UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LEONARDO SILVEIRA BORGES

ESTUDO DA TEORIA BÁSICA DOS MÉTODOS CHEBYSHEV-ESPECTRAIS

FLORIANÓPOLIS
2005

LEONARDO SILVEIRA BORGES

ESTUDO DA TEORIA BÁSICA DOS MÉTODOS CHEBYSHEV-ESPECTRAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática e Computação Científica, Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina.

JÁUBER CAVALCANTE DE OLIVEIRA
Orientador

FLORIANÓPOLIS
2005

LEONARDO SILVEIRA BORGES

ESTUDO DA TEORIA BÁSICA DOS MÉTODOS CHEBYSHEV-ESPECTRAIS

BANCA EXAMINADORA

Orientador

Professor Jáuber Cavalcante de Oliveira

1.^{o} Examinador

Professor Milton dos Santos Braitt

2.^{o} Examinador

Professor Fermín Sinforiano Viloche Bazán

Coordenadora do Curso

Professora Carmem Suzane Comitre Gimenez

Florianópolis, dezembro de 2005.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à meus pais por me apoiarem durante o curso.

Agradeço aos professores com quem convivi.

Agradeço ao professor Jáuber por me orientar nesse trabalho de conclusão de curso.

Agradeço aos colegas de curso.

Agradeço à minha namorada que me motivou o tempo todo.

Agradeço à Deus.

Lista de Notações

(a, b)	:	Intervalo aberto
$[a, b]$	:	Intervalo fechado
$\mathcal{C}\,[a, b]$	:	Conjunto das funções contínuas no intervalo $[a, b]$
$\mathcal{C}^k\,[a, b]$	:	Conjunto das funções k vezes continuamente diferenciáveis no intervalo $[a, b]$
$\subset$	:	Inclusão de conjuntos, a igualdade pode ser considerada
$\subsetneq$	:	Inclusão de conjuntos, não há igualdade
$\mathbb{N}$	:	Conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
$\mathbb{Z}$	:	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	:	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	:	Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	:	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{N}^*$	:	O elemento 0 é excluído do conjunto. Vale para os demais acima.
$\triangleq$	:	por definição

Índice

Introdução

Métodos espectrais são métodos numéricos para resolução de equações diferenciais. A idéia essencial por trás dos métodos espectrais é aproximar a solução de uma equação diferencial por uma expansão finita do tipo

$$u(x,t) \cong \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\,\phi_k(x)$$

A propriedade fundamental destas expansões em séries é a seguinte: o erro de truncamento entre a série com um número finito de termos, digamos n, e a função a ser aproximada decai a zero mais rapidamente que qualquer potência de $1/n$, se a função é infinitamente diferenciável ou analítica. Isso é denominado convergência espectral devido à forte influência da taxa de decaimento dos coeficientes de Fourier (espectro) neste comportamento do erro.

Para compreendermos bem os métodos espectrais precisamos entender um dos assuntos fundamentais dos métodos espectrais, ou seja, precisamos entender a teoria dos polinômios ortogonais.

Esse é o contexto deste trabalho onde estudou-se a teoria polinomial que fundamenta os métodos espectrais polinomiais. Este assunto será tratado com detalhes no capítulo um juntamente com os problemas de Sturm-Liouville. O final do capítulo particulariza o estudo para os polinômios de Jacobi. Estes polinômios formam uma das classes mais importantes de polinômios ortogonais e veremos como são valiosos.

Os polinômios de Chebyhsev e de Legendre, que são freqüêntemente empregados em métodos espectrais, pertencem à família dos polinômios de Jacobi. No capítulo dois detalhamos os polinômios de Chebyshev de primeira espécie. Para os polinômios de Chebyshev de segunda espécie temos resultados similares, mas estes não serão abordados neste trabalho.

Veremos no capítulo seguinte como utilizar os polinômios de Chebyshev para interpolar e projetar uma função f num subespaço gerado por polinômios e terminaremos este trabalho com a integração Gaussiana e diferenciação através dos polinômios de Chebyshev.

Uma das preocupações que tivemos foi a de demonstrar com detalhes a maioria dos teoremas, especialmente os relacionados aos polinômios ortogonais e aos polinômios de

Chebyshev, tendo em vista que em muitos autores não encontramos algumas delas por completo.

Capítulo 1

Polinômios Ortogonais e o Problema de Sturm-Liouville Singular

Neste primeiro capítulo apresentamos uma introdução aos polinômios ortogonais, enunciando e demonstrando alguns resultados interessantes.

Em seguida mudamos um pouco o tema para os problemas de Sturm-Liouville, que nada mais é do que uma certa classe de equações diferenciais de segunda ordem satisfazendo algumas condições de contorno. Separamos os problemas de Sturm-Liouville em dois casos, o caso regular e o caso singular.

No final do capítulo voltamos com os polinômios ortogonais mas dessa vez destacamos os polinômios de Jacobi. Por fim fazemos uma conexão entre os polinômios de Jacobi e os problemas de Sturm-Liouville.

1.1 Polinômios Ortogonais

No espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ sabemos que dois vetores x e y, ambos não nulos, são ortogonais se o produto escalar entre eles é nulo, isto é, se

$$x \cdot y = 0$$

Com essa idéia, podemos generalizar o conceito de ortogonalidade para qualquer espaço vetorial definindo uma função (denominada produto interno) que possui as propriedades essenciais do produto escalar que a tornam uma forma bilinear, simétrica e positiva-definida.

O conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a n forma um espaço vetorial sobre o corpo dos reais ou dos complexos, logo, podemos definir um produto interno nesse espaço.

Trabalharemos mais especificamente com polinômios sobre o espaço $L_w^2(a,b)$.

Definição 1.1 *Dado um intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ e uma função integrável $w(x) > 0$ em (a,b), definimos o espaço $L_w^2(a,b)$ por*

$$L_w^2(a,b) \triangleq \left\{ f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \ \textit{mensurável} \ / \int_a^b f^2(x)\, w(x)\, dx < \infty \right\}$$

A definição de função mensurável encontra-se em, por exemplo, Rudin (1971).

O produto interno em $L_w^2(a,b)$ é uma função

$$\langle \cdot \ , \cdot \rangle_w : L_w^2(a,b) \times L_w^2(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)\, g(x)\, w(x)\, dx \tag{1.1}$$

Assim, de modo análogo ao $\mathbb{R}^n$, temos as seguintes definições.

Definição 1.2 *Duas funções f e g são ortogonais em $L_w^2(a,b)$ em relação ao produto interno $\langle \cdot \ , \cdot \rangle_w$ se $\langle f, g \rangle_w = 0$.*

Definição 1.3 *Uma seqüência de polinômios $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $grau\,(p_n) = n$ é ortogonal em $L_w^2(a,b)$ se $\langle p_i, p_j \rangle_w = 0$ para $i \neq j$.*

Como a ortogonalidade não é alterada por uma constante multiplicativa, podemos 'normalizar' o polinômio $p_n(x)$ de modo que o coeficiente de x^n seja igual a um, nesse caso, $p_n(x)$ é denominado um polinômio mônico.

Sendo o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a n um espaço vetorial, podemos falar em base para esse espaço.

O espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n é gerado por $\{1, x, ..., x^n\}$, isto é,

$$\mathbb{P}_n = span\,\{1, x, ..., x^n\}$$

Agora que temos uma base para o conjunto dos polinômios, gostaríamos que essa base fosse ortogonal em relação ao produto interno definido em (1.1), assim, o modo mais simples de a obtermos consiste em aplicarmos o processo de Gram-Schmidt com o produto interno definido em (1.1) à base canônica dos polinômios, ou seja, ao conjunto $\{1, x, ..., x^n\}$.

Veremos agora uma proposição que garante a ortogonalidade entre os polinômios de grau n e os de menor grau.

Proposição 1.1 *Seja $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de polinômios ortogonais de modo que $p_k(x)$ tem grau k, então $p_{n+1}(x)$ é ortogonal a qualquer polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a n.*

Demonstração: Sejam $p_0(x), ..., p_n(x)$ polinômios ortogonais conforme enunciado. Então,

$$\mathbb{P}_n = span\{p_0, ...p_n\}$$

e como $p(x) \in \mathbb{P}_n$, existem constantes a_0, ..., a_n tais que

$$p(x) = a_0 p_0(x) + ... + a_n p_n(x)$$

Efetuando o produto interno de $p(x)$ com $p_{n+1}(x)$ temos

$$\langle p, p_{n+1}\rangle_w = \langle a_0 p_0 + ... + a_n p_n, p_{n+1}\rangle_w = \sum_{k=0}^{n} a_k \langle p_k, p_{n+1}\rangle_w = 0$$

pois os polinômios $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ são ortogonais, logo $\langle p_k, p_{n+1}\rangle_w = 0$ para $k = 0, ..., n$.

■

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt pode se tornar demorado à medida que avança devido ao número de produtos internos realizados em cada operação, sendo assim, com uma relação de recorrência poderíamos obter uma seqüência de polinômios ortogonais a partir de alguns termos iniciais e reduzir o número de operações necessárias. O seguinte teorema nos fornece uma relação de recorrência de três termos.

Teorema 1.1 *Seja $\{p_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de polinômios ortonormais reais. Então eles satisfazem a seguinte relação de recorrência de três termos*

$$p_n^*(x) = (a_n x + b_n)\, p_{n-1}^*(x) - c_n p_{n-2}^*(x) \tag{1.2}$$

para $n \geq 2$, $p_{-1}(x) = 0$ e $p_0(x) = 1$.

Demonstração: Vamos definir a seqüência de polinômios

$$
\begin{aligned}
p_{-1}(x) &= 0 \\
p_0(x) &= 1 \\
&\vdots \\
p_{n+1}(x) &= xp_n^*(x) - \langle xp_n^*, p_n^*\rangle_w p_n^*(x) - \langle p_n, p_n\rangle_w^{1/2} p_{n-1}^*(x),\ n \geq 0 \\
p_n^*(x) &= \frac{p_n(x)}{\langle p_n, p_n\rangle_w^{1/2}}
\end{aligned}
$$

Da forma que definimos, $p_n^*(x)$ é um polinômio de grau n e é normal, ou seja,

$$
\langle p_n^*, p_n^*\rangle_w = \left\langle \frac{p_n}{\langle p_n, p_n\rangle_w^{1/2}}, \frac{p_n}{\langle p_n, p_n\rangle_w^{1/2}} \right\rangle_w = 1
$$

Vamos provar por indução que são ortogonais.

Para isso iremos assumir que tenhamos provado que $\left\langle p_m^*, p_j^*\right\rangle_w = 0$, $j = 1, ..., m-1$, e $m = 0, ..., n$. Iremos mostrar que $\left\langle p_{n+1}^*, p_j^*\right\rangle_w = 0$, $j = 0, ..., n$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\left\langle p_{n+1}, p_j^*\right\rangle_w &= \left\langle xp_n^* - \langle xp_n^*, p_n^*\rangle_w p_n^* - \langle p_n, p_n\rangle_w^{1/2} p_{n-1}^*, p_j^*\right\rangle_w \\
&= \left\langle xp_n^*, p_j^*\right\rangle_w - \langle xp_n^*, p_n^*\rangle_w \left\langle p_n^*, p_j^*\right\rangle_w - \langle p_n, p_n\rangle_w^{1/2} \left\langle p_{n-1}^*, p_j^*\right\rangle_w
\end{aligned}
$$

Veja que

$$
\left\langle xp_n^*, p_j^*\right\rangle_w = \int_a^b w(x)\, xp_n^*(x)\, p_j^*(x)\, dx = \int_a^b w(x)\, p_n^*(x)\, xp_j^*(x)\, dx = \left\langle p_n^*, xp_j^*\right\rangle_w
$$

Para $j = 0, ..., n-2$ temos, pela hipótese de indução e a proposição 1.1,

$$
\left\langle p_n^*, p_j^*\right\rangle_w = 0,\ \left\langle p_{n-1}^*, p_j^*\right\rangle_w = 0,\ \left\langle p_n^*, xp_j^*\right\rangle_w = 0
$$

Conseqüentemente $\left\langle p_{n+1}, p_j^*\right\rangle_w = 0$ para $j = 0, ..., n-2$. Agora, para $j = n-1$ temos

$$
\left\langle p_{n+1}, p_{n-1}^*\right\rangle_w = \left\langle xp_n^*, p_{n-1}^*\right\rangle_w - 0 - \langle p_n, p_n\rangle_w^{1/2}
$$

Na seqüência definida, temos

$$
p_{n+1}(x) = xp_n^*(x) - \langle xp_n^*, p_n^*\rangle_w p_n^*(x) - \langle p_n, p_n\rangle_w^{1/2} p_{n-1}(x)
$$

Isolando o termo $xp_n^*(x)$ da expressão acima e depois denotando $n = n-1$ temos

$$
xp_{n-1}^*(x) = p_n(x) + \left\langle xp_{n-1}^*, p_{n-1}^*\right\rangle_w p_{n-1}^*(x) + \langle p_{n-1}, p_{n-1}\rangle_w^{1/2} p_{n-2}(x)
$$

Agora, reescrevendo a igualdade acima temos

$$
xp_{n-1}^*(x) = p_n(x) + \alpha p_{n-1}^*(x) + \beta p_{n-2}^*(x)
$$

Como $\left\langle xp_n, p_{n-1}^*\right\rangle_w = \left\langle p_n, xp_{n-1}^*\right\rangle_w$ segue que

$$\left\langle p_n, xp_{n-1}^*\right\rangle_w = \left\langle p_n, p_n + \alpha p_{n-1}^* + \beta p_{n-2}^*\right\rangle_w = \left\langle p_n, p_n\right\rangle_w$$

pela nossa hipótese de indução.

