UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O VOLUME DOS SÓLIDOS: ESTUDO DE LIVROS DIDÁTICOS E DE UMA ATIVIDADE APLICADA A ALUNOS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MADELINE ODETE SILVA

FLORIANÓPOLIS, JUNHO DE 2005.

MADELINE ODETE SILVA

O VOLUME DOS SÓLIDOS: ESTUDO DE LIVROS DIDÁTICOS E DE UMA ATIVIDADE APLICADA A ALUNOS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática – habilitação licenciatura
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientadora: Dra. Neri Terezinha Both Carvalho

Florianópolis, junho de 2005.

Esta Monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n° 19/CCM/05.

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Neri Terezinha Both Carvalho
(Orientadora)

Rubens Starke

José Luiz Rosas Pinho

Dedico este Trabalho de Conclusão de Curso à minha mãe Odete Maria Soares, com carinho.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus pelo dom da vida.

À minha mãe por sempre me apoiar em minhas escolhas.

À professora Neri Terezinha Both Carvalho por ter aceitado me orientar neste trabalho e aos professores José Luiz Rosas Pinho e Rubens Starke por aceitarem fazer parte da banca examinadora.

Aos meus padrinhos Eni e Roseli pelo apoio nos estudos e às minhas grandes amigas: Marinez, Vanessa Carla e Eli que de longa data me acompanham pelos caminhos da vida.

Agradeço também às amizades que conquistei ao longo do curso: Vera Lúcia, Clarissa, Dheleon e Marcos Henrique. E aos colegas Gustavo, Kleber e Roberto que me ajudaram com recursos computacionais necessários para que eu fizesse este trabalho e preparasse a apresentação do mesmo.

“A liberdade não consiste em seguir nossos impulsos, mas em obedecer nossas escolhas”.

Domingos Oliveira

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O conhecimento sobre sólidos geométricos e cálculo de volume dos sólidos tem se mostrado presente ao longo da História da Matemática.

Nas construções de Pirâmides do Egito Antigo, percebemos que os egípcios possuíam conhecimentos razoáveis sobre o assunto. “A grande pirâmide de Gizé foi construída por volta de 2.600 a.C e indubitavelmente envolvia alguns problemas de matemática e de engenharia” (EVES,1994).

Ainda segundo EVES (1994), há indícios de que o problema da duplicação do cubo possa ter se originado nas palavras de algum poeta (talvez Eurípedes) grego antigo, ignorante em matemática, ao descrever a insatisfação do mítico rei Minos com o tamanho do túmulo erguido para seu filho Glauco. Minos ordenou que o tamanho do túmulo fosse dobrado. O poeta fez então Minos alegar, incorretamente, que isso poderia ser feito dobrando-se cada uma das dimensões do túmulo. Essa falha matemática da parte do poeta levou os geômetras a abraçar o problema de como dobrar um dado sólido mantendo-se sua forma, problema este que só teve o primeiro progresso real na resolução (para o cubo) realizado por Hipócrates (c. 440 a.C).

Segundo DOMINGUES (apud DOLCE; POMPEO, 1993) ao início do século XVII, os métodos deixados pelos gregos para cálculos de áreas e volumes, apesar de sua beleza e rigor, mostravam-se cada vez menos adequados a um mundo que progredia cientificamente, pois faltavam a eles a operacionalidade e algoritmos para implementá-los. Entre estes métodos está a *Geometria dos Indivisíveis* de Bonaventura Cavalieri (1598-1647).

Cavalieri não definia, em suas obras sobre o assunto, o que vinham a ser os indivisíveis. Num de seus livros “explicava” que um sólido é formado de *indivisíveis*, assim como um livro é composto de páginas. O que facilita a compreensão da idéia dos indivisíveis é o Princípio de Cavalieri, ainda bastante usado no ensino de geometria métrica no espaço.

Em tempos atuais, os problemas envolvendo o cálculo de volume dos sólidos ainda estão presentes. Seja em casos mais simples como descobrir a embalagem mais vantajosa ao comprar um produto, tendo em vista sua capacidade interior. Ou em situações mais complexas onde calcular volume é uma tarefa auxiliar, mas de grande importância, na resolução de problemas de áreas biológicas ou engenharia e construção civil, entre outras.

Tendo em vista a grande importância do estudo de Volume dos sólidos ao longo da história e na atualidade, nos perguntamos:

Oficialmente, o estudo de volume dos sólidos tem lugar entre os conteúdos estudados no ensino médio?

De que maneira este conteúdo foi e é apresentado e abordado no material mais usado por professores e alunos, os livros didáticos?

A abordagem e os exercícios dão condições aos estudantes de compreender o conceito a fim de que eles possam aplicá-lo em problemas cotidianos ou ter este conhecimento guardado (ainda que de maneira elementar) caso necessitem em outros momentos de estudo?

Na busca de elementos de resposta a estas questões, desenvolvemos o estudo conforme segue:

- Estudo dos Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino médio, da Proposta Curricular de Santa Catarina e de Planos de Curso anuais escolares, onde identificamos que Volume dos Sólidos é ensinado, bem como os objetivos do ensino em medidas e proposições de abordagem.

- Estudo de livros didáticos de três períodos diferentes: anos 70 (Matemática Moderna), anos 90 (um período de transição) e atualidade (após os PCNs).

- Aplicação de uma atividade em classe (1ª e 4ª fase do curso de Matemática – habilitação licenciatura), a qual consiste de uma lista de três problemas envolvendo volume dos sólidos, os quais foram resolvidos pelos alunos e nós estudamos as resoluções.

2 ESTUDO DE DOCUMENTOS OFICIAIS

Neste capítulo faremos um estudo dos Parâmetros Curriculares Nacionais, da Proposta Curricular de Santa Catarina e dos Planos de Curso Anuais de três escolas da região da Grande Florianópolis para identificarmos o que estes documentos propõem quanto ao ensino de Geometria Espacial Métrica e mais particularmente quanto ao ensino de Volume dos Sólidos, nosso objeto de estudo.

2.1 ESTUDO DOS PCNs DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Matemática do Ensino Médio deve contribuir para a construção de uma *visão de mundo* do jovem e oferecer a ele subsídios para compreender a realidade ao longo de sua vida social e profissional.

Para tanto, propõe-se que o ensino de matemática seja contextualizado, integrado e relacionado a outros conhecimentos a fim de que o estudante possa aprimorar sua capacidade de compreender e interpretar situações, argumentar, analisar, avaliar e desenvolver ainda outras ações necessárias à sua formação.

As competências que devem ser tomadas como metas durante esta etapa da escolaridade básica, na área Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias são:

> - Representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
> - Investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
> - Contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das idéias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.(p.113)

O Ensino de Matemática compreende diversas áreas e temas. Para evitar o excesso de informações é necessário que se faça uma seleção de temas partindo de critérios, dentre os quais, pode-se destacar como primeiro deles que os conteúdos escolhidos devem desenvolver as competências acima descritas. Para isso, os mesmos devem ter relevância científica e cultural.

Dessa forma, o trabalho conjunto do ensino de conteúdos específicos e suas competências se fazem necessários para garantir a boa aprendizagem.

Um conjunto de temas proposto pelos PCN tendo em vista as competências, com relevância científica e cultural e ainda com articulação lógica das idéias e conteúdos matemáticos pode ser sistematizado para ser desenvolvido durante os três anos do ensino médio em três eixos:

1. Álgebra: números e funções
2. Geometria e medidas
3. Análise de dados (p.120)

Sobre Geometria, área da matemática na qual se insere nosso objeto de estudo, temos:

> A Geometria trata das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. Seu desenvolvimento é proposto em quatro unidades temáticas: geometrias plana, espacial, métrica e analítica.(p.123)

O objeto de estudo <u>Volume</u> está indicado na unidade temática de <u>Geometria Métrica</u>**.**Neste contexto tem lugar ainda o estudo de áreas, estimativas e, valor exato e aproximado.

2.1.1 Objetivos:

Os objetivos relativos a esta unidade são explicitados e dão indicações ao professor sobre características das atividades a serem propostas no ensino. Eles instruem a tarefa do professor:

> - Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos.
> - Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos.
> - Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro.(p.125)

2.1.2 Algumas orientações para a organização didática:

- Explorar as estruturas dos sólidos em estruturas de moléculas, cristais etc.

- Discutir a predominância de paralelepípedos e retângulos nas construções arquitetônicas e, a predileção dos artistas pelas linhas paralelas e perpendiculares nas pinturas e esculturas.

- Ensinar propriedades métricas envolvendo cálculos de distâncias, áreas e volumes.

- Explorar relações geométricas entre si.

- Garantir que os alunos aprendam a efetuar medições em situações reais com precisão requerida ou estimando margem de erro.

- Resolver situações-problema que envolvam perímetros, áreas e volumes, aplicando composições e decomposições de figuras.

Com relação à maneira de exercitar os conteúdos é importante destacar que exercícios do tipo: “calcule...”, “resolva...” cumprem apenas a função do aprendizado de técnicas e propriedades. Já a resolução de problemas é apontada como fundamental para o ensino de Matemática, pois, enfrentando desafios é que se desenvolve o pensar e o fazer.

No que diz respeito à organização do trabalho escolar, os PCN indicam que numa organização dos temas com quatro aulas semanais, a Geometria Métrica deve ser abordada na segunda série do ensino médio. Os conteúdos para esta série, indicados no documento, são os seguintes:

1. Funções seno, co-seno e tangente.
2. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.
3. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos.
4. Métrica: áreas e volumes; estimativas.
5. Estatística: análise de dados.
6. Contagem.

O objetivo deste trabalho é de entender a organização didática e a organização matemática referente à abordagem do volume dos sólidos nos eixos didáticos da segunda série do ensino médio.

Nosso estudo portará sobre os itens:

- Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos.
- Métrica: áreas e volumes; estimativas.

2.2 ESTUDO DA PROPOSTA CURRICULAR DE SANTA CATARINA

A atual Proposta Curricular de Santa Catarina apresenta-se em volume único onde estão contidos os eixos norteadores para a Educação, uma breve introdução histórica da Educação no Brasil e orientações para todos os níveis de escolarização - Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio.

Entre 1988 e 1991 foi elaborada a primeira edição da Proposta Curricular de Santa Catarina com o objetivo de dar uma certa unidade aos currículos escolares catarinenses.

A edição atual, pronta em 1998, é resultado de mais de dois anos de trabalho confiado a um Grupo Multidisciplinar que deveria incorporar à Proposta Curricular as atualidades nas discussões pedagógicas que considerassem a garantia de uma “Educação para todos”.

Os eixos norteadores desta Proposta Curricular são:

- A Concepção de homem como social e histórico.

"O homem é resultado de um processo histórico, conduzido pelo próprio homem". (p.15)

- A Concepção sociointeracionista de aprendizagem que afirma que é o social que determina a capacidade maior ou menor de aprendizagem do indivíduo e não o biológico.

> ...à medida que considera todos capazes de aprender e compreende que as relações e interações sociais estabelecidas pelas crianças e pelos jovens são fatores de apropriação de conhecimento, traz consigo a consciência da responsabilidade ética da escola com a aprendizagem de todos, uma vez que ela é interlocutora privilegiada nas interações sociais dos alunos. De todos os alunos (p.17).

A primeira edição da Proposta Curricular (do ano de 1991), não alcançou seu objetivo junto à maioria dos professores de matemática. Ela visava uma transformação da prática pedagógica tradicional em Educação Matemática no ambiente escolar. O ocorrido se deu devido a diversos fatores como: o desconhecimento e a falta de leitura do documento, condições precárias de trabalho, falta de leitura de temas que relacionam a sua disciplina com Educação, rotatividade de professores que acontece a cada ano letivo dentre muitos outros.

A nova Proposta Curricular (do ano de 1998), propôs a revisão da anterior, com o objetivo de propiciar aos professores condições teórico-metodológicas para a implementação desta segunda edição nas escolas estaduais. No que se refere à Educação Matemática, observou-se nas escolas públicas de Santa Catarina, nos anos anteriores à implementação desta nova Proposta que:

> A Matemática ainda é vista como uma ciência exata, pronta e acabada, cujo ensino e aprendizagem se dá pela memorização ou por repetição mecânica de exercícios de fixação, privilegiando o uso de regras e *macetes*.(p.105)

E ainda:

> ... a Matemática é entendida apenas como ferramenta para a resolução de problemas ou como necessária para assegurar a continuidade linear do processo de escolarização, não contemplando a multiplicidade de fatores necessários ao desenvolvimento de uma efetiva Educação Matemática.(p.105)

A concepção de aprendizagem na qual está baseada a nova Proposta Curricular de Santa Catarina é de que a Matemática deve ser entendida como uma ciência dinâmica, produzida historicamente, sistematizada e organizada que tem por finalidade atender às necessidades concretas da humanidade.

2.2.1 Organização dos Conteúdos Matemáticos

Dentro da Proposta Curricular de Santa Catarina, os conteúdos matemáticos estão divididos em campos de conhecimento:

- Campos Numéricos

- Campos Algébricos
- Campos Geométricos
- Estatística e Probabilidades

Cada campo contém a relação de seus conteúdos e, ao lado de cada conteúdo de forma legendada, encontra-se a indicação das séries em que se deve trabalhá-lo – que podem ser séries do ensino fundamental ou médio - e a forma de trabalho que deve ser gradativamente passada de uma maneira assistemática para uma maneira sistemática conforme a série escolar. Onde:

> ... Tratar assistematicamente um conteúdo significa abordá-lo enquanto noção ou significação social, sem preocupação em defini-lo simbólica ou formalmente.
> ... Tratar sistematicamente um conteúdo matemático significa dizer que ele será trabalhado conceitualmente, utilizando-se na medida do possível, a linguagem matemática simbólica tal como foi historicamente convencionada e organizada.(p. 107 e 108)

Um ponto indispensável é a importância da produção histórico-cultural dos conceitos dentro de cada conteúdo, em todos os níveis da Educação: desde o Infantil até o Ensino Médio.Conceber o conhecimento como algo desenvolvido ao longo da história e com valor cultural permite ao professor visualizar a função social de cada conteúdo matemático, ponto importantíssimo para a sua atuação pedagógica cotidiana.

Vale ressaltar que a indicação de trabalho dos conteúdos para cada série é uma sugestão e cabe ao professor antecipar ou tardar a abordagem de um conteúdo sempre que se fizer necessário ou ainda, mesmo que o conteúdo já tenha sido todo trabalhado de maneira sistemática, não há empecilhos para que seja retomado em séries posteriores na solução de problemas.

Nosso objeto de estudo, Volume dos Sólidos Geométricos, está inserido segundo a Proposta Curricular de Santa Catarina no quadro dos Campos Geométricos onde se fazem presentes as seguintes unidades com seus respectivos conteúdos:

1. *GEOMETRIA*
   - Produção histórico-cultural
   - Exploração do espaço tridimensional
   - Elementos do Desenho Geométrico
   - Estudo das Representações Geométricas no Plano
   - Geometria Analítica
2. *SISTEMAS DE MEDIDAS*
   - Produção histórico-cultural

- Conceitos e medidas de: Comprimento, superfície, Volume, capacidade, ângulo, Tempo, massa, peso, velocidade e temperatura.

3. *TRIGONOMETRIA*
   - Produção histórico-cultural
   - Relações trigonométricas no Triângulo retângulo
   - Funções trigonométricas

Nosso estudo portará dos conteúdos:

Unidade Geometria: - Exploração do espaço tridimensional

Unidade Sistema de Medidas: - Conceitos e medidas de: Comprimento, superfície, Volume.

A exploração do espaço tridimensional deve ser trabalhada de maneira assistemática desde o pré-escolar do ensino fundamental, passando a ser sistemática a partir da quinta série do mesmo nível de ensino, sendo concluída na segunda série do ensino médio.

Quanto aos conceitos e medidas de comprimento, superfície, volume (...) devem também ser trabalhados de maneira assistemática desde o pré-escolar, mas o trabalho sistemático desses conceitos deve iniciar na quarta série do ensino fundamental, sendo concluído já na oitava série do mesmo nível de ensino.

Para trabalhar os conteúdos que compõem o Campo geométrico tendo por base um ensino crítico, esta Proposta Curricular traz ainda as seguintes orientações pedagógicas:

> ... é preciso refletir sobre as possíveis características e habilidades que constituem o pensamento geométrico. Algumas destas características e habilidades socialmente relevantes, que podem contribuir para a formação do pensamento do aluno, são:
> - Estudo ou exploração do espaço físico e das formas;
> - Orientação, visualização e representação do espaço físico;
> - Visualização e representação das formas geométricas;
> - Denominação e reconhecimento das formas, segundo suas características;
> - Classificação de objetos segundo suas formas;
> - Estudo das propriedades das figuras e das relações entre elas;
> - Construção de figuras e modelos geométricos;
> - Medição do espaço geométrico uni, bi e tridimensional (conceito e cálculo de perímetro, de área, de volume e de capacidade);
> - Construção e justificação de relações e proposições tendo como base o raciocínio hipotético dedutivo. (p.112)

2.3 ESTUDO DE PLANOS DE CURSO ANUAIS ESCOLARES

Os planos de curso analisados são de três escolas da Rede Pública de Ensino da região da Grande Florianópolis e contém as propostas para o ano de 2004.

As três escolas propõem em seus planos o estudo de Geometria Métrica na terceira série do Ensino Médio.

2.3.1 Plano A

Objetivo geral da disciplina: *"Orientar o educando na aquisição de técnicas de estudo e trabalho para dominar os conteúdos programáticos, evidenciando condições de continuidade."*

Os conteúdos estão divididos nas seguintes unidades, nesta ordem: Geometria Analítica, Números Complexos, Polinômios, Equações Algébricas e Geometria Métrica.

Nosso objeto de estudo está inserido na unidade Geometria Métrica que está assim subdividida:

- Prisma: conceito, elementos
- Cilindros: conceito, elementos
- Pirâmides: conceito, elementos
- Cone: conceito, elementos
- Esfera: conceito, elementos

Objetivos específicos desta unidade:

- Reconhecer e classificar os principais sólidos
- Calcular área e volume dos principais sólidos

2.3.2 Plano B

Objetivo geral da disciplina: *"Contribuir para a aquisição de conhecimentos e habilidades matemáticas visando ao desenvolvimento intelectual dos alunos e auxiliando na formação de cidadãos conscientes."*

Os conteúdos estão divididos nas seguintes unidades, nesta ordem: Geometria Analítica, Geometria Métrica, Números Complexos, Polinômios e Equações Algébricas.

Nosso objeto de estudo está inserido na unidade Geometria Métrica que está assim subdividida:

- Prisma: conceito, elementos
- Cilindros: conceito, elementos
- Pirâmides: conceito, elementos
- Cone: conceito, elementos

- Esfera: conceito, elementos

Objetivos específicos desta unidade:

- Reconhecer e classificar os principais sólidos
- Calcular área e volume dos principais sólidos

2.3.3 Plano C

Objetivo geral da disciplina: *"Oportunizar ao aluno condições para investigar, observar, experimentar, descobrir, analisar, formular hipóteses, solucionar problemas e despertar o senso crítico do mesmo."*

Os conteúdos estão divididos nas seguintes unidades, nesta ordem: Geometria Plana, Geometria Espacial, Números Complexos, Polinômios.

Nosso objeto de estudo está inserido *implicitamente* na unidade Geometria Espacial que está assim subdividida:

- Prismas
- Pirâmide
- Cilindro
- Cone
- Esfera

O plano não apresenta objetivos específicos para cada unidade.

2.4 Conclusão

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Geometria Espacial Métrica, em particular o Volume dos Sólidos (prisma,pirâmide,cilindro,cone,esfera) deve ser estudada na segunda série do Ensino Médio.

Estudando a Proposta Curricular de Santa Catarina, observamos que o conteúdo Volume dos Sólidos está inserido no *Campo Geométrico* dentro da *Exploração do Espaço Tridimensional*, conteúdo este que deve ter seu estudo *sistemático* concluído na segunda série do Ensino Médio. Porém, esta indicação dos conteúdos a serem trabalhados em cada série, mostrada na Proposta Curricular é uma sugestão, ficando a critério do professor possíveis modificações.

Sendo assim, talvez por conta desta autonomia dada ao professor, os Planos Anuais das três escolas que analisamos indicam o ensino dos conteúdos da Geometria Espacial Métrica na terceira série do Ensino Médio.

Vemos assim que, segundo documentos oficiais, nosso objeto de estudo tem lugar assegurado no Ensino Médio.

3 ESTUDO DE LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo apresentaremos um estudo da abordagem de volume dos sólidos de quatro livros didáticos, sendo um dos anos 70, um dos anos 90 e dois mais atuais, dos anos de 2002 e 2004. A finalidade deste estudo foi de conhecer como e o que é proposto nos livros didáticos sobre volume dos sólidos e de identificar elementos de mudança nas proposições de estudo sobre volume, desde o Movimento da Matemática Moderna até os dias atuais.

Optamos por estudar livros didáticos por serem um material acessível, tanto aos professores no preparo de suas aulas, quanto aos alunos para estudarem os conteúdos ensinados. Consideramos que eles são representativos tanto dos conteúdos como das estratégias de estudo, realizadas em classe.

Apresentaremos aqui, o estudo da abordagem do conceito de volume de cinco tipos de sólido: prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera, e também dos exercícios deste conteúdo apresentados nos livros que tomamos para estudo.

Quanto ao estudo dos exercícios, cumpre fazer algumas observações:

- estudamos os exercícios que abordam o conceito de volume dos cinco sólidos citados acima, excluindo os que envolvem tronco de pirâmide e tronco de cone por não fazerem parte deste estudo.

- o estudo dos exercícios foi de dois tipos: quanto à tarefa apresentada e quanto à presença e função de figuras;

- na contagem utilizada, cada item conta como um exercício. Dessa forma, um exercício que apresentar por exemplo três itens, estes serão contados como três exercícios distintos.

- no estudo dos exercícios de cada livro, apresentaremos uma tabela que contém as tarefas e o respectivo número de exercícios que apresentam cada tarefa. Ressaltamos aqui que o número total de exercícios desta tabela pode não coincidir com o total de exercícios que envolvem o conceito de volume pelo fato de que, um exercício pode apresentar mais de uma tarefa e portanto estar computado em mais de uma linha da tabela.

- as tarefas identificadas em cada livro foram retomadas nos estudos dos livros posteriores, juntamente com novas tarefas identificadas. Para cada tarefa identificada foi apresentado um exercício resolvido.

Os livros que estudamos foram:

1) Título: Matemática na Escola Renovada
   Autores: Scipione Di Pierrô Netto e Célia Contin Góes
   Volume 2. Editora Saraiva, 2ª edição.São Paulo,1973.

2) Título: Matemática
 Autores: Maria Helena Soares de Souza e Walter Spinelli
 Volume 2.Editora Scipione, São Paulo, 1996.

3) Título: Matemática - Projeto Escola e Cidadania para todos
 Autores: Maria J.C. de Vasconcelos, Maria Terezinha Scordamaglio e Suzana Laino Cândido
 3ª série. Ensino Médio. Editora do Brasil. 1ª edição. São Paulo, 2004.

4) Título: Matemática para o Ensino Médio
 Autor: Manoel Jairo Bezerra
 Volume único. Editora Scipione, 5ª edição, São Paulo, 2002.

3.1 ESTUDO DO LIVRO DO PERÍODO DO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA: *MATEMÁTICA NA ESCOLA RENOVADA*[1]

Este livro é composto de doze capítulos. Nosso estudo está centrado em dois deles, mais precisamente os dois últimos: *Capítulo XI – Geometria: Volume dos Prismas e das Pirâmides* e*, Capítulo XII – Geometria: Corpos Redondos.*

O primeiro deles, como o próprio nome indica, é mais específico com relação à abordagem do conceito de volume. Exceto a primeira sessão que fornece algumas definições importantes que serão usadas no decorrer do capítulo, todo o restante é dedicado exclusivamente à abordagem do conceito de volume que inicia com uma referência aos poliedros em geral, para depois tratar especificamente do volume dos prismas e das pirâmides.

O outro capítulo que estudaremos aborda por completo os corpos redondos (cilindro, cone e esfera): como são definidos, tipos específicos, conceito de área de superfície e conceito de volume.

Assim, o conceito de área é um saber disponível por ser visto em capítulo anterior ao que aborda volume de prismas e pirâmides, ou no mesmo capítulo mas em sessão anterior à que aborda volume dos sólidos cilindro, cone e esfera.

Vamos a seguir, estudar como é feita a abordagem do conceito de volume em cada um destes capítulos.

3.1.1 Estudo da Abordagem

Abordagem do conceito de volume em: *Geometria: Volume dos Prismas e das Pirâmides*

---

[1] Scipione Di Pierrô Netto e Célia Contin Góes. Volume 2. Editora Saraiva, 2ª edição.São Paulo,1973.

A abordagem é puramente formal e tem como suporte definições, teoremas, corolários e postulado.

Considerando como saber disponível a definição de Poliedro, por ter sido vista em capítulo anterior, este capítulo inicia-se com uma sessão que apresenta algumas outras definições relativas a Poliedros que serão usadas na abordagem do conceito de volume. São elas:

> **a)Poliedros contíguos**
> São aqueles cuja intersecção é um subconjunto de pontos de suas faces.
> Se p_1 e p_2 são contíguos
> $p_1 \cap p_2$ = subconjunto de uma face.
> **b)Soma de poliedros contíguos**
> A soma de 2 poliedros contíguos é o poliedro formado pela reunião dos conjuntos p_1 e p_2.
> **c)Poliedros congruentes**
> Dois poliedros são *côngruos* quando, e somente quando, têm respectivamente congruentes as faces e os diedros formados pelos planos das faces. Indica-se $p_1 \equiv p_2$
> **d)Soma de poliedros**
> Chama-se soma de 2 poliedros p_1 e p_2 à soma de 2 poliedros contíguos p'_1 e p'_2 onde $p_1 \equiv p'_1$ e $p_2 \equiv p'_2$.
> **e)Poliedros equicompostos**
> Dois poliedros são equicompostos se, e somente se, são soma de um mesmo número de poliedros respectivamente congruentes.(p.235-236)

Vejamos como é dada a definição de volume para poliedros em geral:

> Seja A={p | p é poliedro} e consideremos a aplicação V, tal que
> V: A $\rightarrow \Re^*_+$
> $p \mapsto V(p)$ obedecendo às seguintes condições:
> a) $p \equiv p' \Rightarrow V(p) = V(p')$
> b) p e p' são equicompostos $\Rightarrow$ V(p) = V(p')
> c) $p = p_1 + p_2 \Rightarrow V(p) = V(p_1) + V(p_2)$
> Uma unidade de volume, arbitrariamente escolhida, completa a função volume; tomaremos como unidade o cubo de aresta unitária. (p.236)

Cabe aqui destacar o tratamento dado:

Os poliedros são tratados como *conjunto de pontos*, pois se fala na *intersecção* de poliedros, e esta intersecção resulta em um *subconjunto* onde os elementos são pontos de uma face.

