

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL COM
RESTRICÃO DE TENSÃO LOCAL USANDO O
MÉTODO *LEVEL SET***

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a obtenção do grau de
Mestre em Engenharia Mecânica

HÉLIO EMMENDOERFER JUNIOR

Florianópolis, Outubro de 2011

**PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL COM
RESTRICÇÃO DE TENSÃO LOCAL USANDO O
MÉTODO *LEVEL SET***

HÉLIO EMMENDOERFER JUNIOR

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica, Área de concentração Análise e Projeto Mecânico, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.
Orientador

Júlio César Passos, Dr.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Banca Examinadora:

Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.
Presidente

Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.

Jun Sérgio Ono Fonseca, Ph.D.

Eduardo Lenz Cardoso, Dr. Eng.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Eduardo Alberto Fancello pela grande capacidade de orientação, amizade, dedicação e, sobretudo, pela paciência para transmitir os ensinamentos necessários para a realização deste trabalho.

Aos professores do GRANTE/UFSC: Marcelo Krajnc Alves, Clovis Sperb de Barcellos, Paulo de Tarso R. Mendonça, Edison da Rosa, Lauro César Nicolazzi e José Carlos Pereira.

Aos professores Clovis Sperb de Barcellos, Jun Sérgio Ono Fonseca e Eduardo Lenz Cardoso por aceitarem compor a banca examinadora e pelas contribuições na revisão desta dissertação.

A todos os colegas e amigos do GRANTE/UFSC, em especial aos da "repartição": Diego Amadeu Furtado Torres, Leandro Lindenmeyer e Andresa Freitas.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e à UFSC pela disponibilização de toda sua estrutura.

Ao CNPq pelo apoio financeiro concedido através da bolsa de mestrado.

Finalmente, agradeço eternamente aos meus pais Hélio e Mafalda, pelo incentivo e apoio para vencer mais esta etapa da vida. Também aos meus irmãos Eleomar (Nino) e Schirley, meus profundos agradecimentos.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL COM RESTRICÇÃO DE TENSÃO LOCAL USANDO O MÉTODO *LEVEL SET*

Hélio Emmendoerfer Junior

Outubro / 2011

Orientador: Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.

Área de Concentração: Análise e Projeto Mecânico.

Palavras-chave: método *level set*, otimização topológica, otimização estrutural.

Este trabalho apresenta uma abordagem sobre otimização topológica estrutural. Neste estudo, formula-se o problema de minimização de massa com restrição de falha material local baseada em níveis de tensão. Esta restrição é imposta utilizando uma abordagem baseada na técnica Lagrangiano Aumentado, onde as restrições são incorporadas à função objetivo através de uma sequência de problemas de penalização. A sequência de atualização dos parâmetros de Lagrange conduz, na convergência, à satisfação das condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) do problema original. Para o controle da topologia utiliza-se o método *level set*, cuja fronteira é implicitamente representada pelas curvas de níveis de uma função escalar, conhecida como função *level set*. A sequência minimizante é obtida atualizando a fronteira segundo uma direção de gradiente da função objetivo. Esta direção é obtida mediante análise de sensibilidade à mudança de forma, fornecendo um campo de velocidade que permite a atualização da fronteira através da solução do problema de Hamilton-Jacobi, definida sobre um domínio de referência fixo. Vários exemplos numéricos são apresentados a fim de verificar o comportamento da metodologia proposta, incluindo exemplos nos quais as soluções analíticas são conhecidas a priori.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Mechanical Engineering.

STRUCTURAL OPTIMIZATION PROBLEM WITH LOCAL STRESS CONSTRAINT USING THE LEVEL SET METHOD

Hélio Emmendoerfer Junior

October / 2011

Advisor: Eduardo Alberto Fancello, D.Sc..

Area of Concentration: Mechanical Analysis and Design.

Keywords: level set method, topology optimization, structural optimization.

This work presents an approach to structural topology optimization. In this study the problem of mass minimization is formulated under local material failure constraint based on stress levels. This constraint is imposed using an approach based on Augmented Lagrangian Method in such a way that the constraints are incorporated into the objective function through a sequence of penalty problems. The convergence of the updating sequence of the Lagrange parameters corresponds to the satisfaction of the Karush-Kuhn-Tucker (KKT) conditions of the original problem. The level set method is used to control the domain topology whose boundary is represented implicitly by level curves of a higher dimensional scalar function, known as level set function. The minimizing sequence is achieved by updating the body boundary using a gradient direction of the objective function. This is obtained through shape sensitivity analysis, providing a velocity field that updates the boundary by the solution of the Hamilton-Jacobi partial differential equation embedded in a fixed domain. Several numerical examples are shown in order to verify the behavior of the proposed methodology, including examples in which the analytical solutions are known a priori.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Otimização de forma.	2
1.2	Otimização topológica.	2
2.1	Representação geométrica de um domínio composto de sólido, vazio e condições de contorno.	9
2.2	Descrição <i>level set</i> de um domínio 2D. (a) Representação do domínio. (b) Modelo <i>level set</i> . (LUO et al., 2008)	13
2.3	Aproximação suave das funções Heaviside e delta de Dirac	18
3.1	Esquema ilustrativo para mostrar a malha de elementos finitos e o <i>grid level set</i>	36
4.1	Barra sob tração uniaxial aplicada na região intermediária. Modelo utilizado.	42
4.2	Barra sob tração uniaxial aplicada na região intermediária. Domínio <i>level set</i> inicial.	43
4.3	Barra sob tração uniaxial aplicada na região intermediária. Campo de densidades.	44
4.4	Barra sob tração uniaxial aplicada na região intermediária. Campo de funções de falha ε -relaxadas.	44
4.5	Barra sob tração uniaxial aplicada na região intermediária. Convergência da função objetivo.	45
4.6	Barra sob tração uniaxial aplicada na região intermediária. A figura mostra as três parcelas da função objetivo.	45
4.7	Viga sob flexão pura. Modelo utilizado.	46
4.8	Viga sob flexão pura. Domínio <i>level set</i> inicial.	47
4.9	Viga sob flexão pura. Campo de densidades.	47
4.10	Viga sob flexão pura. Campo de funções de falha ε -relaxadas.	48
4.11	Viga sob flexão pura. Convergência da função objetivo.	49
4.12	Viga sob flexão pura. A figura mostra as três parcelas da função objetivo.	49
4.13	Viga bi-apoiada sob carregamento transversal central (MBB). Modelo utilizado.	50
4.14	Viga bi-apoiada sob carregamento transversal central (MBB). Domínio <i>level set</i> inicial.	51
4.15	Viga bi-apoiada sob carregamento transversal central (MBB). Campo de densidades.	51
4.16	Viga bi-apoiada sob carregamento transversal central (MBB). Campo de funções de falha ε -relaxadas.	52

4.17	Viga bi-apoiada sob carregamento transversal central (MBB). Convergência da função objetivo.	53
4.18	Viga bi-apoiada sob carregamento transversal central (MBB). A figura mostra as três parcelas da função objetivo.	53
4.19	Estrutura em formato de L engastada na parte superior. Mo- delo utilizado.	54
4.20	Estrutura em formato de L engastada na parte superior. Domínio <i>level set</i> inicial.	55
4.21	Estrutura em formato de L engastada na parte superior. A fi- gura mostra os resultados intermediários do processo iterativo de otimização.	56
4.22	Estrutura em formato de L engastada na parte superior. To- pologia obtida.	57
4.23	Estrutura em formato de L engastada na parte superior. Campo de funções de falha ε -relaxadas.	58
4.24	Estrutura em formato de L engastada na parte superior. Con- vergência da função objetivo no processo iterativo.	59
4.25	Estrutura em formato de L engastada na parte superior. A figura mostra as três parcelas da função objetivo.	59
B.1	Derivadas parciais em 1D, para resolução da equação de Hamilton-Jacobi.	73
B.2	Atualização das curvas de nível para resolução da equação de Hamilton-Jacobi para problemas (a) 2D e (b) 3D.	75
E.1	Mapeamento do elemento finito de quatro nós no domínio real xy para o espaço $\xi\eta$ do elemento finito padrão.	88

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	Domínio ocupado por um corpo
$\partial\Omega$	Contorno de Ω ($\partial\Omega = \Gamma$)
Γ	Contorno de Ω ($\Gamma = \partial\Omega$)
Γ_D	Parte de $\partial\Omega$ com as condições de contorno de Dirichlet
Γ_N	Parte de $\partial\Omega$ com as condições de contorno de Neumann
$\boldsymbol{\tau}$	forças de superfície
Γ_H	Parte de $\partial\Omega$ com as condições de contorno de Neumann homogêneas
D	Domínio de referência fixo que contém Ω
\mathbf{C}	Tensor isotrópico de elasticidade linear
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformações
\mathbf{b}	Forças de corpo
\mathbf{u}	Campo de deslocamentos definido em U
∇	Operador gradiente
\mathbf{x}	Ponto do domínio
E	Módulo de elasticidade do material
ν	Coefficiente de Poisson
\mathbf{I}	Tensor identidade de segunda ordem
\mathbf{II}	Tensor identidade de quarta ordem
\mathbf{n}	Vetor unitário normal à fronteira ou curva de nível
U	Espaço das funções admissíveis
\mathbf{v}	Campo de deslocamentos virtuais definido em V
V	Espaço das variações admissíveis
$a(\cdot, \cdot)$	Operador bilinear
$l(\cdot)$	Operador linear
$\bar{\mathbf{u}}$	Vetor deslocamento prescrito sobre a fronteira Γ_D
H^1	Espaço de funções de Hilbert de primeira ordem
m	Massa
ρ	Campo de densidades distribuído no domínio
g	Função de falha material
t	Amplitude da transformação numa dada direção
\mathbf{v}	Direção de mudança ou velocidade
v_n	Componente normal do campo de velocidade na fronteira
ϕ	Função escalar <i>level set</i>
H	Função Heaviside
p	Funcional $\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ definido sobre um domínio
δ	Função delta de Dirac

ξ	Comprimento da zona de transição da função Heaviside
H_{\min}	Valor mínimo positivo da função Heaviside
$\bar{\sigma}$	Tensão local
ε	Parâmetro de relaxação
g_ε	Função de falha ε -relaxada (restrição de desigualdade)
s	Função de folga (<i>slack variable function</i>)
α	Multiplicador de Lagrange
J	Funcional objetivo
h_ε	Função de falha ε -relaxada (restrição de igualdade)
c	Fator de penalização
k	Número da iteração (<i>Loop externo</i>)
β	Fator para atualização de c
γ	Fator de limitação de c
ℓ	Funcional Lagrangiano
λ	Multiplicador de Lagrange associado à equação de equilíbrio
$\delta\phi$	Direção de modificação de ϕ
$\delta\mathbf{u}$	Direção de modificação de \mathbf{u}
$\delta\lambda$	Direção de modificação de λ
I_1	Primeiro invariante do tensor de tensões
J_2	Segundo invariante do tensor desviador de tensões
J_3	Terceiro invariante do tensor desviador de tensões
h	Crítério de falha em função dos invariantes de tensões
\mathbf{S}	Tensor de tensões desviadoras
\mathbf{A}	Tensor que contém as derivadas da função de falha em relação aos invariantes de tensões
G	Densidade do gradiente de forma
T	Tamanho do intervalo do pseudo-tempo t
\bar{J}	Função objetivo com regularização do perímetro
E_S	Termo de regularização do perímetro
μ	Parâmetro de valor mínimo
\bar{G}	Densidade do gradiente de forma regularizada
nx	Número de elementos ao longo de x
ny	Número de elementos ao longo de y
$d(\mathbf{x})$	Função distância
$S(\phi)$	Função sinal
Δx	Dimensão do <i>grid</i> em relação ao eixo x
D_h	Domínio de dimensão finita
D_e	Domínio do elemento finito
U_h	Subespaço de dimensão finita das funções admissíveis

V_h	Subespaço de dimensão finita das variações admissíveis
h	Tamanho relativo dos elementos finitos da malha
\mathbf{u}_h	Campo de deslocamentos definido em U_h
\mathbf{v}_h	Campo de deslocamentos virtuais definido em V_h
e	Elemento finito
\mathbf{N}	Matriz de funções de forma local
\mathbf{B}	Matriz de deformação
\mathbf{U}	Vetor de deslocamentos nodais associados à aproximação \mathbf{u}_h
\mathbf{V}	Vetor de deslocamentos virtuais nodais associados à aproximação \mathbf{v}_h
\mathbf{K}	Matriz de rigidez global da estrutura
\mathbf{F}	Vetor de carregamento nodal
$\tilde{\mathbf{K}}$	Matriz de rigidez global da estrutura com as condições de contorno essenciais
$\tilde{\mathbf{U}}$	Vetor de deslocamentos nodais incógnitas do problema
$\tilde{\mathbf{F}}$	Vetor de carregamento nodal com as condições de contorno essenciais
$\boldsymbol{\lambda}_h$	Campo de deslocamento adjunto definido em V_h
$\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_h$	Campo de direções arbitrárias definido em V_h
$\boldsymbol{\Lambda}$	Vetor de deslocamentos nodais adjuntos associados à aproximação $\boldsymbol{\lambda}_h$
$\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}$	Vetor de direções arbitrárias relativos à aproximação $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_h$
\mathbf{F}_a	Vetor força adjunta nodal
nel	Número de elementos finitos
V_e	Volume do e -ésimo elemento
G_h	Densidade do gradiente de forma definida para o espaço aproximado
j	Número da iteração (<i>Loop interno</i>)
Δt	Passo de tempo
Δt_{CFL}	Passo de tempo sob a condição CFL
p	Carregamento distribuído
σ_{adm}	Tensão admissível de falha do material
L	Comprimento
M	Momento fletor puro
P	Força aplicada
$\ (\cdot)\ $	Norma Euclidiana de um vetor ou tensor (\cdot)
$\nabla(\cdot)$	Gradiente de (\cdot)
$(\cdot)_\phi$	Denota dependência explícita em relação a ϕ
$(\cdot)^e$	Relativo ao elemento