Assim,

$$\left\langle xp_n, p_{n-1}^*\right\rangle_w = \left\langle p_n, p_n\right\rangle_w = \left\langle p_n, p_n\right\rangle_w^{1/2} \left\langle p_n, p_n\right\rangle_w^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{\left\langle xp_n, p_{n-1}^*\right\rangle_w}{\left\langle p_n, p_n\right\rangle_w^{1/2}} = \left\langle x\frac{p_n}{\left\langle p_n, p_n\right\rangle_w^{1/2}}, p_{n-1}^*\right\rangle_w = \left\langle p_n, p_n\right\rangle_w^{1/2}$$

$$\Rightarrow \left\langle xp_n^*, p_{n-1}^*\right\rangle_w = \left\langle p_n, p_n\right\rangle_w^{1/2}$$

Então $\left\langle p_{n+1}, p_{n-1}^*\right\rangle_w = 0$. Finalmente, $\left\langle p_{n+1}, p_n^*\right\rangle_w = \left\langle xp_n^*, p_n^*\right\rangle_w - \left\langle xp_n^*, p_n^*\right\rangle_w - 0 = 0$. Desse modo a indução é levada até $n+1$ e o teorema segue imediatamente.

■

Este teorema assegura a existência de um procedimento eficiente para a avaliação de um polinômio em um ponto através de uma relação de recorrência. É surpreendente que mesmo nesse contexto geral obtenha-se uma relação de recorrência de três termos.

Veremos no próximo teorema como os coeficientes são dados de uma forma muito simples.

Teorema 1.2 *Seja $p_n^*(x) = k_n x^n + s_n x^{n-1} + \ldots$ um polinômio ortonormal. Então os coeficientes na recorrência*

$$p_n^*(x) = (a_n x + b_n)\, p_{n-1}^*(x) - c_n p_{n-2}^*(x)$$

são dados por

$$a_n = \frac{k_n}{k_{n-1}}, b_n = a_n\left(\frac{s_n}{k_n} - \frac{s_{n-1}}{k_{n-1}}\right), c_n = a_n\frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} = \frac{k_n k_{n-2}}{k_{n-1}^2}$$

Demonstração: Vamos comparar a equação (1.2) com $p_n^*(x)$ da hipótese do teorema.

$$k_n x^n + s_n x^{n-1} + \ldots = a_n x p_{n-1}^*(x) - c_n p_{n-2}^*(x) + b_n p_{n-1}^*(x)$$

e substituir $p_{n-1}^*(x)$ e $p_{n-2}^*(x)$ pelos seus respectivos $p_n^*(x)$ da hipótese.

Assim, segue que

$$k_n x^n + s_n x^{n-1} + \ldots = a_n\left(k_{n-1}x^{n-1} + s_{n-1}x^{n-2} + \ldots\right) - c_n\left(k_{n-2}x^{n-2} + s_{n-2}x^{n-3} + \ldots\right) +$$

$$+b_n\left(k_{n-1}x^{n-1}+s_{n-1}x^{n-2}+...\right)=x^n\left(a_nk_{n-1}\right)+x^{n-1}\left(a_ns_{n-1}+b_nk_{n-1}\right)+...$$

Então, comparando os polinômios temos

$$k_n=a_nk_{n-1}\Rightarrow a_n=\frac{k_n}{k_{n-1}}$$

$$s_n=a_ns_{n-1}+b_nk_{n-1}\Rightarrow b_n=\frac{s_n-a_ns_{n-1}}{k_{n-1}}=\frac{k_ns_n}{k_{n-1}k_n}-\frac{a_ns_{n-1}}{k_{n-1}}=a_n\left(\frac{s_n}{k_n}-\frac{s_{n-1}}{k_{n-1}}\right)$$

Para encontrarmos o c_n usaremos a ortogonalidade dos polinômios $p_n^*(x)$:

$$0=\left\langle p_n^*,p_{n-2}^*\right\rangle_w=\left\langle a_nxp_{n-1}^*+b_np_{n-1}^*-c_np_{n-2}^*,p_{n-2}^*\right\rangle_w=$$

$$=a_n\left\langle xp_{n-1}^*,p_{n-2}^*\right\rangle_w+b_n\left\langle p_{n-1}^*,p_{n-2}^*\right\rangle_w-c_n\left\langle p_{n-2}^*,p_{n-2}^*\right\rangle_w=a_n\left\langle xp_{n-1}^*,p_{n-2}^*\right\rangle_w-c_n$$

Agora vamos analisar o termo $\left\langle xp_{n-1}^*,p_{n-2}^*\right\rangle_w$.

$$\left\langle xp_{n-1}^*,p_{n-2}^*\right\rangle_w=\left\langle p_{n-1}^*,xp_{n-2}^*\right\rangle_w=(*)$$

substituindo p_{n-2}^* pela hipótese do teorema e multiplicando por x temos

$$\begin{aligned}(*)\ &=\ \left\langle p_{n-1}^*,k_{n-2}x^{n-1}-s_{n-2}x^{n-2}+...\right\rangle_w\\ &=\ \left\langle p_{n-1}^*,k_{n-2}x^{n-1}\right\rangle_w-\left\langle p_{n-1}^*,s_{n-2}x^{n-2}\right\rangle_w+...\\ &=\ \left\langle p_{n-1}^*,k_{n-2}x^{n-1}\right\rangle_w\end{aligned}$$

pois $\left\langle p_{n-1}^*,p\right\rangle_w=0\ \forall p(x)\in\mathbb{P}_{n-2}$.

Assim, segue que

$$c_n=\left\langle a_np_{n-1}^*,k_{n-2}x^{n-1}\right\rangle_w=$$

$$=a_n\frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}\left\langle p_{n-1}^*,k_{n-1}x^{n-1}\right\rangle_w=a_n\frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}\left\langle p_{n-1}^*,k_{n-1}x^{n-1}\right\rangle_w+a_n\frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}\left\langle p_{n-1}^*,s_{n-1}x^{n-2}\right\rangle_w+...=$$

$$=a_n\frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}\left\langle p_{n-1}^*,k_{n-1}x^{n-1}+s_{n-1}x^{n-2}+...\right\rangle_w=a_n\frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}\left\langle p_{n-1}^*,p_{n-1}^*\right\rangle_w=a_n\frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}$$

$$\Rightarrow c_n=a_n\frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}=\frac{k_nk_{n-2}}{k_{n-1}^2}$$

■

No começo do capítulo foi colocada a fórmula para encontrarmos as raízes de um polinômio do segundo grau. Sabemos também que polinômios de grau igual ou superior a cinco não são solúveis por meio de radicais. A localização de alguma raiz nesse caso envolve a utilização de métodos numéricos. Mas mesmo com a ajuda de algoritmos nada nos garante que estamos próximos de uma raiz ou que esta seja simples.

Uma característica muito útil dos polinômios ortogonais é que suas raízes estão confinadas ao intervalo $[a,b]$ conforme diz o teorema abaixo.

Teorema 1.3 *Os zeros de polinômios ortogonais reais são reais, simples e estão localizados no interior de* $[a,b]$.

Demonstração: Seja $n \geq 1$ fixo. Se $p_n(x)$ tem sinal constante em $[a,b]$, digamos positivo, então

$$\int_a^b w(x)\, p_n(x)\, dx = \langle p_n, p_0 \rangle_w > 0$$

mas isso contradiz a ortogonalidade dos $p_n(x), n \geq 1$, logo ele deve se anular em pelo menos um ponto.

Vamos supor agora que exista um $x_1 \in (a,b)$ que seja um zero de $p_n(x)$ com multiplicidade maior do que 1, então $\dfrac{p_n(x)}{(x-x_1)^2}$ é um polinômio de grau $n-2$. Sendo assim,

$$0 = \left\langle p_n, \frac{p_n}{(x-x_1)^2} \right\rangle_w = \left\langle 1, \frac{(p_n)^2}{(x-x_1)^2} \right\rangle_w > 0$$

e isso é um absurdo, logo toda raiz é simples.

Para provarmos que as raízes estão localizadas no interior do intervalo, supomos que existam somente $j < n$ raízes em (a,b), então

$$p_n(x)(x-x_1)\ldots(x-x_j) = \hat{p}_{n-j}(x)(x-x_1)^2 \ldots (x-x_j)^2$$

em que $\hat{p}_{n-j}(x)$ é um polinômio de grau $n-j$ e não muda de sinal em (a,b) (pela hipótese de que existem somente $j < n$ raizes em (a,b)). Portanto,

$$\langle p_n, (x-x_1)\ldots(x-x_j) \rangle_w = \left\langle \hat{p}_{n-j}, (x-x_1)^2 \ldots (x-x_j)^2 \right\rangle_w$$

O lado direito não se anula e o lado esquerdo anula-se caso $j < n$, logo $j \geq n$, mas $j > n$ é impossível, portanto $j = n$.

$\blacksquare$

Veremos agora o polinômio núcleo de um sistema e como esta função assume um papel importante. Comecemos com sua definição.

Definição 1.4 *Seja* $\{p_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$, *uma seqüência de polinômios ortonormais reais. A função simétrica*

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} p_k^*(x)\, p_k^*(y)$$

é o polinômio núcleo de ordem n *do sistema ortonormal.*

O teorema a seguir nos diz que a função acima é a única com a propriedade de que

$$\langle P(x), K_n(x,y)\rangle_x = P(y)$$

para qualquer polinômio de grau menor ou igual a n.

Teorema 1.4 *Para qualquer polinômio $P \in \mathbb{P}_n$, vale*

$$\langle P(x), K_n(x,y)\rangle_x = P(y)$$

Reciprocamente, se $K(x,y)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n em x e y e se vale $\langle P(x), K(x,y)\rangle_w = P(y)$ $\forall P \in \mathbb{P}_n$, então $K(x,y) = K_n(x,y)$. O subíndice x indica que a integração é feita na variável x.

Demonstração: Podemos escrever $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \langle P, p_k^*\rangle_w p_k^*(x)$. Tomando o produto interno de $P(x)$ com $K_n(x,y)$ temos

$$\langle P(x), K_n(x,y)\rangle_x = \left\langle P(x), \sum_{k=0}^{n} p_k^*(x)\, p_k^*(y)\right\rangle_x = \sum_{k=0}^{n} p_k^*(y)\, \langle P(x), p_k^*(x)\rangle_x = P(y)$$

Portanto,

$$\langle P(x), K_n(x,y)\rangle_x = P(y) \tag{1.3}$$

Suponha agora que $\langle P(x), K(x,y)\rangle_x = P(y)$ $\forall P \in \mathbb{P}_n$. Vamos definir $P(x) = K_n(x,w)$. Então $\langle K_n(x,w), K(x,y)\rangle_x = P(y) = K_n(y,w)$.

Por outro lado, temos também que

$$\langle K_n(x,w), K(x,y)\rangle_x = \langle K(x,y), K_n(x,w)\rangle_x \overset{(1.3)}{=} K(w,y)$$

■

Dados dois pontos x e y, calcular o valor de $K_n(x,y)$ pela definição é consideravelmente exaustivo, neste caso, uma fórmula conhecida como Fórmula de Christoffel-Darboux nos fornece imediatamente o valor da função para um par (x,y).

