

ANA BEATRIZ MICHELS

O Poder e a Beleza da $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

Florianópolis
2006

ANA BEATRIZ MICHELS

O Poder e a Beleza da $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Antônio Vladimir Martins

Florianópolis

Agosto 2006

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática - Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº. 32 / SGC / 2004.



Profª. Carmem Suzane Comitre Gimenez

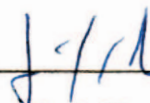
Professora da disciplina

Banca examinadora:



Antônio Vladimir Martins

Orientador



José Luiz Rosas Pinho



Rubens Starke

Sumário

Introdução	6
1 Inexistência de primitiva elementar para $\int e^{-x^2} dx$	8
1.1 Funções elementares	8
1.2 Introdução ao cálculo	9
1.3 Estudo da integral $\int e^{-x^2} dx$	11
2 Métodos para se calcular $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$	13
2.1 Convergência da integral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$	13
2.2 Método 1 - uso de sólido de revolução	14
2.3 Método 2 - uso de coordenadas polares	17
2.3.1 Regiões do I Quadrante	18
2.4 Método 3 - uso da fórmula de Wallis	20
2.4.1 Demonstração das fórmulas para I_m	21
2.4.2 Demonstração da fórmula do produto infinito de Wallis	22
2.4.3 Uma fórmula para $\sqrt{\pi}$	25
2.4.4 As integrais $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ e $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$	25
2.4.5 As desigualdades $1-x^2 \leq e^{-x^2}$ e $e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$, se $x \geq 0$	26
2.4.6 Valor da integral $\int_0^\infty e^{-y^2} dy$	28
2.5 Método 4 - uso do Geogebra e Matlab	29
3 Aplicações da $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$	31
3.1 Valor de $n!$	31

3.1.1	Fórmula de Stirling	33
3.1.2	Fórmula de Weissman	35
3.1.3	Outra fórmula para $n!$	36
3.1.4	Aperfeiçoando ainda mais $n!$	39
3.1.5	Fórmula de Stirling modificada	42
3.1.6	Relação entre a fórmula de Stirling, de Weissmann e de Stirling modificada	44
3.1.7	Fórmula de Stirling e Probabilidade	46
3.1.8	Fórmula de Stirling e Sistemas Lineares	47
3.2	Função Gama	48
3.2.1	Domínio da Função Gama	48
3.2.2	Resultados importantes	50
3.2.3	Extensão do domínio	51
3.2.4	Função Gama e Transformada de Laplace	52
3.3	Aplicação na Física	55
3.4	Distribuição Normal	57
3.4.1	Variáveis aleatórias	57
3.4.2	Distribuições de probabilidade de uma variável aleatória contínua (<i>v.a.c.</i>)	58
3.4.3	Propriedade da Curva Normal	60
3.4.4	Estudo de QI	61
	Considerações Finais	63
	Referências Bibliográficas	64

Introdução

Durante o curso de Licenciatura é grande a preocupação em se estudar Cálculo, já que esse desempenha um papel muito importante nos mais diversos ramos da Matemática, além de ser aplicado em outras áreas.

Como o Cálculo é uma área muito ampla, foi preciso escolher um conteúdo desse, mesmo sabendo que todos os outros estão interligados.

O presente Trabalho de Conclusão de Curso tem por objetivo estudar a $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$. Sabe-se que, através do Teorema Fundamental do Cálculo, a função $f = e^{-x^2}$ possui primitiva. Mas durante as aulas de Cálculo 2, quando aprende-se a calcular integral, nem as técnicas mais elaboradas facilitam o cálculo para encontrar a primitiva de certas funções. Então, usando o teorema de Liouville, será mostrado que a $\int e^{-x^2} dx$ não possui primitiva em termos de funções elementares.

Mesmo não tendo primitiva, usando quatro métodos, será possível encontrar um valor exato para a integral. No primeiro método estudar-se-á o cálculo do volume e da área do sólido de revolução criado a partir da rotação do gráfico da função $f = e^{-x^2}$ ao redor do eixo y . O segundo método consiste em associar a integral em estudo a uma integral dupla imprópria. Essa integral será calculada separadamente em três regiões do primeiro quadrante. No terceiro método, através de uma abordagem histórica, demonstrar-se-á a fórmula do produto infinito de Wallis. Por fim, o quarto método mostrará, utilizando o Geogebra e o Matlab, o valor da integral graficamente.

A integral em estudo pode ser aplicada em muitos resultados tanto matemáticos quanto físicos. O interessante é que o uso da $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ nesses resultados facilita seus cálculos já que esses, muitas vezes, são resolvidos por maneiras diferentes, sendo essas mais complicadas e/ou demoradas. A primeira aplicação é no cálculo de $n!$, quando n for grande.

Estudar-se-á a fórmula de Stirling juntamente com alguns aperfeiçoamentos através do Matlab. A segunda aplicação é no estudo da função Gama, sendo usado um resultado num problema físico. E a última aplicação é na probabilidade, no estudo da distribuição normal.

O motivo pelo qual este tema foi escolhido é o fato de muitas vezes nos depararmos com problemas sem solução, nesse caso, uma integral sem primitiva elementar. A princípio o interesse era estudar alguns métodos e aplicações que acabaram fugindo do tema. Logo, serão abordados somente aqueles cujo conteúdo já foi visto durante a graduação.

Capítulo 1

Inexistência de primitiva elementar para $\int e^{-x^2} dx$

“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse mas a aquisição, não é a presença mas o ato de atingir a meta.”

Carl Friedrich Gauss

Para mostrar que a função f dada por $f(x) = e^{-x^2}$ não possui primitiva elementar, estudou-se o artigo “Professor, qual a primitiva de $\frac{e^x}{x}$?! (O problema de integração em termos finitos)”, de Daniel Cordeiro De Moraes Filho, encontrado na Revista Matemática Universitária nº 31, dezembro de 2001, SBM.

Antes de trabalhar com a integral em estudo, é preciso definir uma classe de funções elementares que exprimem as primitivas de certas funções.

1.1 Funções elementares

No início do curso de Cálculo os alunos deparam-se com expressões que são complicadas de serem aceitas como as primitivas de certas funções. Para uma melhor representação

dessas expressões, será definida uma classe de funções \mathbb{L} que constitui o universo das funções elementares. Então essa classe é formada por:

- i) funções racionais;
- ii) funções algébricas, isto é, funções y que são soluções de equações algébricas da forma $P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \dots + P_n(x) = 0$, onde $P_i(x)$, para $0 \leq i \leq n$, são polinômios;
- iii) função exponencial e^x ;
- iv) função logarítmica $\ln x$;
- v) funções trigonométricas;
- vi) funções trigonométricas inversas;
- vii) funções que possam ser construídas através das funções anteriores, usando-se as operações de soma, produto e composição de funções.

1.2 Introdução ao cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo, que será enunciado abaixo, estabelece uma ligação entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral. Isaac Barrow (1630 - 1677) foi quem percebeu, através do teorema, que esses dois ramos são processos inversos, mas foram Newton (1643 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) que exploraram esse fato.

Teorema 1.2.1 (Fundamental do Cálculo) *Se f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então a função*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in (a, b)$$

é uma primitiva de f , isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

Se G é outra primitiva de f então, como consequência do Teorema do Valor Médio¹, tem-se que G e F diferem por uma constante. Denota-se por $\int f(x) dx$ o processo de se calcular as primitivas de f (também chamado de antidiferenciação ou integral indefinida) e escreve-se $\int f(x) dx = F(x) + c$.

Dependendo da função f , sua primitiva pode ser facilmente encontrada. Por exemplo:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c ,$$

$$\int (x^6 + 4x) dx = \frac{x^7}{7} + 2x^2 + c ,$$

$$\int e^x dx = e^x + c ,$$

sendo c uma constante.

As primitivas dessas funções são expressas em termos de funções elementares. Só que existem casos em que o uso de técnicas mais elaboradas é inevitável para expressar a primitiva de uma função em termos de funções conhecidas. Por exemplo:

$$\int \frac{dx}{p \cdot \sin(ax) + q \cdot \cos(ax)} = \frac{2}{a \sqrt{p^2 + q^2}} \cdot \arctan h \left(\frac{q \cdot \tan\left(\frac{ax}{2} - p\right)}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right) + c ,$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + c .$$

No primeiro exemplo é preciso fazer mudança de variável e no segundo utilizar integral por partes² para encontrar sua primitiva.

A partir dos exemplos dados, pergunta-se: quais são os tipos de funções cujas primitivas podem ser expressas em termos de funções elementares?

¹O Teorema do Valor Médio diz que se f é contínua em $[a, b]$, então existe um número c em $[a, b]$ tal que $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$.

²O cálculo de uma integral pelo método de integração por partes é encontrado em [6], página 469.

1.3 Estudo da integral $\int e^{-x^2} dx$

Dada uma função f qualquer (que possui primitiva), deseja-se saber quando $\int f(x) dx \in \mathbb{L}$. Para o estudo da primitiva da função dada por $f(x) = e^{-x^2}$, tem-se o seguinte teorema ³:

Teorema 1.3.1 (Liouville) *Se S e T são funções racionais, $T \neq$ constante, tais que $\int S(x) e^{T(x)} dx \in \mathbb{L}$, então $\int S(x) e^{T(x)} dx = R(x) e^{T(x)}$, onde $R(x)$ é uma função racional.*

Segue-se então a seguinte proposição e o seguinte lema que será usado na demonstração da mesma:

Lema 1.3.1 *Seja y um polinômio com uma raiz $x = \alpha$ de multiplicidade $s \geq 1$, isto é, $y(x) = (x - \alpha)^s \cdot h(x)$, com h um polinômio tal que $h(\alpha) \neq 0$. Então $x = \alpha$ é uma raiz de multiplicidade $(s - 1)$ de sua derivada y' , ou seja, $y'(x) = (x - \alpha)^{s-1} \cdot q(x)$, com q um polinômio tal que $q(\alpha) \neq 0$.*

Proposição 1.3.1 *Seja p um polinômio com grau $gr(p) > 1$. Então $\int e^{p(x)} dx \notin \mathbb{L}$.*

Demonstração 1.3.1 *Suponha, por absurdo, que $\int e^{p(x)} dx \in \mathbb{L}$. Então, pelo teorema de Liouville tem-se $\int e^{p(x)} dx = R(x) e^{p(x)}$, para alguma função racional R . Derivando essa expressão:*

$$\frac{d}{dx} \int e^{p(x)} dx = \frac{d}{dx} (R(x) e^{p(x)}) = R'(x) e^{p(x)} + R(x) p'(x) e^{p(x)} = e^{p(x)} [R'(x) + R(x) p'(x)].$$

Como $\frac{d}{dx} (\int e^{p(x)} dx) = \frac{d}{dx} (\text{primitiva de } e^{p(x)}) = e^{p(x)}$, tem-se:

$$1 = R'(x) + R(x) p'(x). \quad (1.1)$$

³Considerar o teorema como provado.

Tomando $R = \frac{P}{Q}$, onde P e Q são polinômios que não possuem fatores em comum, e substituindo em (1.1), obtém-se:

$$1 = \left(\frac{P}{Q}\right)' + \frac{P}{Q} p' = \frac{QP' - PQ'}{Q^2} + \frac{Pp'}{Q} = \frac{QP' - PQ' + PQp'}{Q^2}$$

$$Q^2 = QP' - PQ' + PQp' \Rightarrow Q(Q - P' - p'P) = -PQ' . \quad (1.2)$$

Suponha que $gr(Q) > 0$. Seja $x = \alpha$ raiz de Q com multiplicidade $s \geq 1$. Então, $P(\alpha) \neq 0$, pois P e Q são primos entre si.

Observando os dois lados da equação (1.2), de acordo com o lema:

- i.* no lado direito da igualdade tem-se $(-PQ')$, ou seja, $x = \alpha$ é raiz de multiplicidade $(s - 1)$;
- ii.* no lado esquerdo da igualdade tem-se $[Q(Q - P' - p'P)]$, ou seja, $x = \alpha$ é raiz de multiplicidade (s) , no mínimo.

Portanto há uma contradição. Logo, Q só pode ser uma constante, ou seja, $Q' = 0$. Então a equação (1.2) fica da forma: $p'P = Q - P'$.

Como por hipótese $gr(p) > 1$, a igualdade acima não é satisfeita, pois sabe-se que $gr(p'P) \geq gr(P) > gr(P') = gr(Q - P')$. Portanto, $\int e^{p(x)} dx \notin L$, com $gr(p) > 1$. Em particular $\int e^{-x^2} dx \notin L$, ou seja, existe a primitiva de e^{-x^2} mas esta não pode ser expressa em termos de funções elementares. ■

Capítulo 2

Métodos para se calcular $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

“O que sabemos é insignificante, o que não sabemos é imenso.”

