

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – CFM

**EXPERIÊNCIAS NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA,
UTILIZANDO OS RECURSOS DO SOFTWARE
CABRI-GÉOMÈTRE II**

LISANDRA VICENTE

FLORIANÓPOLIS, JUNHO DE 2005.

LISANDRA VICENTE

**EXPERIÊNCIAS NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA,
UTILIZANDO OS RECURSOS DO SOFTWARE
CABRI-GÉOMÈTRE II**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao

Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura

Departamento de Matemática

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Dr. Márcio Rodolfo Fernandes

FLORIANÓPOLIS, JUNHO DE 2005.

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora pela Portaria nº 21/CCM/05

Prof^a Carmem Suzane Comitre Gimenez

Professora da disciplina

Banca Examinadora

Prof^o Dr. Márcio Rodolfo Fernandes

Professor Orientador

Prof^a Dr^a Cristiane M.A. Pissarra Fernandes

Prof^o Dr Mário César Zambaldi

AGRADECIMENTOS

A Deus, que em sua infinita sabedoria, mostra-nos que os caminhos mais difíceis são os mais férteis.

Aos amigos que sempre estiveram ao meu lado e ajudaram a marcar esta etapa da minha vida.

Ao professor Dr. Márcio Rodolfo Fernandes pela orientação neste trabalho.

Aos professores Cristiane M. A. Pissarra Fernandes e Mário Cezar Zambaldi pela disposição na participação da avaliação deste trabalho.

DEDICATÓRIA

A minha família, em especial a minha mãe Maria Helena, que sempre esteve ao meu lado
dando força para completar esta fase da minha vida

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	7
CAPÍTULO I – DIFICULDADES COM A TRIGONOMETRIA E A HISTÓRIA DO SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE	
	9
1.1 Dificuldade com a trigonometria.....	9
1.2 Software Cabri-Géomètre II	14
CAPÍTULO II – SEQUÊNCIA DIDÁTICA	
	16
2.1 O que é Seqüência Didática	16
2.2 A Seqüência Didática Utilizada	18
2.2.1 Primeira Atividade – Arcos	19
2.2.2 Segunda Atividade – Radianos	21
2.2.3 Terceira Atividade – Seno e Cosseno	26
CAPÍTULO III – APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS RESULTADOS	
	30
3.1 Primeira Atividade	30
3.2 Segunda Atividade	33
3.3 Terceira Atividade	42

CONCLUSÃO	49
REFERÊNCIAS BIBILOGRÁFICAS	51
ANEXOS	52

INTRODUÇÃO

Durante a prática docente, muitos professores já perceberam que somente os números não são suficientes numa aula de matemática. Para que os alunos tenham interesse e atenção nas aulas é necessário que se adote outras maneiras de ministrar, diferente das tradicionais. É necessário que o conteúdo seja apresentado ao aluno com aula expositiva e fixado com exercícios.

Mas essa idéia de mudança de metodologia ainda é difícil para muitos professores. O comodismo ainda faz com que muitos não adotem outras maneiras, o que acarreta na deficiência do ensino-aprendizagem do aluno. Isso se dá também devido ao autodidatismo pedagógico imposto à maioria dos licenciados em matemática.

E é analisando essa necessidade, de mudar a metodologia, que comprovamos a eficiência do uso dos computadores para o ensino de matemática. Estudos têm mostrado que seu emprego de forma adequada pode levar ao estabelecimento de uma nova relação entre professor e aluno, marcada por uma maior proximidade, interação e colaboração. Os recursos computacionais podem auxiliar a fixação dos conteúdos e estimular assim um maior diálogo entre professor e aluno.

Por tudo isso, pensamos em fazer experiências com alunos do Ensino Médio, com o uso de recursos computacionais, utilizando como tema a trigonometria.

Sobre o tema escolhido, alguns estudos mostram a dificuldade que muitos alunos têm em entender a trigonometria. Um exemplo que podemos citar é que muitos estudantes não conseguem entender que a medida do arco está diretamente relacionada com o ângulo central. Essas dificuldades podem ser observadas pelo professor em suas aulas.

Dentre os trabalhos que discutem o processo ensino-aprendizagem da trigonometria, muitos utilizam o computador em seu ensino. O recurso computacional utilizado foi o software Cabri-Géomètre II, software muito utilizado para o estudo da geometria.

Assim, elaboramos uma seqüência didática com três atividades, sendo que a segunda foi dividida em duas partes. As atividades foram aplicadas em 16 alunos da segunda série do Ensino Médio de uma escola da rede particular de Santo Amaro da Imperatriz. Os alunos participaram das atividades em horário extra-classe. A aplicação das atividades ocorreu nos meses de fevereiro e março do corrido ano. O estudo dos resultados obtidos resultou na elaboração deste trabalho que contém três capítulos.

O primeiro capítulo mostra as dificuldades dos alunos quando aprendem a trigonometria. São dados exemplos de erros freqüentes. Também é mostrado a história do software utilizado, o Cabri-Géomètre II.

O segundo capítulo fala sobre o que é uma seqüência didática e a seqüência que foi utilizada. Aqui temos uma noção de como é importante ter uma seqüência didática, como facilita a preparação e a exibição da aula quando se tem uma seqüência a seguir.

Por fim, o terceiro capítulo tem as aplicações e os resultados analisados através das atividades. Aqui podemos perceber como foi produtiva a implementação deste trabalho.

Em anexo, estão as atividades utilizadas.

CAPÍTULO I

1 DIFICULDADES COM A TRIGONOMETRIA E A HISTÓRIA DO SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE

1.1 Dificuldade com a Trigonometria

Fazendo uma revisão da história educacional brasileiro, podemos constatar que no início do século XX o ensino da matemática era apresentado por meio de três disciplinas: Geometria e Trigonometria; Aritmética; Álgebra. Assim, os estudantes prestavam um exame distinto para cada uma delas.

Em 1931 houve a fusão desses três ramos resultando numa única disciplina, a matemática. Isso se deu com a reforma Francisco Campos. O estudo da trigonometria deixou de ser abordado somente no quarto ano, como ocorria anteriormente, e passou a ser abordado já na segunda série do curso secundário, sendo trabalhados os conceitos de seno, cosseno, tangente e cotangente, por meio das razões trigonométricas entre os lados do triângulo retângulo. Na quarta série estudavam-se as funções trigonométricas e seus gráficos e na quinta série a derivada das funções seno, cosseno, tangente e cotangente.

Já em 1942, com a reforma Gustavo Capanema, o ensino secundário passou a ser constituído de dois ciclos. O primeiro era composto de quatro anos e era chamado de ginásio. O segundo ciclo era composto de três anos e era chamado de curso clássico, curso científico e normal. Em ambos os ciclos o estudo da trigonometria estava presente. Este estudo tinha início na quarta série do primeiro ciclo com relações métricas de um triângulo retângulo e reaparecia

com as funções circulares, na segunda e terceira séries do segundo ciclo. Mas esta divisão permaneceu até 1961, quando entrou em vigor a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que não promoveu alterações significativas no programa da trigonometria.

Atualmente, na maioria das vezes, esse estudo inicia-se na oitava série com as razões trigonométricas, sendo retomado no ensino médio, quando trabalhados os conceitos de seno, cosseno, tangente, etc., no círculo trigonométrico e as funções correspondentes. Entretanto, nem sempre há uma interação entre a abordagem dos conteúdos. Várias vezes os alunos têm a impressão de que o seno estudado no triângulo retângulo não é o mesmo estudado no círculo trigonométrico e que não está diretamente ligado ao estudo da função seno.

Assim, na prática docente, observamos muitas vezes que para alguns alunos o conceito de seno, cosseno, tangente, etc, são desprovidos de significado e esse fato torna-se mais evidente quando nos deparamos com alguns erros como:

$$\frac{\cos x}{x} = \cos \quad , \quad \text{tg } x = 1 \Rightarrow \text{tg } x = 45^\circ \quad \text{e} \quad \cos x = 4$$

No erro $\frac{\cos x}{x} = \cos$, é feita uma simplificação na representação que nos faz pensar que para o aluno há uma falta de significado de cosseno de um arco ou ângulo o que leva a interpretar cosseno como uma constante que multiplica x .

Para o erro $\text{tg } x = 1 \Rightarrow \text{tg } x = 45^\circ$, provavelmente o aluno tenha interpretado corretamente que $\text{tg } x = 1$ refere-se a algo que mede 45° , porem não sabe distinguir o significado dos símbolos x e $\text{tg } x$.

Por último, no erro $\cos x = 4$, o aluno não associa que $\cos x$ está limitado ao intervalo $[-1, 1]$, o que torna possível assumir valores para cosseno maiores que 1.

E estes são apenas alguns dos erros cometidos pelos alunos.

Trabalhos recentes também apontam algumas dificuldades encontradas pelos alunos no estudo da trigonometria.. Veja dois exemplos:

Briguenti (1994), após uma análise qualitativa dos dados obtidos pela aplicação de um teste diagnóstico, detectou que alguns alunos no início do ensino superior não conseguiam aplicar os conceitos de seno e cosseno estudados no triângulo retângulo em determinados exercícios, utilizando, de forma inadequada, a relação entre os catetos e a hipotenusa. Verificou também que não fazia parte dos conhecimentos prévios destes estudantes o fato de que $\frac{\pi}{6}$ radianos corresponde, no círculo trigonométrico, a um arco de 30° e nem que $2k\pi$ radianos, com $k \in \mathbb{Z}$, indica um número de voltas inteiras no círculo trigonométrico.

Costa (1997), menciona a dificuldade encontrada pelos alunos em entender que a medida do arco está diretamente relacionada com o ângulo central correspondente.

Em relação às unidades de medidas, (1994) relatou que inicialmente os alunos trabalham com graus, minutos e segundos para medir ângulos. A introdução de uma nova unidade de medida angular, o radiano, pode gerar uma dificuldade, uma vez que está ligada a um arco do círculo trigonométrico. A autora destacou que muitas vezes os alunos não entendiam que o arco tem uma medida linear (comprimento do arco, m, km, cm, ...) e também uma medida angular (medida do ângulo central em graus ou radianos). Constatou também que alguns discentes associavam a um dado valor seno (ou cosseno), um único arco do círculo trigonométrico, o que pode ser interpretado que para eles o círculo tem apenas um volta.