Teorema 1.5 *(Christoffel-Darboux): Sejam $p_n^*(x) = k_n x^n + ..., n \geq 0$, polinômios ortogonais reais. Então,*

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} p_k^*(x)\, p_k^*(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_{n+1}^*(x)\, p_n^*(y) - p_n^*(x)\, p_{n+1}^*(y)}{x-y}$$

Demonstração: Vamos chamar o lado direito por $K(x,y)$ e vamos considerar y fixo. Então o numerador de $K(x,y)$ é um polinômio de grau $\leq n+1$ em x e se anula se $x=y$, logo é divisível por $x-y$. Portanto $K(x,y)$ é um polinômio de grau $\leq n$ em ambas as variáveis. Devemos mostrar que se $p(x)\in\mathbb{P}_n$ vale $\langle p(x),K(x,y)\rangle_x = p(y)$ pois então pelo teorema anterior temos $K(x,y)=K_n(x,y)$. Para simplificar a notação, denotaremos $\alpha = p^*_{n+1}(x)\,p^*_n(y) - p^*_n(x)\,p^*_{n+1}(y)$, e o x subscrito nessa demonstração indica que a integração é na variável x, então

$$\begin{aligned}
\langle p(x),K(x,y)\rangle_x &= \frac{k_n}{k_{n+1}}\int_a^b w(x)\,p(x)\,\frac{\alpha}{x-y}dx\\
&= \frac{k_n}{k_{n+1}}\int_a^b \frac{w(x)}{x-y}\left[\alpha p(x) - p(y) + p(y)\right]dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k_n}{k_{n+1}}\int_a^b w(x)\left[\alpha\left(\frac{p(x)-p(y)}{x-y}\right)\right]dx+\\
&\quad \frac{k_n}{k_{n+1}}\int_a^b w(x)\left[\frac{p(y)}{x-y}\left[-p^*_n(x)\,p^*_{n+1}(y)+p^*_{n+1}(x)\,p^*_n(y)\right]\right]dx\\
&= \frac{k_n}{k_{n+1}}\int_a^b w(x)\left[\alpha\left(\frac{p(x)-p(y)}{x-y}\right)\right]dx+\\
&\quad \frac{k_n}{k_{n+1}}\int_a^b w(x)\left[\frac{p(y)}{x-y}\beta\right]dx
\end{aligned}$$

em que

$$\beta = \left[p^*_n(x)\,p^*_{n+1}(x) - p^*_n(x)\,p^*_{n+1}(y) + p^*_{n+1}(x)\,p^*_n(y) - p^*_n(x)\,p^*_{n+1}(x)\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k_n}{k_{n+1}}\int_a^b w(x)\left[\alpha\left(\frac{p(x)-p(y)}{x-y}\right)\right]dx+\\
&\quad \frac{k_n}{k_{n+1}}\int_a^b w(x)\left[p(y)\,p^*_n(x)\left(\frac{p^*_{n+1}(x)-p^*_{n+1}(y)}{x-y}\right)\right]dx+\\
&\quad \frac{k_n}{k_{n+1}}\int_a^b w(x)\left[p(y)\,p^*_{n+1}(x)\left(\frac{p^*_n(y)-p^*_n(x)}{x-y}\right)\right]dx\\
&= \frac{k_n}{k_{n+1}}\int_a^b w(x)\left[p^*_{n+1}(x)\,p^*_n(y)-p^*_n(x)\,p^*_{n+1}(y)\right]\left(\frac{p(x)-p(y)}{x-y}\right)dx+\\
&\quad \frac{k_n}{k_{n+1}}\int_a^b w(x)\,p(y)\left[p^*_n(x)\,w(x)\left(\frac{p^*_{n+1}(x)-p^*_{n+1}(y)}{x-y}\right)\right]dx+\\
&\quad \frac{k_n}{k_{n+1}}\int_a^b w(x)\,p(y)\left[p^*_{n+1}(x)\,w(x)\left(\frac{p^*_n(y)-p^*_n(x)}{x-y}\right)\right]dx\\
&= \frac{k_n}{k_{n+1}}\left\langle\left[p^*_{n+1}(x)\,p^*_n(y)-p^*_n(x)\,p^*_{n+1}(y)\right],\frac{p(x)-p(y)}{x-y}\right\rangle_x+\\
&\quad \frac{k_n}{k_{n+1}}p(y)\left\langle p^*_n(x),\frac{p^*_{n+1}(x)-p^*_{n+1}(y)}{x-y}\right\rangle_x+\\
&\quad \frac{k_n}{k_{n+1}}p(y)\left\langle p^*_{n+1}(x),\frac{p^*_n(y)-p^*_n(x)}{x-y}\right\rangle_x
\end{aligned}$$

Como $p(x)\in\mathbb{P}_n$, temos que $\dfrac{p(x)-p(y)}{x-y}$ e $\dfrac{p^*_n(y)-p^*_n(x)}{x-y}$ são polinômios de grau $\leq n-1$ em x. Então, pela ortogonalidade, o primeiro e o terceiro membro se anulam.

Logo,

$$\langle p(x), K(x,y)\rangle_x = \frac{k_n}{k_{n+1}} p(y) \left\langle p_n^*(x), \frac{p_{n+1}^*(x) - p_{n+1}^*(y)}{x-y} \right\rangle_x$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_{n+1}^*(x) - p_{n+1}^*(y)}{x-y} &= k_n \left[\frac{y^{n+1} - x^{n+1}}{x-y} + ... \right] \\
&= k_n x^n + ... \\
&= p_n^*(x) + \text{ polinômio de menor grau}
\end{aligned}$$

Então $\frac{k_n}{k_{n+1}} \left\langle p_n^*(x), \frac{p_{n+1}^*(x) - p_{n+1}^*(y)}{x-y} \right\rangle_x = 1$
e o teorema segue imediatamente.

■

Para terminarmos essa pequena introdução aos polinômios ortogonais, veremos agora um teorema sobre o erro de projeção.

Teorema 1.6 *Seja* $\{\varphi_0, \varphi_1, ...\}$ *um sistema ortonormal de polinômios obtido aplicando o processo de Gram-Schmidt a* $\{1, x, x^2, ...\}$ *com o produto interno dado por (1.1) e* $\int_c^d w(x)\,dx > 0,\ \forall (c,d) \subset (a,b)$ *e* $\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx$ *existe* $\forall f(x) \in \mathcal{C}[a,b]$. *Seja* $h \in \mathcal{C}[a,b]$ *e* $S_n h = \sum_{i=0}^{n} \langle f, \varphi_i \rangle_w \varphi_i$. *Então,*

$$\|h - S_n h\|_w \to 0 \textit{ quando } n \to \infty$$

Demonstração: Seja $h \in \mathcal{C}[a,b]$. Seja $x = (b-a)\,t + a$. Logo $t \in [0,1]$ pois $x \in [a,b]$.

Seja $g(t) \triangleq h(b - a(t) + a)$. Então, $g \in \mathcal{C}[0,1]$.

Segue da prova do teorema de Weierstrass devida a S. Bernstein (ver [1] p. 111),

$$\|g - B_n(g)\|_\infty \leq \frac{3}{2} w \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

em que

$$B_m(g) \triangleq \sum_{k=0}^{m} g\left(\frac{k}{m}\right) \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} t^k (1-t)^{m-k}$$

é o polinômio de Bernstein de grau n e $w(\delta) \triangleq \sup\limits_{\substack{x_1, x_2 \in [0,1] \\ |x_1 - x_2| \leq \delta}} |g(x_1) - g(x_2)|$.

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \|g - B_n(g)\|_\infty = 0$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left\|h - B_n\left(g; \tfrac{x-a}{b-a}\right)\right\|_w &= \left(\int_a^b \left[h(x) - B_n\left(g; \frac{x-a}{b-a}\right)\right]^2 w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{t=\frac{x-a}{b-a}}{=} \sqrt{b-a}\left(\int_0^1 \left[g(t) - B_n(g;t)\right]^2 \frac{w((b-a)t+a)}{\tilde{w}(t)}dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|g - B_n(g)\|_\infty \sqrt{\int_a^b w(x)\,dx}
\end{aligned}$$

Mas

$$\|h - S_n(h)\|_w \leq \left\|h - B_n\left(g; \frac{x-a}{b-a}\right)\right\|_w \leq \sqrt{\int_a^b w(x)\,dx}\, \|g - B_n(g)\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

.

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \|h - S_n(h)\|_w = 0$$

■

1.2 Problemas de Sturm-Liouville

Sejam $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ funções contínuas no intervalo fechado $[0,1]$ e $p(x)$,$r(x) > 0$ em todo o intervalo $[0,1]$.

Consideremos também uma equação diferencial do tipo

$$(p(x)\,y')' - q(x)\,y + \lambda r(x)\,y = 0 \tag{1.4}$$

com $0 < x < 1$, junto com as condições de contorno

$$\begin{aligned}
a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0 \\
b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0
\end{aligned} \tag{1.5}$$

em que $a_1^2 + a_2^2 > 0$ e $b_1^2 + b_2^2 > 0$.

Problemas desse tipo são denominados de problemas de Sturm-Liouville regular. O termo 'regular' se refere ao fato de que as funções $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ têm suas hipóteses (continuidade das funções $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ e positividade das funções $p(x)$ e $r(x)$) válidas para todo o intervalo $[0,1]$. Caso alguma dessas funções não satisfaça alguma condição em pelo menos um dos extremos, o problema de Sturm-Liouville passa a ser singular e este será abordado depois.

A equação (1.4) pode ser vista como um problema de autovalores para operadores, porém precisamos definir autovalor e autofunção para operadores antes de prosseguirmos.

Definição 1.5 *Seja L um operador linear atuando sobre um espaço de funções $\mathcal{F}$, então $f \in \mathcal{F}$, f não identicamente nula, é uma autofunção do operador L e λ, um escalar, é o autovalor associado à autofunção f se $Lf = \lambda f$.*

Definiremos então um operador L por

$$\begin{array}{rcl} L : \mathcal{C}^2[0,1] & \longrightarrow & \mathcal{C}^0[0,1] \\ y & \longmapsto & L(y) = -(p(x)\,y')' + q(x)\,y \end{array}$$

Desse modo, podemos escrever (1.4) da forma

$$L(y) = \lambda r(x)\,y$$

e então falar de algumas características dos autovalores dos problemas de Sturm-Liouville regular.

Nesse momento deduziremos uma identidade que será utilizada mais adiante.

Sejam u, v duas funções de classe $\mathcal{C}^2$ no intervalo $[0,1]$, então

$$\int_0^1 L(u)\,v dx = \int_0^1 -(pu')'\,v + quvdx$$

Integrando por partes duas vezes o lado direito, obtemos

$$\int_0^1 -(pu')'\,v + quvdx = -pu'v|_0^1 + \int_0^1 pu'v'dx + \int_0^1 quvdx$$

$$= -pu'v|_0^1 + upv' - \int_0^1 u\,(pv')'\,dx + \int_0^1 quvdx = -p\,[u'v - uv']\,|_0^1 + \int_0^1 uL(v)\,dx$$

Portanto,

$$\int_0^1 L(u)\,vdx = -p\,[u'v - uv']\,|_0^1 + \int_0^1 uL(v)\,dx$$

Passando a última integral acima para o outro lado, temos

$$\int_0^1 [L(u)\,v - uL(v)]\,dx = -p\,[u'v - uv']\,|_0^1$$

que é a identidade de Lagrange.

Se u e v satisfizerem as condições de contorno, então

$$\int_0^1 [L(u)\,v - uL(v)]\,dx = 0 \tag{1.6}$$

Consideremos agora que a função peso $w(x)$ do produto interno dado por (1.1) é a função constante $w(x) = 1$, assim, $\langle u,v\rangle_w = \langle u,v\rangle_1 = \int_0^1 1\; u(x)\,v(x)\,dx$. Para simplificar a notação omitiremos o subíndice $_1$ em $\langle u,v\rangle_1$, assim, $\langle u,v\rangle_1 = \langle u,v\rangle$, então podemos escrever (1.6) da forma

$$\langle L(u)\,,v\rangle = \langle u, L(v)\rangle \tag{1.7}$$

Estando o problema (1.4) escrito na forma de operador, podemos deduzir um resultado sobre seus autovalores.

Até agora vimos produtos internos reais, precisamos definir o produto interno complexo.

Sejam u e v duas funções complexas e mensuráveis, então a função

$$\langle u, v\rangle_w = \int_a^b w(x)\, u(x)\, \overline{v(x)} dx$$

é um produto interno complexo.

Algo interessante sobre os autovalores do problema (1.4) é que nenhum deles é um número complexo. Vejamos agora o teorema que retrata essa interessante e útil característica dos autovalores de (1.4).

Teorema 1.7 *Todos os autovalores do problema de Sturm-Liouville (1.4) são reais.*

Demonstração: : Vamos supor que λ seja um autovalor complexo e que ϕ seja uma autofunção correspondente, então pela equação (1.7) temos,

$$\langle L(\phi), \phi\rangle = \langle \phi, L(\phi)\rangle$$

Como $L(\phi) = \lambda r \phi$, temos

$$\langle \lambda r \phi, \phi\rangle = \langle \phi, \lambda r \phi\rangle \tag{1.8}$$

Escrevendo a equação (1.8) na forma complexa temos

$$\int_0^1 \lambda r(x)\, \phi(x)\, \overline{\phi(x)} dx = \int_0^1 \phi(x)\, \overline{\lambda r(x)\, \phi(x)} dx$$

pois o produto interno complexo é $\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(x)\, \overline{v(x)} dx$.

Como por hipótese temos que $r(x)$ é real, então $\overline{r(x)} = r(x)$ e, juntando as duas integrais encontramos

$$\left(\lambda - \overline{\lambda}\right) \int_0^1 r(x)\, \phi(x)\, \overline{\phi(x)} dx = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) \int_0^1 r(x)\, |\phi(x)|^2 dx = 0$$

Como $\int_0^1 r(x)\, |\phi(x)|^2 dx > 0$ por hipótese ($r(x) > 0$ e $\phi(x)$ é autofunção - que por definição é não nula) temos $\left(\lambda - \overline{\lambda}\right) = 0$, assim, $\lambda = \overline{\lambda}$, portanto $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\blacksquare$

As autofunções correspondentes aos autovalores formam um conjunto ortogonal. Além disso, os autovalores são simples, ou seja, para cada autovalor temos apenas uma autofunção linearmente independente. Podemos verificar essas afirmações através dos dois teoremas a seguir.

