

**RAPHAEL d'ACAMPORA**

**QUADRATURAS E PARTIÇÕES DE SUPERFÍCIES PLANAS UTILIZANDO O  
SOFTWARE TABULAE**

**Florianópolis, 2005**

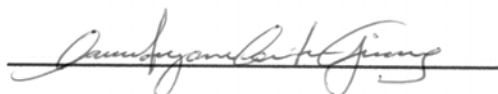
**RAPHAEL d'ACAMPORA**

**QUADRATURAS E PARTIÇÕES DE SUPERFÍCIES PLANAS UTILIZANDO O  
SOFTWARE TABULAE**

Monografia apresentada ao curso de  
Matemática – Habilitação Licenciatura,  
como requisito para obtenção do grau de  
Licenciado em Matemática.

**Florianópolis, 2005**

Esta monografia foi julgada adequada como Trabalho de Conclusão de Curso no curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 020/CCM/05



Prof<sup>ª</sup>. Carmem Suzane C. Gimenez

Professora da Disciplina

**BANCA EXAMINADORA:**



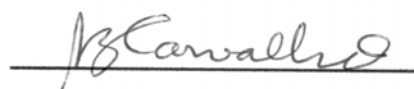
Prof<sup>º</sup>. Nereu estanislau Burin

Orientador



Prof<sup>ª</sup>. Josiane Wanderlinde Vieira

Membro



Prof<sup>ª</sup>. Neri Terezinha B. Carvalho, Dr<sup>ª</sup>

Membro

## **AGRADECIMENTOS**

À Daniela C. P. d'Acampora, minha esposa, amiga e companheira, que me deu suporte nos momentos difíceis, incentivo nos momentos de desânimo e esteve presente durante toda essa caminhada;

Aos amigos: Dheleon, Ismael e Sandro, companheiros de todas as horas;

A todos do corpo docente que de alguma forma contribuíram para o meu crescimento, em especial ao prof<sup>o</sup> Rubens Starke que foi sempre um grande exemplo como mestre e cidadão;

E também, ao meu orientador, Nereu Estanislau Burin, que me compreendeu nos momentos de ausência, e muito me ajudou na realização deste trabalho.

*Dedico este trabalho a Daniela,  
Beatriz e Júlia d'Acampora.*

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>08</b>
<b>2 OBJETIVOS.....</b>	<b>10</b>
<b>3 GEOMETRIA DINÂMICA.....</b>	<b>11</b>
3.1 O QUE É GEOMETRIA DINÂMICA.....	11
3.2 OBJETIVO DA GEOMETRIA DINÂMICA.....	11
3.3 A GEOMETRIA DINÂMICA E AS OUTRAS GEOMETRIAS.....	12
3.4 A DINÂMICA DA GEOMETRIA DINÂMICA.....	12
3.5 HISTÓRICO DA GEOMETRIA DINÂMICA.....	13
3.6 ALGUNS SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA.....	14
<b>3.6.1 Tabulae.....</b>	<b>15</b>
<b>3.6.2 Cabri-Géomètre.....</b>	<b>17</b>
<b>3.6.3 The Geometer's Sketchpad.....</b>	<b>18</b>
<b>3.6.4 Cinderella.....</b>	<b>19</b>
<b>3.6.5 Igeom.....</b>	<b>20</b>
3.7 APLICABILIDADE DA GEOMETRIA DINÂMICA.....	21
<b>4 EQUIVALÊNCIA DE ÁREAS.....</b>	<b>23</b>
4.1 MÉDIA GEOMÉTRICA OU MÉDIA PROPORCIONAL.....	23
4.2 QUADRATURAS.....	26
<b>4.2.1 - 1º Problema de Quadratura.....</b>	<b>26</b>
<b>4.2.2 - 2º Problema de Quadratura.....</b>	<b>28</b>
<b>4.2.2 - 3º Problema de Quadratura.....</b>	<b>31</b>
4.3 QUADRATURA DO CÍRCULO.....	34

<b>4.3.1 Processo de Arquimedes.....</b>	<b>36</b>
<b>4.3.1.1 Quadratura Utilizando o Processo de Arquimedes.....</b>	<b>38</b>
<b>4.3.2 Processo de kochansky.....</b>	<b>39</b>
<b>4.3.2.1 Quadratura Utilizando o Processo de Kochansky.....</b>	<b>42</b>
<b>4.3.2 Processo de Specht.....</b>	<b>43</b>
<b>4.3.2.1 Quadratura Utilizando o Processo de Specht.....</b>	<b>46</b>
<b>5 PARTIÇÕES.....</b>	<b>47</b>
<b>5.1 - 1º Problema de Partição.....</b>	<b>50</b>
<b>5.2 - 2º Problema de Partição.....</b>	<b>52</b>
<b>5.3 - 3º Problema de Partição.....</b>	<b>54</b>
<b>6 CONCLUSÃO.....</b>	<b>57</b>
<b>7 REFERÊNCIAS.....</b>	<b>59</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A tecnologia da informática tem exercido grande contribuição para as diversas áreas do conhecimento e um avanço significativo para a área da educação. O uso de computadores na vida das pessoas e principalmente nas escolas, tem auxiliado os profissionais da área do ensino matemático e favorecido no aprendizado dos alunos.

Uma das mais antigas áreas da matemática, a geometria, vem utilizando segundo Braviano e Rodrigues (2002) um novo termo: A Geometria Dinâmica. Não se trata de uma nova geometria, o que ocorre é o surgimento de movimento para as descrições geométricas.

Desde a antiguidade, problemas envolvendo cálculos com distância, ângulos e formas geométricos se resolviam com ajuda de régua e compasso, porém com o surgimento do computador e o desenvolvimento acelerado da informática surgem os softwares interativos para o ensino da geometria.

Na formação da imagem mental, o desenho associado ao objeto geométrico desempenha papel fundamental. Para o aluno nem sempre é de todo claro que o desenho é apenas uma instância física de representação do objeto.

O uso dos computadores e os softwares direcionados para a matemática, mostram-se grandes aliados para o aprendizado da geometria dinâmica. É evidente o quanto esses softwares com recursos de “desenhos em movimento” podem ser ferramentas ideais na superação das dificuldades.



De acordo com Gravina (1996) estamos diante de uma nova forma de ensinar e aprender Geometria; a partir de exploração experimental viável somente em ambientes informatizados, os alunos conjecturam e, com o *feedback* constante oferecido pela máquina, refinam ou corrigem suas conjecturas, chegando a resultados que resistem ao “desenho em movimento”, passando então para a fase abstrata de argumentação e demonstração matemática.

Diante do exposto, com o auxílio do software Tabulae, desenvolveremos exemplos de equivalência de áreas, mais precisamente de quadraturas e partições. No capítulo das quadraturas, será abordada a quadratura do círculo, um dos grandes desafios da geometria, que apesar de não poder ser executada com exatidão, tem de processos geométricos aproximativos que produzem excelentes resultados.

Por fim, são geradas importantes vantagens para a motivação dos alunos, tendo em vista que esta motivação é despertada pelo ambiente interativo e animado, proporcionando assim uma melhora significativa no processo ensino-aprendizagem.

## 2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é fazer uma exploração sobre este novo conceito de geometria, a geometria dinâmica, descrevendo seus conceitos, seus softwares e suas potencialidades. Evidenciar o quanto é importante o uso de ambientes informatizados para o processo ensino-aprendizagem.

E para demonstrar uma, de suas muitas aplicabilidades, resolveremos, com o auxílio do *software* Tabulae, alguns problemas de quadraturas, incluindo a do círculo e também problemas de partição de áreas.

### 3 GEOMETRIA DINÂMICA

#### 3.1 O QUE É GEOMETRIA DINÂMICA

Atribui-se a geometria dinâmica o estudo das propriedades do conjunto de desenhos representando um mesmo objeto ou respeitando um mesmo conjunto de especificações.

#### 3.2 OBJETIVO DA GEOMETRIA DINÂMICA

A geometria dinâmica tem por objetivo conduzir os alunos a visualizar uma leitura geométrica dos desenhos. De acordo com Braviano e Rodrigues (2002) o uso da geometria dinâmica torna disponíveis representações gráficas de objetos geométricos que aproximam o objeto material da tela do computador (desenho) do objeto teórico (figura). Ela também favorece o entendimento geométrico do desenho para o aprendiz, contornando assim, uma das dificuldades do ensino da geometria. “ O desenho é em geral, o objeto de raciocínio do aluno, enquanto o professor aborda a figura”. (BRAVIANO E RODRIGUES, 2002, p. 25).

### 3.3 A GEOMETRIA DINÂMICA E AS OUTRAS GEOMETRIAS

A geometria dinâmica não é a geometria euclidiana ou uma das geometrias não-euclidianas. Os diversos softwares de geometria dinâmica implementam modelos de geometria diferentes. Cada implementação da geometria dinâmica, além de ter as características da geometria que a modela, tem também propriedades específicas. De certa forma, ela constitui uma extensão dessas geometrias. Uma dessas extensões é o gerenciamento dos casos limites: objetos nem sempre definidos, gerenciamento dos pontos de interseção durante o deslocamento.

### 3.4 A DINÂMICA DA GEOMETRIA DINÂMICA

A característica dinâmica aparece pela possibilidade de se passar de um desenho a um outro pelo deslocamento quase contínuo dos objetos. Os objetos do desenho não são completamente definidos pelas especificações, por exemplo: "Seja um triângulo ...". Com o dinamismo, as propriedades geométricas da figura aparecem como propriedades mecânicas dos desenhos. A percepção age sobre as características dinâmicas dos desenhos geométricos. As propriedades geométricas aparecem dinamicamente como invariantes durante o deslocamento dos elementos básicos.

### 3.5 UM BREVE HISTÓRICO DA GEOMETRIA DINÂMICA

A geometria dinâmica surgiu em meados dos anos oitenta, quando também surgiram os *softwares* Cabri-Géomètre, na França, e Visual Geometry Project, hoje The Geometer's Sketchpad, criado nos Estados Unidos.

Estes *softwares* são ferramentas computacionais que funcionam como régua e compasso eletrônicos, possibilitando ao usuário a criação de construções geométricas dinâmicas, ou seja, continuarão mantendo suas propriedades mesmo com a movimentação de quaisquer elementos da construção.

Desde então surgiram novos *softwares*, que citaremos mais tarde, sendo um deles o Tabulae, criado na Universidade Federal do Rio de Janeiro, no final da década de noventa, e que será utilizado neste trabalho para a construção dos exemplos.

### 3.6 ALGUNS SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA

Existem no mercado vários programas para a implementação da Geometria Dinâmica, sendo que alguns destes encontram-se disponíveis na *internet*, de forma gratuita para experimentação (*demo, freeware ou shareware*), para *download*. A grande maioria é compatível com a plataforma *WINDOWS*. Destes listados abaixo, descreveremos os cinco mais utilizados, que encabeçam a relação, seguidos dos endereços de seus *sites*.

- Tabulae - <http://www.tabulae.net>
- Cabri-Géomètre - <http://www.cabri.net/index.php>
- The Geometer's Sketchpad - <http://www.keypress.com/sketchpad/>
- Cinderella - <http://www.cinderella.de/tiki-index.php>
- iGeom - <http://www.matematica.br/igeom/>
- Geometricks
- Régua e Compasso (Compasses and Ruler)
- Euklid
- Wingeom
- Dr. Geo
- Géó Specif
- Geometric Inventor
- Geometric Supposer
- Juno 2
- Projective Drawing Board (PDB)

- Uni-Géom

### 3.6.1 Tabulae

O software Tabulae foi desenvolvido no Instituto de Matemática (IM) da Universidade Federal do Rio de Janeiro. O desenvolvimento deste software fez parte do projeto PACE – Pesquisa em Ambientes Computacionais de Ensino. O projeto PACE também foi responsável pelo desenvolvimento de outros materiais voltados para a criação de ambientes colaborativos de aprendizagem via internet.

O nome Tabulae vem do conjunto de tábuas de cera que os antigos gregos e romanos usavam para rabiscar mensagens e diagramas.

O desenvolvimento do sistemas deu-se através das necessidades de custo e de disponibilidade para os professores que se formam nos cursos de licenciatura plena em matemática e de especialização para professores.

Geralmente os softwares de geometria dinâmica, disponíveis no mercado, apresentam alto custo para o professor e normalmente ainda não dispõem de recurso para a comunicação via internet.

O Tabulae está inteiramente escrito na linguagem Java, e é compatível com diferentes sistemas operacionais, tais como Windows, Linux e Macintosh.

Sendo sua concepção inteiramente orientada a objeto, é possível adicionar novas ferramentas sem a necessidade de reiniciar seu processo de montagem.

O programa apresenta no design da interface gráfica além de aspectos estéticos e tecnológicos, elementos que podem interferir na comunicação ou apreensão da informação apresentada.

Assim, foram levados em consideração no design, os aspectos perceptuais, cognitivos e de interação homem-máquina. Também foram mantidas determinadas normas e um vocabulário simples que permitisse que o usuário tivesse familiaridade com conceitos já conhecidos e pudesse aprender com facilidade os novos. (ALVES E SOARES ,2003 p.02)

Com o Tabulae o usuário pode enviar uma construção para outros usuários conectados a internet através da geração de *applets* que podem ser usados como ferramenta de autoria para redes locais e através da internet.