O volume dos poliedros de modo geral é definido como uma função que associa a cada poliedro um número real positivo, tem como unidade o cubo de aresta unitária e obedece algumas condições. São elas:

Poliedros congruentes têm mesmo volume, condição que também é válida para poliedros equicompostos.

Se um poliedro é soma de outros dois, seu volume é a soma dos volumes dos dois poliedros que o compõem.

Após esta parte inicial, são definidas fórmulas que permitem calcular o volume do paralelepípedo-retângulo (caso particular de prisma) e, a partir dele, um resultado obtido é estendido para prismas de base qualquer.

Primeiramente é feita a demonstração do seguinte Teorema: *"Dois paralelepípedos que têm duas dimensões iguais e as terceiras, desiguais, têm volumes proporcionais às terceiras dimensões."* (p. 237)

É com base neste teorema que será feita a demonstração do próximo que, por sua vez, apresenta uma fórmula para calcular o volume de qualquer paralelepípedo-retângulo, desde que sejam conhecidas suas dimensões.

> **Teorema:** O volume de um paralelepípedo-retângulo é o produto de suas dimensões a, b, c.
> **Demonstração:** Sejam os paralelepípedos: p(a,b,c), p'(a,b,1), p''(a,1,1) e p'''(1,1,1)
> Pelo teorema anterior:
> I) $\dfrac{p(a,b,c)}{p'(a,b,1)}=\dfrac{c}{1}$ **a** e **b** são iguais
> II) $\dfrac{p'(a,b,1)}{p''(a,1,1)}=\dfrac{b}{1}$ **a** e **1** são iguais
> III) $\dfrac{p''(a,1,1)}{p'''(1,1,1)}=\dfrac{a}{1}$ **1** e **1** são iguais
> Multiplicando-se membro a membro: $\dfrac{p}{p'}\cdot\dfrac{p'}{p''}\cdot\dfrac{p''}{p'''}=\dfrac{c}{1}\cdot\dfrac{b}{1}\cdot\dfrac{a}{1}$ ou
> $\dfrac{p(a,b,c)}{p(1,1,1)}=a\cdot b\cdot c$ e como $p(1,1,1)=1$ (unidade escolhida), vem:
> $p(a,b,c)=a\cdot b\cdot c \quad\Rightarrow\quad V=a\cdot b\cdot c$ (p.239)

O primeiro teorema diz que há proporcionalidade entre uma dimensão de um paralelepípedo e outro que possuem a particularidade de terem as outras duas dimensões iguais. Escolhendo precisamente paralelepípedos que satisfazem estas condições, mas que também têm algo em comum com o cubo de aresta unitária que foi escolhido como unidade padrão de medida de volume, foi possível, com o uso da operação de multiplicação, encontrar a proporcionalidade entre um paralelepípedo retângulo qualquer e o cubo unitário p(1,1,1). Um paralelepípedo-retângulo de dimensões quaisquer está para o cubo unitário, assim com o produto de suas dimensões está para 1(um).

Logo, o volume (V) de um paralelepípedo-retângulo de dimensões a,b,c é dado por:

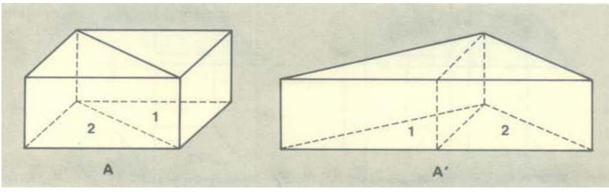
$$V=a\cdot b\cdot c$$

Como conseqüência imediata do segundo teorema e usando o conceito de área como saber disponível segue o corolário:

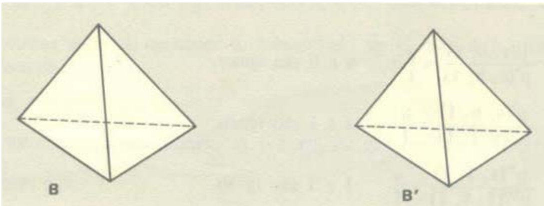
> *O volume do paralelepípedo-retângulo é igual ao produto da área da base pela altura.*
>
> De fato, $V = a \cdot b \cdot c$ e como $\begin{cases} a \cdot b = B \ (\text{área da base}) \\ e \quad c = h \ (\text{altura}) \end{cases}$
>
> $\therefore V = B \cdot h$ (p.239)

O Princípio de Cavalieri[2] dá condições para garantir que o resultado deste corolário pode ser estendido para prismas de base qualquer. Vejamos:

Por observação da figura abaixo, conclui-se que "A e A' são sólidos de mesmo volume ou sólidos equivalentes" (p.239).O mesmo pode-se dizer de B e B'.



(p.239)



(p.240)

Esta equivalência é garantida pelo Princípio de Cavalieri, dado como postulado e aceito sem demonstração:

"Dois sólidos A e A', tais que qualquer plano paralelo a um plano dado determina neles seções equivalentes, **são sólidos equivalentes**." (p.240)

Mas, o que garante que eles têm mesmo volume?

Uma observação mais cuidadosa dos sólidos A e A', revela que eles satisfazem a definição de poliedros equicompostos, pois a numeração indicada nos permite concluir que 1 (de A) é congruente a 1(de A') e que o mesmo acontece para 2. Então, pela *condição b* da função volume, temos que V(A)=V(A').

Quanto aos sólidos B e B', nota-se que satisfazem a definição de poliedros congruentes. Logo, pela *condição a* da função volume, tem-se V(B)=V(B').

Observamos assim, que sólidos equivalentes satisfazem também as condições necessárias para terem mesmo volume.

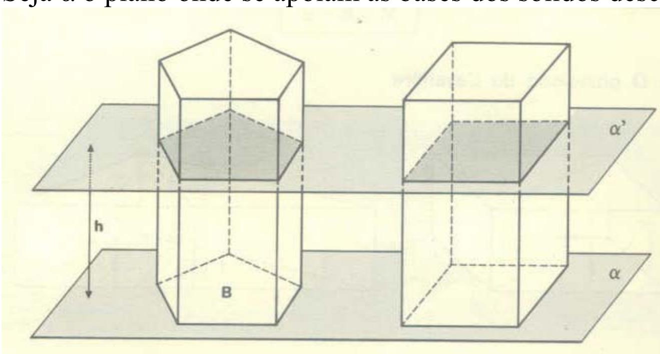
---

[2] Bonaventura Cavalieri (1598-1647) era milanês, foi um dos matemáticos mais influentes de sua época. Era de família nobre e seguiu a carreira religiosa paralelamente à atividade científica. Foi discípulo de Galileu Galilei (1564-1642).

O fato de *sólidos equivalentes* terem *mesmo volume* leva a concluir que $V = B \cdot h$ serve para calcular o volume de qualquer prisma (desde que se conheça a medida da área da base e da altura) com base na seguinte estratégia:

A fórmula é válida para paralelepípedos-retângulos. Se, dado um prisma qualquer, for possível conseguir um paralelepípedo-retângulo de maneira que ambos satisfaçam as condições do Princípio de Cavalieri, eles serão equivalentes e assim, terão mesmo volume, o que faz com que a fórmula possa ser usada para calcular o volume de um prisma qualquer. Segue, abaixo, como esta idéia foi apresentada:

> Consideremos um prisma qualquer de base B e altura h; seja o paralelepípedo-retângulo cuja base é equivalente a B e cuja altura é também h.
> Seja α o plano onde se apóiam as bases dos sólidos descritos.



> Então, qualquer plano paralelo a α determina secções equivalentes nos 2 sólidos, isto é, vale o Princípio de Cavaliere e os sólidos são equivalentes. Então o volume do prisma é **igual** ao volume do paralelepípedo-retângulo, ou seja:
> $V = B \cdot h$ (p.240-241)

Com o objetivo de encontrar uma fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide qualquer, são enunciados e demonstrados: um lema, um teorema e dois corolários. Eles são apresentados nesta ordem:

> **Lema**: Duas pirâmides de bases equivalentes e de mesma altura são equivalentes. (p.241)
> **Teorema**: Todo prisma triangular é a soma de três pirâmides equivalentes entre si. (p.242)
> **Corolário 1**: O volume de uma pirâmide triangular é um terço do produto da área da base pela altura. (p.243)
> **Corolário 2**: O volume de uma pirâmide de base qualquer é igual a um terço do produto da área da base pela altura. (p.243)

A idéia geral, usada na demonstração destes resultados foi:

Mostra-se que, nas condições do Princípio de Cavalieri, duas pirâmides de bases equivalentes (bases de mesma medida de área) e mesma altura, geram secções transversais equivalentes e dessa forma são equivalentes.

Provando-se que *todo prisma triangular é a soma de três pirâmides equivalentes entre si*, é imediato que o volume de cada pirâmide será a terça parte da medida do volume do prisma. A idéia para que esta afirmação seja provada é: qualquer prisma triangular pode ser dividido em três pirâmides de base triangular de modo que, uma delas terá base equivalente e mesma altura quando comparado separadamente às outras duas e, fazendo uso do lema, garante-se que esta pirâmide será *equivalente* a cada uma das demais. Usando a *transitividade* tem-se que as três serão equivalentes entre si. Vimos anteriormente que poliedros equivalentes têm mesmo volume. Logo, o volume de cada pirâmide tem mesma medida e a soma resulta no volume do prisma triangular, o que permite concluir que o volume de uma pirâmide de base triangular é um terço da área da base[3] pela altura.

Para que este resultado seja estendido para uma pirâmide de base qualquer, é necessário ter como saber disponível que *qualquer polígono pode ser dividido em triângulos*. Aplicando este conhecimento na base de uma pirâmide qualquer, esta ficará dividida em triângulos e como conseqüência, a pirâmide como um todo, ficará dividida em pirâmides de base triangular e mesma altura da pirâmide toda. A *condição c*, da definição da função volume nos garante que o volume da pirâmide de base qualquer será a soma dos volumes de cada uma das pirâmides de base triangular.

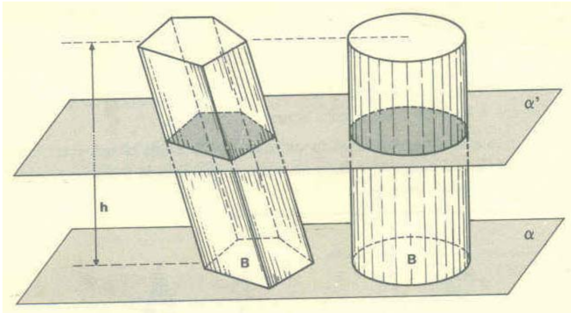
> Chamando-se $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_3}$ ... as áreas das bases das pirâmides triangulares e **B**, a área da base da pirâmide toda, teremos:
>
> $$V=\frac{1}{3}B_1.h+\frac{1}{3}B_2.h+\frac{1}{3}B_3.h+\ldots \text{ Ou } V=\frac{h}{3}(B_1+B_2+B_3+\ldots)$$
>
> Ou, $$\boxed{V=\frac{1}{3}B.h}$$ (p.244)

Esta fórmula permite calcular o volume de uma pirâmide qualquer, desde que se conheça a medida da área de sua base, bem como a medida de sua altura.

Abordagem do conceito de volume em: *Geometria: Corpos Redondos*

Com o intuito de definir uma fórmula para calcular o volume do cilindro, a abordagem usada na dedução da fórmula de um prisma qualquer é retomada. Anteriormente usou-se um paralelepípedo-retângulo em comparação com um prisma de base qualquer. Agora que a fórmula para calcular o volume do prisma tornou-se um saber conhecido, este sólido será usado nessa abordagem juntamente com o cilindro.

[3] Na decomposição do prisma triangular, duas das pirâmides conservam a base do prisma e a equivalência entre as três garante que a fórmula do volume serve para todas.



(p.257)

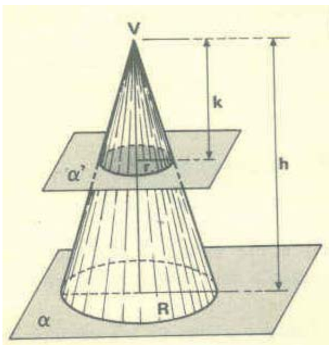
Colocando-se um cilindro e um prisma qualquer de mesma altura h e com bases equivalentes sobre um mesmo plano α , verifica-se que qualquer plano paralelo a α determina em ambos os sólidos secções equivalentes. Então pelo princípio de Cavalieri, estes sólidos são equivalentes e, portanto têm mesmo volume (veja página 17).

Como as bases dos sólidos são equivalentes, a altura é a mesma e concluiu-se que eles têm mesmo volume, é válido que o volume de um cilindro também é dado pelo produto da área de sua base pela altura:

$$\boxed{V = B \cdot h}$$

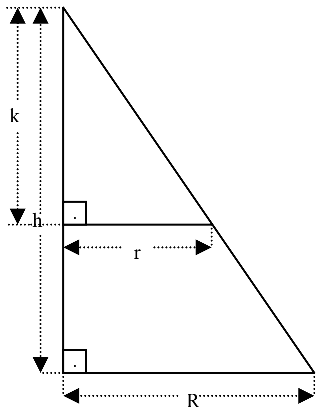
Na abordagem do volume do cone foram usados os saberes: *semelhança de triângulos*, *proporcionalidade* e a fórmula do volume da pirâmide, aqui considerada conhecida por ter sido estudada anteriormente. Nota-se que é o princípio de Cavaliere que novamente permite o desfecho da abordagem de volume para mais um sólido.

Inicialmente são estabelecidas condições que permitem a obtenção de dois resultados auxiliares. Vejamos de que maneira isso é feito:

> Consideremos um cone cuja base de raio R está contida no plano α e cuja altura é h. Seja α' um plano paralelo a α, cuja distância ao vértice é k e cuja secção é um círculo de raio r.
>
> 
>
>
> a) Nas condições enunciadas,
>
> $$\frac{R}{r} = \frac{h}{k} \qquad \text{(I)}$$
>
> como se pode concluir da semelhança dos triângulos.
>
> b) Sendo B a área da base do cone e B' a área da secção em α',
>
> $$\frac{B}{B'} = \frac{h^2}{k^2} \qquad \text{(II)}$$ (p.257)

Vamos agora detalhar a demonstração dada:

Para compreender as condições e os resultados acima, é necessário conhecer o conteúdo *semelhança de triângulos*. Na figura apresentada, devem ser reconhecidos dois triângulos retângulos dentro do cone: um maior, com catetos de medida **h** e **R** e outro menor, com catetos de medida **k** e **r**.



Tendo claro este raciocínio é possível notar que *R está para r, assim como h está para k*, como mostra o resultado (I).

Trabalhando a igualdade (I), chega-se ao resultado (II), mostrado em b.

R e r são raios dos círculos B e B'. elevando-se ambos os membros de (I) ao quadrado vem: $\frac{R^2}{r^2} = \frac{h^2}{k^2}$

Multiplicando o membro esquerdo por $\frac{\pi}{\pi}$ (que não altera a igualdade, pois $\frac{\pi}{\pi} = 1$) temos: $\frac{\pi \cdot R^2}{\pi \cdot r^2} = \frac{h^2}{k^2}$

Mas, por hipótese B = $\pi.R^2$ e B'= $\pi.r^2$.

Logo: $\frac{B}{B'} = \frac{h^2}{k^2}$

Finalmente enuncia-se a relação que permite calcular o volume de um cone:

"O volume de um cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura."(p.258)

Na demonstração da validade da fórmula: $V = \frac{1}{3} B.h$ para o cálculo do volume do cone, usou-se um cone e uma pirâmide de mesma altura e bases equivalentes colocados sobre um mesmo plano α . Tomando-se um plano paralelo a α (α'), chama-se B' e B" as secções da pirâmide e do cone, em α', respectivamente. Os sólidos foram tomados nas condições do princípio de Cavalieri, assim sendo, provando que B’ e B” são secções equivalentes, tem-se por conseqüência que os sólidos são equivalentes e têm mesmo volume.

Para provar que B’ e B” são equivalentes usa-se os resultados (I) e (II).

Como já se sabe que o volume da pirâmide é calculado pela fórmula $V=\frac{1}{3}B.h$, sendo iguais os volumes da pirâmide e do cone, a fórmula também é válida para calcular o volume de cone.

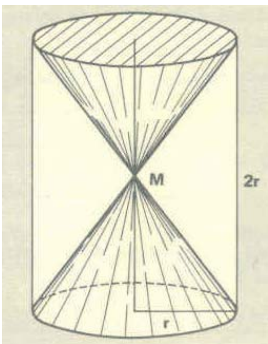
Logo,conhecendo a área da base do cone e a medida de sua altura, o volume é dado por:

$$V=\frac{1}{3}B.h$$

Com o intuito de usar novamente a equivalência entre dois sólidos e o princípio de Cavaliere para justificar o cálculo do volume da esfera, faz-se necessário primeiramente conhecer outras duas definições:

> Consideremos um cilindro eqüilátero de raio **R** e seja **M** o ponto médio de seu eixo.
> Chama-se **clepsidra** a reunião dos dois cones de revolução cujas bases são as bases do cilindro e cujo vértice comum é M.
> Chama-se **anticlepsidra** o conjunto dos pontos do cilindro eqüilátero que não pertencem à clepsidra. (p.262-263)

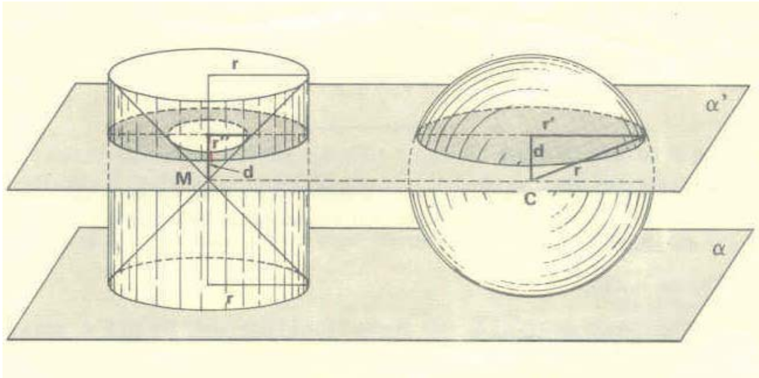
Observe a figura:



(p.263)

Conforme visto anteriormente, sólidos equivalentes têm mesmo volume.

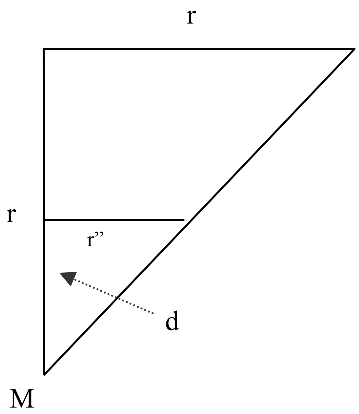
Com base nesta afirmação, ao se mostrar que a esfera de raio **r** e a anticlepsidra obtida a partir de um cilindro eqüilátero de raio **r** (onde h = 2r) são equivalentes, por apresentarem secções equivalentes no plano α’ paralelo ao plano α onde estão apoiadas (o que é possível usando semelhança de triângulos e o princípio de Cavalieri), tem-se que, para ambas, o volume é o mesmo.



(p.263)

> A secção determinada na esfera pelo plano α' é um círculo de raio r' e cuja área S é dada por: $S = \pi . r'^2 \Rightarrow S = \pi (r^2 - d^2)$
> A secção determinada na anticlepsidra, pelo plano α', é uma coroa circular de raios r e r'' e cuja a área S' é dada por: $S' = \pi (r^2 - r''^2)$ (p.264)

Vamos detalhar um triângulo visto no cilindro da figura acima:



> Por semelhança de triângulos, temos:
>
> $\frac{d}{r''} = \frac{r}{r} \Rightarrow r'' = d$ e, portanto, $S' = \pi (r^2 - d^2)$
>
> Então concluímos que S = S', isto é, qualquer plano paralelo ao plano α determina secções equivalentes nos dois sólidos e, portanto vale o Princípio de Cavalieri. Assim, os sólidos são equivalentes. (264)
> Logo, têm mesmo volume.

Em outras palavras, a fórmula usada para calcular o volume da esfera de raio r, é na verdade a fórmula deduzida para calcular o volume de uma anticlepsidra obtida a partir de um cilindro de mesmo raio.

As fórmulas usadas para o cálculo de volume do cilindro e do cone já são saberes disponíveis neste ponto da abordagem. De posse delas, é possível descobrir como calcular o volume da anticlepsidra. “Este é o volume do cilindro eqüilátero de raio **r**, menos os volumes dos 2 cones de raio **r** e de altura **r**.” (p.264)[4]

Assim sendo, temos:

Volume do cilindro eqüilátero (h=2r):

$V_1 = B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot (2 \cdot r) = 2\pi r^3$

Volume do cone de altura igual ao raio da base (r): $V_2 = \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (r) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

O volume da anticlepsidra é dado por:

$V = V_1 - 2V_2$

$V = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$

Como foi visto, a anticlepsidra e a esfera de raio r têm mesmo volume. Logo, a fórmula que fornece o volume da esfera sendo conhecida a medida de seu raio é:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Conclusão

Nos dois capítulos que contemplam a abordagem do conceito de volume para os sólidos prismas, pirâmides, cilindro, cone e esfera observou-se um estudo formal. As deduções são feitas a partir de definições, teoremas e corolários de maneira sistemática.

Todos os saberes não abordados em capítulos anteriores ou que o aluno já deve trazer como bagagem em seu currículo escolar, são introduzidos na abordagem à medida que se fazem necessários. Foi assim com as definições que envolvem poliedros vistas no início e também com as definições de clepsidra e anticlepsidra necessárias na abordagem do volume da esfera.

O saber semelhança de triângulos é usado em diversos pontos da abordagem e a maneira como é citado leva-nos a supor que já deve ser de domínio do aluno.

O Princípio de Cavalieri é usado na abordagem do volume de todos os sólidos, com exceção do paralelepípedo, cujo volume foi abordado via demonstração de teorema.

Neste livro, destacamos o uso da Teoria de Conjuntos e de Funções, além do aspecto formal da abordagem. Esta abordagem se justifica pela reforma de ensino realizada via a Lei 5692, a Matemática Moderna, implantada nos anos 70, que visava um ensino mais próximo do saber matemático teórico.

[4] Para visualizar esta afirmação observe novamente a figura mostrada logo após as definições de clepsidra e anticlepsidra na página 22.

3.1.2 Estudo dos Exercícios Propostos nos capítulos *Geometria: Volume dos Prismas e das Pirâmides* e *Geometria: Corpos Redondos*

Nos capítulos em que se apresenta a abordagem de volume dos sólidos, identificamos um total de **80** exercícios propostos. Deste total, **38** envolvem o conceito de volume.

3.1.2.a Estudo dos Exercícios Segundo a Tarefa Proposta

Listamos abaixo os tipos de tarefas encontradas nos 38 exercícios que envolvem o conceito de volume e, junto a cada tipo de tarefa, apresentamos um exercício resolvido.

Tarefa 1: Calcular volume de sólidos

Exercício (nº 5-pág 260) – Calcular o volume de um cone de 8m de altura e 10,5m de raio.

Resolução: h = 8m r = 10,5m

$$V_{cone} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

$$V_{cone} = \frac{\pi \cdot (10{,}5)^2 \cdot 8}{3} = 294\pi$$

Resposta: O cone tem volume igual a 294π m^3.

Tarefa 2: Calcular a medida de algum elemento do sólido, conhecendo o volume do sólido.

Exercício (nº 10-pág 247) – Calcular a aresta do tetraedro regular cujo volume é $18\sqrt{3}m^3$.

Resolução: o volume de um tetraedro de aresta **a** é dado por: $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Então temos: $18\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow a^3 = \dfrac{216\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow a^3 = 108\sqrt{6} \Rightarrow a = 3\sqrt[6]{96}$

Resposta: A aresta do tetraedro mede $3\sqrt[6]{96}m$

Tarefa 3: Determinar a razão entre as medidas de volume de dois sólidos

Exercício (nº 15-pág.261) – Dado um retângulo de lados de medidas **a** e **b** , considera-se o cilindro gerado pela rotação do retângulo em torno do lado que mede a, e o cilindro gerado pelo mesmo retângulo, quando gira em torno do lado que mede **b**. Determinar a razão entre os volumes e a razão entre as áreas totais dos 2 cilindros.
(vamos resolver apenas a tarefa referente ao volume)

Resolução: O cilindro gerado pela rotação do retângulo em torno do lado **a**, tem raio (r) de medida **b** e altura (h) de medida **a** . Logo, seu volume (V_1) será:

$$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_1 = \pi \cdot b^2 \cdot a$$

O cilindro gerado pela rotação do retângulo em torno do lado **b**, tem raio (r) de medida **a** e altura (h) de medida **b** . Logo, seu volume (V_2) será:

$V_2 = \pi \cdot a^2 \cdot b$

Logo a razão entre os volumes é: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi \cdot b^2 \cdot a}{\pi \cdot a^2 \cdot b} = \dfrac{b}{a}$

<u>Tarefa 4:</u> Calcular a área conhecendo o volume do sólido.

Exercício (nº 10-pág.265) – O volume de uma esfera é 288π m^3. Calcular a área da esfera.

Resolução: $V_{esfera} = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$. Então temos: $288\pi m^3 = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ o que nos dá $r = 6m$

Sabendo que $A_{esfera} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$, temos para uma esfera de r = 6m :

$A = 4 \cdot \pi \cdot (6m)^2 = 144\pi m^2$

Resposta: A área da esfera é de 144π m^2.

<u>Tarefa 5</u>: Calcular a diferença entre as medidas de volume de dois sólidos.

Exercício (nº 7-pág.266) – Um cone eqüilátero está inscrito em uma esfera de raio 2m. Calcular o excesso de volume da esfera sobre o cone.

Resolução: Seja r o raio e h a altura do cone eqüilátero e R o raio da esfera.

Nas condições do problema temos que $r = \dfrac{2R}{3}$

Sabendo que R = 2m , temos: $r = \dfrac{2 \cdot (2m)}{3} = \dfrac{4}{3} m$

Como $h = 2 \cdot r$ (cone eqüilátero), $h = \dfrac{8}{3} m$

Logo, $V_{cone} = \dfrac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \dfrac{1}{3} \pi \cdot \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{8}{3} = \dfrac{128}{81} \pi m^3$

$V_{esfera} = \dfrac{4}{3} \pi \cdot r^3 = \dfrac{4}{3} \pi \cdot (2m)^3 = \dfrac{32}{3} \pi m^3$

$V_{esfera} - V_{cone} = \left(\dfrac{32}{3} \pi - \dfrac{128}{81} \pi\right) m^3 = \dfrac{736}{81} \pi m^3$

Resposta: O excesso de volume da esfera sobre o cone é de $\dfrac{736}{81} \pi m^3$.

Ao estudarmos os 38 exercícios que envolvem o conceito de volume identificamos 5 tarefas conforme apresentamos na tabela seguinte, juntamente com o respectivo número de exercícios que apresentam tais tarefas.