Pierre-Simon Laplace

“Lord Kelvin, físico escocês do século XIX, em certa ocasião perguntou a seus alunos: “Vocês sabem o que é um matemático?” Ele foi ao quadro negro e escreveu: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. “Um matemático”, continuou, “é uma pessoa para quem isto é tão óbvio quanto o fato de $2 + 2$ ser 4 é óbvio para você”.”

A integral imprópria $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ não é tão óbvia para qualquer matemático. Mesmo que a primitiva não possa ser expressa em termos de funções elementares, essa integral pode ser calculada por alguns métodos que serão apresentados neste capítulo.

2.1 Convergência da integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

Antes de trabalhar com os métodos para encontrar o valor exato da integral em estudo, é preciso mostrar que a mesma converge. Sabendo que a integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ é imprópria, pois seu intervalo é infinito, pela definição:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x^2} dx,$$

desde que o limite exista como um número.

Para mostrar que essa integral converge, tem-se o seguinte:

Teorema 2.1.1 (Comparação) *Suponha que f e g sejam funções contínuas com $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para $x \geq a$.*

i) *Se $\int_a^\infty f(x) dx$ é convergente, então $\int_a^\infty g(x) dx$ é convergente.*

ii) *Se $\int_a^\infty g(x) dx$ é divergente, então $\int_a^\infty f(x) dx$ é divergente.*

Primeiramente separa-se os intervalos de integração da integral:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx.$$

Analisando a integral $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$, toma-se $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = e^{-x^2}$. Sabe-se que, para $x \geq 1$, $x^2 \geq x$, ou seja, $-x^2 \leq -x$ e portanto $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Integrando os dois lados da desigualdade:

$$\int_1^\infty e^{-x^2} dx \leq \int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{-x}) \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{-t} + e^{-1}) = e^{-1}.$$

Logo, como $f(x) \geq g(x)$ e $\int_1^\infty f(x) dx$ é convergente, de acordo com o teorema de comparação, $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ é convergente. Como a integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ é definida, pode-se concluir que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ é convergente.

2.2 Método 1 - uso de sólido de revolução

Este método foi retirado do artigo “A Calculation of $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ ”, de Alberto L. Delgado, encontrado no The College Mathematics Journal, vol. 34, nº 4, setembro de 2003.

Como a integral em estudo é $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$, toma-se $f(x) = e^{-x^2}$, com $x \in [0, \infty)$, como mostra a figura (2.1).

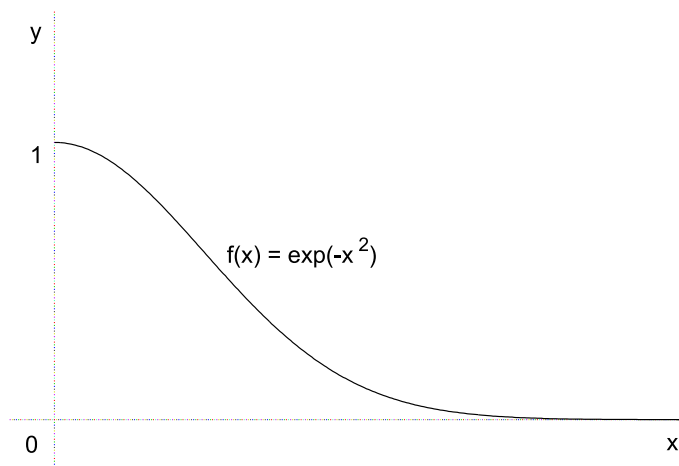


Figura 2.1: Gráfico de $f(x) = e^{-x^2}$.

Seja V o volume do sólido de revolução criado a partir da rotação do gráfico da $f(x)$ ao redor do eixo y , tendo $x \in [0, \infty]$, de acordo a figura(2.2).

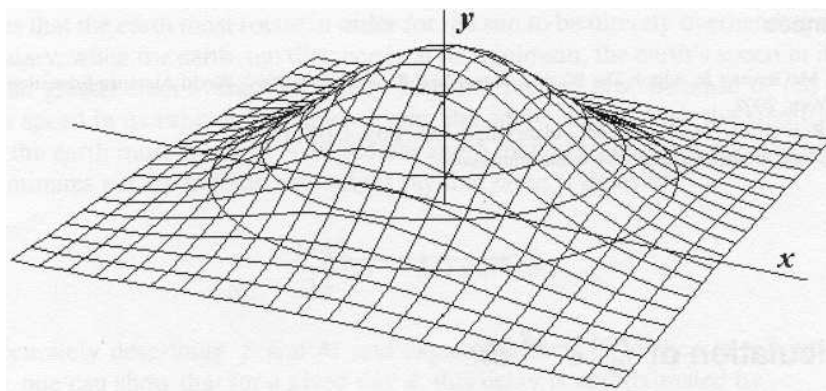


Figura 2.2: Rotação do gráfico da $f(x) = e^{-x^2}$ ao redor do eixo y .

Calculando o volume do sólido obtido pelo método das cascas¹ e tomando $a = 0$, $b \rightarrow \infty$, $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = 0$ obtem-se:

¹O cálculo da integral pelo método das cascas é encontrado em Spivak [5], página 398.

$$V = 2\pi \int_a^b x (f(x) - g(x)) dx = 2\pi \int_0^\infty x e^{-x^2} dx = 2\pi \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c x e^{-x^2} dx ,$$

$$V = 2\pi \lim_{c \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) \Big|_0^c = 2\pi \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{-e^{-c^2}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \pi . \quad (2.1)$$

Agora traça-se seções transversais paralelas ao eixo x , como mostra a figura (2.3). Seja A_t a área da seção transversal que dista t do eixo x . Logo, pela definição de integral e da simetria da figura, $V = 2 \int_0^\infty A_t dt$.

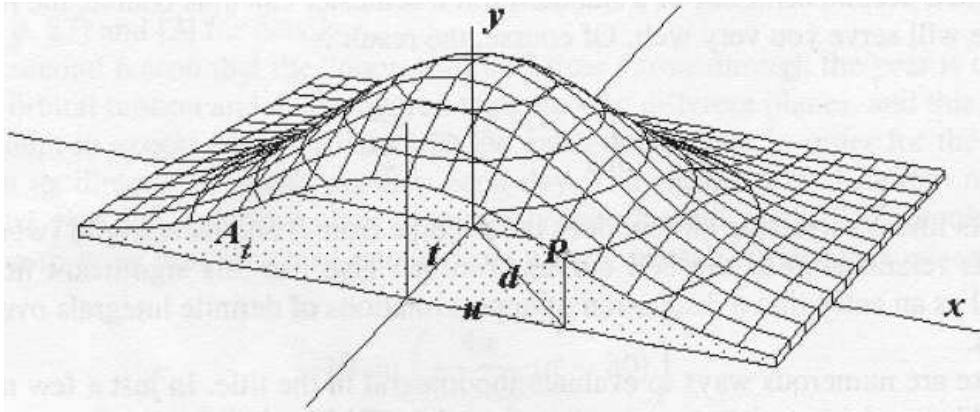


Figura 2.3: Seções transversais paralelas ao eixo x .

Para calcular A_t é preciso encontrar uma função definida pelo gráfico da seção transversal. Então, seja P um ponto pertencente à seção e d a hipotenusa formada pelos catetos t e u , de acordo com a figura (2.3), que vai desde a origem até a seção transversal. Portanto, para encontrar a altura de P basta rotacionar $d = \sqrt{u^2 + t^2}$ até o eixo x . Como P pertence ao gráfico da função, sua altura é $e^{-(\sqrt{u^2+t^2})^2}$.

A distância t é fixa, pois foi denotada como sendo a distância entre a seção transversal e o eixo x . Logo, quem varia é u , dependendo de onde estiver o ponto P pertencente ao gráfico. Então, a área da seção será:

$$A_t = 2 \int_0^\infty e^{-(u^2+t^2)} du = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} e^{-t^2} du = 2 e^{-t^2} \int_0^\infty e^{-u^2} du = 2e^{-t^2} I , \quad (2.2)$$

onde $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$. Logo, aplicando no volume:

$$V = 2 \int_0^{\infty} A_t dt = 2 \int_0^{\infty} 2e^{-t^2} I dt = 4I \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 4I^2. \quad (2.3)$$

Igualando (2.1) e (2.3), obtem-se: $4I^2 = \pi \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ou seja:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (2.4)$$

2.3 Método 2 - uso de coordenadas polares

Um dos primeiros matemáticos a mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ foi Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827). Seu método é parecido com o que será estudado nesta seção.

Para trabalhar com a $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$, primeiramente é preciso considerá-la como uma integral dupla imprópria. Então, tomando $L = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$,

$$L^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx \right) dy,$$

$$L^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \quad (2.5)$$

A última igualdade é devida ao seguinte:

Teorema 2.3.1 (Fubini) *Se f for contínua em $R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, então*

$$\int_R \int f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

A integral em (2.5) representa o volume do sólido abaixo do gráfico da função $e^{-(x^2+y^2)}$ e acima do I Quadrante. Portanto,

$$L^2 = \int_{I \text{ Quad}} \int e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \quad (2.6)$$

2.3.1 Regiões do I Quadrante

Toma-se três regiões do I Quadrante: um quarto de círculo de raio a , que está no interior de um quadrado de lado a que, por sua vez, está dentro de um quarto de círculo de raio $\sqrt{2} a$, como mostra a figura (2.4). Denota-se essas regiões por R_1 , R_2 e R_3 , respectivamente.

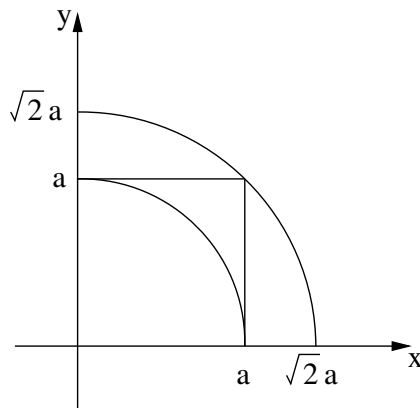


Figura 2.4: Regiões no I Quadrante.

Analisando a figura (2.4), se $a \rightarrow \infty$, as regiões irão abranger todo I Quadrante. Portanto, para encontrar L^2 em (2.6), calcula-se, separadamente, o valor da $\int e^{-r^2} dA$ em cada região, sendo $r^2 = x^2 + y^2$. Em R_1 e R_3 serão utilizadas coordenadas polares²: $0 \leq r \leq \infty$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

i) Cálculo da integral em R_1 :

$$\int_{R_1} \int e^{-r^2} dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a e^{-r^2} r dr \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-e^{-r^2}}{2} \right) \Big|_0^a d\theta,$$

$$\int_{R_1} \int e^{-r^2} dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-e^{-a^2} + 1}{2} \right) d\theta = \left(\frac{1 - e^{-a^2}}{2} \right) \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2}). \quad (2.7)$$

²O cálculo da integral por coordenadas polares é encontrado em [7], página 660.

ii) Cálculo da integral em R_3 :

$$\begin{aligned} \int_{R_3} \int e^{-r^2} dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}a} e^{-r^2} r dr \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-e^{-r^2}}{2} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}a} d\theta, \\ \int_{R_3} \int e^{-r^2} dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - e^{-2a^2}}{2} \right) d\theta = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2a^2}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

iii) Cálculo da integral em R_2 :

$$\int_{R_2} \int e^{-r^2} dA = \int_0^a \left(\int_0^a e^{-(x^2+y^2)} dx \right) dy = \int_0^a e^{-x^2} dx \int_0^a e^{-y^2} dy = \left(\int_0^a e^{-x^2} dx \right)^2. \quad (2.9)$$

Observando os resultados em (2.7), (2.8) e (2.9) e sabendo que $R_1 \subset R_2$ e $R_2 \subset R_3$, pois as três regiões são positivas:

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2}) \leq \left(\int_0^a e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2a^2}). \quad (2.10)$$

De acordo com a figura (2.5), se $a \rightarrow \infty$, $e^{-a^2} \rightarrow 0$ e $e^{-2a^2} \rightarrow 0$. Portanto, para $a \rightarrow \infty$, $\frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2}) \cong \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4} (1 - e^{-2a^2}) \cong \frac{\pi}{4}$.