Em nossa prática docente, observamos a dificuldade dos alunos em identificar, no círculo trigonométrico, arcos diferentes com a mesma origem e mesma extremidade, como

por exemplo: arcos de medidas $\frac{\pi}{2}$ radianos e $\frac{5\pi}{2}$ radianos. Ao desenharem esses arcos, os

alunos representam o segundo como sendo um arco com menos de uma volta, e mais,

classificam como sendo igual ao arco de medida $\frac{\pi}{2}$ radianos, pelo fato do seu cosseno e seu seno serem, respectivamente, iguais.

A representação dos arcos de medidas $-\frac{\pi}{2}$ radianos e $\frac{3\pi}{2}$ radianos também gera dificuldades, já que, ainda que suas extremidades coincidam, tratam-se de arcos diferentes, sendo um positivo e o outro negativo. No entanto, pelo fato do seno e cosseno serem respectivamente iguais, muitos alunos referem-se a estes como sendo o mesmo arco.

Outra dificuldade constatada foi à construção dos gráficos das funções trigonométricas, como por exemplo: a construção do gráfico da função cosseno. Para os alunos, não parece lógico que o cosseno de um número real x seja definido como a abscissa da extremidade de um arco no círculo trigonométrico, enquanto que, no gráfico da função, o valor do cosseno em cada ponto é a sua ordenada.

Dentre os trabalhos que discutem o processo de ensino-aprendizagem da trigonometria, o de Wenzelburguer (1992) e o de Costa (1997) por exemplo, utilizam o computador no seu ensino. Nesse sentido, Wenzelburguer (1992) concluiu que com programas gráficos os estudantes puderam desenvolver atividades exploratórias e realizar descobertas na construção dos conceitos de funções trigonométricas. Costa realizou uma seqüência de atividades com oito duplas, fora do horário de aula, sendo que em cada sessão trabalhou com apenas uma dupla. Apesar desse procedimento ter ocorrido num ambiente artificial, diferente do cotidiano do aluno, a (1992) concluiu que o uso do software Cabri-Géomètre pôde colaborar na criação de situações que facilitam o entendimento e o processo de construção do conhecimento da trigonometria.

As dificuldades apresentadas pelos alunos e os resultados de pesquisas apontam que os problemas relacionados com ensino-aprendizagem de trigonometria representam um amplo campo de pesquisa. Além disso, a introdução do seu estudo no ensino médio é muito

importante, na medida em que os conceitos abordados serão utilizados pela Física em conteúdos como a projeção de vetores, em conceitos do tipo movimento harmônico simples, etc.

Funções trigonométricas são também conteúdos abordados no ensino médio. Uma propriedade fundamental dessas funções é a periodicidade, a qual constitui uma circunstância presente em muitos fenômenos que nos são familiares, desde o movimento de um planeta em torno do sol, a corrente alternada que usamos em nossas casas, até a oscilação presente nas cordas de um violino, etc.

Os conceitos da trigonometria podem, ainda, apresentar sentido para o aluno quando trabalhamos nos triângulos, no círculo trigonométrico e quando associados as funções trigonométricas.

Ao partirmos dessa hipótese, somos levados às seguintes questões:

- A introdução do conceito de seno e cosseno de forma coordenada, partindo do triângulo retângulo, passando pelo círculo trigonométrico e finalizando com o gráfico da função correspondente, pode propiciar ao aluno condições para atribuir significado a tal conceito?

- Será que o Cabri-Géomètre pode auxiliar o aluno a atribuir significado ao seno e cosseno? Essa ferramenta possibilitará aos alunos associar tais conceitos estudados no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico e relacioná-los com as funções correspondentes?

Para tentar responder essas questões, elaboramos uma seqüência didática, com o objetivo de investigar se os alunos do 2º ano do Ensino Médio, que já trabalharam com trigonometria no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico, possam, por meio dela e com o auxílio do software Cabri-Géomètre, utilizar esses conhecimentos já estudados na construção dos gráficos das funções seno e cosseno.

1.2 O Software Cabri-Géomètre II

O Software Cabri–Géomètre II é um programa computacional e educativo. Este foi desenvolvido por Yven Baulac, Franck Bellemain e Jean Marie Laborde no “Laboratório de Estruturas Discretas e de Didática” do *Institut d’Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble (IMAG)*, na Universidade de Joseph Fourier em Grenoble, França, acoplado ao *Centre National de Recherches Scientifique (CNRS)* e em colaboração com a Texas Instruments, para a versão Windows.

A palavra Cabri é abreviatura de *Cahier de Brouillon Interactif*, que significa caderno de rascunho interativo. Cabri–Géomètre é a marca registrada da Université Joseph Fourier. Sua primeira versão é de 1988.

O Cabri–Géomètre permite explorar o universo da geometria elementar em uma linguagem próxima à que o aluno já está acostumado, isto é, o “lápiz e papel”. Assim, o programa destina-se principalmente às construções geométricas e permite medir ângulos e distâncias. Para tanto, suas ferramentas básicas são geométricas, permitindo a realização de atividades que não são obrigatoriamente desse domínio. Por exemplo, pode-se construir um gráfico de uma função desde que sua construção seja feita por uma relação geométrica.

O Software permite a visualização de um lugar geométrico, ao traçar a trajetória de um ponto escolhido, enquanto o outro ponto está sendo deslocado, respeitando as propriedades particulares das figuras. Esta é a principal qualidade do Cabri–Géomètre para o nosso estudo, pois com sua ajuda, o aluno pode observar o comportamento do seno ou cosseno ponto a ponto.

Porém, algumas limitações devem ser destacadas. Por exemplo, a não permanência do traçado do lugar geométrico (rastros) na tela quando ocorre uma mudança em alguma propriedade ou medida da figura. Esclarecemos que as medidas de segmentos feitas pelo software são dadas com arredondamento de até uma casa decimal. Portanto, dependendo do tipo de atividade, isso pode gerar um erro, comprometendo a conclusão a ser tirada, na

atividade executada. No entanto, para as atividades propostas neste trabalho, esta última característica não inviabiliza o estudo.

Outra desvantagem do Cabri–Géomètre é com relação à construção de figuras geométricas em três dimensões. É possível construir muitas delas, porém, o resultado não é visualmente satisfatório.

Salientamos também a falta de uniformidade com que alguns elementos são apresentados. Por exemplo, uma reta inclinada aparecerá com imperfeições, dando a impressão de uma “serra”.

Em relação às construções, o Cabri distingue ponto, podendo ser movimentado por toda tela, sem restrições, e ponto sobre o objeto, só podendo ser movimentado em cima daquele objeto ao qual pertence. Neste trabalho, utilizaremos o ponto sobre a circunferência, tornando-se mais fácil observar a movimentação de um ponto B sobre a mesma e o arco descrito por esse ponto.

Assim, a opção pelo Cabri–Géomètre deu-se devido à possibilidade de o aluno modificar a figura na tela, conservando suas relações explícitas. Com ele o estudante tem a oportunidade de associar a medida do arco com a do ângulo central correspondente de uma maneira mais dinâmica, bem como traçar os gráficos das funções seno e cosseno ponto a ponto e ainda “desenrolar” o ciclo trigonométrico, transformando-o na reta real.

O manuseio deste software não é imediato. Ele requer uma explicação de seu uso antes do início de qualquer atividade desenvolvida para sua utilização.

CAPÍTULO II

2 SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

2.1 O que é seqüência didática?

Didática, segundo o dicionário Aurélio, significa a técnica de dirigir e orientar a aprendizagem; técnica de ensino. Podemos dizer que didática é a arte de ensinar, de ajudar a educar o homem. Isso significa que em toda a nossa educação usamos a didática continuamente. E fica claro que esta é utilizada de diferentes formas pelas pessoas. Assim, não podemos dizer que há uma forma certa e adequada de usar um tipo de didática para diferentes situações. Segundo Piaget, os princípios da didática são baseados na concepção de que o aluno é visto como sujeito ativo da própria aprendizagem; em contrapartida o professor é o distribuidor dos saberes. Assim, Piaget lista como princípios da didática:

- cada indivíduo constrói seu próprio conhecimento; a escola integra novas informações aos saberes;
- construção progressiva dos conhecimentos através das interações sociais (professor–aluno e aluno–professor);
- a escola tem o papel de incrementar a integração dos saberes visto que não é possível a transferência de conhecimentos;
- integração das disciplinas;
- assentamento das aprendizagens escolares nas vivências do cotidiano dos alunos;
- respeito à diversidade cultural dos alunos;
- valorização do desejo de descobrir a de fazer versus recompensa e castigo;

- importância aos aspectos cooperativos do trabalho escolar versus tarefas estritamente individuais e competição entre alunos;
- importância à educação e ao desenvolvimento da pessoa versus centralização exclusiva sobre os saberes conteudistas.

Nesse sentido, o uso do computador tem um papel importante para a construção do saber do aluno e a cooperação entre os indivíduos, principalmente porque auxilia a complementar as atividades puramente individualistas. Por ser necessário o uso de softwares educacionais na elaboração de atividades matemáticas, para que possamos alcançar objetivos já traçados é que o tópico de Seqüência Didática se discute na educação matemática.

Podemos dizer que Seqüência Didática é a busca por um método de construção de conhecimento, um conjunto de atividades propostas pelo professor a fim de alcançar objetivos pré-definidos.

Para que se elabore uma seqüência didática é necessário que se promovam situações de ensino nas quais o aluno tenha possibilidade de utilizar os conhecimentos anteriores. Assim para que possam resolver os problemas ou exercícios propostos, propondo caráter estimulante do raciocínio e, sobretudo, do senso crítico do aluno (Lentz et al, 2002).

Segundo (Lentz et al, 2002), uma seqüência didática deve ser composta por uma série de elementos.