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Revisão bibliográfica	4
1.2	Motivação e apresentação do trabalho	8
2	PROBLEMA DE MÍNIMA MASSA COM RESTRIÇÃO EM FA- LHA LOCAL	9
2.1	Formulação do problema	9
2.2	Análise de sensibilidade à mudança de forma	11
2.3	O método <i>level set</i>	13
2.3.1	Características do método <i>level set</i>	15
2.4	O problema de otimização baseado no método <i>level set</i>	16
2.5	Singularidade de tensão e relaxação do problema	18
2.6	Solução do problema pelo Método Lagrangiano Aumentado	20
2.6.1	Atualização dos multiplicadores de Lagrange e fator de penalização	22
2.7	Cálculo da sensibilidade do problema e campo de velocidade	24
2.7.1	Análise de sensibilidade	24
2.7.2	Campo de velocidade via análise de sensibilidade	28
2.8	Regularização do perímetro	29
3	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	31
3.1	Aspectos computacionais do método <i>level set</i>	31
3.2	Aproximação numérica: Método dos Elementos Finitos (MEF)	33
3.3	Algoritmo de otimização	38
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	41
4.1	Considerações gerais	41
4.2	Barra sob tração uniaxial	42
4.3	Viga sob flexão pura	46
4.4	Viga MBB	50
4.5	Estrutura em formato L	54
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
5.1	Conclusões	61
5.2	Sugestões para trabalhos futuros	63
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	64

Apêndice A – Derivada Gâteaux e Fréchet de um funcional	71
Apêndice B – Resolução da equação de Hamilton-Jacobi	73
Apêndice C – Critérios de falha material	77
C.1 Critérios de escoamento	77
C.1.1 Critério de escoamento de Tresca	78
C.1.2 Critério de escoamento de von Mises	79
C.2 Derivada dos invariantes em relação ao campo de deslocamentos	79
C.3 Derivada da função de falha em relação aos invariantes de tensões	80
Apêndice D – Estado Plano de Tensões (EPT)	83
D.1 Redução do problema 3D para o problema 2D	84
Apêndice E – Elementos Finitos em EPT	87
E.1 Tipo de elemento e matriz de deformação	87
E.2 Matriz de rigidez elementar	88
E.3 Força adjunta elementar	90
Apêndice F – Operações básicas utilizadas para o método level set	91
F.1 Relação entre integrais de fronteira e domínio	91
F.2 Variação da fronteira <i>level set</i>	92

1 INTRODUÇÃO

A utilização de métodos de otimização para o desenvolvimento de projetos mais elaborados vem crescendo nos últimos tempos e o seu campo de aplicações ampliou-se com o desenvolvimento da tecnologia computacional, permitindo o seu emprego em projetos estruturais complexos tais como pontes, viadutos, componentes automotivos e aeroespaciais, entre outros. Basicamente, o processo de otimização estrutural consiste em obter o projeto de melhor desempenho, onde este projeto é avaliado através de uma função custo (ou objetivo) definida a partir de um conjunto de variáveis que descrevem o sistema estrutural, denominadas variáveis de projeto. As técnicas de otimização buscam determinar os extremos desta função (máximo ou mínimo) dentro de uma região viável. Este espaço de projeto reúne os pontos que atendem as restrições do problema, geralmente classificadas em restrições de igualdade ou desigualdade. A solução deste problema fornece a geometria ótima do domínio de definição do problema, ou seja, determina-se a configuração do corpo que satisfaz as restrições, minimizando ou maximizando a função custo.

Geralmente, a otimização estrutural pode ser agrupada em três categorias principais: paramétrica, de forma e topológica. Na otimização paramétrica, as variáveis de projeto são definidas por parâmetros do material (módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, tensão de escoamento, densidade, etc.) e/ou geométricos (altura, espessura, largura, momento de inércia, etc.), sem alterar o domínio geométrico onde o problema é definido. Já na otimização de forma, o domínio é alterado através de mudanças na fronteira do domínio, e portanto de sua forma geométrica mas preservando a topologia. O controle da fronteira do domínio, tendo o domínio como variável de projeto, é dado através da análise de sensibilidade à mudança de forma que utiliza conceitos básicos da mecânica do contínuo. No caso de estruturas discretas (tipicamente estruturas treliçadas ou pórticos) busca-se a solução ótima através da modificação das coordenadas nodais. Já em estruturas contínuas (placas, cascas, sólidos), a forma é usualmente definida e modificada através de variáveis de controle geométrico tais como pontos de controle de *B-splines*, raios, tangentes, etc. O processo de otimização de forma é esquematizado na Fig. (1.1). Na otimização topológica, o domínio geométrico é controlado através de modificações na topologia, isto é, em todo o domínio da estrutura. Em estruturas discretas, a otimização topológica corresponde a determinar, por exemplo, o número total de barras, suas respectivas conectividades e suas propriedades geométricas. No caso de estruturas contínuas,

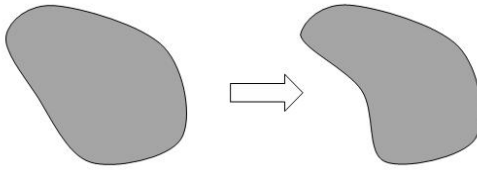


Figura 1.1: Otimização de forma.

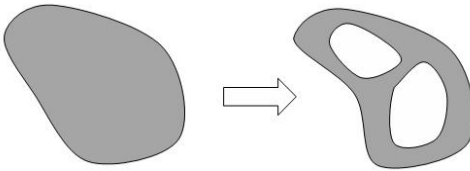


Figura 1.2: Otimização topológica.

busca-se determinar a existência ou não de material no domínio, seus respectivos formatos e a conectividade entre os domínios. É possível obter a configuração desejada mesmo partindo-se de uma morfologia inicial distante da ótima. Esta característica é representada esquematicamente na Fig. (1.2), onde é mostrado como exemplo um processo de otimização topológica.

Os métodos de otimização topológica podem ser classificados em dois grupos (ESCHENAUER; OLHOFF, 2001):

- Aproximação por microestrutura (material): O processo de otimização topológica é baseado no estabelecimento de uma relação entre a rigidez e a densidade associada ao domínio, que pode admitir valores entre 0 (vazio) e 1 (material sólido), sendo os valores intermediários correspondentes a um material poroso. Os algoritmos baseados em microestruturas propõem encontrar a melhor disposição do material, de maneira a minimizar ou maximizar a função custo. Como exemplos citam-se: Material Isotrópico com Penalização (SIMP), Homogeneização de Microestruturas, entre outros.
- Aproximação por macroestrutura (geométrica): Neste caso a topologia da estrutura é modificada através da inserção de furos no domínio. En-

tre os métodos existentes pode-se citar: métodos baseados na inserção de furos em sistemas contínuos tais como Derivada Topológica e *Bubble Method*, e baseados na inserção de furos em sistemas discretizados, tais como Algoritmos Evolucionários (ESO). O método *level set* também pode ser citado nesta classificação.

A abordagem de otimização topológica usando o método SIMP, inicialmente proposta por Bendsøe e Kikuchi (1988), surgiu como uma forma simples de introduzir um material com propriedades intermediárias similares às obtidas utilizando microestruturas e técnicas de homogeneização. Este material intermediário é usado apenas como artifício matemático para se determinar quais regiões devem possuir material ($\rho = 1$) e quais devem ser vazias ($\rho = 0$), variando ρ entre estes dois limites. Neste método, o comportamento constitutivo do material intermediário é definido por uma função paramétrica ρ , associada com a densidade do material, utilizada para a determinação do tensor constitutivo como $\mathbf{C}^* = \rho^p \mathbf{C}$, onde p corresponde a um parâmetro de penalização das densidades intermediárias (BENDSØE, 1989).

O método ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), desenvolvido por Xie e Steven (1993), consiste em uma maneira simples de impor modificações na topologia mediante uma heurística de remoção gradual dos elementos finitos da malha associados a regiões sub-utilizadas e na adição de material nas regiões super-utilizadas do ponto de vista da função objetivo, ou seja, o quanto cada região do domínio contribui para o desempenho. Embora os fundamentos do método ESO sejam extremamente simples, a heurística imposta no processo não necessariamente conduz à condição de mínimo mesmo satisfazendo as restrições do problema (TANSKANEN, 2002).

A outra forma possível para resolver o problema de otimização topológica consiste em utilizar a informação da Derivada Topológica. Esta derivada pode ser definida como a sensibilidade da função custo quando se introduz uma inclusão (vazio, material diferente) no domínio contínuo. Estas inclusões podem representar, por exemplo, canais de resfriamento, isolamentos térmico ou elétrico, incrustações, zonas plastificadas, trincas (nucleação e propagação), etc., o que irá depender das condições de contorno impostas sobre as fronteiras das cavidades criadas ou através de suas propriedades materiais.

Como outra alternativa para resolver problemas de otimização estrutural cita-se o método *level set*, o qual será utilizado neste trabalho. Este método consiste na representação da fronteira do corpo através da curva de nível zero de uma função escalar definida sobre o domínio do problema. Esta fronteira é movimentada de modo a minimizar uma determinada função objetivo.

1.1 Revisão bibliográfica

A otimização topológica de estruturas contínuas tornou-se um tópico de pesquisa importante nas últimas décadas, com diferentes objetivos de projeto a fim de solucionar um determinado tipo de problema. De forma geral, existem na literatura duas abordagens para tratar problemas de otimização envolvendo os esforços de uma estrutura. A primeira abordagem diz respeito à tensão como função objetivo do problema de otimização e tem o volume de material como restrição e, a segunda trata a tensão como restrição do problema e tem o volume de material como função objetivo. O presente trabalho tratará de problemas referentes a esta última abordagem.

Um dos critérios mais utilizados em problemas de otimização topológica estrutural é a minimização da energia interna de deformação com restrição sobre o volume ou também conhecido como problema de minimização da flexibilidade (*compliance*). Uma breve busca na literatura mostra que o problema de otimização topológica considerando restrições de falha local possui uma menor quantidade de publicações do que o clássico *compliance*. Uma das principais razões para isto é a dificuldade introduzida pelas restrições locais, devido ao grande número de restrições necessárias e o conhecido *Fenômeno da Singularidade de Tensões* (CHENG; JIANG, 1992; CHENG; GUO, 1997). Os primeiros trabalhos a abordar este fenômeno foram desenvolvidos por Sved e Ginos (1968), Kirsch (1990) e Cheng e Guo (1997). A principal contribuição do último trabalho é a incorporação de um fator de regularização no problema, permitindo o uso de algoritmos de programação matemática. A extensão dessas idéias para estruturas contínuas incorporando restrições locais de tensão é encontrado em Duysinx e Bendsoe (1998), do qual utiliza o método SIMP (*Solid Isotropic Microstructure with Penalization*).

Devido às dificuldades inerentes às formulações de otimização topológica considerando restrições de tensão em meios contínuos, algumas abordagens foram desenvolvidas a fim de evitar tais problemas. Entre estas, destacam-se a aplicação de métodos heurísticos, probabilísticos e tradicionais. Dentre os métodos heurísticos, existe o método evolucionário (ESO) de otimização estrutural, que foi proposto como uma alternativa simplificada em relação aos métodos tradicionais (STEVEN; LI; XIE, 2002). A principal vantagem dos métodos heurísticos em problemas envolvendo a avaliação das tensões é a possibilidade de evitar-se o *Fenômeno da Singularidade de Tensões*. Porém, devido ao fato desses métodos basearem-se em regras empíricas para a atualização das variáveis, eles não garantem a obtenção de

uma solução ótima. Dentre os métodos probabilísticos, o método de *Simulated Annealing* (recozimento simulado) foi utilizado por Shim e Manoochehri (1997) para a solução do problema de minimização do volume com restrição local de tensão mecânica. Por fim, os métodos tradicionais de otimização são aqueles baseados nas informações dos gradientes e são utilizados na maior parte da literatura e também neste trabalho. Dentro deste contexto, pode ser citado o trabalho de Pereira, Fancello e Barcellos (2004) que utiliza uma abordagem semelhante a Duysinx e Bendsøe (1998), combinando uma penalização do tipo Lagrangiano aumentado para as restrições de tensão e análise de sensibilidade, obtendo resultados bastante satisfatórios. Apesar das diferentes abordagens utilizadas para tratar a tensão, muitos estudos (DUYSINX; BENDSØE, 1998; PEREIRA; FANCELLO; BARCELLOS, 2004; PARÍS et al., 2009) empregam o método da homogeneização (incluindo SIMP) para relaxar o problema de otimização topológica, usando o conceito de materiais intermediários (BENDSØE, 1989). Recentemente, bons resultados foram obtidos em Farias, Cardoso e Muñoz-Rojas (2011) para problemas de otimização topológica com restrição de tensão (global) utilizando o método SIMP e técnicas de recuperação de tensão *patch* superconvergente.

Na introdução deste capítulo foi visto que, diante das diversas formas de abordar um problema de otimização topológica, o método SIMP está relacionado à distribuição do material no domínio (microestrutura), e os métodos baseados no controle da fronteira do domínio (macroestrutura) podem ser classificados em dois tipos: explícitos, citando a clássica otimização de forma e implícitos, tendo como exemplo o método *level set*.

A otimização de forma tem sido um método de grande importância para o projeto estrutural (SOKOLOWSKI; ZOLÉSIO, 1992), onde a fronteira é controlada diretamente (explicitamente), por exemplo, utilizando funções do tipo *B-spline*. Esta fronteira é perturbada com informações da análise de sensibilidade à mudança de forma, que tem suas bases matemáticas bem postas (SOKOLOWSKI; ZOLÉSIO, 1992). O inconveniente da otimização de forma é de permitir apenas mudanças na fronteira da configuração original mantendo a topologia fixa, exigindo hipóteses prévias sobre a topologia do domínio em estudo, o que a torna restritiva em muitas aplicações. Uma forma possível para alterar tanto a forma quanto a topologia pode ser obtida através do *Bubble Method* (ESCHENAUER; KOBELEV; SCHUMACHER, 1994) ou da Derivada Topológica (SOKOLOWSKI; ZOCHOWSKI, 1999; NOVOTNY; FEIJÓO; TAROCO, 2002; NOVOTNY, 2003), que são métodos baseados na mudança da topologia através da incorporação de inclusões no domínio contínuo.

O método *level set* foi originalmente introduzido com o objetivo de

rastrear o processo de evolução de fronteiras (OSHER; SETHIAN, 1988) e possui uma vasta gama de aplicações, incluindo a mecânica dos fluidos, combustão, visão computacional, processamento de imagens, ciência dos materiais e assim por diante (SETHIAN, 1999; SAPIRO, 2001; OSHER; FEDKIW, 2002). Este método é definido como implícito pois está sedimentado na seguinte idéia básica: “representar implicitamente uma determinada curva (ou superfície) como a curva de nível zero de uma função de maior dimensão, esta curva (ou superfície) se deforma em uma certa direção desejada via evolução da função conhecida como função *level set*” (SETHIAN, 1999).