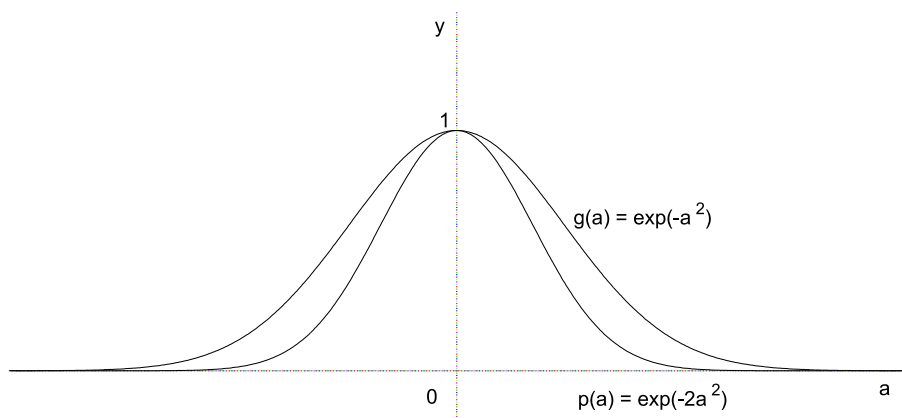


Figura 2.5: Gráfico das funções $g(a) = e^{-a^2}$ e $p(a) = e^{-2a^2}$.

Teorema 2.3.2 (Confronto ou Sanduíche) Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próxima de a (exceto possivelmente em a) e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

Logo, usando o teorema 2.3.2 em (2.10):

$$\frac{\pi}{4} \leq \left(\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (2.11)$$

2.4 Método 3 - uso da fórmula de Wallis

John Wallis (1613 - 1703) foi o principal matemático inglês antes de Newton. Escritor produtivo em muitos campos, publicou em 1655 dois livros, um sobre geometria analítica e o outro sobre análise infinita. Wallis introduziu o símbolo de infinito, empenhou-se em determinar π através de uma expressão para a área de um quadrante do círculo $x^2 + y^2 = 1$ e foi um dos primeiros a trabalhar com somas e produtos infinitos.

A fórmula de Wallis $\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right]$ é demonstrada a partir das integrais definidas:

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^m x dx = \frac{(m-1)!!}{m!!} \quad (2.12)$$

³para m inteiro ímpar e

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^m x dx = \frac{(m-1)!!}{m!!} \frac{\pi}{2} \quad (2.13)$$

para m par.

³O símbolo $m!!$ representa o produto $m(m-2)(m-4)\dots$. Esse terminará em 1 ou 2 conforme m for ímpar ou par.

2.4.1 Demonstração das fórmulas para I_m

Usando-se integral por partes para $\int \text{sen}^m x \, dx$, com $m > 0$ e tomando $u = \text{sen}^{m-1} x$ e $v' = \text{sen} x$ obtém-se:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^m x \, dx = (-\text{sen}^{m-1} x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{m-2} (1 - \text{sen}^2 x) \, dx ,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^m x \, dx = (m-1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{m-2} x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^m x \, dx \right) .$$

Logo, $m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^m x \, dx = (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{m-2} x \, dx$, ou seja,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^m x \, dx = \frac{(m-1)}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{m-2} x \, dx . \quad (2.14)$$

Encontrado esse resultado, é possível utilizá-lo no cálculo das fórmulas de Wallis. Primeiramente será trabalhado com expoente ímpar ($m = 2n + 1$).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+1} x \, dx = \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n-1} x \, dx = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n-3} x \, dx . \quad (2.15)$$

Calculando sucessivas vezes as integrais geradas através da igualdade (2.14), o expoente de $\text{sen} x$ nunca será zero, pois o mesmo é ímpar e diminui de dois em dois.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+1} x \, dx = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{[2n - (2n-2)]}{[2n+1 - (2n-2)]} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{[2n - (2n-2)]-1} x \, dx ,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+1} x \, dx = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1} , \quad (2.16)$$

que é a fórmula de I_m para m ímpar. Ainda utilizando a igualdade (2.14), será estudada a fórmula de I_m com expoente par ($m = 2n$).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} x \, dx = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n-2} x \, dx . \quad (2.17)$$

Calculando sucessivas vezes a integral, o último expoente de $\text{sen} x$ será zero, pois é par e diminui de dois em dois. Então:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} x \, dx = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{[(2n-1)-(2n-2)]}{(2n)-(2n-2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^0 x \, dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} x \, dx = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n}, \quad (2.18)$$

que é a fórmula de I_m para m par.

2.4.2 Demonstração da fórmula do produto infinito de Wallis

Isolando $\frac{\pi}{2}$ em (2.18) obtem-se:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} x \, dx. \quad (2.19)$$

Usando (2.16) e multiplicando por $\frac{1}{1} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+1} x \, dx}$ tem-se:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+1} x \, dx}. \quad (2.20)$$

Sabe-se que $|\text{sen} x| \leq 1$. De acordo com as integrais calculadas, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Então, como x pertence ao I Quadrante, $0 < \text{sen} x < 1$. Logo:

$$\text{sen}^{2n} x \leq \frac{\text{sen}^{2n} x}{\text{sen} x} = \text{sen}^{2n-1} x; \quad (2.21)$$

$$\text{sen}^{2n+1} x \leq \frac{\text{sen}^{2n+1} x}{\text{sen} x} = \text{sen}^{2n} x. \quad (2.22)$$

De (2.21) e (2.22) conclui-se que, para $n > 0$:

$$0 < \operatorname{sen}^{2n+1}x \leq \operatorname{sen}^{2n}x \leq \operatorname{sen}^{2n-1}x. \quad (2.23)$$

Propriedade 2.4.1 (Comparativa da integral) Se $g(x) \leq f(x)$ para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$.

Tomando $f(x) = \operatorname{sen}^{2n}x$ e $g(x) = \operatorname{sen}^{2n+1}x$, de acordo com a propriedade:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}x \, dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}x \, dx \Rightarrow \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}x \, dx} \geq 1. \quad (2.24)$$

Desta maneira, o quociente das integrais em (2.24) é limitado inferiormente por 1. Em seguida será encontrado um limite superior para o quociente das integrais.

Afirmção 2.4.1 O quociente das integrais em (2.24) é limitado superiormente por $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$, ou seja,

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}x \, dx} \leq 1 + \frac{1}{2n}. \quad (2.25)$$

Demonstração 2.4.1 Vale a desigualdade (2.25) se e somente se:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}x \, dx &\leq \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}x \, dx \stackrel{(2.14)}{\Leftrightarrow} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}x \, dx \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdot \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1}x \, dx \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}x \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1}x \, dx, \end{aligned}$$

o que é verdade por (2.23). Portanto, o quociente das integrais em (2.24) é limitado superiormente por $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$, ou seja,

$$1 \leq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+1} x \, dx} \leq 1 + \frac{1}{2n}. \quad (2.26)$$

■

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1$, pode-se concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+1} x \, dx} \right) = 1. \quad (2.27)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (2.20),

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \right] \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+1} x \, dx} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{2 + \frac{1}{n}} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+1} x \, dx} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \right) \cdot 1 \cdot 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \right), \quad (2.28)$$

que é a fórmula do produto infinito de Wallis.

2.4.3 Uma fórmula para $\sqrt{\pi}$

Usando (2.20) e (2.27):

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}.$$

Como tomou-se $n \rightarrow \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n}{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{2 + \frac{1}{n}}} = 1$. Logo:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}. \quad (2.29)$$

2.4.4 As integrais $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ e $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$

Trabalhando primeiramente com a $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$, através de mudança de variáveis, seja $x = \cos z$, $dx = -\operatorname{sen} z dz$. Usando (2.16) tem-se:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1-\cos^2 z)^n (-\operatorname{sen} z) dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1} z dz = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

A segunda igualdade vem da definição de integral definida como o limite de somas de Riemann⁴, $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$. Assim,

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1}. \quad (2.30)$$

⁴A soma de Riemann é da forma $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$, onde $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ sendo n o número de subintervalos de $[a, b]$ e x_i^* ponto que está no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Estudando a $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ e utilizando mudança de variáveis $x = \cotgu$, $dx = -\operatorname{cosec}^2 u du$, de acordo com (2.18):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{(1+\cotg^2 u)^n} (-\operatorname{cosec}^2 u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} u \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} du = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-2} u du = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-3}{2n-2}. \end{aligned}$$

Então:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-3}{2n-2}. \quad (2.31)$$

2.4.5 As desigualdades $1 - x^2 \leq e^{-x^2}$ e $e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$, se $x \geq 0$

Proposição 2.4.1 (Consequência do Teorema do Valor Médio) *Sejam f e g funções que satisfaçam as hipóteses do teorema do Valor Médio⁵ tal que $f(0) = g(0)$ e $f'(x) \leq g'(x)$, para $x \geq 0$. Então $f(x) \leq g(x)$, para $x \geq 0$.*

Demonstração 2.4.1 *Aplicando o Teorema do Valor Médio à função $(f-g)$ no intervalo $[0, x]$, obtem-se:*

$$(f-g)'(c) = \frac{(f-g)(x) - (f-g)(0)}{x-0} = \frac{f(x) - g(x) - (f(0) - g(0))}{x} = \frac{f(x) - g(x)}{x},$$

onde $c \in (0, x)$. Como $x > 0$ e $\frac{f(x) - g(x)}{x} = (f-g)'(c) = f'(c) - g'(c) \leq 0$ por hipótese, tem-se que $f(x) - g(x) \leq 0$, ou seja, $f(x) \leq g(x)$. ■

Aplicando a proposição 2.4.1 nas funções $f(t) = 1 - t$ e $g(t) = e^{-t}$, é preciso verificar que as hipóteses são satisfeitas.

⁵As hipóteses do teorema do Valor Médio são: f e g são contínuas em $[a, b]$ e f e g são diferenciáveis em (a, b) .

$$(1) f(0) = g(0)$$

$$f(0) = 1 \text{ e } g(0) = 1 \Rightarrow f(0) = g(0).$$

$$(2) f'(t) \leq g'(t)$$

$$f'(t) = -1 \leq -e^{-t}, \text{ pois } e^{-t} \leq 1 \text{ para } t \geq 0. \text{ Ent\~{a}o } f'(t) \leq g'(t), \text{ para } t \geq 0.$$

Logo, pela proposi\~{c}o, $1 - t \leq e^{-t}$, para $t \geq 0$. Como $x^2 \geq 0$ para todo x , tomando $t = x^2$, em particular,

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2}, \quad x \geq 0. \quad (2.32)$$

Usando a consequ\~{e}ncia do teorema do Valor M\~{e}dio novamente e tomando as fun\~{c}oes $s(t) = 1 + t$ e $g(t) = e^t$, tem-se:

$$(1) s(0) = g(0)$$

$$s(0) = 1 \text{ e } g(0) = 1 \Rightarrow s(0) = g(0).$$

$$(2) s'(t) \leq g'(t)$$

$$s'(t) = 1 \leq e^t, \text{ pois } e^t \geq 1 \text{ para } t \geq 0. \text{ Ent\~{a}o } s'(t) \leq g'(t), \text{ para } t \geq 0.$$

Portanto, pela consequ\~{e}ncia, $1 + t \leq e^t$, para $t \geq 0$. Tomando $t = x^2$, $1 + x^2 \leq e^{x^2}$, para todo x . Em particular,

$$\frac{1}{1 + x^2} \geq e^{-x^2}, \quad x \geq 0. \quad (2.33)$$

De (2.32) e (2.33):

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \geq 0. \quad (2.34)$$

2.4.6 Valor da integral $\int_0^\infty e^{-y^2} dy$

Elevando as desigualdades de (2.34) na n -ésima potência e integrando em seguida:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^\infty e^{-nx^2} dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx. \quad (2.35)$$

Usando (2.30) e (2.31),

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1} \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^\infty e^{-nx^2} dx \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-3}{2n-2}.$$

Tomando $y = \sqrt{n} x$, $dy = \sqrt{n} dx$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1} &\leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{n}} dy \leq \int_0^\infty \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{n}} dy \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-3}{2n-2}, \\ \sqrt{n} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1} &\leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2} dy \leq \int_0^\infty e^{-y^2} dy \leq \sqrt{n} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2n-3}{2n-2}, \\ \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left[\frac{2 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right] &\leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2} dy \leq \int_0^\infty e^{-y^2} dy \leq \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2n-3}{2n-2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$, tem-se, usando (2.29),

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right] &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \right] &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Aplicando o Teorema do Confronto⁶ em (2.36),

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \int_0^\infty e^{-y^2} dy \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (2.38)$$

⁶O Teorema do Confronto está enunciado na página 20.