Através deste programa, é possível que professores e/ou pesquisadores acompanhem passo-a-passo o trabalho de cada aluno individualmente ou em pequenos grupos, possibilitando que tais registros sejam utilizados para avaliações ou para pesquisas sobre a diversidade de soluções apresentadas. (ALVES E SOARES, 2003 p. 02-03)

Por fim, o programa gera uma listagem em linguagem HTML, contendo todas as atividades desenvolvidas pelo aluno durante o processo de investigação de um problema, incluindo as etapas da construção realizada por ele e a indicação do tempo gasto para finalizar cada uma dessas etapas.



### 3.6.2 Cabri-Géomètre

O Cabri-Géomètre é o resultado da pesquisa dentro da Universidade Joseph Fourier em Grenoble, França.

Foi idealizado por Yves Baulac, Franck Bellemain e Jean Marie Laborde, com sua primeira versão lançada em 1988.

É um software desenvolvido para gerar construções geométricas, funcionando como “régua e compasso” eletrônicos, sendo um caderno de rascunho interativo e informatizado, *Cahier de Brouillon Intéreactif*, em francês. O nome Cabri é a aglutinação das primeiras letras de cada palavra.

Sua segunda versão, o Cabri-Géomètre II, é uma versão adaptada para o ambiente WINDOWS, e é dotada de novos recursos como a construção de lugares geométricos, de cônicas por cinco pontos, a associação de elementos de geometria analítica às construções, fazendo atualizações automáticas nos parâmetros das equações ao modificar interativamente os elementos gráficos na tela.

O Cabri-Géomètre II segundo Braviano e Rodrigues (2002) provavelmente é o software de geometria dinâmica mais utilizado no Brasil.

Uma versão de demonstração deste software encontra-se disponível no site: <http://www.cabri.net>

### 3.6.3 The Geometer's Sketchpad

É um software desenvolvido por Nicholas Jakin, nos Estados Unidos da América, e é comercializado pela Key Curriculum Press, que tem sob seus domínios a marca registrada do termo "Dynamic Geometry".

Tem funcionalidades muito próximas as do Cabri, porém com um menu de opções propositadamente reduzido.

Uma cópia para experimentação pode ser obtida através do site:

<http://www.keypress.com>

### 3.6.4 Cinderella

O diferencial deste software é o de ser desenvolvido por matemáticos e para matemáticos: permite o trabalho com geometrias euclidiana, hiperbólica e elíptica.

Criado na Alemanha por Jürgen Richter-Gerbert e Ulrich Kortenkamp, foi lançado comercialmente no ano de 1999. É totalmente desenvolvido em *Java*, possibilitando sua execução em qualquer plataforma.

No entanto sua funcionalidade é um pouco mais limitada, quando comparada a dos concorrentes, porém seus fortes são os algoritmos que garantem continuidade nas animações e a exportação imediata e completa para a *web*.

Uma versão gratuita deste software pode ser obtida no site:  
<http://www.cinderela.de>

### 3.6.5 Igeom

O IGeom foi desenvolvido em linguagem *Java*, em parceria entre o IME-USP (Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo) e a POLI-USP (Escola Politécnica da Universidade de São Paulo). Ele visa apoiar o ensino da geometria na *internet*, já que possibilita em forma de *applet*, o acesso de usuários *on-line*, para a criação das construções geométricas. Construções essas que podem ser enviadas, em forma de um arquivo HTML, para um servidor de dados, para uma posterior correção.

Existe também uma versão do tipo aplicativo, onde o usuário grava suas construções no seu próprio disco rígido.

Este software utiliza também os conceitos de geometria dinâmica, onde as propriedades geométricas estabelecidas durante a construção são mantidas durante a movimentação de alguns objetos da construção.

Uma versão do aplicativo pode ser obtida no site:  
<http://www.matematica.br/igeom/>

### 3.7 APLICABILIDADE DA GEOMETRIA DINÂMICA

Os *softwares* listados anteriormente possibilitam uma série de ferramentas para a execução de construções geométricas. Em alguns casos, muitas dessas construções já se encontram inclusive prontas para simplificar o trabalho do usuário, como por exemplo a construção de mediatrizes e bissetrizes. Pode-se também em alguns desses programas, restringir o menu de ferramentas para que o usuário utilize os conceitos de geometria que tem conhecimento para a realização de tais construções.

Abaixo, algumas das construções possíveis com os softwares de geometria dinâmica:

- Construção de polígonos;
- Divisão de segmentos;
- Construção de Lugares Geométricos;
  - Circunferência;
  - Mediatriz;
  - Paralelas;
  - Bissetriz;
  - Eixo Radical;

- Transformações geométricas;
  - Translação;
  - Simetria;
  - Homotetia;
  - Rotação;
  - Semelhança;
- Construção de cônicas;
  - Elipse;
  - Parábola;
  - Hipérbole;
- Entre outras.

## 4 EQUIVALÊNCIA DE ÁREAS

### Definição:

Duas figuras planas são ditas equivalentes quando, e somente quando, possuem áreas iguais. Ou ainda, dois polígonos são chamados equivalentes se, e somente se, forem somas de igual número de polígonos dois a dois congruentes entre si.

Faremos a partir de agora um estudo, utilizando a Geometria Dinâmica, mais propriamente o software Tabulae, das quadraturas e partições.

Antes porém, precisamos definir uma ferramenta importante para a construção das quadraturas, a média geométrica.

### 4.1 MÉDIA GEOMÉTRICA OU MÉDIA PROPORCIONAL

#### Definição:

Chama-se média geométrica entre dois segmentos  $p$  e  $q$  dados, o segmento  $x$ , tal que  $x^2 = p \cdot q$ .

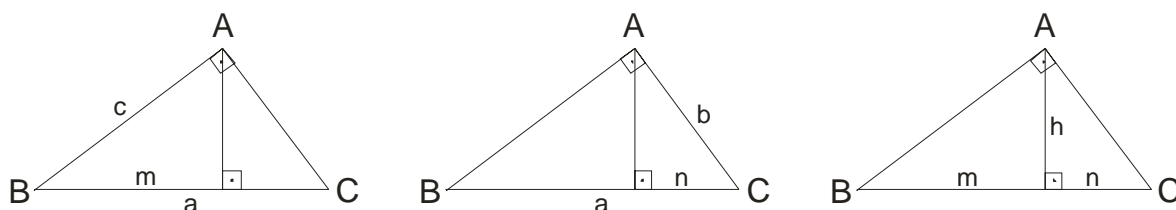
A construção da média geométrica pode ser feita utilizando-se as conhecidas relações métricas do triângulo retângulo.

$$c^2 = a \cdot m$$

$$b^2 = a \cdot n$$

$$h^2 = m \cdot n$$

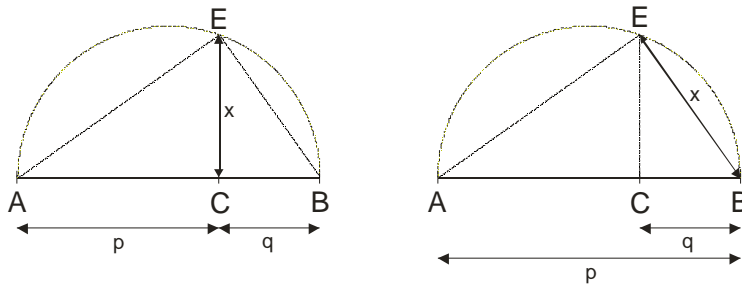
Onde as duas primeiras relações significam que um cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela, e a terceira significa que a altura relativa a hipotenusa é a média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.



Para obter-se graficamente a média geométrica entre dois segmentos  $p$  e  $q$  dados devemos:

1. Dispor  $p$  e  $q$  sobre uma reta  $r$ , segundo qualquer uma das maneiras abaixo:
  - $p$  e  $q$  com uma extremidade em comum, mas não devem se sobrepor;
  - $p$  e  $q$  com uma extremidade em comum e ainda sobrepostos.
2. Traçar uma semi-circunferência de diâmetro  $\overline{AB}$  e em seguida a reta  $s$ , perpendicular a  $r$  por  $C$ . Então  $x$  fica determinado como altura ou como cateto.





Construindo no Tabulae:

1. Criar uma reta  $r$ ;
2. Definir sobre  $r$ , os segmentos  $p$  ( $\overline{AC}$ ) e  $q$  ( $\overline{CB}$ );
3. Criar o ponto médio entre  $A$  e  $B$ , ponto  $D$ ;
4. Construir a circunferência de centro  $D$  e raio  $\overline{AD} = \overline{DB}$ ;
5. Traçar uma reta  $s$ , perpendicular a  $r$  em  $C$ ;
6. Criar o ponto de intersecção de  $s$  com a circunferência, ponto  $E$ ;
7. Construir o segmento  $x$  ( $\overline{CE}$ ), que é a média geométrica entre  $p$  e  $q$ .

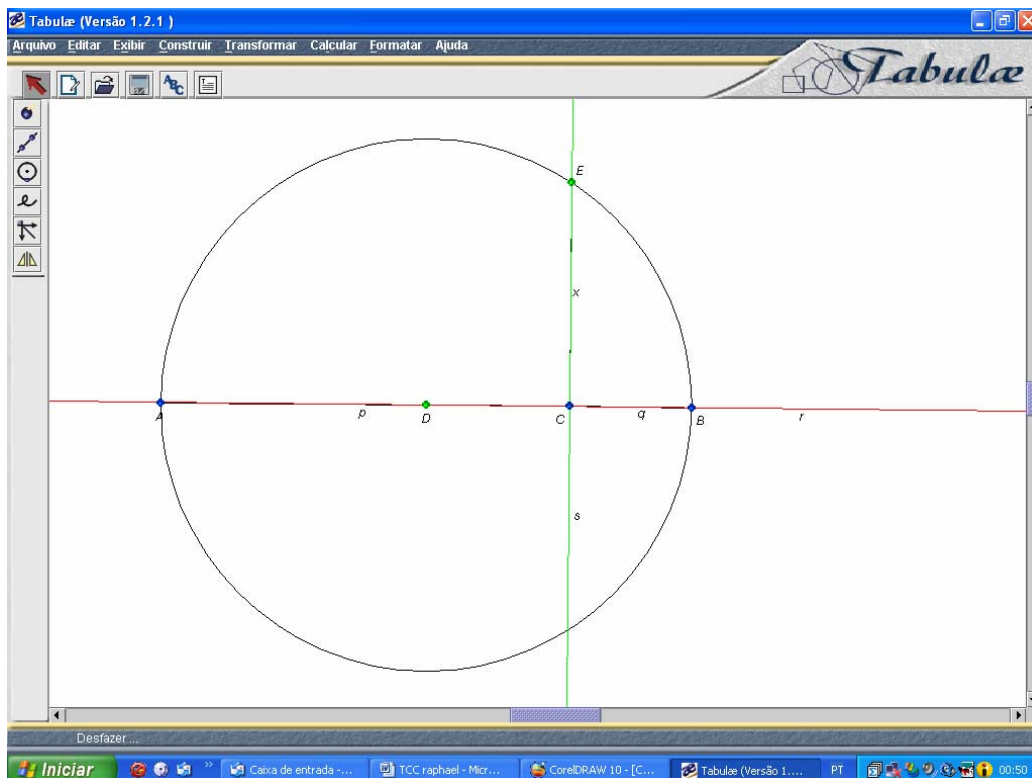


Figura 01 – exemplo de construção da média geométrica no software Tabulae

## 4.2 QUADRATURAS

São uma classe de problemas de equivalência que propõem a construção de quadrados equivalentes a uma figura dada, como triângulos, trapézios e quaisquer outros polígonos, sejam eles côncavos ou convexos.

Portanto, a partir de agora não diremos mais que um polígono tem área igual a  $X$ , e sim que o polígono tem área  $x^2$ , onde  $x$  é um segmento.

### 4.2.1 - 1º Problema de Quadratura:

Dado um triângulo  $ABC$ , mostrar que é equivalente ao quadrado  $DEFG$ .

Supondo que o triângulo tem a medida da base igual a  $b$  e uma altura  $h$ , e é equivalente a um quadrado de lado medindo  $x$ , então:

$$S_{\square} = S_{\triangle}$$

$$x^2 = b \cdot \frac{h}{2}$$

Ou seja,  $x$  é a média geométrica entre a base ( $b$ ), e a metade da altura  $\left(\frac{h}{2}\right)$ .

Para tornar clara essa relação de equivalência entre essas duas figuras, serão construídas as duas no software *Tabulae*, de forma que exista essa propriedade expressa entre ambas para que a Geometria Dinâmica possa

apresentar de forma interativa o resultado da questão, podendo este ser modificado com o recurso da dinamicidade do ambiente estudado, demonstrando de imediato a relação na representação gráfica na solução da questão.

Construindo no Tabulae:

1. Criar uma reta  $r$ , que contenha os pontos  $A$  e  $C$ ;
2. Criar um ponto  $B$ , fora da reta  $r$ ;
3. Construir o polígono (triângulo)  $ABC$ ;
4. Construir a altura ( $h$ ) relativa ao lado  $AC$ ,
5. Encontrar o ponto médio de  $h$ , ponto  $M$ ;
6. Construir o segmento  $BM$ ;
7. Encontrar a média geométrica ( $x$ ) entre  $BM \left(\frac{h}{2}\right)$  e  $AC (b)$ , utilizando a construção vista no início deste capítulo;
8. Construir o quadrado de lado  $x$ ;
9. Calcular a área dos polígonos;
10. Mover o ponto  $B$  e observar a equivalência das áreas.