Sethian e Wiegmann (2000) estão entre os primeiros pesquisadores a introduzir o método *level set* na área de otimização estrutural, onde as velocidades responsáveis pelas mudanças na topologia dependem das tensões equivalentes ao longo da fronteira. No trabalho de Wang, Wang e Guo (2003) foi definida a velocidade na fronteira através da relação entre o método *level set* (SETHIAN, 1999) e a análise de sensibilidade à mudança de forma com o problema definido num domínio fixo. Independentemente, Allaire, Jouve e Toader (2004) propuseram um método *level set* semelhante para otimização topológica onde a velocidade da fronteira foi obtida a partir da análise de sensibilidade à mudança de forma com transformação do domínio (SOKOLOWSKI; ZOLÉSIO, 1992), e a movimentação da fronteira se dá através da solução da equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi. O método *level set* estabelecido nos trabalhos de Wang, Wang e Guo (2003) e Allaire, Jouve e Toader (2004) é aplicado a diversos problemas de otimização de forma com modificações na topologia do domínio, obtendo resultados que satisfazem as condições do problema e apresentam topologia final semelhantes àquelas obtidas através de outros métodos. Porém, ainda existem algumas desvantagens: a solução do problema de otimização (topologia ótima) está fortemente associada ao número de furos definidos no domínio inicial e em problemas 2D não permite a criação de novos furos no domínio. Além disto, o passo de tempo na solução do problema de Hamilton-Jacobi deve ser pequeno o suficiente para satisfazer a uma determinada condição CFL, necessitando de muitas iterações no processo de otimização, assim como a necessidade periódica de reinicialização da função como uma *função distância com sinal*.

Para permitir a introdução de novos furos (nucleação), o método da derivada topológica (HE; KAO; OSHER, 2007) foi integrado ao método *level set* para permitir nucleação no domínio. A noção de derivada topológica foi inicialmente introduzida por Sokolowski e Zochowski (1999) para medir a influência da nucleação de pequenos orifícios no interior do domínio de definição do problema. Novotny, Feijóo e Taroco (2002) propuseram uma

definição alternativa para a Derivada Topológica, estabelecendo uma relação entre a Derivada Topológica e a análise de sensibilidade à mudança de forma (HAUG; CHOI; KOMKOV, 1986; SOKOLOWSKI; ZOLÉSIO, 1992). Recentemente, no trabalho de Amstutz e Novotny (2010) foi utilizada a derivada topológica para problemas com restrições locais de tensão, obtendo resultados bastante satisfatórios. Ainda, Novotny e Campeão (2011) apresentaram um algoritmo de otimização baseado na derivada topológica juntamente com um método de representação do domínio através do *level set* para problemas topológicos de minimização da flexibilidade em placas de Kirchhoff.

Com o intuito de reduzir o custo computacional devido à condição CFL, vários métodos *level set* alternativos têm sido desenvolvidos sem resolver diretamente a equação de Hamilton-Jacobi, tais como Belytschko, Xiao e Parimi (2003), que utilizaram o *level set* para otimização topológica com função implícita e regularização, onde apenas os valores nodais da função *level set* na curva de nível zero são atualizados (*narrow band*). No trabalho de Wang et al. (2007) foi proposta uma abordagem para otimização topológica com a introdução das funções base radiais (RBFs) utilizadas para construir a função *level set*. Também existem abordagens para tratar o método *level set* tradicional (WANG, 2004; WANG; WANG; GUO, 2004) em otimização topológica no que diz respeito às técnicas numéricas para resolver a equação de Hamilton-Jacobi. Xia et al. (2006) introduziram um esquema semi-Lagrange para resolver a equação *level set*, comparando os resultados obtidos com os tradicionais esquemas clássicos *upwind* de diferenças finitas (SETHIAN, 1999). Em Luo et al. (2008) é proposto um esquema semi-implícito para resolver a equação de Hamilton-Jacobi, onde a técnica proposta não necessita restringir o passo de tempo, não sendo necessário reinicializar a função *level set* e permite criar novos furos no domínio.

É possível encontrar na literatura códigos disponíveis livremente para otimização topológica utilizando o método *level set*. Um deles pode ser encontrado em Allaire et al. (2008), na qual usa o *software* livre *FreeFem++*. Outros dois códigos escritos em *Matlab* são encontrados em Wang, Chen e Xia (2005) e no trabalho de Challis (2010).

Os primeiros trabalhos usando o método *level set* tradicional em problemas de otimização topológica com minimização de massa e restrição de tensão estão em Xia, Shi e Wang (2010), onde as restrições de tensões são agregadas numa única restrição global equivalente e, em Guo, Zhang e Wang (2010) é proposta uma formulação regularizada para as tensões para resolver este tipo de problema.

1.2 Motivação e apresentação do trabalho

O nível de tensão mecânica é um fator de grande importância a ser considerado na maioria dos projetos estruturais e de componentes mecânicos. A utilização de uma abordagem racional para o projeto de estruturas usando técnicas de otimização, é um tópico que tem atraído a comunidade científica há vários anos. Em particular, os métodos de otimização considerando restrição de tensão é um tema que tem sido classificado como fronteira do conhecimento na aplicação dos métodos e deve ser tratado devido a sua grande aplicação na indústria. Apesar disto, os problemas de otimização estrutural considerando restrições de falha material ainda são um assunto menos frequente na literatura.

Neste trabalho, portanto, é proposta uma abordagem para o problema de otimização topológica de minimização de massa com restrição de tensão a nível local em sistemas contínuos. O problema é formulado e implementado usando o método *level set* e, através de informações da análise de sensibilidade, o movimento da fronteira é obtido pela resolução da equação de Hamilton-Jacobi. Os resultados desta abordagem serão mostrados mediante exemplos de aplicações de engenharia.

Assim sendo, no Capítulo 2 apresenta-se o método *level set* propriamente dito, bem como a formulação do problema proposto em termos da função *level set* e a utilização da técnica Lagrangiano Aumentado como forma de incorporar as restrições sobre as tensões ao funcional objetivo (massa). A partir da análise de sensibilidade deste funcional, é proposto um campo de velocidade para o problema de Hamilton-Jacobi a fim de gerar uma sequência minimizante do problema de otimização estrutural. Ainda são tratadas as questões para relaxação do problema e regularização do perímetro comentes usadas na literatura.

Após a apresentação da formulação do problema, o Capítulo 3 expõe aspectos de implementação numérica, tanto as questões de evolução da equação *level set* quanto a forma de aproximar o campo de deslocamentos através do Método de Elemento Finitos. Também é apresentado o algoritmo de otimização usando o método Lagrangiano Aumentado.

O Capítulo 4 apresenta os resultados numéricos do problema de otimização topológica com objetivo de verificação e validação da metodologia proposta para Estado Plano de Tensão. Finalmente, no Capítulo 5 são feitas algumas considerações finais sobre o trabalho com propostas de possíveis melhorias dos resultados como sugestão para trabalhos futuros.

2 PROBLEMA DE MÍNIMA MASSA COM RESTRIÇÃO EM FALHA LOCAL

Neste capítulo apresenta-se a formulação do problema de otimização para minimização da massa com restrições locais sobre o critério de falha material. Propõe-se incorporar esta restrição ao funcional objetivo através da técnica Lagrangiano Aumentado. A análise de sensibilidade do problema permite a determinação de um campo de velocidades normais à fronteira que é utilizado junto ao método *level set* para gerar uma sequência minimizante do problema de otimização estrutural.

2.1 Formulação do problema

Seja Ω um domínio limitado em \mathfrak{R}^n ($n = 2, 3$) com fronteira $\partial\Omega$ ocupado por um material isotrópico, homogêneo e elástico linear. Considera-se que a fronteira de Ω seja suficientemente suave e composta por três partes distintas:

$$\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_H,$$

sendo Γ_D a parte de $\partial\Omega$ onde estão impostas as condições de contorno de Dirichlet, Γ_N a parte submetida a um carregamento de superfície $\boldsymbol{\tau}$ e Γ_H a região onde são consideradas as condições de contorno de Neumann homogêneas, também conhecida como “*traction-free*” (região onde não são aplicadas tensões). Considera-se que a parcela da fronteira Γ_H é a única parte que se movimenta durante o processo de otimização. Considera-se também

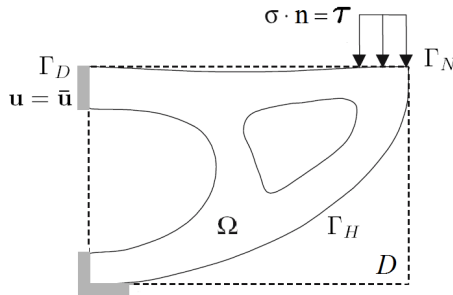


Figura 2.1: Representação geométrica de um domínio composto de sólido, vazio e condições de contorno.

que todas as formas admissíveis de Ω estão contidas em um domínio de referência fixo D . Esta representação geométrica pode ser visualizada na Fig. (2.1).

Admitindo hipóteses cinemáticas restritas ao caso de pequenos deslocamentos e deformações, obtém-se um problema de elasticidade linear definido sobre o domínio Ω para representar o comportamento do corpo. Deste modo, um conjunto de equações constitutivas, cinemáticas e de equilíbrio relacionam o tensor constitutivo do material \mathbf{C} , o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$, o tensor de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$, o vetor força de corpo uniformemente distribuída sobre o domínio \mathbf{b} e o vetor de deslocamentos \mathbf{u} da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}), \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b} &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,\end{aligned}\tag{2.1}$$

no qual o tensor isotrópico de elasticidade linear \mathbf{C} é dado por

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1+\nu} (\mathbf{II} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}),\tag{2.2}$$

onde E é o módulo de elasticidade, ν o coeficiente de Poisson e \mathbf{I} e \mathbf{II} correspondem ao tensor identidade de segunda e quarta ordem, respectivamente.

As condições de contorno também são definidas:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \boldsymbol{\tau} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_H, \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Esta forma de apresentar o problema em termos das equações diferenciais parciais é conhecida como a *forma forte*, onde objetiva-se encontrar um campo de deslocamentos \mathbf{u} que satisfaça a equação de estado, bem como as condições de contorno do problema em todos os pontos de Ω . Outra forma de apresentar este problema é escrevê-lo mediante formulações variacionais (forma fraca). Para isto, aplica-se o Método dos Resíduos Ponderados às Eqs. (2.1)-(2.3) e obtém-se o clássico problema variacional:

Encontrar $\mathbf{u} \in U$ tal que:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V,\tag{2.4}$$

onde $a(\cdot, \cdot): U \times V \rightarrow \mathfrak{R}$ é uma forma bilinear simétrica representando o trabalho realizado pelas forças internas e $l(\cdot): V \rightarrow \mathfrak{R}$ é um operador funcional linear associado aos carregamentos externos. Estas formas variacionais são definidas como:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})d\Omega, \quad (2.5)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}d\Omega + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}d\partial\Omega. \quad (2.6)$$

O espaço das funções e das variações admissíveis são definidos, respectivamente, como

$$U := \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) : \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \Gamma_D\} \text{ e}$$

$$V := \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega) : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D\},$$

sendo $\bar{\mathbf{u}}$ o vetor deslocamento prescrito sobre a fronteira Γ_D . Neste caso, $H^1(\Omega)$ denota o espaço de funções de Hilbert de primeira ordem, definido sobre o domínio Ω .

Com estas considerações, o problema de otimização estrutural de minimização de massa com restrições de critério de falha material e satisfação da equação de estado, pode ser escrito, em sua forma inicial, como:

Problema P_1 :

$$\text{Minimizar } m(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad (2.7)$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v}) = 0, & \forall \mathbf{v} \in V, \\ g(\mathbf{u}) \leq 0, & \forall \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases}$$

onde ρ é a densidade do material e $g(\mathbf{u})$ representa a função de falha.

2.2 Análise de sensibilidade à mudança de forma

Existe uma grande relação entre a área de otimização e a de análise de sensibilidade. Em todo problema de otimização busca-se passar de um estado inicial das variáveis para um novo estado denominado “ótimo”. Naturalmente, precisa-se conhecer em que “direção” produzir as modificações de forma a melhorar a condição atual, isto é, precisa-se conhecer a sensibilidade do problema às variáveis que o controlam. De forma geral, a análise

de sensibilidade consiste em obter as derivadas da função custo, restrições e equação de estado em relação a um número finito de parâmetros que controlam o comportamento do sistema, chamados de variáveis de projeto. Estas variáveis de projeto podem representar as propriedades constitutivas, características geométricas, o próprio sistema de ações externas, etc.

A análise de sensibilidade à mudança de forma (ou derivada de forma) consiste em tomar o próprio domínio Ω como variável de projeto. A grande maioria dos modelos associados a problemas mecânicos estão formulados através de expressões diferenciais válidas ponto a ponto num domínio espacial Ω ou, generalizando estes casos, por expressões integrais sobre Ω . Nestes últimos casos, perturbações no domínio produzem alterações tanto nos termos integrandos quanto no próprio domínio de integração. A análise de sensibilidade à mudança do domínio consiste na determinação da variação da resposta do problema devido a alterações na configuração espacial Ω (MURAT; SIMON, 1976; HAUG; CHOI; KOMKOV, 1986; SOKOLOWSKI; ZOLÉSIO, 1992).

Uma das técnicas mais utilizadas para formalizar uma perturbação domínio consiste em definir um mapeamento a partir da configuração de referência Ω :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \mathbf{x} + t\mathbf{v}(\mathbf{x}) \text{ ou} \\ \Omega_t &= (\mathbf{I} + t\mathbf{v})\Omega. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Neste mapeamento do domínio, transformação usual na mecânica do contínuo (GURTIN, 1981), Ω_t é a configuração mapeada, \mathbf{I} representa o tensor identidade, t é a amplitude da transformação e \mathbf{v} a direção de mudança, aqui denotado como “velocidade”.

É importante notar em (2.8) que o mapeamento proposto é aplicado a todos os pontos \mathbf{x} de Ω . Entretanto é possível demonstrar que as variações de forma são relacionadas apenas com a componente normal do campo de velocidade na fronteira $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, onde \mathbf{n} corresponde ao vetor unitário normal à fronteira (SAPIRO, 2001). Assim, pode-se argumentar que, se o mapeamento (2.8) conduz a mudanças de Ω para valores $v_n \neq 0$, a condição de otimalidade (Ω ótimo) estará associada a uma velocidade normal nula na fronteira (SOKOLOWSKI; ZOLÉSIO, 1992). Em geral, é necessário que

$$v_n(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_H, \quad (2.9)$$

ou seja, em todos os pontos da fronteira Γ_H da estrutura ótima.