2.5 Método 4 - uso do Geogebra e Matlab

Nos três métodos anteriormente trabalhados, usou-se cálculo para obter o valor exato da $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$. Nesta seção o valor da mesma será calculado através do Matlab e de um software de geometria dinâmica chamado **Geogebra**⁷.

Para trabalhar com a integral no Geogebra, primeiramente é preciso definir duas funções e dois pontos situados nas mesmas: $f(x) = e^{-x^2}$, $t(x) = 0$, $A = 0$ e $B \approx 2,34$. Logo, a área da região abaixo da função $f(x)$ e acima de $t(x)$ que vai do ponto A até o ponto B é a própria integral em estudo.

A figura (2.6) mostra o gráfico da função $f(x) = e^{-x^2}$, sendo $e = 2,72$, o valor da sua integral desde o ponto $A = 0$ até $B = 2,34$ e os objetos livres e dependentes. Nesse caso, como definiu-se $e = 2,72$, a função f depende desse valor, variando de acordo com o mesmo, assim como o valor da integral.

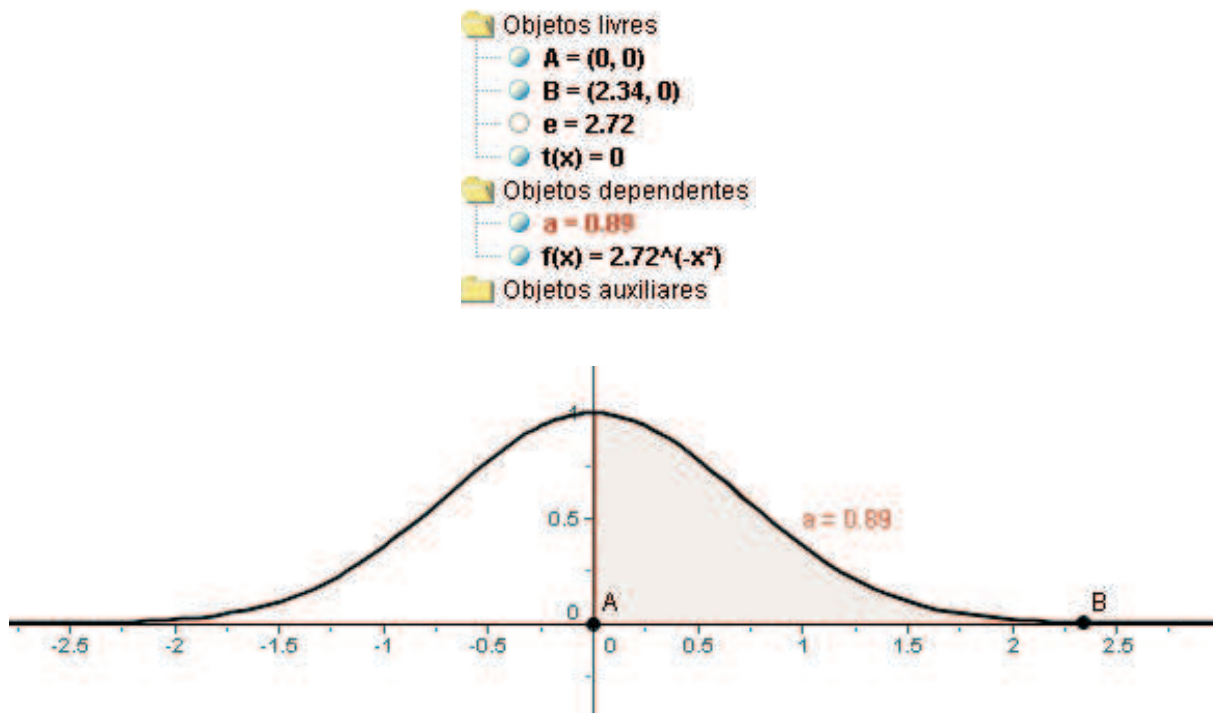


Figura 2.6: Gráfico da função $f(x) = e^{-x^2}$ juntamente com o valor da $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ e os objetos livres e dependentes.

⁷O Geogebra é um software que abrange tanto geometria quanto álgebra.

De acordo com a figura (2.6), $\int_0^{2,34} (2,72)^{-x^2} dx = 0,89$. Sabendo que a $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, será que é possível concluir que $\int_0^B (2,72)^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$?

A figura (2.7) abaixo mostra, através do programa Matlab, quanto vale $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

```
>> (sqrt(pi))/2
ans =
0.886226925452758
```

Figura 2.7: Valor de $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ no Matlab.

Logo, analisando os resultados obtidos no programa do Geogebra e do Matlab, conclui-se que o valor da integral naquele é aproximadamente o valor exato de $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ou seja, $\int_0^B (2,72)^{-x^2} dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Trabalhando ainda com o Geogebra e tomando B suficientemente grande, o valor da integral continua sendo 0,89. Portanto, é possível concluir que $\lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B (2,72)^{-x^2} dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Capítulo 3

Aplicações da $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

“Na maior parte das ciências uma geração põe abaixo o que outra construiu, e o que uma estabeleceu a outra desfaz. Somente na matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura.”

Hermann Hankel

3.1 Valor de $n!$

Um baralho contém 52 cartas. Deseja-se saber de quantas maneiras diferentes é possível embaralhá-lo. A solução do problema é $52! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 52$. No Matlab, $52!$ é calculado pelo comando `>> prod(1 : 52)`, que dá o valor $8,065817517094388 \cdot 10^{67}$. Se não é possível ter uma máquina que calcula $n!$, existe uma fórmula prática de calcular $52!$ que será desenvolvida. Seja:

$$A = \int_0^{\infty} e^{-st} ds = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-st} ds = \lim_{a \rightarrow \infty} \left. \frac{-1}{t} e^{-st} \right|_0^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-1}{t} (e^{-at} - 1) = \frac{1}{t}.$$

Derivando A em relação a t obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^{\infty} e^{-st} ds \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \right) = \frac{-1}{t^2}.$$

Utilizando a fórmula de Leibniz ¹ no lado esquerdo da igualdade:

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} e^{-st} ds = - \int_0^{\infty} s e^{-st} ds .$$

Logo, para $t > 0$, $\int_0^{\infty} s e^{-st} ds = \frac{1}{t^2}$. Derivando novamente em relação a t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_0^{\infty} s e^{-st} ds \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t^2} \right) = \frac{-2}{t^3}, \\ \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (s e^{-st}) ds &= - \int_0^{\infty} s^2 e^{-st} ds . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Por (3.1), $\int_0^{\infty} s^2 e^{-st} ds = \frac{1 \cdot 2}{t^3}$. Derivando mais uma vez em relação a t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_0^{\infty} s^2 e^{-st} ds \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{t^3} \right) = \frac{-6t^2}{t^6} = \frac{-3 \cdot 2 \cdot 1}{t^4}, \\ \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (s^2 e^{-st}) ds &= - \int_0^{\infty} s^3 e^{-st} ds . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Portanto, $\int_0^{\infty} s^3 e^{-st} ds = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{t^4}$. Observando os resultados, é perceptível que existe uma relação entre eles. Então, derivando n vezes em relação a t ,

$$\int_0^{\infty} s^n e^{-st} ds = \frac{n!}{t^{n+1}}, \quad (3.3)$$

para $t > 0$. Tomando $t = 1$, obtem-se $\int_0^{\infty} s^n e^{-s} ds = n!$. Então, define-se uma função $g(x)$, onde

$$g(x) = \int_0^{\infty} s^x e^{-s} ds = x! . \quad (3.4)$$

¹A fórmula de Leibniz diz que $\frac{d}{dt} \int_a^b F(t) dt = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial t} (t) dt$.

Voltando ao jogo das cartas, $g(52) = 52! = \int_0^\infty s^{52} e^{-s} ds$. Dá para perceber que esse cálculo será muito demorado, pois precisar-se-ão muitas integrais por parte. Mas existe um procedimento que simplifica tudo.

3.1.1 Fórmula de Stirling

Sabe-se que $n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{n \cdot \ln x - x} dx$. Calculando a integral por substituição, toma-se $x = n + y$. O novo intervalo de integração será: se $x = 0$, $y = -n$ e se $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$. Substituindo:

$$n! = \int_{-n}^\infty e^{n \cdot \ln(n+y) - (n+y)} dy = e^{-n} \int_{-n}^\infty e^{n \cdot \ln(n+y) - y} dy .$$

Multiplicando e dividindo por $n^n = e^{n \cdot \ln n}$:

$$n! = n^n e^{-n} \int_{-n}^\infty \frac{e^{n \cdot \ln(n+y) - y}}{e^{n \cdot \ln n}} dy = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-n}^\infty e^{n \cdot \ln(n+y) - y - n \ln n} dy = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-n}^\infty e^{n \ln(1 + \frac{y}{n}) - y} dy . \quad (3.5)$$

Fazendo $x = \frac{y}{n}$ em $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ e considerando apenas os dois primeiros termos da série, tem-se $\ln\left(1 + \frac{y}{n}\right) \approx \frac{y}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{n}\right)^2$. Substituindo em (3.5):

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-n}^\infty e^{n \left(\frac{y}{n} - \frac{y^2}{2n^2}\right) - y} dy = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-n}^\infty e^{\left(\frac{2yn - y^2}{2n}\right) - y} dy = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-n}^\infty e^{\frac{-y^2}{2n}} dy . \quad (3.6)$$

Fazendo a mudança de variável $y = \sqrt{n} v$, $dy = \sqrt{n} dv$ e $y^2 = nv^2$. O intervalo de integração é: se $y \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \infty$ e se $y = -n$, $v = -\sqrt{n}$.

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^\infty e^{\frac{-nv^2}{2n}} \cdot \sqrt{n} dv . \quad (3.7)$$

Substituindo v por $\sqrt{2} w$, $dv = \sqrt{2} dw$. Então, se $v \rightarrow \infty$, $w \rightarrow \infty$ e se $v = -\sqrt{n}$, $w = -\sqrt{\frac{n}{2}}$. Logo,

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{2nw^2}{2n}} \sqrt{n} \sqrt{2} dw = \sqrt{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{\infty} e^{-w^2} dw. \quad (3.8)$$

Como $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ então $\int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{\infty} e^{-w^2} \approx \sqrt{\pi}$, para $n \rightarrow \infty$. Portanto,

$$\boxed{n! \approx \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n}, \quad (3.9)$$

que é chamada **fórmula de Stirling**. Embora Abraham De Moivre (1667-1754) a conhecesse antes, essa fórmula é encontrada no livro *Methodus differentiales*, de James Stirling (1692-1770).

A figura (3.1) mostra o programa no Matlab para se calcular $n!$, de acordo com alguns valores de n , tanto no modo usual quanto na fórmula de Stirling, assim como o erro cometido ao calcular o valor de n pela fórmula de Stirling. Para encontrar o erro, basta calcular o valor absoluto da diferença entre o resultado de n pela fórmula de Stirling e pelo modo usual, dividindo-o por esse, como mostra a linha 5 da figura.

```
>> r=[1 5 9 13 17];
>> z=[1 120 prod(1:9) prod(1:13) prod(1:17)];
>> x=(1:4:17);
>> y=sqrt(2*pi*x).*(x/exp(1)).^x;
>> s=abs(y-z)./z;
>> d=[r' z' y' s']
```

Figura 3.1: Programa no Matlab para calcular os valores de n por $n!$ e pela fórmula de Stirling e o erro cometido.

A figura (3.2) a seguir apresenta os resultados obtidos da figura (3.1), ou seja, $n!$, fórmula de Stirling e o erro cometido, para alguns valores de n .

d =		
	1	1
	5	120
	9	362880
	13	6227020800
	17	355687428096000
	0.922137008895789	0.0778629911042111
	118.01916795759	0.0165069336867498
	359536.872841948	0.00921276223008172
	6187239475.19271	0.00638850038967187
	353948328666099	0.0048894037082221

Figura 3.2: As colunas representam os valores de n , valores exatos de $n!$, aqueles obtidos através da fórmula de Stirling e o erro cometido, respectivamente.

Observa-se que a diferença entre $n!$ e a fórmula de Stirling aumenta quando n cresce. “Não se preocupe, porém”, diz Djairo em [21], “o que interessa é que o erro relativo cometido ao substituir $n!$ por $\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ diminui quando $n \rightarrow \infty$ ”.