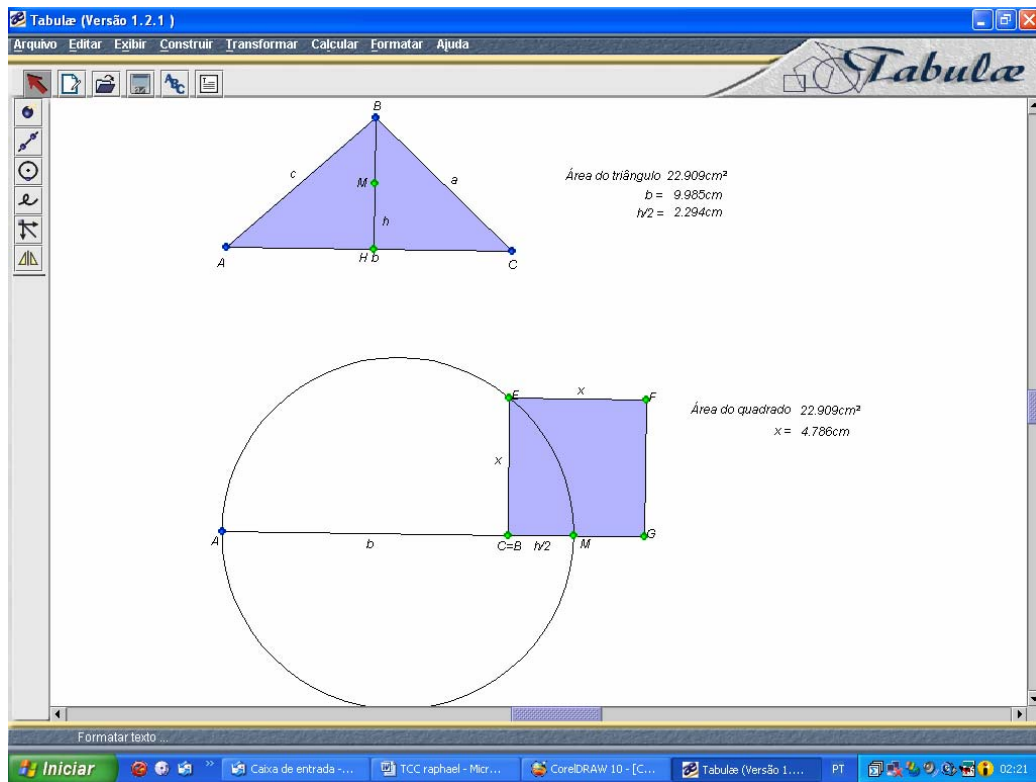


Figura 02 – exemplo de construção da quadratura do triângulo no software Tabulae

#### 4.2.2 - 2º Problema de Quadratura:

Dado um quadrilátero ABCD qualquer, construir um quadrado EFGH equivalente.

Nesta construção, devemos transformar o quadrilátero ABCD em um triângulo ABC', traçando uma reta r que passe pelos pontos B e D, e uma reta s paralela a r que passe por C, e que encontre o prolongamento de AD, determinando o ponto C'.

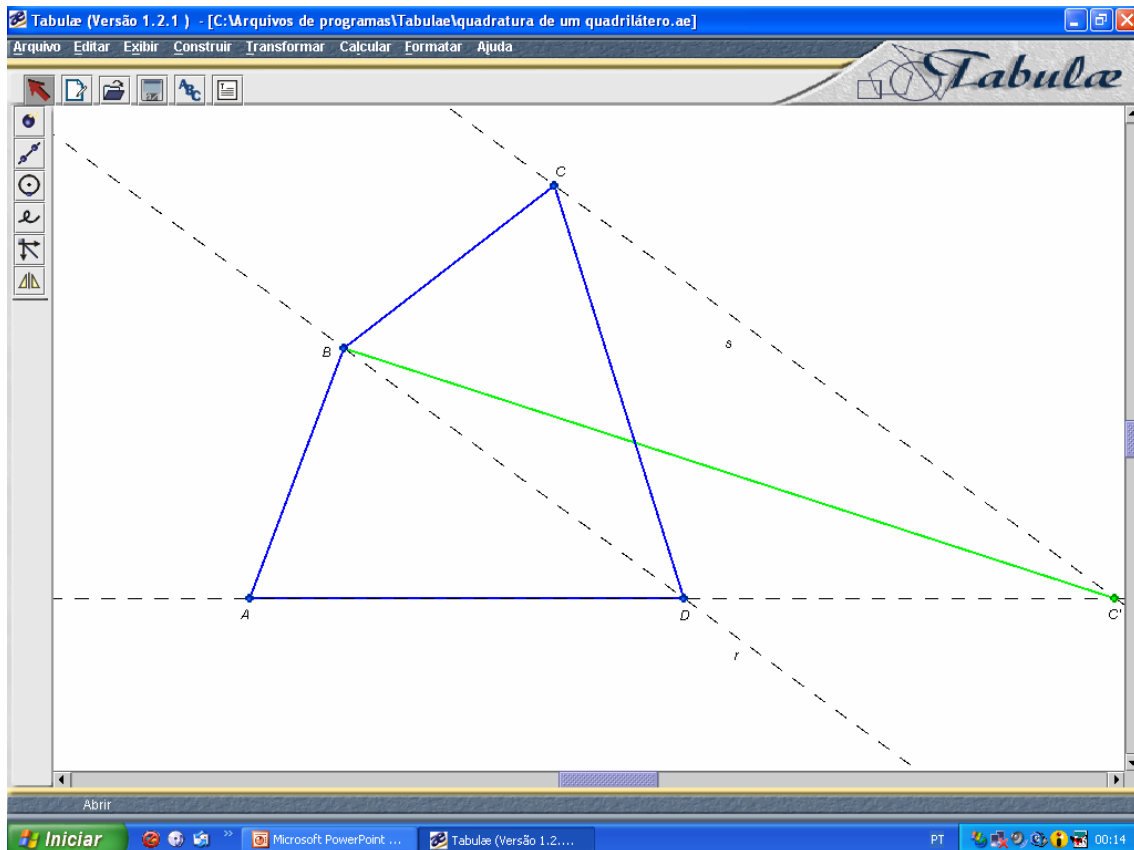


Figura 03 – exemplo de transformação de um quadrilátero  $ABCD$  em triângulo  $AC'B$  no software Tabulae

Podemos notar que  $\triangle BCD \cong \triangle BDC'$  pois, quando mantemos fixa a base de um triângulo e deslocamos o vértice oposto sobre uma reta paralela a essa base sua área fica inalterada.

Logo, o quadrilátero  $ABCD$  é equivalente ao triângulo  $ABC'$ .

Agora é possível a aplicação dos conhecimentos anteriores para a quadratura.

A partir do triângulo  $ABC'$ , vamos encontrar o quadrado  $EFGH$ .

Construindo no Tabulae:

1. Construir um quadrilátero  $ABCD$ ;
2. Construir um triângulo  $ABC'$  equivalente ao quadrilátero  $ABCD$ , utilizando a construção que segue:
  - 2.1. Traçar uma reta  $r$  unindo os pontos  $B$  e  $D$ ;
  - 2.2. Traçar uma reta  $p$ , paralela a  $r$ , passando por  $C$ ;
  - 2.3. Na intersecção da reta  $p$  com o prolongamento do lado  $\overline{AD}$ , criar o ponto  $C'$ ;
  - 2.4. Unir os pontos  $B$  e  $C'$  e criar o segmento  $\overline{BC'}$ ;
3. A partir do triângulo  $ABC'$  obtido, realizar a quadratura conforme o 1º problema de quadratura.

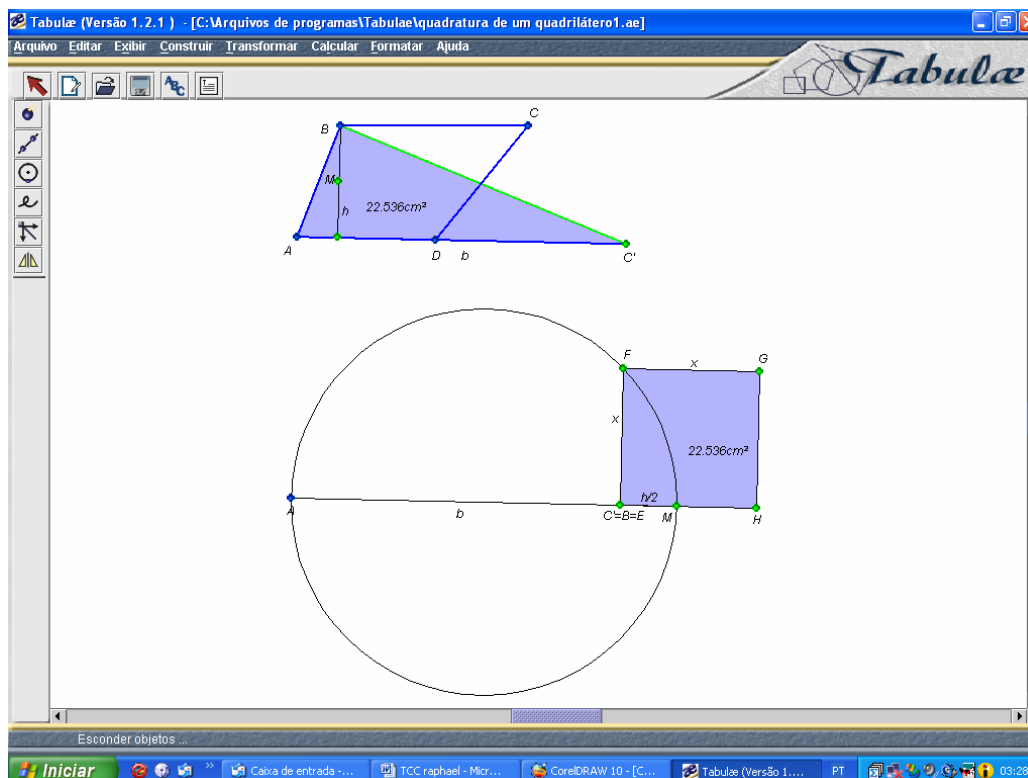


Figura 04 – exemplo de quadratura de um quadrilátero qualquer no software Tabulae

### 4.2.3 - 3º Problema de Quadratura:

Dado um polígono  $ABCDE$ , construir um quadrado  $FGHI$  equivalente a ele.

Deve-se aqui, encontrar um método para a construção de um triângulo e a partir deste executar a quadratura.

Seguindo os exemplos anteriores, utilizando congruência de triângulos, vamos reduzir o número de lados do polígono de cinco para quatro, e posteriormente de quatro para três lados, ou seja, vamos construir a equivalência entre um pentágono e um triângulo, para em seguida, como anteriormente executar a quadratura.

Temos então que o pentágono  $ABCDE$  é equivalente ao quadrilátero  $ABD'E$ , verificada a congruência entre os triângulos  $ED'C$  e  $CDE$ , e o quadrilátero  $ABD'E$  é equivalente ao triângulo  $AB'E$ , verificada a congruência entre os triângulos  $EBD'$  e  $EBB'$ .

Construindo no Tabulae:

1. Construir o polígono  $ABCDE$ ;
2. Transformar o polígono  $ABCDE$  em um equivalente  $ABD'E$ , utilizando a construção do 2º problema de quadratura;
3. Transformar o polígono  $ABD'E$  em um triângulo  $AB'E$  equivalente, utilizando a construção do 2º problema de quadratura;
4. A partir do triângulo  $AB'E$  obtido, executar a quadratura conforme o 1º problema de quadratura.