Tarefa	**Número de Exercícios que apresentam a Tarefa**
1) Calcular volume de sólidos	17
2) Calcular a medida de algum elemento do sólido, conhecendo o volume do sólido	08
3) Determinar a razão entre as medidas de volume de dois sólidos	04
4) Calcular a área conhecendo o volume do sólido	04
5) Calcular a diferença entre as medidas de volume de dois sólidos	05

Destacamos que a tarefa “calcular volume de sólidos” se apresenta em maior número dentre os exercícios pois, 17 de 38 são deste tipo. Em cada exercício desta tarefa, apenas um sólido é objeto de estudo como veremos abaixo.

Destacamos também que “calcular volume” é subtarefa[5], de apenas uma das quatro tarefas restantes: “calcular a diferença entre as medidas de volume de dois sólidos”. Como subtarefa temos 10 situações que envolvem cálculo de volume.

A tabela seguinte explicita os sólidos que são objetos de estudo da tarefa “calcular volume”, como também aqueles dos quais se calcula o volume como subtarefa.

Sólido	**Cálculo do volume como tarefa**	**Cálculo do volume como subtarefa**
Prisma triangular regular	01	-
Prisma triangular oblíquo	01	-
Pirâmide hexagonal regular	02	-
Pirâmide triangular regular	01	-
Cilindro eqüilátero	01	-
Cilindro reto	01	02
Cone eqüilátero	01	01
Cone não eqüilátero	06	03
Esfera	03	04
Total	**17**	**10**

Esta tabela nos chama atenção para 6 de 17 exercícios envolvendo o cone não eqüilátero.

Com base na primeira tabela, podemos destacar ainda, a tarefa “Calcular a medida de algum elemento do sólido, conhecendo o volume” por estar presente em 8 de 38 exercícios.

As demais tarefas estão presentes em praticamente uma mesma quantidade de exercícios.

3.1.2.b Estudo dos exercícios quanto à presença e função de Figuras

Dentre os 38 exercícios que envolvem o conceito de volume, nenhum apresenta figura no enunciado.

Vale destacar que dentre os demais exercícios (42 de 80), que estão presentes nos capítulos que analisamos, apenas dois apresentam figura, sendo que em um deles a função da figura é de completar o enunciado e no outro a função é de ilustrá-lo apenas.

---

[5] A subtarefa é uma tarefa auxiliar necessária para que a tarefa própria do exercício seja cumprida.

3.2 ESTUDO DO LIVRO DO PERÍODO APÓS 1990 – *MATEMÁTICA*[6]

Os sólidos, os quais são objetos de nosso estudo, são apresentados no capítulo de número 9, intitulado por *Geometria Espacial Métrica* que está dividido em dezenove sessões, onde trata, separadamente particularidades de cada tipo de sólido: definição, classificação, elementos, área de superfície e volume, entre outras...

O livro não apresenta uma sessão específica para abordar o conceito de volume. Faremos um estudo das sessões 3,7,11,15 e 18 onde nosso objeto de estudo – volume – é abordado.

Cabe destacar que ao abordar o conceito de volume para cada um dos sólidos (com exceção da esfera), o conceito de área é considerado um saber disponível, apresentado em sessões anteriores e complementado por um apêndice no final do livro que contém fórmulas de áreas de figuras planas.

3.2.1 Estudo da Abordagem

O primeiro sólido apresentado para estudar o volume é o prisma.

O volume do prisma é apresentado na terceira sessão do capítulo *Geometria Espacial Métrica*.

A abordagem é feita a partir de um exemplo particular: "paralelepípedo reto de dimensões 6 cm, 4 cm e 2 cm, tomando como unidade de medida um cubo de 1 cm^3."

O paralelepípedo é dividido em 48 cm^3 de maneira que o aluno visualiza e pode contar o número de cubos de 1 cm^3 que cabem no prisma. Ao total de cubos é associado o produto das medidas do paralelepípedo (largura, comprimento, altura), ou seja, o aluno identifica que o produto das dimensões do papalelepípedo coincide com a quantidade de cubos unitários que preenchem totalmente o mesmo, o que indica seu volume.

A generalização

A partir do exemplo particular que descrevemos, a fórmula do volume do prisma é apresentada:

> Um prisma reto retângulo de dimensões genéricas a,b,c tem seu volume dado por: $V = a \,.\, b \,.\, c$
> Como a . b é a área da base do prisma e c sua altura, dizemos que o volume é dado por : $V = S_B.H$ onde: S_B = área da base ; H = altura (p.376)

[6] Maria Helena Soares de Souza e Walter Spinelli. Volume 2.Editora Scipione, São Paulo, 1996.

Determinação do volume de prismas - O Princípio de Cavalieri para validar a fórmula $V = S_B \,.\, H$

Quando em um prisma traçamos um plano α, paralelo aos planos das bases e que intercepta o prisma, à figura resultante da intersecção do plano α com o prisma chamamos de *secção transversal*.

Com base na situação-problema: *calcular o volume de outros tipos de prisma*, o Princípio de Cavalieri é abordado como postulado:

> Dados dois sólidos apoiados em um plano α. Todo plano paralelo a α deve interceptar igualmente os sólidos. Se as secções transversais são figuras de mesma área , então os sólidos têm mesmo volume.(p.377)

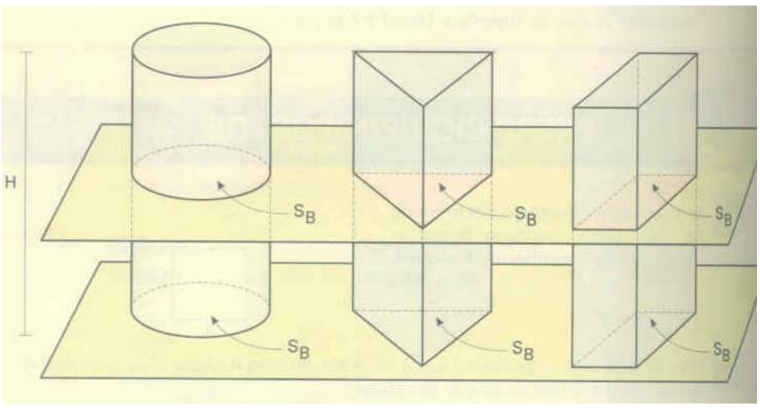
O cálculo do volume do paralelepípedo já foi explicitado. Então, dado um prisma de base qualquer, é possível construir um paralelepípedo cuja área de sua base seja numericamente igual à área da base do prisma dado. Apoiando ambos em um plano α qualquer e satisfazendo-se as condições do Princípio de Cavalieri conclui-se que o volume do prisma pode ser dado por:

$$V = S_B \,.\, H$$

Volume do Cilindro

Para estudar a abordagem do conceito de volume do cilindro nos voltaremos para a sétima sessão do capítulo *Geometria Espacial Métrica*.

A abordagem é feita por comparação entre prismas e cilindro, de maneira que os sólidos tenham bases de mesma área, secções transversais de mesma área e ainda mesma altura, obedecendo às condições do Princípio de Cavalieri. Levando então a concluir que os sólidos têm mesmo volume. Observe a figura:



(p.388)

Observa-se que a *propriedade da transitividade* é usada como um saber implícito, pois o Princípio de Cavalieri foi enunciado anteriormente para *dois sólidos*. É preciso se atentar de que o volume do cilindro é igual ao volume do prisma de base triangular e este, por sua vez, é igual ao volume do paralelepípedo – desde que a área da base do prisma triangular seja igual à área da base do paralelepípedo – do qual foi dito por primeiro que o volume é dado pelo produto da área da base pela medida da altura.

Com base neste raciocínio é possível concluir que o volume de cilindro também é dado por:

$$V = S_B \, . \, H$$

Onde $S_B = \pi \, . \, R^2$, porque a base do cilindro é um círculo.

Assim, o volume de cilindro é dado por: $V = \pi \, . \, R^2 \, . \, H$

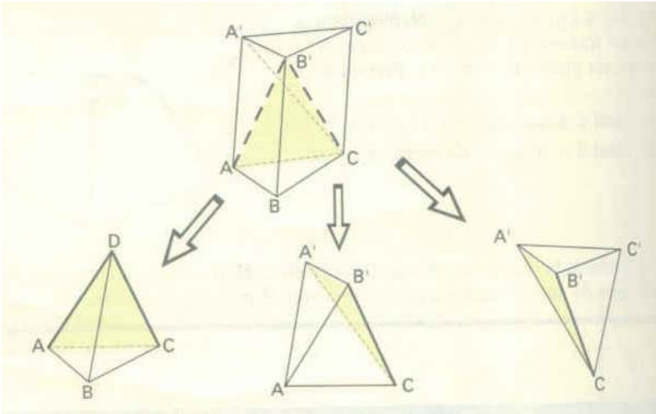
Volume da Pirâmide

O estudo da décima primeira sessão do capítulo *Geometria Espacial Métrica*, nos permite estudar a abordagem do conceito de volume de pirâmides.

Considerando como situação-problema: verificar *se um prisma e uma pirâmide de mesma área da base têm mesmo volume*, traçando planos paralelos às bases de ambos que interceptam os dois sólidos, observa-se que as secções transversais não têm áreas iguais. As áreas de secção transversal do prisma são maiores que as da pirâmide.

Logo, não se verifica a hipótese do Princípio de Cavalieri, e, conseqüentemente os sólidos têm volumes diferentes.

Por dedução empírica, mas que uma análise formal também poderia ser feita, através da observação da figura seguinte, um prisma reto de base triangular pode ser dividido em três pirâmides de mesmo volume entre si.



(p.402)

Já sabendo que o volume de um prisma é dado pelo produto da área da base pela medida da altura ($V = S_B \cdot H$) e aliando esse saber à observação da figura, é possível concluir que cada pirâmide terá volume igual a um terço do volume do prisma.

$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} . S_B . H$$

Assim, é generalizada a fórmula para o cálculo do volume de *qualquer pirâmide*.

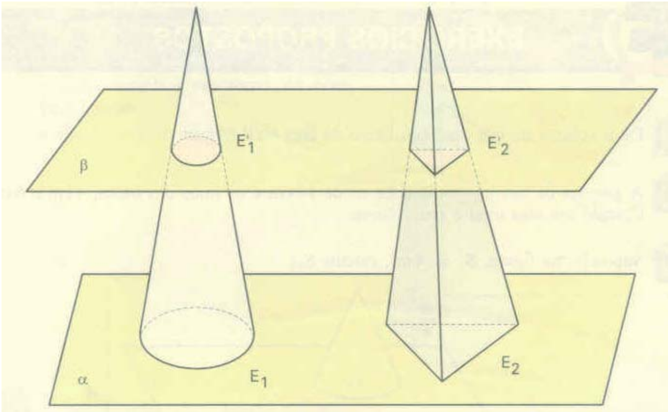
A partir da expressão *qualquer pirâmide,* também usada no livro, pode-se entender que o volume de pirâmides que têm como base outras figuras planas diferentes do triângulo também é calculado desta maneira. Fica *implícito* que se pode conseguir pirâmides de outras bases cuja área da base seja a mesma de uma pirâmide de base triangular e que as áreas de cada secção transversal sejam também iguais para ambas as pirâmides, a fim de que se possa constatar – usando o Princípio de Cavalieri – que os tipos de pirâmides diferentes terão o mesmo volume e, portanto, pode ser calculado da mesma maneira.

Volume do Cone Reto

Com base na décima quinta sessão do capítulo *Geometria Espacial Métrica*, será feito o estudo da abordagem do conceito de volume do cone reto.

Por comparação de um cone com uma pirâmide de mesma altura e mesma área da base, conclui-se que *as áreas de secção transversal também são iguais*.

Essa conclusão é obtida por observação da figura seguinte e usa *implicitamente* o conceito de *semelhança de figuras*: E_1 é proporcional à E'_1 , assim como E_2 é proporcional à E'_2 , e sendo o plano de secção paralelo ao plano que contém as bases dos sólidos, a constante de proporcionalidade é a mesma nos dois casos. Lembrando que foram tomadas bases de mesma área, pode-se concluir que $E'_1 = E'_2$.



(p.417)

Com as hipóteses satisfeitas, usa-se o Princípio de Cavalieri novamente para obter:

$$V_{Cone}= V_{Pirâmide}= \frac{1}{3}.S_B.H$$

Para o cone, $S_B= \pi \,.\, R^2$, pois a base do cone é um círculo.

$$\text{Então: } V_{Cone}= \frac{1}{3}\pi\, R^2H$$

Volume da Esfera

O estudo da abordagem do conceito de volume da esfera será feito com base na décima oitava sessão de capítulo *Geometria Espacial Métrica.*

A fórmula para o cálculo do volume da esfera é fornecida como postulado e sem justificativa:

$$V_{esfera}= \frac{4}{3}.\pi.R^3 \quad \text{onde R é o raio da esfera.}$$

Nessa mesma sessão é fornecida também como postulado, a fórmula para o cálculo de área da superfície da esfera:

$$S_{esfera} = 4.\pi.R^2 \quad \text{onde R é o raio da esfera.}$$

A esfera vem a ser o único, dos sólidos em estudo, em que o conceito de área não pode ser considerado um saber disponível pois é apresentado juntamente com o conceito de volume.

Conclusão

Na abordagem do conceito de volume segundo o livro "*Matemática",* vemos que:

As figuras desempenham um papel importante na compreensão do conceito. Elas têm a função de ilustrar. Na abordagem do conceito de volume da pirâmide uma observação empírica foi proposta.

O conceito de volume de cada sólido está relacionado com o conceito de área e, com exceção da esfera, esse saber é considerado um saber disponível estudado em sessões anteriores;

O Princípio de Cavalieri,fornecido como postulado, é usado para justificar as técnicas de cálculo de volume, ou seja, as fórmulas.

Identificam-se dois saberes implícitos: a *propriedade da transitividade* e o conceito de *semelhança de figuras*;

3.2.2 Estudo dos Exercícios das sessões de volume dos sólidos apresentados no capítulo *Geometria Espacial Métrica*

As sessões do capítulo *Geometria Espacial Métrica* que abordam o conceito de volume dos sólidos, apresentam um total de 58 *Exercícios Propostos de Fixação*. 40 destes 58 exercícios, envolvem o conceito de volume.

3.2.2.a Estudo dos Exercícios segundo a Tarefa proposta

Nestes 40 exercícios identificamos mais 6 tarefas diferentes, além de algumas já identificadas nos exercícios do livro anterior. Apresentamos aqui as novas tarefas, dando um exemplo com sua respectiva resolução.

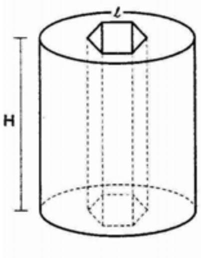
<u>Tarefa 6</u>: Calcular a capacidade em litros de um sólido.

Exercício (nº 37-pág.389) – Uma piscina circular tem 40m de diâmetro e 3m de profundidade. Determine a sua capacidade em litros.

Resolução: A piscina tem a forma de um cilindro cujo raio (r) mede 20m e a altura (h) mede 3m.
Sabemos que $V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$
Então temos $V = \pi \cdot (20m)^2 \cdot 3m = 1200\pi m^3$
Usando a relação entre medida de volume e de capacidade: $1m^3 = 1000\,litros$
Temos : $1200\pi \cdot 1000 = 1.200.000\pi$
Resposta: A capacidade da piscina é de 1.200.000π litros.

<u>Tarefa 7</u>: Calcular a massa de sólidos usando os conceitos de volume e densidade.

Exercício (nº 39-item b-pág.390) – Uma peça de ferro, representada na figura, é um cilindro com um buraco na forma de prisma hexagonal regular de mesma altura. Qual é a sua massa, sabendo que a densidade do ferro é 7,8 g/cm^3 ?



Dados:
- $R = 2cm$
- $H = 5cm$
- $\ell = 0{,}75cm$
- $\pi = 3{,}14$
- $\sqrt{3} = 1{,}8$

Resolução: O volume da peça é dado por: $V = V_{cilindro} - V_{prisma}$

$$V = (\pi \cdot R^2 \cdot H) - \left(\frac{3 \cdot \ell^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot H \right)$$

Substituindo os dados do problema na relação acima e aproximando o valor de π por 3,14 temos:

$$V \cong 62{,}8cm^3 - 7{,}6cm^3 \cong 55{,}2cm^3$$

A densidade do ferro é de 7,8 g/cm^3 então, usando regra de três, calculamos a massa (m) da peça:

$$7{,}8g \rightarrow 1cm^3$$

$$m \rightarrow 55{,}2cm^3$$

$$m = 430{,}56g$$

Resposta: A massa da peça é de 430,56g.

Tarefa 8: Aplicar o volume de sólidos de tipos distintos para determinar quantidades.

Exercício (nº 106-item a-pág.429) – Uma lata de ervilhas cilíndrica tem diâmetro da base 8cm e altura 10cm. Cada ervilha tem 6mm de diâmetro e a lata contém 10% de sua capacidade em líquido. Pergunta-se qual é o número aproximado de ervilhas na lata?

Resolução: Pelos dados do problema podemos escrever: raio da lata (R) = 4cm; altura da lata (H) = 10cm; raio de uma ervilha (r) = 3mm.

$$V_{lata} = \pi \cdot R^2 \cdot H = \pi \cdot (4cm)^2 \cdot 10cm = 160\pi cm^3$$

$$V_{ervilha} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (3mm)^3 = 36\pi mm^3$$

$V_{líquido} = 10\% de 160\pi cm^3 = 16\pi cm^3$ Então o volume ocupado pelas ervilhas é:

$$V_{lata} - V_{líquido} = 144\pi cm^3$$

Usando regra de três podemos calcular o número de ervilhas contidas na lata:

$$36\pi \cdot 10^{-3} cm^3 \rightarrow 1\, ervilha$$

$$18{,}4cm^3 \rightarrow x\, ervilhas$$

$$x = 4000\, ervilhas$$

Resposta: O número aproximado de ervilhas na lata é de 4000.

Tarefa 9: Aplicar a definição de volume de um ou mais tipos de sólido.

Exercício (nº 25-pág. 380) – Um tanque em forma de paralelepípedo reto retângulo não está completamente cheio de água. Suas medidas são: 6m de comprimento, 3m de largura e 2m de profundidade. Ao atirarmos nele um objeto, o nível da água sobe 0,5m. Qual é o volume desse objeto?

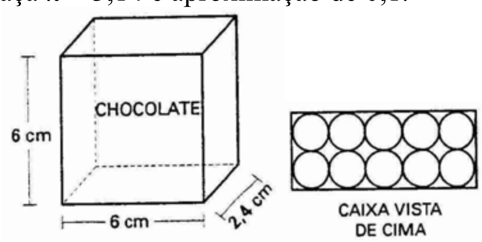
Resolução: O volume do objeto é igual ao volume que excede com o aumento do nível da água. Como o nível da água sobe 0,5m, o volume excedente é o volume de um paralelepípedo de mesma medida de área da base que o tanque e altura 0,5m.

Logo, $V = (6 \cdot 3 \cdot 0.5)m^3 = 9m^3$

Resposta: O volume do objeto é de $9m^3$.

Tarefa 10: Calcular porcentagem usando volume

Exercício (nº 42-item b-pág.391) – Uma caixa de cigarros de chocolate é um paralelepípedo reto retângulo. Pede-se a porcentagem de ar dentro da caixa.
Faça π = 3,14 e aproximação de 0,1.



Resolução: O volume total de chocolate da caixa é de aproximadamente $68cm^3$.

$V_{caixa} = (6 \cdot 6 \cdot 2{,}4)cm^3 = 86{,}4cm^3$

$V_{ar} = (86{,}4 - 68)cm^3 = 18{,}4cm^3$ (volume total da caixa menos o volume de chocolate)

Usando regra de três fazemos:

$86{,}4cm^3 \rightarrow 100\%$

$18{,}4cm^3 \rightarrow x\%$

$x \cong 21{,}3\%$

Resposta: A porcentagem de ar é de aproximadamente 21,3%.

Tarefa 11: Identificar entre dois sólidos de tipos diferentes de mesma área, qual tem maior volume.

Exercício (nº 111-pág 429) – Um cubo e uma esfera têm a mesma área de superfície. Qual deles tem maior volume?

Resolução: A área do cubo de aresta **a** é dada por: $A_{cubo} = 6 \cdot a^2$ e a área da esfera de raio **r** por:

$A_{esfera} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Fazendo $A_{cubo} = A_{esfera}$ temos $6 \cdot a^2 = 4 \cdot \pi \cdot r^2$, que nos permite expressar **a** em função de **r** :

$a = 2r\sqrt{\frac{\pi}{6}}$ (I)

Sabemos que o volume da esfera de raio **r** é expresso por $V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.

O volume do cubo de aresta **a** é calculado usando: $V_{cubo} = a^3$

Então, usando (I) temos: $V_{cubo} = \left(2r\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{6}}$ e como $\sqrt{\frac{\pi}{6}} < 1$, o volume do cubo é menor que o volume da esfera.

Resposta: A esfera tem maior volume.

Apresentamos na tabela abaixo, a lista das tarefas identificadas com o respectivo número de exercícios que apresentam tais tarefas.

Tarefa	**Número de Exercícios que apresentam a Tarefa**
1) Calcular volume de sólidos	22
2) Calcular a medida de algum elemento do sólido, conhecendo o volume do sólido	7
3) Determinar a razão entre as medidas de volume de dois sólidos	3
4) Calcular a área conhecendo o volume do sólido	-
5) Calcular a diferença entre as medidas de volume de dois sólidos	-
6) Calcular a capacidade em litros de um sólido.	2
7) Calcular a massa de sólidos usando os conceitos de volume e densidade.	2
8) Aplicar o volume de sólidos de tipos distintos para determinar quantidades.	2
9) Aplicar a definição de volume de um ou mais tipos de sólido.	2
10) Calcular porcentagem usando volume	2
11) Identificar entre dois sólidos de tipos diferentes de mesma área, qual tem maior volume.	1

De acordo com a tabela, podemos observar que a tarefa mais presente entre os exercícios é a de “Calcular volume de sólidos”, pois 22 de 40 exercícios apresentam esta tarefa.

Em alguns exercícios que apresentam por tarefa “calcular volume de sólidos”, mais de um sólido é objeto de estudo. Assim, nos 22 exercícios, temos 25 cálculos de volume diferentes. Como *subtarefa* de exercícios que apresentam outras tarefas, temos 19 cálculos de volume. A tabela seguinte nos mostra claramente estes dados.

	Calcular volume de sólidos	
Sólido	**Como Tarefa**	**Como subtarefa**
Prisma de base hexagonal regular	3	2
Prisma de base triangular regular	1	4
Prisma quadrangular oblíquo	1	-
Prisma de base em forma de trapézio isósceles	1	-
Paralelepípedo	3	4
Cubo	2	-
Pirâmide triangular regular	0	1
Pirâmide quadrangular regular	2	-

Pirâmide hexagonal regular	1	-
Pirâmide octogonal regular	1	-
Tetraedro	4	-
Cone eqüilátero	1	-
Cone não eqüilátero	0	1
Cilindro	3	5
Esfera	1	2
Semi esfera	1	-
Total	**25**	**19**

Notamos, segundo a tabela que, dos 25 sólidos que são objetos da tarefa "calcular volume", 11 são prismas, 8 são pirâmides, 3 são cilindros, 1 é cone, 1 é esfera e 1 é semi-esfera.

Os sólidos do tipo prisma se destacam nesta tarefa pela presença em maior número (11 de 25), bem como as pirâmides (8 de 25) e, em particular, o tetraedro (4 de 8).

O cálculo de volume de prismas destaca-se também como *subtarefa*, (10 de 19).

Conforme a primeira tabela, observamos também a ênfase dada à tarefa "Calcular a medida de algum elemento do sólido, conhecendo a medida de seu volume", esta tarefa esta presente em 7 dos 40 exercícios.

3.2.2.b Estudo dos Exercícios quanto à presença e função de Figuras

A tabela abaixo dá informações quanto à presença de figuras nos 40 exercícios que envolvem o conceito de volume.

Presença (ou não) de figura; Função da figura quando presente;	**Número de exercícios**
Não apresentam figuras	29
Exercícios nos quais a figura tem por função completar o enunciado	11
Exercícios nos quais a figura apenas ilustra o enunciado	-
Exercícios nos quais a figura fornece uma hipótese a mais para ajudar na resolução	-

Observando a tabela, notamos que 11 sobre 40 exercícios de fixação, que envolvem o conceito de volume, apresentam figuras.

Destacamos que todas as figuras presentes no enunciado dos exercícios têm por função completar o mesmo, ou seja, fornecem dados necessários na resolução do exercício. Não foram identificados exercícios que apresentam figuras do tipo ilustrativas nem tampouco exercícios onde a figura forneça alguma hipótese a mais que auxilie na resolução.

3.3 ESTUDO DE LIVROS DA ATUALIDADE (2002 / 2004)

Do período atual, apresentamos o estudo de dois livros didáticos, com o intuito de identificar diferenças na abordagem.

3.3.1 Estudo do livro *Matemática - Projeto Escola e Cidadania para todos*[7]

Este livro é composto de onze módulos. Nosso estudo está centrado em dois deles: *"Olhando por esse Prisma"* e *"Tudo o que Rola"*.

O módulo "Olhando por esse Prisma" apresenta como conteúdos a caracterização, os elementos e os conceitos de área de superfície e volume dos Prismas e Pirâmides.

O módulo "Tudo o que Rola" apresenta elementos, caracterização e conceitos de área de superfície e volume dos sólidos: cilindro, cone e esfera; denominados nessa abordagem de *corpos redondos.*

Em ambos os módulos é perceptível a preocupação dos autores em relacionar o estudo dos sólidos com as construções arquitetônicas e exemplos da natureza encontrados no dia-a-dia. Para isso, cita na abordagem: *os alvéolos das colméias de abelhas* (p.49), *a pirâmide de Quéops do Egito* (p.53), *os projetos arquitetônicos de Oscar Niemeyer* (p.62) e *o planeta Terra* (p.72)

Vejamos a seguir com mais detalhes, como é feita a abordagem do conceito de volume dos sólidos dentro destes módulos.

3.3.1.1 Estudo da Abordagem

Volume de Prismas e Pirâmides

Inicia-se o estudo do volume de prismas com algumas considerações importantes.

---

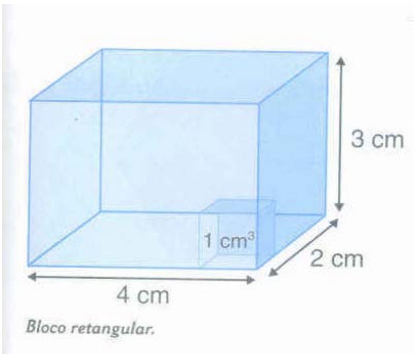
[7] Maria J.C. de Vasconcelos, Maria Terezinha Scordamaglio e Suzana Laino Cândido. 3ª série. Ensino Médio. Editora do Brasil. 1ª edição. São Paulo, 2004.