Nos métodos de otimização de forma baseados na evolução de curvas, a fronteira é definida explicitamente por um conjunto de variáveis de projeto (parametrização) que controlam diretamente o movimento da curva. Nesta

representação, a mudança na forma do corpo pode ser produzida apenas se a conectividade das fronteiras não são alteradas, ou seja, apenas uma estrutura de topologia fixa pode ser otimizada. Mudanças na topologia de uma estrutura significa que a fronteira pode se dividir para formar múltiplas fronteiras ou vazios no interior do domínio, alterando a conectividade das fronteiras. Como uma alternativa para superar esta limitação, o método *level set* foi proposto para otimização topológica. Ao contrário de controlar explicitamente a fronteira, o método *level set* representa a fronteira do corpo de forma implícita através de uma função ϕ , como é visto na próxima seção.

2.3 O método *level set*

O método *level set* utilizado para representar o movimento de fronteiras foi introduzido por Osher e Sethian (OSHER; SETHIAN, 1988). O método parte da idéia básica de relacionar a fronteira $\partial\Omega$ de Ω com a curva de nível de uma função portadora de dimensão mais elevada ϕ (frequentemente mencionada também como função *level set*), definida sobre um domínio de referência D que contém Ω (Fig. 2.2). Variações em ϕ produzem variações nas suas curvas de nível e, portanto, na fronteira $\partial\Omega$ (SETHIAN, 1999).

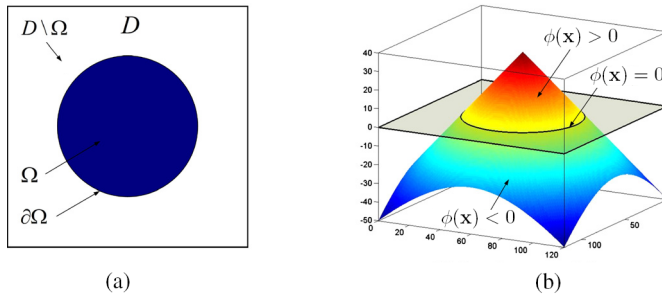


Figura 2.2: Descrição *level set* de um domínio 2D. (a) Representação do domínio. (b) Modelo *level set*. (LUO et al., 2008)

A Fig. (2.2a) mostra esquematicamente o domínio fixo D , que admite conter todas as formas admissíveis de Ω , ou seja, $\Omega \subseteq D$ com $\partial\Omega$ representando a fronteira de Ω . A função $\phi(\mathbf{x})$ é mostrada na Fig. (2.2b). Nesta figura, verifica-se que o sinal da função $\phi(\mathbf{x})$ pode ser usado para definir o interior,

exterior e fronteira de Ω :

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}) > 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega & \text{(região com material),} \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega & \text{(fronteira),} \\ \phi(\mathbf{x}) < 0 & \forall \mathbf{x} \in D \setminus \Omega & \text{(região sem material).} \end{cases} \quad (2.10)$$

Arbitra-se que a fronteira $\partial\Omega$ do domínio Ω seja representada pela curva de nível zero da função $\phi(\mathbf{x})$, isto é,

$$\partial\Omega = \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}) = 0\}, \quad (2.11)$$

com $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^d$ e $\phi(\mathbf{x}) : \mathfrak{R}^d \rightarrow \mathfrak{R}$, ($d = 2$ ou 3). Admita-se agora que a função ϕ varia no tempo, isto é,

$$\phi = \phi(\mathbf{x}, t). \quad (2.12)$$

Assim, o movimento da fronteira no tempo pode ser definido como

$$\partial\Omega(t) = \{\mathbf{x}(t) \mid \phi(\mathbf{x}(t), t) = 0\}. \quad (2.13)$$

Note que pela própria definição (2.13), se avaliamos ϕ nos pontos da fronteira $\partial\Omega(t)$, temos que

$$\phi(\mathbf{x}(t), t) = 0 \quad \forall t, \mathbf{x} \in \partial\Omega(t), \quad (2.14)$$

o que evidencia que (2.14) é a descrição espacial da função ϕ , cujos argumentos são o tempo t e a coordenada espacial $\mathbf{x}(t)$ ¹.

Tomando-se a derivada material da Eq. (2.14) em relação a t , encontra-se

$$\frac{d\phi(\mathbf{x}(t), t)}{dt} = \frac{\partial\phi(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} + \nabla\phi(\mathbf{x}(t), t) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.15)$$

onde

$$\nabla\phi(\mathbf{x}(t), t) = \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (2.16)$$

denotam o gradiente da função ϕ e a velocidade de cada ponto da fronteira $\mathbf{x}(t)$ no tempo t , respectivamente. Esta última é frequentemente referida como função velocidade da equação de evolução. Esta equação diferencial parcial obtida é uma equação do tipo Hamilton-Jacobi e define um problema de valor inicial para a função ϕ dependente do tempo. No segundo termo da Eq. (2.15) é possível observar que o produto interno contabiliza apenas a componente de

¹É interessante observar a diferença entre a descrição material de ϕ em (2.12) e a descrição espacial em (2.14), embora seja aqui utilizada, por simplicidade, a mesma notação para os argumentos material \mathbf{x} e espacial $\mathbf{x}(t)$.

v segundo a normal \mathbf{n} definida por

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \quad (2.17)$$

com

$$\|\nabla\phi\| = (\nabla\phi \cdot \nabla\phi)^{1/2}. \quad (2.18)$$

Assim, a Eq. (2.15) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{x}(t),t)}{\partial t} - v_n\|\nabla\phi(\mathbf{x}(t),t)\| = 0, \quad (2.19)$$

onde $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. Esta expressão obtida é a equação *level set* (SETHIAN, 1999; OSHER; FEDKIW, 2002). Também é conhecida como a formulação Euleriana da evolução de fronteiras, desde que a fronteira seja representada pela curva de nível da função implícita $\phi(\mathbf{x}(t),t) = 0$.

2.3.1 Características do método level set

A partir da equação *level set* (Eq. 2.19), pode-se enumerar algumas características e vantagens da técnica para representar a geometria de um corpo:

- Os métodos de *level sets* são topologicamente flexíveis. A função escalar ϕ é definida inicialmente com uma topologia simples para a representação do domínio, não dependendo de qualquer tipo de parametrização explícita. Isto permite que o movimento de fronteiras para alterar a topologia estrutural, quando submetidos a otimização, podem formar orifícios vazios ou fundir-se com outras fronteiras para formar uma única, ao contrário de outras formas convencionais de movimentação de fronteiras (SETHIAN, 1999).
- Dado que a forma geométrica é representada pela curva de nível zero da função ϕ , o movimento do *level set* pela Eq. (2.19) acontece apenas na direção normal da curva de nível $\phi(\mathbf{x}(t),t) = 0$ com a velocidade normal $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. Como já foi dito, a componente tangencial do vetor velocidade $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ não afeta a deformação da geometria (SAPIRO, 2001). Assim, definida uma velocidade na fronteira, a evolução de ϕ pelo método *level set* é equivalente a movimentar a fronteira $\partial\Omega$ na direção normal \mathbf{n} .
- A teoria clássica de otimização de forma utiliza uma função velocidade normal a $\partial\Omega$ para calcular a análise de sensibilidade à mudança

de forma (HAUG; CHOI; KOMKOV, 1986; SOKOLOWSKI; ZOLÉSIO, 1992). Neste contexto, seqüências minimizantes podem ser construídas a partir da adequada definição da velocidade normal v_n .

- Diferentes técnicas numéricas têm sido desenvolvidas para tornar o problema de valor inicial da equação *level set* (Eq. 2.19) computacionalmente robusto e eficiente (OSHER; FEDKIW, 2002; SETHIAN, 1999), sendo o esquema *upwind* de diferenças finitas o mais utilizado (ver Apêndice B).

2.4 O problema de otimização baseado no método level set

Como já foi exposto, com o método *level set* a geometria de um corpo pode ser descrita implicitamente em termos da função escalar ϕ . O material é caracterizado para regiões do domínio onde $\phi(\mathbf{x}) > 0$, a fronteira é definida para $\phi(\mathbf{x}) = 0$ e a ausência de material para regiões onde $\phi(\mathbf{x}) < 0$. Baseado nisto, para incorporar o método *level set* ao problema de otimização topológica a fim de representá-lo em termos de ϕ , é conveniente utilizar a função Heaviside $H(\phi)$ definida como

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \phi < 0, \\ 1 & \text{se } \phi \geq 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

onde ϕ depende de \mathbf{x} , embora não seja necessário explicitar sua dependência. É importante ressaltar que $H(\phi)$ é uma função unidimensional, pois depende apenas do valor de ϕ no ponto \mathbf{x} . Entretanto, observa-se que esta função é descontínua. Considerando-se o fato de que o domínio Ω está incluso no domínio de referência D fixo, a integral de um operador $p(\mathbf{x}, t) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ sobre o domínio Ω , pode ser definida para o domínio D associando-se a função Heaviside através da relação:

$$\int_{\Omega} p(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_D p(\mathbf{x}, t) H(\phi) dD. \quad (2.21)$$

As Eqs. (2.20) e (2.21) mostram que, para o problema topológico associado ao método *level set*, nas regiões do domínio onde existe material ($\phi > 0$), a função Heaviside tem valor unitário, não modificando o resultado do cálculo da integral e, nas regiões sem material ($\phi < 0$), a integral fornece valor nulo.

Por definição, para o caso unidimensional, a derivada da função Hea-

viside $H(\phi)$ é a função delta de Dirac $\delta(\phi)$, isto é,

$$\delta(\phi) = \frac{\partial H(\phi)}{\partial \phi} = H'(\phi) = \begin{cases} \infty & \text{se } \phi = 0, \\ 0 & \text{se } \phi \neq 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Observe-se que a função $\delta(\phi)$ é diferente de zero somente sobre a fronteira $\partial\Omega$ (onde $\phi = 0$), no qual seu valor tende ao infinito devido à descontinuidade da função Heaviside.

No processo de solução numérica do problema, entretanto, torna-se necessário avaliar estas funções. Para isto, molifica-se a função $H(\phi)$ mediante uma função com pelo menos derivada primeira, de maneira a permitir o cálculo de $\delta(\phi)$. Portanto, para a função Heaviside utiliza-se (WANG; WANG; GUO, 2003):

$$H(\phi) = \begin{cases} H_{\min} & \text{se } \phi < -\xi, \\ \frac{3(1-H_{\min})}{4} \left(\frac{\phi}{\xi} - \frac{\phi^3}{3\xi^3} \right) + \frac{1+H_{\min}}{2} & \text{se } -\xi \leq \phi \leq \xi, \\ 1 & \text{se } \phi > \xi, \end{cases} \quad (2.23)$$

onde ξ corresponde ao parâmetro que define o comprimento da zona de transição e H_{\min} é um valor mínimo positivo. Com isto, o delta de Dirac é dado por

$$\delta(\phi) = H'(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \phi < -\xi, \\ \frac{3(1-H_{\min})}{4\xi} \left(1 - \frac{\phi^2}{\xi^2} \right) & \text{se } -\xi \leq \phi \leq \xi, \\ 0 & \text{se } \phi > \xi, \end{cases} \quad (2.24)$$

A Fig. (2.3) mostra as aproximações suavizadas destas funções. Utilizando-se as definições acima, o problema P_1 (Eq. 2.7) definido sobre um domínio variável Ω , pode ser reescrito em termos da função ϕ como:

Problema P_2 :

$$\text{Minimizar}_{\phi} m_{\phi}(\mathbf{u}) = \int_D \rho H(\phi) dD \quad (2.25)$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} a_{\phi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l_{\phi}(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in V, \\ H(\phi)g(\mathbf{u}) \leq 0, & \forall \mathbf{x} \in D, \end{cases}$$

onde a energia bilinear $a_{\phi}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e a forma linear do carregamento $l_{\phi}(\mathbf{v})$ são

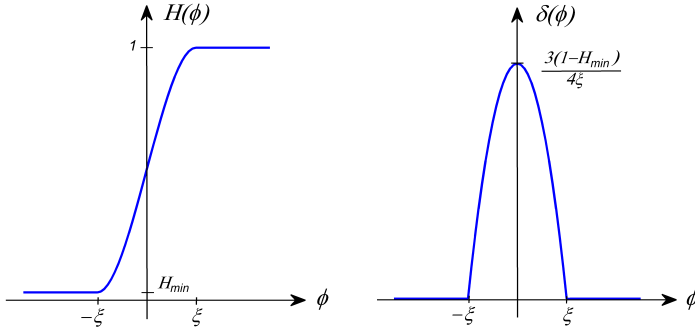


Figura 2.3: Aproximação suave das funções Heaviside e delta de Dirac

dadas por

$$a_\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_D \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})H(\phi)dD, \quad (2.26)$$

$$l_\phi(\mathbf{v}) = \int_D \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}H(\phi)dD + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}d\partial\Omega. \quad (2.27)$$

Particularização: Admite-se que a fronteira Γ_N onde é aplicada a tração $\boldsymbol{\tau}$ seja mantida fixa durante todo o processo de otimização, isto é,

$$\phi(\Gamma_N, t) \equiv 0 \quad \forall t. \quad (2.28)$$

Note-se que o problema P_2 está agora formulado sobre o domínio fixo D . O sub-índice ϕ é utilizado para denotar a dependência explícita dos funcionais em relação a ϕ , isto é,

$$(\cdot)_\phi := (\cdot)(\phi). \quad (2.29)$$

2.5 Singularidade de tensão e relaxação do problema

É possível verificar em (2.25) que as operações de integração em D envolvem a função $H(\phi)$. Em particular, na equação de estado, ela atua como ponderador do tensor de elasticidade, permitindo escrever

$$a_\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_D \mathbf{C}_\phi \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})dD, \quad (2.30)$$

onde

$$\mathbf{C}_\phi = H(\phi)\mathbf{C}. \quad (2.31)$$

Quando se utiliza a definição (2.23) para $H(\phi)$, a expressão (2.31) define um material com propriedades “intermediárias” entre sólido e vazio, de forma totalmente análoga às aproximações via material intermediário (BENDSØE, 1989). Neste caso, as tensões homogeneizadas são relacionadas com as deformações homogeneizadas através de

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_\phi \boldsymbol{\varepsilon} = H(\phi)\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.32)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ são os valores homogeneizados médios obtidos na escala macroscópica. Como discutido em Duysinx e Bendsøe (1998), o campo de deformações homogeneizadas, quando a densidade na região tende a zero, permanece finito e via de regra não-nulo. Por outro lado, as tensões homogeneizadas tendem a zero, como pode ser observado pela Eq. (2.32). Entretanto, as tensões da microestrutura não necessariamente se anulam quando a densidade tende a zero e é incorreto utilizar esta equação para avaliar a tensão nos critérios de falha, característico de problemas de otimização estrutural envolvendo restrições sobre as tensões.