Teorema 1.8 *Se ϕ_1 e ϕ_2 são duas autofunções do problema (1.4) com λ_1 e λ_2 autovalores correspondentes e $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então*

$$\int_0^1 r(x)\,\phi_1(x)\,\phi_2(x)\,dx = 0 \tag{1.9}$$

Demonstração: Temos $L(\phi_1) = \lambda_1 r\phi_1$ e $L(\phi_2) = \lambda_2 r\phi_2$, pela identidade de Lagrange segue

$$\begin{gathered}\langle \lambda_1 r\phi_1, \phi_2\rangle - \langle \phi_1, \lambda_2 r\phi_2\rangle = 0\\ \lambda_1 \int_0^1 r\phi_1\overline{\phi_2}dx - \overline{\lambda_2}\int_0^1 \phi_1\overline{r}\phi_2 dx = 0\\ (\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^1 r\phi_1\phi_2 dx = 0\end{gathered}$$

pois pelo teorema 1.7 os autovalores são reais.

Como $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$, segue que $\displaystyle\int_0^1 r\phi_1\phi_2 dx = 0$.

■

Teorema 1.9 *Todos os autovalores do problema de Sturm-Liouville são simples, isto é, a cada autovalor corresponde somente uma autofunção linearmente independente.*

Demonstração: Suporemos que λ seja um autovalor e $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ sejam duas autofunções linearmente independentes.

Calculemos o wronskiano de $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$.

$$W(\phi_1, \phi_2)(x) = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{vmatrix} = \phi_1(x)\,\phi_2'(x) - \phi_2(x)\,\phi_1'(x)$$

Agora vamos avaliar em $x = 0$, segue então que

$$W(\phi_1, \phi_2)(0) = \phi_1(0)\,\phi_2'(0) - \phi_2(0)\,\phi_1'(0)$$

Usando agora as condições (1.5), sem perder generalidade, podemos isolar os termos com derivadas e substituir na igualdade acima. Então,

$$W(\phi_1, \phi_2)(0) = \phi_1(0)\,\phi_2'(0) - \phi_2(0)\,\phi_1'(0) = -\phi_1(0)\,\frac{a_1}{a_2}\phi_2(0) + \phi_2(0)\,\frac{a_1}{a_2}\phi_1(0) = 0$$

Nesse caso, como existe um x em que o wronskiano é nulo, então $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ são linearmente dependentes, mas isso contradiz a hipótese de que as autofunções são linearmente independentes. Portanto, os autovalores do problema (1.4) são simples.

■

Para complementar as informações sobre os problemas de Sturm-Liouville regular, faremos uma analogia com as séries de Fourier e enunciar um teorema que diz que uma função pode ser expandida numa série de autofunções do problema de Sturm-Liouville, em seguida discutiremos um pouco o problema não homogêneo e finalmente chegaremos no caso singular.

Da teoria das séries de Fourier, sabemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, seccionalmente diferenciável e periódica de período 2L, L > 0, converge, em cada x, para

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

De modo análogo, também podemos expandir uma função $f(x)$ em autofunções do problema de Sturm-Liouville.

Antes de prosseguirmos, devemos definir o que é uma autofunção normalizada, pois esta definição se faz necessária para o teorema a seguir, cuja demonstração será omitida (ver, por exemplo, [11]).

Definição 1.6 *Uma autofunção $\phi_k(x)$ é uma autofunção normalizada quando sua norma (norma induzida pelo produto interno) é igual a um.*

Teorema 1.10 *Seja $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ um conjunto de autofunções normalizadas do problema de Sturm-Liouville regular. Sejam $f(x)$ e $f'(x)$ contínuas por partes em $[0,1]$. Então a série*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k(x)$$

com os coeficientes c_k, $k = 0, 1, ...,$ dados por

$$c_k = \int_0^1 r(x) f(x) \phi_k(x)\, dx = \langle f, \phi_k \rangle_r \tag{1.10}$$

converge para $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ *em cada ponto no intervalo aberto $(0,1)$.*

Passaremos agora para o caso do problema não homogêneo, isto é, o problema de Sturm-Liouville tem a forma

$$(p(x)y')' - q(x)y + \eta r(x)y = f(x) \tag{1.11}$$

com $0 < x < 1$. As mesmas condições de contorno do caso homogêneo são assumidas e as hipóteses sobre p, p', q e r são idênticas.

Utilizaremos as autofunções do problema homogêneo afim de obtermos uma solução para a equação (1.11).

Sejam $\{\phi_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ as autofunções do problema homogêneo e $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ os autovalores correspondentes. Vamos supor que a solução do problema não homogêneo $y(x)$ possa ser escrita da forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \phi_k(x)$$

com os coeficientes b_k dados pela equação (1.10),

$$b_k = \int_0^1 r(x)\, y(x)\, \phi_k(x)\, dx$$

O problema não homogêneo acima, quando escrito na forma de operador, assume a forma

$$L(y) - \eta r(x)\, y = f(x)$$

Então, tomando o produto interno com $\phi_k(x)$ temos

$$\langle L(y) - \eta r(x)\, y, \phi_k \rangle = \langle f, \phi_k \rangle$$

Distribuindo o produto interno e usando (1.7) encontramos

$$\langle y, L(\phi_k) \rangle - \eta \langle y, \phi_k \rangle_r = \left\langle \frac{f}{r}, \phi_k \right\rangle_r$$

Como $\phi_k(x)$ é uma autofunção então $L(\phi_k) = \lambda_k r(x)\, \phi_k(x)$, logo

$$\lambda_k \langle y, \phi_k \rangle_r - \eta \langle y, \phi_k \rangle_r = \left\langle \frac{f}{r}, \phi_k \right\rangle_r \tag{1.12}$$

Denotando

$$b_k = \langle y, \phi_k \rangle_r \quad \text{e} \quad c_k = \left\langle \frac{f}{r}, \phi_k \right\rangle_r$$

a expressão (1.12) assume a forma

$$\lambda_k b_k - \eta b_k = c_k \Rightarrow b_k(\lambda_k - \eta) - c_k = 0$$

Analisaremos o termo $b_k(\lambda_k - \eta) - c_k$. Este deve ser nulo para todo x e para todo k.

Dividiremos agora em dois casos a expressão $b_k(\lambda_k - \eta) - c_k$.

Caso 1)

Se $\lambda_k \neq \eta \ \forall k$, então

$$b_k = \frac{c_k}{\lambda_k - \eta}$$

e

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k - \eta} \phi_k(x)$$

Se a função $f(x)$ for contínua temos que a série acima converge em cada ponto x.
Caso 2) se $\lambda_{k_0} = \eta$ para algum k_0, então,

$$0 b_{k_0} - c_{k_0} = 0$$

$i)$ se $c_{k_0} \neq 0$ então não existe solução para o problema homogêneo.

$ii)$ se $c_{k_0} = 0$ então temos $b_{k_0} \in \mathbb{R}$ e, por esse fato, existem infinitas soluções.

Vejamos que para c_{k_0} ser nulo devemos ter

$$c_{k_0} = \int_0^1 f(x) \phi_k(x) \, dx = 0$$

ou seja, a função $f(x)$ deve ser ortogonal a autofunção $\phi_{k_0}(x)$.

Até agora vimos o problema de Sturm-Liouville regular, isto é, um problema do tipo (1.4) em que as funções $p(x)$ e $r(x)$ são positivas em $[0,1]$.

Problemas de Sturm-Liouville singular são aqueles que têm todas as hipóteses sobre as funções $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ do caso regular válidas para o intervalo aberto $(0,1)$ e que pelo menos uma das funções não satisfaça alguma das condições em, no mínimo, uma das extremidades.

Veremos agora que condições de contorno podemos ter para os pontos de contorno singular (pontos do extremo do intervalo em que não temos as hipóteses satisfeitas).

Para isso, vamos analisar a identidade

$$\int_0^1 [L(u) v - u L(v)] \, dx = 0 \tag{1.13}$$

que foi vista no problema regular e tentar descobrir sobre que condições ela é válida para o problema singular.

Seja $x = 0$ um ponto de contorno singular e que $x = 1$ não o seja. Diferente do caso anterior, não podemos considerar $\int_0^1 L(u) v dx$ pois $x = 0$ é ponto de contorno singular, assim, consideraremos $\int_\varepsilon^1 L(u) v dx$ e tomaremos o limite com epsilon tendendo a zero.

Integrando duas vezes por partes a função $\int_\varepsilon^1 L(u) v dx$ encontramos

$$\int_\varepsilon^1 [L(u) v - u L(v)] \, dx = -p(x) [u'(x) v(x) - u(x) v'(x)] |_\varepsilon^1$$

como estamos supondo que $x = 1$ é ponto de contorno regular, ou seja, u e v se anulam na fronteira, então

$$\int_{\varepsilon}^{1} [L(u)v - uL(v)]\,dx = p(\varepsilon)\,[u'(\varepsilon)v(\varepsilon) - u(\varepsilon)v'(\varepsilon)]$$

Aplicando o limite quando $\varepsilon \to 0$ temos

$$\int_{0}^{1} [L(u)v - uL(v)]\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} p(\varepsilon)\,[u'(\varepsilon)v(\varepsilon) - u(\varepsilon)v'(\varepsilon)] \tag{1.14}$$

Assim, além das hipóteses sobre $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$, (1.14) também deve ser satisfeita para que (1.13) seja válida.

Uma das diferenças mais fortes entre os dois problemas é que o regular tem um espectro discreto (o conjunto dos autovalores é enumerável) enquanto o singular pode ter um espectro contínuo. O espectro sendo contínuo implica que não podemos ter uma expansão em autofunções, visto que a quantidade de autofunções é não enumerável.

1.3 Os Polinômios de Jacobi

A utilidade dos polinômios de Jacobi é extremamente elevada, sendo eles uma das classes de polinômios ortogonais mais importantes. Mostraremos ao longo desta seção como os polinômios de Jacobi são obtidos e algumas propriedades a seu respeito.

Os polinômios de Jacobi são obtidos pela ortonormalização da base canônica dos polinômios usando a função peso $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}$, em que α, $\beta \geq -\frac{1}{2}$. Para a integração no produto interno o intervalo utilizado é o $[-1, 1]$. Os polinômios de Jacobi são denotados por $p_n^{\alpha,\beta}(x)$ e denotaremos por $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ os polinômios ortogonais, além disso, 'normalizamos' os polinômios de Jacobi de modo a termos

$$P_n^{\alpha,\beta}(1) = \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{n!} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha+1)}$$

em que $\Gamma(x)$ é a função gama. Para diferentes valores de α e β temos alguns nomes especiais.

$\alpha = 0$, $\beta = 0$: Polinômios de Legendre

$\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$: Polinômios de Chebyshev de primeira espécie

$\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$: Polinômios de Chebyshev de segunda espécie

$\alpha = \beta$: Polinômios de Gegenbauer

Do mesmo modo como temos uma fórmula de recorrência para o cálculo dos polinômios ortogonais sem a necessidade de se efetuar todo o processo de Gram-Schmidt, temos também uma fórmula que nos fornece exatamente qual é o polinômio de Jacobi de grau n diretamente, ou seja, não havendo a necessidade de calcularmos os $n-1$ primeiros polinômios de Jacobi pelo processo de Gram-Schmidt.

A fórmula mensionada é a Fórmula de Rodrigues. Segue então o teorema.

Teorema 1.11 *(Fórmula de Rodrigues) Seja $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ um polinômio de Jacobi, então*

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right\}$$

Demonstração: Vamos considerar a expressão

$$Q_n(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right\}$$

Mostraremos pela Fórmula de Leibnitz que $Q_n(x)$ é um polinômio.

Então, pela fórmula de Leibnitz temos

$$\begin{aligned}
Q_n(x) &= (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}(-1)^j(n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots \\
&\quad \ldots(n+\alpha-j+1)(1-x)^{n+\alpha-j}(n+\beta)(n+\beta-1)\ldots \\
&\quad \ldots(n+\beta-n+j+1)(1+x)^{n+\beta-n+j} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}(-1)^j(n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(n+\alpha-j+1)\ldots \\
&\quad \ldots(1-x)^{n-j}(n+\beta)(n+\beta-1)\ldots(\beta+j+1)(1+x)^j \\
&= \sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}(-1)^j\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha-j+1)\Gamma(\beta+j+1)}(1-x)^{n-j}(1+x)^j
\end{aligned}$$

Assim, $Q_n(x)$ é um polinômio de grau n. Mostraremos agora que $Q_n(x)\perp\mathbb{P}_{n-1}$, isto é, que o polinômio $Q_n(x)$ é ortogonal a qualquer polinômio de grau menor ou igual a $n-1$. Neste caso temos que Q_n é igual a $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ exceto por uma constante, ou seja, $P_n^{\alpha,\beta}(x) = cQ_n(x)$.

Seja $s(x)\in\mathbb{P}_{n-1}$. Então,

$$\begin{aligned}
I = \langle Q_n, s\rangle_w &= \int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}Q_n(x)\,s(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right\}s(x)\,dx
\end{aligned}$$

Integrando por partes temos

$$I = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right\}s(x)\,|_{-1}^{1} -$$

$$-\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right\} s'(x)\, dx$$

O primeiro termo se anula nos pontos $x = -1$ e $x = 1$. Integrando por partes n vezes encontramos

$$I = (-1)^n \int_{-1}^{1} (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} s^{(n)}(x)\, dx = 0$$

pois como $s(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ então $s^{(n)}(x) = 0$.