O conceito de volume e de medir são estabelecidos e o cubo é apresentado como padrão apropriado de unidade de medida de volume para os sólidos:

> "O *volume* de um sólido é a medida do *espaço* que ele ocupa.
>
> Como medir é comparar grandezas, para dar a medida do volume de um sólido precisamos compará-lo ao volume de um sólido padrão. Por uma questão de praticidade, os sólidos usados como padrão de volume são os cubos, porque suas arestas têm todas a mesma medida." (p.47)

O primeiro prisma, sobre o qual se faz o estudo do volume é o *bloco retangular*. O conceito de medida de volume é apresentado por meio de uma ilustração e via estudo de uma situação problema conforme segue:

A figura de um bloco retangular de 3 cm de altura, 4 cm de comprimento e 2 cm de largura é apresentada.



(p.47)

A medida do volume (V) do bloco ilustrativo é fornecida diretamente: V = 24 cm^3 (sem cálculos), acompanhada da seguinte justificativa: "O volume deste bloco retangular é V = 24 cm^3 , porque ele ocupa o espaço equivalente ao de 24 cubos de 1cm de aresta."(p.47)

A partir do número de camadas, número de filas em cada uma das camadas e número de blocos de 1 cm^3 presentes em cada fila, o cálculo do volume do bloco retangular do exemplo é apresentado: V = 4.2.3 = 24 cm^3

Uma observação da figura do bloco retangular acompanhado de suas medidas permite (em comparação com o número de blocos de 1cm^3 que compõem a figura) perceber que ocorre uma correspondência entre as medidas do prisma e o número de blocos, daí vem a relação genérica que permite calcular o volume de qualquer sólido desse tipo.

$$V = c \,.\, l \,.\, h$$

A medida do volume de um bloco retangular é dada pelo produto de suas medidas: comprimento, largura e altura ; representadas na relação acima por *c* , *l* e *h* respectivamente.

O conceito de área é um saber disponível nessa abordagem por ter sido trabalhado anteriormente.

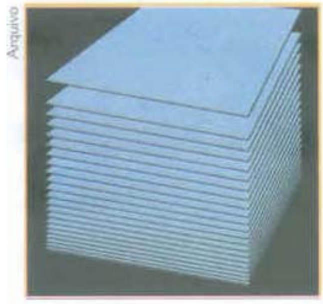
Usando este conceito, sugere-se uma outra forma de olhar para a relação $V = c\ .\ l\ .\ h$

"A base do bloco é um retângulo. Sua área é $A_{Base} = c\ .\ l$"

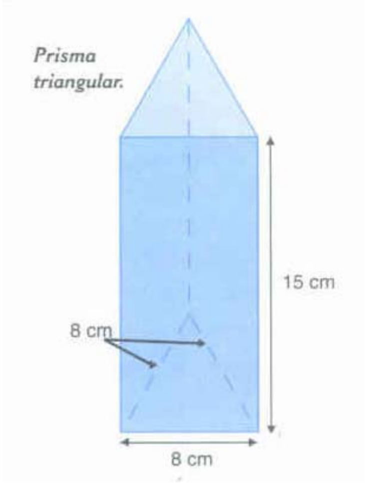
Logo, $V = c\ .\ l\ .\ h$

$V = A_{Base}\ .\ h$ (p.48)

De maneira empírica, usando a *imaginação*, sugere-se que o volume de qualquer prisma pode ser calculado usando a relação $V = A_{Base}\ .\ h$ com a seguinte justificativa:

> Podemos imaginar que um prisma é formado por um número infinito de camadas, tão finas quanto se queira, todas exatamente iguais à base do prisma.
>
> 
>
>
> A pilha formada por essas camadas teria altura igual a do prisma e produziria o volume do prisma.
> Aproveitando o raciocínio usado para o volume dos blocos retangulares podemos escrever:
> $V_{Prisma} = A_{Base}$. altura (p.48)

Com base nesta idéia e via resolução de um problema, que veremos tal como é apresentada pelo autor, logo abaixo, o volume dos prismas triangular e hexagonal é abordado:

> Vamos voltar ao problema 6[8], onde você escolheu a embalagem que consumiria menos material, e calcular o volume de cada embalagem.
>
> 
>

[8] Enunciado do problema 6: "Suponha que você trabalhe numa empresa e tenha de optar por uma das duas formas de embalagem mostradas a seguir, para acondicionar determinado produto. A ordem é economizar custos. Calcule a área da superfície de cada prisma e escolha a embalagem que consome menos material."(p.46) Obs.:As embalagens são as mesmas mostradas na resolução a seguir.

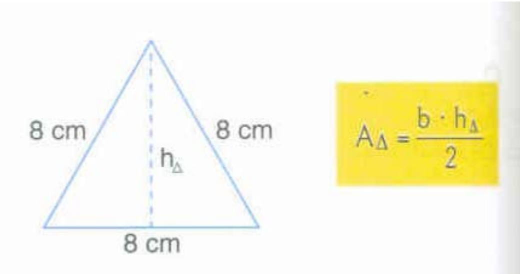
Para isso, usaremos a relação V = A $_{Base}$. altura
A base desse prisma é um triângulo eqüilátero de lado 8 cm.
Como vimos:

$$h_\Delta = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ cm$$

Portanto,

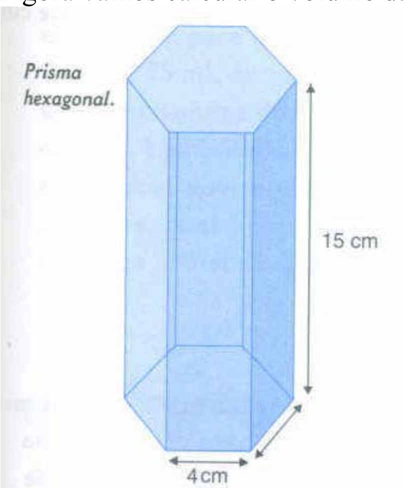
$$A_{base} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \cong 27{,}2\ cm^2$$

Com relação ao prisma triangular, apresenta-se o cálculo da área da base:

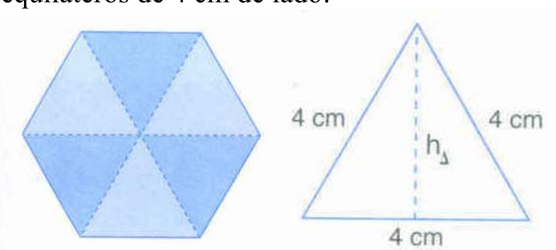


A altura desse prisma é h = 15 cm. Portanto: $V = A_{base} \cdot h = 27{,}2 \cdot 15 = 408\ cm^3$

Agora vamos calcular o volume da outra embalagem.



Cada base desse prisma é um hexágono, que é formado por seis triângulos eqüiláteros de 4 cm de lado:



$$h_\Delta = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ cm$$

$$A_\Delta = \frac{b \cdot h_\Delta}{2} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ cm^2$$

$$A_{base} = 6 \cdot A_\Delta = 6 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \cong 40{,}8\ cm^2$$

$$V = A_{base} \cdot h = 40{,}8 \cdot 15 = 612\ cm^3 \qquad \text{(p.48-49)}$$

Notemos que o uso da palavra embalagem é só para se referir a um tipo de sólido, mas a apresentação é formal.

Na realização da tarefa proposta no problema (calcular volume de prismas), se fez necessário o cálculo da área do triângulo eqüilátero e do hexágono regular que são bases dos sólidos, pois pela relação V = A_{Base} . altura, V depende de A_{Base} e da altura do prisma, sendo que esta última foi fornecida diretamente em cada uma das figuras.

Uma revisão de como calcular a área dessas figuras planas foi feita, neste caso particular, usando as medidas fornecidas nas figuras dos dois prismas, mas esse saber é considerado disponível por ter sido trabalhado anteriormente na abordagem do cálculo de área de superfície do prisma.

A escolha de executar a tarefa proposta no problema para o prisma triangular por primeiro, facilitou a resolução do problema como um todo, pois, no cálculo de área do hexágono regular utilizou-se como saber disponível o cálculo de área do triângulo eqüilátero, partindo-se da idéia de que *um hexágono regular é composto por seis triângulos eqüiláteros.*

Nessa abordagem, as fórmulas para o cálculo de área de polígonos regulares não são fornecidas, nem tampouco apresentadas em exercícios genéricos, de maneira que o aluno terá que construir toda a resolução com posse apenas das medidas do prisma, sempre que um problema semelhante a este for proposto.

A validade da relação $V_{Prisma} = A_{Base}$. altura, para prismas diferentes do bloco retangular, é baseada na colocação feita na citação que diz: "Podemos *imaginar* que um prisma é formado por um número infinito de camadas, tão finas quanto se queira, todas exatamente iguais à base do prisma."(p.48) Ficando assim subentendido que a relação está garantida para prismas de outras bases diferentes do retângulo quando se imagina a idéia do *empilhamento de camadas* proposta nesta abordagem.

Com intenção de ressaltar a importância do estudo de *cálculo de área e volume dos sólidos geométricos*, faz-se uma observação sobre estes sólidos que representam embalagens:

> A embalagem de base hexagonal consome pouco mais material que a de base triangular, mas cria um volume 50% maior!
> Veja:
> $V_{hexag.} - V_{triang} = 612 - 408 = 204$
> 50% de 408 = 204" (p.49)
> Na natureza algo semelhante também pode ser notado em colméias:
> "Os alvéolos onde as abelhas armazenam o mel têm forma hexagonal, justamente para obter um volume maior do que se fossem triangulares ou quadrangulares.

Colméia aberta mostrando os alvéolos com forma hexagonal.

(p.49)

A abordagem do volume de pirâmides é experimental e empírica e usa o volume do prisma como ferramenta.

Com o objetivo de estabelecer uma fórmula para calcular o volume de pirâmides, propõe-se a seguinte experiência:

Construir em cartolina a planificação de um prisma de 4 cm de altura e base quadrada 6 cm x 6 cm, sem tampa. Montá-lo e colá-lo;

Usar o mesmo processo para construir uma pirâmide de mesma base e mesma altura que o prisma, mas sem fundo;

Encher a pirâmide com areia até que fique completamente cheia, ou seja, até que seu volume seja totalmente preenchido por este material.

Em seguida, despejar a areia da pirâmide no interior do prisma e repetir a operação até que o interior do prisma esteja completamente cheio de areia.

Com base nessa experiência o aluno deve verificar que é preciso encher três vezes a pirâmide de areia e derramá-la no prisma para que este, fique totalmente cheio.

Logo, por observação:

$$V_{prisma} = 3 \cdot V_{pirâmide}$$

Substituindo a relação: $V_{prisma} = A_{base} \cdot altura$ que já é conhecida, na relação anterior vem:

$$A_{base} \cdot altura = 3 \cdot V_{pirâmide}$$

Como o prisma e a pirâmide usados na experiência têm mesma base e mesma altura, pode-se escrever:

$$V_{Pirâmide} = \frac{A_{base} \cdot altura}{3}$$

Essa fórmula é dada para calcular o volume de *qualquer* pirâmide.

Implicitamente, esta afirmação se verifica porque, *dada uma pirâmide de base qualquer (diferente do quadrado)*, é possível construir um prisma de mesma base e mesma altura que a pirâmide dada e verificar que $V_{prisma} = 3 \cdot V_{pirâmide}$

Volume do Cilindro, do Cone e da Esfera

Nas fórmulas usadas para calcular o volume do cilindro, do cone e da esfera encontramos o π. E, dentro do módulo que estuda estes sólidos, o conceito do π é retomado logo no início, da seguinte forma:

Usando como experimento medir *o comprimento de círculos confeccionados em cartolina* , o aluno deve notar que o quociente obtido ao se dividir o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro é um valor constante mas não exato e próximo de 3. Este número é representado pela letra grega π e será arredondado para 3,14 nos cálculos em que estiver envolvido.

Feita esta breve revisão, o conceito do π passa a ser considerado um *saber disponível* nessa abordagem.

Com a intenção de se estabelecer uma fórmula eficiente para calcular o volume de um cilindro qualquer, uma abordagem intuitiva é proposta.

Considerando "*qual figura plana surge quando são feitos cortes paralelos às bases de um cilindro*[9]", e propondo o uso da imaginação,o raciocínio que já foi utilizado na abordagem do volume de prismas é retomado:

> Intuitivamente, podemos imaginar que o volume ocupado por um cilindro é igual ao obtido pelo "empilhamento" de círculos congruentes às bases até atingir a altura *h* do cilindro.
> Ainda usando a imaginação:
> *h* camadas tão finas quanto se queira, cada uma delas com área igual à da base do cilindro. Compreendeu?
> Então o volume do cilindro será:
> $V = A_{Base} \cdot h$ ou $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ (p.66)

Um exemplo de aplicação da fórmula é proposto e tem como tarefa calcular o volume de um objeto cilíndrico presente no cotidiano. Veja:

> Calcular o volume de uma *lata de ervilhas* onde o raio da base mede 3,6 cm e a altura 9,4 cm.
> *Resolução:*
> r = 3,6 cm e h = 9,4 cm
> $V = \pi \cdot 3{,}6^2 \cdot 9{,}4$
> $V = 3.14 \cdot 12{,}96 \cdot 9{,}4$
> $V \cong 382{,}5 \text{ cm}^3$ (p.66)

---

[9] Este tema foi abordado juntamente com os elementos do cilindro, em sessão anterior do livro.

Lembra-se ao aluno que 1 cm^3 = 1 ml e que o volume da lata pode também ser dado nesta outra unidade (mililitros): V = 382,5 ml

A abordagem usada para determinar o volume do cone é experimental, construtiva e intuitiva. A experiência sugerida é semelhante à que foi usada na abordagem do volume de pirâmides.

A partir do volume do cilindro, já conhecido, chega-se a uma expressão para calcular o volume do cone.

Toma-se um cone já construído na abordagem de *planificação* e mede-se sua altura até então desconhecida por que sua construção iniciou-se pela área lateral (um setor circular de 15 cm de raio e ângulo central de 120°) e a partir desta, descobriu-se qual medida que o raio da base deveria ter para haver o encaixe perfeito da base na superfície lateral.

Descoberta a medida da altura do cone ($h \cong 14$ cm) e do raio da base (5 cm), constrói-se em cartolina um cilindro "sem tampa" com estas medidas.

Usando o cone "sem fundo", enchendo-o completamente de areia e depositando esta areia no cilindro, com as repetições necessárias desse processo até que o cilindro esteja completamente cheio, o aluno deve responder as seguintes questões (e, a partir delas tirar suas conclusões a respeito do volume do cone):

a) Quantas vezes o volume do cone cabe no volume do cilindro?
b) É correto dizer que, se um cilindro e um cone têm uma mesma base e altura, $V_{cilindro} = 3 \cdot V_{cone}$ ou $V_{cone} = \frac{V_{cilindro}}{3}$?
c) Teste essa relação para outro cone e cilindro de bases e altura iguais. Podemos generalizá-la? (p.70)

Com base no experimento é possível verificar que o volume do cone cabe três vezes no volume do cilindro porque é necessário encher três vezes o cone com areia e despejá-la no cilindro para que este fique completamente cheio. Após essa verificação empírica, o aluno é levado a concluir rapidamente que se um cilindro e um cone têm mesma altura e mesma base então o volume do cone equivale a um terço do volume do cilindro e essa idéia é reforçada à medida que ele testa o experimento com outras medidas de base e altura que devem ser as mesmas para cone e cilindro. De maneira intuitiva, testando o experimento para um, dois, talvez três pares de cone e cilindro o aluno é levado a crer que é possível generalizar a fórmula: $V_{cone} = \frac{V_{cilindro}}{3}$ para cones e cilindros de mesma base e mesma altura.

Por meio da situação problema: "Calcular o volume de um cone qualquer", a análise experimental traz, *implicitamente* a idéia de que: dado um cone *qualquer* onde sejam conhecidas as medidas de sua altura e área da base, é possível construir um cilindro com essas mesmas medidas e, sendo a fórmula para calcular o volume do cilindro um saber disponível, é possível verificar (experimentalmente) que o volume do cone será sempre um terço dessa medida. Em outras palavras: calcular o volume de um cone onde se conhece a medida da área da base e da altura é calcular um terço da medida do volume de um cilindro que tem as mesmas medidas de área da base e altura desse cone.

Para finalizar, o seguinte exercício é proposto:

> Lembrando que $V_{cilindro} = \pi \,.\, r^2 \,.\, h$, temos que $V_{cone} = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$
>
> Usando essa relação, calcule o volume do cone do nosso exemplo.(use calculadora!)[10] (p.71).

Após a generalização de que o volume do cone é um terço do volume do cilindro que tem mesma área da base e mesma altura e, tendo disponível que $V_{cilindro} = \pi \,.\, r^2 \,.\, h$, por *transitividade* conclui-se que $V_{cone} = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$.

Assim, fica explicitada a fórmula que permite calcular o volume de qualquer cone, desde que se conheça a medida do raio da base e da altura.

Na abordagem do volume da esfera, a fórmula que permite calcular o volume deste sólido é fornecida diretamente:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3} \quad \text{onde R é a medida do raio da esfera}$$

Na seqüência, um experimento é sugerido para validá-la.

Roteiro do experimento:

Conseguir uma esfera de um material que afunde na água e um jeito de medir seu diâmetro (usando um parquímetro, por exemplo). Lembrando que o diâmetro mede o dobro do raio, obtém-se a medida R do raio da esfera.

Colocar um volume qualquer (V) de água em um recipiente graduado e registrar essa medida como V_1.

Mergulhar a esfera na água que deverá afundar e registrar o novo nível da água como V_2.

A diferença entre os volumes ($V_2 - V_1$) corresponde ao volume da esfera.

---

[10] Cone usado no início da abordagem cujo raio da base mede 5cm e a altura (h) mede 14cm.

De posse do raio R da esfera, é possível calcular $\frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$ e verificar que corresponde aproximadamente ao valor obtido na diferença $V_2 - V_1$.

Ora, a diferença $V_2 - V_1$ é a medida do volume da esfera obtida experimentalmente. Se ela é aproximadamente[11] igual ao valor obtido pela fórmula $\frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$, então, por transitividade, constata-se que $V_{esfera} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$.

Nessa abordagem, o experimento não serve para que se chegue à relação usada para calcular o volume da esfera. Ele serve apenas para "convencer" que a relação funciona.

Diferentemente dos outros sólidos que estudamos, na abordagem do conceito do volume da esfera, o conceito de área de superfície não é um saber disponível. A partir da fórmula $V_{esfera} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$, usada como ferramenta na abordagem da área de superfície da esfera, é que se chega a uma outra que permite calcular a área da superfície esférica:

$$A_{\text{superfície esférica}} = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \qquad \text{(p.75)}$$

Conclusão

Na abordagem de volume dos sólidos apresentada neste livro, podemos destacar como pontos notórios:

Preocupação em conceituar *volume* e *ato de medir*, bem como de justificar o uso do cubo como unidade padrão de medida de volume.

A divisão do estudo dos sólidos em dois módulos, de maneira a agrupar prismas e pirâmides em um deles e; cilindro, cone e esfera (denominados "corpos redondos") em outro.

O uso de experimentações empíricas para *obter* a fórmula que permita calcular o volume de pirâmides e também do cone. E para *verificação* da validade da fórmula usada para calcular o volume da esfera.

O conceito de área usado como *saber disponível* na abordagem de volume de prismas, pirâmides, cilindro e cone, por ser visto em sessão anterior à que aborda o volume. E a situação inversa encontrada no estudo da esfera, ou seja, o conceito de volume é apresentado por primeiro e usado como *ferramenta* na abordagem do conceito da área de superfície.

O uso da resolução de situações-problema para abordar o volume de prismas e mostrar a importância deste conceito no cotidiano relacionando-o com o *custo-benefício* na produção de

[11] Por imprecisões das medidas de R ,V e ainda pelo "arredondamento" do valor do π.

embalagens, bem como mostrando exemplos de aplicação na Natureza (colméias de abelhas).

3.3.1.2 – Estudo dos Exercícios Propostos nos módulos: *"Olhando por esse Prisma"* e *"Tudo o que Rola"*

A este livro acompanha um Caderno de Atividades. Entre os exercícios propostos, **39** envolvem o conceito de volume. Sendo que destes, **20** estão nos módulos "Olhando por esse Prisma" e "Tudo o que Rola" do livro texto e **19** estão no caderno de exercícios, em sessões de mesmo nome dos módulos.

3.3.1.2.a Estudo dos Exercícios Segundo a Tarefa Proposta

No estudo dos exercícios deste livro, identificamos 2 tarefas que não foram identificadas nos livros anteriores. Elas foram apresentadas abaixo e, junto a cada tarefa, apresentamos a resolução de um exercício.

Tarefa 12: Construir um sólido usando planificação, sob certas condições dadas para medida de volume e capacidade.

Exercício (nº 4-item d-pág 67) – Você é projetista de uma empresa especializada em embalagens. Construa em cartolina, usando planificação, uma embalagem cilíndrica com capacidade para 1 litro. O cliente quer que sobre, no interior da embalagem, um volume de $100cm^3$ a $200cm^3$.
Vamos indicar possíveis medidas para a planificação a ser construída.
Resolução: 1 litro = $1000cm^3$, como devemos ter uma sobra de $100cm^3$ a $200cm^3$, no interior da embalagem, uma alternativa é a planificação de um cilindro onde a medida do raio da base é de 6cm e a medida da altura é de 10,5cm. Esta embalagem cilíndrica terá um volume de:

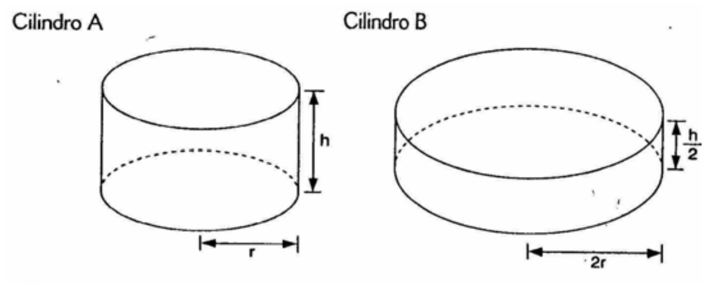
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot (6cm)^2 \cdot 10{,}5cm \cong 1187{,}5cm^3$$

Com esta medida de volume a embalagem se encontra dentro das condições exigidas.

Tarefa 13: Identificar entre dois sólidos qual tem maior volume.

Exercício (nº 5-pág 7 [12]) – Sobre os dois cilindros abaixo representados, deseja-se saber qual deles tem maior volume.



[12] Do caderno de atividades que acompanha o livro texto.

Resolução: O cilindro A,tem raio medindo **r** e altura medindo **h**,então seu volume (V_A) é:

$$V_A = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

O cilindro B, tem raio de medida **2r** e altura de medida **h/2** . Seu volume (V_b) é:

$$V_B = \pi \cdot (2r)^2 \cdot \frac{h}{2} = 2\pi r^2 h$$

Resposta: O cilindro B tem maior volume.

Conforme mostra a tabela, nos 39 exercícios estudados, 9 tarefas foram identificadas.

Tarefa	**Número de Exercícios que apresentam a Tarefa**
1) Calcular volume de sólidos	28
2) Calcular a medida de algum elemento do sólido, conhecendo o volume do sólido	2
3) Determinar a razão entre as medidas de volume de dois sólidos	2
4) Calcular a área conhecendo o volume do sólido	-
5) Calcular a diferença entre as medidas de volume de dois sólidos	-
6) Calcular a capacidade em litros de um sólido.	4
7) Calcular a massa de sólidos usando os conceitos de volume e densidade.	2
8) Aplicar o volume de sólidos de tipos distintos para determinar quantidades.	2
9) Aplicar a definição de volume de um ou mais tipos de sólido.	-
10) Calcular porcentagem usando volume	2
11) Identificar entre dois sólidos de tipos diferentes de *mesma área*, qual tem maior volume.	-
12) Construir um sólido usando planificação, sob certas condições dadas para medida de volume e capacidade.	1
13) Identificar entre dois sólidos qual tem maior volume.	1

Destacamos que 28, dos 39 exercícios, têm por tarefa “calcular volume de sólidos”. Porém em vários exercícios, mais de um sólido é objeto de estudo. Assim, nos 28 exercícios temos 34 cálculos do volume de sólidos enquanto tarefa.

Destacamos também que dentre os exercícios que apresentam outras tarefas, *o cálculo de volume* é identificado como subtarefa em outras 10 situações.

A tabela abaixo detalha estas informações.

Sólido	**Como Tarefa**	**Como subtarefa**
Prisma de base hexagonal regular	1	-

Prisma de base triangular regular	4	-
Paralelepípedo	8	1
Cubo	3	1
Pirâmide quadrangular regular	2	1
Pirâmide hexagonal regular	1	1
Cone	2	1
Cilindro equilátero	2	1
Cilindro reto	6	2
Esfera	4	2
Semi esfera	1	-

Como podemos notar, dos 34 sólidos que são objetos da tarefa "calcular volume", 16 são prismas, 8 são cilindros, 4 são esferas, 3 são pirâmides, 2 são cones e 1 é semi-esfera.

Cabe destacar a ênfase dada ao estudo do volume de prismas (16 de 34) e em particular ao volume do paralelepípedo (8 de 16).

Voltando à primeira tabela, destacamos ainda que 4 dos 39 exercícios são relativos à tarefa "calcular a capacidade de um sólido", estes trabalham a relação de volume com capacidade. Temos aqui dois sistemas de medida envolvidos na tarefa.

Nas demais tarefas, conceitos como os de densidade, porcentagem, etc... estão envolvidos e estas tarefas estão presentes em praticamente uma mesma quantidade de exercícios.

3.3.1.2.b Estudo dos Exercícios quanto à presença e função de Figuras

Apresentamos aqui, a tabela relativa à presença de figuras nos exercícios.

Presença (ou não) de figura; Função da figura quando presente;	**Livro texto**	**Caderno de atividades**
Número de exercícios que não apresentam figuras	15	5
Número de exercícios nos quais a figura tem por função completar o enunciado	4	12
Número de exercícios nos quais a figura apenas ilustra o enunciado	1	2
Número de exercícios nos quais a figura fornece uma hipótese a mais para ajudar na resolução	-	-

Destacamos que 15 dos 20 exercícios propostos no livro texto não apresentam figura no enunciado. Estes envolvem situações-problema diversas. Entretanto no caderno de atividades 12 dos 19 exercícios apresentam figuras que têm por função completar o enunciado, em geral, dados do exercício são fornecidos nas mesmas.

De todos os exercícios que apresentam figura no enunciado, 3 são do tipo ilustrativas. Não identificamos exercícios onde a figura forneça alguma hipótese auxiliar para a resolução.

3.3.2 Estudo do livro *Matemática para o Ensino Médio*[13]

Este livro está dividido em três partes, num total de 21 capítulos e apresenta todo o conteúdo de matemática ensinado para alunos que estão cursando o Ensino Médio.

Nosso estudo está centrado no capítulo 18 – *Geometria Espacial*, nas sessões de Geometria Métrica Espacial em que é apresentada a abordagem do conceito de volume dos sólidos.