- Objetivos: os alunos devem estar cientes dos objetivos propostos pelo professor.
- Problemas propostos: atividades a serem desenvolvidas no laboratório de informática junto com o professor.
- Problemas extra-classe: atividades a serem desenvolvidas sem a presença do professor.
- Análise crítica da aula: momento em que o aluno e o professor podem fazer uma análise crítica do que foi proposto. Esta análise deve permitir ao professor uma avaliação do andamento da aula.

Elaborar uma seqüência didática é de extrema importância para que a aula tenha um melhor andamento, principalmente para aulas que envolvam recursos computacionais.

2.2 A seqüência didática utilizada

O principal objetivo deste trabalho é introduzir o conceito de seno e cosseno de forma coordenada, a partir do triângulo retângulo e do círculo trigonométrico. Para isso, foi elaborada uma seqüência didática utilizando como recurso o software Cabri–Géomètre II. No restante deste capítulo, descreveremos as atividades que foram aplicadas aos alunos.

As atividades foram aplicadas em três sessões no decorrer dos meses de fevereiro e março de 2005, em uma escola particular de Santo Amaro da Imperatriz. Cada sessão teve a duração de aproximadamente 50 minutos, com a participação de 16 alunos. Os alunos que participaram desta análise estavam cursando o segundo ano do Ensino Médio e não conheciam o software Cabri–Géomètre. A escolha desta turma se deu pelo fato deles já terem trabalhado com trigonometria no primeiro ano do Ensino Médio, podendo assim ampliar o conhecimento sobre os resultados encontrados, uma vez que este já fora previamente adquirido.

Os alunos, que trabalharam em duplas, receberam juntamente com descrição das atividades, o gráfico das construções sugeridas, a fim de que eles pudessem conferir suas construções. Em alguns momentos, houve discussão com todo o grupo onde os alunos puderam explicar e avaliar suas construções.

Vale lembrar que, antes da execução destas atividades foi feita uma aula onde os alunos puderam aprender a trabalhar com o Cabri–Géomètre II, tendo a liberdade para fazer qualquer tipo de construção.

Ao final de cada atividade, fizemos uma análise comparando os resultados com as idéias anteriores, para então partirmos para a próxima atividade.

2.2.1 Primeira Atividade – Arcos

Esta atividade (Anexo I) tem o objetivo de proporcionar condições para o aluno identificar a origem e a extremidade de diversos arcos e compreender que o arco está relacionado ao ângulo central correspondente.

Para responder às perguntas a seguir, os estudantes tiveram que construir um círculo trigonométrico com um ponto B móvel, sendo possível movimentá-lo tanto no sentido horário como no anti-horário.

Movimente o ponto B sobre a circunferência no sentido anti-horário.

- 1) Qual é a origem do arco AB? Qual é a sua extremidade?
- 2) Mudando o arco AB, o ângulo central α também muda? Aumenta ou diminui?

Movimente B no sentido horário, sobrepondo-o ao ponto A.

- 3) Onde inicia e onde termina o arco AB?
- 4) Qual é a medida do ângulo central correspondente?

Movimente B no sentido anti-horário, sobrepondo-o ao ponto A.

- 5) Qual é a origem do arco AB? E qual é sua extremidade?
- 6) Qual é a medida do ângulo central α correspondente?

Queremos observar, nessas duas questões, por meio da movimentação do ponto B sobre a circunferência, se os alunos compreendem, sem efetuar medidas, que ao aumentar o arco, o ângulo central correspondente aumentará e ao se diminuir o arco, o ângulo central correspondente diminuirá.

O conceito de ângulo e arco nesta atividade provavelmente terá conhecimentos anteriores, preconizado na dialética ferramenta-objeto, propiciando condições para os alunos relacionarem ângulo central com o arco correspondente.

Nossa expectativa é de que eles não encontrem dificuldades para determinar a origem do arco e a sua extremidade, porque o ponto A encontra-se fixo e o arco fica determinado pelo ponto móvel B. Para estabelecer a relação entre o arco e o ângulo central correspondente, o aluno deverá relatar o que está sendo observado ao movimentar o ponto B.

É importante que na segunda questão, ao solicitarmos que o aluno mude o arco AB, seja feita a referência à mudança de posição do ponto B sobre a circunferência, propiciando-lhe observar o aumento ou diminuição do arco e do ângulo central correspondente.

Movimentando-se o ponto B, quer no sentido horário quer no sentido anti-horário, sobrepondo-o ao ponto A, pretendemos, com as questões de 3 a 6, verificar se os alunos identificam, ângulos diferentes, uma vez que os arcos correspondentes tem a mesma origem e mesma extremidade. Queremos também observar se os estudantes associam esses dois movimentos ao ângulo de 0° e ao de 360° , respectivamente.

Ao movimentarmos o ponto B no sentido horário, sobrepondo-o ao ponto A, a circunferência mostrada na tela ficará azul, o que poderá dar aos estudantes a idéia de não haver nenhum arco desenhado. No sentido anti-horário, sobrepondo o ponto B ao ponto A, a circunferência mostrada na tela ficará rosa, o que poderá dar a idéia aos estudantes do ponto B ter dado uma volta completa. Nossa expectativa é de que eles não encontrem dificuldades para indicarem a medida desses ângulos.

Entendemos que provavelmente os conhecimentos anteriores dos alunos não sejam suficientes para resolver essas questões, devendo, assim, iniciar a fase de pesquisa.

Ao final desta atividade, as respostas dos alunos serão discutidas entre eles, visando a validação ou não de suas conclusões. Ao término da discussão, por exigências do software utilizado, faremos algumas institucionalizações locais:

Fixado o ponto A e movimentando-se o ponto B, chamamos de arco AB, de origem A e extremidade B, o “rastros” descrito pelo ponto B, nesse movimento.

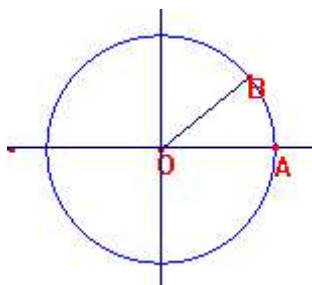
Se os pontos A e B coincidem, eles podem determinar dois arcos particulares, um deles se reduz a um ponto chamado arco nulo. O outro, chamado arco de uma volta, é obtido quando o ponto B, “partindo” do ponto A, percorre a circunferência uma vez e “chega” em A.

2.2.2 Segunda Atividade – Radianos

Parte 1

No ensino fundamental, o aluno trabalha com ângulos somente medidos em graus. Quando inicia o estudo em trigonometria, aprende a medir arcos e ângulos em graus e em radianos, porém é comum o educando, ao se deparar com um arco medido em radianos, convertê-lo em graus devido à familiaridade com a unidade.

Nesse sentido, verificamos nas análises preliminares que os alunos que participaram da aplicação desse tópico, haviam anteriormente trabalhado apenas com a definição de um radiano e o estudo realizado restringiu-se à conversão de graus para radianos ou de radianos para graus. Assim, achamos conveniente elaborar uma atividade (Anexo II) com o objetivo de apresentar esta outra unidade (Anexo III) para medir arco e ângulo: o radiano, na tentativa de propiciar condições para que os discentes atribuam significado ao mesmo.



Utilizando o software, os estudantes medirão em centímetros o segmento AO, o arco AB e deverão responder as seguintes questões:

Questão 1: É possível efetuar operações com essas duas medidas? De que tipo? Por quê?

Pretendemos saber quais os critérios utilizados pelos alunos, para constatar se é possível ou não operar com as medidas propostas. Observaremos, também, de que maneira e quais instrumentos eles utilizarão para medir o comprimento do arco AB. Nossa intenção é verificar se os instrumentos utilizados estão relacionados a medidas angulares ou a medidas de comprimento.

Antes de continuarmos a atividade, pretendemos que os alunos discutam suas respostas. Neste momento é necessário compreenderem que podem operar com esses dados, por se tratar de medidas de comprimento expressas na mesma unidade. Dentre as operações possíveis, será destacada a divisão, pois esta será utilizada na próxima questão para a introdução de uma unidade de medida de arco (o radiano).

Questão 2: Como você mediria em centímetros o comprimento do arco AB sem utilizar o computador?

Em seguida, os alunos farão uma nova construção onde terão a representação geométrica de três arcos de tamanhos diferentes, quando expressos em centímetros. Nosso objetivo é que eles constatem que estes arcos, em radianos, têm a mesma medida. Para tanto, solicitaremos que meçam os arcos AB, CD, EF e os raios OA, OC, OE. Conforme os alunos forem efetuando essas medidas, elas serão registradas na tela. Em seguida, completarão a tabela da questão com os dados obtidos para as diferentes posições conseguidas pela movimentação do ponto B (e conseqüentemente de D e F). Esses dados serão necessários para as questões a seguir.

Questão 3: O que você pode concluir em relação aos comprimentos dos arcos AB, CD e EF em cada posição?

Questão 4: O que você pode concluir em relação às razões AB/AO , CD/OC e EF/OE em cada posição de B?

Nosso objetivo é verificar se os alunos conseguem identificar que, em centímetros, a medida dos arcos correspondentes a um mesmo ângulo central são diferentes, ao passo que as razões entre arcos e raios são as mesmas (se os ângulos centrais correspondentes forem os mesmos).

Após essas questões, faremos a institucionalização do conceito de radiano como sendo a razão do comprimento do arco pelo raio da circunferência.

O radiano será uma ferramenta explícita na resolução das três próximas questões.

Questão 5: Como você efetuará a medida dos arcos AB, CD e EF em radianos

Questão 6: Complete:

a) medida AB = _____ rad

b) medida CD = _____ rad

c) medida EF = _____ rad

Questão 7: Registre na figura abaixo, sem utilizar o computador, as posições dos pontos B, D e F, a fim de obter $\text{med AB} = \text{med CD} = \text{med EF} = 1 \text{ rad}$.

O aluno deverá fixar o ponto B em qualquer posição sobre a circunferência para resolver as questões 5 e 6.