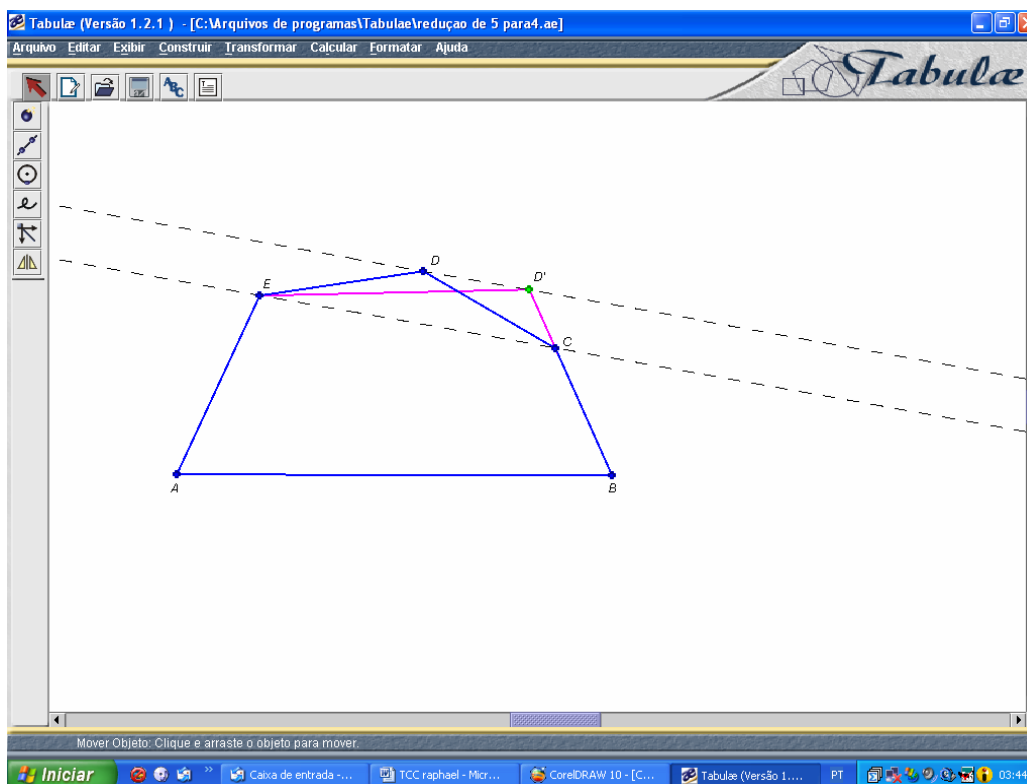


Figura 05 – exemplo de transformação de um pentágono convexo  $ABCDE$  em um quadrilátero  $ABD'E$  no software Tabulae

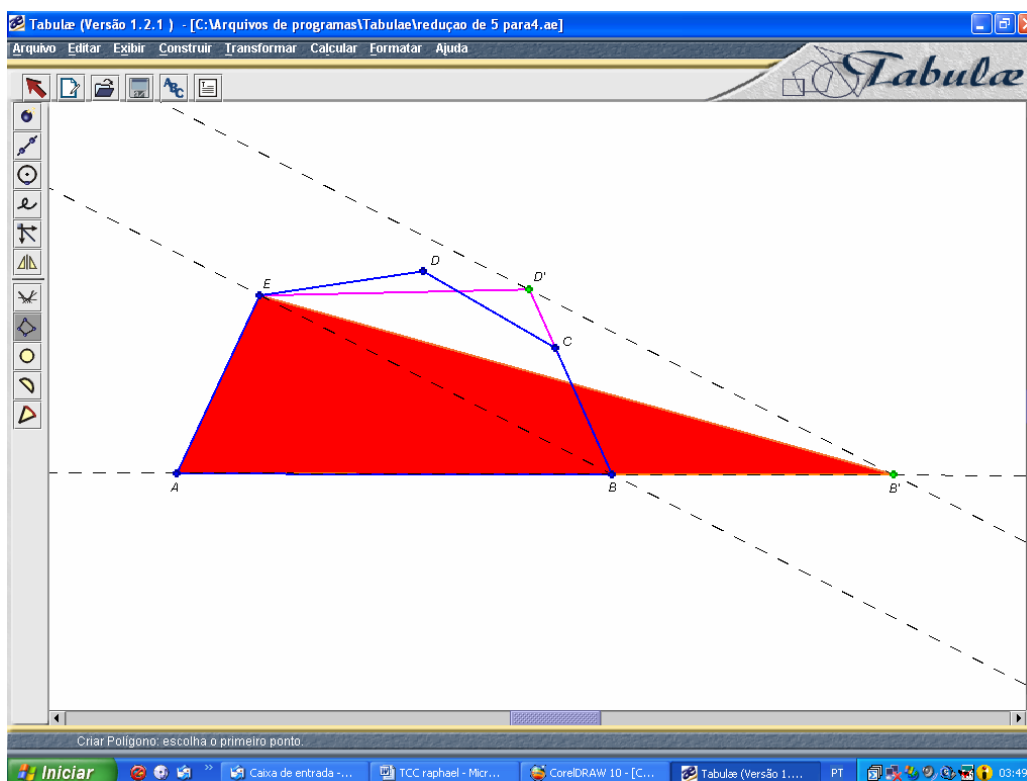


Figura 06 – exemplo de transformação do quadrilátero  $ABD'E$  em um triângulo  $AB'E$  no software Tabulae



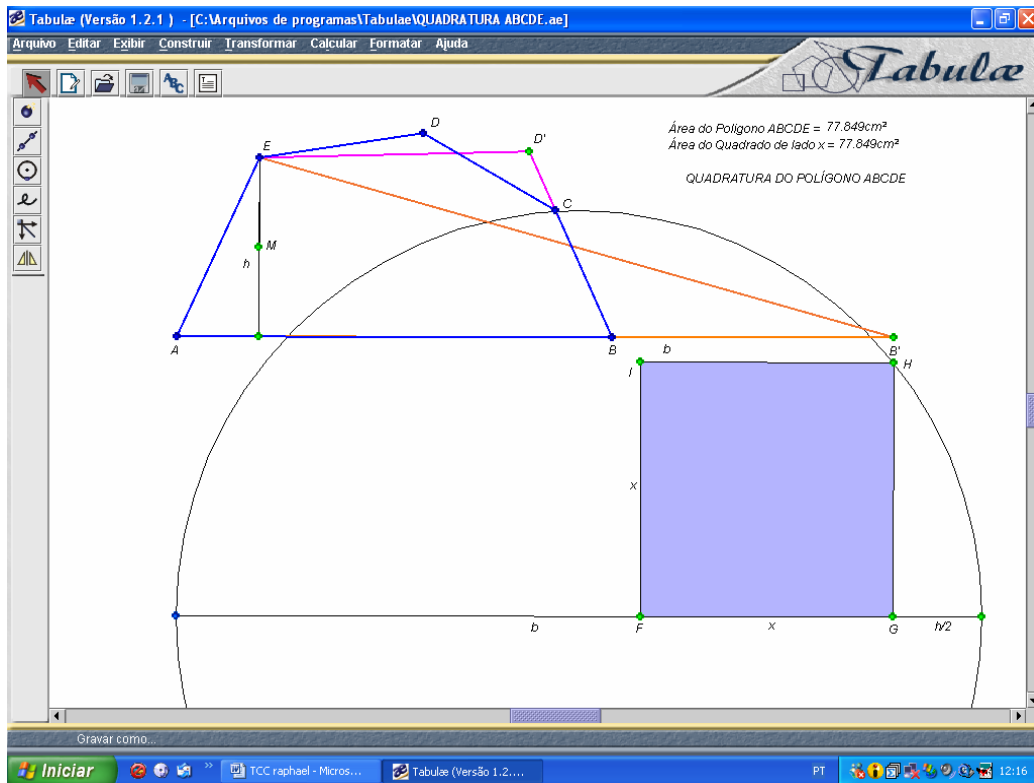


Figura 07 – exemplo de quadratura do pentágono convexo  $ABCDE$  no software Tabulae

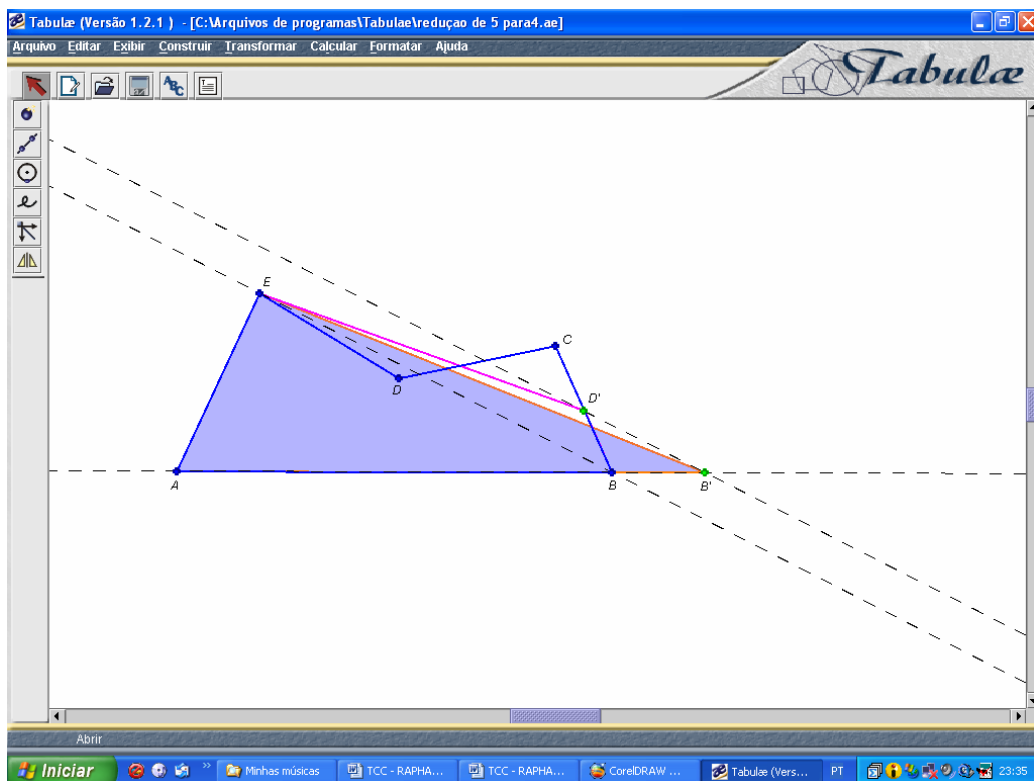


Figura 08 – exemplo de transformação do pentágono côncavo  $ABCDE$  em um triângulo  $AB'E$  no software Tabulae

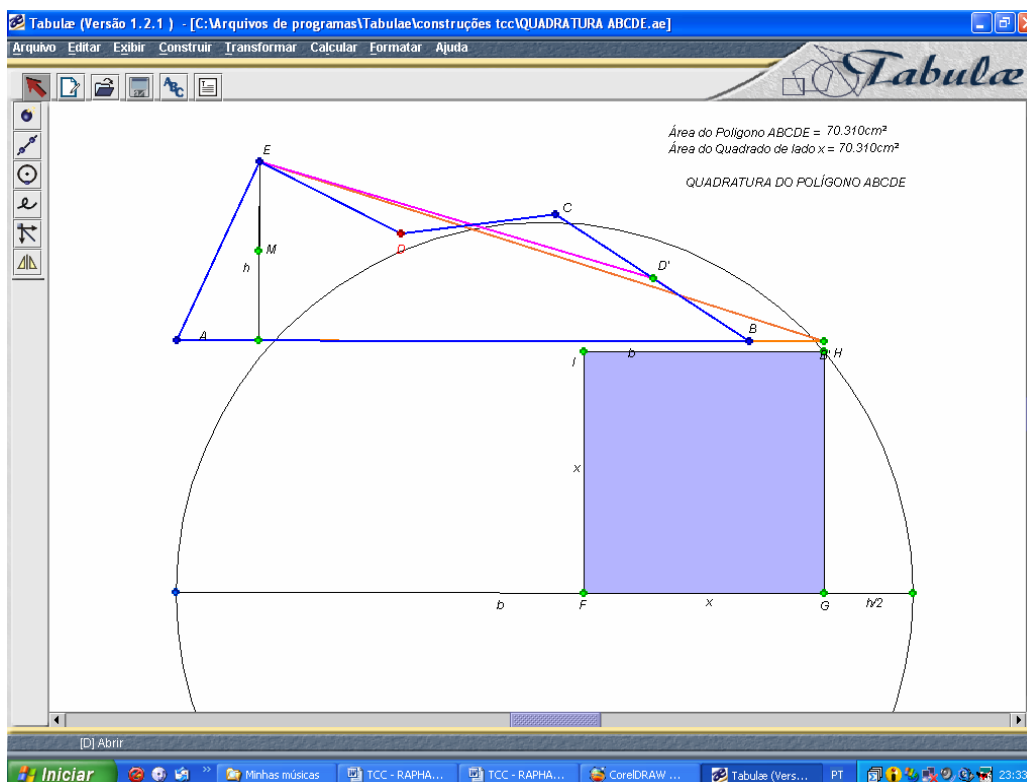


Figura 09 – exemplo de quadratura do pentágono côncavo  $ABCDE$  no software Tabulae

**Conclusão:** Para resolver um problema geral de quadratura, ou seja, o de transformar um polígono qualquer de “ $n$ ” lados em um quadrado equivalente, basta mostrar que um polígono de “ $n$ ” lados pode ser transformado em um polígono equivalente de “ $n-1$ ” lados, até que se possa representar um triângulo e utilizando a média geométrica construir sua quadratura.

### 4.3 QUADRATURA DO CÍRCULO

Este talvez seja o mais celebre problema de toda a história da matemática. O problema consiste em construir o lado  $x$  de um quadrado cuja a

área seja igual à de um círculo de raio  $r$  dado. Como a área de um quadrado é expressa por  $x^2$  e a do círculo por  $\pi r^2$ , deve-se obter  $x$  de modo que:

$$x^2 = \pi r^2$$

$$x^2 = (\pi r) \cdot r$$

Ou seja,  $x$  é a média geométrica entre  $(\pi r)$  e  $r$ .

Desta forma, o problema se resolveria se fosse possível obter um segmento de comprimento  $(\pi r)$ .

Esta quadratura consumiu esforços de vários matemáticos durante séculos, sem que se conseguisse resolvê-la com régua e compasso.

Até que em 1882, Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939) demonstrou definitivamente que obter a quadratura do círculo é impossível apenas com a utilização de régua e compasso.

A demonstração de Lindemann baseou-se que para obter-se a quadratura do círculo com instrumentos euclidianos, já estava demonstrado que o número  $\pi$  teria que ser raiz de uma equação algébrica, na forma de um número esprimível por raízes quadradas. Tais números pertencem à classe dos números algébricos, isto é, aqueles que podem ser raízes de uma equação algébrica com coeficientes inteiros. Lindemann, em 1882, provou que o número  $\pi$  é transcendente.

Por outro lado existem processos geométricos que dão valores bastante precisos para a construção de um segmento de comprimento  $(\pi r)$ .

Processos esses que quando executados com régua e compasso acarretam um erro, que em nosso estudo será minimizado com o uso da geometria dinâmica.