3.3.2.1 A Abordagem

Uma rápida visualização das sessões de Geometria Métrica Espacial nos permite observar que para cada sólido a abordagem se inicia com o conceito, seguido dos elementos, da classificação e da área de superfície para que, por último, o volume seja abordado. O único sólido que foge a esta forma de apresentação é a esfera. Para este sólido é dado o conceito, em seguida aborda-se o conceito de volume para depois ser abordado o conceito de área de superfície.

Vejamos detalhadamente como é feita a abordagem do conceito de volume para cada sólido, na ordem em que é apresentada no livro.

Volume do Prisma

Na abordagem do volume deste primeiro sólido apresentado, considera-se que o aluno já saiba o que é volume.

A fórmula para o cálculo do volume de um prisma qualquer é fornecida diretamente em linguagem coloquial e em notação simbólica matemática.

> O *volume* de um prisma qualquer é igual ao produto da área da base pela sua altura.

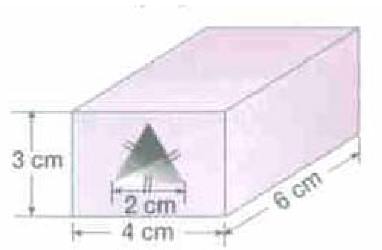
---

[13] Manoel Jairo Bezerra.Volume único. Editora Scipione, 5ª edição, São Paulo, 2002.

$$V = S_b \cdot H \qquad \text{(p.347)}$$

Observa-se que o volume depende da área da base, saber considerado disponível por ter sido visto em sessão imediatamente anterior a esta em que se aborda o volume.

Após fornecer a fórmula para o cálculo de volume do prisma, são mostrados dois exercícios resolvidos onde se aplica o cálculo de volume de prismas. Vamos mostrar aqui, um deles:

> Uma certa peça tem a forma de um paralelepípedo reto retângulo e é transpassada por um furo triangular, conforme mostra a figura. Qual é o volume dessa peça?
>
> 
>
>
> **Resolução**: Note que o furo tem a forma de prisma triangular, cuja base é um triângulo eqüilátero de 2cm de lado e cuja altura mede 6cm. O volume da peça é a diferença entre os volumes do paralelepípedo e do prisma triangular. Então temos:
>
> *Volume do prisma triangular*
>
> A área de triângulo eqüilátero de 2cm de lado é $S_b = \sqrt{3}cm^2$. Logo, o volume do prisma triangular é:
>
> $V_1 = S_b \cdot H$
>
> $V_1 = \sqrt{3}cm^2 \cdot 6cm \Rightarrow V_1 = 6\sqrt{3}cm^3$
>
> *Volume do paralelepípedo*
>
> $V_2 = 4cm \cdot 3cm \cdot 6cm \Rightarrow V_2 = 72cm^3$
>
> *Volume da peça*
>
> $V = V_2 - V_1$
>
> $V = 72cm^3 - 6\sqrt{3}cm^3$
>
> $V = 6(12 - \sqrt{3})cm^3$ (p.348).

Volume da Pirâmide

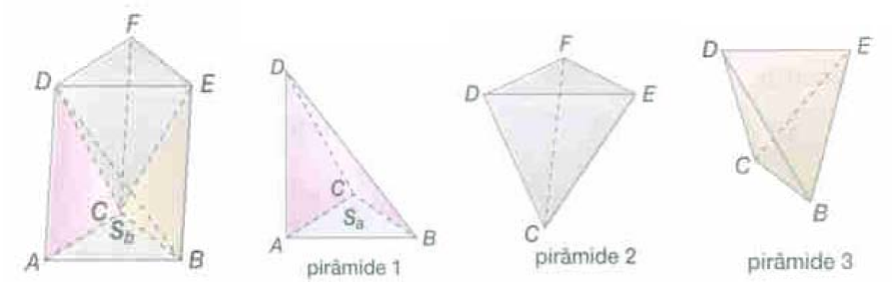
A abordagem do conceito de volume para pirâmides inicia-se com a descrição da fórmula que, a princípio, serve para calcular somente o volume de pirâmides de base *triangular.*

> O volume de uma pirâmide triangular qualquer é igual a um terço do produto da área de sua base por sua altura.

$$V = \frac{1}{3} S_b . H \qquad \text{(p. 351)}$$

Em seguida a dedução desta fórmula é mostrada. Observe:

Se considerarmos, por exemplo, um prisma triangular cuja área da base é S_b, veremos que ele pode ser decomposto em três pirâmides de bases S_b.



As pirâmides 1 e 2 têm volumes iguais, pois suas bases ABC e DEF têm áreas iguais (elas são congruentes) e ambas as pirâmides possuem a mesma altura (a própria altura do prisma). Logo:

$V_1 = V_2$ (1)

Agora, observe as pirâmides 2 e 3, consideremos como bases os triângulos FEC e BCE. A área de cada um desses triângulos é a metade da área da face BCFE do prisma. Logo, essas bases têm áreas iguais. Além disso, as pirâmides 2 e 3 têm a mesma altura (distância do vértice D ao plano da face BCFE do prisma). Então:

$V_2 = V_3$ (2)

De (1) e (2), vem:

$V_1 = V_2 = V_3$

Logo, o volume de cada uma dessas pirâmides é um terço do volume do prisma. Particularmente, como a pirâmide 1 tem a mesma base e a mesma altura do prisma, conclui-se que:

$V_1 = \frac{1}{3} S_b.H$ (p.351-352)

A dedução da fórmula que permite calcular o volume de uma pirâmide triangular, da maneira como é mostrada nesta abordagem, é totalmente dependente da figura, sem a qual não se pode identificar os elementos usados.

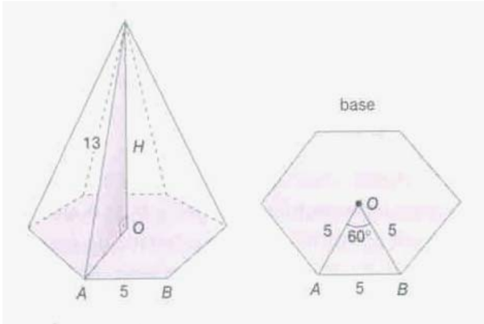
Destaca-se o uso do saber área. É com olhar direcionado para a área da base de cada uma das pirâmides e mostrando que elas são congruentes que se pode estender esta congruência para o volume (considerando que as pirâmides têm também mesma altura).

O autor apenas *afirma* que este resultado pode ser generalizado para pirâmides de outras bases. Ou seja, conclui sem mostrar que $V = \frac{1}{3} S_b.H$ é a fórmula que permite calcular o volume de *qualquer pirâmide*.

Dois exemplos de exercícios resolvidos, envolvendo o cálculo de volume de pirâmides são mostrados. Um deles, apresentado abaixo, tem por finalidade ilustrar o fato de que a fórmula deduzida serve para calcular o volume de pirâmides cuja base é diferente de um triângulo. Veja:

Numa pirâmide hexagonal regular, as arestas da base e as arestas laterais medem 5 cm e 13 cm, respectivamente. Calcule o volume dessa pirâmide.

Resolução:



Área da base:

$$S_b = 6 \cdot S_{\Delta OAB}$$

$$S_b = 6 \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot sen\,60°}{2} \Rightarrow S_b = \frac{75\sqrt{3}}{2} cm^2$$

Altura:

$$H^2 + 5^2 = 13^2 \therefore H = 12cm$$

Volume:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{75\sqrt{3}}{2} \cdot 12 \Rightarrow V = 150\sqrt{3}cm^3$$

(p.352)

Observe que a base de uma pirâmide qualquer (neste caso o hexágono) pode ser dividida em triângulos, ou seja, a soma da área destes triângulos resulta na área da base da pirâmide e, calculando um terço do produto da medida desta área pela altura da pirâmide, tem-se o volume da mesma. Mas é possível obter o mesmo resultado fazendo detalhadamente:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\underbrace{\frac{5 \cdot 5 \cdot sen60°}{2} + ... + \frac{5 \cdot 5 \cdot sen60°}{2}}_{6\ parcelas} \right) \cdot 12$$

$V = 6 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot sen60°}{2} \cdot 12 \right)$. Que corresponde à soma das medidas dos volumes de seis pirâmides de base triangular congruentes onde $S_b = \frac{5 \cdot 5 \cdot sen60°}{2}$ e a altura é a mesma da pirâmide hexagonal.

Sendo assim, observamos que a pirâmide de base hexagonal pode ser dividida em seis pirâmides triangulares e que este cálculo está implícito ao se usar a fórmula $V = \frac{1}{3} S_b.H$, diretamente para a pirâmide hexagonal.

Usando a resolução *detalhada* deste exercício para uma pirâmide cuja base é um polígono de *n lados*, é possível constatar a afirmação dada pelo autor sobre a generalização da fórmula que foi fornecida inicialmente para calcular apenas o volume de pirâmides triangulares.

Volume do Cilindro

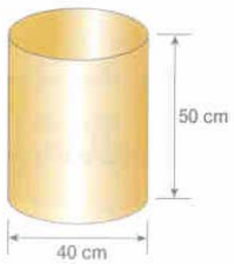
Na abordagem do volume do cilindro, a semelhança com a fórmula do volume do prisma é citada e a fórmula é fornecida em seguida:

> Tal como o volume do prisma, o volume do cilindro é dado pelo produto da área de sua base por sua altura.
> Assim:
> $V = S_b \,.\, H$
> $V = \pi r^2 .\, H$ (p.355)

Uma segunda versão da fórmula foi diretamente fornecida, levando-se em conta que a base do cilindro é sempre um círculo, conhecimento abordado em sessão anterior onde os elementos deste tipo de sólido foram apresentados.

A abordagem segue com dois exemplos de exercícios resolvidos. O primeiro deles envolve elementos, área de superfície e volume do cilindro. O segundo, envolve apenas volume e a relação de medida de volume com medida de capacidade. Apresentamos abaixo este último, acompanhado da resolução, como é mostrada no livro:

> Uma lata cilíndrica tem sua base com 40cm de diâmetro. Se a altura da lata é de 50cm, qual é seu volume em litros?
> Resolução:



> Observando que o raio da base da lata é r = 20cm, temos:
> $V = S_b \cdot H$
> $V = \pi(20)^2 \cdot 50$
> $V = 20000\pi$
> Então, utilizando $\pi = 3{,}14$, encontramos,
> $V = 62800cm^3$
> ou ainda,
> $V = 62{,}8L$ (p.356)

A relação entre cm^3 e litro não é fornecida. Considera-se que é do conhecimento do aluno que $1000cm^3 = 1L$.

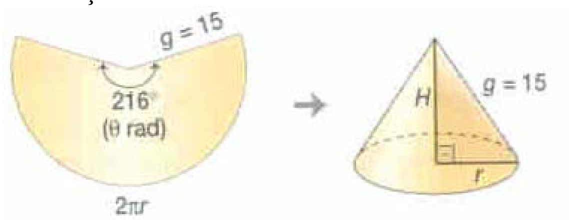
Volume do Cone

De maneira semelhante à abordagem do volume do cilindro, a fórmula para o cálculo do volume do cone é fornecida diretamente e, como a base do cone também é sempre um círculo, substituindo S_b pela fórmula da área do círculo, chega-se à fórmula que permite calcular o volume de um cone qualquer desde que se conheça a medida do raio da base e da altura. Observe:

> O volume de um cone é igual a um terço do produto da área de sua base por sua altura.
>
> Dessa forma, $V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot H$
>
> $$V = \frac{1}{3} \cdot (\pi r^2) \cdot H$$
>
> $$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$$
>
> (p.358)

Na seqüência da abordagem são apresentados dois exemplos de exercícios resolvidos. O primeiro deles tem por tarefa calcular o volume de um cone construído via planificação e o segundo também tem por tarefa calcular volume, não de um cone diretamente, mas de um sólido gerado por rotação cujo volume é obtido pela diferença entre volumes de dois cones. Acompanhe passo a passo a resolução dos exercícios logo abaixo:

1) Com um cartão em forma de setor circular, cujo ângulo central mede 216° e cujo raio mede 15cm, constrói-se um cone circular. Qual é o volume desse cone?
   Resolução:



Inicialmente, vamos converter 216° em radianos.

$$\left.\begin{array}{l} 180° \to \pi \ rad \\ 216° \to \theta \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{6\pi}{5} rad$$

Por outro lado, sabemos que $\theta = \frac{2\pi r}{g}$

Como $\theta = \frac{6\pi}{5}$ e g = 15, a última igualdade fica assim:

$\frac{6\pi}{5} = \frac{2\pi r}{15}$. De onde se tira r = 9cm.

Agora vamos calcular H por meio do teorema de Pitágoras.

$H^2 + r^2 = g^2$

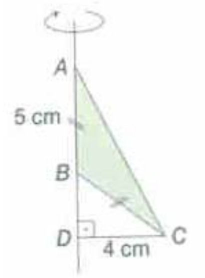
$H^2 + 9^2 = 15^2 \therefore H = 12$

Logo, o volume do cone é:

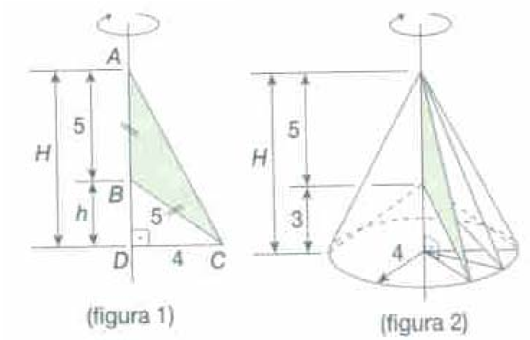
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3}(\pi \cdot 9^2) \cdot 12 \Rightarrow V = 324\pi cm^3$$

2) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação completa do triângulo isósceles ABC em torno do lado AB.



Resolução:



No triângulo retângulo BCD (figura 1), temos:

$h^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow h = 3$

Logo:

$H = 5 + h \Rightarrow H = 5 + 3 \Rightarrow H = 8$

Agora, note que a rotação do triângulo ABC, em torno do lado AB, gera o sólido da figura 2.

O volume V desse sólido é igual à diferença entre os volumes de dois cones retos de mesma base, com r = 4, e de alturas H = 8 e h = 3.

Então:

$$V = \frac{1}{3}(\pi \cdot 4^2) \cdot 8 - \frac{1}{3}(\pi \cdot 4^2) \cdot 3$$

Efetuando os cálculos, obtemos:

$$V = \frac{80\pi}{3} cm^3$$ (p.358-359)

Vale destacar que os exemplos mostrados, além de terem por função exercitar o cálculo do volume do cone, também resgatam outros saberes: transformação de grau em radiano e teorema de Pitágoras, já estudados em unidades anteriores.

Volume da Esfera

A fórmula que permite calcular o volume da esfera é fornecida diretamente e seu uso é verificado via resolução de exercícios dados como exemplos de aplicação.

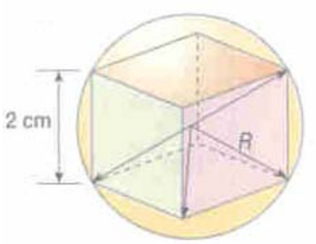
Vejamos como é dada a fórmula do volume da esfera e um dos exemplos tal como apresentados pelo autor:

O volume da esfera de raio R é dado pela fórmula:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Exemplo:

1) Determine o volume da esfera circunscrita a um cubo de aresta a = 2cm.
Resolução:



Os oito vértices do cubo pertencem à superfície esférica. Assim, o centro da esfera é um ponto eqüidistante dos vértices do cubo. Esse ponto é próprio do centro do cubo (ponto de encontro das diagonais). Desse modo, o raio da esfera é a metade da diagonal do cubo. Logo:

$$R = \frac{2\sqrt{3}}{2} \therefore R = \sqrt{3}cm$$

Assim, o volume da esfera é:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(3\sqrt{3}) \Rightarrow V = 4\pi\sqrt{3}\ cm^3$$

(p.360)

No exemplo visto, além da aplicação do volume da esfera, estão envolvidos conhecimentos sobre o cubo (cálculo da diagonal) que neste ponto da abordagem já são saberes disponíveis, pois como se sabe, o cubo é um caso particular de prisma, o primeiro tipo de sólido abordado na Geometria Espacial Métrica dentro deste contexto.

Conclusão

Nesta abordagem de volume dos sólidos, as fórmulas são fornecidas de maneira direta e o uso de cada uma delas é exemplificado via apresentação de exercícios resolvidos, exceto na abordagem do volume da pirâmide, onde para o *caso particular de base triangular*, a dedução da fórmula é apresentada. Fórmula esta, que deve ser usada também para o cálculo do volume de pirâmides quaisquer, resultado aceito sem demonstração e via resolução de exercício.

Os exercícios resolvidos como exemplo, além de aplicar o conceito de volume dos sólidos, resgatam conhecimentos vistos em outras unidades.

3.3.2.2 Estudo dos exercícios do capítulo *Geometria Espacial*

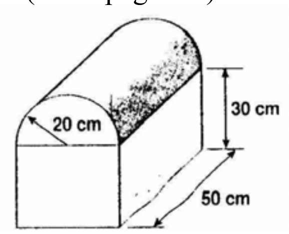
Foram verificados os exercícios das sessões *para exercitar,* localizadas após as sessões que abordam volume dos sólidos e a sessão de *exercícios complementares*, localizada no final do capítulo, resultando num total de **100** exercícios. Destes 100 exercícios, 46 envolvem o conceito de volume.

3.3.2.2.a Estudo dos Exercícios Segundo a Tarefa Proposta

Nos exercícios deste livro, identificamos um tipo de tarefa que não foi identificada nos exercícios dos livros anteriores. Apresentamos abaixo esta nova tarefa e um exercício resolvido, no qual ela é proposta.

<u>Tarefa 14:</u> Calcular volume de objetos que envolvem os tipos de sólidos estudados.

Exercício (nº 80-pág. 356) – Calcule o volume do baú representado na figura.



Resolução: O baú é formado por *meio cilindro* de raio (r) cuja medida é de 20cm e altura (h) cuja medida é de 50cm, mais um paralelepípedo de dimensões: a = 50cm,
b = 30cm e c= 40cm.
Logo, o volume do baú é dado por:

$$V = \frac{1}{2}(\pi \cdot r^2 \cdot h) + (a \cdot b \cdot c)$$

$$V = \frac{1}{2}[\pi \cdot (20cm)^2 \cdot 50cm] + (50cm \cdot 30cm \cdot 40cm)$$

$$V = 10.000\pi cm^3 + 60.000cm^3 = 10.000(\pi + 6)cm^3$$

Resposta: O volume do baú é de $10.000(\pi+6)cm^3$.

A tabela seguinte nos mostra que foram identificadas 9 tarefas distintas no estudo dos 46 exercícios que envolvem o conceito de volume.

Tarefa	**Número de Exercícios que apresentam a Tarefa**
1) Calcular volume de sólidos	26
2) Calcular a medida de algum elemento do sólido, conhecendo o volume do sólido	2
3) Determinar a razão entre as medidas de volume de dois sólidos	3
4) Calcular a área conhecendo o volume do sólido	2
5) Calcular a diferença entre as medidas de volume de dois sólidos	-
6) Calcular a capacidade em litros de um sólido.	2
7) Calcular a massa de sólidos usando os conceitos de volume e densidade.	1
8) Aplicar o volume de sólidos de tipos distintos para determinar quantidades.	1
9) Aplicar a definição de volume de um ou mais tipos de sólido.	-
10) Calcular porcentagem usando volume	1
11) Identificar entre dois sólidos de tipos diferentes de *mesma área*, qual tem maior volume.	-
12) Construir um sólido usando planificação, sob certas condições dadas para medida de volume e capacidade.	-
13) Identificar entre dois sólidos qual tem maior volume.	-
14) Calcular volume de objetos que envolvem os tipos de sólidos estudados	8

Destacamos que 26 sobre 46 exercícios apresentam por tarefa "calcular volume de sólidos".

Como subtarefa, "calcular volume" foi identificado 16 vezes, entre 20 exercícios.

Sólido	**Cálculo de volume como tarefa**	**Cálculo de volume como subtarefa**
Cubo	01	-
Prisma hexagonal regular	01	-
Prisma triangular regular	01	-
Paralelepípedo	01	07
Prisma cuja base é um losango	01	-
Pirâmide quadrangular regular	02	01
Pirâmide hexagonal regular	02	-
Tetraedro	02	-
Cilindro reto	04	03
Cilindro eqüilátero	-	01

Cone reto	06	03
Cone eqüilátero	01	-
Esfera	04	01
Total	**26**	**16**

Notemos que dos 26 sólidos que são objeto da tarefa calcular volume, 5 são prismas, 6 são pirâmides, 4 são cilindros, 7 são cones e 4 são esferas. Dessa forma, destaca-se o cone por estar presente em maior número como objeto desta tarefa.

Entre os sólidos que são objetos de outras tarefas, onde calcular volume é subtarefa, destaca-se o paralelepípedo (7 sobre 16).

De acordo com a primeira tabela, podemos notar que "calcular volume de objetos que envolvem os sólidos estudados" também é uma tarefa que se destaca pois está presente em 8 dos 46 exercícios.

De um modo geral, o cálculo de volume é enfatizado nos exercícios, seja de sólidos simples (cilindro, cone, esfera, prisma, pirâmide) ou objetos formados por estes sólidos, como por exemplo um paralelepípedo que possui "um buraco" em forma de cilindro.

3.3.2.2 .b Estudo dos Exercícios quanto à presença e função de Figuras

Apresentamos a seguir, a tabela relativa à presença de figuras nos 46 exercícios que envolvem o conceito de volume.

Presença (ou não) de figura; Função da figura quando presente;	**Número de exercícios**
Não apresentam figuras	21
Exercícios nos quais a figura tem por função completar o enunciado	24
Exercícios nos quais a figura apenas ilustra o enunciado	01
Exercícios nos quais a figura fornece uma hipótese a mais para ajudar na resolução	-

Destacamos que a maior parte dos exercícios que envolvem o conceito de volume apresentam figuras (25 de 46) e que, em apenas um deles, a figura tem por função ilustrar o enunciado. Em todos os outros a figura fornece dados indispensáveis para a resolução do exercício e por isso tem por função completar o enunciado.

3.3.3 Considerações sobre o estudo de livros da Atualidade

No estudo do livro *Matemática – Projeto Escola e Cidadania para Todos*[14] do ano de 2004 e do livro *Matemática para o Ensino Médio* do ano de 2002, encontramos diferenças significativas na abordagem do conceito de Volume dos Sólidos dos tipos: Prismas, Pirâmide, Cilindro, Cone e Esfera.

O livro *Matemática* apresenta uma abordagem que propõe experimentações empíricas para a obtenção (no caso da pirâmide e do cone) e para a verificação da validade (no caso da esfera) das fórmulas que permitem calcular o volume, bem como o uso de situações-problema e de exemplos da natureza na abordagem do cálculo do volume de prismas. O uso de experimentações visa tornar o conteúdo mais palpável ao aluno e o uso de situações-problema e exemplos da natureza, visam aproximar o conteúdo da realidade cotidiana. Mas não podemos deixar de destacar a preocupação inicial do autor em definir *volume* e *ato de medir*, o que mostra também uma preocupação formal na definição dos conceitos que são pilares do conteúdo como um todo.

Em contra partida, o livro *Matemática para o Ensino Médio*, apresenta uma abordagem baseada na apresentação direta das fórmulas de cálculo de volume dos sólidos (com exceção da pirâmide, para a qual se apresenta uma dedução), seguidas de exercícios resolvidos que visam tanto a aplicação das fórmulas fornecidas, quanto a retomada de conteúdos vistos em unidades anteriores, com o intuito de que o aluno os reconheça inseridos e aplicados em um novo contexto.

Quanto aos exercícios propostos que envolvem o conceito de volume, são em número de 46 no livro *Matemática para o Ensino Médio* e um pouco menos, 39 no livro *Matemática*. No estudo destes exercícios percebemos também que a tarefa que mais se destaca é "Calcular volume dos sólidos", presente em 26 dos 46 exercícios do livro *Matemática para o Ensino Médio* e em 28 dos 39 exercícios do livro *Matemática*. Porém, há uma diferença no tipo de sólido que se destaca nos exercícios que apresentam esta tarefa: no livro *Matemática para o Ensino Médio* destaca-se o cone e no livro *Matemática* destacam-se os tipos de prismas, em particular o paralelepípedo.

A segunda tarefa que merece destaque entre os exercícios do livro *Matemática* é: "Calcular a capacidade de um sólido", 4 de 39 exercícios apresentam esta tarefa que relaciona o conceito de volume com capacidade.

No livro *Matemática para o Ensino Médio*, a segunda tarefa mais presente nos exercícios é: "Calcular o volume de objetos que envolvem os tipos de sólido estudados", 8 de

---

[14] Trataremos aqui pelo nome *Matemática*.

46 exercícios apresentam esta tarefa, ou seja, a ênfase continua sendo puramente *o cálculo* de volume dos sólidos.

A presença de figuras no enunciado, também é uma característica marcante dos exercícios que envolvem o conceito de volume em livros atuais. No livro *Matemática*, 19 de 39 exercícios apresentam figuras e no livro *Matemática para o Ensino Médio* 25 de 46.

Apresentamos o estudo de apenas dois livros da atualidade, mas bem representativos quanto às diferenças na abordagem do conceito de volume dos sólidos e semelhança nos exercícios propostos. O primeiro deles utiliza-se de experimentações, situações-problema e exemplos da natureza como estratégias de aprendizagem. O segundo utiliza-se da resolução de exemplos onde visa a fixação do conteúdo novo e a retomada de conteúdos de unidades anteriores. Quanto aos exercícios propostos, ambos são bem semelhantes tanto em relação à tarefa que se destaca na maioria dos exercícios quanto à presença de figuras no enunciado.

3.4 Conclusões sobre o Estudo de Livros Didáticos

O estudo de Volume dos Sólidos (prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera) em livros didáticos de períodos diferentes nos permitiu identificar diferenças e semelhanças quanto à organização do conteúdo, abordagem e exercícios propostos.

Quanto à organização dos conteúdos, observamos que o livro *Matemática na Escola Renovada (1973)* apresenta a abordagem de Volume dos Sólidos em dois capítulos: "Volume dos Prismas e Pirâmides" e "Geometria dos Corpos Redondos". Este último apresenta não somente o conceito de volume, mas também aborda de forma completa os sólidos dos tipos cilindro, cone e esfera.

O livro *Matemática (1996)* apresenta em um único capítulo, denominado "Geometria Espacial Métrica", os cinco tipos de sólidos que estudamos e aborda para cada tipo de sólido elementos, classificação, área de superfície e volume.

O livro *Matemática – Projeto Escola e Cidadania para Todos (2004)* separa o estudo dos sólidos em dois módulos. Em um deles, *"Olhando por esse Prisma"*, aborda por completo Prismas e Pirâmides, e nesta abordagem está incluído o conceito e o cálculo de volume. No outro módulo, *"Tudo o que Rola"*, aborda por completo cilindro, cone e esfera, incluindo o conceito e o cálculo de volume.