Com a questão 7, pretendemos investigar se os alunos compreenderam que arcos de “tamanhos” aparentemente diferentes que tenham o mesmo ângulo central, tem a mesma medida em radianos. Há a possibilidade de os alunos traçarem arcos com tamanhos em centímetros aparentemente iguais, porém suas medidas em radianos sendo diferentes de 1, ou seja, com ângulos centrais correspondentes diferentes.

Questão 8: Que relação existe entre a medida do ângulo central em graus e os arcos correspondentes, medidos em radianos?

Questão 9: Que relação existe entre a medida do ângulo central em radianos e os arcos correspondentes, medidos em radianos?

Questão 10: Quando a medida do ângulo central é igual à medida do arco correspondente?

A seguir, solicitaremos que os alunos meçam no Cabri-Géomètre o ângulo central α em graus e comparem essa medida com a do arco correspondente já medido em radianos. Em seguida, eles repetirão o procedimento, utilizando a medida do ângulo central em radianos.

Objetivamos averiguar, com essas questões, quais os critérios utilizados pelos alunos para comparar a medida do ângulo central com a do arco correspondente. Ao efetuarem essa comparação, os alunos estarão fazendo a interação entre os domínios das grandezas, o numérico e o geométrico.

Ao final dessa atividade, os alunos discutirão suas produções, validando-as ou não. Pretendemos ressaltar, nesse momento, o conceito de que a medida do ângulo central é equivalente a medida do arco correspondente, quando estiverem expressos em radianos ou em graus.

Parte 2

Esta segunda parte da atividade tem como objetivo estabelecer a correspondência da medida de um arco ou de um ângulo em graus e em radianos.

Para a resolução das questões tratadas, os alunos deverão utilizar o conceito de radiano institucionalizado na primeira parte, que agora é usado como ferramenta.

Questão 1: Se a medida do arco AB é aproximadamente 1 rad, qual é a medida aproximada do ângulo $A\hat{O}B$ em graus? E a medida do arco AB em graus?

Questão 2: Se a medida do arco AB é aproximadamente 1, 57rad, qual é a medida aproximada do ângulo $A\hat{O}B$ em graus? E a medida do arco AB em graus?

Questão 3: Se a medida do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ é aproximadamente 180° , qual é a medida aproximada do arco AB em radianos? E a medida do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ em radianos?

Questão 4: Se a medida do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ é aproximadamente 270° , qual é a medida aproximada do arco AB em radianos? E a medida do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ em radianos?

Nos exercícios de 1 a 4, pretendemos proporcionar aos alunos condições para estabelecer a relação entre as medidas de arcos e ângulos, bem como observar que grau e radiano são unidades de medida de ambos. Para tanto, a construção que será feita para essa atividade terá registrada a medida do ângulo central expressa em graus e a do arco correspondente, expressa em radianos.

Nas seguintes questões, os alunos não utilizarão o Cabri-Géomètre. Estas foram propostas para evitar que as anteriores pudessem gerar um obstáculo, pois 3,14 é um valor aproximado de π , embora na atividade isso esteja sendo destacado.

Questão 5: Se a medida de um arco é $\frac{\pi}{6}$ rad, então essa medida corresponde a _____ graus.

Questão 6: Se a medida de um arco é 60 graus, então essa medida corresponde a _____ graus.

Questão 7: Se a medida de um arco é $\frac{\pi}{4}$ rad, então essa medida corresponde a _____ graus.

Questão 8: Se a medida de um arco é 2π rad, então essa medida corresponde a _____ graus.

Utilizamos, nessa segunda parte da atividade, a familiarização dos alunos em trabalhar com ângulos medidos em graus, para que possam estabelecer a relação da medida de um arco em graus e em radianos. Dessa forma procuraremos destacar arcos com medidas em graus como: 30° , 45° , 60° , 90° e 360° .

Esperamos que essas questões propiciem uma interação entre os domínios da grandeza, do algébrico e do geométrico.

2.2.3 Terceira Atividade – Seno e Cosseno

Esta atividade (Anexo IV) foi elaborada a partir dos conceitos já estudados de seno e cosseno no triângulo retângulo. Nosso objetivo é estender esses conceitos para o círculo trigonométrico, com o intuito de proporcionar aos alunos condições para verificarem que, dado um arco AO, a abscissa do ponto B é o cosseno e a ordenada de B é o seno desse arco.

Utilizando o software, os alunos deverão determinar as coordenadas do ponto B, e com esses dados eles terão condições de responder às questões propostas.

Questão 1: A medida do cateto BB' _____

Questão 2: A medida do cateto OB _____

Questão 3: Com os dados obtidos acima e considerando o triângulo retângulo OBB', calcule cosseno do ângulo α e seno do ângulo α .

Questão 4: A abscissa do ponto B é _____

Questão 5: A ordenada do ponto B é _____

Questão 6: Movimentando o ponto B e considerando o triângulo retângulo OBB', preencha a tabela a seguir, calculando os valores de seno e cosseno, para os ângulos dados.

Ângulo	Cateto BB'	Cateto OB'	Hipotenusa OB	Abscissa	Ordenada	Seno	Cosseno
--------	------------	------------	---------------	----------	----------	------	---------

15°							
30°							
45°							
60°							
90°							
120°							

Questão 7: Compare, em cada caso, o seno com as coordenadas de B. O que você pode concluir?

Questão 8: Compare, em cada caso, o cosseno com as coordenadas de B. O que você pode concluir?

A meta das questões de 1 a 8 é a utilização de conceitos já estudados, como seno e cosseno no triângulo retângulo. Esses conceitos são chamados de conceitos antigos, que deverão ser manipulados pelos alunos como ferramentas para calcular os valores de seno e cosseno dos ângulos propostos na tabela da questão 6. Todavia, esses conhecimentos podem não ser suficientes quando os estudantes se depararem com ângulos cuja medida seja igual ou maior que 90 graus.

Questão 9: Como você pode calcular o seno e o cosseno de ângulos com mais de 90°, sem utilizar o triângulo retângulo?

Questão 10: Essa maneira também pode ser utilizada para ângulos com menos de 90°?

Nas questões 9 e 10, os alunos terão a oportunidade de expor os resultados obtidos, explicitar suas dificuldades e suas dúvidas. Essa explicitação poderá gerar debates que levem os alunos a encontrar um novo meio de se calcular seno e cosseno de um ângulo.

Após esse debate, serão institucionalizados os conceitos de seno e cosseno de um arco, como descrito no quadro teórico.

Questão 11: Movimentando o ponto B no círculo trigonométrico, responda:

a) Você pode determinar um valor para o arco AB, cujo cosseno desse arco seja igual a 1,3?

Se sim, qual será o arco?

b) Você pode determinar um valor para o arco AB, cujo cosseno desse arco seja igual a -2 ?

Se sim, qual será o arco?

c) Você pode determinar um valor para o arco AB, cujo cosseno desse arco seja igual a -1 ?

Se sim, qual será o arco?

d) Você pode determinar um valor para o arco AB, cujo cosseno desse arco seja igual a 1?

Se sim, qual será o arco?

e) Você pode determinar um valor para o arco AB, cujo seno desse arco seja igual a $-1,2$?

Se sim, qual será o arco?

f) Você pode determinar um valor para o arco AB, cujo seno desse arco seja igual a 3? Se sim, qual será o arco?

g) Você pode determinar um valor para o arco AB, cujo cosseno desse arco seja igual a -1 ?

Se sim, qual será o arco?

h) Você pode determinar um valor para o arco AB, cujo cosseno desse arco seja igual a 1?

Se sim, qual será o arco?

Questão 12: A partir das respostas anteriores, qual o maior valor possível para seno do arco AB? E para cosseno do arco AB?

Questão 13: Qual o menor valor possível para seno do arco AB? E para cosseno do arco AB?

As questões de 11 a 13 têm o objetivo de propiciar aos alunos condições para verificarem que, seno de um arco AB não pode assumir valores menores que -1 e maiores que 1 e que, cosseno de um arco AB também não pode assumir valores fora desse intervalo. Para a resolução dessas questões, os estudantes deverão utilizar conceitos de seno e cosseno institucionalizados anteriormente como ferramenta explícita.

Questão 14: Existem arcos diferentes cujo o seno desses arcos sejam iguais a 1? Se sim, dê um exemplo.

Questão 15: Existem arcos diferentes cujo cosseno desses arcos sejam iguais a 1? Se sim, dê um exemplo.

As questões 14 e 15, tratam de exemplos cujos arcos tem a mesma extremidade, assim o cosseno destes arcos são iguais e o seno também. Pretendemos averiguar também se os alunos observam que existem arcos diferentes cujo seno ou cosseno sejam iguais, mesmo apresentando extremidades diferentes.

CAPÍTULO III

3 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E A ANÁLISE DOS RESULTADOS

3.1 Primeira Atividade

Esta atividade foi aplicada em uma sessão. Os alunos ainda não conheciam o software Cabri-Géomètre. Apresentamos os principais comandos e as construções a serem feitas. Após alguns minutos para a familiarização com o software por parte dos estudantes, iniciamos a aplicação desta, que passaremos a relatar a seguir.

Na primeira questão, os alunos deveriam indicar qual seria a origem e a extremidade do arco AB.

Sete duplas responderam que o ponto A é a origem e o ponto B a extremidade do arco. Quando eles estavam discutindo suas respostas, uma dessas duplas enfatizou:

“Como o ponto A era fixo na circunferência e B era móvel, ficou mais fácil identificar a origem e a extremidade do arco.”

A oitava dupla respondeu que a origem é o ponto O e a extremidade os pontos A e B, assim justificando na discussão:

“O arco aumenta e diminui de acordo com o ângulo? Então ponto O é o vértice desse ângulo, logo ele é a origem do arco, A e B são as extremidades do arco.”

Essa resposta pode indicar que para esses dois alunos existe alguma relação entre arco e ângulo central correspondente. Para eles, o conceito de arco não tem o conhecimento anterior e não serve, portanto, de ferramenta para solucionar o problema, como esperávamos. Para esses estudantes a discussão com o grupo pode ajudar para que eles avancem em seus conhecimentos.