### 4.3.1 Processo de Arquimedes

O processo aproximativo de Arquimedes consiste em atribuir o valor de

$$\frac{22}{7} \text{ para } \pi .$$

$$\pi = 3,1415926\dots$$

$$\frac{22}{7} = 3,1428571\dots$$

Esse valor aproxima-se de  $\pi$ , por excesso, na ordem de 0,001 (um milésimo), ou seja é uma aproximação exata até a segunda casa decimal.

Sendo  $d$  o diâmetro de uma circunferência, devemos construir um segmento cujo comprimento  $C$  é:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r = d \cdot \pi \simeq d \cdot \frac{22}{7}$$

$$\therefore C = 3d + \frac{d}{7}$$

Construindo no Tabulae:

1. Criar uma circunferência de centro O;
2. Traçar um diâmetro qualquer AB;
3. Traçar uma reta t, tangente a circunferência no ponto B;
4. Marcar sobre t a medida de três diâmetros;
5. Dividir o diâmetro em sete partes iguais, utilizando o processo que segue:
  - 5.1. Traçar um segmento de reta qualquer, a partir de D, com ângulo qualquer em relação a t;

- 5.2. Marcar sobre este segmento sete pontos (G, H, I, J, K, L e M) equidistantes entre si;
- 5.3. Criar o segmento  $\overline{ME}$ ;
- 5.4. Traçar uma reta paralela a  $\overline{ME}$  passando pelo ponto L, determinando o ponto N, sendo que o segmento  $\overline{NE}$  equivale a uma das sete partes do diâmetro;
- 5.5. Marcar sobre t, o ponto F, a partir de E, com medida igual a  $\overline{NE}$ ;

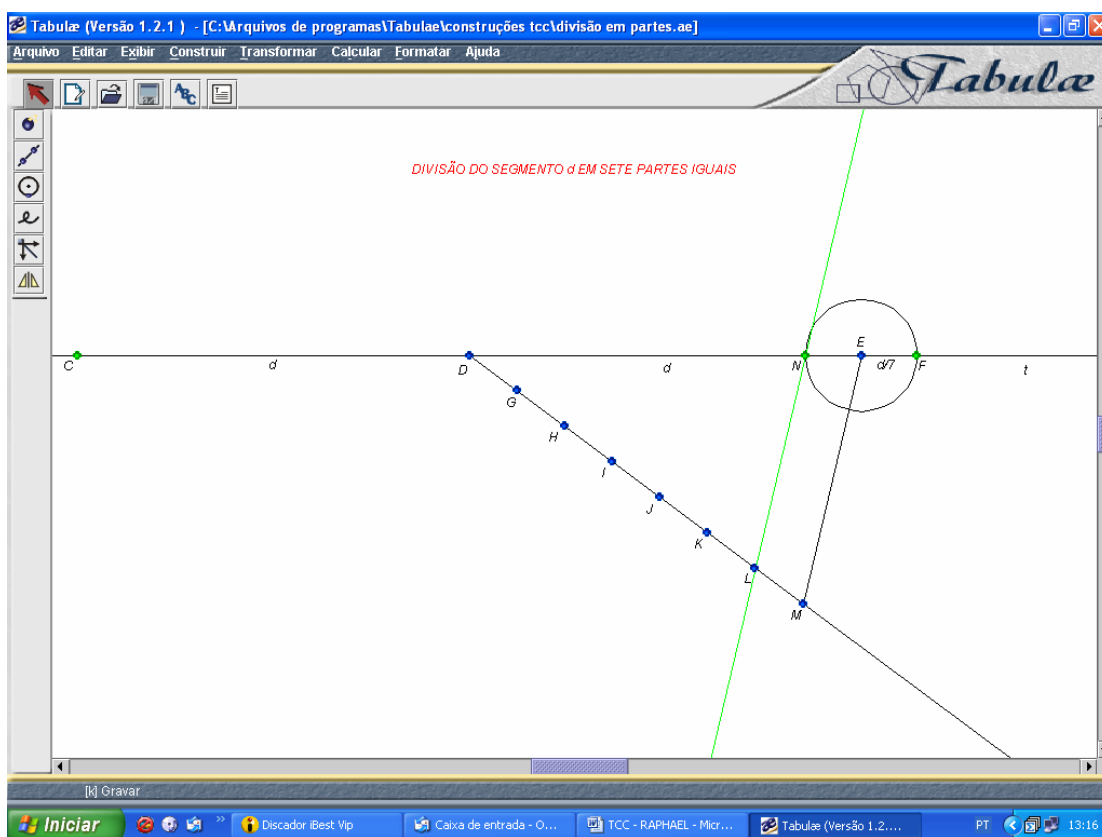


Figura 10 – exemplo da divisão de um segmento em partes iguais no software Tabulae

6. O segmento  $\overline{BF}$  é a retificação da circunferência pelo processo de Arquimedes, ou seja,  $\overline{BF} \cong d \cdot r = 2\pi r$ .

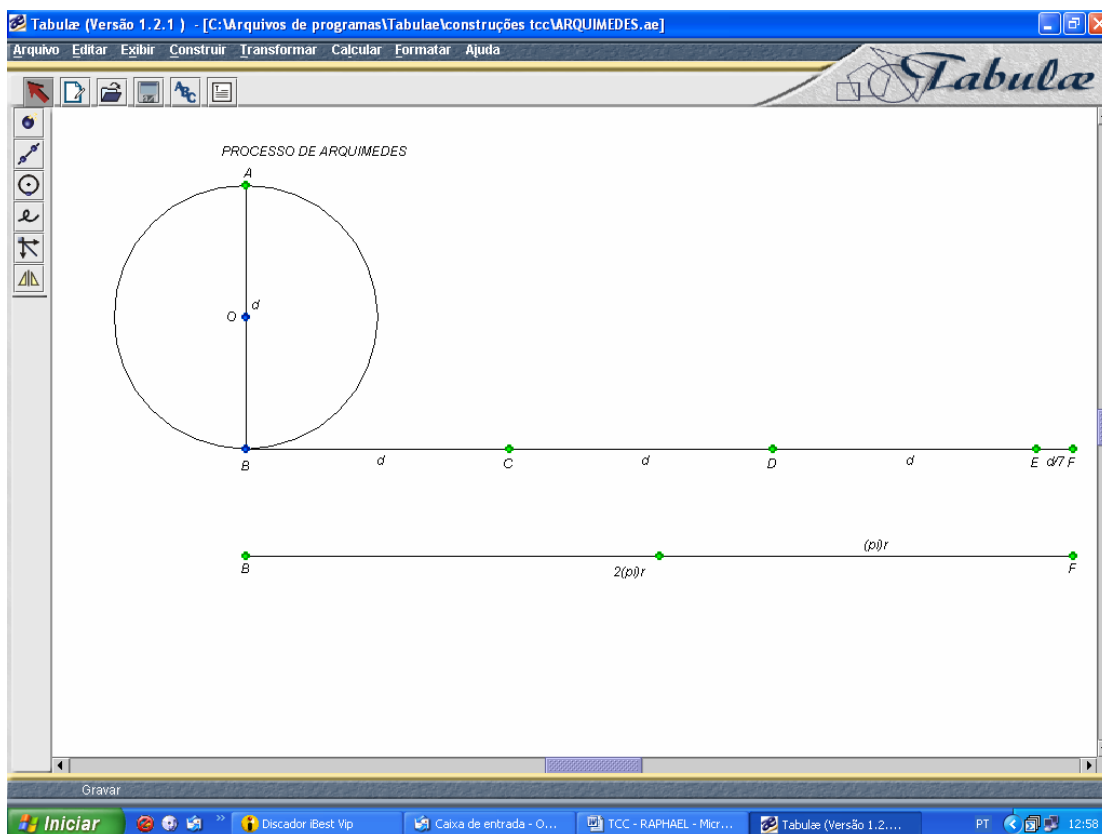


Figura 11 – exemplo de retificação de circunferência pelo processo de Arquimedes no software Tabulae

#### 4.3.1.1 Quadratura Utilizando o Processo de Arquimedes

Construindo no Tabulae:

1. Criar a circunferência de centro O;
2. Retificar pelo processo de Arquimedes conforme descrito anteriormente;
3. Construir a média geométrica  $x$ , entre  $\pi r$  e  $r$ , sendo  $\pi r$  a metade do segmento retificado;

4. A partir do segmento  $x$  obtido (média geométrica) construir o quadrado de lado  $x$ .

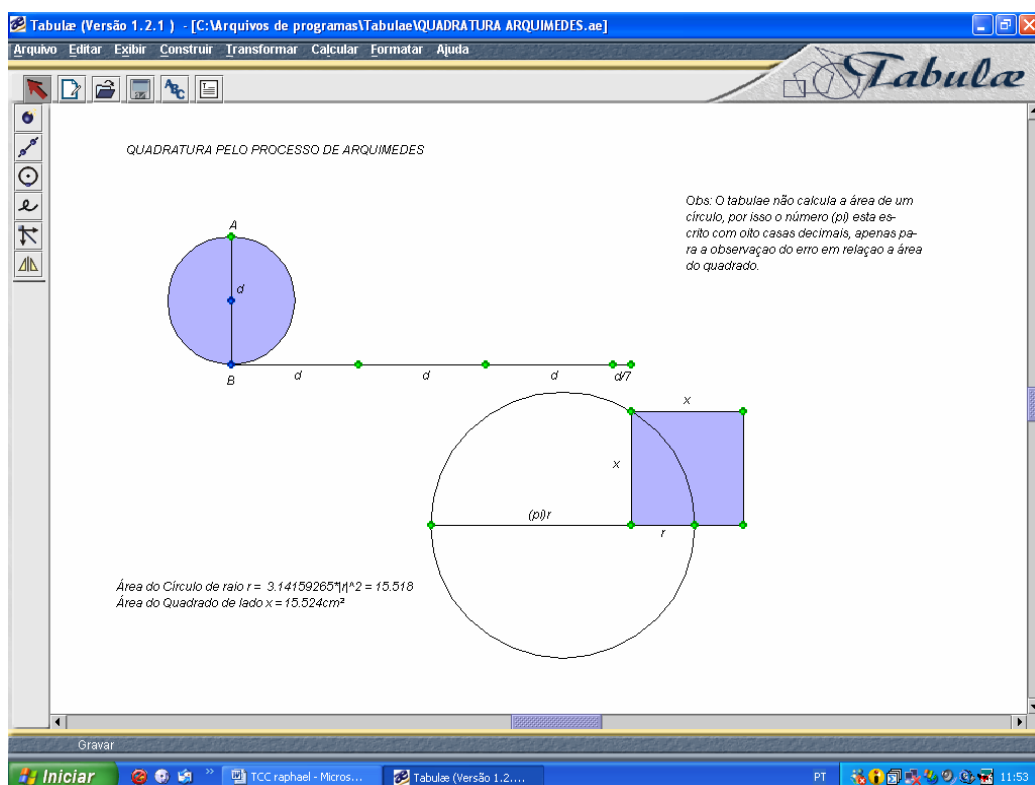


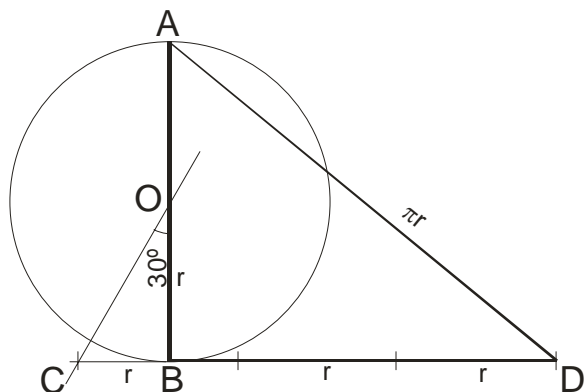
Figura 12 – exemplo de quadratura do círculo, com a circunferência retificada pelo processo de Arquimedes no software Tabulae

### 4.3.2 Processo de Kochansky

Para retificar uma circunferência de raio  $r$  dado, procede-se da seguinte maneira:

1. Traça-se um diâmetro  $\overline{AB}$  arbitrário e, pela extremidade  $B$ , traça-se uma reta  $t$ , tangente a circunferência;
2. Passando pelo centro  $O$ , traça-se uma reta  $s$ , que forma um ângulo de  $30^\circ$  com  $\overline{AB}$ , a qual intercepta  $t$  em  $C$ ;

3. No sentido de C para B, marca-se  $CD = 3r$  sobre t;
4. O segmento  $\overline{AD}$  tem comprimento aproximadamente igual a  $(\pi r)$ , isto é,  $\overline{AD}$  é a retificação da semi-circunferência.



Justificativa:

Do triângulo retângulo OBC vem:

$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{BC}{r} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BC = \frac{r\sqrt{3}}{3}$$

Como  $BD = CD - BC$  temos:

$$BD = 3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}$$

Pelo teorema de Pitágoras no triângulo ABD temos:

$$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2$$

$$(AD)^2 = (2r)^2 + \left(3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$(AD)^2 = 4r^2 + 9r^2 - \frac{6r^2\sqrt{3}}{3} + \frac{3r^2}{9}$$

Reduzindo os termos do segundo membro vem:



$$(AD)^2 = r^2 \left( \frac{40}{3} - 2\sqrt{3} \right)$$

$$\therefore AD = r \cdot \sqrt{\left( \frac{40}{3} - 2\sqrt{3} \right)}$$

Efetuando-se os cálculos finalmente temos:

$$AD = (3,1415333...) \cdot r$$

Como  $\pi = 3,1415926\dots$ , vemos que:

$$AD \simeq \pi \cdot r$$

Neste processo temos uma precisão de quatro casas decimais e uma aproximação por falta na ordem de 0,00006 (seis centésimos de milésimo), o que fornece uma boa aproximação para nossa quadratura.