A conclusão desta abordagem obtida em Duysinx e Bendsøe (1998) é de que as tensões locais $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ para um material intermediário arbitrário estão relacionadas com as deformações homogeneizadas através do tensor de elasticidade \mathbf{C} (material sólido):

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.33)$$

Esta equação permite afirmar que, se as deformações homogeneizadas são finitas, as tensões locais (usadas no critério de falha) também serão finitas. Porém, esta relação tem consequências importantes para o problema de otimização, como a saturação das restrições locais de tensão e o travamento do processo de remoção de material nesta região. Isto é conhecido como fenômeno de *singularidade de tensões*, inicialmente detectado por Sved e Ginos (1968) em problemas de otimização de treliças. Posteriormente, Cheng e Jiang (1992) e Cheng e Guo (1997) detectaram os mesmos acontecimentos para problemas contínuos.

Assim, uma estratégia adotada por vários autores é realizar uma relaxação das restrições sobre as tensões, que permita que os valores de tensões locais sejam mais elevados em regiões de densidade intermediária e, ao mesmo tempo, satisfaça a restrição original para o material sólido. Neste trabalho, utiliza-se a técnica da ε -relaxação das restrições sobre as tensões

(CHENG; GUO, 1997). De acordo com Pereira, Fancello e Barcellos (2004), a função de falha é redefinida como

$$\begin{cases} g_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) \equiv H(\phi)g(\mathbf{u}) - \varepsilon(1 - H(\phi)) \leq 0, & \forall D \\ 0 < \varepsilon^2 \leq H_{\min} \leq H(\phi) \leq 1, \end{cases} \quad (2.34)$$

onde ε é o parâmetro de relaxação. É importante ressaltar que utiliza-se a tensão local $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ (Eq. 2.33) para avaliar o critério de falha local $g(\mathbf{u})$ adotado.

Após definir as condições de relaxamento quanto à microestrutura e às restrições sobre as tensões, o problema P_2 pode ser reescrito como:

Problema P_3 :

$$\begin{aligned} & \underset{\phi}{\text{Minimizar}} \quad m_\phi(\mathbf{u}) = \int_D \rho H(\phi) dD \\ & \text{sujeito a:} \quad \begin{cases} a_\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l_\phi(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in V, \\ g_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) \leq 0, & \forall \mathbf{x} \in D. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.6 Solução do problema pelo Método Lagrangiano Aumentado

O Método Lagrangiano Aumentado (MLA) tem-se mostrado uma eficiente técnica para resolver diferentes problemas de minimização com restrições (MARTÍNEZ; SANTOS, 1995; MARTÍNEZ, 2006). Neste trabalho, o MLA é utilizado para transformar o problema com restrições em um problema irrestrito, mas com soluções próximas ou iguais do problema original, através da escolha adequada dos fatores de penalização e de esquemas para atualização dos multiplicadores de Lagrange.

Assim, no problema P_3 dado pela Eq. (2.35), agrega-se uma função de folga $s \geq 0$ (*slack variable function*) sobre a função restrição de desigualdade referente ao critério de falha material. O objetivo é transformar esta restrição em uma restrição de igualdade. Assim, o problema pode ser reescrito como:

Problema P_4 :

$$\begin{aligned} & \underset{s, \phi}{\text{Minimizar}} \quad m_\phi(\mathbf{u}) = \int_D \rho H(\phi) dD \\ & \text{sujeito a:} \quad \begin{cases} a_\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l_\phi(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V, \\ h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi, s) = g_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) + s^2 = 0 & \forall \mathbf{x} \in D. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.36)$$

É importante ressaltar que o minimizador do problema P_4 também é minimizador do problema P_3 .

A restrição de falha material pode ser incorporada ao funcional $m_\phi(\mathbf{u})$ mediante seu produto com uma função de multiplicadores de Lagrange α , definindo um novo funcional $J(\phi)$, conhecido como funcional Lagrangiano. Desta forma, pode-se reescrever o problema como:

Problema P_5 :

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_{s,\phi} J(\phi) &= \int_D \rho H(\phi) dD + \int_D \alpha h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi, s) dD \\ \text{sujeito a: } \begin{cases} a_\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l_\phi(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V, \\ h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi, s) = g_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) + s^2 = 0 & \forall \mathbf{x} \in D. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Novamente, dado que no mínimo a restrição $h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi, s)$ é satisfeita e os problemas P_3 , P_4 e P_5 são equivalentes.

O problema P_5 pode ser resolvido em forma aproximada através de penalização. Assim, considerando um fator de penalização $c > 0$, o problema pode ser formulado como:

Problema P_6 :

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_{s,\phi} J(\phi) &= \int_D \rho H(\phi) dD + \int_D \alpha h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi, s) dD + \int_D \frac{c}{2} h_\varepsilon^2(\mathbf{u}, \phi, s) dD \\ \text{sujeito a: } a_\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= l_\phi(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (2.38)$$

A minimização em relação à variável s pode ser efetuada em forma explícita. A função s (ou por conveniência $s^2 \geq 0$) que minimiza o funcional, é dada por (BERTSEKAS, 1996):

$$s^2 = \max \left\{ 0; - \left(\frac{\alpha}{c} + g_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) \right) \right\}, \quad (2.39)$$

o que, a partir da Eq. (2.37), permite concluir que

$$h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) \equiv g_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) + \max \left\{ 0; - \left(\frac{\alpha}{c} + g_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) \right) \right\} \equiv \max \left\{ g_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi); - \frac{\alpha}{c} \right\}, \quad (2.40)$$

eliminando a variável s (ou $s^2 \geq 0$) do problema.

Finalmente, o problema de otimização é obtido como:

Problema P₇:

$$\text{Minimizar } J(\phi) = \int_D \rho H(\phi) dD + \int_D \alpha h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) dD + \int_D \frac{c}{2} h_\varepsilon^2(\mathbf{u}, \phi) dD$$

onde \mathbf{u} é solução de:

$$\int_D \mathbf{C}_\phi \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dD = \int_D \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} H(\phi) dD + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} d\partial\Omega \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

$$\text{e } h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) = \max \left\{ g_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi); -\frac{\alpha}{c} \right\}.$$

(2.41)

Observe-se que agora, a função custo $J(\phi)$ está dada por três termos: o primeiro corresponde à função objetivo original, enquanto os dois últimos termos estão associados à penalização, que por sua definição comporta uma parcela linear da restrição $h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)$ multiplicada pela função α e uma parcela quadrática da restrição $h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)$ vinculada ao fator de penalização c .

A forma de $J(\phi)$ obtida no problema P_7 é conhecida como funcional Lagrangiano Aumentado. Um procedimento bastante comum para solução deste problema é a construção de uma sequência de subproblemas de otimização onde os parâmetros de penalização c e multiplicadores de Lagrange α permanecem constantes no processo iterativo de cada subproblema. Ou seja, dados α^k e c^k fixos, o k -ésimo subproblema consiste na minimização do funcional $J(\phi)$. O campo dos multiplicadores de Lagrange (α^k) e o fator de penalização (c^k) são adequadamente atualizados em cada k -ésimo subproblema do processo, como será visto a seguir.

2.6.1 Atualização dos multiplicadores de Lagrange e fator de penalização

A atualização dos parâmetros α^k e c^k , entre subproblemas subsequentes, é realizado seguindo o procedimento clássico centrado na comparação das derivadas em relação a função ϕ (variável do problema) do funcional Lagrangiano do problema P_5 avaliado no ponto de estacionariedade (ϕ^*, α^*) e do funcional Lagrangiano Aumentado (problema P_7) avaliado no ponto de estacionariedade $(\hat{\phi}, \hat{\alpha})$ (BERTSEKAS, 1996; MARTÍNEZ; SANTOS, 1995). Assim, tomando a condição de estacionariedade (Karush-Kuhn-Tucker– KKT) destes funcionais equivalentes (desconsiderando a restrição de equilíbrio) em

relação à variável de controle ϕ ,

$$P_5: \frac{\partial J(\phi^*, \alpha^*)}{\partial \phi} [\delta \phi] = \int_D \rho \delta(\phi^*) \delta \phi dD + \int_D \alpha^* \dot{h}_\varepsilon(\phi^*) [\delta \phi] dD = 0, \quad (2.42)$$

$$P_7: \frac{\partial J(\hat{\phi}, \hat{\alpha})}{\partial \phi} [\delta \phi] = \int_D \rho \delta(\hat{\phi}) \delta \phi dD + \int_D [\hat{\alpha} + ch_\varepsilon(\hat{\phi})] \dot{h}_\varepsilon(\hat{\phi}) [\delta \phi] dD = 0. \quad (2.43)$$

Comparando as equações acima, espera-se que no limite para um ponto estacionário (mínimo local):

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} + ch_\varepsilon &\rightarrow \alpha^*, \\ \hat{\phi} &\rightarrow \phi^*. \end{aligned}$$

Esta comparação fornece o clássico esquema de atualização dos multiplicadores de Lagrange, dado por:

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + c^k h_\varepsilon^k, \quad (2.44)$$

onde k é o número da iteração. Fazendo uso da Eq. (2.40), pode-se também escrever que

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + c^k \max \left\{ g_\varepsilon^k; -\frac{\alpha^k}{c^k} \right\} = \max \left\{ \alpha^k + c^k g_\varepsilon^k; 0 \right\}. \quad (2.45)$$

O fator de penalização c possui uma grande influência sobre a convergência do algoritmo, principalmente sobre as taxas de variação dos multiplicadores de Lagrange (Eq. 2.44). Neste caso, uma proposta para esquema de atualização deste parâmetro é:

$$c^{k+1} = \beta c^k, \quad \beta > 1, \quad (c^k > 0, \quad \forall k \in N) \quad (2.46)$$

onde o escalar β e o fator de penalização inicial c^0 são dependentes do tipo de problema específico. É conhecido na literatura que valores muito elevados do fator de penalização prejudicam o processo de convergência (BERTSEKAS, 1996; MARTÍNEZ, 2006). Assim, para que c não cresça indefinidamente,

propõe-se que se

$$\left\| h_\varepsilon(\mathbf{u}^k) \right\| \leq \gamma \left\| h_\varepsilon(\mathbf{u}^{k-1}) \right\|, \quad \gamma \in [0, 1), \quad (2.47)$$

então $c^{k+1} = c^k$. A satisfação de (2.47) limita o fator de penalização para todo k suficientemente grande (MARTÍNEZ, 2006).

2.7 Cálculo da sensibilidade do problema e campo de velocidade

Nesta seção será definida uma relação entre a análise de sensibilidade do problema à variável ϕ e o campo de velocidades da equação *level set*. Como o problema está definido sobre o domínio fixo D , não será necessário utilizar transformação de domínio, procedimento usual na análise de sensibilidade à mudança de forma.

2.7.1 Análise de sensibilidade

No trabalho de Allaire, Jouve e Toader (2004), foi apresentado o problema de otimização topológica de minimização da energia interna com restrição sobre o volume usando o método *level set*, formulado com integrais avaliadas sobre o domínio variável Ω , sendo necessário utilizar transformação de domínio para o cálculo da sensibilidade. Para o problema proposto neste trabalho, as integrais estão definidas sobre D , ou seja, um domínio fixo que não varia durante o processo de otimização mas contém todas as formas admissíveis de Ω (WANG; WANG; GUO, 2003; XIA et al., 2006; LUO et al., 2008). Portanto, existe apenas variação dos integrandos que contém a função ϕ , mantendo o domínio de integração D fixo.

O cálculo da sensibilidade do funcional $J(\phi)$ em relação a uma perturbação de ϕ deve ser feito de maneira a atender a restrição da equação de estado. Existem na literatura diversas abordagens para a obtenção desta sensibilidade, entre as quais citam-se os métodos Direto, Adjunto e Lagrangiano (HAUG; CHOI; KOMKOV, 1986; FANCELLO, 1993). Neste trabalho, as deduções das expressões serão feitas a partir da definição do Lagrangiano do problema, que pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = & \int_D \rho H(\phi) dD + \int_D \alpha h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) dD + \int_D \frac{c}{2} h_\varepsilon^2(\mathbf{u}, \phi) dD \\ & + a_\phi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) - l_\phi(\boldsymbol{\lambda}) \quad \forall \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda} \in V, \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde a função λ corresponde ao multiplicador de Lagrange da restrição de equilíbrio e V é o espaço das variações admissíveis.

Admitindo regularidade suficiente para diferenciabilidade dos termos, a variação total de \mathcal{L} para variações em relação a ϕ , \mathbf{u} e λ , aplicando a regra da cadeia, escreve-se formalmente como:

$$\delta\mathcal{L}(\phi, \mathbf{u}, \lambda) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}[\delta\phi] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{u}}[\delta\mathbf{u}] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}[\delta\lambda], \quad (2.49)$$

onde $\delta\phi$, $\delta\mathbf{u} \in V$ e $\delta\lambda \in V$, representam as direções de modificação das variáveis correspondentes².