Na questão seguinte, os alunos deveriam observar que se o arco aumenta, o ângulo central correspondente aumenta e se o arco diminui, o ângulo central correspondente diminui.

Somente uma dupla deixou claro em sua resposta que se o arco aumenta o ângulo central correspondente aumenta e vice-versa.

Cinco duplas relacionaram o aumento ou a diminuição do ângulo ao sentido do movimento do ponto B, dando a seguinte resposta:

“Aumenta em sentido anti-horário e diminui em sentido horário.”

Um colega constatou que, no sentido horário, o ângulo central poderia aumentar também. Um aluno argumentou que na observação referiu-se ao sentido horário para o retorno do ponto B até a origem.

As duas duplas restantes não observaram o ângulo e sim o arco, respondendo da seguinte maneira:

“Dependendo do movimento, o arco aumenta ou diminui.”

A princípio, nos pareceu que não estava claro para os alunos o sentido dessa questão. Porém, no decorrer da discussão entre os componentes do grupo, ficou evidente que todos viam a relação entre o arco e o ângulo central correspondente, mas não havia ficado evidente o que era solicitado na questão.

Pressupomos que esse fato talvez seja decorrência da evidência da resposta pretendida, levando os alunos a procurar relações mais complexas entre os conceitos envolvidos.

Na terceira questão, os estudantes deveriam identificar a origem e a extremidade do arco nulo e na quarta, responder a medida do ângulo central correspondente.

Das oito duplas participantes, três responderam corretamente as questões. Duas não identificaram o arco, mas responderam que a medida do ângulo central correspondente era 0° . Outras duas identificaram a origem e a extremidade do arco nulo, mas não verificaram a existência de um ângulo a ser medido. A última dupla respondeu que não havia arco e nem ângulo central correspondente.

Os alunos, ao responderem que não havia nenhum arco descrito, no decorrer da discussão, referiam-se à falta do “traçado” rosa, justificando observar somente o ponto B sobreposto em A. Da mesma forma, alguns, ao concluírem na questão 4 a inexistência do ângulo, em seus comentários, relataram não ser evidente a formação de um ângulo. Para esses estudantes, os conhecimentos antigos de arco e ângulo não serviram de ferramenta para resolução dessas questões.

Na quinta questão, os alunos identificaram a origem e a extremidade do arco de uma volta e na sexta, deveriam responder qual a medida do ângulo central correspondente.

Duas duplas identificaram o arco de uma volta, mas uma delas respondeu que não existia nenhum ângulo e a outra observou a existência de um ângulo central correspondente. Este ângulo, na concepção desses dois alunos, tem uma medida, como não se lembravam qual era, responderam 90° . Assim, essa produção pode indicar que os estudantes não tinham conhecimento de ângulo, conforme esperávamos.

Ainda em relação à quinta questão, seis duplas identificaram a origem e a extremidade e responderam que a medida do ângulo central correspondente era 360° .

Os alunos, ao responderem que os arcos nulo e de uma volta tinham sua origem no ponto A e sua extremidade no ponto B, demonstraram ter conhecimentos de arcos. No entanto, ao serem questionados se esses arcos eram conhecidos, não se pode concluir se essas questões seriam de familiarização ou se os alunos formularam esse conceito.

No decorrer da discussão com o grupo, os estudantes puderam validar suas respostas.

Ao final do debate, foi feita a institucionalização de arco, arco nulo e arco de uma volta, como descrito anteriormente.

Após a aplicação dessa atividade, fizemos uma análise com intuito de verificar se era necessário efetuar alguma alteração para a próxima sessão ou não. Embora a segunda pergunta, num primeiro momento, possa parecer supérflua, esta denotou uma questão interessante, referente ao sentido do movimento do ponto B, antecipando, assim, o princípio

dos arcos positivos e negativos, que é tema das próximas atividades. Quanto ao objetivo específico dessa primeira atividade, acreditamos que ele foi atingido, visto que a grande maioria dos alunos soube identificar a origem e a extremidade dos arcos, não sendo necessário efetuar alteração na próxima atividade.

3.2 Segunda Atividade

Parte 1

A atividade foi aplicada em duas sessões. Na primeira, trabalhou-se o conceito de radianos e alguns exercícios de familiarização. Na segunda trabalhou-se a correspondência da medida de um arco em grau e em radiano.

Relataremos a seguir as produções dos alunos referentes à primeira sessão.

Pretendíamos verificar, na primeira questão, que critérios os alunos utilizariam, para constatar se era possível, ou não, operar com as medidas do arco AB e do raio AO, dadas em centímetros.

Cinco duplas responderam que poderiam utilizar a adição, a multiplicação, a subtração e a divisão, porque tratavam-se de dois números. Duas responderam que somente poderiam efetuar a multiplicação usando a fórmula $2\pi r$. No decorrer da discussão com o grupo, esses alunos observaram que para obter $2\pi r$ estavam operando somente com o raio AO e estávamos pedindo que operassem com as duas medidas OA e AB. A última dupla respondeu que poderia operar somente com a divisão, calculando, desse modo, a tangente de α . Não obstante, ao expor a resposta ao grupo, a dupla verbalizou que a justificativa dada não estava correta por não saberem os valores do ângulo α e do cateto AB, porém apenas desistiram dessa resposta a partir do momento em que outros alunos questionaram o porquê da tangente.

A dupla argumentou que considerou o triângulo ABO e que sabiam o valor do arco AB, e este seria o valor do cateto oposto, AB. Um colega questionou:

“O lado AB do triângulo ABO não coincide com o arco AB, eles têm somente a mesma origem e extremidade, mas seus comprimentos são diferentes.”

Após a exposição de suas produções, todos concluíram que poderiam efetuar: adição, subtração, divisão e multiplicação por tratar-se de dois números. Há de se destacar que as medidas que figuram na questão estão expressas na mesma unidade de medida e como os alunos enfatizaram que eram possíveis as operações por se tratar de dois números, propusemos a questão:

“Se as unidades de medidas fossem diferentes, vocês poderiam operar com essas duas medidas?”

Todos responderam que não.

Observaríamos, na segunda questão, quais os instrumentos utilizados pelos alunos para medir o comprimento do arco AB e se esses instrumentos estavam relacionados a medidas angulares ou de comprimento.

Das oito duplas participantes, duas afirmaram que não era possível medir esse arco e duas não sabiam responder. Relatamos a seguir as produções das outras quatro duplas.

“Com régua”

Um colega, no decorrer da discussão argumenta:

“Com régua é impossível medir arco, ela não é curva.”

“Com a fórmula $2\pi r$.”

Esta dupla também utilizou $2\pi r$ na questão anterior. Ao expor a resposta ao grupo, alguns comentaram:

“Essa fórmula dá o comprimento da circunferência e não do arco.”

“Com o valor de α e do segmento AO”. Esta dupla, na questão anterior, referiu-se ao cálculo da tangente. O mesmo aluno que antes havia contestado que o arco AB não era o

cateto AB fez a seguinte afirmação: “Com o ângulo e o segmento AB não é possível, e além disso você não tem o valor do ângulo.”

“Com o auxílio do transferidor”. Esta dupla utilizou um instrumento para medir ângulo na tentativa de medir o arco AB.

Esta última resposta leva-nos a crer que esses alunos estão relacionando o arco ao ângulo central correspondente, utilizando, assim, os conhecimentos adquiridos na sessão anterior.

Ao final da discussão, os estudantes concluíram que não poderiam obter a medida do arco em centímetros sem o auxílio do computador.

Nesse momento houve a intervenção do professor, a fim de enfatizar que centímetros é uma unidade de medida de comprimento e esse arco poderia ser medido com um barbante ou com uma fita, por exemplo, para depois, ao esticar estes sobre uma régua, obter-se a medida em centímetros.

Com as questões três e quatro pretendíamos verificar se os alunos conseguiriam identificar que, em centímetros, a medida dos arcos AB, CD e EF eram diferentes e que as razões AB/OA , CD/OC e EF/OE eram iguais.

Na terceira questão, duas duplas responderam que quanto maior o arco, maior o ângulo central correspondente. Esses alunos utilizaram os conhecimentos adquiridos na atividade anterior. Uma dessas duplas, na segunda questão, utilizou inadequadamente o transferidor para medir o arco em centímetros. As outras seis duplas concluíram que os arcos AB, CD e EF tinham, em centímetros, valores diferentes.

Na quarta questão, todas as duplas responderam que as razões AB/OA , CD/OC e EF/OE eram iguais para as diferentes posições do ponto B.

Nesse momento, foi conceituado radiano como sendo a razão do comprimento do arco pelo raio da circunferência. Enfatizou-se também que o radiano é uma unidade de medida de arco.

As questões de 5 a 7 são exercícios de familiarização, com o objetivo de utilizar o conceito de radiano como ferramenta explícita.

Uma dupla deixou essas questões em branco, justificando precisar rever o assunto abordado, pois ainda não havia entendido o que era radiano. Para esses alunos, as questões não serviram como exercícios de familiarização, uma vez que não conseguiram utilizar o radiano como ferramenta explícita.

Na quinta questão, seis duplas escreveram que para efetuar a medida dos arcos em radianos foi preciso calcular a razão entre as medidas em centímetros do comprimento do arco pelo raio da circunferência. Uma dupla respondeu que a razão era arco/radiano, justificando, durante a discussão, ter se confundido com as palavras raio e radiano. Devemos ressaltar que depois das explicitações e discussões do grupo, esses dois alunos começaram avançar em seus conhecimentos, como pode ser constatado em seu desempenho em futuras produções.

Ao expressar as medidas dos arcos AB, CD e EF em radianos na sexta questão, cinco duplas registraram as três medidas com valores iguais. Duas duplas responderam com três medidas diferentes, justificando que para cada arco o ponto B deveria estar em uma posição diferente. Esses alunos, de acordo com o quadro teórico, tiveram produções incompletas.