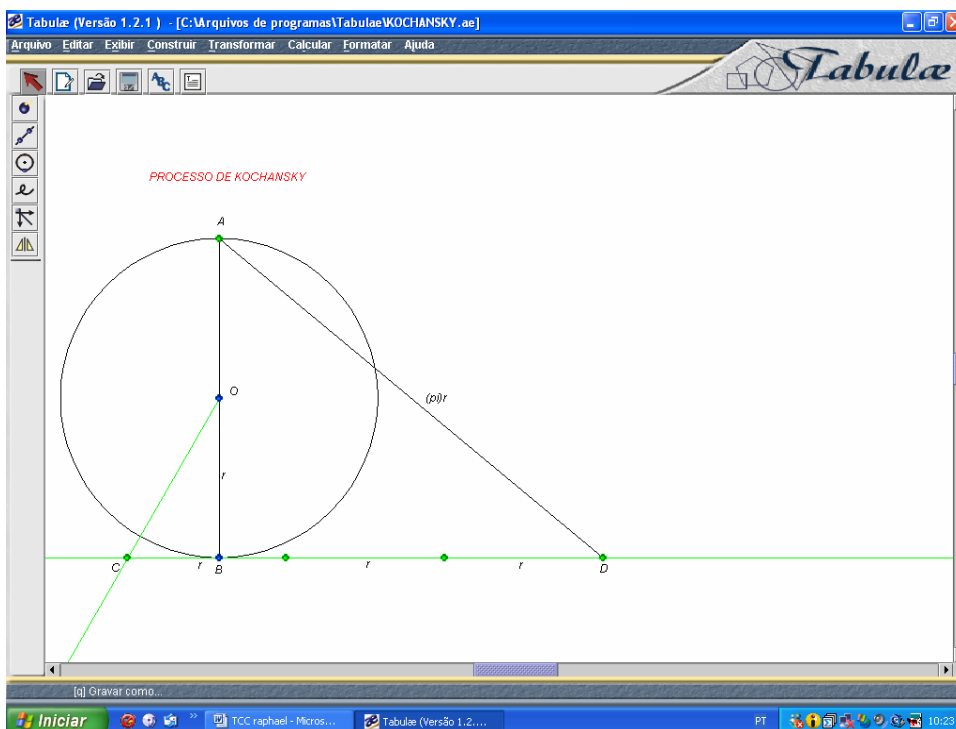


Figura 13 – exemplo de retificação de circunferência pelo processo de Kochansky no software Tabulae

### 4.3.2.1 Quadratura Utilizando o Processo de Kochansky

Construindo no Tabulae:

1. Criar uma circunferência de centro  $O$ ;
2. Retifica-la pelo processo de Kochansky, descrito anteriormente;
3. A partir do segmento  $\pi r$  encontrado, construir a média geométrica  $x$ ;
4. Construir o quadrado de lado  $x$ .

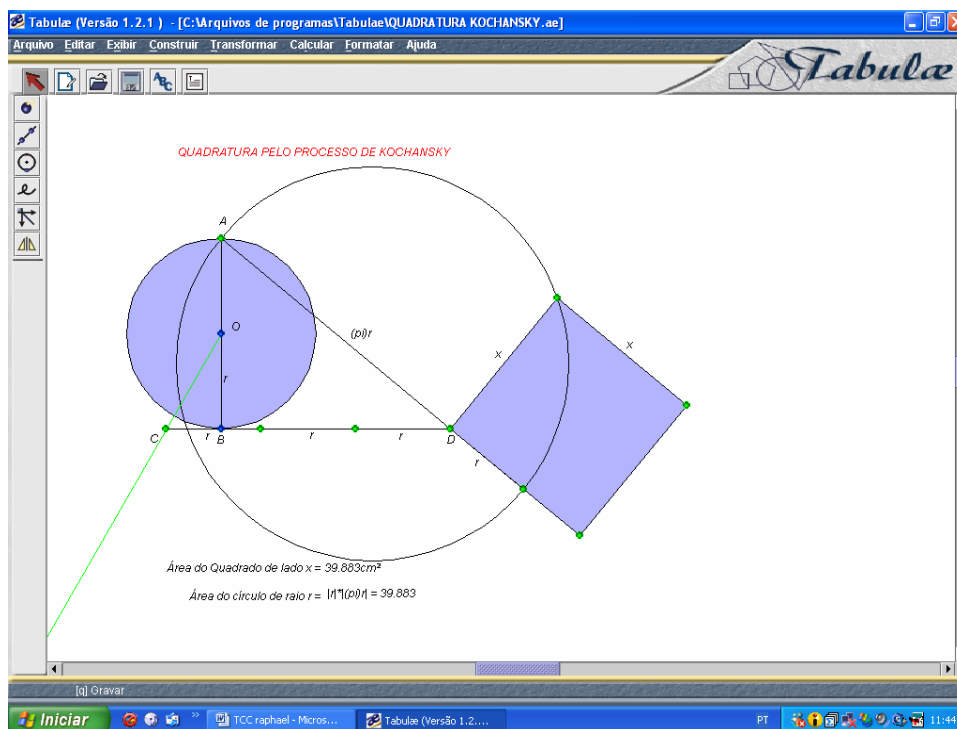


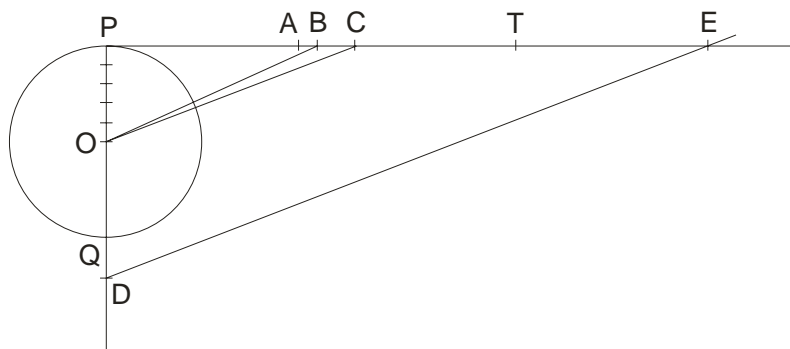
Figura 14 – exemplo de quadratura do círculo, com a circunferência retificada pelo processo de Kochansky no software Tabulae

### 4.3.3 Processo de Specht

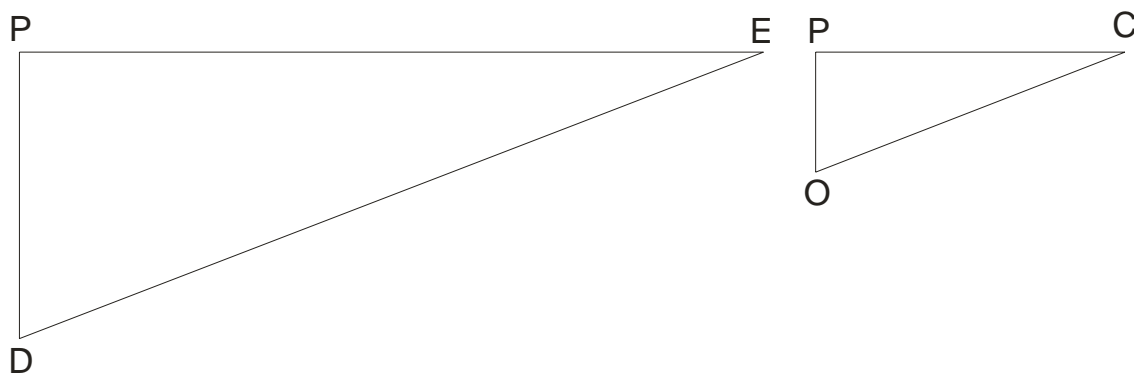
Este processo de retificação permite a melhor aproximação dentre os três mencionados neste capítulo, sendo o erro relativo menor do que  $3 \cdot 10^{-7}$ .

O processo de Specht consiste em:

1. Traçar uma semi-reta  $\overrightarrow{PQ}$ , passando pelo centro O da circunferência, tal que P e Q sejam pontos da circunferência ( $\overline{PQ}$  será o diâmetro);
2. Pela extremidade P, traçar uma semi-reta  $\overrightarrow{PT}$ , perpendicular a  $\overrightarrow{PQ}$ ;
3. Dividir o raio PO em cinco partes congruentes;
4. Determinar os pontos A, B e C na semi-reta  $\overrightarrow{PT}$ , tais que  $PA = PQ$ ;  $AB = \frac{PO}{5}$  e  $BC = \frac{2 \cdot PO}{5}$ ;
5. Traçar o segmento  $\overline{OB}$ ;
6. Determinar D na semi-reta  $\overrightarrow{PQ}$ , tal que  $PD = OB$ ;
7. Traçar o segmento  $\overline{OC}$ ;
8. Traçar o segmento  $\overline{DE}$  paralelo a  $\overline{OC}$ , tal que E pertença à semi-reta  $\overrightarrow{PT}$ ;
9.  $\overline{PE}$  será equivalente à circunferência retificada com erro relativo menor que  $3 \cdot 10^{-7}$ .



**Justificativa:**



Vamos tomar os triângulos  $DPE$  e  $OPC$ .

Por construção,  $OC$  é paralelo a  $DE$ . Logo os ângulos  $\widehat{OCP}$  e  $\widehat{P\hat{O}C}$  são correspondentes aos ângulos  $\widehat{DEP}$  e  $\widehat{P\hat{D}E}$ .

Como os lados  $OC$  e  $DE$  são homólogos proporcionais, temos o caso de semelhança de triângulos ALA (ângulo-lado-ângulo), e podemos escrever:

$$\frac{PC}{PE} = \frac{PO}{PD};$$

$$PO = r, PC = 2r + \frac{3r}{5} = \frac{13r}{5},$$

Por construção,  $PD = OB = \sqrt{r^2 + \left(\frac{11r}{5}\right)^2} = \frac{r\sqrt{146}}{5}$

Substituindo na igualdade acima temos:

$$\frac{13r}{5} = \frac{r}{\frac{r\sqrt{146}}{5}} \Leftrightarrow PE = \frac{13\sqrt{146}}{25} r \Leftrightarrow PE = \frac{13\sqrt{146}}{50} d$$

Fazendo os cálculos temos:

$PE \approx 3,1415920 \cdot d$ , onde  $d$  é o diâmetro da circunferência.

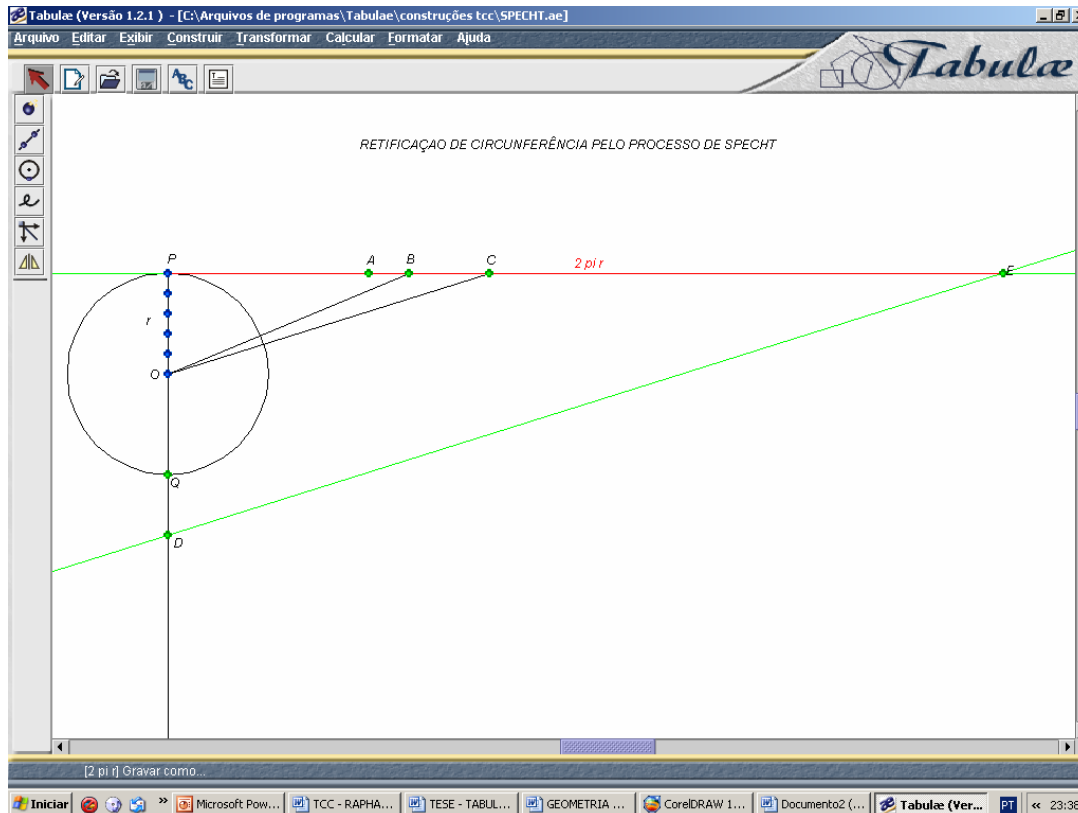


Figura 15 – exemplo de retificação de circunferência pelo processo de Specht no software Tabulae

### 4.3.3.1 Quadratura Utilizando o Processo de Specht

Construindo no Tabulae:

1. A partir da retificação, dividir o segmento retificado em duas partes iguais de tamanho  $\pi r$ ;
2. Construir a média geométrica  $x$  entre  $\pi r$  e  $r$ , conforme descrito no início deste trabalho;
3. Construir o quadrado de lado  $x$ , com área equivalente a do círculo retificado;
4. Movimentar o ponto P e observar a manutenção da equivalência.