Para terminarmos a demonstração, falta determinarmos a constante c tal que $P_n^{\alpha,\beta}(x) = cQ_n(x)$.

Sabemos que, pela fórmula de Leibnitz,

$$Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} (-1)^j \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha-j+1)\Gamma(\beta+j+1)} (1-x)^{n-j} (1+x)^j$$

então, avaliando em $x = 1$ temos

$$Q_n(1) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} 2^n$$

Como $P_n^{\alpha,\beta}(1) = \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}$ segue que $c = \dfrac{(-1)^n}{n!2^n}$

■

Por serem polinômios, podemos escrevê-los na forma

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = K_n x^n + S_n x^{n-1} + ...$$

e o teorema a seguir da uma fórmula explícita para os coeficientes K_n e S_n.

Teorema 1.12 *Seja $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ um polinômio de Jacobi, então o coeficiente do termo de grau n e grau $n-1$ são dados por*

$$K_n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 2n+\alpha+\beta \\ n \end{pmatrix}$$

e

$$S_n = \frac{\alpha-\beta}{2^n} \begin{pmatrix} 2n+\alpha+\beta-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$$

Demonstração: Para demonstrarmos as fórmulas acima precisamos estabelecer duas identidades para coeficientes binomiais.

Seja $x \in (-1, 1)$, então

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} x^k$$

e

$$(1+x)^q = \sum_{t=0}^{\infty} \begin{pmatrix} q \\ t \end{pmatrix} x^t$$

Multiplicando as duas expressões acima encontramos

$$(1+x)^{p+q} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} x^k\right] \left[\sum_{t=0}^{\infty} \begin{pmatrix} q \\ t \end{pmatrix} x^t\right] = \sum_{k,t=0}^{\infty} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ t \end{pmatrix} x^{k+t}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} p \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ k-j \end{pmatrix}$$

Veremos agora apenas o termo

$$\sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ k-j \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ k-j \end{pmatrix} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (1+x)^{p+q} |_{x=0} = \begin{pmatrix} p+q \\ k \end{pmatrix}$$

Temos também que

$$p\,(1+x)^{p-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} x^{k-1}$$

Segue disso que,

$$px\,(1+x)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{j=1}^{k} \begin{pmatrix} p \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ k-j \end{pmatrix}$$

Então, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} j \begin{pmatrix} p \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ k-j \end{pmatrix} &= \frac{1}{n!} \frac{d^k}{dx^k} px\,(1+x)^{p+q-1} |_{x=0} \\
&= \frac{p}{n!} \left(x \frac{d^k}{dx^k} (1+x)^{p+q-1} + n \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (1+x)^{p+q-1} |_{x=0} \right) \\
&= p \begin{pmatrix} p+q-1 \\ k-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}(x-1)^{k-j}(x+1)^{j} &= \left[x^{k-j}-(k-j)\,x^{k-j-1}+...\right]\left[x^{j}+jx^{j-1}+...\right]\\ &= x^{k}+(2j-k)\,x^{k-1}+...\end{aligned}$$

Assim, segue que

$$K_n=\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n+\alpha\\ j\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}n+\beta\\ n-j\end{array}\right)=\frac{1}{2^n}\left(\begin{array}{c}2n+\alpha+\beta\\ n\end{array}\right)$$

Do mesmo modo temos

$$\begin{aligned}2^nS_n &= \sum_{j=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n+\alpha\\ j\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}n+\beta\\ n-j\end{array}\right)(2j-n)\\ &= 2\sum_{j=0}^{n}j\left(\begin{array}{c}n+\alpha\\ j\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}n+\beta\\ n-j\end{array}\right)-n\sum_{j=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n+\alpha\\ j\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}n+\beta\\ n-j\end{array}\right)\\ &= 2\,(n+\alpha)\left(\begin{array}{c}2n+\alpha+\beta-1\\ n-1\end{array}\right)-n\left(\begin{array}{c}2n+\alpha+\beta\\ n\end{array}\right)\\ &= (\alpha-\beta)\left(\begin{array}{c}2n+\alpha+\beta-1\\ n-1\end{array}\right)\end{aligned}$$

■

Como os polinômios $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ não são normais, calcularemos agora sua norma ao quadrado. Essa norma é uma norma induzida pelo produto interno (1.1).

Teorema 1.13 *Sejam $\left\{P_n^{\alpha,\beta}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ os polinômios ortogonais de Jacobi, então $\|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|^2=\left\langle P_n^{\alpha,\beta},P_n^{\alpha,\beta}\right\rangle_w$ é dada por*

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\left(P_n^{\alpha,\beta}(x)\right)^2dx=\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2n+\alpha+\beta+1)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

Demonstração: Denotemos $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}=w(x)$ e $P_n^{\alpha,\beta}(x)=P_n(x)$.

Seja

$$I=\int_{-1}^{1}w(x)\,[P_n(x)]^2\,dx=\int_{-1}^{1}w(x)\,P_n(x)\,P_n(x)\,dx$$

Agora, como $P_n(x)=K_nx^n+$ polinômio de menor grau, segue que

$$I=K_n\int_{-1}^{1}w(x)\,P_n(x)\,x^ndx=\frac{(-1)^nK_n}{2^nn!}\int_{-1}^{1}x^n\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right\}dx$$

Integrando por partes n vezes encontramos,

$$I=\frac{K_n}{2^n}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\,dx$$

e que

$$I = \frac{K_n}{2^n}.2^{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma\left(n+\alpha+1\right)\Gamma\left(n+\beta+1\right)}{\Gamma\left(2n+\alpha+\beta+1\right)}$$

e o teorema segue.

$\blacksquare$

Agora que temos a norma dos polinômios de Jacobi, podemos estabelecer uma relação entre os polinômios $p_n^{\alpha,\beta}(x)$ e $P_n^{\alpha,\beta}(x)$.

A relação entre $p_n^{\alpha,\beta}(x)$ e $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ é dada pela seguinte proposição.

Proposição 1.2 *Sejam $\left\{P_n^{\alpha,\beta}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ os polinômios ortogonais de Jacobi. Então, os polinômios ortonormais de Jacobi, denotados por $p_n^{\alpha,\beta}(x)$, são dados por*

$$p_n^{\alpha,\beta}(x) = \sqrt{\frac{(2n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}}\frac{\Gamma\left(n+1\right)\Gamma\left(n+\alpha+\beta+1\right)}{\Gamma\left(n+\alpha+1\right)\Gamma\left(n+\beta+1\right)}}P_n^{\alpha,\beta}(x)$$

Demonstração:

$$p_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{P_n^{\alpha,\beta}(x)}{\left\langle P_n^{\alpha,\beta}, P_n^{\alpha,\beta}\right\rangle_w} = \sqrt{\frac{(2n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}}\frac{\Gamma\left(n+1\right)\Gamma\left(n+\alpha+\beta+1\right)}{\Gamma\left(n+\alpha+1\right)\Gamma\left(n+\beta+1\right)}}P_n^{\alpha,\beta}(x)$$

$\blacksquare$

De acordo com os teoremas 1.1 e 1.2 , podemos deduzir o seguinte teorema sobre a recorrência dos polinômios de Jacobi.

Teorema 1.14 *Sejam $\left\{P_n^{\alpha,\beta}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ os polinômios ortogonais de Jacobi. A seguinte relação de recorrência é satisfeita*

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = (A_n x + B_n)\, P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) - C_n P_{n-2}^{\alpha,\beta}(x)$$

em que

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)}{2n(n+\alpha+\beta)} \\ B_n &= \frac{(\alpha^2-\beta^2)(2n+\alpha+\beta-1)}{2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)} \\ C_n &= \frac{(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)}{n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)} \end{aligned}$$

Demonstração: Seja $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ um polinômio de Jacobi, então podemos escrevê-lo na forma

$$P_n^{\alpha\beta}(x) = K_n x^n + S_n x^{n-1} + ...$$

Pela proposição 1.2 sabemos que

$$p_n^{\alpha,\beta}(x) = \lambda_n P_n^{\alpha,\beta}(x) = \lambda_n K_n x^n + \lambda_n S_n x^{n-1} + ... = k_n x^n + s_n x^{n-1} + ...$$

Assim, pelo teorema 1.1 temos

$$p_n^{\alpha,\beta}(x) = (a_n x + b_n)\, p_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) - c_n p_{n-2}^{\alpha,\beta}(x)$$

Segue então que

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = (a_n x + b_n)\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) - c_n \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_n} P_{n-2}^{\alpha,\beta}(x)$$

Denotando $A_n = a_n \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}$, $B_n = b_n \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}$ e $C_n = c_n \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_n}$ temos

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = (A_n x + B_n)\, P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) - C_n P_{n-2}^{\alpha,\beta}(x)$$

De $A_n = a_n \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}$ encontramos

$$A_n = a_n \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} = \frac{k_n \lambda_{n-1}}{k_{n-1}\lambda_n} = \frac{K_n}{K_{n-1}}$$

Como $K_n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 2n+\alpha+\beta \\ n \end{pmatrix}$ segue que

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{K_n}{K_{n-1}} \\
&= \frac{2^{n-1}}{2^n}\begin{pmatrix} 2n+\alpha+\beta \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2(n-1)+\alpha+\beta \\ n-1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(2n+\alpha+\beta)!\,(2(n-1)+\alpha+\beta-(n-1))!\,(n-1)!}{(2n+\alpha+\beta-n)!n!\,(2(n-1)+\alpha+\beta)!}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(2n+\alpha+\beta)(2n-1+\alpha+\beta)(2n-2+\alpha+\beta)!\,(n-1+\alpha+\beta)!\,(n-1)!}{(2n+\alpha+\beta-n)!n!\,(2(n-1)+\alpha+\beta)!}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(2n+\alpha+\beta)(2n-1+\alpha+\beta)(n-1+\alpha+\beta)!}{(n+\alpha+\beta)!n}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(2n+\alpha+\beta)(2n-1+\alpha+\beta)(n-1+\alpha+\beta)!}{(n+\alpha+\beta)(n-1+\alpha+\beta)!}\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{(2n+\alpha+\beta)(2n-1+\alpha+\beta)}{n(n+\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

De forma análoga podemos encontrar B_n e C_n.

■

Mostraremos agora que os polinômios de Jacobi são soluções de um problema de Sturm-Liouville singular.

Teorema 1.15 *Os polinômios ortogonais de Jacobi satisfazem ao seguinte problema de Sturm-Liouville singular.*

$$(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d}{dx}\left\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{d}{dx}P_n^{\alpha,\beta}(x)\right\}$$
$$+n(n+1+\alpha+\beta)P_n^{\alpha,\beta}(x)=0$$

Demonstração: Seja $\varphi(x)\in\mathbb{P}_{n-1}$ um polinômio de grau menor ou igual a $n-1$, então integrando por partes duas vezes a expressão

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{d}{dx}P_n^{\alpha,\beta}(x)\right\}\varphi(x)\,dx$$

obtemos

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{d}{dx}P_n^{\alpha,\beta}(x)\right\}\varphi(x)\,dx=$$
$$=-\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{d}{dx}P_n^{\alpha,\beta}(x)\frac{d}{dx}\varphi(x)\,dx=$$
$$=\int_{-1}^{1}P_n^{\alpha,\beta}(x)\frac{d}{dx}\left\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\alpha,\beta}\frac{d}{dx}\varphi(x)\right\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}P_n^{\alpha,\beta}(x)\left\{\left[(\alpha+1)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta+1}+(1-x)^{\alpha+1}(\beta+1)(1+x)^{\beta}\right]\right.$$
$$\left.\cdot\frac{d}{dx}\varphi(x)+(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)\right\}$$

Denotando $w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, o termo acima fica

$$\int_{-1}^{1}P_n^{\alpha,\beta}(x)\left\{[(\alpha+1)(1+x)+(\beta+1)(1-x)]\frac{d}{dx}\varphi(x)\right.$$
$$\left.+\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)\right\}w(x)\,dx=0$$

pois $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ é ortogonal a qualquer polinômio de grau menor ou igual a $n-1$.

Mas isso implica que $\frac{d}{dx}\left((1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{d}{dx}P_n^{\alpha,\beta}(x)\right)\perp\mathbb{P}_{n-1}$.

Como $P_n^{\alpha,\beta}(x)\perp\mathbb{P}_{n-1}$ em relação a $\mathbb{P}_n$ temos que o complemento ortogonal é unidimensional. Logo, $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ tal que

$$-\frac{d}{dx}\left\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{d}{dx}P_n^{\alpha,\beta}(x)\right\}=\lambda P_n^{\alpha,\beta}(x)\,w(x)$$

Para determinar λ, comparamos os coeficientes dos termos de maior ordem nesta igualdade após substituirmos $P_n^{\alpha,\beta}(x)=a_nx^n+...$

Assim, temos

$$a_nn(n+1+\alpha+\beta)=a_n\lambda\rightarrow\lambda=n(n+1+\alpha+\beta)$$

■

Proposição 1.3 *Seja* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *o conjunto dos polinômios ortogonais de Jacobi, então*

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{d}{dx}P_n^{\alpha,\beta}(x)\frac{d}{dx}P_m^{\alpha,\beta}(x)\,dx=0$$

para $n\neq m$.