O livro *Matemática para o Ensino Médio(2002)* tem uma forma de apresentação do conteúdo Volume dos Sólidos, semelhante à do livro *Matemática (1996)*, pois aborda em um único capítulo denominado "Geometria Espacial", em sessões específicas e separadamente os tipos de sólidos, seus elementos, classificação, área de superfície e volume.

Quanto à forma de abordar o conceito de volume, o livro *Matemática na Escola Renovada(1973)* é bastante formal, define volume como uma função e usa teoremas, corolários e definições de maneira sistemática para demonstrar resultados ligados ao conceito de volume dos sólidos. Destaca-se nessa abordagem, o uso da Teoria de Conjuntos e o uso do Princípio de Cavalieri nas demonstrações e generalizações que visam obter as fórmulas de cálculo de volume dos sólidos estudados.

O livro *Matemática (1996)* apresenta uma abordagem baseada em deduções empíricas. Fazendo uso de figuras, estabelecendo comparações que envolvem implicitamente o conceito de semelhança de figuras e usando o Princípio de Cavalieri (apresentado como postulado) para justificar resultados, fornece as fórmulas que permitem calcular o volume dos sólidos, com exceção da esfera, cuja fórmula para o cálculo do volume é fornecida como postulado e o paralelepípedo, cujo cálculo do volume é apresentado por primeiro e a partir de um exemplo particular, também apoiado em figura.

O livro *Matemática – Projeto Escola e Cidadania para Todos (2004)* também apresenta uma abordagem empírica onde usa apenas a *idéia do Princípio de Cavalieri*, sem fazer referência a ele, para apresentar a fórmula que permite calcular o volume de prismas e, posteriormente repete o processo na apresentação da fórmula que permite calcular o volume do cilindro. Para a pirâmide e o cone, são propostas na abordagem experimentações que permitem conhecer a fórmula do cálculo do volume e, é via experimentação que se propõe também uma verificação da validade da fórmula que permite calcular o volume da esfera. Destaca-se nessa abordagem também, o uso de situações-problema e exemplos que indicam a presença da matemática na natureza.

O livro *Matemática para o Ensino Médio (2002)* tem uma abordagem baseada na apresentação direta das fórmulas de cálculo de volume dos sólidos, seguidas de exercícios resolvidos. A única exceção é a fórmula do cálculo do volume da pirâmide, cuja dedução é apresentada para o caso particular da pirâmide triangular e indicada como válida também para uma pirâmide qualquer.

Quanto aos exercícios propostos, os livros que estudamos nos dão indícios de que o número de exercícios que envolvem o conceito de volume dos sólidos não sofreu grandes oscilações ao longo dos anos, pois variam entre 38 e 46 nos livros estudados. Em contra partida, o número de tarefas identificadas nos exercícios quase dobrou: no livro de 1973 identificamos apenas 5 tarefas, enquanto nos demais livros identificamos 9 tarefas. Dentre todas as tarefas identificadas temos algumas comuns a mais de um livro e outras encontradas em apenas um deles, de maneira que ao todo foram identificadas 14 tarefas diferentes no estudo dos quatro livros. Em duas delas, o volume é ferramenta e sua medida é fornecida no enunciado do problema, são elas: “calcular a medida de algum elemento do sólido, conhecendo o volume” e, “calcular a área conhecendo o volume”. Entre os exercícios que apresentam outros tipos de tarefas, estão alguns em que o cálculo de volume é uma *subtarefa* necessária para que a tarefa própria do exercício seja cumprida, por exemplo, exercícios que têm por tarefa “calcular a capacidade de um sólido” ou, “calcular a massa de um sólido usando conceitos de volume e densidade”. A tarefa que se destaca é “calcular volume dos sólidos”, por estar presente na maior parte dos exercícios, nos quatro livros estudados e, os sólidos que se destacam nos exercícios que apresentam esta tarefa são os prismas (nos livros de 1996 e de 2002) e os cones (nos livros de 1973 e 2004).

Quanto à presença de figuras no enunciado dos exercícios que envolvem o conceito de volume, nosso estudo mostrou indícios de que ela é crescente ao longo dos anos. No livro *Matemática na Escola Renovada* de 1973, nenhum exercício apresenta figura no enunciado. No livro *Matemática* de 1996, 11 de 40 exercícios estudados apresentam figura no enunciado, e, nos livros atuais este número é ainda maior: 19 de 39 exercícios e, 25 de 46 exercícios, nos livros *Matemática – Projeto Escola e Cidadania para Todos* (2004) e *Matemática para o Ensino Médio* (2002), respectivamente.

4 ESTUDO DE UMA ATIVIDADE EM CLASSE

Com o objetivo de sondar algumas competências de estudantes do curso de Matemática – habilitação licenciatura, propomos três problemas para serem resolvidos em classe.

O estudo de três planos de curso anuais de escolas, nos mostrou que os conteúdos da Geometria Especial Métrica, dentre eles Volume dos Sólidos, são estudados na *terceira série* do Ensino Médio, o que nos levou a considerar que "Volume dos Sólidos" é estudado no Ensino Médio.

Um estudo de programas do Currículo do Curso de Matemática, nos permitiu saber que Volume dos Sólidos é conteúdo abordado na 1ª fase na disciplina Geometria Quantitativa e na 4ª fase na disciplina Laboratório de Matemática III. Além de que, pressupõe-se que as fases iniciais do Curso, segundo a proposta pedagógica do Curso de Matemática, dão conta dos conteúdos desenvolvidos no Ensino Médio, segundo uma formação matemática superior.

Com base nesta informação, optamos por sondar competências dos estudantes da 1ª fase e estudantes da 4ª fase do curso de matemática, sendo estes últimos estudantes que estão cursando a disciplina Cálculo I.

Por quê?

O estudo da resolução de Problemas destes grupos são indicativos das competências dos alunos que chegam na UFSC (1ª fase) e indicativo da evolução ao longo das fases iniciais do curso (4ª fase).

4.1 SONDAGEM

A sondagem consistiu da aplicação de três problemas em cada uma das turmas, em horário de aula normal cedido pelo professor da turma 1 (1ª fase) e da turma 2 (4ª fase).

Foram entregues as folhas com os problemas, o tempo dado para a resolução foi de cinqüenta minutos e foi solicitado ao professor para não auxiliar na resolução.

Ainda nestas folhas, foram feitas algumas questões sobre a vida acadêmica dos estudantes[15] – dados utilizados nas análises a posteriori – e, em parte delas, foram dadas várias fórmulas de Geometria Espacial, e dentre elas, estavam as que deveriam ser usadas na resolução dos problemas (folha completa no Anexo I).

Os problemas propostos para resolução foram os seguintes:

[15] As respostas referentes à questão n° 1 não foram utilizadas.

1) Um copinho de sorvete tem forma de um cone de 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro na base e tem, colocadas, duas colheradas esféricas de sorvete, também de 4 cm de diâmetro.

a) Se o sorvete derreter no cone, haverá transbordamento?
b) Quanto sobra ou quanto falta de sorvete?

2) A uma caixa d'água de forma cúbica com 1 metro de lado está acoplado um cano cilíndrico com 4cm de diâmetro e 50m de comprimento. Num certo instante, a caixa está cheia de água e o cano vazio. Solta-se a água pelo cano até que fique cheio. Qual o valor aproximado da altura da água na caixa no instante em que o cano ficou cheio?

3) Uma piscina em forma de bloco retangular, medindo 8m de comprimento, 6m de largura e 2m de profundidade, está completamente cheia. Quantos litros de água é preciso retirar da piscina para que o nível de água baixe 20 cm?

Em ambas as turmas os alunos estavam sentados em carteiras enfileiradas e os tipos de folhas foram distribuídos de maneira alternada (com fórmulas, sem fórmulas, e assim sucessivamente) para que tivéssemos, em cada uma das turmas, metade com acesso e metade sem acesso às fórmulas.

4.1.1 Análise à priori

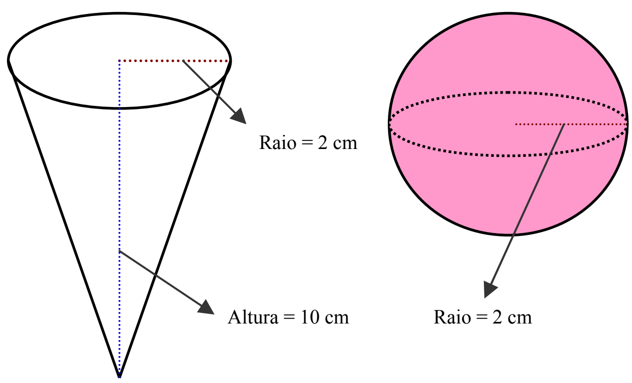
A seguir apresentamos a análise à priori de cada um dos problemas propostos para a atividade em classe, a qual consiste da resolução dos problemas, onde buscamos prever maneiras possíveis de resolução.

Problema 1:

Um copinho de sorvete tem forma de um cone de 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro na base e tem, colocadas, duas colheradas esféricas de sorvete, também de 4 cm de diâmetro. a) Se o sorvete derreter no cone, haverá transbordamento? b) Quanto sobra ou quanto falta de sorvete?

<u>Resolução:</u>

Primeiramente, traçamos figuras de estudo.



Em seguida calculamos o volume do cone e da esfera e, como são duas colheradas de sorvete o volume da esfera deve ser multiplicado por 2.

A comparação entre os valores obtidos como volume do cone e das duas esferas nos responde o *item a* e, a diferença entre eles responde o *item b*.

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi \cdot (2)^2 \cdot 10$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi \cdot 40 = \frac{40\,\pi}{3}\text{ cm}^3$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(2)^3$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 8 = \frac{32\pi}{3}\text{ cm}^3$$

Volume de duas colheradas de sorvete:

$$2 \cdot \frac{32\pi}{3}\text{ cm}^3 = \frac{64\pi}{3}\text{ cm}^3$$

$\frac{40\,\pi}{3}\text{ cm}^3 < \frac{64\pi}{3}\text{ cm}^3$ Logo, o volume do copinho é menor que o volume do sorvete então:

Resposta do item a : *Haverá transbordamento*.

$$\frac{64\pi}{3}\text{ cm}^3 - \frac{40\,\pi}{3}\text{ cm}^3 = \frac{24\pi}{3}\text{ cm}^3 = 8\,\pi\text{ cm}^3$$

Aproximando o valor de π por 3,14 temos:

$8 \cdot 3{,}14 = 25{,}12\text{ cm}^3$

Ou ainda:

1 colherada de sorvete tem volume : $\frac{32\pi}{3}\text{ cm}^3$

x de uma colherada tem volume : $8\,\pi\text{ cm}^3$

Usando regra de três: $\frac{32\pi}{3}x = 8\pi \quad \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

Possibilidades de resposta para o item b:

1) *Sobra 8 π cm³ de sorvete.*
2) *Sobra aproximadamente 25,12 cm³ de sorvete.*
3) *Sobra $\frac{3}{4}$ de uma colherada de sorvete.*

Notemos que para a resolução do item b, formas diferentes são possíveis para expressar a resposta.

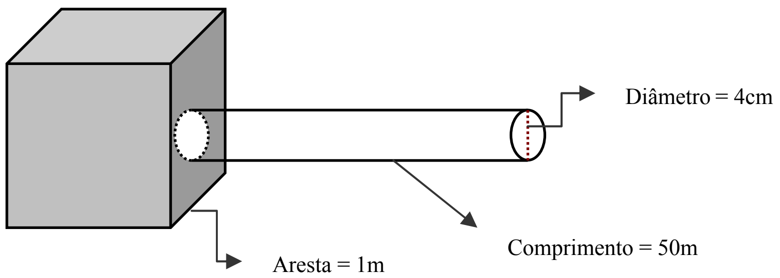
Problema 2:

A uma caixa d'água de forma cúbica com 1 metro de lado está acoplado um cano cilíndrico com 4cm de diâmetro e 50m de comprimento. Num certo instante, a caixa está cheia de água e o cano vazio. Solta-se a água pelo cano até que fique cheio. Qual o valor aproximado da altura da água na caixa no instante em que o cano ficou cheio?

Foram identificadas duas maneiras de resolver este problema, embora o início da resolução seja o mesmo para ambas.

Resolução:

Traçamos uma figura de estudo.



Nas duas maneiras de resolver o problema que identificamos, é necessário calcular o volume da caixa (cubo) e o volume do cano (cilindro).

$V_{cubo} = a^3$

$V_{cubo} = (1m)^3 = 1m^3$ que é o volume de água na caixa cheia.

$V_{cilindro} = \pi \cdot R^2 \cdot H$

$V_{cilindro} = \pi \cdot (0{,}02m)^2 \cdot 50m$

$V_{cilindro} = 0{,}02\pi \ m^3$

$V_{cilindro} \cong 0{,}0628m^3$ que é o volume máximo de água que o cano pode conter.

Agora podemos proceder de duas maneiras diferentes:

1) Calculamos o volume (V) de água que ficou na caixa e depois a altura (h) quando a água está neste segundo nível:

$V = V_{cubo} - V_{cilindro} = 0{,}9372 \ m^3$

A altura da água na caixa é a altura de um paralelepípedo de mesma área da base que a caixa cúbica ($1m^2$) ou seja, um paralelepípedo de dimensões: a = 1m, b = 1m, c = h (desconhecida).

$V = a \cdot b \cdot c$

$0{,}9372 \ m^3 = 1m \cdot 1m \cdot h$

$h = 0{,}9372$ m ou 93,7 cm aproximadamente.

2) Calculamos a altura (h’) correspondente ao volume de água que saiu da caixa e depois subtraímos da altura da caixa o valor encontrado. O resultado será a altura (h) do nível final de água.

O volume de água que saiu da caixa corresponde ao volume de um paralelepípedo de medidas a = 1m, b = 1m , c = h’ .

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$0{,}0628\text{m}^3 = 1\text{m} \cdot 1\text{m} \cdot h'$$

$$h' = 0{,}0628\text{m} \text{ ou } 6{,}28\text{cm aproximadamente.}$$

Como a altura da caixa é 1m, vem:

$$h = 1\text{m} - 0{,}0628\text{m}$$

$$h = 0{,}9372\text{m ou } 93{,}7\text{cm aproximadamente.}$$

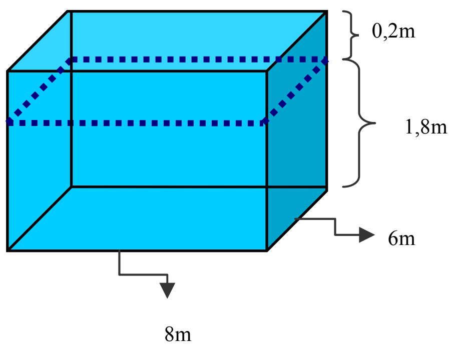
Resposta do problema: *No instante em que o cano ficou cheio o valor aproximado da altura da água na caixa é de 0,937m ou 93,7cm.*

Problema 3:

Uma piscina em forma de bloco retangular, medindo 8m de comprimento, 6m de largura e 2m de profundidade, está completamente cheia. Quantos litros de água é preciso retirar da piscina para que o nível de água baixe 20 cm?

Foram identificadas três maneiras de resolução para este problema.

Traçamos uma figura de estudo.



Resolução 1:

Notemos que o volume que deve ser retirado da piscina corresponde ao volume de um bloco retangular (paralelepípedo) de dimensões a = 8m, b = 6m e c = 0,2m, transformado em litros.

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 8\text{m} \cdot 6\text{m} \cdot 0{,}2\text{m}$$

$$V = 9{,}6\text{m}^3$$

Sabendo que $1m^3$ = 1000 litros, V = 9600 litros.

Resolução 2:

Calculamos o volume inicial da piscina (V_0), e calculamos o volume (V_1) considerando o nível de água mais baixo 20cm. Depois subtraímos V_1 de V_0 e fazemos a transformação do volume em litros.

$V_0 = 8m . 6m . 2m$

$V_0 = 96m^3$

$V_1 = 8m . 6m . 1{,}8m$

$V_1 = 86{,}4m^3$

$V = V_0 - V_1 = 96m^3 - 86{,}4m^3 = 9{,}6m^3$

Sabendo que $1m^3$ = 1000 litros, V = 9600 litros.

Resolução 3:

Calculamos o volume inicial da piscina (V_0), e calculamos o volume (V_1) considerando o nível de água mais baixo 20cm. Depois fazemos a transformação dos volumes V_1 de V_0 em litros. Por último, subtraímos V_1 de V_0.

$V_0 = 8m . 6m . 2m$

$V_0 = 96m^3$ = 96000 litros

$V_1 = 8m . 6m . 1{,}8m$

$V_1 = 86{,}4m^3$ = 86400 litros

$V = V_0 - V_1$ = 96000 litros – 86400 litros = 9600 litros.

Resposta do problema: *É preciso retirar da piscina 9600 litros de água para que o nível de água baixe 20 cm.*

Observe que a variação das resoluções consiste em perceber que o volume de água a ser retirado corresponde ao de um paralelepípedo cujas medidas estão dadas no enunciado do problema (resolução 1) ou, de maneira indireta, observar que o volume a ser retirado é a diferença entre os volumes de dois paralelepípedos que correspondem ao volume de água na caixa em dois momentos (resoluções 2 e 3). É necessário ainda que se transforme a medida de volume em medida de capacidade e a etapa em que esta transformação é feita, diferencia a resolução 2 da resolução 3.

4.1.2 Análise a posteriori

Apresentamos aqui os resultados obtidos da análise dos dados coletados em cada uma das turmas.

Nesta análise mantivemos as duas turmas.

Na turma 1 identificamos subgrupos em função da resolução dada e em função da folha recebida, com fórmulas ou sem fórmulas.

Na turma 2 identificamos subgrupos em função das disciplinas cursadas e em função da folha recebida, com fórmulas ou sem fórmulas.

4.1.2.a Alunos da 1ª Fase do Curso de Licenciatura em Matemática (Turma 1)

Contamos com a participação de 54 alunos de uma turma que estava cursando Geometria Quantitativa e que ainda não havia estudado Volume dos Sólidos nesta disciplina até o momento da pesquisa.

Observando as respostas dadas no questionário, percebemos que 7 destes 54 alunos estão cursando a disciplina Laboratório de Matemática III e 1 dentre os 54 já cursou esta disciplina.

Tendo em vista que nesta turma de primeira fase o objetivo era de observar os conhecimentos trazidos do Ensino Médio, excluímos estes 8 alunos de nossa população de estudo, ficando com 46 do total de 54 para análise da resolução dos problemas.

Uma primeira análise superficial, nos permitiu dividir estes 46 alunos em três grupos:

Grupo A : alunos que não apresentaram resoluções para os problemas;

Grupo B: alunos que formularam procedimentos de resolução, embora tenham tido insucesso;

Grupo C: alunos que acertaram pelo menos um dos problemas;

Estudo das resoluções

Grupo A – alunos que não apresentaram resoluções para os problemas

Este grupo se constitui de 14 dos 46 alunos em estudo. Dos 14, 9 receberam a atividade sem as fórmulas para a resolução dos problemas e 5 receberam a atividade com as fórmulas.

Dos 9 alunos que não receberam fórmulas observou-se que:

2 de 9 entregaram em branco a folha destinada à resolução dos problemas.

3 de 9 registraram: *"sem fórmula impossível"*, *"não lembro das fórmulas de Geometria Espacial"*, *"sem formulário não sei fazer"*

4 de 9 apenas traçaram figuras de estudo.

Dos 5 alunos que receberam as fórmulas, observou-se que nenhum deles conseguiu equacionar os problemas, embora 2 de 5 tenham apresentado figuras de estudo.

Grupo B – alunos que formularam procedimentos de resolução, embora tenham tido insucesso

Este grupo se constitui de 19 dos 46 alunos em estudo. Destes 19, 10 receberam a atividade sem as fórmulas para a resolução dos problemas e 9 receberam a atividade com as fórmulas.

. Vamos analisar separadamente o que observamos nos dois casos, incluindo os tipos de erros.

Dos 10 alunos que resolveram os problemas sem as fórmulas, observamos que:

9 de 10 traçaram figuras de estudo.

5 de 10 tentaram resolver o problema de n°1.

7 de 10 tentaram resolver o problema de n°2.

8 de 10 tentaram resolver o problema de n°3.

Um estudo mais cuidadoso das resoluções dos problemas apresentadas por estes 10 alunos, nos permitiu identificar os seguintes erros:

Nas resoluções do problema 1 foram identificados *erros de formulação*, onde alunos calcularam área de triângulo de base 4cm (diâmetro da base do cone) e altura 10 cm (altura do cone) e não completaram a resolução.

Outro *erro ligado à interpretação do problema* foi visto em resoluções onde o aluno compara a altura do cone com a soma dos diâmetros das colheradas esféricas para responder o problema.

Houve ainda um *erro ligado à retirada dos dados do problema*: O aluno mostra que conhece e explicita corretamente as fórmulas que devem ser usadas na resolução do problema mas erra ao usar a medida do raio da esfera como 4cm, sendo que foi dito no problema que o diâmetro é que tem esta medida.

Quanto ao problema 2, foram identificados erros por *desconhecimento da fórmula* onde um aluno explicita como volume do cubo V = L . 3 e para o cilindro V=h.d ; *erro no tratamento dos dados (ligados à transformação de unidades):* como exemplo citamos um caso onde a medida usada para diâmetro do cano foi de 0,4m sendo que o problema fornecia como medida 4cm, e ainda um outro caso, onde foram usadas as medidas "50" e "4" ignorando que foram dadas no problema em unidades de medida diferentes (50m e 4cm). Neste mesmo caso houve ainda *erro de operações* para chegar ao resultado final.

Foram identificados também, *erros na retirada dos dados* do problema, onde alunos consideraram o comprimento do cano com 0,5m ou 50cm quando foi fornecido 50m no enunciado do problema.

Nas resoluções do problema 3, encontramos erros ligados ao desconhecimento da relação entre a medida de volume *m^3* e a medida de capacidade *litro*. Mais precisamente, 4 dos 8 que tentaram resolver este problema cometeram este tipo de erro. Dois deram como resposta 96 litros e dois responderam 9,6 litros; quando o correto era 9.600 litros.

Houve também *erros de operação*. Por exemplo: o resultado da operação de multiplicação 8 . 6 . 2 como sendo igual a 90 para determinar o volume inicial da piscina.

Quanto aos 9 alunos que resolveram os problemas com o auxílio das fórmulas, observamos que:

7 de 9 traçaram figuras de estudo.

6 de 9 tentaram resolver o problema de n°1.

5 de 9 tentaram resolver o problema de n°2.

9 de 9, ou seja todos, tentaram resolver o problema de n°3.

Um estudo mais cuidadoso das resoluções dos problemas apresentadas por estes 9 alunos, os quais possuíam fórmulas, nos permitiu a identificação dos seguintes erros:

Nas resoluções do problema 1, um *erro na retirada dos dados* é notório: 4 de 6 que tentaram resolver este problema, consideraram apenas uma colherada de sorvete quando o correto, segundo o enunciado do problema, era considerar duas colheradas. 2 destes 4 apresentaram também *erros de operação* ao usar as fórmulas de volume, apesar de terem escolhido a fórmula correta.

Encontramos também um *erro de interpretação* ou por *uso incorreto de fórmulas* onde foi usada a fórmula da área do cone, e, um problema não concluído onde foi calculado apenas o volume do cone. Neste último caso, *não saber interpretar o problema* pode ter sido também a causa da resolução não concluída.

Nas resoluções do problema 2, encontramos *erros de operação* do tipo: considerar $(0,02)^2=0,04$; errar o volume do cilindro mesmo usando a fórmula certa, por cometer erro na operação de multiplicação.

Erros de *transformação de unidade*. Por exemplo:Considerar 50m como 500cm.

Erro de interpretação. Por exemplo: Considerar o volume do cano cilíndrico como $1m^3$ e substituir na fórmula do volume do cilindro, para tentar encontrar a resposta do problema, quando se pedia uma altura referente à caixa.

Nas resoluções do problema 3, que todos os 9 alunos tentaram resolver, encontramos os seguintes tipos de erros:

Erros de operação. Por exemplo: 8 . 6 . 2 = 92 (cálculo do volume inicial da piscina) sendo que o correto é 96.

Erro de transformação de unidade. Exemplos:Considerar 20cm como 0,02m; transformar 9,6m^3 em litros de maneira incorreta (talvez por não perceber que a relação entre m^3 e litros foi dada no formulário).

Erro de Interpretação. Um aluno entendeu que deveria calcular a quantidade de água a ser retirada para que o nível de água baixasse "de 20cm" e não apenas 20cm como diz o problema. Em um outro caso, foi diminuído 20cm na largura e não na profundidade da piscina.

De modo geral, no Grupo B, encontramos erros de interpretação, de operação, erros ligados à retirada de dados dos problemas e no tratamento dos dados.

Em particular constatamos erros por desconhecimento da fórmula em algumas resoluções de alunos que receberam a atividade sem as fórmulas. E, nas resoluções de alunos que receberam a atividade com as fórmulas, encontramos alguns erros por uso incorreto das mesmas.

Grupo C – alunos que acertaram pelo menos um dos problemas

Este grupo contém 13 do total de 46 alunos. Como eles acertaram pelo menos um dos problemas, os estudamos de maneira mais detalhada, identificando um a um os problemas resolvidos corretamente e que tipo de erro os levou às resoluções incorretas.

Começamos identificando que 4 de 13 alunos receberam a folha de atividade sem as fórmulas e 9 de 13 receberam a folha com as fórmulas.

Do total de 13, 8 alunos apresentaram figuras de estudo em suas resoluções.

Para que fosse possível identificar uma a uma das folhas de resolução, as numeramos de 1 a 13, de forma que as quatro folhas que não tinham fórmulas receberam numeração de 1 a 4 e, as nove restantes que possuíam formulário receberam numeração de 5 a 13.

Usando a numeração identificamos os alunos que acertaram cada um dos problemas conforme a tabela abaixo:

	Problema 1	Problema 2	Problema 3
Folhas c/ resolução correta do problema	2, 5, 6, 7, 8, 10, 11	4, 7, 11, 13	1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13

Conforme a tabela vemos que dos alunos que não tinham fórmulas (com folhas numeradas de 1 a 4):

1 de 4 acertou o problema 1 (folha n°2).

1 de 4 acertou o problema 2 (folha n°4).

2 de 4 acertaram o problema 3 (folhas de n°s 1 e 3).

Dos alunos que receberam fórmulas (folhas numeradas de 5 a 13) temos:

6 de 9 acertaram o problema 1 (folhas de n°s 5, 6, 5, 8, 10 e 11)

3 de 9 acertaram o problema 2 (folhas de n°s 7, 11, 13)

7 de 9 acertaram o problema 3 (folhas de n°s 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13)

Observando a tabela é possível notar também que do total de 13 apenas 2 alunos acertaram todos os problemas e ambos tinham o auxílio do formulário (n° 7 e n°11), uma das resoluções pode ser vista no anexo II.A (p.94).