Se o Lagrangiano \mathcal{L} for avaliado num ponto $(\phi, \mathbf{u}, \lambda)$ tal que é estacionário em relação a \mathbf{u} e λ , tem-se então que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{u}}[\delta\mathbf{u}] = 0, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}[\delta\lambda] = 0. \quad (2.51)$$

Explicitando a condição (2.50), obtém-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{u}}[\delta\mathbf{u}] &= \int_D \alpha \frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial\mathbf{u}}[\delta\mathbf{u}] dD + \int_D ch_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) \frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial\mathbf{u}}[\delta\mathbf{u}] dD \\ &+ \int_D \mathbf{C}_\phi \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda) dD = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \in V. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Um grande conjunto de funções de falha de um material isotrópico podem ser escritas em função do primeiro invariante do tensor de tensões de Cauchy I_1 e do segundo e terceiro invariantes do tensor de tensões desviadoras J_2 e J_3 , respectivamente, ou seja, $h = f(I_1, J_2, J_3)$ (HILL, 1950). Assim, pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial\mathbf{u}}[\delta\mathbf{u}] &= \frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial\mathbf{u}}[\delta\mathbf{u}] + \frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial\mathbf{u}}[\delta\mathbf{u}] \\ &+ \frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial\mathbf{u}}[\delta\mathbf{u}]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Conforme é apresentado no Apêndice C, as derivadas dos invariantes de tensões em relação ao campo de deslocamentos \mathbf{u} na direção $\delta\mathbf{u}$ são dadas

²É importante perceber a diferença na notação: $\delta\phi$ corresponde à direção de modificação da função ϕ e $\delta(\phi)$ é a função delta de Dirac.

por:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{u}} [\delta \mathbf{u}] = \mathbf{C} \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}), \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{u}} [\delta \mathbf{u}] = \mathbf{C} \mathbf{P}^T \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}), \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \mathbf{u}} [\delta \mathbf{u}] = \mathbf{C} \mathbf{P}^T \mathbf{S}(\mathbf{u}) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}), \quad (2.56)$$

onde

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{P} = \mathbf{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \quad (2.57)$$

Aqui, \mathbf{S} representa o tensor de tensões desviadoras e \mathbf{I} e $\mathbf{\Pi}$ representam o tensor identidade de segunda e quarta ordem, respectivamente. Substituindo-se as Eqs.(2.54) a (2.56) na Eq. (2.53) tem-se

$$\frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial \mathbf{u}} [\delta \mathbf{u}] = \mathbf{C} \mathbf{A}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}), \quad (2.58)$$

onde

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \phi) = \frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial I_1} \mathbf{I} + \frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial J_2} \mathbf{P}^T \mathbf{S}(\mathbf{u}) + \frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial J_3} \mathbf{P}^T \mathbf{S}(\mathbf{u}) \mathbf{S}(\mathbf{u}). \quad (2.59)$$

Finalmente, substituindo a Eq.(2.58) na Eq.(2.52) e utilizando o conceito de derivada Fréchet, obtém-se a expressão variacional que permite o cálculo da solução adjunta $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\int_D \mathbf{C}_\phi \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) dD = - \int_D [\alpha + ch_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)] \mathbf{C} \mathbf{A}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) dD \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V. \quad (2.60)$$

De forma similar, explicitando a condição (2.51),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} [\delta \boldsymbol{\lambda}] &= \int_D \mathbf{C}_\phi \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} [\delta \boldsymbol{\lambda}] dD - \int_D \mathbf{b} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} [\delta \boldsymbol{\lambda}] H(\phi) dD \\ &\quad - \int_{\Gamma_N} \frac{\partial (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} [\delta \boldsymbol{\lambda}] d\partial \Omega = 0 \quad \forall \delta \boldsymbol{\lambda} \in V, \end{aligned} \quad (2.61)$$

que após operações convencionais de derivação, obtém-se

$$\int_D \mathbf{C}_\phi \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \boldsymbol{\lambda}) dD = \int_D \mathbf{b} \cdot \delta \boldsymbol{\lambda} H(\phi) dD + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\lambda} d\partial\Omega \quad \forall \delta \boldsymbol{\lambda} \in V, \quad (2.62)$$

que é exatamente a equação de estado.

Assim, admitindo satisfação das Eqs.(2.50) e (2.51) e considerando que $\mathcal{L}(\phi, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = J(\phi)$, conclui-se que

$$\delta \mathcal{L}(\phi, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} [\delta \phi] = \frac{dJ}{d\phi} [\delta \phi]. \quad (2.63)$$

A Eq. (2.63) leva à importante conclusão de que, para \mathbf{u} solução da equação de estado e $\boldsymbol{\lambda}$ solução da equação adjunta, basta calcular a derivada parcial do Lagrangiano em relação a ϕ para obter a sensibilidade da função custo $J(\phi)$ a uma variação de ϕ na direção $\delta \phi$.

A sensibilidade da função objetivo $J(\phi)$ é calculada como

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\phi} [\delta \phi] &= \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \phi} [\delta \phi] \\ &= \int_D \rho \frac{\partial H(\phi)}{\partial \phi} [\delta \phi] dD + \int_D \alpha \frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial \phi} [\delta \phi] dD \\ &\quad + \int_D ch_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) \frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial \phi} [\delta \phi] dD + \int_D \frac{\partial \mathbf{C}_\phi}{\partial \phi} [\delta \phi] \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) dD \\ &\quad - \int_D \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\lambda} \frac{\partial H(\phi)}{\partial \phi} [\delta \phi] dD. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Como $h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) = \max \{ g_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi); -\frac{\alpha}{c} \}$, onde $g_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)$ é dado pela Eq. (2.34), para calcular a derivada $\frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial \phi} [\delta \phi]$ existem dois casos:

Caso 1. Se

$$g_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) \geq -\frac{\alpha}{c},$$

então

$$\frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial \phi} [\delta \phi] = \frac{\partial g_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial \phi} [\delta \phi] = (g(\mathbf{u}) + \varepsilon) \delta(\phi) \delta \phi. \quad (2.65)$$

Caso 2. Se

$$g_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) < -\frac{\alpha}{c},$$

então

$$\frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial \phi} [\delta \phi] = 0. \quad (2.66)$$

Calculando as derivadas e substituindo os resultados de (2.65) e (2.66) em (2.64), a sensibilidade da função objetivo num ponto $(\phi, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ estacionário em relação a \mathbf{u} e $\boldsymbol{\lambda}$, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{dJ}{d\phi} [\delta \phi] = \int_D G(\phi) \delta(\phi) \delta \phi dD, \quad (2.67)$$

onde:

$$G(\phi) = \begin{cases} \rho + [\alpha + ch_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)] (g(\mathbf{u}) + \varepsilon) \\ \quad + \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\lambda}, & \text{se } g_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) \geq -\frac{\alpha}{c} \\ \rho + \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\lambda}, & \text{se } g_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) < -\frac{\alpha}{c} \end{cases} \quad (2.68)$$

é conhecido como a *densidade do gradiente de forma* (HAUG; CHOI; KOMKOV, 1986), e \mathbf{u} e $\boldsymbol{\lambda}$ são as soluções das Eq. (2.62) e (2.60), respectivamente.

2.7.2 Campo de velocidade via análise de sensibilidade

No método *level set*, a função ϕ define o domínio Ω do problema. Dada uma perturbação de ϕ na direção $\delta \phi$, obtém-se o mapeamento

$$\phi_t = \phi + t \delta \phi, \quad (2.69)$$

onde ϕ_t define a configuração perturbada Ω_t do domínio e $t \in \mathfrak{R}^+$ representa a amplitude do passo na direção de $\delta \phi$. A função custo pode ser calculada através da expansão em série de Taylor:

$$J(\phi + t \delta \phi) = J(\phi) + t \frac{dJ}{d\phi} [\delta \phi] + \vartheta(t^2), \quad (2.70)$$

onde a derivada $\frac{dJ}{d\phi} [\delta \phi]$ é dada pela expressão (2.67). É o sinal deste termo quem define o acréscimo ou decréscimo de J para um t suficientemente pequeno. Assim, uma forma de garantir o decréscimo da função J é tomar a direção:

$$\delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} = v_n \|\nabla \phi\| \quad (2.71)$$

com

$$v_n = -G(\phi). \quad (2.72)$$

Substituindo as expressões acima em (2.70), obtém-se:

$$J(\phi + t\delta\phi) = J(\phi) - t \int_D G^2(\phi)\delta(\phi)\|\nabla\phi\|dD + \vartheta(t^2), \quad (2.73)$$

o que mostra que $v_n = -G(\phi)$ é efetivamente uma direção de descida de J garantindo um decréscimo da função objetivo num processo iterativo de otimização. Definido v_n mediante (2.72), a solução da equação *level set* ao longo de um intervalo do “pseudo-tempo” $t = [0, T]$ equivale a movimentar a fronteira $\partial\Omega$ ao longo da direção $v_n\mathbf{n}$. A determinação do tamanho do intervalo T equivale à determinação do passo que minimiza a função objetivo na direção escolhida $v_n\mathbf{n}$.

2.8 Regularização do perímetro

Durante o processo de otimização topológica com o método *level set*, é possível que as fronteiras não sejam capazes de manter um certo nível de suavidade devido a erros numéricos provenientes das soluções discretas. É desejável que as irregularidades sejam removidas para garantir melhores resultados, respeitando, porém, aquelas irregularidades próprias da topologia desejada. Esta abordagem é semelhante ao problema de eliminação de “ruído” no processamento de imagens (SAPIRO, 2001; SETHIAN, 1999).

Para melhorar a regularidade e confiabilidade do modelo *level set*, modifica-se a função objetivo da seguinte forma:

$$\bar{J}(\phi) = J(\phi) + E_S(\phi), \quad (2.74)$$

onde $E_S(\phi)$ é o termo de regularização do perímetro dado por

$$E_S(\phi) = \int_D \mu\delta(\phi)\|\nabla\phi\|dD \quad (2.75)$$

e $\mu > 0$ corresponde a um parâmetro de valor mínimo (WANG, 2004).

Novamente, derivando a nova função objetivo $\bar{J}(\phi)$ em relação a ϕ na direção $\delta\phi$, obtém-se

$$\frac{d\bar{J}}{d\phi}[\delta\phi] = \frac{dJ}{d\phi}[\delta\phi] + \frac{\partial E_S}{\partial\phi}[\delta\phi]. \quad (2.76)$$

A partir da Eq. (F.11) do Apêndice F, define-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_S}{\partial \phi}[\delta\phi] &= -\nabla \cdot \left(\mu \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \right) \\ &= -\mu \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \right). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Substituindo (2.67) e (2.77) em (2.76), conclui-se que

$$\frac{d\bar{J}}{d\phi}[\delta\phi] = \int_D \bar{G}(\phi) \delta(\phi) \delta\phi dD \quad (2.78)$$

onde

$$\bar{G}(\phi) = G(\phi) - \mu \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \right) \quad (2.79)$$

é a *densidade do gradiente de forma* regularizada. O termo $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \right)$ corresponde à curvatura média κ da função *level set* e o seu coeficiente μ é definido como sendo constante no processo de otimização. A razão para se usar esta forma variacional é que uma superfície movendo-se em sua direção normal com velocidade igual a curvatura, conhecida como fluxo da curvatura média, converge a superfícies suaves. O fluxo da curvatura é também interpretado na literatura como uma difusão anisotrópica (SAPIRO, 2001) e se difunde apenas na direção tangente à superfície. Portanto, o termo de regularização (2.77) tem como objetivo garantir condições e qualidades necessárias para o *level set* suavizar as soluções sem possuir efeitos significativos sobre o seu movimento normal.

3 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

São apresentados neste capítulo alguns aspectos importantes para utilização do método *level set* no problema de otimização topológica proposto neste trabalho, principalmente aspectos computacionais com vistas à implementação numérica. A construção e a forma da função *level set*, assim como os procedimentos para sua evolução através da solução da equação de Hamilton-Jacobi, são alguns dos aspectos discutidos neste capítulo. O Método dos Elementos Finitos é utilizado para a discretização do problema mecânico. Por último, apresenta-se o algoritmo de otimização com os principais passos do processo de busca da topologia ótima.

3.1 Aspectos computacionais do método *level set*

Nesta seção, serão descritos os principais aspectos computacionais para a implementação numérica do método *level set*. Como visto anteriormente, neste método as curvas que representam a fronteira são definidas pelas curvas de nível zero $\phi(\mathbf{x}(t), t) = 0$. Este fato tem sido explorado para desenvolver algoritmos bastante eficientes que reduzem a complexidade computacional, ou seja, apenas as curvas de nível zero são realmente importantes para representar precisamente a fronteira estrutural (OSHER; FEDKIW, 2002). Além disso, existem uma série de algoritmos numéricos altamente precisos e robustos que foram desenvolvidos para a solução discreta da equação *level set* (SETHIAN, 1999; OSHER; FEDKIW, 2002).

A função ϕ é discretizada utilizando uma malha cartesiana de $n_x \times n_y$ elementos ao longo do domínio D . Usando funções de forma convencionais em elementos finitos, a função ϕ adota a expressão

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_i \phi_i(t) N_i(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

onde $\phi_i(t)$ denotam os valores nodais da função *level set* e $N_i(\mathbf{x})$ são as funções de forma. Assim, é possível determinar o valor de ϕ em qualquer ponto de D . Os valores nodais $\phi_i(t)$ são atualizados durante o processo de otimização.

A solução discreta para a equação de Hamilton-Jacobi (Eq. (2.19)) é obtida utilizando diferenças finitas à frente (também conhecido na literatura como esquemas *upwind*) através de passos de tempo apropriados em um *grid* cartesiano. O esquema *upwind* é um método computacional preciso e robusto

para resolver o problema de Hamilton-Jacobi discretizado e é apresentado no Apêndice B. As soluções deste problema com o esquema *upwind* produzem o movimento das curvas de níveis ϕ em todo o domínio D onde a função ϕ é definida, ou seja, todos os valores de ϕ são atualizados. Observe-se que a fronteira do corpo é representada apenas pela curva de nível $\phi = 0$, portanto a velocidade v_n usada para resolver a equação *level set* em busca da topologia ótima, tem significado físico apenas em $\phi = 0$. Porém, v_n é calculada em todo o domínio de referência D a fim de utilizar o esquema *upwind*.

A suavidade da função ϕ é uma das propriedades mais importantes para a evolução do *level set*, principalmente quando são aproximadas numericamente. Uma função suave possui boas aproximações da normal \mathbf{n} e, conseqüentemente, do gradiente e da curvatura, especialmente quando discretizada. A conhecida *função distância com sinal* possui estas propriedades desejáveis para utilizar o modelo *level set* (SETHIAN, 1999; OSHER; FEDKIW, 2002). Trata-se de uma função distância $d(\mathbf{x})$ em que $|\phi(\mathbf{x})| = d(\mathbf{x})$ para todo \mathbf{x} , onde o sinal de $\phi(\mathbf{x})$ é definido da seguinte forma:

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}) = +d(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega & \text{(material),} \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega & \text{(fronteira),} \\ \phi(\mathbf{x}) = -d(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in D \setminus \Omega & \text{(vazio).} \end{cases} \quad (3.2)$$

A definição da função distância $d(\mathbf{x})$ pode ser encontrada em Osher e Fedkiw (2002). Uma propriedade inerente à *função distância com sinal* é que:

$$\|\nabla\phi(\mathbf{x},t)\| = 1, \quad (3.3)$$

o que resulta numa série de simplificações, tais como o cálculo de quantidades geométricas da função ϕ (normal, curvatura), e o fato deste termo aparecer explicitamente em algumas integrais do problema (OSHER; FEDKIW, 2002). A Eq. (3.3) é também conhecida na literatura como equação Eikonal.