Demonstração: Sabemos que

$$\int_{-1}^{1}P_n^{\alpha,\beta}(x)\,P_m^{\alpha,\beta}(x)\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx=0$$

para $n\neq m$.

Pelo teorema temos

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d}{dx}\left\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{d}{dx}P_n^{\alpha,\beta}(x)\right\}$$
$$P_m^{\alpha,\beta}(x)\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx=0$$

Agora, se fizermos uma integração por partes, obtemos

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{d}{dx}P_n^{\alpha,\beta}(x)\frac{d}{dx}P_m^{\alpha,\beta}(x)\,dx=0$$

■

Por essa proposição podemos concluir que $\frac{d}{dx}P_n^{\alpha,\beta}(x)$, $n=0,1,...$ forma uma seqüência de polinômios ortogonais com função peso igual a $(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}$. Pela unicidade, temos que $\frac{d}{dx}P_n^{\alpha,\beta}(x)$ é proporcional a $P_n^{\alpha+1,\beta+1}(x)$.

Terminaremos este capítulo mostrando que as únicas soluções polinomiais para um problema de Sturm-Liouville singular são os polinômios de Jacobi.

Proposição 1.4 *As únicas autofunções polinomiais de um problema de Sturm-Liouville singular com* $p(-1)=p(1)=0$ *são os polinômios de Jacobi.*

Demonstração: Seja L o operador definido como anteriormente,

$$L(u)=-(p(x)\,u')'+q(x)\,u$$

com a função $p(x)$ anulando-se nos extremos.

O problema de autovalores associado é

$$Lu=\lambda w(x)\,u$$

em $(-1,1)$.

Se $\varphi_k = \dfrac{1}{\lambda_k w} L\varphi_k$ é um polinômio de grau k, $k = 0, 1, ...$, então $\dfrac{q}{w}$ é um polinômio de grau zero ($q(x) = q_0$). Temos também que $\dfrac{p}{w}$ e $\dfrac{p'}{w}$ são polinômios de grau 2 e 1 respectivamente.

Como p anula-se nos extremos,

$$w(x) = c_1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} \text{ e } p(x) = c_2 (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1}$$

em que $-\dfrac{1}{2} \leq \alpha, \beta \leq \dfrac{1}{2}$ afim de que $pu' \to 0$ quando $x \to \pm 1$.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Polinômios de Chebyshev

Neste capítulo veremos os polinômios de Chebyshev, que é um caso particular dos polinômios de Jacobi. Deduziremos diversas proposições a respeito dos polinômios de Chebyshev de primeira espécie como fórmula de recorrência, derivada em termos de seu sucessor e antecessor, entre outras.

Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie, denotados por $T_n(x)$, são polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = -1/2$ e $(a, b) = (-1, 1)$, isto é, formam uma seqüência de polinômios ortogonais com a função peso $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, mais precisamente

$$T_n(x) = \delta_n P_n^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x)$$

em que

$$\delta_n = \frac{(n! 2^n)^2}{(2n)!}$$

Mais detalhes sobre polinômios ortogonais, que estão fora do escopo deste trabalho, podem ser encontrados em [2] (no âmbito dos métodos espectrais) e em [9] (em um contexto geral).

Estes polinômios satisfazem o seguinte problema de Sturm-Liouville singular

$$\sqrt{1 - x^2}\left(\sqrt{1 - x^2}\, T_n'(x)\right)' + n^2 T_n(x) = 0 \tag{2.1}$$

e a relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^{1} T_k(x)\, T_j(x) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{c_k}{2} \pi \delta_{kj} \tag{2.2}$$

em que $c_0 = 2$ e $c_k = 1$, $k \geq 1$. A equação (2.2) será provada mais adiante pois precisamos de alguns resultados para tal objetivo.

Como primeira proposição, estabeleceremos que as derivadas dos polinômios de Chebyshev de primeira espécie formam uma seqüência de polinômios ortogonais se a função peso for $w(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Proposição 2.1 *Sejam $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ os polinômios de Chebyshev de primeira espécie, então*

$$\int_{-1}^{1} T_k'(x)\, T_j'(x) \sqrt{1-x^2}dx = \frac{k^2 c_k \pi}{2}\delta_{ij} \tag{2.3}$$

isto é, $\{T_k'(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é ortogonal em relação à função peso $w(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Demonstração: Vamos multiplicar (2.1) por $\dfrac{T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ e integrar de -1 a 1, então

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}T_n'(x)\right)' dx + \int_{-1}^{1} \frac{T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} n^2 T_n(x)\, dx = 0$$

Como os polinômios de Chebyshev de primeira espécie são ortogonais em relação a função peso $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, temos que

$$n^2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_j(x)\, T_n(x)\, dx = 0$$

assim, segue que

$$\int_{-1}^{1} T_j(x)\left(\sqrt{1-x^2}T_n'(x)\right)' dx = 0$$

Integrando por partes, temos

$$T_j(x)\sqrt{1-x^2}T_n'(x)\,|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} T_j'(x)\sqrt{1-x^2}T_n'(x)\, dx = 0$$

ou seja,

$$\int_{-1}^{1} T_j'(x)\, T_n'(x)\sqrt{1-x^2}dx = 0$$

■

Sabemos que os polinômios ortogonais satisfazem uma relação de recorrência de três termos e, logicamente, os polinômios de Jacobi também. Veremos na proposição a seguir como os coeficientes se comportam, ou melhor, como eles se tornam simples quando trabalhamos com os polinômios de Chebyshev de primeira espécie.

Proposição 2.2 *Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie satisfazem a seguinte relação de recorrência*

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{2.4}$$

A demonstração segue do teorema 1.14.

A proposição a seguir é tratada em alguns livros como sendo a definição dos polinômios de Chebyshev de primeira espécia, porém ela pode ser demonstrada a partir da definição colocada neste trabalho. Também é possível fazer o contrário, ou seja, definir os polinômios de Chebyshev de primeira espécie como sendo a proposição abaixo e demonstrar o que definimos como uma proposição, mas isto não será feito aqui.

Proposição 2.3 *Sejam* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *os polinômios de Chebyshev de primeira espécie, então*

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta), \theta \in [0,\pi], n \in \mathbb{N}$$

Demonstração: Como

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \tag{2.5}$$

$T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$, $\cos(n \arccos x)$ é um polinômio de grau n e

$$\cos(n\theta) + \cos((n-2)\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n-1)\theta) \tag{2.6}$$

fazendo $x = \cos\theta$ em (2.5) obtemos

$$T_n(\cos\theta) + T_{n-2}(\cos\theta) = 2\cos\theta\, T_{n-1}(\cos\theta) \tag{2.7}$$

Comparando (2.6) e (2.7) podemos concluir que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta), \theta \in [0,\pi], n \in \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

Dissemos anteriormente que a equação (2.2) seria demonstrada mais adiante devido à necessidade de precisarmos de alguns resultados para isso. Agora já dispomos de tais resultados e a demonstração da equação (2.2) será feita agora.

Por construção, $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ são ortogonais em relação a função peso $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, logo

$$\int_{-1}^{1} T_k(x)\, T_j(x)\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$$

para $k \neq j$, o que verifica (2.2). Seja então $k = j = 0$, então

$$\int_{-1}^{1} T_0^2(x)\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\arccos(x)\,|_{-1}^{1} = \pi = \frac{2}{2}\pi 1 = \frac{c_0}{2}\pi\delta_{00}$$

Seja agora $k \geq 1$, então

$$\int_{-1}^{1} T_k^2(x)\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = k\int_{-1}^{1} (\cos(k \arccos x))^2\, \frac{1}{k\sqrt{1-x^2}}dx$$

fazendo a substituição $u = k \arccos x$ e $du = \dfrac{-kdx}{\sqrt{1-x^2}}$ temos

$$\begin{aligned}\frac{-1}{k}\int_{k\pi}^{0}(\cos u)^2\,du &= \frac{1}{k}\int_{0}^{k\pi}\frac{1+\cos(2u)}{2}du = \frac{1}{k}\left[\left.\frac{u}{2}\right|_0^{k\pi} + \left.\frac{\text{sen }(2u)}{4}\right|_0^{k\pi}\right]\\ &= \frac{\pi}{2} = \frac{c_k}{2}\pi\delta_{kk}\end{aligned}$$

Com a proposição 2.3 podemos facilmente derivar um polinômio de Chebyshev de primeira espécie, contudo, temos outros meio de obter sua derivada. A proposição abaixo mostra uma maneira interessante de calcularmos a derivada do polinômio de Chebyshev de ordem n.

Proposição 2.4 *Sejam $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ os polinômios de Chebyshev de primeira espécie, então, para $|x| < 1$, as derivadas de primeira ordem são dadas por*

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = \frac{n}{2}\frac{T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x)}{1-x^2} \tag{2.8}$$

Demonstração: $\dfrac{d}{dx}T_n(x) = \dfrac{d}{d\theta}(\cos n\theta)\,/\dfrac{d}{d\theta}\cos\theta = \dfrac{n\text{sen }(n\theta)}{\text{sen }\theta}$

$= \dfrac{n}{2}\dfrac{\cos((n-1)\theta) - \cos((n+1)\theta)}{(\text{sen }\theta)^2} = \dfrac{n}{2}\dfrac{T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x)}{1-x^2}$ se $|x| < 1$

■

Para a segunda derivada temos uma fórmula semelhante.

Proposição 2.5 *Sejam $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ os polinômios de Chebyshev de primeira espécie, então, para $|x| < 1$, as derivadas de segunda ordem são dadas por*

$$\frac{d^2}{dx^2}T_n(x) = \frac{n}{4}\frac{(n+1)T_{n-2}(x) - 2nT_n(x) + (n-1)T_{n+2}(x)}{(1-x^2)^2} \tag{2.9}$$

Demonstração: segue de (2.5) e (2.8).

■

O objetivo de escrevermos os polinômios de Chebyshev na forma

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \tag{2.10}$$

é de facilitar as demonstrações das proposições a seguir.

Listaremos agora uma série de propriedades dos polinômios de Chebyshev de primeira espécie.

Proposição 2.6 *Sejam $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ os polinômio de Chebyshev de primeira espécie, então*

1. $T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$ *e* $T'_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n-1} n^2$;

2. $2T_n(x) = \dfrac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) - \dfrac{1}{n-1} T'_{n-1}(x)$, *para* $n \geq 2$;

3. $|T_n(x)| \leq 1$ *e* $|T'_n(x)| \leq n^2$;

4. $2T_m(x) T_n(x) = T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)$, $m \geq n \geq 0$;

5. $T'_n(x) = 2n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{c_k} T_k(x)$ *para* $k+n$ *ímpar*;

6. $T''_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{c_k} n\left(n^2 - k^2\right) T_k(x)$ *para* $k+n$ *par*;

7. $T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$.

Demonstração:

1. Quando temos $x = 1$, os polinômios de Chebyshev assumem o valor 1,

$$T_n(1) = \cos(n \arccos 1) = \cos(n0) = 1 = 1^n$$

e quanto $x = -1$ temos

$$T_n(-1) = \cos(n \arccos(-1)) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

Na derivada de $T_n(x)$ quando usamos a equação (2.10),

$$T'_n(x) = \frac{n\text{sen }(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

essa função não está definida para $x = \pm 1$, sendo assim, tomaremos o limite quando x tende a 1^- e -1^+ e aplicaremos a regra de L'Hospital.

$$\begin{aligned} T'_n(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{n\text{sen }(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{x \to 1^-} \frac{n^2 \cos(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2} \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{n^2 \cos(n \arccos x)}{x} \\ &= n^2 \cos 0 \\ &= n^2 \\ &= n^2 (1)^{n-1} \end{aligned}$$

De forma análoga para $x \to -1^+$ temos

$$\begin{aligned}
T_n'(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{n\text{sen}\,(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{x\to -1^+} \frac{n^2\cos(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}} \\
&= \lim_{x\to -1^+} \frac{n^2\cos(n\arccos x)}{x} \\
&= n^2\cos n\pi \\
&= -n^2(-1)^n \\
&= n^2(-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

2. $T_{n+1} = \cos((n+1)\theta)$, $T_{n-1} = \cos((n-1)\theta)$, $T_{n+1}'(x) = \dfrac{(n+1)\,\text{sen}\,((n+1)\theta)}{\text{sen}\,\theta}$ e $T_{n-1}'(x) = \dfrac{(n-1)\,\text{sen}\,((n-1)\theta)}{\text{sen}\,\theta}$. Então,
   $\dfrac{T_{n+1}'(x)}{n+1} = \dfrac{\text{sen}\,((n+1)\theta)}{\text{sen}\,\theta}$ e $\dfrac{T_{n-1}'(x)}{n-1} = \dfrac{\text{sen}\,((n-1)\theta)}{\text{sen}\,\theta}$
   Assim, subtraindo uma da outra temos
   $\dfrac{T_{n+1}'(x)}{n+1} - \dfrac{T_{n-1}'(x)}{n-1} = \dfrac{2\text{sen}\,\theta\cos n\theta}{\text{sen}\,\theta} = 2T_n(x)$.