Ao final da discussão com o grupo, todos concluíram que fixado o ponto B, os arcos AB, CD e EF em radianos tem a mesma medida. Um aluno ainda complementou, dizendo que o ângulo central correspondente a esses três arcos, deveria ser o mesmo, caso contrário, não seria verdadeira.

Na sétima questão, os alunos deveriam desenhar arcos cuja medida fosse 1 radiano.

Esperávamos que houvessem traçados de arcos com tamanhos em centímetros aparentemente iguais e com ângulos centrais correspondentes diferentes, porém sete duplas desenharam arcos com valores aproximados de 1 radiano. Alguns alunos, em seus comentários, destacaram que esses arcos deveriam corresponder ao mesmo ângulo central. No

entanto, não podemos garantir que todos os que responderam corretamente essa questão entenderam que arcos de “tamanhos” aparentemente diferentes têm a mesma medida em radianos. Esses alunos podem ter representado corretamente os arcos de 1 radiano, baseados no desenho que ainda encontrava-se na tela. Pressupomos que se tivéssemos tirado da tela a construção correspondente ao que foi trabalhado nas questões anteriores, os alunos exporiam mais suas dúvidas, ficando claro o raciocínio usado por eles.

Pretendíamos observar, nas próximas questões, os critérios utilizados pelos alunos para comparar a medida do ângulo central com a do arco correspondente.

A construção utilizada é a mesma das questões anteriores. Estavam representados na tela os três arcos com suas respectivas medidas expressas em radianos. Na oitava questão era solicitado para os alunos medirem o ângulo central α em graus e na nona questão, em radianos.

A dupla que deixou em branco a questão anterior também não respondeu as perguntas 8, 10 e 11. No momento de discutirem suas produções com o grupo, esses alunos timidamente participaram, algumas vezes concordando com as argumentações dos colegas, mas não deixaram claro se estavam avançando em seus conhecimentos ou não. Quando perguntamos o motivo de não tentarem responder as questões, eles argumentaram ainda ter dúvidas e não gostar de expô-las ao grupo.

Duas duplas, na questão 8, responderam:

“Quanto maior o arco, maior o ângulo.”

Uma dupla afirmou:

“O ângulo varia de acordo com o valor do arco em radianos.”

Essa última dupla justificou que, embora o ângulo estivesse expresso em graus e o arco em radianos, ambos aumentavam e diminuía de acordo com o movimento do ponto B.

Constatamos, com essas respostas, a utilização dos conhecimentos trabalhados na atividade anterior, o que nos leva a crer que estes foram manipulados como ferramentas.

As quatro duplas restantes escreveram:

“Não há nenhuma relação.”

A justificativa foi não poder comparar uma medida dada em graus a outra dada em radianos. Nesse caso, os conhecimentos referentes à unidades de medida serviram como ferramenta. Os alunos, nessa questão, embora tenham centralizado suas atenções no arco e no ângulo, utilizaram conhecimentos diferentes para respondê-la.

Todas as duplas, na questão nove, responderam que a medida dos arcos é a mesma medida do ângulo central correspondente. Os alunos que deixaram a maior parte dessa atividade em branco, provavelmente ao comparar a medida do ângulo central e a do arco correspondente, expressas em radianos, detiveram-se ao número que representa essas medidas, não havendo, assim, uma interação entre domínios das grandezas, o numérico e o geométrico. Pressupomos que o único domínio mobilizado nessa situação foi o domínio numérico.

Na décima questão, os alunos deveriam responder quando a medida do ângulo central seria igual à medida do arco correspondente.

Três duplas concluíram que só seriam iguais se as medidas do arco e do ângulo central correspondente fossem nulas. Uma dessas duplas verbalizou em sua justificativa:

“Quando tenho graus no ângulo e radianos no arco, eles só podem ser iguais quando os dois forem nulos.”

Esses alunos preocuparam-se em comparar 0° com 0 rad, não observando ainda que um arco pode ser medido tanto em graus quanto em radianos, o mesmo acontecendo para um ângulo.

Uma dupla respondeu:

“Quando os dois têm a mesma unidade de medida.”

Esses dois estudantes completaram o seu discurso, argumentando que o arco e o ângulo central correspondente deveriam ter a mesma medida expressa na mesma unidade, em grau ou em radianos

Outras três duplas concluíram que, para ser igual, o ângulo tem que estar expresso em radianos, porque a medida do arco é dada nessa unidade.

Após a discussão, pôde-se constatar que essas sete duplas verificaram que, para as medidas de arcos serem iguais, estas precisam estar expressas na mesma unidade, utilizando, assim, o radiano como unidade também de medida angular.

Perguntávamos, na última questão, a que conclusão os alunos poderiam chegar quando as medidas dos 3 arcos representados na tela eram dadas em radianos.

Sete duplas responderam que em radianos os 3 arcos tem a mesma medida. Alguns comentários dos alunos referentes à última questão. Foram:

“A medida dos arcos são iguais e o ângulo central não muda.”

“Os arcos medidos em cm têm tamanhos diferentes, só serão iguais quando medidos em radianos.”

“Usamos a unidade radianos para transformar tudo para uma mesma medida.”

Observamos que para a maioria dos alunos ficou claro que a medida do arco é a mesma que a do ângulo central correspondente, quando expressas na mesma unidade. Ressaltamos que somente uma dupla cogitou medir o arco também em graus, quando o ângulo estiver dado em graus.

Verificamos, ainda, que no desenrolar da atividade houve uma interação entre o domínio das grandezas, o geométrico e o numérico.

Ao final, reafirmamos que a medida do ângulo central é a mesma medida do arco correspondente, quando ambos estiverem expressos na mesma unidade de medida, e ainda, que graus e radianos são unidades de medidas tanto de arcos quanto de ângulos.

Parte 2

No encontro seguinte, retomamos os conceitos trabalhados na sessão anterior, pois estes seriam utilizados como ferramentas nas questões propostas nesta segunda parte da atividade. Tínhamos também o objetivo de estabelecer correspondência entre medida de um arco ou de um ângulo em graus e em radianos.

A construção a ser feita deveria apresentar a medida do ângulo central dada em graus e a do arco correspondente dada em radianos.

Nas duas primeiras questões é dada a medida do arco AB em radianos e o aluno deveria dar o valor aproximado da medida do ângulo $A\hat{O}B$ e da medida do arco em graus.

As oito duplas responderam corretamente essas duas questões, sendo assim, podemos afirmar que funcionaram como exercícios de familiarização, pois os alunos utilizaram os conhecimentos recentemente trabalhados como ferramenta explícita.

Nas questões 3 e 4, a medida do ângulo estava em graus e o aluno deveria responder a medida do ângulo $A\hat{O}B$ e a medida do arco em radianos.

Sete duplas responderam corretamente. Uma dupla apresentou a seguinte produção: na questão três, a medida aproximada do arco é de 3,14 radianos e do ângulo é de 1 radiano. Na questão seguinte, a produção dessa dupla foi semelhante à da questão anterior: 4,71 radianos para arco e 1,5 radiano para ângulo. Essas produções leva-nos a conjecturar que: pelo fato de os alunos terem trabalhado somente com unidade angular, o grau, tornou-se difícil para eles a utilização de uma outra medida angular, o radiano. Essa hipótese foi confirmada pelo comentário da dupla.

“Entendemos que a medida do arco deve ser a mesma que a do ângulo central, mas, quando temos que “transformar” o ângulo para radianos, achamos que os valores deveriam ser diferentes, pois até agora só havíamos trabalhado com a conversão de arcos de graus para radianos e não de ângulos.”

Para esses alunos, essas questões não funcionaram como exercícios de familiarização, pois eles não utilizaram os conceitos institucionalizados recentemente como ferramenta.

O objetivo das questões seguintes é estabelecer a correspondência entre a medida de um arco em graus e em radianos.

Em todas as questões, os alunos “montaram” uma equação algébrica, havendo uma interação dos domínios das grandezas e o algébrico.

Nas questões 6 e 9, em que era dada a medida de um arco em grau e era solicitada esta medida correspondente em radiano, três duplas na questão seis e duas duplas na questão nove cometeram o seguinte erro (puramente erro de cálculo algébrico):

$$\begin{aligned} 180 &\rightarrow \pi \\ 60 &\rightarrow x \\ 180x &= 60\pi \\ x &= \frac{60\pi}{180} \\ x &= 3\pi \end{aligned}$$

Respondendo 3π radianos ao invés de $\frac{\pi}{3}$ radianos.

$$\begin{aligned} 180 &\rightarrow \pi \\ 90 &\rightarrow x \\ 180x &= 90\pi \\ x &= \frac{90\pi}{180} \\ x &= 2\pi \end{aligned}$$

Respondendo 2π radianos ao invés de $\frac{\pi}{2}$ radianos.

Ressaltamos que uma dupla cometeu esse erro na questão seis, porém não cometeu na questão nove.

Embora nem todos os alunos tenham conseguido realizar os cálculos corretamente, eles utilizaram os conceitos trabalhados na primeira parte da atividade como ferramenta explícita.

Acreditamos que o debate entre o grupo surtiu efeito, fazendo com que os alunos avançassem em seus conhecimentos, uma vez que deixaram claro que para as medidas dos ângulos e arcos serem iguais, elas precisam ser expressas na mesma unidade. Uma dupla ainda ressaltou que o arco e o ângulo central deveriam ter medidas expressas na mesma unidade, no caso, grau ou radiano.

Ao retomarmos o conteúdo trabalhado na primeira parte desta atividade, verificamos que os alunos que deixaram muitas questões em branco acompanharam essa retomada, não encontrando muita dificuldade para resolver a segunda parte desta atividade. Assim, parecemos que o objetivo da atividade foi atingido, portanto não efetuamos nenhuma alteração na seguinte.

3.3 Terceira Atividade

Pretendíamos, nessa atividade, estender os conceitos de seno e cosseno já estudados no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico.

Nas questões 1 e 2, os alunos deveriam determinar, com o auxílio do software, as coordenadas do ponto B e as medidas dos catetos BB' e OB' do triângulo OBB' .