Podemos nos perguntar se o ensino de sólidos geométricos, quando realizado no Ensino Médio, centra-se na aplicação de fórmulas.

Vejamos a seguir os erros cometidos em cada problema por estes alunos. Para tanto será usada a numeração das folhas.

Erros cometidos nos problemas por alunos que não tinham o auxílio das fórmulas:

Vale acrescentar que todos tentaram resolver todos os problemas.

Problema 1:

O aluno cuja folha identificamos pelo número 1,cometeu neste problema um *erro por desconhecimento de fórmula*, calculou o volume da esfera como sendo o produto do valor de π pelo raio da esfera ao cubo.

O aluno da folha identificada pelo número 3, apresentou valores para o volume do copo (125,6 cm^3) e da colherada (12,56 cm^3), mas não apresentou os cálculos que o levaram a estes números.

O aluno da folha identificada pelo número 4, calculou apenas o volume do cone, podemos supor que não conseguiu interpretar o problema e por isso não completou a resolução, nem forneceu resposta.

Problema 2:

O aluno cuja folha foi identificada pelo número 1 cometeu um *erro na retirada dos dados do problema*: considerou o comprimento do cano igual a 50cm, sendo que o correto era 50m e ainda um *erro de interpretação do problema*: calculou a raiz cúbica do volume final para encontrar a altura da caixa.

O aluno cuja folha foi identificada pelo número 2 cometeu um *erro por desconhecimento de fórmula*, calculou o volume do cano como sendo um terço do produto do comprimento do cano pelo diâmetro do cano pelo valor de π.

O aluno cuja folha foi identificada pelo número 3, calculou o volume final de água na caixa, mas não a altura pedida no problema, ou seja, não completou a resolução.

Problema 3:

O aluno cuja folha foi identificada pelo número 2 cometeu um *erro de operação* ao calcular o volume do paralelepípedo de altura 1,8m escreveu: V = 8 . 6 . 1,8 = 78,4 e o resultado correto desta operação é 86,4 . Esse erro comprometeu todo o restante da resolução do problema.

O aluno da folha identificada pelo número 4, fez os cálculos corretos mas respondeu incorretamente o problema. Deu como resposta 9,6m^3 sendo que a pergunta se referia a uma quantidade em litros.

Já no estudo das resoluções dos alunos[16], cuja folha de atividade continha fórmulas, identificamos os seguintes erros:

Problema 1:

O aluno cuja folha foi identificada pelo número 13, mesmo tendo o formulário à disposição, calculou o volume do cone usando " $A = \frac{1}{4} . \pi .d^2$ " (Anexo II.B, p.96)

Problema 2:

Os alunos de folhas identificadas pelos números 5 e 6 cometeram erro na retirada dos dados do problema por considerar o comprimento do cano igual a 50cm, ao invés do correto: 50m.

O aluno da folha de número 8, cometeu um erro de interpretação que pode ser percebido na figura de estudo feita por ele e calculou o *"volume do cilindro até 1 metro"*, por ser esta a altura da caixa (Anexo II.C, p.99)

O aluno de folha identificada pelo número 10, cometeu um erro *por uso incorreto de fórmula*. Usou para calcular o volume do cano cilíndrico, a fórmula do volume do cone.

Problema 3:

O aluno, cuja folha foi identificada pelo n° 8, *errou na formulação da resolução do problema*: considerou que o volume de água a ser retirada da piscina equivale ao volume de um paralelepípedo de mesmo comprimento e profundidade da piscina e com largura 0,2m, quando o correto seria considerar esta medida na profundidade (Anexo II.C, p.97).

O aluno cuja folha foi identificada pelo número 10, fez os cálculos corretos mas respondeu incorretamente o problema. Deu como resposta 9,6m^3 sendo que a pergunta se referia a uma quantidade em litros.

[16] Os alunos cujas folhas foram identificadas pelos números 9 e 12 não resolveram os problemas 1 e 2, por isso não estão identificados na tabela, nem na descrição dos erros.

Concluímos que apesar do acerto de alguns problemas, no estudo das resoluções deste grupo identificamos erros de interpretação e na retirada de dados dos problemas, tanto por alunos que receberam a atividade com fórmulas, quanto por alunos que não as receberam.

Em particular, identificamos erros por desconhecimento da fórmula e erros de operação em resoluções de alunos que receberam a atividade sem fórmulas. Nas resoluções de alunos que dispunham de fórmulas encontramos erros por uso incorreto das mesmas e erro na formulação da resolução de um problema.

Conclusão do Estudo das Resoluções da Turma 1

O estudo das resoluções da turma 1, constituída de alunos da primeira fase do curso de Licenciatura em Matemática nos revelou que:

9 de 46 alunos dizem que sem o auxílio de fórmulas não conseguem resolver problemas de volume dos sólidos e não deixam pistas de como procederiam na resolução se tivessem fórmulas à disposição, pois entregaram a folha da atividade totalmente em branco ou, no máximo fizeram alguma figura de estudo.

Nas resoluções de alunos que tentaram resolver os problemas com insucesso, os tipos de erros encontrados foram de interpretação do problema, de operação, bem como na retirada dos dados do problema, no tratamento dos dados e ainda por uso incorreto de fórmulas (entre os que as receberam) ou por desconhecimento de fórmulas (entre os que não as receberam).

30 de 46 alunos, apresentaram alguma representação ilustrativa (figura de estudo) em suas anotações.

Apenas 2 de 46 alunos em estudo, acertaram os três problemas propostos e ambos receberam a atividade com fórmulas.

Com relação às resoluções corretas de cada problema, obtivemos os seguintes resultados:

7 para o problema 1 (6 resoluções com o auxílio das fórmulas e 1 resolução sem o auxílio das fórmulas);

4 para o problema 2 (3 resoluções com o auxílio das fórmulas e 1 resolução sem o auxílio das fórmulas);

9 para o problema 3 (7 resoluções com o auxílio das fórmulas e 2 resoluções sem o auxílio das fórmulas);

4.1.2.b Alunos da 4ª fase do Curso de Licenciatura em Matemática (Turma 2)

41 alunos da turma de Cálculo I participaram da atividade. Em nossa análise excluímos os resultados de um aluno que não é do curso de Licenciatura em Matemática e faz a disciplina como aluno ouvinte.

Dividimos o grupo de 40 estudantes em quatro subgrupos em função das disciplinas cursadas e da folha de atividade recebida (com fórmulas ou sem fórmulas).

Estudando as respostas dadas no questionário, a divisão dos grupos em função da disciplina cursada foi a seguinte:

Grupo D: alunos que já cursaram apenas a disciplina Geometria Quantitativa;

Grupo E: alunos que já cursaram apenas a disciplina Laboratório de Matemática III;

Grupo F: alunos que já cursaram Geometria Quantitativa e Laboratório de Matemática III;

Grupo G: Alunos que ainda não cursaram completamente nem Geometria Quantitativa, nem Laboratório de Matemática III;

Estudo das resoluções

Grupo D: alunos que já cursaram apenas a disciplina Geometria Quantitativa[17]

Este grupo se constitui de 18 dos 40 alunos em estudo da turma 2. Destes 18, 8 receberam a folha da atividade sem fórmulas e 10 receberam a folha com fórmulas.

Neste grupo, todos os alunos traçaram figuras de estudo em suas resoluções.

No estudo das resoluções dos 8 alunos que não tinham fórmulas notamos que:

Com relação ao problema 1:

4 de 8 não resolveram o problema;

3 de 8 resolveram de modo incorreto;

1 de 8 acertou o problema;

Com relação ao problema 2:

3 de 8 não resolveram o problema;

4 de 8 resolveram de modo incorreto;

1 de 8 acertou o problema;

Com relação ao problema 3:

6 de 8 resolveram de modo incorreto;

2 de 8 acertaram o problema;

Destacamos que nenhum aluno acertou os três problemas.

[17] Os alunos deste grupo responderam que ainda não cursaram ou que estão cursando Laboratório de Matemática III.

Um estudo mais cuidadoso das resoluções desses alunos que não receberam fórmulas e que constituem parte do *Grupo D* nos permitiu identificar os seguintes erros:

Nas resoluções do problema 1: encontramos duas resoluções que só apresentaram o volume do copinho por *desconhecimento da fórmula* que permite calcular o volume da esfera e, um outro erro por *desconhecimento de fórmula,* onde um aluno calculou o volume do copinho (cone) como sendo o produto da área da base pela altura.

Nas resoluções do problema 2: erro no *tratamento dos dados* e de operação que resultou no valor incorreto do volume do cano. Dois *erros de interpretação*: em um deles foi calculada a altura correspondente ao volume de água que *saiu* da caixa, no outro o aluno deu o volume de água que ficou na caixa e não a altura correspondente ao nível da água como foi pedido. Identificamos também um erro na retirada dos dados, onde um aluno considerou o raio do cano igual a 4cm (medida do diâmetro).

Nas resoluções do problema 3: dois alunos não responderam corretamente o problema porque deram a resposta em m^3, sendo que foi pedido o volume em litros. Em outro caso foi calculado apenas o volume inicial de água da piscina, onde pudemos supor que por não interpretar o problema corretamente, o aluno o resolveu de maneira incompleta. Outro erro de interpretação ocorreu em uma resolução onde o volume final de água da piscina foi dado como resposta para o volume que deveria ser retirado. Identificamos também dois erros de *operação* de multiplicação cometidos no cálculo do volume final de água da piscina.

No estudo das resoluções dos 10 alunos que receberam a atividade com as fórmulas notamos que:

Com relação ao problema 1:

1 de 10 não resolveu o problema;

4 de 10 resolveram de modo incorreto;

5 de 10 acertaram o problema;

Com relação ao problema 2:

1 de 10 não resolveu o problema;

7 de 10 resolveram de modo incorreto;

2 de 10 acertaram o problema;

Com relação ao problema 3:

5 de 10 resolveram de modo incorreto;

5 de 10 acertaram o problema;

Vale destacar que na descrição acima, estão incluídos 2 alunos que acertaram os três problemas.

Ao estudarmos as resoluções destes alunos que também fazem parte do *Grupo D,* identificamos os seguintes erros:

Nas resoluções do problema 1: erros de *operação* levaram a valores incorretos para o volume do copinho e do sorvete, mesmo usando as fórmulas corretas. Houve ainda um erro de operação no cálculo da diferença que responde o item b do problema. Identificamos também um erro na *retirada de dados do problema*, onde um aluno considerou somente uma colherada de sorvete em sua resolução quando o correto eram duas.

Nas resoluções do problema 2 os erros foram muitos e bem diversificados: *uso incorreto da fórmula* do cone para calcular o volume do cano cilíndrico, erro de *operação* por não multiplicar pelo π ao usar a fórmula do volume do cilindro, erro na *retirada dos dados do problema* por considerar o raio do cano igual a 4cm (medida do diâmetro), erro *no tratamento de dados* por considerar 2cm = 0,2m e em outro caso por considerar o raio e o comprimento do cano na mesma unidade de medida sem fazer as devidas transformações.

Nas resoluções do problema 3: erros de *operação* de multiplicação na aplicação da fórmula do volume do paralelepípedo, erro *no tratamento dos dados* por considerar $9{,}6m^3$ diretamente igual a 9,6 litros. Cálculo desnecessário da área de superfície da piscina (paralelepípedo).

Grupo E: alunos que *já cursaram* apenas a disciplina Laboratório de Matemática III[18]

Este grupo se constitui de 7 dos 40 alunos em estudo da turma 2. Destes 7, 4 receberam a folha da atividade sem fórmulas e 3 receberam a folha com fórmulas.

No estudo das resoluções dos 4 alunos que não dispunham das fórmulas, notamos que todos traçaram figuras de estudo e, estudando separadamente os resultados encontrados em cada problema notamos que:

1 de 4 apresentou cálculos sem formulação (ver Anexo II.F, p.101) nos três problemas de modo que não foi possível identificar os tipos de erros cometidos. Quanto aos demais alunos, obtiveram os seguintes resultados:

Com relação ao problema 1:

1 de 4 resolveu de modo incorreto;

2 de 4 não resolveram;

Com relação ao problema 2:

2 de 4 resolveram de modo incorreto;

1 de 4 não resolveu;

Com relação ao problema 3:

---

[18] Os alunos deste grupo responderam que ainda não cursaram ou que estão cursando Geometria Quantitativa.

2 de 4 resolveram de modo incorreto;

1 de 4 não resolveu;

Erros

Vamos detalhar os tipos de erros encontrados nas resoluções incorretas:

Na resolução do problema 1, o erro cometido foi na *retirada de dados*. O aluno considerou o raio do cone igual a 4 cm, sendo que o diâmetro é que tinha essa medida e não completou a resolução do problema porque não sabia, segundo ele, a fórmula do volume da esfera. Escreveu: “comparar volume, se necessário subtrair”, mostrando saber o procedimento correto para a resolução.

Nas resoluções do problema 2, encontramos dois erros: um deles, por *desconhecimento da fórmula*, onde o aluno calculou o volume do cano multiplicando o comprimento pela medida do diâmetro e anulou a resolução. O outro foi um *erro de operação*: o aluno expressou corretamente a fórmula do volume do cilindro mas não multiplicou pelo π, para encontrar o valor correto ($0{,}628m^3$), obtendo $0{,}20m^3$.

Nas resoluções do problema 3, os erros foram: no *tratamento dos dados* (relação entre medidas de volume e capacidade): um aluno escreveu: $9{,}6m^3 = 960$ litros. Na formulação da resolução: usou a medida final de altura da água na caixa como sendo 1,6m e o correto seria 1,80m já que se pede para baixar o nível em 20cm.

No estudo das resoluções dos 3 alunos que tinham fórmulas, notamos que todos traçaram figuras de estudo e obtivemos os seguintes resultados nas resoluções dos problemas:

Com relação ao problema 1:

2 de 3 acertaram o problema;

1 de 3 resolveu de modo incorreto;

Com relação ao problema 2:

2 de 3 resolveram de modo incorreto;

1 de 3 não resolveu;

Com relação ao problema 3:

1 de 3 acertou o problema;

2 de 3 resolveram de modo incorreto;

Erros

Vamos detalhar os tipos de erros encontrados nas resoluções incorretas:

Na resolução do problema 1: O aluno calculou apenas o volume do copinho e respondeu que não haveria transbordamento, podemos supor que houve um *erro de interpretação* pois ele deveria calcular também o volume do sorvete e estabelecer uma comparação.

Nas resoluções do problema 2: Erro de *transformação de unidades*: 50m = 500cm e erro de *interpretação*: para calcular o volume de água da caixa, foi usado 4cm como medida da altura da caixa.

Nas resoluções do problema 3: houve o seguinte erro no tratamento dos dados: 20cm = $0{,}2m^3$= 200litros e um erro de *interpretação* que levou aos seguintes cálculos:

96000 – 200 = 95800 litros, que foi dado como resposta final do problema. Em outra folha de resolução foi calculado apenas o volume inicial da caixa, onde supostamente o aluno não soube interpretar o problema, e o resolveu de maneira incompleta.

Grupo F: alunos que *já cursaram* Geometria Quantitativa e Laboratório de Matemática III[19]

Este grupo se constitui de 9 dos 40 alunos da turma 2 em estudo. Destes 9, 4 receberam a atividade sem as fórmulas para a resolução dos problemas e 5 receberam a atividade com as fórmulas.

No estudo das resoluções dos 4 alunos que não tinham fórmulas notamos que:

3 de 4 fizeram figuras de estudo e, estudando separadamente os resultados encontrados em cada problema, constatamos:

Com relação ao problema 1:

2 de 4 resolveram de modo incorreto;

2 de 4 não resolveram;

Com relação ao problema 2:

2 de 4 resolveram de modo incorreto;

2 de 4 não resolveram;

Com relação ao problema 3:

2 de 4 acertaram o problema;

2 de 4 resolveram de modo incorreto;

Um estudo mais cuidadoso das resoluções incorretas apresentadas por estes alunos de grupo F que não dispunham das fórmulas, nos permitiu a identificação dos seguintes erros:

Nas resoluções do problema 1, encontramos erros por *desconhecimento da fórmula*: um aluno usou as fórmulas de área do triângulo e do círculo, mas estava consciente do erro pois disse: "... a maior dúvida é relembrar a fórmula do volume do cone..." (ver Anexo II.E, p.100). Um outro aluno usou a fórmula do volume do cilindro no cálculo do volume do copinho (em forma de cone) e usou para volume da esfera: $V=\pi.r^3$.

[19] Os alunos deste grupo assinalaram o item b (já cursou) nas perguntas de números 2 e 3 no questionário.

Nas resoluções do problema 2, encontramos erros de operação: $2cm^2 = 0{,}04m^2$. em outro caso o aluno explicitou o volume do cano (cilindro) corretamente em um primeiro momento mas, ao final dos cálculos não multiplicou por π.

Nas resoluções do problema 3, os erros foram de interpretação e de operação. O *erro de interpretação* foi ter calculado o volume de água a ser retirado para que o nível de água na piscina "chegasse a 20cm", quando o correto era o volume a ser retirado para "baixar 20cm". O *erro de operação* foi na multiplicação de 6 por 8 por 1,8 que resultou em 80,4 sendo que o correto é 86,4.

Nas resoluções dos 5 alunos que tinham as fórmulas notamos que 3 de 5 fizeram figuras de estudo e que 1 aluno acertou os três problemas. Estudando separadamente os resultados encontrados em cada problema temos:

Com relação ao problema 1:

1 de 5 não resolveu;

2 de 5 resolveram de modo incorreto;

2 de 5 acertaram o problema;

Com relação ao problema 2:

1 de 5 não resolveu;

3 de 5 resolveram de modo incorreto;

1 de 5 acertou o problema;

Com relação ao problema 3:

5 de 5, ou seja, todos acertaram o problema;

Um estudo mais cuidadoso das resoluções incorretas apresentadas por estes alunos de grupo F que tinham o auxílio das fórmulas, nos permitiu a identificação dos seguintes erros:

Nas resoluções do problema 1, duas pessoas cometeram o mesmo *erro na retirada dos dados:* Consideraram apenas uma bola de sorvete, quando o enunciado do problema dizia que eram duas.

Nas resoluções do problema 2, um erro foi de *operação* por não multiplicar pelo π ao usar a fórmula do volume do cilindro. Outro erro foi no *tratamento de dados* onde um aluno considerou $1m^3$ = 3000 litros e, um terceiro erro foi de *interpretação*, onde um aluno destacou como resposta do problema o volume do cano, que era apenas um elemento da resolução como um todo.

Grupo G: Alunos que ainda não cursaram completamente nem Geometria Quantitativa, nem Laboratório de Matemática III[20]

[20] Estes alunos responderam que ainda não cursaram ou estão cursando estas disciplinas (assinalaram alternativas a e/ou c no questionário para as questões 2 e 3)

Este grupo se constitui de 6 dos 40 alunos da turma 2 em estudo. Destes 6 alunos, 3 receberam a atividade sem as fórmulas para a resolução dos problemas e 3 receberam a atividade com as fórmulas.

Neste grupo, todos os alunos traçaram figuras de estudo.

Ao estudarmos as resoluções dos alunos que resolveram os problemas sem o auxílio das fórmulas,obtivemos os seguintes resultados:

Com relação ao problema 1:

2 de 3 resolveram de modo incorreto;

1 de 3 não resolveu;

Com relação ao problema 2:

2 de 3 resolveram de modo incorreto;

1 de 3 não resolveu;

Com relação ao problema 3:

1 de 3 acertou o problema;

2 de 3 resolveram de modo incorreto;

Vamos detalhar os tipos de erros encontrados nas resoluções incorretas:

Nas resoluções do problema 1, encontramos erros por *desconhecimento de fórmulas*: cálculo do volume do cone expresso por $V=\frac{A_{b.}h}{2}$ e, em outro caso o volume da esfera expresso por $V = \pi \cdot R^3$.

Nas resoluções do problema 2, encontramos erros de *operação*: $(0{,}02)^2 = 0{,}04$. E, em outro caso, o aluno expressa corretamente a fórmula do volume do cilindro mas esquece de multiplicar pelo π ao fazer as contas, além de cometer um outro erro de subtração.

Nas resoluções do problema 3, encontramos um erro de operação:

“800 . 600 . 180 = 82.400.000”,quando o correto seria 86.400.000 . E um erro por *desconhecimento da fórmula* onde o aluno escreve: $A_{\text{piscina}} = 8 \cdot 6 \cdot 2 = 96m^3$ e questiona: “qual o volume?” não completando a resolução.

Ao estudarmos as resoluções dos alunos que resolveram os problemas com o auxílio das fórmulas,obtivemos os seguintes resultados:

Com relação ao problema 1:

1 de 3 acertou o problema;

2 de 3 resolveram de modo incorreto;

Com relação ao problema 2:

1 de 3 acertou o problema;

1 de 3 resolveu de modo incorreto;

1 de 3 não resolveu;

Com relação ao problema 3:

2 de 3 acertaram o problema;

1 de 3 resolveu de modo incorreto;

Destacamos aqui que os acertos dos problemas 1 e 2 e um dos acertos do problema 3, corresponde a um único aluno que resolveu corretamente os três problemas.

Vamos detalhar os tipos de erros encontrados nas resoluções incorretas:

Nas resoluções do problema 1, encontramos um erro na *retirada dos dados do problema*: um aluno considerou apenas uma colherada de sorvete, quando o enunciado do problema citava duas. O outro erro foi de *operação*, onde o aluno escolhe as fórmulas corretas para a resolução do problema mas comete erro nas contas.

O erro na resolução do problema 2 foi também na retirada dos dados: o aluno considerou o raio do cano igual a 4cm, quando esta medida era do diâmetro.

Na resolução do problema 3, o erro foi de *interpretação*: os cálculos apresentados foram da área de superfície da piscina e o volume inicial.

Conclusão do Estudo das resoluções da Turma 2

No estudo das resoluções dos alunos veteranos (4ª fase), notamos que 37 de um total de 40, traçaram figuras de estudo em suas resoluções, o que indica que estes alunos acreditam que o esboço de sólidos envolvidos em problemas cujo cálculo de volume é necessário, auxilia na resolução.

Nenhum dos 40 alunos entregou a folha da atividade totalmente em branco e, 4 de 40 alunos resolveram corretamente os três problemas propostos, sendo que os 4 receberam a folha da atividade contendo as fórmulas. Destes 4 alunos, 2 responderam no questionário que já cursaram a disciplina Geometria Quantitativa, 1 respondeu que já cursou Geometria Quantitativa e Laboratório de Matemática III e 1 deles respondeu que não cursou nenhuma das duas disciplinas, uma das resoluções corretas pode ser vista no Anexo II.D, p.98.

Este estudo nos mostrou também que erros por desconhecimento de fórmulas estão presentes em todos os grupos desta turma, entre as resoluções de alunos que receberam a folha da atividade sem fórmulas.

Para cada grupo obtivemos os seguintes resultados com relação ao número de acertos em cada problema e tipos de erros:

Alunos que já cursaram Geometria Quantitativa (18 alunos, 10 resoluções com fórmulas e 8 resoluções sem fórmulas):

6 resoluções corretas no problema 1, das quais: 5 com fórmulas e 1 sem fórmulas.

3 resoluções corretas no problema 2, das quais: 2 com fórmulas e 1 sem fórmulas.

7 resoluções corretas no problema 3, das quais: 5 com fórmulas e 2 sem fórmulas.

Os tipos de erros encontrados nas resoluções deste grupo de um modo geral foram: no tratamento dos dados, de operação, na retirada dos dados do problema e ainda, interpretação incorreta que resultou tanto em erros quanto em resoluções incompletas.

Alunos que já cursaram Laboratório de Matemática III (7 alunos, 3 resoluções com fórmulas e 4 resoluções sem fórmulas):

Neste grupo, os alunos que não tinham as fórmulas como auxílio, não obtiveram resoluções corretas em nenhum dos problemas, ou seja, os acertos estão somente entre as resoluções de alunos que tinham as fórmulas: 2 no problema 1, nenhum no problema 2 e 1 no problema 3.

Os erros encontrados foram: na retirada dos dados do problema, de operação (ver Anexo II.G, p.102), no tratamento dos dados e de interpretação.

Alunos que já cursaram ambas as disciplinas (6 alunos, 3 resoluções com fórmulas e 3 resoluções sem fórmulas):

1 resolução correta no problema 1, 1 resolução correta no problema 2 e 2 resoluções corretas no problema 3 entre os alunos que receberam as fórmulas.

Apenas 1 resolução correta no problema 3, entre os alunos que não receberam fórmulas.

Os tipos de erros encontrados neste grupo, de um modo geral foram: de operação, na retirada dos dados do problema e de interpretação.

4.1.2.c Conclusão Geral da Atividade em Classe

Os estudos das resoluções das turmas que participaram da atividade em classe, nos deram os seguintes indicativos:

De um modo geral, os alunos consideram importante traçar figuras nas resoluções de problemas que envolvem o conceito ou cálculo de volume dos sólidos pois, 30 de 46 alunos da turma de calouros e 37 de 40 alunos da turma de veteranos as traçaram em suas resoluções. Em dois deles foram traçadas figuras planas.

Entre os alunos da turma 1, recebemos 2 folhas em branco e 3 onde havia apenas escritos do tipo “sem fórmula não sei fazer”. Resultados não encontrados na turma 2.

Em ambas as turmas, os alunos que resolveram corretamente os três problemas da atividade, receberam as fórmulas: 2 de 46 na turma 1 e 4 de 40 na turma 2.

Lembramos que o problema 1 envolve os sólidos cone e esfera, o problema 2 envolve os sólidos cubo e cilindro e o problema 3 envolve paralelepípedo.

Outro resultado comum nas duas turmas foi a ordem na quantidade de resoluções corretas em cada problema: em ambas as turmas o problema que os alunos mais acertaram foi o problema 3 e o segundo com mais acertos foi o problema 1, sendo o problema 2 o que os alunos menos acertaram.

O resultado geral com relação aos acertos nos problemas foi:

Na turma 1 (calouros): 7 acertos no problema 1, 4 acertos no problema 2 e 9 acertos no problema 3.

Na turma 2 (veteranos): 11 acertos no problema 1, 5 acertos no problema 2 e 18 acertos no problema 3.

De um modo geral tivemos 18 acertos no problema 1, onde todos os alunos usaram a única forma de resolução prevista na análise à priori.

Com relação ao problema 2, tivemos 9 acertos dos quais 8 resolvidos conforme a resolução 1 e, 1 resolvido conforme a resolução 2 da análise à priori.

Quanto ao problema 3, tivemos 27 acertos dos quais: 13 conforme a resolução 1, 9 conforme a resolução 2 e 5 conforme a resolução 3, que foram os três tipos de resolução previstos na análise à priori para este problema.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo de livros didáticos dos anos 70, anos 90 e da atualidade revelou diferenças quanto à abordagem e forma de apresentação do conteúdo volume dos sólidos e semelhanças quanto ao tipo de exercícios propostos.