3.1.2 Fórmula de Weissman

De acordo com a figura (3.2), os resultados obtidos pela fórmula de Stirling não são bons para pequenos valores de n . Pelo fato de (3.9) falhar para os primeiros inteiros, em 1982 surgiu um aperfeiçoamento da mesma, proposto por Weissman:

$$n! \approx \sqrt{2\pi} \left[\frac{(n + \frac{1}{2})}{e} \right]^{(n + \frac{1}{2})}. \quad (3.10)$$

A figura (3.3) abaixo apresenta os resultados da igualdade (3.10). Relacionando-a com a igualdade (3.9), a fórmula de Weissman é melhor para valores menores de n .

```

>> r=[1 5 9 13 17];
>> z=[1 120 prod(1:9) prod(1:13) prod(1:17)];
>> y=sqrt(2*pi).*((x+1/2)/exp(1)).^(x+1/2);
>> s=abs(y-z)./z;
>> d=[r' z' y' s']

d =

Columns 1 through 3

    1          1    1.02750773502719
    5         120   120.910794783925
    9        362880  364474.044709854
   13       6227020800  6246263529.89911
   17     355687428096000  356535150382357

Column 4

    0.0275077350271942
    0.00758995653270868
    0.00439275989267543
    0.00309019842989969
    0.00238333497164788

```

Figura 3.3: As colunas representam os valores de n , valores exatos de $n!$, aqueles obtidos através da fórmula de Weissman e o erro cometido, respectivamente.

3.1.3 Outra fórmula para $n!$

Além da fórmula de Stirling (3.9) e da fórmula de Weissman (3.10), como calculado nas figuras (3.2) e (3.3), $n!$ pode ser escrito como $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$, que é o método usual. Multiplicando e dividindo cada fator n por ele mesmo $(n-1)$ vezes, tem-se ainda o próprio fatorial:

$$\begin{aligned}
 n! &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4} \cdot \dots \cdot \frac{\overbrace{(n-1) \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-1)}^{(n-1)\text{vezes}}}{\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{(n-1)\text{vezes}}} \cdot n^n, \\
 n! &= \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \dots \cdot \left[\frac{(n-1)}{n}\right]^{n-1} \cdot n^n. \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Afirmção 3.1.1 $n!$ pode ser escrito como produto de fatores do tipo

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{J}\right)^J}, \quad (3.12)$$

com J variando de 1 a $(n - 1)$.

Demonstração 3.1.1 Relacionando com a igualdade (3.11), é perceptível que o fator n^n não pode ser escrito na forma (3.12). Já os outros fatores é fácil verificar.

$$i) \quad J = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1}.$$

$$ii) \quad J = 2 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

$$iii) \quad J = 3 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^3} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3}.$$

$$iv) \quad J = n - 1 \Rightarrow \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}.$$

Portanto, todos os fatores de (3.11) podem ser escritos da forma (3.12), exceto (n^n) . Logo, relacionando (3.11) e (3.12), tem-se:

$$n! = n^n \cdot \prod_{J=1}^{n-1} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1}{J}\right)\right]^J} = \frac{n^n}{\prod_{J=1}^{n-1} \left[1 + \left(\frac{1}{J}\right)\right]^J}. \quad (3.13)$$

■

Observando (3.13), essa já possui o termo (n^n) encontrado na fórmula de Stirling. Para analisar o comportamento dos fatores restantes, a figura (3.4) abaixo mostra alguns resultados de y para $y = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{J}\right)^J}$.

```
>> j=input('numero de Fatores >>');
numero de fatores >>2
>> y=(1+1/j)^(j)

Y =

    2.2500

>> outra_for
numero de fatores >>10

Y =

    2.5937

>> outra_for
numero de fatores >>100

Y =

    2.7048

>> outra_for
numero de fatores >>10000

Y =

    2.7181
```

Figura 3.4: Programa no Matlab para calcular $\left(1 + \frac{1}{J}\right)^J$.

De acordo com a figura (3.4), $\lim_{J \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{J}\right)^J = e$ (número de Euler). Portanto, $\left(1 + \frac{1}{J}\right)^J \approx e$, quando $J \rightarrow \infty$. Como tem-se $(n - 1)$ fatores que podem ser escritos na forma $\left(1 + \frac{1}{J}\right)^J$, é possível aproximar o produtório em (3.13) por (e^{n-1}) . Então:

$$n! \approx \frac{n^n}{e^{n-1}} = e \left(\frac{n}{e}\right)^n . \quad (3.14)$$

Agora, comparando novamente com a fórmula de Stirling, (3.14) possui o termo $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ encontrado naquela. Analisando a figura (3.5) abaixo, os valores da igualdade (3.14) não estão próximos de $n!$ e o erro cometido aumenta quando n cresce.

```
>> r=[1 5 9 13 17];
>> z=[1 120 prod(1:9) prod(1:13) prod(1:17)];
>> x=(1:4:17);
>> y=(x.^x)./(exp(x-1));
>> s=abs(y-z)./z;
>> d=[r' z' y' s']

d =
```

	1		1
	5		120
	9		362880
	13		6227020800
	17		355687428096000

	1		0
	57.2363715272943		0.523030237272547
	129965.095343216		0.641851037965123
	1860928971.43972		0.701152600704382
	93093627406184.6		0.738271245895543

Figura 3.5: As colunas representam os valores de n , $n!$, aqueles obtidos pela igualdade (3.14) e o erro cometido, respectivamente.

3.1.4 Aperfeiçoando ainda mais $n!$

Como o erro cometido, de acordo com a figura (3.5), cresce quando n aumenta, é preciso aperfeiçoar mais a fórmula (3.13). Então, trabalhando novamente com o método usual para calcular $n!$, multiplica-se e divide-se cada fator n por $(n^{n-\frac{1}{2}})$:

$$n! = \frac{1}{2^{(2-\frac{1}{2})}} \cdot \frac{2 \cdot 2^{(2-\frac{1}{2})}}{3^{(3-\frac{1}{2})}} \cdot \frac{3 \cdot 3^{(3-\frac{1}{2})}}{4^{(4-\frac{1}{2})}} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1) \cdot (n-1)^{(n-\frac{3}{2})}}{n^{(n-\frac{1}{2})}} \cdot n \cdot n^{(n-\frac{1}{2})},$$

$$n! = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{7}{2}} \cdot \dots \cdot \left[\frac{(n-1)}{n}\right]^{n-\frac{1}{2}} \cdot n^{n+\frac{1}{2}}. \quad (3.15)$$

Afirmação 3.1.2 $n!$ pode ser escrito como produto de fatores do tipo

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{J}\right)^{J+\frac{1}{2}}}, \quad (3.16)$$

com J variando de 1 a $(n-1)$.

Demonstração 3.1.2 Verificando por indução:

i) Para $J = 1$, $\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1}{1}\right)\right]^{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

ii) Suponha válido para $J = k$. Então: $\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1}{k}\right)\right]^{k+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+\frac{1}{2}}$.

iii) Quer-se provar para $J = k+1$. Então:

$$\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1}{k+1}\right)\right]^{k+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k+2}{k+1}\right)} = \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^1 = \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{(k+1)+\frac{1}{2}}.$$

Logo, (3.15) pode ser escrita como:

$$n! = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\prod_{j=1}^{n-1} \left[1 + \left(\frac{1}{j} \right) \right]^{j+\frac{1}{2}}} . \quad (3.17)$$

■

Calculando o produtório da igualdade (3.17) no Matlab:

```
>> j=input('numero de fatores >>');
numero de fatores >>2
>> y=(1+1/j)^(j+1/2)

y =

    2.7557

>> euler
numero de fatores >>10

y =

    2.7203

>> euler
numero de fatores >>100

y =

    2.7183

>> euler
numero de fatores >>10000

y =

    2.7183
```

Figura 3.6: Programa no Matlab para calcular $\left(1 + \frac{1}{j} \right)^{(j+\frac{1}{2})}$.

Relacionando as figuras (3.5) e (3.6), essa se aproxima mais rapidamente do número de Euler. Portanto, como tem-se $(n - 1)$ fatores que podem ser escritos na forma

$\left(1 + \frac{1}{J}\right)^{J+\frac{1}{2}}$, é possível escrever o produtório em (3.17) como (e^{n-1}) :

$$n! \approx \frac{n^{1+\frac{1}{2}}}{e^{n-1}} = e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (3.18)$$

Observando a figura (3.7) abaixo, os valores da igualdade (3.18) estão um pouco mais próximos de $n!$ mas o erro cometido ainda aumenta quando n cresce. Portanto, serão preciso mais algumas modificações.

```
>> r=[1 5 9 13 17];
>> z=[1 120 prod(1:9) prod(1:13) prod(1:17)];
>> x=(1:4:17);
>> y=sqrt(x).*(x.^(x))./(exp(x-1));
>> s=abs(y-z)./z;
>> d=[r' z' y' s']

d =
```

	1	1
	5	120
	9	362880
	13	6227020800
	17	355687428096000
1	0	
127.984417520464	0.0665368126705297	
389895.286029649	0.0744468861046312	
6709674826.52237	0.0775096216994119	
383834858867594	0.0791352984339865	

Figura 3.7: As colunas representam os valores de n , $n!$, a igualdade (3.17) e o erro cometido, respectivamente.

3.1.5 Fórmula de Stirling modificada

Os resultados obtidos a partir da fórmula de Stirling (3.9) são encontrados no artigo “Fórmula de Stirling em tempos de Maple”, de J.R. Drugowich de Felicio, Matemática Universitária, nº17, dezembro de 1994, SBM.

Para chegar ao último resultado, fica a cargo do leitor observar no artigo o método utilizado. Portanto, após o aperfeiçoamento, a fórmula de Stirling pode ser escrita como:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}. \quad (3.19)$$

```
>> stirling_mod
d =
Columns 1 through 2
    1          1
    5         120
    9        362880
   13       6227020800
   17      355687428096000
Columns 3 through 4
    1.00227444918223    0.00227444918222641
   120.002637086197    2.19757183074876e-005
   362881.377885753    3.79708375447311e-006
   6227028659.88917    1.26222304805235e-006
   355687629001077    5.64836035463631e-007
```

Figura 3.8: As colunas representam os valores de n , $n!$, fórmula de Stirling modificada e o erro cometido, respectivamente.

Analisando os resultados obtidos pela fórmula de Stirling modificada, para alguns valores de n , conclui-se que esses estão mais próximos de $n!$. Essa conclusão pode ser facilmente verificada na quarta coluna, onde o erro cometido é muito pequeno.

3.1.6 Relação entre a fórmula de Stirling, de Weissmann e de Stirling modificada

Para mostrar que os valores de um certo n ficam próximos de $n!$ usando as fórmulas de Stirling, de Weissman e de Stirling modificada, através de um programa no Matlab, relacionou-se os valores dos mesmos.

```
>> format long g
>> r=[1 5 9 13 17];
>> z=[1 120 prod(1:9) prod(1:13) prod(1:17)];
>> x=(1:4:17);
>> y=sqrt(2*pi*x).*(x/exp(1)).^x;
>> s=sqrt(2*pi)*((x+1/2)/exp(1)).^(x+1/2);
>> t=sqrt(2*pi*x).*(x/exp(1)).^x.*exp(1./(12*x));
>> d=[r' z' y' s' t']

d =
```

1	1	0.922137008895789
5	120	118.01916795759
9	362880	359536.872841948
13	6227020800	6187239475.19271
17	355687428096000	353948328666099

1.02750773502719	1.00227444918223
120.910794783925	120.002637086197
364474.044709854	362881.377885753
6246263529.89911	6227028659.88917
356535150382357	355687629001077

Figura 3.9: As colunas representam os valores de n , $n!$, fórmula de Stirling, fórmula de Weissman e fórmula de Stirling modificada.

Observando os resultados obtidos nas três últimas colunas da figura (3.9), vê-se que a fórmula de Stirling modificada é a mais apropriada, pois seus resultados, independente do valor n , estão muito próximos de $n!$.

Portanto, de acordo com a figura (3.10) a seguir, o erro obtido entre as fórmulas

e o próprio $n!$ diminui em relação à fórmula de Stirling, de Weissmann e de Stirling modificada, nessa ordem.

```
>> r=[1 5 9 13 17];
>> z=[1 120 prod(1:9) prod(1:13) prod(1:17)];
>> x=(1:4:17);
>> y=sqrt(2*pi*x).*(x/exp(1)).^x;
>> s=sqrt(2*pi)*((x+1/2)/exp(1)).^(x+1/2);
>> t=sqrt(2*pi*x).*(x/exp(1)).^x.*exp(1./(12*x));
>> m=abs(y-z)./z;
>> n=abs(s-z)./z;
>> q=abs(t-z)./z;
>> b=[r' m' n' q']

b =

     1     0.0778629911042111     0.0275077350271942
     5     0.0165069336867498     0.00758995653270868
     9     0.00921276223008172     0.00439275989267543
    13     0.00638850038967187     0.00309019842989969
    17     0.0048894037082221     0.00238333497164788

    0.00227444918222641
    2.19757183074876e-005
    3.79708375447311e-006
    1.26222304805235e-006
    5.64836035463631e-007
```

Figura 3.10: As colunas representam os valores de n e os erros cometidos usando a fórmula de Stirling, Weissman e Stirling modificada, respectivamente.