Entretanto, foi provado por Barles et al. (1993 apud LI et al., 2010, p. 3244) que as soluções das equações de Hamilton-Jacobi não preservam a propriedade de (3.3) sendo que durante a evolução de ϕ , através da solução do problema de Hamilton-Jacobi, geralmente a função se distorce em forma apreciável. Estas distorções da função inicial, quando muito acentuadas, geram erros numéricos e instabilidades na evolução (OSHER; FEDKIW, 2002). Portanto, é desejável que a função *level set* seja mantida “aproximadamente” uma *função distância com sinal* durante sua evolução. Para isto, aplica-se a técnica numérica chamada reinicialização para recuperar a regularidade do *level set* e manter a estabilidade da evolução das fronteiras, que consiste em

substituir periodicamente a função degradada por uma *função distância com sinal*.

Para a implementação deste trabalho, utilizou-se o método padrão para reinicialização que consiste em resolver a seguinte equação de evolução para o estado estacionário:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + S(\phi)(\|\nabla \phi\| - 1) = 0, \quad (3.4)$$

onde

$$S(\phi) = \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + \|\nabla \phi\|^2 (\Delta x)^2}} \quad (3.5)$$

é conhecida como função sinal. Nestas equações, ϕ é a função *level set* a ser reinicializada e Δx corresponde à largura do *grid*. Em Osher e Fedkiw (2002) se mostra que a solução da Eq. (3.4) é uma *função distância com sinal*.

Idealmente, a fronteira de interesse deveria permanecer inalterada durante o processo de reinicialização. Porém, a ocorrência de erros numéricos pode mover incorretamente a curva de nível zero da posição desejada. Por esse motivo, a reinicialização deveria ser evitada tanto quanto possível. Conforme Li et al. (2010), do ponto de vista prático, a reinicialização apresenta questões em aberto, como por exemplo, quando e como aplicar a reinicialização. Como não há respostas consistentes para estas questões, a reinicialização é usada de forma empírica. Ainda nesse trabalho (LI et al., 2010), é proposta uma nova formulação *level set* que possui um termo de regularização na equação de evolução que mantém a função com o perfil de uma *função distância com sinal* próximo às curvas de nível zero e que elimina a necessidade de reinicialização.

3.2 Aproximação numérica: Método dos Elementos Finitos (MEF)

A aproximação numérica das formulações vistas na forma contínua consiste basicamente em reduzir o espaço de soluções de dimensão infinita para espaços de dimensão finita. Neste trabalho, isto é feito mediante a técnica de Elementos Finitos. O domínio D é aproximado por um domínio D_h particionado em subdomínios D_e (elementos finitos) formando a malha. A partição é tal que $D_h = \cup D_e$.

São construídas as famílias de subespaços de dimensão finita das funções admissíveis $U_h \subset U$ e das variações admissíveis $V_h \subset V$, onde $h \in (0, 1] \subset \mathfrak{R}$ denota a dependência da aproximação em relação ao tamanho dos

elementos da malha, ou seja, “ $(\cdot)_h$ converge a (\cdot) quando $h \rightarrow 0$ ”. Da mesma forma, a aproximação da geometria deve ser tal que $D_h \rightarrow D$ quando $h \rightarrow 0$.

Utilizando o MEF, a equação de estado é redefinida por:

Encontrar a solução aproximada $\mathbf{u}_h \in U_h$ tal que:

$$a_\phi(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = l_\phi(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (3.6)$$

Utilizando a formulação clássica de elementos finitos, escreve-se para um elemento e da malha:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h^e &= \mathbf{N}\mathbf{U}^e, & \mathbf{v}_h^e &= \mathbf{N}\mathbf{V}^e, \\ \nabla^s \mathbf{u}_h^e &= \nabla^s(\mathbf{N}\mathbf{U}^e) = \mathbf{B}\mathbf{U}^e, & \nabla^s \mathbf{v}_h^e &= \nabla^s(\mathbf{N}\mathbf{V}^e) = \mathbf{B}\mathbf{V}^e, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h^e) &= \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{U}^e, & & \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde \mathbf{N} é a matriz de funções de forma local, \mathbf{B} a matriz de deformação, \mathbf{C} é o tensor de elasticidade e \mathbf{U} e \mathbf{V} são os vetores de parâmetros associados às funções de forma contidas em \mathbf{N} .

Substituindo as expressões acima, a versão discreta da equação de estado para um espaço aproximado conduz ao conhecido sistema linear de equações de dimensão finita, dado por

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (3.8)$$

sendo \mathbf{U} o vetor de incógnitas nodais, \mathbf{K} a matriz de rigidez global da estrutura e \mathbf{F} o vetor carregamento nodal. A matriz \mathbf{K} e o vetor \mathbf{F} são obtidos pelo somatório (em forma de superposição) das respectivas quantidades elementares \mathbf{K}^e e \mathbf{F}^e , dados por

$$\mathbf{K}^e = \int_{D_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_\phi \mathbf{B} dD, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{F}^e = \int_{D_e} H(\phi) \mathbf{N}^T \mathbf{b} dD + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_N} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\tau} d\Gamma, \quad (3.10)$$

onde D_e é o domínio do elemento.

O sistema da Eq. (3.8) é singular, possuindo infinitas soluções, visto que o campo deve ser modificado para incorporar as condições de contorno essenciais (Eq. 2.3), o que resulta em um novo sistema linear de equações na forma

$$\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{F}}. \quad (3.11)$$

A solução deste sistema de equações fornece os deslocamentos nodais $\bar{\mathbf{U}}$

incógnitas do problema.

Para obter a versão discreta da equação adjunta (Eq. (2.60)) no espaço aproximado procede-se de forma análoga:

Encontrar a solução aproximada $\boldsymbol{\lambda}_h \in V_h$ tal que:

$$\int_D \mathbf{C}_\phi \nabla^s \boldsymbol{\lambda}_h \cdot \nabla^s \delta \mathbf{u}_h dD = - \int_D [\alpha + ch_\varepsilon(\mathbf{u}_h, \phi)] \mathbf{CA}(\mathbf{u}_h, \phi) \cdot \nabla^s \delta \mathbf{u}_h dD \quad \forall \delta \mathbf{u}_h \in V_h. \quad (3.12)$$

Seja $\boldsymbol{\Lambda}$ o vetor de deslocamentos nodais adjuntos associados à aproximação $\boldsymbol{\lambda}_h$ e $\delta \mathbf{U}$ o vetor de direções arbitrárias relativos à aproximação $\delta \mathbf{u}_h$, ambos aproximados pelas mesmas funções de forma. Neste caso,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_h &= \mathbf{N}\boldsymbol{\Lambda}, \\ \nabla^s \boldsymbol{\lambda}_h &= \nabla^s(\mathbf{N}\boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{B}\boldsymbol{\Lambda}, & \delta \mathbf{u}_h &= \mathbf{N}\delta \mathbf{U}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\lambda}_h) &= \mathbf{C}\mathbf{B}\boldsymbol{\Lambda}, & \nabla^s \delta \mathbf{u}_h &= \nabla^s(\mathbf{N}\delta \mathbf{U}) = \mathbf{B}\delta \mathbf{U}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Substituindo estas aproximações na equação adjunta aproximada (Eq. 3.12):

$$\int_D \mathbf{C}_\phi \mathbf{B}\boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{B}\delta \mathbf{U} dD + \int_D [\alpha + ch_\varepsilon] \mathbf{CA} \cdot \mathbf{B}\delta \mathbf{U} dD = 0 \quad \forall \delta \mathbf{U} \in V_h.$$

Considerando que os vetores $\boldsymbol{\Lambda}$ e $\delta \mathbf{U}$ são independentes do domínio (a dependência está nas funções de interpolação), ambos podem sair da integral. Ainda, usando propriedades matriciais chega-se à expressão

$$\left\{ \int_D \mathbf{B}^T \mathbf{C}_\phi \mathbf{B} dD \boldsymbol{\Lambda} + \int_D [\alpha + ch_\varepsilon] \mathbf{B}^T \mathbf{CA} dD \right\} \cdot \delta \mathbf{U} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{U} \in V_h,$$

gerando o sistema de equações

$$\tilde{\mathbf{K}}\boldsymbol{\Lambda} = -\mathbf{F}_a, \quad (3.14)$$

onde $\tilde{\mathbf{K}}$ é a mesma matriz de rigidez obtida na equação de estado, $\boldsymbol{\Lambda}$ corresponde ao vetor de parâmetros solução do problema e \mathbf{F}_a ao vetor força adjunta nodal dado por

$$\mathbf{F}_a = \int_D [\alpha + ch_\varepsilon] \mathbf{B}^T \mathbf{CA} dD, \quad (3.15)$$

ou, em termos de suas quantidades elementares nodais como

$$\mathbf{F}_a = \sum_{e=1}^{nel} \int_{D_e} [\alpha^e + ch_\varepsilon^e] \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{A} dD, \quad (3.16)$$

onde nel é o número de elementos finitos no qual D_h é particionado.

Neste trabalho, são feitas algumas considerações importantes sobre a discretização do problema, principalmente para calcular as expressões integrais ao longo do elemento, tais como:

1. O método *level set* corresponde à formulação Euleriana, portanto considera-se a malha como sendo fixa. São criadas duas malhas, uma de elementos finitos e outra para a função ϕ . Utilizando elementos quadrilaterais, as malhas são construídas de forma tal, que os nós do *grid level set* coincidem com os centros dos elementos da malha de elementos finitos. Por questões de facilidade, as malhas são estruturadas. Esta representação pode ser vista na Fig. (3.1).

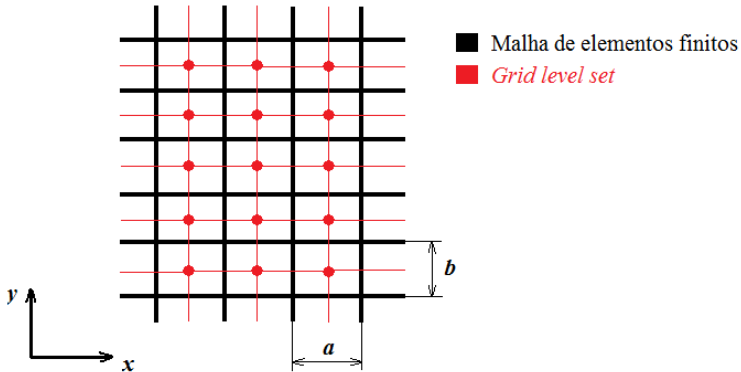


Figura 3.1: Esquema ilustrativo para mostrar a malha de elementos finitos e o *grid level set*.

2. A tensão tem seu valor avaliado no centro de cada elemento e este valor é considerado constante nos cálculos de integração no domínio do elemento. Conseqüentemente, a função de falha h^e e o tensor \mathbf{A}^e também são constantes ao longo do elemento.

3. A função Heaviside $H(\phi)$ é avaliada no centro do elemento e o seu valor é mantido constante nos cálculos de integração no domínio do ele-

mento. Note-se que este valor é dado diretamente no nó do *grid level set* que corresponde ao centro do elemento na malha de elementos finitos. A função multiplicador de Lagrange associada à restrição de falha para cada elemento α^e é também constante no elemento.

Com base nestas condições, são apresentados no Apêndice E o cálculo da matriz de rigidez \mathbf{K} e da força adjunta \mathbf{F}_a elementares para o Estado Plano de Tensões (EPT) utilizados para resolver o problema de otimização cujo resultados serão apresentados no próximo capítulo.

A partir destas considerações, a função objetivo $J(\phi)$ dada pela Eq. (2.41) pode ser reescrita na forma discreta como

$$J(\phi) = \sum_{e=1}^{nel} \left[\rho \hat{H}(\phi) + \alpha^e h_\varepsilon^e + \frac{c}{2} (h_\varepsilon^e)^2 \right] V_e, \quad (3.17)$$

onde

$$V_e = \int_{D_e} dD \quad (3.18)$$

representa o volume do e -ésimo elemento.

Para obter a forma discretizada da densidade do gradiente de forma $G(\phi)$ (Eq. 2.68), utiliza-se a formulação de elementos finitos para um elemento e ,

$$\lambda_h^e = \mathbf{N}\boldsymbol{\Lambda}^e, \quad (3.19)$$

$$\nabla^s \lambda_h^e = \mathbf{B}\boldsymbol{\Lambda}^e, \quad (3.20)$$

$$\nabla^s \mathbf{u}_h^e = \mathbf{B}\mathbf{U}^e, \quad (3.21)$$

Substituindo,

$$G_h^e = \begin{cases} \rho + [\alpha^e + ch_\varepsilon^e] (g^e + \varepsilon) \\ \quad + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{U}^e \cdot \mathbf{B}\boldsymbol{\Lambda}^e - \mathbf{b} \cdot \mathbf{N}\boldsymbol{\Lambda}^e, & \text{se } g_\varepsilon^e \geq -\frac{\alpha^e}{c} \\ \rho + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{U}^e \cdot \mathbf{B}\boldsymbol{\Lambda}^e - \mathbf{b} \cdot \mathbf{N}\boldsymbol{\Lambda}^e, & \text{se } g_\varepsilon^e < -\frac{\alpha^e}{c} \end{cases} \quad (3.22)$$

onde $G_h = \sum_{e=1}^{nel} G_h^e$.

3.3 Algoritmo de otimização

O método *level set* aplicado a este problema de otimização consiste em gerar uma sequência minimizante a partir do controle e movimentação da fronteira do corpo, de acordo com a velocidade obtida pela análise de sensibilidade do funcional objetivo. Esta velocidade irá conduzir a fronteira do corpo para uma forma ótima, de maneira a minimizar a função objetivo e, ao mesmo tempo, satisfazer as restrições impostas ao problema.

A solução numérica utiliza o procedimento padrão do Método Lagrangiano Aumentado que é realizado em dois ciclos iterativos (*loops*), um embutido dentro de outro. No ciclo externo (*loop* externo), cada iteração consiste em definir uma função multiplicador de Lagrange α , um fator de penalização c e resolver o problema de minimização da função objetivo $J(\phi)$. Estes passos são listados abaixo:

Loop externo:

1. Inicialização da função *level set* $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi^0$ como uma *função distância com sinal*, correspondente a um domínio inicial D_0 .
2. Definir $k = 1$, $c^k > 0$, $\alpha_i^k \in \mathfrak{R}$ com $i = 1 \dots nel$.
3. Minimizar o funcional $J(\phi)$ (*loop* interno).
4. Atualizar c^k e α_i^k .
5. Verificar convergência.
6. Atualização do contador k e retorno ao passo 3.