3. A demonstração de que os $T_n(x)$ são limitados segue direto da equação (2.10).
   Mostremos que $\left|\dfrac{\text{sen}\,(n\theta)}{\text{sen}\,\theta}\right| \leq n\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   De fato, se $n = 0$ o resultado é imediato.
   Nossa hipótese de indução é $\left|\dfrac{\text{sen}\,(k\theta)}{\text{sen}\,\theta}\right| \leq k$. Então,
   $$\left|\frac{\text{sen}\,(k+1)\theta}{\text{sen}\,\theta}\right| = \left|\frac{\text{sen}\,(k\theta)\cos\theta + \text{sen}\,\theta\cos(k\theta)}{\text{sen}\,\theta}\right| \leq k|\cos\theta| + |\cos(k\theta)| \leq k+1$$
   Agora, dado $n \in \mathbb{N}^*$ (o caso $n = 0$ é trivial)
   $$|T_n'(x)| = n\left|\frac{\text{sen}\,(n\theta)}{\text{sen}\,\theta}\right| \leq n^2$$

4. Para demonstrarmos o item 4 basta lembrarmos que $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos(A)\cos(B)$. Desse modo temos
   $$\begin{aligned}
   2T_m(x)T_n(x) &= 2\cos(m\arccos x)\cos(n\arccos x) \\
   &= \cos((m+n)\arccos x) + \cos((m-n)\arccos x) \\
   &= T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)
   \end{aligned}$$

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{c_k}T_k(x) = \frac{1}{2}T_0(x) + T_2(x) + ... + T_0(n-1)$
   $= \dfrac{1}{2}\left[T_0(x) + \dfrac{T_3'(x)}{3} - \dfrac{T_1'(x)}{1} + \dfrac{T_5'(x)}{5} - \dfrac{T_3'(x)}{3} + ... + \dfrac{T_n'(x)}{n} - \dfrac{T_{n-2}'(x)}{n-2}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - 1 + \frac{T_n'(x)}{n}\right] = \frac{T_n'(x)}{2n}$$

Agora, para n par

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{c_k} T_k(x) = T_1(x) + T_3(x) + ... + T_0(n-1)$$

$$= \frac{1}{2}\left[T_1(x) + \frac{T_4'(x)}{4} - \frac{T_2'(x)}{2} + \frac{T_6'(x)}{6} - \frac{T_4'(x)}{4} + ... + \frac{T_n'(x)}{n} - \frac{T_{n-2}'(x)}{n-2}\right]$$

$$= \frac{T_n'(x)}{2n}$$

6. $T_n''(x) = 2n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{c_k} T_k'(x) = 2n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{c_k} 2k \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{c_l} T_l(x) = 4n \sum_{l=0}^{n-2} \frac{1}{c_l} T_l(x) \left[\sum_{k=l}^{n-1} k\right]$

$$\left[\sum_{k=l}^{n-1} k\right] = \sum_{k=0}^{n-1} - \sum_{k=0}^{l-1} = \frac{nn}{2} - \frac{ll}{2}$$

$$2n \sum_{l=0}^{n-2} \frac{1}{2_l} T_l(x) \left[n^2 - l^2\right]$$

7. $T_m(T_n(x)) = \cos(m \arccos(\cos(n \arccos x))) = \cos(mn \arccos x) = T_{mn}(x)$

■

Capítulo 3

Operadores de Projeção e de Interpolação

Nesse capítulo falaremos sobre o operador de interpolação. Este operador, como o nome diz, tem por objetivo assumir o mesmo valor (valor da função) em alguns pontos escolhidos. Essa característica pode ser muito útil em muitas situações como por exemplo na busca por uma solução de uma equação diferencial quando dispomos apenas de alguns pontos.

O operador de Projeção tem a finalidade de projetar uma função num subespaço apropriado. Veremos um pouco deste operador neste capítulo.

3.1 Operador de Interpolação e Transformada Discreta de Chebyshev

Quando um conjunto de pontos nos é fornecido podemos tratá-los de diversas maneiras. Se for um conjunto de pares ordenados no plano cartesiano, podemos aproximá-los por uma reta ou por uma parábola e, para isso, utilizamos algumas técnias de álgebra linear.

Mas fazer aproximações pode nem sempre ser o mais apropriado. Podemos desejar, em algumas situações, encontrar uma função que tenha exatamente o mesmo valor que os pontos fornecidos. Neste caso a interpolação se faz necessária.

Veremos como podemos utilizar os polinômios de Chebyshev para interpolar uma função u que seja, pelo menos, contínua.

Vamos considerar os pontos $\{x_j\}_{j=0}^{N}$ (veremos no próximo capítulo que esses pontos são os nós da quadratura de Chebyshev-Gauss-Lobatto) em que $x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right)$ e os pesos $w_j = \frac{\pi}{\tilde{c}_j N}$ em que $\tilde{c}_0 = \tilde{c}_N = 2$ e $\tilde{c}_j = 1$ para $1 \leq j \leq N-1$. Seja u uma função definida de $[-1,1]$ em $\mathbb{R}$ e contínua.

Definição 3.1 *O operador de interpolação I_N é o polinômio de grau menor ou igual a N, denotado por $I_N u$, tal que $I_N u(x_j) = u(x_j)$ para $j = 0, ..., N$ e escrevemos*

$$I_N u = \sum_{k=0}^{N} \tilde{u}_k T_k(x)$$

isto é,

$$u(x_j) = I_N u(x_j) = \sum_{k=0}^{N} \tilde{u}_k \cos\left(\frac{k\pi j}{N}\right) \tag{3.1}$$

Os coeficientes acima denotados por $\tilde{u}_k$ são denominados de coeficientes da Transformada Discreta de Chebyshev.

A proposição abaixo diz como podemos calcular os coeficientes discretos de Chebyshev.

Proposição 3.1 *Os coeficientes discretos de Chebyshev são dados por*

$$\tilde{u}_k = \frac{2}{\tilde{c}_k N} \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{\tilde{c}_j} u(x_j) \cos\left(\frac{k\pi j}{N}\right) \tag{3.2}$$

Demonstração: Seja $\langle u, v \rangle_{N,w} \triangleq \sum_{j=0}^{N} u(x_j) v(x_j) w_j$ em que $w_j = \frac{\pi}{\tilde{c}_j N}$, um produto interno discreto. Então,

$$\langle I_N u, T_n \rangle_{N,w} = \sum_{j=0}^{N} I_N u(x_j) T_n(x_j) w_j = \sum_{j=0}^{N} u(x_j) \cos\left(\frac{nj\pi}{N}\right)$$

mas

$$\langle I_N u, T_n \rangle_{N,w} = \left\langle \sum_{k=0}^{N} \tilde{u}_k T_k, T_n \right\rangle_{N,w} = \sum_{k=0}^{N} \tilde{u}_k \langle T_k, T_n \rangle_{N,w}$$

e como

$$\langle T_k, T_n \rangle_{N,w} = \delta_{kn} \frac{\pi}{2} \tilde{c}_n$$

temos que

$$\frac{\pi}{2} \tilde{c}_n \tilde{u}_n = \sum_{j=0}^{N} u(x_j) \cos\left(\frac{nj\pi}{N}\right) \cos\left(\frac{nj\pi}{N}\right) \frac{\pi}{\tilde{c}_j N}$$

Caso 1) $k \neq n$

$$\langle T_n, T_k \rangle_{N,w} = \langle T_n, T_k \rangle_w$$

Caso 2) $k = n$

$$\langle T_n, T_k \rangle_{N,w} = \sum_{j=0}^{N} (\cos(h\pi))^2 = \frac{\pi}{2N} + \frac{\pi}{N} + ... + \frac{\pi}{N} + \frac{\pi}{2N} = \pi$$

■

Podemos avaliar (3.2) eficientemente usando a transformada rápida de Fourier, ver, por exemplo, [6] e [7].

3.2 O Operador de Projeção

Num espaço vetorial muitas vezes trabalhamos com subespaços e é comum que o vetor (elemento do espaço vetorial) não pertença ao subespaço. O mesmo acontece com funções, ou seja, caso tenhamos uma função que não seja um polinômio, obviamente ela não pode ser escrita como uma combinação linear de polinômios. Porém podemos projetá-la sobre o espaço $\mathbb{P}_n$ e encontrar qual o polinômio que 'melhor aproxima' a função em questão.

Seja V um espaço vetorial e X um subespaço de V de dimensão finita. Vamos considerar uma base de X

$$X = span\,\{a_1, a_2, ...a_n\}$$

Seja $b \in V$ e $b \notin X$. Queremos encontrar um vetor $x \in X$ tal que $r = x - b$ seja ortogonal ao subespaço X.

Como $x \in X$ então existem constantes $x_1, ..., x_n$ tal que $x = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j$.

Do fato que $r = x - b$ deve ser ortogonal à X, então

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j a_j, a_i \right\rangle = \langle a_i, b \rangle \ \ , \ i = 1, ..., n$$

Encontramos então o sistema linear

$$\begin{bmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_2, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_n, a_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle a_1, a_n \rangle & \langle a_2, a_n \rangle & \cdots & \langle a_n, a_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle a_1, b \rangle \\ \vdots \\ \langle a_n, b \rangle \end{bmatrix}$$

Após resolvido o sistema linear, encontramos coordenadas $x_1, ...x_n$ que servirão para fazer a combinação linear dos vetores da base de X e encontrar o vetor que 'melhor aproxima' o vetor b.

Considerando agora que nossa base é formada por polinômios de Chebyshev veremos que o sistema acima torna-se diagonal.

Para $i \neq j$ vale $\langle T_i, T_j \rangle_w = 0$ em que $w\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, logo restam apenas os elementos da diagonal.

Assim,

$$x_i = \frac{\langle T_i, f \rangle_w}{\langle T_i, T_i \rangle_w} = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_i\left(x\right) f\left(x\right)}{\sqrt{1-x^2}} dx}{\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_i^2\left(x\right)}{\sqrt{1-x^2}} dx}$$

Portanto, o operador de projeção, denotado por P_n, é

$$P_n f = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k\left(x\right)$$

em que

$$c_k = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_k\left(x\right) f\left(x\right)}{\sqrt{1-x^2}} dx}{\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_k^2\left(x\right)}{\sqrt{1-x^2}} dx}$$

Vale citarmos o teorema 1.6 que trata justamente do fato que

$$\lim_{n \to \infty} \|P_n f - f\|_{L_w^2} = 0$$

Além disso, é possível obtermos estimativas para os erros de projeção e de interpolação em normas que envolvem derivadas da função (normas em espaços de Sobolev), mas que isso foge ao escopo desse trabalho de conclusão de curso. Mas essas estimativas podem ser encontradas em [4].

Capítulo 4

Diferenciação e Integração Numérica com Polinômios de Chebyshev

Neste capítulo veremos rapidamente a quadratura Gaussiana, uma importante ferramenta para o cálculo de integrais numericamente.

A integração numérica em muitos problemas deve ser realizada com alta precisão e em tempo viável, isso leva a utilização de fórmulas mais precisas como a quadratura Gaussiana que além de ser rápida também é exata para polinômios de até certo grau.

Veremos também como utilizar os polinômios de Chebyshev de primeira espécie para derivar uma função no espaço transformado. Este assunto será abordado na seção 2.

4.1 Quadratura Gaussiana

Para integração numérica temos interesse em construir uma 'fórmula' do tipo

$$\int_a^b f(x)\, w(x)\, dx \cong \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, w_j$$

em que w_j são pesos e x_j são pontos em (a, b) escolhidos a priori, além disso queremos que essa soma seja exata para polinômios de grau menor ou igual a N.

Entretanto, se procurarmos a 'melhor' distribuição para os nós $\{x_j\}_{j=0}^{N}$, obtemos uma fórmula de quadratura que é exata para polinômios de grau menor ou igual a $2N + 1$.

Isso nos leva ao próximo teorema, o teorema da Quadratura Gaussiana, que garante exatidão na integração para polinômios de grau $2N-1$ quando utilizados N pontos para avaliações.

Teorema 4.1 *(Quadratura Gaussiana) Dado $N \in \mathbb{N}^*$, sejam $x_1, ..., x_N$ as raízes de um polinômio ortogonal de grau N, $p_N(x)$. Então, existem constantes positivas w_k para $k = 1, ..., N$ tais que*

$$\int_a^b p(x)\, w(x)\, dx = \sum_{k=1}^{N} p(x_k)\, w_k \ \forall p \in \mathbb{P}_{2N-1}$$

Demonstração: Seja $p(x)$ um polinômio em $\mathbb{P}_{2N-1}$. Seja $q(x) \in \mathbb{P}_{N-1}$ tal que $q(x_i) = p(x_i)$. Então a forma de Lagrange é

$$q(x) = \sum_{k=1}^{N} p(x_k)\, l_k(x)$$

em que $l_k(x) = \dfrac{w(x)}{(x - x_k)\, w'(x_k)}$ e $w(x) = \prod_{k=1}^{N} (x - x_k)$.