Identificamos uma abordagem mais formal no livro *Matemática na Escola Renovada* (do período do Movimento da Matemática Moderna), e uma abordagem empírica e/ou experimental nos demais livros (dos anos de 1996,2002 e 2004). Entretanto, em todos eles há preocupação de apresentar ou deduzir as fórmulas que permitem calcular o volume dos sólidos (prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera). A tarefa mais presente entre os exercícios propostos, em todos os livros estudados, é a de "calcular volume dos sólidos", sendo cones e prismas (em particular o paralelepípedo) os tipos de sólidos mais usados nos exercícios que apresentam esta tarefa.

Esta caracterização dos livros que estudamos em conjunto com os resultados da atividade em classe, nos dá indícios de que o estudo de volume dos sólidos no ensino médio é baseado em aplicações de fórmulas. O tipo de sólido que os alunos mais têm facilidade em resolver problemas que envolvem o conceito de volume é o paralelepípedo, pois este é o tipo de sólido envolvido no problema 3, cujo número de acertos foi maior, tanto na turma de calouros (7 de 46), quanto na turma de alunos da 4ª fase (11 de 40) do curso de licenciatura em matemática da UFSC.

Notamos também que o problema 1 que foi o segundo em número de acertos, exigia basicamente cálculo de volume e diferença entre volumes. Já o problema 2, que teve o menor número de acertos, tinha como tarefa (implicitamente) o cálculo da altura de um paralelepípedo.

O número de alunos que acertou os três problemas foi pequeno em ambas as turmas: 2 de 46 na turma de calouros e 4 de 40 na turma de veteranos.

Cabe aqui um questionamento: se os documentos oficiais tanto a nível nacional, quanto estadual e em âmbito escolar asseguram lugar aos conteúdos de Geometria Espacial Métrica e entre eles volume dos sólidos, por que a dificuldade é tão grande em resoluções de problemas que envolvem este conteúdo? Que tipo de ensino assegura uma aprendizagem significativa?

Cabe aqui uma reflexão daqueles que são professores no curso de Licenciatura em Matemática e no Ensino Médio, e daqueles que na administração são responsáveis pelos programas escolares, livros didáticos e currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEZERRA, Manoel Jairo. **Matemática para o Ensino Médio**.Volume único. Editora Scipione, São Paulo, 2002.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar**. Volume 10.Atual editora, São Paulo,1993.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Editora da Unicamp, São Paulo, 1995.

NETTO, Di Pierro Scipione. GÓES, Célia Contin. **Matemática na Escola Renovada**. Vol.2. Editora Saraiva, 2ª edição.São Paulo,1973.

SOUZA, Maria Helena Soares de; SPINELLI, Walter. **Matemática**. 2º grau. Volume 2. Editora Scipione. São Paulo, 1996.

VASCONCELLOS, Maria J.C. de; SCORDAMAGLIO, Maria Terezinha; CÂNDIDO, Suzana Laino. **Matemática.** *Projeto Escola e Cidadania para todos*. 3ª série. Ensino Médio. Editora do Brasil. 1ª edição. São Paulo, 2004.

Proposta Curricular de Santa Catarina: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio: Disciplinas Curriculares. Florianópolis, COGEN,1998.

Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. www.mec.gov.br/semec/ensmed/ftp/ Ciencias Natureza.pdf . Acessado em: 23 de julho de 2004.

ANEXO I

FOLHA DA ATIVIDADE EM CLASSE

Universidade Federal de Santa Catarina
Disciplina: _________________ Turma: _____________Sem.: 2005-1.
Aluno(a):____ (opcional)

Por favor, responda às questões abaixo e resolva os problemas.

1) Você concluiu o Ensino Médio:
a) ( ) Antes de 1990 b) ( ) Entre 1990 e 1999 c) ( ) No ano 2000 ou depois

2) Sobre a disciplina **Geometria Quantitativa** do curso de Licenciatura em Matemática na UFSC:
a) ( ) Você está cursando b) ( ) Já cursou c) ( ) ainda não cursou

3) Sobre a disciplina **Laboratório de MTM III** do curso de Licenciatura em Matemática na UFSC:
a) ( ) Você está cursando b) ( ) Já cursou c) ( ) ainda não cursou

Recomendações para a resolução dos problemas:
- Usar caneta
- Fazer todos os cálculos na folha de resoluções
- Em caso de erro, escrever ao lado "anulado" e refazer

Problemas:

1) Um copinho de sorvete tem forma de um cone de 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro na base e tem, colocadas, duas colheradas esféricas de sorvete, também de 4 cm de diâmetro.

a) Se o sorvete derreter no cone, haverá transbordamento?
b) Quanto sobra ou quanto falta de sorvete?

2) A uma caixa d'água de forma cúbica com 1 metro de lado está acoplado um cano cilíndrico com 4cm de diâmetro e 50m de comprimento. Num certo instante, a caixa está cheia de água e o cano vazio. Solta-se a água pelo cano até que fique cheio. Qual o valor aproximado da altura da água na caixa no instante em que o cano ficou cheio?

3) Uma piscina em forma de bloco retangular, medindo 8m de comprimento, 6m de largura e 2m de profundidade, está completamente cheia. Quantos litros de água é preciso retirar da piscina para que o nível de água baixe 20 cm?

Formulário

(S_T : área total ; S_B:área da base; S_L:área lateral; V: volume; R: raio; a: aresta; G: geratriz; H: altura; a,b,c: dimensões do paralelepípedo; d:diagonal;)

$1m^3$ = 1000 litros

Prisma: $S_T = S_L + 2.S_B$; $V = S_B.H$

Cubo : $S_T = 6.a^2$; $V = a^3$; $d = a\sqrt{3}$

Pirâmide: $S_T = S_L + S_B$; $V = \frac{1}{3}.S_B.H$

Esfera: $S_T = 4.\pi.R^2$; $V = \frac{4}{3}.\pi.R^3$

Cilindro: $S_T = 2.\pi.R(H + R)$; $V = \pi . R^2 . H$

Cone: $S_T = \pi.R(G + R)$; $G^2 = H^2 + R^2$; $V = \frac{1}{3}\pi . R^2 . H$

Paralelepípedo: $S_T = 2 (ab+bc+ac)$; $V = a . b . c$; $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

ANEXO II

RESOLUÇÕES DE ALUNOS

II.A - Todas as resoluções corretas – estudante da Turma 1

óblema 1

altura: 10 cm

raio: 2 cm

Volume do cone:

$V_c = \frac{1}{3}\pi . R^2 . H = \frac{1}{3} . \pi . 4 . 10$

$V_c = \frac{40\pi}{3} cm^3$

colher: raio = 2 cm

Volume: $\frac{4}{3}\pi . R^3$

$\frac{4}{3}\pi . 8 = \frac{32\pi}{3} cm^3$

como são 2 colheradas

$V = \frac{64\pi}{3}$

$$\begin{array}{r} 3,14 \\ \times\ 8 \\ \hline 25,12 \end{array}$$

Resposta:

a) Transbordará, pois o volume de sorvete é maior que o do cone.

b) Sobram $\frac{24\pi}{3} cm^3$, pois é o volume do sorvete menos o do cone.

Simplificando, temos $8\pi\ cm^3$. E considerando $\pi = 3,14$,

$8\pi\ cm^3 = 25,12\ cm^3$

Problema 2

Cubo: lado = 1 m = 100 cm   cano cilíndrico: raio = 2 cm = 0,02 m

comprimento = 50 m

Volume de água inicialmente é igual ao volume do cubo, ou seja, $1\ m^3$ ou $10^6 cm^3$.

Depois, enche o cano de volume: $\pi . R^2 . H$

resolvendo: $\pi . 4 . 5000\ cm^3 \Rightarrow 20000\pi\ cm^3$

O volume final de água no cubo é o total inicial menos a quantidade que está no cano.

$1000000 - 20000\pi$

considerando π como 3,14:

$1000000 - 62800$

$$\begin{array}{r} 1000000 \\ -\ 62800 \\ \hline 937200 \end{array}$$

volume de água no cubo será $937200\ cm^3$

a aresta da base continua valendo 1 m ou 100 cm

ou seja, o volume será $937200 = 100 . 100 . x$

x é a altura que a água alcança

x será 93,72 cm

Resposta: A altura é de 93,72 cm

Problema 3

piscina: comprimento = 8m
largura = 6m
profundidade = 2m

Volume total: 8.6.2 = 96 m^3

nova profundidade: 2m - 20cm = 1,8m

1,8. 6.8 = novo volume = 86,4 m^3

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 1,8 \\ \hline 384 \\ 48= \\ \hline 86,4 \end{array}$$

volume de água retirada é igual ao volume total menos o novo volume.

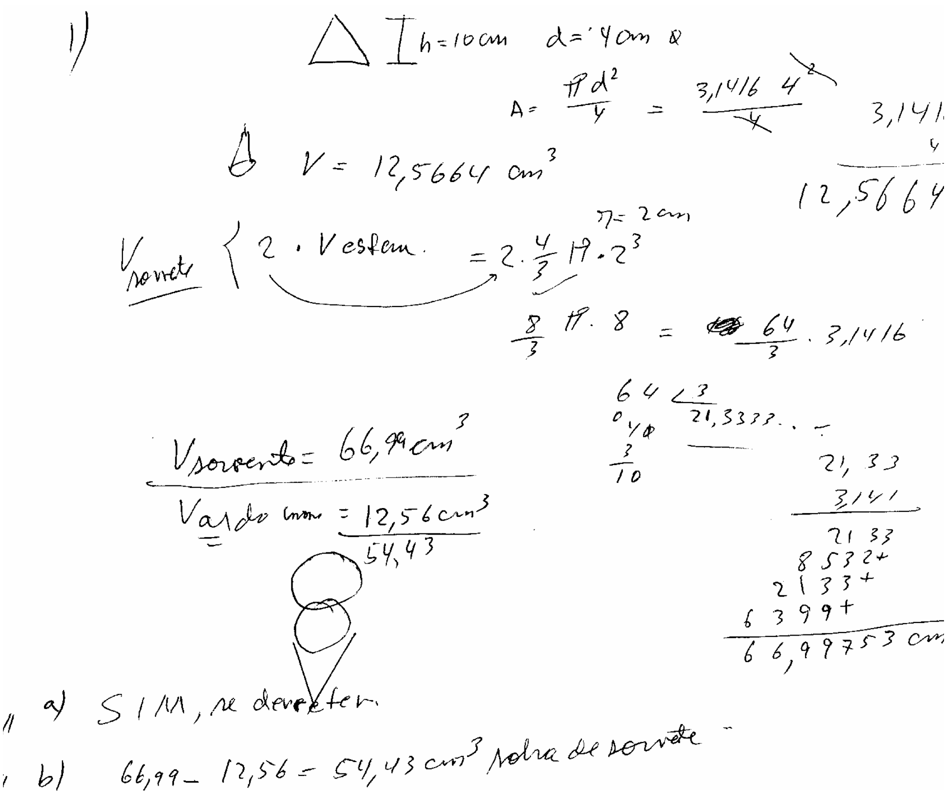
96 - 86,4 = 9,6 m^3

como 1 m^3 = 1000 litros

9,6 m^3 equivalem a 9600 litros

Resposta: é preciso retirar 9600 litros de água.

II.B - Erro por uso de fórmulas *incorreta* no problema 1: Cálculo do volume do cone usando: "A = $\pi . d^2/4$" – estudante da Turma 1


1)

h = 10 cm   d = 4 cm

$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}1416 \cdot 4^2}{4}$

$V = 12{,}5664\ cm^3$

3,141 × 4 = 12,5664

r = 2 cm

$V_{sorvete}$ { 2 · Vesfera = $2 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3$

$\frac{8}{3} \pi \cdot 8 = \frac{64}{3} \cdot 3{,}1416$

64 ÷ 3 = 21,3333...

21,33 × 3,141 = 66,99753 cm

$V_{sorvete} = 66{,}99\ cm^3$

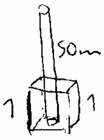
$V_{ar\ do\ cone} = 12{,}56\ cm^3$

54,43

a) SIM, se derreter.

b) $66{,}99 - 12{,}56 = 54{,}43\ cm^3$ sobra de sorvete

II.C - Erros de interpretação nos problemas 2 e 3 – estudante da Turma 1

2) 

$V_{CUBO} = 1m^3 = a$

$V_{CILINDRO\ ATÉ\ 1m} = b = 1m \cdot \pi \cdot (\underbrace{2cm}_{RAIO})^2 = 1m \cdot \pi \cdot (0,04 \cdot 0,01m)^2 = 1m\,\pi\,(0,0004)$

$0,0004\pi\ m^3 = 0,00124$

Sejam $\pi = 3,1$

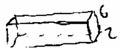
$1,00000 - 0,00124 = 0,99876$

$V_{ÁGUA} = a - b = 1m^3 - 0,00124\ m^3 = 0,99876\ m^3$

$V_{ÁGUA} = 1m \cdot 1m \cdot x = 0,99876\ m^3$

$\boxed{x = 0,99876\ m}$ //

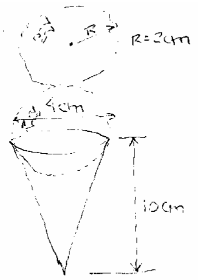
3) NÍVEL → LARGURA => LARGURA · 20cm = 5,8 m



$V_{[illegible]} = 0,2\ m \cdot 2m \cdot 8m = \boxed{3,2\ m^3}$ //

II.D - Todas as resoluções corretas – estudante da Turma 2

1)



PARA SABER O RESULTADO, CALCULAR O VOLUME DO CONE E O VOLUME DAS DUAS ESFERAS E ENCONTRAR A DIFERENÇA.
→ CONCLUSÃO, SE O VOLUME DO CONE FOR MAIOR QUE O VOLUME DAS DUAS ESFERAS, NÃO HÁ TRANSBORDAMENTO.
AGORA SE FOR MENOR, A DIFERENÇA É O QUE TRANSBORDA. E SE FOR IGUAL NÃO SOBRA NEM TRANSBORDA.

VOLUME DA ESFERA:

$V_e = \frac{4\pi R^3}{3}$

$(R = 2cm)$

$V_e = \frac{4\pi(2)^3}{3}$

$V_e = \frac{32\pi}{3} cm^3$

VOLUME DAS DUAS ESFERAS:

$\boxed{2V_e = \frac{64\pi}{3} cm^3}$

VOLUME DO CONE:

$V_c = \frac{Sb \cdot h}{3}$

$V_c = \frac{\pi(2)^2 \cdot 10}{3}$

$\boxed{V_c = \frac{40\pi}{3} cm^3}$

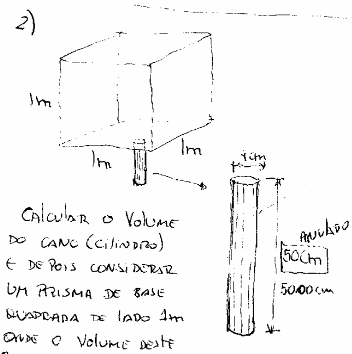
COMO $2V_e > V_c$ VAI HAVER TRANSBORDAMENTO (V_T)

$V_T = 2V_e - V_c$

$V_T = \frac{64\pi}{3} cm^3 - \frac{40\pi}{3} cm^3$

$\boxed{V_T = 8\pi cm^3}$.

2)



CALCULAR O VOLUME DO CANO (CILINDRO) E DEPOIS CONSIDERAR UM PRISMA DE BASE QUADRADA DE LADO 1m ONDE O VOLUME DESTE PRISMA TEM QUE SER O VOLUME DO CILINDRO, AÍ VOCÊ ENCONTRARÁ A ALTURA DO PRISMA. LOGO 1m MENOS A ALTURA DO PRISMA SERÁ A ALTURA DA ÁGUA

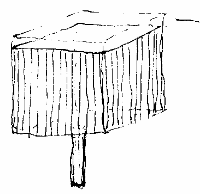
Volume do cilindro

$V_c = Sb \cdot h$

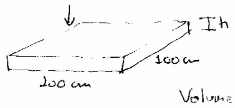
$V_c = \pi(2)^2 \cdot 5000$

$V_c = 20000\pi \ cm^3 \longrightarrow \pi \cong 3{,}14$ então $20000(3{,}14) =$

$V_c \cong 62800 cm^3$



PRISMA FORMADO POR "AR".



Volume do Prisma $(V_p) = V_c$.

$V_p = 100 \cdot 100 \cdot h$

$62800 = 10000 \cdot h$

$h = \frac{62800}{10000}$

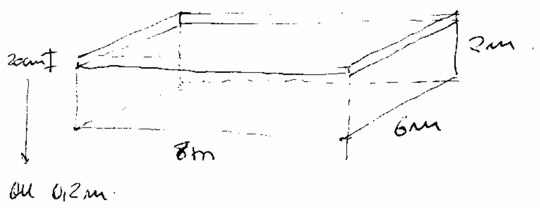
$\boxed{h = 0{,}0628}$ ANULADO.

$h = 6{,}28$ cm.

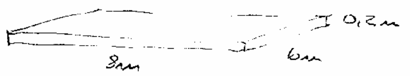
ALTURA DA ÁGUA SERÁ DE:

$100 - 6{,}28 = 93{,}72$ cm.

3)



Volume de ar será o volume do prisma:



$V_{AR} = 8 \cdot 6 \cdot 0{,}2$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 0{,}2 \\ \hline 9{,}6 \end{array}$$

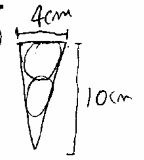
$\boxed{V_{AR} = 9{,}6\, m^3}$

é preciso tirar 9,6 m³ de água ou 9600 litros

II.E - Erro por *desconhecimento de fórmulas* no problema 1 – estudante da Turma 2

(Este estudante recebeu a folha da atividade sem as fórmulas e usou fórmulas de geometria plana na resolução do problema. Observe que sua figura de estudo também é plana, apesar do problema ser de volume.)

(1)



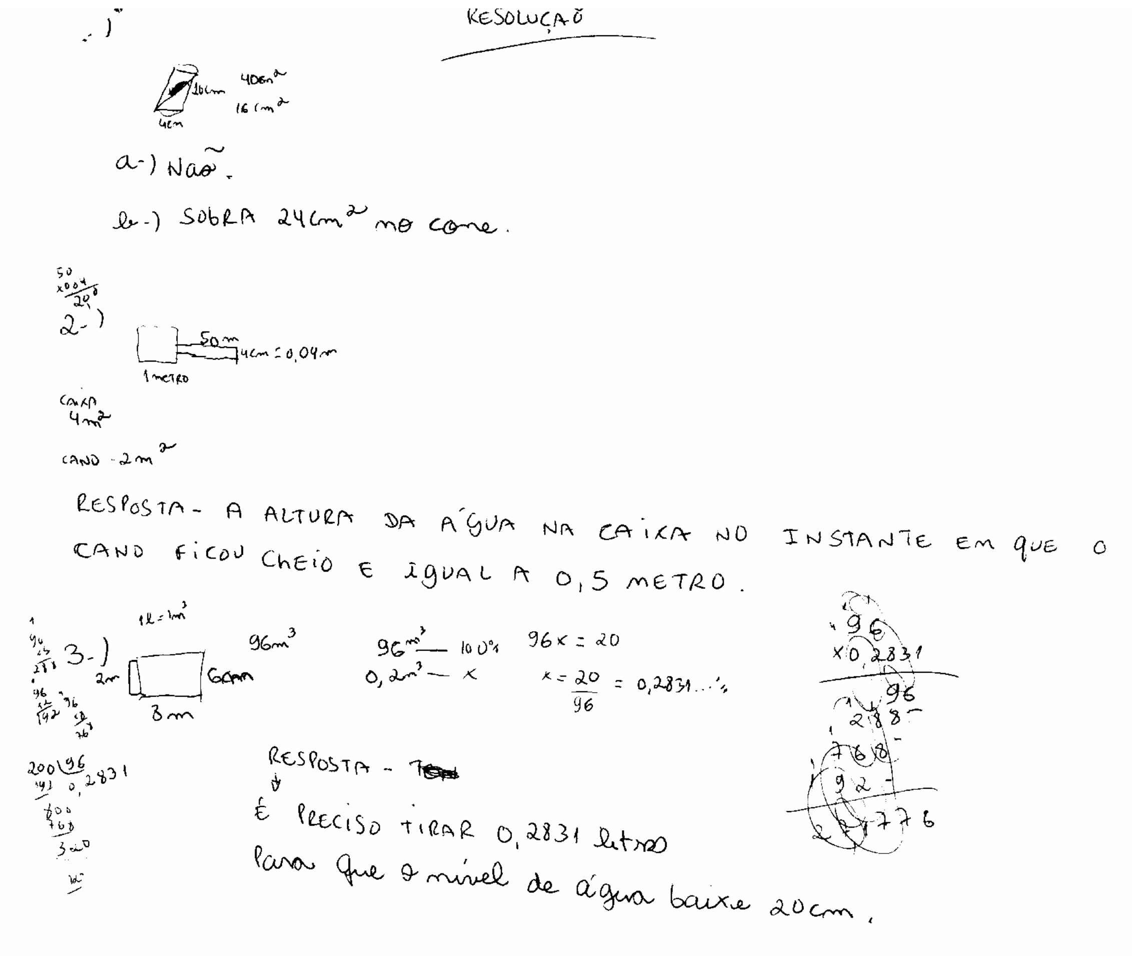
$\frac{b.h}{2}.3 \quad \frac{4.10}{2} = 20.3 = 60$

$\pi r^2 = \pi.2^2 = 4\pi = 12, \ldots \times 2 = 24$

a) Se o sorvete derreter não haverá transbordamento

b) Irá faltar sorvete no copinho, mas a quantidade exata do ~~cop~~ sorvete realmente não sei. A maior dúvida é relembrar a fórmula de volume do cone, sei que não é o certo, mas se tivesse a fórmula estava mais fácil de resolver.

II.F - Cálculos sem formulação das operações e figuras de estudo planas. – Estudante da Turma 2.



RESOLUÇÃO

1-)

10cm 40cm² 16 cm²

4cm

a-) Não.

b-) SOBRA 24cm² no cone.

2-)

50cm 4cm = 0,04m

1 METRO

CAIXA 4m²

CANO - 2m²

RESPOSTA - A ALTURA DA ÁGUA NA CAIXA NO INSTANTE EM QUE O CANO FICOU CHEIO É IGUAL A 0,5 METRO.

3-)

1l = 1m³

96m³

2m 6cm 8m

$96m^3$ — 100%

$0,2m^3$ — x

$96x = 20$

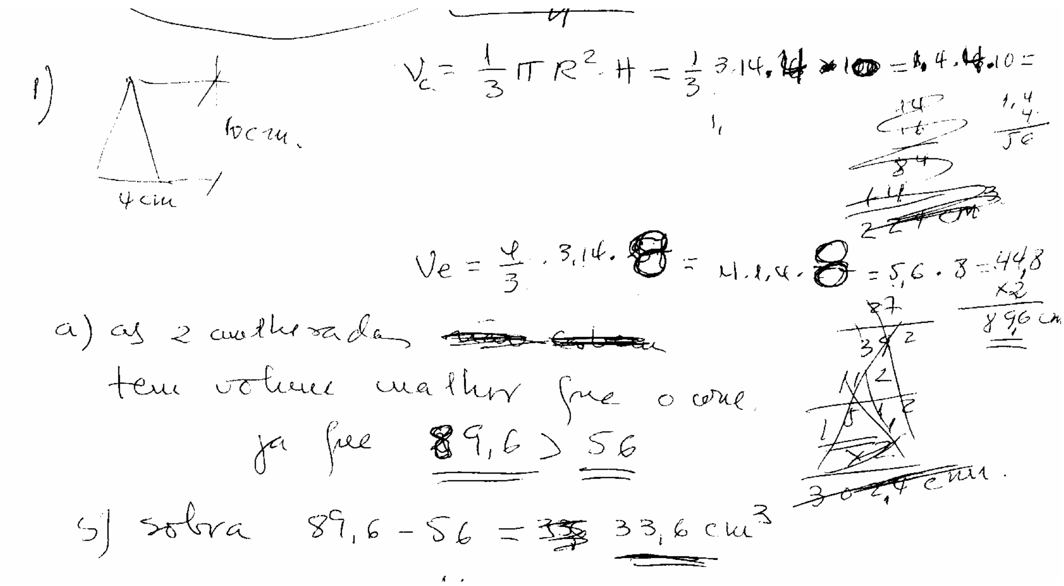
$x = \frac{20}{96} = 0,2831...$%

96 × 0,2831

RESPOSTA - É PRECISO TIRAR 0,2831 litros para que o nível de água baixe 20cm.

II. G - Erros de operação e na retirada dos dados – estudante da Turma 2

(divisão de 3,14 por 3, resultando em 1,4 – resolução do problema 1; uso de **4cm** como **raio** do cano na resolução do problema 2, entre outros...)

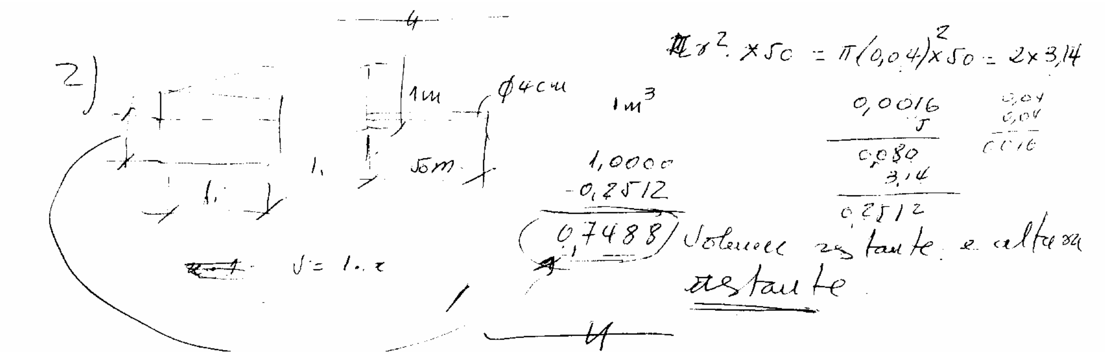

1) 10cm 4cm

$V_c = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H = \frac{1}{3}\, 3{,}14 \cdot 4 \cdot 10 = 1{,}4 \cdot 4 \cdot 10 =$

$Ve = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 8 = 1{,}4 \cdot 8 = 5{,}6 \cdot 8 = 44{,}8$; $\times 2 = 89{,}6$ cm

a) as 2 colheradas ~~tem~~ tem volume maior que o cone já que 89,6 > 56

b) sobra 89,6 − 56 = 33,6 cm³


2) 1m; ϕ4cm; 5m; 1m³

$\pi r^2 \times 50 = \pi (0{,}04)^2 \times 50 = 2 \times 3{,}14$

$0{,}0016 \times 5 = 0{,}080$; $0{,}080 \times 3{,}14 = 0{,}2512$

$1{,}0000 - 0{,}2512 = 0{,}7488$ Volume restante e altura restante.