Voltando ao jogo das cartas, $52! \cong \sqrt{104\pi} \cdot \left(\frac{52}{e}\right)^{52} \cdot e^{\frac{1}{624}} = 8,06581767642158 \cdot 10^{67}$, pela fórmula de Stirling modificada. Retomando o valor de $n!$ através do Matlab calculado no início desta seção, $n! = 8,065817517094388 \cdot 10^{67}$. Portanto, os valores de $n!$ pelo modo usual e pela fórmula de Stirling modificada são praticamente iguais.

3.1.7 Fórmula de Stirling e Probabilidade

Exemplo 3.1.1 Qual é a probabilidade de que 20 pessoas em uma reunião façam aniversário no mesmo dia?

No artigo “Coincidência de Aniversários”, da Revista do Professor de Matemática nº 11, vê-se que a probabilidade para que x pessoas façam aniversário no mesmo dia é:

$$p = 1 - \frac{365!}{365^x \cdot (365 - x)!} \quad (3.20)$$

Resolução 3.1.1 Tomando $x = 20$ e substituindo em (3.20):

$$p = 1 - \frac{365!}{365^{20} \cdot 345!} \quad (3.21)$$

Observando (3.21), como a igualdade trabalha com fatorial, basta usar a fórmula de Stirling modificada. Então:

$$\begin{aligned} S &= \frac{365!}{365^{20} \cdot 345!} = \frac{\sqrt{730\pi} \cdot \left(\frac{365}{e}\right)^{365} \cdot e^{\frac{1}{4380}}}{365^{20} \cdot \sqrt{690\pi} \cdot \left(\frac{345}{e}\right)^{345} \cdot e^{\frac{1}{4140}}} = \sqrt{\frac{73}{69}} \cdot \left(\frac{365}{345}\right)^{345} \cdot \frac{e^{-364,9997717}}{e^{-344,9997585}} = \\ &= 1,02857718 \cdot 277.619.799,9 \cdot e^{-20,0000132} = \frac{285.553.390,9}{485.171.599,6} = 0,588561637. \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade que 20 pessoas em uma reunião façam aniversário no mesmo dia é $p = 1 - S = 0,411438363 \approx 41,1\%$.

Esse resultado é surpreendente. Imagine então a probabilidade de que alunos em sala de aula; profissionais no local de trabalho; um número y de pessoas se esbarrando na rua, façam aniversário no mesmo dia.

3.1.8 Fórmula de Stirling e Sistemas Lineares

Seja dado um sistema de n equações lineares. O método mais tradicional para resolver esse sistema é pela Regra de Cramer. Será que esse método é o melhor e/ou o mais rápido?

“Em geral, calcular um determinante por expansão de co-fatores não é eficiente. Por exemplo, o determinante de uma matriz 3×3 tem $6 = 3!$ parcelas, cada uma envolvendo duas multiplicações, necessitando ainda cinco adições e subtrações para terminar os cálculos. Para uma matriz $n \times n$, haverá $n!$ parcelas, cada uma com $(n - 1)$ fatores, com ainda $(n! - 1)$ adições e subtrações. A quantidade total de operações é, assim, $T(n) = (n - 1)n! + n! - 1 > n!$.”

Essa igualdade resulta na junção das quatro operações básicas. Agora, assumindo que as únicas operações válidas na resolução de um sistema são a multiplicação e a divisão, tem-se que $T(n) = n! \cdot n \cdot (e - 1)$, de acordo com a Revista do Professor de Matemática nº 23. Logo, tomando $n = 100$,

$$1,72 \cdot 100 \cdot 100! \approx 172 \cdot \sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot \left(\frac{100}{e}\right)^{100} \cdot e^{\frac{1}{1200}} = \frac{172 \cdot \sqrt{200\pi}}{e^{99,99916667}} \cdot 10^{200} = \\ = 4310,307645 \cdot 3,723177319 \cdot 10^{-44} \cdot 10^{200} = 16.048,03966 \cdot 10^{156} \approx 1,6 \cdot 10^{160}.$$

Portanto, é preciso $1,6 \cdot 10^{160}$ operações para calcular um sistema de 100 equações. “Mesmo o mais rápido dos supercomputadores não pode calcular o determinante de uma matriz de ordem moderadamente alta usando expansão de co-fatores.” Para saber quanto tempo o computador leva para resolver um sistema de 100 equações, suponha que em um segundo ele realiza um trilhão (10^{12}) de operações. Então, $1,6 \cdot 10^{160}$ operações levará $1,6 \cdot 10^{148}$ segundos. Como um ano equivale a $60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 31.536.000 \cdot 10^3 \approx 3,2 \cdot 10^{10}$ segundos, o tempo necessário para o computador resolver o sistema é $\frac{1,6 \cdot 10^{148}}{3,2 \cdot 10^{10}} = 5 \cdot 10^{139}$ anos. “Colocando isso em perspectiva, considere que os astrônomos estimam que a idade do universo seja de pelo menos dez bilhões (10^{10}) de anos. Assim, mesmo para um computador muito rápido, o cálculo por expansão de co-fatores de um determinante 100×100 levaria quase 14 vezes a idade do universo.”

3.2 Função Gama

Numa carta enviada para Goldbach, Euler dizia: “... encontrei duas integrais interessantes que persistem em aparecer em meus estudos. É impressionante, Goldbach, a beleza e simplicidade destes objetos ...”.

As funções Γ e β foram encontradas por Euler em 1729 quando pesquisava os movimentos harmônicos. Somente em 1811 os símbolos Γ e β foram usados, por Legendre.

3.2.1 Domínio da Função Gama

A função Gama é definida pela integral:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0. \quad (3.22)$$

Separando o intervalo de integração em duas partes, obtém-se:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0.$$

Para mostrar que a função gama está bem definida, toma-se primeiro a $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$. Observe que, quando $0 < x < 1$, $f = e^{-t} t^{x-1}$ não está definida para $t = 0$ pois t^{x-1} não existe. Então essa integral é imprópria quando $0 < x < 1$ pois seu integrando é descontínuo. Logo, f é uma função positiva contínua definida no intervalo $(0, 1]$ e com assíntota vertical em zero. Portanto, $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 e^{-t} t^{x-1} dt$, se esse limite existir como número.

Como é impossível encontrar o valor exato dessa integral, é preciso saber, pelo menos, se ela é convergente ou divergente. Para isso, tem-se o seguinte teorema, que é similar ao teorema de comparação para integrais impróprias com intervalos infinitos ²:

Teorema 3.2.1 *Suponha que f e g sejam funções contínuas com $f(t) \geq g(t) \geq 0$ para $t > a$. Então:*

²Em [6], página 529, vê-se que o teorema 3.2.1 é verdadeiro.

i) se $\int_a^b g(t) dt = \lim_{y \rightarrow a^+} \int_y^b g(t) dt$ é divergente, então $\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow a^+} \int_n^b f(t) dt$ é divergente;

ii) se $\int_a^b f(t) dt = \lim_{y \rightarrow a^+} \int_y^b f(t) dt$ é convergente, então $\int_a^b g(t) dt = \lim_{n \rightarrow a^+} \int_n^b g(t) dt$ é convergente.

Seja $f(t) = t^{x-1}$ e $g(t) = e^{-t} t^{x-1}$, com $x > 0$ e $0 < t \leq 1$. Tem-se os seguintes casos:

(i) $0 < x < 1$

Como $0 < t \leq 1$, $0 < e^{-t} < 1$ e $t^{x-1} > 1$. Logo, $t^{x-1} > e^{-t} t^{x-1}$. Aplicando integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{x-1} dt &> \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 t^{x-1} dt > \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 e^{-t} t^{x-1} dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{t^x}{x} \Big|_a^1 &> \lim_{a \rightarrow a^+} \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{a^x}{x} > \lim_{a \rightarrow a^+} \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{x} &> \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 e^{-t} t^{x-1} dt. \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema 3.2.1, como $f(t) > g(t)$ e $\int_0^1 f(t) dt$ é convergente, $\int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ é convergente.

(ii) $x \geq 1$

Como $0 < t \leq 1$, $0 < e^{-t} < 1$ e $t^{x-1} \leq 1$. Mas $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ é imprópria somente para $0 < x < 1$. Logo, para $x \geq 1$, a integral não é imprópria, mesmo sendo convergente.

Portanto, a integral $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ converge quando $0 < x < 1$. Para a integral $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ será usado o seguinte:

Cr terio 3.2.1 (Converg ncia) Dada $\int_a^\infty f(t)dt$, ela ir  convergir se existir $v > 1$ tal que para todo valor de t suficientemente grande a rela o $|f(t)| \leq \frac{M}{t^v}$   verdadeira, onde M   um n mero fixo independente de t .

Tomando $v = 2$, a rela o ser  $f(t) \leq \frac{M}{t^2} \Rightarrow f(t)t^2 \leq M$. Como $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^{x-1} = 0$, pelo crit rio, $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ ir  convergir. A partir desses resultados, a integral que define a fun o Gama converge para $x > 0$. Portanto seu dom nio   $(0, +\infty)$.

3.2.2 Resultados importantes

Proposi o 3.2.1 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Demonstra o 3.2.1 Da defini o de fun o gama, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$. Usando mudan a de vari veis: $t = r^2 \Rightarrow dt = 2rdr$. Logo:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^\infty 2r e^{-r^2} (r^2)^{-\frac{1}{2}} dr = 2 \int_0^\infty e^{-r^2} dr = 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

■

Proposi o 3.2.2 $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

Demonstra o 3.2.2 Resolvendo o lado esquerdo da igualdade:

$$\Gamma(x + 1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{(x+1)-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-t} t^x dt.$$

Utilizando integra o por partes, toma-se $u = t^x$ e $v' = e^{-t}$. Ent o: $\Gamma(x + 1) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-t^x e^{-t} \Big|_0^a + \int_0^a x t^{x-1} e^{-t} dt \right] = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-a^x e^{-a} + x \int_0^a t^{x-1} e^{-t} dt \right] = x\Gamma(x)$.

■

3.2.3 Extensão do domínio

Até agora a função gama está definida somente para $x > 0$. Será que é possível estender seu domínio para $x < 0$?

A proposição $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ permite definir $\Gamma(x)$ para $x \in (-\infty, 0)$. De fato, seja $n \in \mathbb{N}$, $x < 0$ e $x \notin \mathbb{Z}$. Sabe-se que, para algum n , $0 < x+n$. Toma-se os intervalos:

(i) $-1 < x < 0$

Então $0 < x+1 < 1$ e portanto $\Gamma(x+1)$ está bem definida. Segue da proposição 3.2.2 que $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, logo, $\Gamma(x)$ também está bem definida.

(ii) $-2 < x < -1$

Tem-se que $-1 < x+1 < 0$. Conforme item (i), $\Gamma(x+1)$ e $\Gamma(x)$ estão bem definidas.

(iii) $-3 < x < -2$

Então $-2 < x+1 < -1$. De (ii), $\Gamma(x+1)$ e $\Gamma(x)$ estão definidas.

Aplicando $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ para valores negativos de x ³, tem-se:

Exemplo 3.2.1 $\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$.

Exemplo 3.2.2 $\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{3}{2}+1)}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{(-\frac{3}{2})(-\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{3}{4}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$.

Exemplo 3.2.3 $\Gamma(-\frac{5}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{5}{2}+1)}{-\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma(-\frac{3}{2})}{-\frac{5}{2}} = \frac{\frac{4\sqrt{\pi}}{3}}{\frac{-5}{2}} = \frac{-8\sqrt{\pi}}{15}$.

Continuando o processo acima dos exemplos e observando o gráfico da função gama na figura (3.11) a seguir, conclui-se que o domínio da mesma passa a ser $\mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}$.

³Para trabalhar com a integral em estudo precisa-se usar a proposição 3.2.1. Logo, deve-se tomar somente números racionais cujo denominador seja dois.