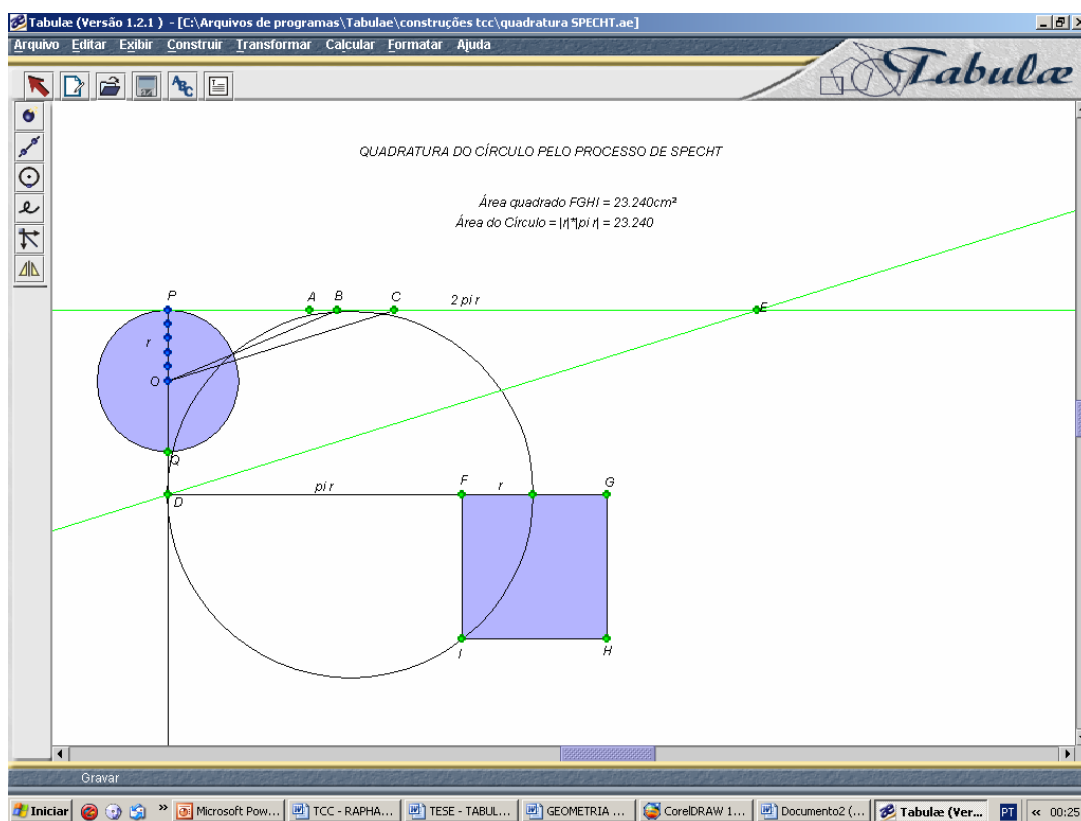


Figura 16 – exemplo de quadratura do círculo pelo processo de Specht no software Tabulae

## 5 PARTIÇÕES

### Definição:

Uma partição é a divisão de uma área satisfazendo algumas condições.

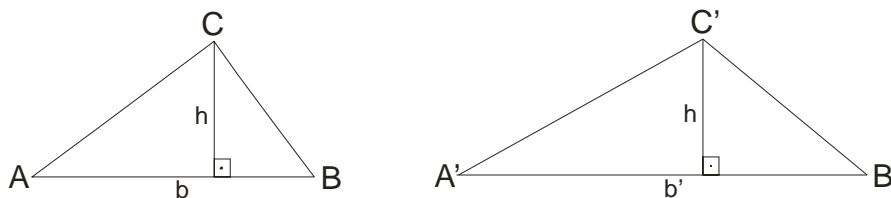
Para a construção das partições, se faz necessário enunciarmos duas propriedades da geometria que utilizaremos com frequência em nossas construções.

### 1º Propriedade:

Se dois triângulos tem a mesma altura, então a razão entre suas áreas é a razão entre suas bases.

### Demonstração:

Sejam os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , com altura  $h$  e bases  $b$  e  $b'$  respectivamente.



Seja a área do triângulo  $ABC$  igual a  $S_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$  e a área do triângulo  $A'B'C'$  é

igual a  $S'_{A'B'C'} = \frac{b' \cdot h}{2}$ .

A razão entre as áreas é dada por :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{b \cdot h}{2}}{\frac{b' \cdot h'}{2}} = \frac{b \cdot \cancel{h}}{\cancel{h}} \cdot \frac{\cancel{h'}}{b' \cdot \cancel{h'}} = \frac{b}{b'} = k$$

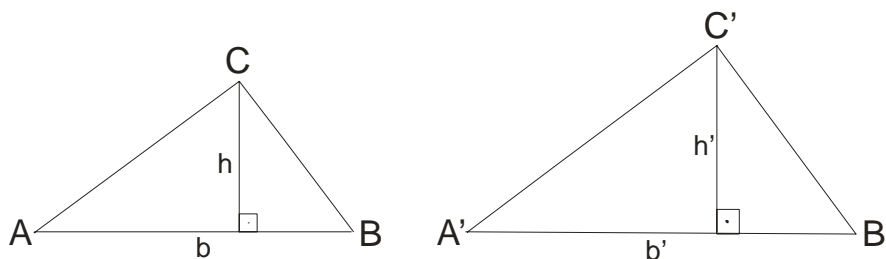
Onde  $k$  é a razão de semelhança entre as bases.

## 2ª Propriedade:

A razão entre as áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

### I – Razão entre áreas de dois triângulos semelhantes.

#### Demonstração:



Área do triângulo  $ABC = S_1$       Área do triângulo  $A'B'C' = S_2$

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{b}{b'} = \frac{h}{h'} = k, \text{ (razão de semelhança)}$$

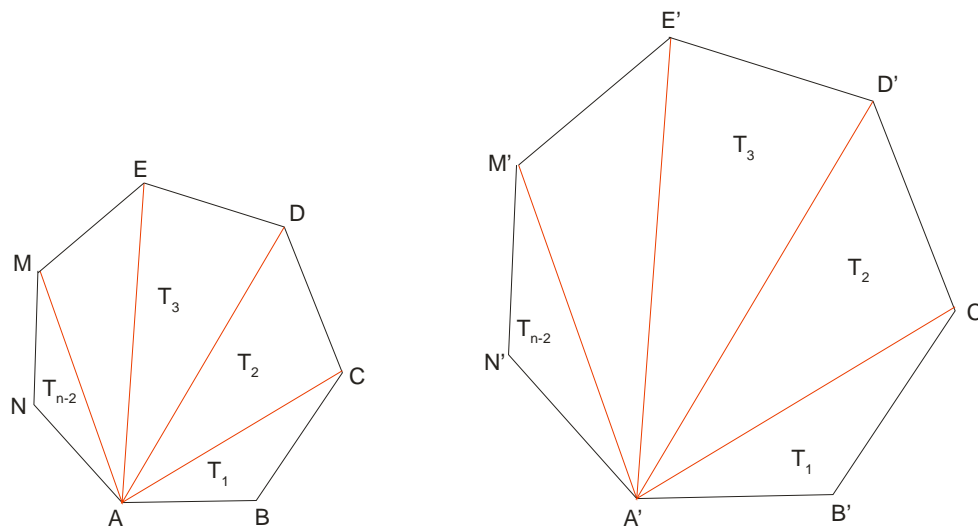
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot b \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot b' \cdot h'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{h}{h'} = k \cdot k = k^2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = k^2$$



**Conclusão:** A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

## II – Razão entre áreas de dois polígonos semelhantes.

**Demonstração:**



Área do Polígono  $ABCDE...MN = S_1$

Área do Polígono  $A'B'C'D'E'...M'N' = S_2$

$ABCDE...MN \sim A'B'C'D'E'...M'N' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  e  $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$  e ... e

e  $\triangle AMN \sim \triangle A'M'N' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \dots = \frac{MN}{M'N'} = k$  (razão de semelhança)

Fazendo:

Área  $\triangle ABC = t_1$ ,  $\triangle ACD = t_2$ , ...,  $\triangle AMN = t_{n-2}$

Área  $\triangle A'B'C' = T_1$ ,  $\triangle A'C'D' = T_2$ , ...,  $\triangle A'M'N' = T_{n-2}$

Ficou provado no item anterior que:

$$\frac{t_i}{T_i} = k^2 \Rightarrow t_i = k^2 T_i \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n-2$$

Então:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{n-2}}{T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_{n-2}} = \frac{k^2 T_1 + k^2 T_2 + k^2 T_3 + \dots + k^2 T_{n-2}}{T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_{n-2}} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

**Conclusão:** A razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

**Obs:** A propriedade acima é extensiva a quaisquer superfícies semelhantes e, por isso vale:

A razão entre as áreas de suas superfícies semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

## 5.1 - 1º Problema de Partição

Traçar pelo vértice  $A$  do triângulo  $ABC$  dado, uma reta  $AD$  que divida esse triângulo em dois outros  $ADB$  e  $ADC$  cujas áreas sejam proporcionais aos segmentos  $m$  e  $n$  dados.

Este problema se resolve utilizando a propriedade 1, demonstrada anteriormente, ou seja, para que as áreas dos triângulos  $ABD$  e  $ADC$  sejam respectivamente proporcionais aos segmentos  $m$  e  $n$  é preciso que se tenha

$$\frac{DB}{DC} = \frac{m}{n}.$$

Construindo no Tabulae:

1. Construir o triângulo  $ABC$ ;
2. Criar os segmentos  $m$  e  $n$ ;
3. Utilizando a construção de divisão de segmentos, dividir a base  $\overline{BC}$  em segmentos proporcionais a  $m$  e  $n$ , determinando o ponto  $D$ ;
4. Construir o segmento  $\overline{AD}$ ;
5. Construir os triângulos  $ABD$  e  $ADC$ ;
6. Utilizando a ferramenta calculadora, calcular a razão entre  $m$  e  $n$  e as áreas dos triângulos  $ABD$  e  $ADC$ , e compara-las;
7. Mover os pontos  $M'$  e  $N'$  extremidades dos segmentos  $m$  e  $n$  respectivamente, e/ou quaisquer vértices do triângulo observando a continuidade da proporcionalidade.

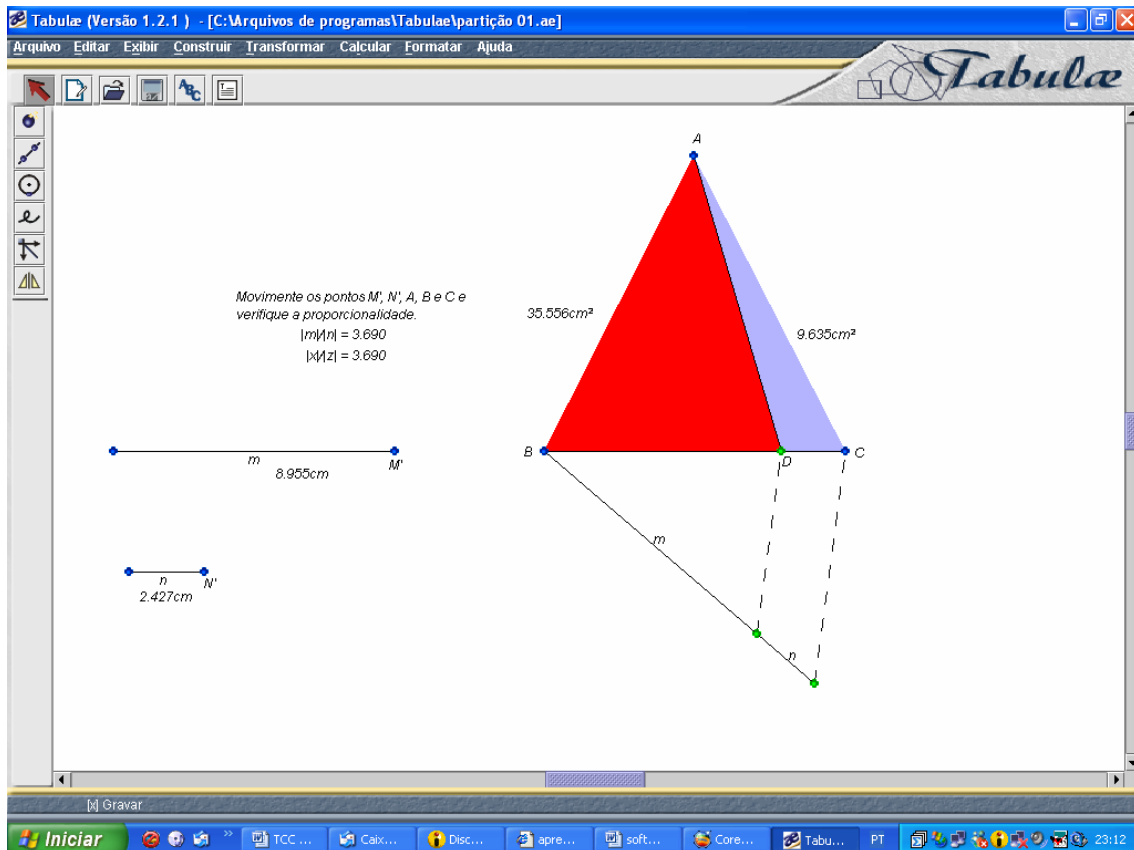


Figura 17 – exemplo de partição de um triângulo, bases proporcionais à  $m$  e  $n$ , no software Tabulae

## 5.2 - 2º Problema de Partição

Dado um ponto  $P$  sobre um lado de um triângulo  $ABC$ . Traçar uma reta por  $P$  que divida este triângulo em duas partes equivalentes.