Durante a resolução dessas questões, surgiu a dúvida: como saber a medida dos catetos BB' e OB' ? Um aluno fez a seguinte colocação para o grupo:

“Se $B = (0,72; 0,69)$ e $x = 0,72$ e $y = 0,69$, então o ponto $B' = 0,72$ e $B'' = 0,69$ e com esses dados posso ter o que é pedido.”

No decorrer dessa pequena discussão, ficou claro que o ponto $B' = 0,72$ da fala do aluno significava o segmento OB' e o ponto $B'' = 0,69$ indicava o segmento OB'' .

A princípio alguns estudantes discordaram dessa colocação, mas com a argumentação do aluno, mostrando inclusive na tela os segmentos citados, todos aceitaram e responderam as questões sem dificuldades.

A partir da terceira questão, os alunos deveriam utilizar os conhecimentos já estudados de seno e cosseno no triângulo retângulo. Queríamos observar se eles utilizaram esses conceitos como ferramenta explícita.

Considerando o triângulo retângulo OBB', os alunos deveriam calcular, nas questões 3 e 6, o seno e cosseno do ângulo α . Observamos que todas as duplas utilizaram corretamente algumas relações trigonométricas no triângulo retângulo,

$$\left(\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \text{ e } \text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \right), \text{ mobilizando os conceitos de seno e}$$

cosseno como ferramenta explícita. Determinaram também, nas questões 4 e 5, o valor da abscissa e da ordenada corretamente.

Esperávamos, na sexta questão, que os alunos, ao se depararem com os ângulos de medidas iguais a 90° e 120° , fossem levados a procurar outras estratégias para resolução.

Representaremos a seguir apenas uma tabela com todos os valores preenchidos, referente à resposta dada por uma dupla e a seguir comentaremos sobre as produções dos estudantes.

Ângulo	Cateto BB'	Cateto OB'	Hipotenusa OB	Abscissa	Ordenada	Seno	Cosseno
15°	0,26	0,96	1,0	0,96	0,26	0,26	0,96
30°	0,50	0,87	1,0	0,87	0,50	0,50	0,87
45°	0,71	0,71	1,0	0,71	0,71	0,71	0,71
60°	0,87	0,49	1,0	0,49	0,87	0,87	0,49
90°	1,00	0,00	1,0	0,00	1,00	1,00	0,00
120°	0,87	-0,50	1,0	-0,50	0,87	0,87	-0,50

Uma dupla ressaltou durante o debate que para o ângulo de medida igual a 90° não havia a formação do triângulo retângulo OBB', respondendo, assim, somente os valores da abscissa e da ordenada. Para o ângulo de medida igual a 120° , considerou a hipotenusa igual a -1, invertendo os sinais de seno e de cosseno deste ângulo. Esses dois estudantes, no decorrer da discussão, não conseguiram justificar o motivo de ter mudado o sinal da hipotenusa. Como

os conhecimentos antigos não foram suficientes para resolver completamente a questão, esses alunos podem ter iniciado um novo ciclo da dialética ferramenta-objeto, encontrando-se na fase de pesquisa.

As outras sete duplas perceberam, durante o preenchimento da tabela, que o valor do seno do ângulo α era a abscissa de B. Como esses alunos não observaram mais a formação do triângulo OBB', preencheram os dados da tabela para os ângulos de medidas iguais a 90° e 120° . Assim, os estudantes deixaram de efetuar os cálculos do cosseno e do seno e começaram a atribuir valores para eles partindo da abscissa e ordenada do ponto B.

Pretendíamos, com as questões a seguir, proporcionar condições para os alunos observarem que dado um arco AB de medida x , a abscissa do ponto B é o cosseno do arco e a ordenada é o seno do arco.

Nas questões sete e oito, os alunos deveriam comparar os valores do seno e cosseno do arco AB com as coordenadas do ponto B.

Sete duplas responderam que, os valores da ordenada do ponto B é igual ao valor do seno do arco AB e o valor da abscissa do ponto B é igual ao valor do cosseno do arco AB. A oitava dupla escreveu que o seno do arco AB é igual à abscissa do ponto B e o cosseno do arco AB igual a ordenada do ponto. Essa resposta pode nos indicar ter havido uma confusão em identificar no par ordenado, a abscissa e a ordenada. No decorrer da discussão com o grupo, nossa hipótese é confirmada quando esta dupla comentou:

“O valor do seno é o valor de y e o valor do cosseno é o valor de x.”

Na nona questão perguntávamos aos alunos de que maneira eles calculariam o seno e o cosseno de ângulos maiores que 90° .

Sete duplas responderam:

“Usando as abscissas e as ordenadas.”

Uma dupla descreveu:

“Passando para o primeiro quadrante.”

Na questão a seguir, os estudantes deveriam responder se a maneira descrita na questão anterior poderia ser utilizada para ângulos menores que 90° .

Três duplas responderam que sim, porque o raio e a hipotenusa eram iguais a 1. Na discussão com o grupo enfatizaram que, pelo fato do raio ser igual a 1 e a hipotenusa também, eles utilizaram as relações trigonométricas de um triângulo retângulo,

$$\left(\sin \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \text{ e } \cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \right), \text{ para chegarem à conclusão de que o}$$

valor de seno é igual à ordenada e o valor do cosseno é igual à abscissa do ponto B.

Uma dupla respondeu não, pois na questão anterior escreveu ser necessário passar o ângulo maior que 90° para o primeiro quadrante. Na discussão com o grupo, aparentemente houve uma evolução desses estudantes, que se manifestou nas respostas das questões seguintes.

As outras quatro duplas responderam:

“Sim, porque a abscissa é igual ao valor do cosseno e a ordenada é igual ao valor do seno.”

Após essas questões foi feita a institucionalização de seno e cosseno de um arco.

As questões a seguir têm o objetivo de utilizar os conceitos de seno e cosseno institucionalizados anteriormente, para identificar que estes não podem assumir valores maiores que 1 e menores que -1 .

Na questão 11 os alunos deveriam observar, utilizando o círculo trigonométrico, se existem arcos cujo cosseno ou seno é maior que 1 e menor que -1 . Verificamos que todas as produções foram corretas e completas.

Perguntávamos nas questões 12 e 13 qual o maior valor possível de seno e cosseno do arco AB e qual o menor valor possível de seno e cosseno do arco AB.

Duas duplas tiveram a seguinte produção:

Questão 12) 1 para seno e 1 para cosseno.

Questão 13) -1 para seno e -1 para cosseno.

Outra dupla respondeu o seguinte:

Questão 12) maior valor para $\sin 90^\circ = 1$ e $\cos 360^\circ = 1$

Questão 13) menor valor para $\sin 270^\circ = -1$ e $\cos 180^\circ = -1$.

Esses alunos apresentaram produções completas corretas, usando os conceitos institucionalizados anteriormente como ferramenta.

Quatro duplas não responderam corretamente o maior e o menor valor que o seno de um arco pode assumir, obtendo as seguintes produções:

Questão 12) $\sin 270^\circ = 0$ e $\cos 360^\circ = 1$

Questão 13) $\sin 90^\circ = 1$ e $\cos 180^\circ = -1$.

A oitava dupla explicitou da seguinte maneira:

Questão 12) 1 para ambos

Questão 13) $\sin = 1(90^\circ)$ e $\cos = 1(360^\circ)$.

Notamos que essa dupla cometeu o mesmo erro por nós destacado na Seção 1.1. Esses alunos não estão sabendo identificar a ação do seno ou do cosseno como operador de um determinado arco ou ângulo.

As cinco duplas que não conseguiram responder corretamente essas questões também mobilizaram conceitos institucionalizados de seno e cosseno, embora suas produções tenham sido incompletas.

Pretendíamos retomar, nas questões 14 e 15, os conceitos trabalhados na atividade anterior, enfatizando que pelo fato de existirem arcos diferentes com mesma origem e mesma extremidade, estes possuem valores iguais para seno e para cosseno.

Na questão 14, os alunos deveriam identificar arcos diferentes cujo seno era igual a 1. Duas duplas responderam dando como exemplo os arcos de medida 90° e -270° e uma

exemplificou com os arcos de medida 90° e 450° . Na pergunta seguinte, eram solicitados dois arcos cujo cosseno era igual a 1. Essas três duplas deram como exemplo os arcos de medidas 0° e 360° .

No decorrer da discussão, um desses alunos comentou que podem existir arcos com extremidades diferentes, cujo seno ou o cosseno sejam iguais, dando como exemplo os arcos cujas medidas são 60° e 120° , enfatizando que o seno desses arcos são iguais. Outro estudante reforçou que no caso de arcos que tem mesma origem e mesma extremidade, os valores de seno destes arcos são iguais e de cosseno também, o que não ocorre com o exemplo dado pelo colega.

Quatro duplas pressupunham que não existiam arcos diferentes cujo seno fosse igual a 1, o mesmo ocorreu na questão seguinte no caso do cosseno. A oitava dupla deu como exemplo, na questão 14, somente o arco de medida 90° e na questão 15 o arco de medida 360° .

Analisando as explicitações do grupo, observamos que mais da metade dos alunos não conseguiram utilizar os conceitos referentes a arcos com mesma origem e mesma extremidade, nas questões 14 e 15. Embora os estudantes tivessem o recurso da representação geométrica dos arcos na tela, estes não conseguiram interagir com os domínios geométrico e numérico.

CONCLUSÃO

A utilização do computador para análise da trigonometria auxiliou os alunos na visualização dos arcos e assim poderem ter outra visão dos conceitos da trigonometria. É um bom recurso para tornar a aula diversificada e complementar o ensino do conteúdo. Mas temos que entender que o computador é apenas uma ferramenta que auxilia as aulas, e não a única forma de ensinar matemática.

No estudo que fizemos pudemos analisar que os recursos computacionais ajudaram os alunos a criarem sua visão sobre os itens exercitados. Vale lembrar que as discussões ao final de cada atividade fizeram com que cada aluno pudesse expor sua idéia e refletir com os colegas.