Assim, o polinômio $p(x) - q(x)$ tem zeros em $x_1, ...x_N$ e consequentemente $p(x) - q(x) = p_N(x)\, r_{N-1}(x)$ para algum polinômio $r_{N-1}(x) \in \mathbb{P}_{N-1}$.

No entanto, pela ortogonalidade dos $p_N(x)$ a polinômios de grau menor, segue que

$$\int_a^b w(x)\, p(x)\, dx = \int_a^b w(x)\left[q(x) + p_N(x)\, r_{N-1}(x)\right] dx =$$

$$= \int_a^b w(x)\, q(x)\, dx = \int_a^b w(x) \sum_{k=1}^{N} p(x_k)\, l_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{N} \left(\int_a^b w(x)\, l_k(x)\, dx \right) p(x_k)$$

Definimos

$$w_k = \int_a^b w(x)\, l_k(x)\, dx$$

e temos então

$$\int_a^b p(x)\, w(x)\, dx = \sum_{k=1}^{N} p(x_k)\, w_k$$

Agora, $l_k(x) \in \mathbb{P}_{N-1}$ e se anula em $x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_N$. Então $(l_k(x))^2 \in \mathbb{P}_{2N-2}$ e se anula nesses mesmos pontos. Além disso, $l_k(x_k) = 1$. Portanto

$$w_k = \sum_{j=1}^{N} w_j\, (l_k(x_j))^2 = \int_a^b w(x)\, [l_k(x)]^2\, dx > 0$$

$\blacksquare$

Com isso temos uma maneira eficiente (eficiente no sentido de que a integração numérica é feita em N operações) e precisa de integrar uma função. Porém percebemos que para calcular os w_j's precisamos avaliar uma integral, mas dependendo da função peso escolhida temos quadraturas com w_j's conhecidos explicitamente, por exemplo a quadratura de Chebyshev-Gauss, ou avaliados numericamente de forma eficiente, por exemplo a quadratura de Legendre-Gauss.

Veremos agora uma quadratura semelhante a Gaussiana, em que os pontos extremos são incluídos.

Teorema 4.2 *(Quadratura de Gauss-Lobato) Sejam* $-1 = x_0, ..., x_N = 1$ *as* $N+1$ *raízes do polinômio* $q(x) = p_{N+1}(x) + ap_N(x) + bp_{N-1}(x)$, *em que* a *e* b *são escolhidos de modo que* $q(-1) = q(1) = 0$ *e* $p_{N+1}(x)$, $p_N(x)$ *e* $p_{N-1}(x)$ *são polinômios ortonormais de grau* $N+1$, N *e* $N-1$ *respectivamente.*

Sejam $w_0, ..., w_N$ *a solução do sistema linear*

$$\sum_{j=0}^{N} (x_j)^k w_j = \int_{-1}^{1} x^k w(x)\, dx \ , \ 0 \leq k \leq N$$

Então,

$$\sum_{j=0}^{N} p(x_j) w_j = \int_{-1}^{1} p(x) w(x)\, dx, \forall p \in \mathbb{P}_{2N-1}$$

A demonstração desse resultado é similar ao da Integração Gaussiana, utilizando neste caso a decomposição $p = qr + s$ com $r \in \mathbb{P}_{N-2}$ e $s \in \mathbb{P}_N$.

4.2 Diferenciação Através dos Polinômios de Chebyshev

Sabemos derivar uma função no espaço físico (o espaço não transformado) e uma pergunta bastante natural seria como podemos derivar uma função no espaço transformado.

Veremos agora como podemos derivar uma função no espaço transformado e como os polinômios de Chebyshev de primeira espécie estudados no capítulo dois nos ajudam.

Uma vez que

$$u(x) = \sum_{k=0}^{N} \tilde{u}_k T_k(x) \ \in \mathbb{P}_N$$

é natural termos

$$u'(x) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{u}_k T_k'(x) = \sum_{k=0}^{N} \tilde{u}_k^{(1)} T_k(x)$$

Para determinarmos os coeficientes $\tilde{u}_k^{(1)}$ usaremos o fato de que

$$2T_n(x) = \frac{1}{n+1} T_{n+1}'(x) - \frac{1}{n-1} T_{n-1}'(x)$$

Então,

$$\begin{aligned} u'(x) &= \tilde{u}_0^{(1)} + \tilde{u}_1^{(1)} x + \sum_{k=2}^{N-1} \tilde{u}_k^{(1)} \left[\frac{T_{k+1}'(x)}{2(k+1)} - \frac{T_{k-1}'(x)}{2(k-1)} \right] \\ &= \frac{\tilde{u}_{N-1}^{(1)}}{2N} T_N'(x) + \sum_{k=1}^{N-2} \frac{1}{2k} \left(c_{k-1} \tilde{u}_{k-1}^{(1)} - \tilde{u}_{k+1}^{(1)} \right) T_k'(x) \end{aligned}$$

Comparando as duas expressões encontramos

$$\tilde{u}_N^{(1)} = 0, \tilde{u}_{N-1}^{(1)} = 2N\tilde{u}_N, \tilde{u}_{k-1}^{(1)} = \frac{2k\tilde{u}_k + \tilde{u}_{k+1}^{(1)}}{c_{k-1}} \text{ para } k = N-1, ..., 1$$

Com isso podemos encontrar os coeficientes $\{u'(x_j)\}_{j=0}^{N}$ a partir de $\{u(x_j)\}_{j=0}^{N}$. Veremos agora qual é a matriz que transforma $u(x_j)$ em $u'(x_j)$.

Os polinômios de Lagrange associados aos pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto são

$$h_j(x) = \frac{(-1)^j (x^2 - 1) T_N'(x)}{\tilde{c}_j N^2 (x - x_j)}$$

para $j = 0, ..., N$ e $x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right)$ sendo os pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto.

Proposição 4.1 *A matriz derivada* $(d_{kj} \triangleq h_j'(x_k))$ *é igual a*

$$\begin{aligned} d_{kj} &= \frac{\tilde{c}_k (-1)^{k+j}}{\tilde{c}_j (x_k - x_j)} && j \neq k \\ d_{kk} &= \frac{-x_k}{2(1 - x_k^2)} && k = 1, ..., N-1 \\ d_{00} = -d_{NN} &= \frac{2N^2 + 1}{6} \end{aligned}$$

em que $\tilde{c}_k = 1$ *se* $1 \leq k \leq N-1$ *e* $\tilde{c}_0 = \tilde{c}_N = 2$.

Demonstração: Vamos derivar o polinômio $h_j(x)$ associado aos pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto.

Assim,

$$h_j'(x) = \frac{A + B - C}{\tilde{c}_j^2 N^4 (x - x_j)^2}$$

em que

$A = (-1)^j \, 2xT'_N(x) \, \tilde{c}_j N^2 (x - x_j)$

$B = (-1)^j \, (x^2 - 1) \, T''_N(x) \, \tilde{c}_j N^2 (x - x_j)$

$C = (-1)^j \, (x^2 - 1) \, T'_N(x) \, \tilde{c}_j N^2$

Podemos observar que os termos $\tilde{c}_j$ e N^2 aparecem no numerador e no denominador, portanto,

$$h'_j(x) = \frac{(-1)^j \, 2xT'_N(x)(x - x_j) + (-1)^j (x^2 - 1) T''_N(x)(x - x_j) - (-1)^j (x^2 - 1) T'_N(x)}{\tilde{c}_j N^2 (x - x_j)^2} \tag{4.1}$$

Vamos considerar $1 \leq k \leq N - 1$, então

$$T'_N(x_k) = \frac{Nsen(k\pi)}{\sqrt{1 - cos^2\left(\frac{k\pi}{N}\right)}} = 0$$

e

$$T''_N(x_k) = \frac{-N^2 cos(Narccos(x_k))}{1 - x_k^2}$$

Logo,

$$h'_j(x_k) = \frac{(-1)^j (x_k^2 - 1)(-N^2) \, cos(Narccos(x_k))}{\tilde{c}_j N^2 (x_k - x_j)(1 - x_k^2)} = \frac{(-1)^{j+k}}{\tilde{c}_j (x_k - x_j)}$$

Para $k = 0$ e $k = N$ faremos uso do item 1 da proposição 2.6. Faremos apenas para $k = 0$ pois para $k = N$ a demonstração é análoga.

Se $k = 0$ então $x_0 = cos(0) = 1$. Com isso, o termo $(x^2 - 1)$, no segundo e terceiro termo em (4.1), anula-se em x_0. Sendo assim, temos

$$h'_j(1) = \frac{(-1)^j \, 2T'_N(1)(1 - x_j)}{\tilde{c}_j N^2 (1 - x_j)^2} = \frac{(-1)^j \, 2}{\tilde{c}_j (1 - x_j)}$$

Vejamos agora o caso em que $1 \leq k = j \leq N - 1$

Sabemos que

$$T_N(x) = cos(N \arccos(x)) \text{ e } T'_N(x) = \frac{Nsen(N \arccos(x))}{\sqrt{1 - x^2}}$$

com isso podemos obter

$$T''_N(x) = \frac{-N^2 T_N(x) + xT'_N(x)}{1 - x^2}$$

e

$$T'''_N(x) = \frac{(-N^2 + 1 + N^2x^2 + x^2) \, T'_N(x) + (x - x^3) \, T''_N(x) - 2xN^2 T_N(x)}{(1 - x^2)^2}$$

Assim, aplicando a regra de L'Hospital duas vezes na expressão (4.1) encontramos que

$$d_{kk} = \frac{-x_k}{2\tilde{c}_k\left(1 - x_k^2\right)}$$

e como $\tilde{c}_k = 1$ para $1 \leq k \leq N-1$ temos o resultado procurado.

Finalmente, para d_{00} podemos observar que

$$T_N\left(x_0\right) = 1$$

e

$$T_N'\left(x_0\right) = N^2 \text{ e } T_N''\left(x_0\right) = \frac{N^4 - N^2}{3}$$

Com isso encontramos que $d_{00} = \dfrac{2N^2 - 1}{6}$. Para $k = j = N$ é análogo.

■

Conclusão

Quando abordamos um tema como polinômios, acreditamos, antes de conhecer, que não existe muito mais do que aquilo que sabemos, contudo, depois de pesquisarmos descobrimos que o que sabemos é apenas uma gota d'água no oceano.

Observamos ao longo deste trabalho sobre polinômios ortogonais que podemos explorar vários resultados, sejam eles genéricos como a recorrência de três termos para polinômios ortogonais quaisquer, sejam mais específicos como a recorrência dos polinômios de Chebyshev de primeira espécie.

A fórmula de Rodrigues é um teorema muito importante devido ao fato de expressar os polinômios de Jacobi como uma derivada, evitando assim o uso do processo de Gram-Schmidt e, principalmente, porque possibilita a obtenção de vários resultados que envolvam a integração por partes do operador diferencial associado.

Como conseqüência do teorema da relação de recorrência de três termos para polinômios ortogonais, obtivemos a relação de recorrência para os polinômios de Jacobi que, como dos polinômios de Jacobi derivam-se diversos outros (Legendre, Gegenbauer, Chebyshev), fornece relações de recorrências para outros tipos de polinômios.

Vimos que as únicas soluções polinomiais do problema de Sturm-Liouville são os polinômios de Jacobi.

Um resultado muito interessante obtido nos disse que os polinômios de Chebyshev podem ser escritos como uma composição de funções trigonométricas, além disso, com essa proposição, em termos numéricos, temos uma maneira muito simples de avaliar qualquer polinômio de Chebyshev em qualquer ponto do intervalo no qual estão definidos.

No capítulo três vimos como podemos facilmente interpolar uma função com os polinômios de Chebyshev, bem como, projetar uma função f no espaço dos polinômios de um modo elementar. A simplicidade deve-se ao fato de que os polinômios de Chebyshev são ortogonais com relação a função peso $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Por fim, a integração e a diferenciação podem ser feitas de maneira eficaz com a quadratura Gaussiana e com a utilização dos polinômios de Chebyshev.

Bibliografia

[1] DAVIS, P. J., Interpolation & Approximation, Dover Publications, New York, 1975.

[2] FUNARO, D., Polynomial Approximation of Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.

[3] SHEN, J., Spectral Methods, Lecture Notes (2000).

[4] CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A., ZANG, T.A., Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, Berglin Heidelberg, 1988.

[5] TRAVESSINI, F., Séries de Fourier e Métodos Espectrais, Trabalho de Conclusão de Curso, Departamento de Matemática, UFSC, 2004.

[6] VAN LOAN, C., Computational Frameworks for the Fast Fourier Transform, SIAM, 1992.

[7] BRIGHAM, E. O., The Fast Fourier Transform and its Applications, Prentice-Hall, 1988.

[8] WEINBERGER, H. F., A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods, Dover Publications, 1995.

[9] SZEGÖ, G., Orthogonal Polynomials, American Mathematical Society, New York, 1939.

[10] RUDIN, W., Princípios de Análise Matemática, Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1971.

[11] BOYCE, W. E., DiPrima, R. C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, Ed. Guanabara, 1979.