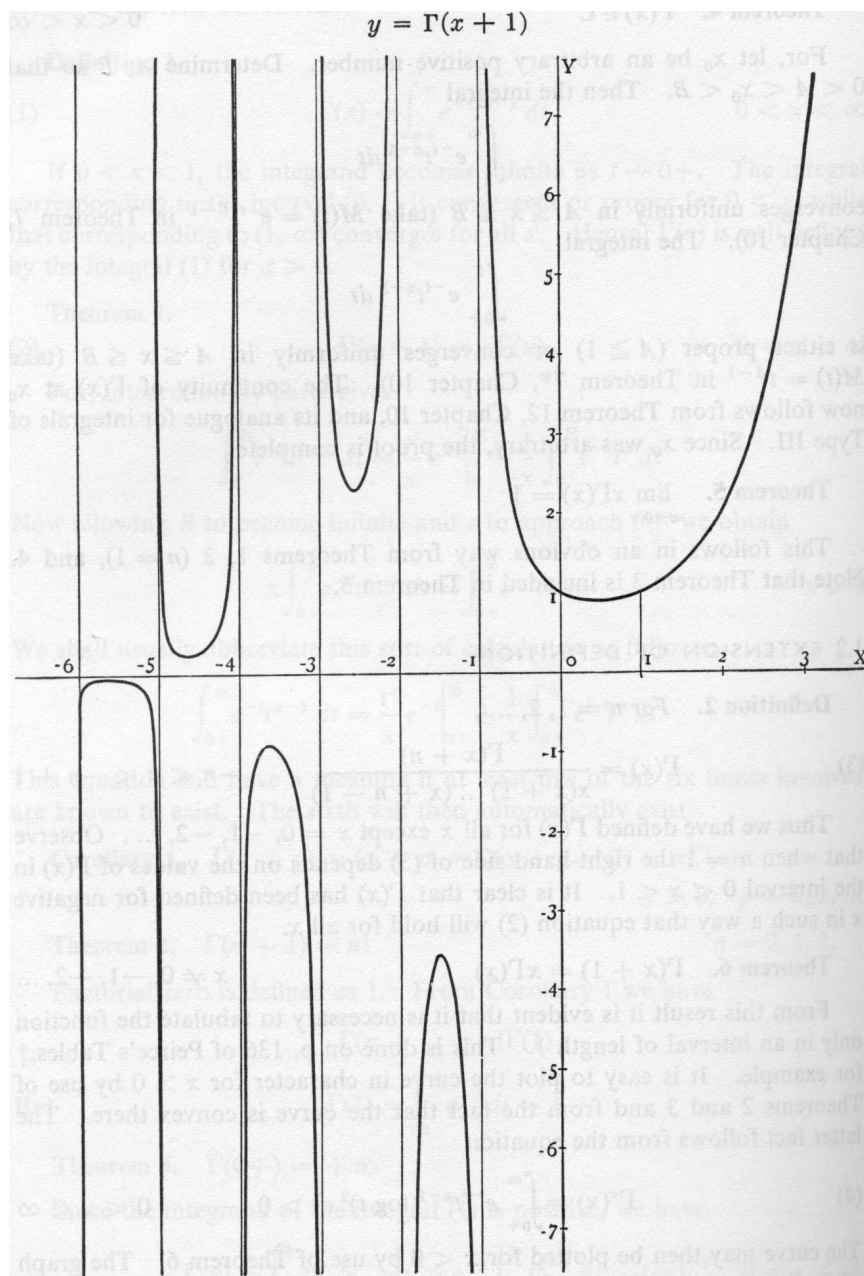


Figura 3.11: Gráfico de $y = \Gamma(x + 1)$.

3.2.4 Função Gama e Transformada de Laplace

A teoria da transformada de Laplace tornou-se, em anos recentes, parte essencial de estudo de muitos matemáticos, físicos e engenheiros. Através da transformada de Laplace é possível resolver equações diferenciais e equações integrais.

Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. A transformada de Laplace de f é a função F definida por $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$, sendo que o domínio de F é o conjunto de todos os números s para os quais a integral converge. Como exemplo, tem-se o seguinte resultado:

Proposição 3.2.3 $F(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$, para $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

Demonstração 3.2.3

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int_0^\infty e^{-st} t^{(\frac{1}{2}-1)} dt. \quad (3.23)$$

Sabendo que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{(\frac{1}{2}-1)} dt$ e fazendo a mudança $st = u$ em (3.23):

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^{(\frac{1}{2}-1)} \frac{du}{s} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

■

Uma aplicação da transformada de Laplace é encontrada nas equações integrais. Essas equações são da forma:

$$y(t) = f(t) + \int_a^b k(u, t) y(u) du,$$

onde $f(t)$ e $k(u, t)$ são conhecidas, a e b são constantes ou funções de t e $y(t)$ é a função que deve ser determinada.

Existem algumas equações integrais importantes. Uma delas é a *equação integral de Abel*, definida por:

$$g(t) = \int_0^t \frac{y(u)}{(t-u)^\alpha} du,$$

onde $g(t)$ é dada e α é uma constante tal que $0 < \alpha < 1$.

Esse tipo de equação integral é encontrada num problema envolvendo um pêndulo simples. Observando uma cicloide ⁴, provou-se que a mesma é tautócrona, isto é, sobre

⁴A cicloide é uma curva traçada por um ponto situado na borda da circunferência rolando em linha reta sobre uma superfície plana.

um arco de cicloide invertido, um corpo sem velocidade inicial desliza até o ponto mais baixo da curva no mesmo período de tempo, independente do seu ponto de partida. Portanto:

Problema 3.2.1 (Tautócrona) *Determinar a curva $y = f(x)$ que passa por $O = (0, 0)$ e $P = (x_1, y_1)$ de modo que o tempo necessário para uma partícula deslizar de P a O , é o mesmo que o tempo necessário para uma partícula, partindo do repouso, deslizar de qualquer ponto intermediário da curva $y = f(x)$ até O .*

A figura (3.12) mostra o problema da Tautócrona com duas partículas, sendo que uma parte de P e a outra de Q .

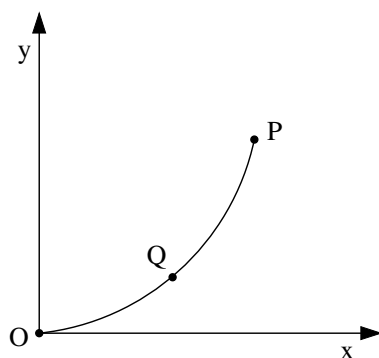


Figura 3.12: Gráfico da cicloide invertida juntamente com duas partículas que partem de P e Q cada uma.

Na referência [22] é calculado o tempo T que uma partícula leva para deslizar de qualquer ponto da curva até O . Após todos os cálculos, conclui-se que:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_1} \frac{f(y) dy}{\sqrt{y_1 - y}}. \quad (3.24)$$

Logo, para determinar a curva, basta encontrar $f(y)$ ⁵.

⁵Todo cálculo para determinar a curva está em [22]. Nesta seção será mostrado somente os passos para encontrar a mesma.

A equação integral (3.24) é de Abel e pode ser escrita como $\sqrt{2g} T = f(y) \cdot y^{-\frac{1}{2}}$. Sabe-se que $\mathcal{L}\{f(y)\} = F(s)$ e, de acordo com a proposição 3.2.3,

$$\mathcal{L}\{y^{-\frac{1}{2}}\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}. \quad (3.25)$$

Através da transformada inversa de Laplace ⁶, obtem-se as equações paramétricas $x = a(\phi + \text{sen}\phi)$ e $y = a(1 - \text{cos}\phi)$, sendo $b = \frac{2gT^2}{\pi^2}$ e $a = \frac{b}{2}$. Logo, a curva tem a forma de uma cicloide (como desejado).

3.3 Aplicação na Física

Exemplo 3.3.1 *Uma partícula é atraída para um ponto fixo O com uma força inversamente proporcional à sua distância ao ponto O . Se a partícula é largada do repouso, encontre o tempo para chegar até o ponto O .*

Resolução 3.3.1 *Toma-se o ponto O na origem da reta numérica $0x$, onde o eixo x representa o deslocamento da partícula.*

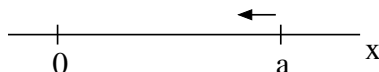


Figura 3.13: Partícula se deslocando do ponto $x = a$ até $x = 0$.

Como a partícula saiu do repouso, no tempo $t = 0$ a partícula está localizada no eixo x , a uma distância $x = a > 0$ da origem. Pela 2ª Lei de Newton ⁷,

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x}, \quad (3.26)$$

⁶A transformada inversa de Laplace é dada por $f(y) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

⁷A 2ª Lei de Newton diz que a resultante das forças que agem num corpo é igual ao produto de sua massa pela aceleração adquirida.

onde m é a massa da partícula e $k > 0$ é a constante de proporcionalidade. Seja $\frac{dx}{dt} = v$ a velocidade da partícula. Então, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$. Substituindo em (3.26),

$$m v \frac{dv}{dx} = \frac{-k}{x}. \quad (3.27)$$

Integrando os dois lados da (3.27),

$$\int m v dv = \int \frac{-k}{x} dx \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = -k \ln(x) + c, \quad (3.28)$$

sendo c constante. Tomando $t = 0$, $x = a$ e $v = 0$, obtem-se $c = k \ln(a)$. Substituindo em (3.28),

$$\frac{mv^2}{2} = k \ln(a) - k \ln(x) = k \ln\left(\frac{a}{x}\right)$$

ou

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2k \ln\left(\frac{a}{x}\right)}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \sqrt{\ln\left(\frac{a}{x}\right)}. \quad (3.29)$$

Logo, integrando a igualdade (3.29):

$$\sqrt{\frac{m}{2k}} \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{\ln\left(\frac{a}{x}\right)}} = \int_0^T dt = T,$$

sendo T o tempo para a partícula ir de $x = a$ até $x = 0$. Portanto,

$$T = \sqrt{\frac{m}{2k}} \cdot \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{\ln\left(\frac{a}{x}\right)}}. \quad (3.30)$$

Fazendo mudança de variável, toma-se $u = \ln\left(\frac{a}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{a}{x} = e^u \Leftrightarrow x = a e^{-u}$ e $dx = -a e^{-u}$. Os limites de integração serão: quando $x \rightarrow 0_+ \Rightarrow \frac{a}{x} \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty$ e quando $x \rightarrow a_- \Rightarrow \frac{a}{x} \rightarrow 1 \Rightarrow u \rightarrow 0$. Logo,

$$T = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} a e^{-u} du = a \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du = a \sqrt{\frac{m}{2k}} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du . \quad (3.31)$$

Sabe-se que a função gama é definida como $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-u} u^{x-1} du$. Igualando os expoentes da variável (u) em (3.31) e na função gama, $-\frac{1}{2} = x-1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Então,

$$T = a \sqrt{\frac{m}{2k}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = a \sqrt{\frac{m}{2k}} \sqrt{\pi} = a \sqrt{\frac{m\pi}{2k}} . \quad (3.32)$$

Portanto, o tempo que a partícula levará para chegar até o ponto O é $T = a \sqrt{\frac{m\pi}{2k}}$, sendo a a distância percorrida.

3.4 Distribuição Normal

Na teoria de probabilidades existe uma distribuição muito importante chamada **distribuição normal** ou curva normal ou de Gauss. Abraham De Moivre (1667 - 1754) foi quem trabalhou com a fórmula de probabilidades $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ cujo integrando determina a curva normal.

3.4.1 Variáveis aleatórias

Definição 3.4.1 Uma variável aleatória X é uma função definida num espaço amostral Ω e com valores reais.

Exemplo 3.4.1 Uma moeda é lançada duas vezes. Seja $\Omega = \{(c, c), (k, k), (c, k), (k, c)\}$ os possíveis resultados no lançamento da moeda. Toma-se X o número de caras obtido nos dois lançamentos tal que $X(c, c) = 2$, $X(c, k) = X(k, c) = 1$ e $X(k, k) = 0$. Então, a probabilidade de aparecer cara nos dois lançamentos é $P(X = 2) = \frac{1}{4}$.

Exemplo 3.4.2 Um dado é lançado uma vez. Toma-se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sendo que cada número representa uma face do dado com a quantidade respectiva. Seja X a face do dado que aparece com a quantidade seis tal que $X(1) = 1, X(2) = 2, \dots, X(6) = 6$. Então $P(X = 6) = \frac{1}{6}$.

Exemplo 3.4.3 Seja Y o peso de um indivíduo escolhido ao acaso. Então Y assume valores no intervalo $[1, 110]$ aproximadamente, sendo quilo escolhido como unidade.

Exemplo 3.4.4 À altura de um indivíduo pode-se associar uma variável aleatória X , que assume valores, por exemplo, no intervalo $[0, 3]$, sendo o metro escolhido como unidade.