O uso do Cabri-géomètre II mostrou-se bastante eficaz, auxiliando em grande parte nas observações e conclusões dos alunos. Isso deve-se à mobilidade das figuras, característica esta do software, permitindo aos alunos modificá-las, conservando suas relações explícitas e ainda

pelo fato de termos tido o cuidado de articular cores que pudessem favorecer a percepção do aluno. Esses dados indicam-nos que os estudantes puderam por meio do manuseio das construções e das atividades associar os conceitos já estudados no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico.

É importante ressaltar a importância do uso de seqüências didáticas. Assim como é necessário ter claro os objetivos de uma determinada aula expositiva onde o professor avalia o aluno, também devem ser traçados os objetivos de uma aula com o uso do computador. Para que uma aula com o uso do software tenha um bom aproveitamento, na seqüência didática do professor devem constar quais os objetivos ele pretende alcançar e quais as reflexões ele deseja promover com seus alunos.

Esperamos que as experiências que trabalhadas aqui sejam alvo de motivação para que o professor crie outras atividades que desperte a atenção dos alunos e diversifique suas aulas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, M.E. **Informática e formação de professores**. Brasília:[s.n], 2000. v.2.

BRIGUNTE, M. J. L. **Ensino e aprendizagem da trigonometria**: novas perspectivas da educação matemática. Dissertação de Mestrado, Rio Claro: UNESP, 1994.

CARMO, M.P. **Trigonometria e números complexos**. Rio de Janeiro: SBM, 1979.

COSTA, N. M. L. **Funções seno e cosseno**: uma seqüência de ensino a partir dos contextos do “mundo experimental” e do computador. Dissertação de Mestrado, São Paulo: PUC, 1997.

LIMA. E. L. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: Vitae, 1991.

LOURENÇO, M. L. **Cabri-géomètre II introdução e atividades**. [s.l.]:FAFICA, 2000.

OLIVEIRA, R. **Informática Educativa**. São Paulo: Papyrus, 1997.

SANCHO, J. M. **Para uma tecnologia educacional**. Porto Alegre: Art Med, 1998.

ANEXOS

Anexo I

Atividade I – Arcos

Construir um círculo trigonométrico com um ponto B móvel, sendo possível movimentá-lo no sentido horário ou no anti-horário.

Movimente o ponto B sobre a circunferência no sentido anti-horário.

- 1) Qual é a origem do arco AB? Qual é a sua extremidade?
- 2) Mudando o arco AB, o ângulo central α também muda? Aumenta ou diminui?

Movimente B no sentido horário, sobrepondo-o ao ponto A.

- 3) Onde inicia e onde termina o arco AB?
 - 4) Qual é a medida do ângulo central correspondente?
- Movimente B no sentido anti-horário, sobrepondo-o ao ponto A.
- 5) Qual é a origem do arco AB? E qual é sua extremidade?
 - 6) Qual é a medida do ângulo central α correspondente?

Anexo II

Atividade II – Radianos

Parte 1

Construir um círculo trigonométrico com os pontos A e B sobre a circunferência formando o arco AB.

Meça o arco AB, utilizando o comando “distância e comprimento”.

Meça o segmento \overline{OA} , utilizando o comando “distância e comprimento”.

- 1) É possível efetuar operações com essas duas medidas? De que tipo? Por quê?
- 2) Como você mediria em centímetros o comprimento do arco AB sem utilizar o computador?

Construir três circunferências com mesmo centro e raios diferentes.

Construir um arco

Nomear os pontos de intersecção dos segmentos que formam os arcos com as circunferências

Utilizando o comando “distância e comprimento”:

- Meça o arco AB. Clique sobre o número obtido e arraste-o até comentário na tela, **arco AB =**.
- Meça os arcos CD e EF. Clique sobre os números obtidos e arraste-os até os respectivos comentários na tela, **arco CD = e arco EF =**.
- Meça os raios \overline{OA} , \overline{OC} e \overline{OE} . Clique sobre os números obtidos e arraste-os até os respectivos comentários na tela, **raio AO =, raio OC = e raio OE =**.
- Utilizando o comando “calculadora” resolva AB/AO. Clique sobre o resultado obtido e arraste-o até o comentário na tela **AB/AO =**.
- Utilizando o comando “calculadora” resolva CD/OC. Clique sobre o resultado obtido e arraste-o até o comentário na tela **CD/OC =**. Repita a ação anterior para calcular EF/OE.
- Efetuada as medidas preencha a primeira linha da tabela a seguir.
- Mude a posição do ponto B e preencha a segunda linha da tabela.
- Continue movimentando B e complete a tabela abaixo.

AB	CD	EF	OA	OC	OE	AB/OA	CD/OC	EF/OE

- 3) O que você pode concluir em relação aos comprimentos dos arcos AB, CD e EF em cada posição?
- 4) O que você pode concluir em relação às razões AB/AO, CD/OC e EF/OE em cada posição de B?

Fixe o ponto B em uma posição qualquer.

- 5) Como você efetuará a medida dos arcos AB, CD e EF em radianos?

6) Complete:

a) medida AB = _____ rad

b) medida CD = _____ rad

c) medida EF = _____ rad

7) Registre na figura abaixo, sem utilizar o computador, as posições dos pontos B, D e F, a fim de obter $\text{med AB} = \text{med CD} = \text{med EF} = 1 \text{ rad}$.

Meça o ângulo central correspondente em graus, utilizando o comando “ângulo”

8) Que relação existe entre a medida do ângulo central em graus e os arcos correspondentes, medidos em radianos?

Meça, o ângulo central correspondente em radianos, utilizando o comando “ângulo”.

9) Que relação existe entre a medida do ângulo central em radianos e os arcos correspondentes, medidos em radianos?

10) Quando a medida do ângulo central é igual à medida do arco correspondente?

11) O que você concluiu sobre as medidas dos 3 arcos, dadas em radianos?

Anexo III

Atividade II – Radianos

Parte 2

Movimente o ponto B até o valor proposto em cada questão e responde:

- 1) Se a medida do arco AB é aproximadamente 1 rad, qual é a medida aproximada do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ em graus? E a medida do arco AB em graus?
- 2) Se a medida do arco AB é aproximadamente 1, 57rad, qual é a medida aproximada do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ em graus? E a medida do arco AB em graus?
- 3) Se a medida do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ é aproximadamente 180° , qual é a medida aproximada do arco AB em radianos? E a medida do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ em radianos?
- 4) Se a medida do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ é aproximadamente 270° , qual é a medida aproximada do arco AB em radianos? E a medida do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ em radianos?

Com os dados obtidos acima, e lembrando que o valor aproximado de π é 3,14, responda as questões a seguir, sem utilizar o Cabri-Géomètre.

- 5) Se a medida de um arco é $\frac{\pi}{6}$ rad, então essa medida corresponde a _____ graus.
- 6)
- 7)

- 8) Se a medida de um arco é 60 graus, então essa medida corresponde a _____ graus.
- 9) Se a medida de um arco é $\frac{\pi}{4}$ rad, então essa medida corresponde a _____ graus
- 10) Se a medida de um arco é 2π rad, então essa medida corresponde a _____ graus
- 11) Se a medida de um arco é 90 graus, então essa medida corresponde a _____ radianos.

Anexo IV

Atividade III – Seno e Cosseno

Utilizando o comando “equação e coordenadas”, determine as coordenadas do ponto B.

Considere o triângulo retângulo OBB’.

Sabendo que a hipotenusa OB mede 1,0; determine:

- 1) A medida do cateto BB’ _____
- 2) A medida do cateto OB _____
- 3) Com os dados obtidos acima e considerando o triângulo retângulo OBB’, calcule cosseno do ângulo α e seno do ângulo α .
- 4) A abscissa do ponto B é _____
- 5) A ordenada do ponto B é _____
- 6) Movimentando o ponto B e considerando o triângulo retângulo OBB’, preencha a tabela a seguir, calculando os valores de seno e cosseno, para os ângulos dados.

Ângulo	Cateto BB’	Cateto OB’	Hipotenusa OB	Abscissa	Ordenada	Seno	Cosseno
15°							

30°							
45°							
60°							
90°							
120°							

- 7) Compare, em cada caso, o seno com as coordenadas de B. O que você pode concluir?
- 8) Compare, em cada caso, o cosseno com as coordenadas de B. O que você pode concluir?
- 9) Como você pode calcular o seno e o cosseno de ângulos com mais de 90°, sem utilizar o triângulo retângulo?
- 10) Essa maneira também pode ser utilizada para ângulos com menos de 90°?
- 11) Movimentando o ponto B no círculo trigonométrico, responda:
 - a) Você pode determinar um valor para o arco AB, cujo cosseno desse arco seja igual a 1,3? Se sim, qual será o arco?
 - b) Você pode determinar um valor para o arco AB, cujo cosseno desse arco seja igual a -2? Se sim, qual será o arco?
 - c) Você pode determinar um valor para o arco AB, cujo cosseno desse arco seja igual a -1? Se sim, qual será o arco?
 - d) Você pode determinar um valor para o arco AB, cujo cosseno desse arco seja igual a 1? Se sim, qual será o arco?
 - e) Você pode determinar um valor para o arco AB, cujo seno desse arco seja igual a -1,2? Se sim, qual será o arco?
 - f) Você pode determinar um valor para o arco AB, cujo seno desse arco seja igual a 3? Se sim, qual será o arco?
 - g) Você pode determinar um valor para o arco AB, cujo cosseno desse arco seja igual a -1? Se sim, qual será o arco?

h) Você pode determinar um valor para o arco AB, cujo cosseno desse arco seja igual a 1? Se sim, qual será o arco?

12) A partir das respostas anteriores, qual o maior valor possível para seno do arco AB? E para cosseno do arco AB?

13) Qual o menor valor possível para seno do arco AB? E para cosseno do arco AB?

14) Existem arcos diferentes cujo o seno desses arcos sejam iguais a 1? Se sim, dê um exemplo.

15) Existem arcos diferentes cujo cosseno desses arcos sejam iguais a 1? Se sim, dê um exemplo.