Devemos transformar o triângulo  $ABC$  em um equivalente  $BA'P$ , traçando uma reta  $r$  passando por  $A$ , paralela a  $PC$ .

Em seguida, novamente utilizando a propriedade 1, devemos encontrar o ponto médio  $M$  de  $BA'$ , e assim construir os triângulos  $BMP$  e  $MA'P$  equivalentes.

Construindo no Tabulae:

1. Construir o triângulo  $ABC$ ;
2. Criar sobre o lado  $\overline{AB}$  um ponto  $P$ ;
3. Construir um triângulo  $BA'P$  equivalente ao triângulo  $ABC$ , utilizando a construção descrita no 2º problema de quadratura;
4. Construir o segmento  $\overline{BA'}$ , e encontrar seu ponto médio ( $M$ );
5. Traçar o segmento  $\overline{PM}$ ;
6. Construir os triângulos  $AMP$  e  $PMA'$ , calcular suas áreas e observar a equivalência;
7. Mover quaisquer vértices do triângulo ou o ponto  $P$  e observar a continuidade da equivalência.

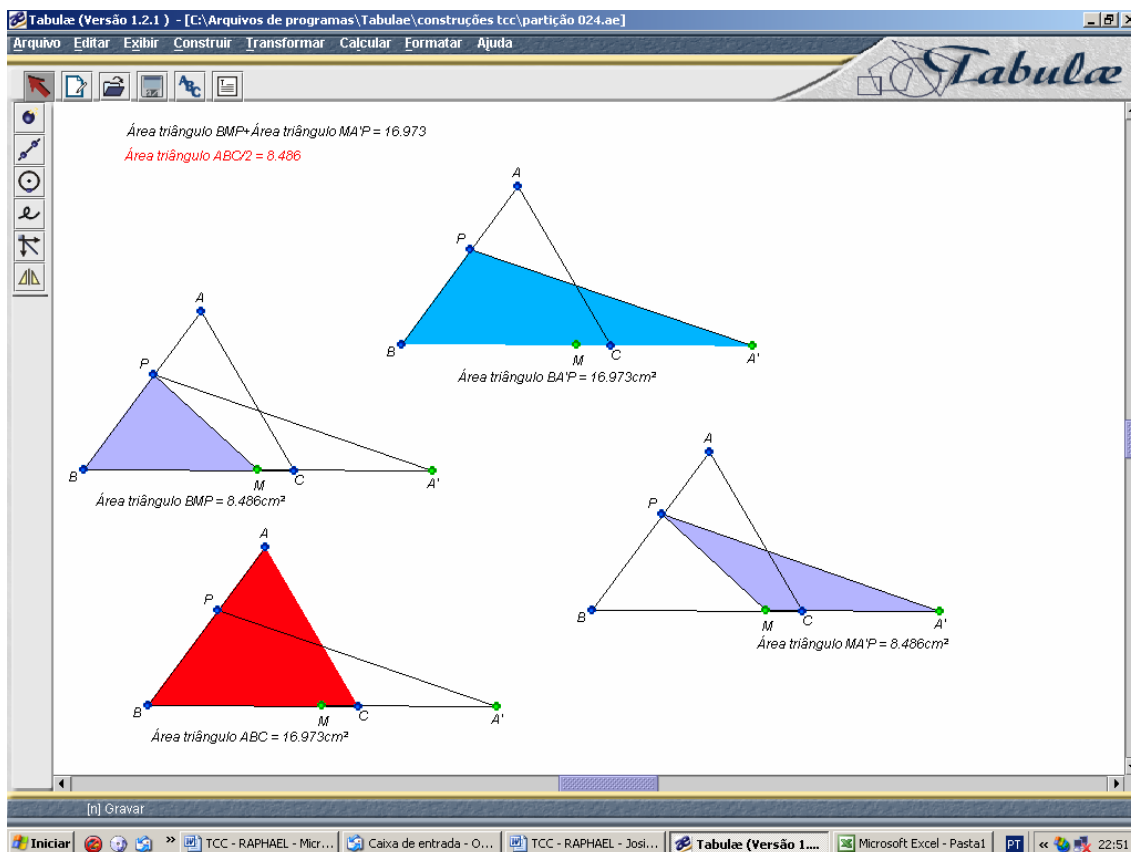


Figura 18 – exemplo de construção do triângulos  $ABC$  em um equivalente  $ACP$  no software Tabulae

### 5.3 - 3º Problema de Partição

Dado um triângulo  $ABC$ , traçar uma paralela a  $BC$  que divida esse triângulo em duas partes equivalentes.

Vamos supor que a reta procurada intercepte os lados  $AB$  e  $AC$  do triângulo nos pontos  $M$  e  $N$  respectivamente. Como os triângulos  $AMN$  e  $ABC$  são semelhantes temos, pela propriedade 2 enunciada anteriormente,

$$\frac{\text{Área de } AMN}{\text{Área de } ABC} = \frac{1}{2} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2$$

Portanto,  $AM = \frac{AB}{2} \cdot \sqrt{2}$ . Para construir, traçamos a semi-circunferência de diâmetro  $AB$  e pelo centro  $O$  dessa semi-circunferência a perpendicular  $OM'$  a  $AB$ . Desta forma, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo  $AOM'$ , retângulo em  $O$ , temos:  $AM' = \frac{AB}{2} \cdot \sqrt{2} = AM$

Construindo no Tabulae:

1. Construir um triângulo  $ABC$ ;
2. Encontrar o ponto médio ( $O$ ) do segmento  $AB$  (a construção será análoga se optarmos pelo lado  $AC$ );
3. Traçar uma reta  $p$  perpendicular a  $AB$  passando por  $O$ ;
4. Construir uma circunferência de centro  $O$  e diâmetro  $AB$ ;
5. Marcar o ponto ( $M'$ ), intersecção da circunferência com a reta  $p$ ;
6. Traçar na circunferência de centro em  $A$  e raio  $AM'$  e marcar o ponto de intersecção desta com o lado  $AB$ . Ponto  $M$ ;
7. Traçar uma paralela ao lado  $BC$  passando por  $M$ , e marcar o ponto  $N$  na intersecção desta com o lado  $AC$ ;
8. Calcular a razão entre as áreas dos triângulos  $AMN$  e  $ABC$  e comparar com a razão de quaisquer dois lados homólogos, verificando a propriedade 2, enunciada anteriormente;

9. Mover quaisquer vértices do triângulo e observar a continuidade da propriedade.

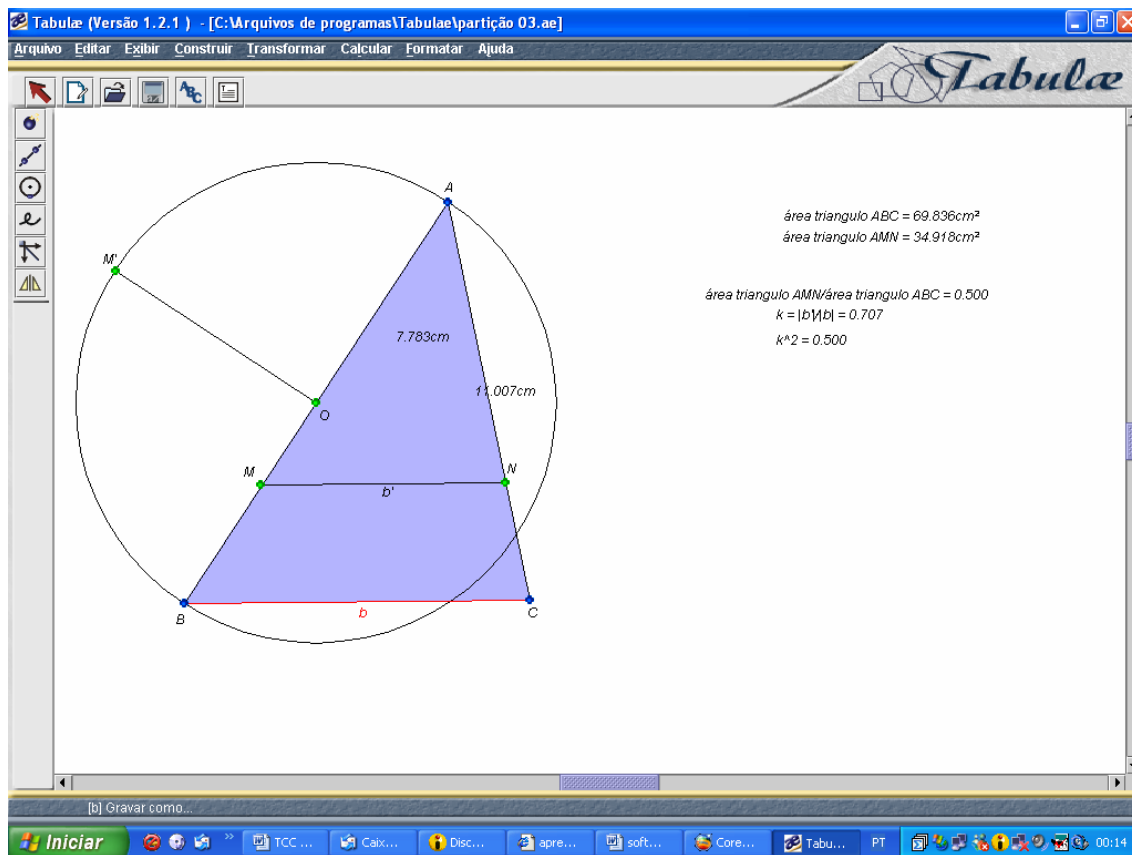


Figura 19 – exemplo de partição de um triângulo, através de uma reta paralela a base, no software Tabulae



## 6 CONCLUSÃO

Através deste trabalho, procurou-se evidenciar o quanto certos ambientes informatizados são ferramentas com grande potencial para a criação de soluções inovadoras para o ensino da Matemática.

Principalmente no caso da geometria, é importante que novas tecnologias sejam desenvolvidas para favorecer a compreensão da natureza do conhecimento matemático, afim de possibilitar uma maior integração entre o usuário (aluno) e a disciplina, criando inclusive um maior interesse por parte do usuário, pois ele próprio pode através de suas construções reconhecer conceitos vistos na teoria.

“Conforme os ambientes tornam-se mais ricos nos seus recursos, mais acessíveis vão se tornando aos alunos idéias matemáticas significativas e profundas.” (GRAVINA E SANTAROSA, 1998 p. 18)

A geometria dinâmica pode auxiliar muito no processo ensino-aprendizagem, já que possibilita a visualização das definições e propriedades dos diversos elementos que compõem uma construção através da manipulação dos mesmos. Pode inclusive ser utilizada como ferramenta para a compreensão de teoremas.

O que fora mostrado aqui, é apenas uma pequena parcela de tudo que pode-se realizar com essa “nova” geometria. Muitas sugestões de exercícios estão disponíveis no livro Construções Geométricas, incluindo a construção de números irracionais e resolução de expressões algébricas.

Os programas desenvolvidos para a área da matemática, principalmente a geometria, merecem ser explorados e avaliados pelos profissionais da área da educação.

Portanto, fica claro que cabe a nós, os novos profissionais da educação, a implementação destas tecnologias, para melhorar assim, a qualidade do ensino.

## 7 REFERÊNCIAS

ALVES, George de Souza; SOARES, Adriana Benevides. **Geometria dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae**. Rio de Janeiro. Disponível em: <<http://www.javasoft.com.br/academic/sbc2003/arg0121.pdf>.> Acesso em 21 de junho de 2005.

BRAVIANO, Gilson; RODRIGUES, Maria Helena W.L. **Geometria dinâmica: uma nova geometria?** Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 49, p. 22-26, 2002.

CAMPOS, Patrícia. **Comparação de três softwares de geometria dinâmica usando um problema de homotetia**. 2003. 56f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2003.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar : geometria plana**. 7 ed. São Paulo: Atual, 1993. 9 v.

GRAVINA, Maria Alice. **Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria**. In: SBIE – Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 7., 1996, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte, 1996 . p. 1-13.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados**. In: Congresso Ribie, 6., 1998, Brasília. Congresso... Brasília, 1998 . p. 1-19.

KUMAYAMA HIDEO. **Retificação de uma circunferência e determinação geométrica de  $\pi$** . Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 20, p. 39-41, 1992.

PUTNOKI, José Carlos. **Elementos de geometria & desenho geométrico**. 6. ed. São Paulo: Scipione, 1996. 1 v.

PUTNOKI, José Carlos. **Elementos de geometria & desenho geométrico**. São Paulo: Scipione, 1999. 2 v.

SCHMIDT, Alexsandra. **O uso da geometria dinâmica na transformação de figuras**. 2002. 42f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2002.

WAGNER, Eduardo. **Construções geométricas**. Com a colaboração de José Paulo Q. Carneiro. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1993.