$ são termo a termo menores ou iguais aos de $1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n.(n+1)}+\cdots$, e como esta última converge para 2, pelo critério da comparação a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, e além disso podemos afirmar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leq 2$.

Resumidamente, lembramos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, o que significa dizer que a soma dos inversos dos números naturais torna-se tão grande quanto se queira, bastando para tanto somarmos uma quantia suficientemente grande de parcelas. No entanto, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge para um valor menor ou igual a 2, ou seja, a soma dos inversos dos quadrados dos números naturais não ultrapassa 2.

Considerações Finais

Este trabalho teve grande valia não só pelo enriquecimento no que diz respeito a teoria estudada especificamente, mas também, e não menos importante, pelo aprendizado no contato com a pesquisa, na necessidade pela busca.

Com relação a teoria em si, o estudo confirmou a grande importância das séries no desenvolvimento da matemática, sendo esta um ferramenta muito poderosa tanto para a resolução de inúmeros problemas reais como também para situações extremamente abstratas.

Referências Bibliográficas

[1] Lima, E.L., *"Curso de análise"*, Projeto Euclides, IMPA, Volume 1, Rio de Janeiro (1976).

[2] Kreider, D.L., *"Introdução à análise linear"*, Ao Livro Técnico S.A., Volume 2, Rio de Janeiro (1983).

[3] Rudin, W., *"Princípios de análise matemática"*, Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro (1971).

[4] White, A.J., *"Análise real: uma introdução"*, Ed. USP, São Paulo (1973).

[5] Boyer, C.B., *"História da Matemática"*, Editora Edgard Blücher LTDA, 2ª Edição, São Paulo (1996).

[6] Notas de aula das disciplinas de cálculo 1 e cálculo 2, usadas pelo professor Rubens Starke, nessa Universidade.