Uma variável aleatória X é discreta quando seu conjunto de valores $X(\Omega)$ é finito, ou seja, quando é possível enumerar seus resultados, como mostrado nos exemplos 3.4.1 e 3.4.2. Quando o conjunto de valores de uma variável aleatória não é discreto, como mostra os exemplos 3.4.3 e 3.4.4, a variável aleatória é contínua (v.a.c.).

3.4.2 Distribuições de probabilidade de uma variável aleatória contínua (v.a.c.)

Definição 3.4.2 A função de distribuição F associada a uma variável aleatória X é a aplicação $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que $F(x) = P(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$. Essa função possui as seguintes propriedades:

- i)* $F(x) \leq F(y)$, se $x \leq y$;
- ii)* $F(x + 0) = F(x), \forall x \in \mathbb{R}$;
- iii)* $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

Tomando X uma v.a.c., sua função distribuição é da forma $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. Logo, a distribuição de probabilidade de X será a distribuição normal, cuja função densidade normal (f.d.) é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.33)$$

onde $\sigma > 0$ e $-\infty < \mu < \infty$ e satisfaz $f \geq 0$ e a área sob o gráfico de f ser igual a um.

Portanto, a probabilidade que X tome um valor entre a e b é igual à área da $f.d.$ entre $x = a$ e $x = b$, ou seja,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} . \quad (3.34)$$

As figuras abaixo mostram o programa no Matlab para plotar a $f.d.$ e as curvas obtidas através da função densidade, dependendo dos valores assumidos para μ e σ .

```
n=input('valor de mu >>');
m=input('valor de sigma >>');
plot([-1:0.01:6],0);
hold on
y=[-1:0.01:1];
plot(0,y);
hold on
x=[-10:0.01:6];
y=1/(sqrt(2*pi)*m)*exp(-(x-n).^2/(2*m^2));
plot(x,y,'b');
hold on
axis([-1 5 -0.5 0.8])
axis on
```

Figura 3.14: Programa no Matlab para plotar a $f.d.$, de acordo com os valores de μ e σ .

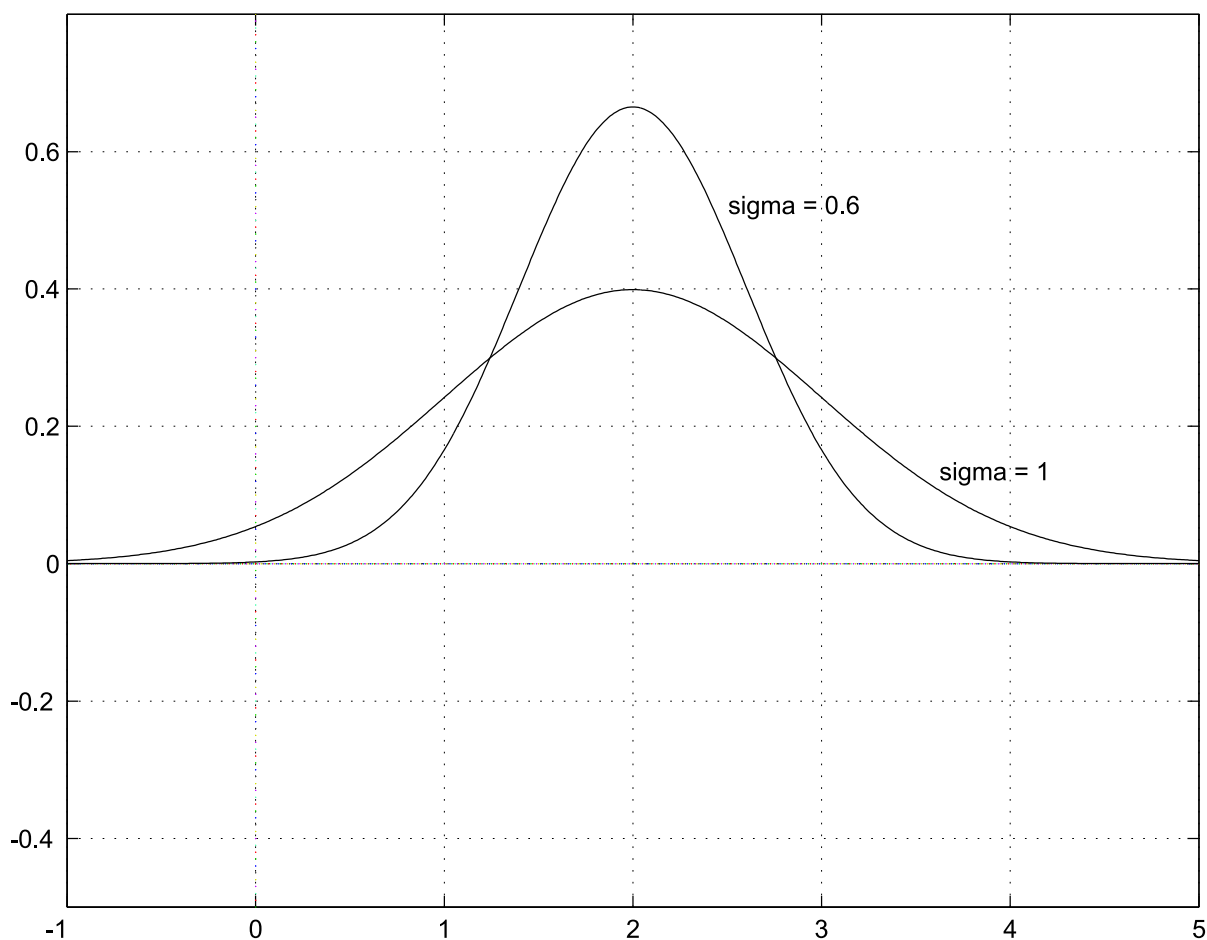


Figura 3.15: Gráfico da *f.d.* para $\mu = 2$, $\sigma = 1$ e $\sigma = 0.6$.

3.4.3 Propriedade da Curva Normal

Como visto, sendo X uma v.a.c., sua distribuição de probabilidade será normal se satisfizer a seguinte:

Propriedade 3.4.1 *A área total sob a curva normal é 1.*

Demonstração 3.4.1 *A área sob a curva normal é dada por*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (3.35)$$

Toma-se $z = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow x = z\sigma + \mu \Rightarrow dx = \sigma dz$. Então:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (3.36)$$

Sabe-se que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Fazendo a mudança de variável $x = \frac{z}{\sqrt{2}}$ nessa integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}. \quad (3.37)$$

Substituindo (3.37) em (3.36): $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1$. Portanto, a área sob a curva normal é 1.

■

3.4.4 Estudo de QI

Para medir a inteligência, o método mais utilizado é o denominado quociente de inteligência (QI). O QI é um número positivo que indica a idade mental de uma pessoa, sendo 100 seu valor médio. A curva que indica os valores de QI é a curva normal, com $\mu = 100$ e $\sigma = 16$.

Uma pesquisa realizada com 112 crianças de um certo jardim de infância mostrou que a estimativa da distribuição de QI das mesmas é $f(x) = \frac{1}{16,23761 \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-104,5)^2}{527,32}}$.

Sabendo que a média de QI é o valor esperado $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$, aplicando a estimativa:

$$\mu = \frac{1}{16,23761 \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-104,5)^2}{527,32}} dx = \frac{1}{16,23761 \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-104,5}{16,23761} \right)^2} dx. \quad (3.38)$$

Tomando $u = \frac{(x - 104,5)}{16,23761}$ e substituindo em (3.38):

$$\mu = \frac{1}{16,23761 \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 16,23761 (16,23761u + 104,5) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{16,23761}{\sqrt{2\pi}} \cdot$$

$$\cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a u e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{104,5}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{16,23761}{\sqrt{2\pi}} (e^{-\frac{u^2}{2}}) \Big|_{-a}^a + \frac{104,5}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 104,5 .$$

Portanto, de acordo com a pesquisa realizada com crianças de um certo jardim de infância, a média de QI das mesmas é aproximadamente 104,5.

Considerações Finais

Este Trabalho de Conclusão de Curso, como visto, teve como objetivo principal estudar a $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$. Como o próprio título diz, tentou-se mostrar o poder e a beleza dessa integral.

Foi muito interessante, desde o início da preparação do trabalho, saber que uma “simples” integral pudesse envolver tanto conteúdo. Melhor ainda quando, durante todo o tempo de dedicação para com ela, muitos amigos vinham, curiosos, querendo saber porque a integral era tão importante.

No início dos estudos encontrei alguns métodos para calcular seu valor e muitas aplicações da mesma. E todos esses métodos e aplicações da $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ estudados envolveram conteúdos da graduação e alguns exercícios propostos em livros.

Como o objetivo do trabalho se concentrou no estudo de uma integral, restringi-o a simplesmente analisar assuntos interessantes e ao mesmo tempo ligados totalmente à integral. Por isso, em alguns momentos, fui obrigada até deletar conteúdos que estavam além do objetivo ou deixar a cargo do leitor procurar nas referências todo o processo para se chegar a um certo resultado.

Em todos os capítulos trabalhei tanto com o cálculo manual tanto com programas computacionais. Achei muito elegante e simpático poder estudar e passar métodos de fácil compreensão.

Portanto, pude perceber um crescimento enorme durante todo o período de trabalho, já que o mesmo abordou maravilhosos conteúdos. Não imaginava que iria aprender tanto e que seria tão prazeroso trabalhar com a integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Referências Bibliográficas

- [1] SIMMONS, George Finlay. *Cálculo com Geometria Analítica*. Tradução: Seiji Hariki, Rodney Carlos Bassanezi, Silvio de Alencastro Pregnotatto. São Paulo: McGraw - Hill, 1987. v. 2, p. 483 - 484.
- [2] SPIEGEL, Murray R.. *Cálculo Avançado*. Coleção Schaum. São Paulo: McGraw - Hill do Brasil, 1978. p. 370 - 376.
- [3] COURANT, John. *Introduction to Calculus and Analysis*. v. 1, p. 308.
- [4] KREYSZIG, Erwin. *Advanced Engineering Mathematics*. 7. ed. New York: J. Wiley, 1993.
- [5] SPIVAK, Michael. *Calculus*. 3. ed. Hounston, Texas: Publish or Perish, Inc, 1994. p. 390 - 392.
- [6] STEWART, James. *Cálculo*. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. v. 1, p. 523 - 530.
- [7] STEWART, James. *Cálculo*. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. v. 2, p. 1003 - 1004.
- [8] JOHN, Peter William Meredith. *Statistical Methods in Engineering and Quality Assurance*. New York: J. Willey, 1990.
- [9] FILHO, Daniel Cordeiro de Moraes. “Professor, qual a primitiva de $\frac{e^x}{x}$?” (O problema de integração em termos finitos). **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 31, p. 143 - 149, dezembro - 2001.

- [10] FELÍCIO, J. R. Drugowich. Fórmula de Stirling em tempos de Maple. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 17, p. 40 - 51, dezembro- 1994.
- [11] DELGADO, Alberto L.. A Calculation of $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$. **The College Mathematics Journal**, Indiana, v. 34, n. 34, p. 321 - 322, setembro - 2003.
- [12] ABREU, Joel Faria. Coincidência de aniversários. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 11, p. 50 - 51, agosto/dezembro - 1987.
- [13] LIMA, Elon Lages. Sobre o ensino de Sistemas Lineares. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 23, p. 14.
- [14] ÁVILA, Geraldo. *Cálculo 2 - funções de um variável*. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1982. p. 125 - 126.
- [15] MARSDEN, Jerrold E.; WEINSTEIN, Alan. *Calculus* Califórnia: The Benjamin Cummings Pub. Co. Inc., 1980. p. 523.
- [16] BAJPAI, A. C.. *Matemática para Engenharia*. v. 1, p. 266.
- [17] WIDDER, David V.. *Advanced Calculus*. 2. ed. Nova Iorque: Dover Publications, Inc.. p. 370.
- [18] GOLDSTEIN. *Cálculo e suas aplicações*.
- [19] POOLE, David. *Álgebra Linear*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004. p. 244.
- [20] PEENEY, David E.; EDWARDS, Charles Henry. *Cálculo com Geometria Analítica*. 4. ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1997. v. 2, p. 101.
- [21] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. *Análise 1*. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Afiliada, 1996. p. 163.
- [22] SPIEGEL, Murray R.. *Transformada de Laplace*. Tradução: Roberto Ribeiro Baldino. São Paulo: McGraw - Hill, 1971. p. 28 - 30,