O ciclo (*loop*) interno é assim chamado pois consiste em resolver o passo 3 do *loop* externo, na qual a função objetivo J_ϕ é minimizada para valores fixos de c^k e α_i^k . O procedimento iterativo empregado nos experimentos numéricos é esquematizado através do seguinte algoritmo:

Loop interno:

1. Minimização de $J(\phi^j, \alpha_i^k, c^k)$. Para $j=1$ até $j \leq Niter_{\max}$:
 - (a). Resolver a equação de estado e encontrar o campo de deslocamentos \mathbf{u}^j .
 - (b). Encontrar o deslocamento adjunto λ^j , solução da equação adjunta.
 - (c). Calcular a velocidade v_n em termos de \mathbf{u}^j e λ^j . Normalizar o campo de velocidades fazendo $v_n = v_n / \max(|v_n|)$.
 - (d). Resolver a equação de evolução de Hamilton-Jacobi obtendo a nova forma do corpo representada pelas curvas de níveis $\phi^j = 0$. O passo de tempo Δt^j é escolhido de tal forma que $J(\phi^j) \leq J(\phi^{j-1})$.
 - (e). Reinicializar a função *level set* ϕ^j como uma *função distância com sinal*.

(f). $j = j + 1$.

O esquema de solução da equação *level set* é explícito no tempo e o passo de tempo deve satisfazer a uma condição CFL (ver Apêndice B). Deve-se observar que, o passo de tempo obtido a partir da condição CFL (Δt_{CFL}) é geralmente muito menor do que o passo de tempo Δt^j , que é o passo de descida na minimização de $J(\phi)$ (passo 1(d) do *loop* interno). Ou seja, $\Delta t^j = n\Delta t_{CFL}$, onde n corresponde ao número de passos de tempo Δt_{CFL} para o qual a equação de evolução é resolvida em cada iteração j do algoritmo para uma velocidade v_n . O valor de n para cada iteração j é monitorado pelo decréscimo de $J(\phi^j)$.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados alguns resultados relativos à formulação discutida nos capítulos anteriores para o problema proposto. Inicialmente, são apresentadas algumas considerações feitas para a elaboração dos exemplos numéricos. Na seção dos exemplos, apresentam-se alguns resultados simples com o intuito de validar a formulação apresentada e, em seguida, são apresentados os mais clássicos problemas de otimização estrutural: a viga MBB e a estrutura em formato L, um problema bastante típico na ótica de problemas de otimização topológica considerando restrição sobre as tensões.

4.1 Considerações gerais

Nesta seção se apresentam as hipóteses adotadas em cada exemplo e/ou parâmetros escolhidos para a obtenção dos resultados numéricos. Em todos os exemplos são feitas as seguintes considerações:

1. Estado plano de tensões (EPT).
2. Critério de falha de von Mises.
3. Ausência de forças de corpo ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$).
4. A fronteira Γ_N , onde é aplicada a tração $\boldsymbol{\tau}$, é mantida fixa durante todo o processo de otimização, isto é,

$$\phi(\Gamma_N, t) \equiv 0 \quad \forall t. \quad (4.1)$$

5. Para garantir a satisfação do item (4), a velocidade v_n na fronteira Γ_N é nula. Além disso, a fronteira onde o deslocamento é prescrito (Γ_D) também é mantida fixa no processo de otimização, ou seja,

$$v_n \Big|_{\Gamma_N} = v_n \Big|_{\Gamma_D} = 0. \quad (4.2)$$

Para todos os exemplos, utiliza-se o elemento quadrilátero bilinear (ver Apêndice E). A densidade ρ do material é considerada como unitária. O módulo de elasticidade do material sólido é normalizado para $E = 1$ e para as regiões sem material (“furos”) o módulo de elasticidade é definido como sendo $E = H_{\min} = 10^{-3}$. O coeficiente de Poisson é fixado em $\nu = 0,3$. A função *level set* é reinicializada como *função distância com sinal* a cada atualização de ϕ .

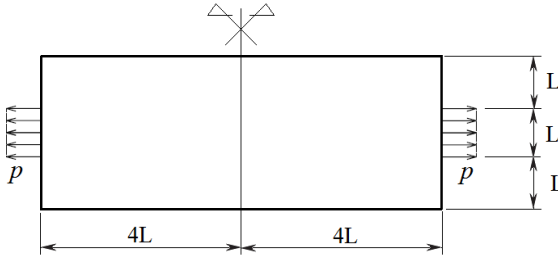


Figura 4.1: Barra sob tração uniaxial aplicada na região intermediária. Modelo utilizado.

4.2 Barra sob tração uniaxial

Este exemplo tem como principal objetivo validar a metodologia de otimização estrutural discutida anteriormente, com solução analítica conhecida. Trata-se do problema de uma estrutura retangular submetida a um carregamento uniaxial na parte central do contorno (Fig. 4.1). O carregamento aplicado p é exatamente igual ao valor da tensão admissível de falha do material (σ_{adm}). Naturalmente, a solução do problema é uma barra sob tração, cuja área da seção transversal é igual à área da seção de aplicação do carregamento e cujo campo de tensões tem o valor da tensão admissível (ocorre saturação de tensões). O parâmetros geométricos e materiais deste modelo são:

$$\begin{aligned} p &= 1,0 \text{ Pa} \\ \sigma_{adm} &= 1,0 \text{ Pa} \\ L &= 1,0 \text{ m} \end{aligned}$$

Levando em conta a simetria do problema, apenas a metade direita do domínio é discretizada, sendo a malha composta de 60×45 elementos finitos. Para discretizar a função *level set*, forma-se um *grid* de 61×46 . A Fig. (4.2) mostra o domínio inicial representado pelas curvas de níveis zero da função *level set*. Para a aproximação da função Heaviside, o parâmetro ξ é escolhido como sendo 0,6 vezes a largura do *grid*. Para o algoritmo de otimização, foi escolhido um número máximo de 35 iterações no *loop* interno resultando num total de 12 atualizações do Lagrangiano aumentado (*loop* externo). Os multiplicadores de Lagrange são inicialmente zero para as iterações do primeiro *loop* externo, onde é utilizado um fator de penalização $c = 25$. Para a

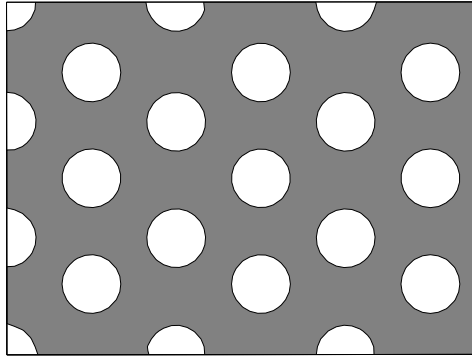


Figura 4.2: Barra sob tração uniaxial aplicada na região intermediária. Domínio *level set* inicial.

atualização de c , adota-se $\beta = 1,2$ e para sua limitação, $\gamma = 0,9$. Ainda, para calcular o termo de regularização do perímetro utiliza-se $\mu = 0,001$.

O resultado obtido na Fig. (4.3) mostra o campo de densidades idêntico à solução analítica. O campo de funções de falha ε -relaxadas pode ser visualizado na Fig. (4.4), onde o valor máximo de g_ε é violado em aproximadamente 0,0042. A função objetivo ou funcional Lagrangiano aumentado, dada pela Eq. (2.35), tem seus valores mostrados na Fig. (4.5) para cada iteração. Observe-se que o algoritmo convergiu com menos de 100 iterações, porém as iterações subsequentes se ocupam de minimizar a função objetivo através de “movimentação” do contorno, em geral, com a topologia já definida. Este comportamento é perfeitamente esperado em virtude do grande número de restrições envolvidas no problema. A Fig. (4.6) mostra o comportamento das parcelas da função objetivo, onde a primeira parcela corresponde à função objetivo original, enquanto as duas últimas estão associadas à penalização (a segunda parcela comporta uma parcela linear da restrição $h(\mathbf{u})$ multiplicada pelos multiplicadores de Lagrange α e, a terceira, uma parcela quadrática da restrição $h(\mathbf{u})$ vinculada ao fator de penalização c). Verifica-se que as parcelas da penalização tendem a zero, o que significa satisfação das restrições de tensões locais.

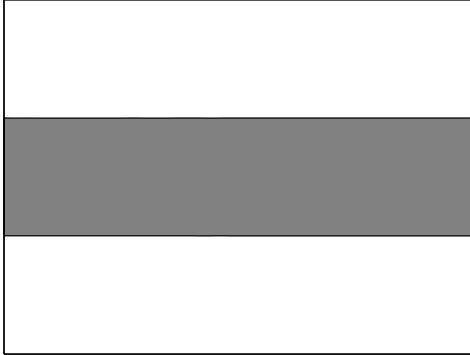


Figura 4.3: Barra sob tração uniaxial aplicada na região intermediária. Campo de densidades.

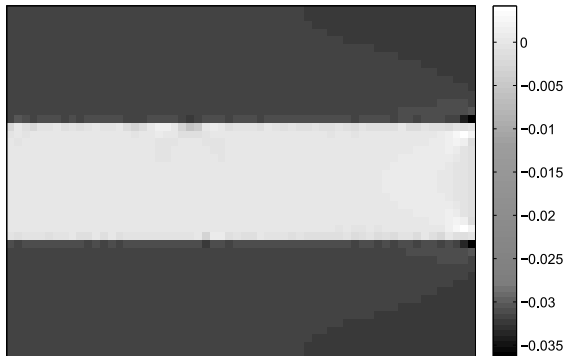


Figura 4.4: Barra sob tração uniaxial aplicada na região intermediária. Campo de funções de falha ϵ -relaxadas.

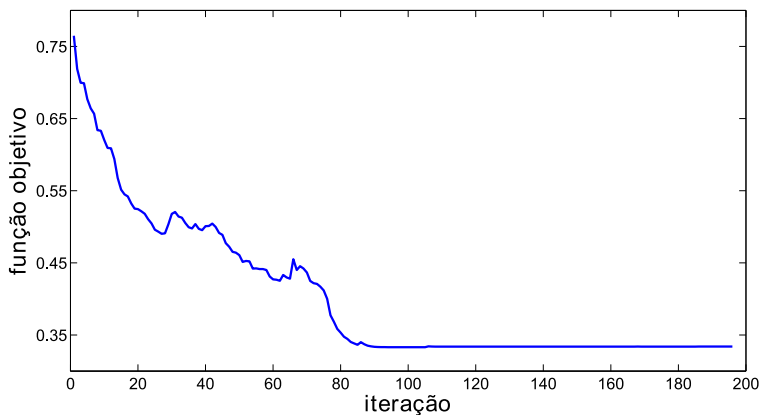


Figura 4.5: Barra sob tração uniaxial aplicada na região intermediária. Convergência da função objetivo.

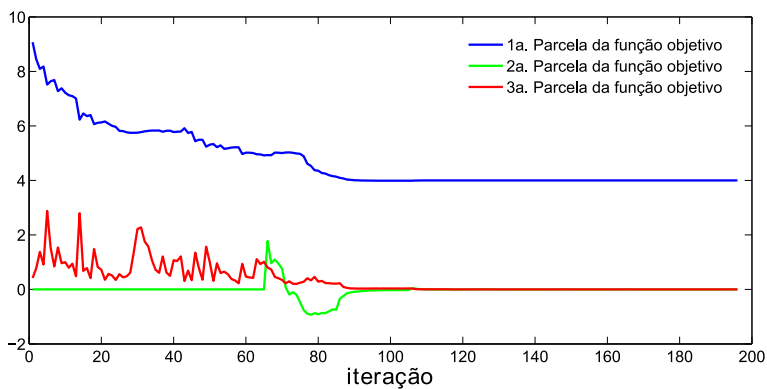


Figura 4.6: Barra sob tração uniaxial aplicada na região intermediária. A figura mostra as três parcelas da função objetivo.

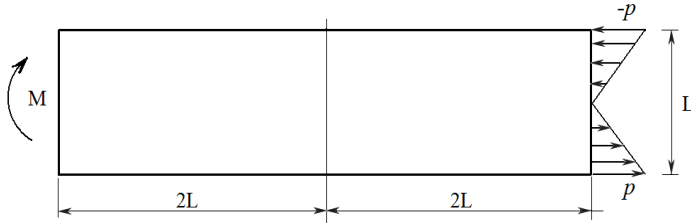


Figura 4.7: Viga sob flexão pura. Modelo utilizado.

4.3 Viga sob flexão pura

Este outro exemplo acadêmico trata da flexão pura de uma estrutura plana simulando uma viga. O momento fletor puro M é aplicado através de uma distribuição de tensões normais p variando linearmente a partir da linha neutra da peça. A geometria é apresentada na Fig. (4.7). O parâmetros geométricos e materiais deste modelo são:

$$\begin{aligned} p &= 30 \text{ Pa} \\ \sigma_{adm} &= 35 \text{ Pa} \\ L &= 10 \text{ m} \end{aligned}$$

Considerando simetria da estrutura, é gerada uma malha de 160×80 elementos finitos apenas da metade direita e, para a função *level set*, forma-se um *grid* de 161×81 . O domínio *level set* inicial é mostrado na Fig. (4.8).

Para a aproximação da função Heaviside, o parâmetro ξ é escolhido como sendo 0,7 vezes a largura do *grid*. Para o ciclo de otimização, realizam-se 10 atualizações do Lagrangiano aumentado com 20 iterações no *loop* interno, sendo que para a primeira iteração do *loop* externo (onde os multiplicadores de lagrange são igualmente zero) são necessárias 50 iterações para convergência. São usados os seguintes parâmetros: $c = 500$, $\beta = 1,2$ e $\gamma = 0,9$. Para a regularização do perímetro, adota-se $\mu = 0,01$.

Note-se pela Fig. (4.9) que o resultado final tende a uma estrutura do tipo viga em I, onde as mesas superior e inferior possuem densidade $\rho = 1$ e a região central possui densidade quase nula ($\rho = \rho_{\min} = H_{\min}$). Na Fig. (4.10) pode-se visualizar o campo de funções de falha ε -relaxado. Nesta figura, observa-se valores da função de falha praticamente nulos nas bordas inferior e superior da estrutura (ou seja, a tensão efetiva de falha do material

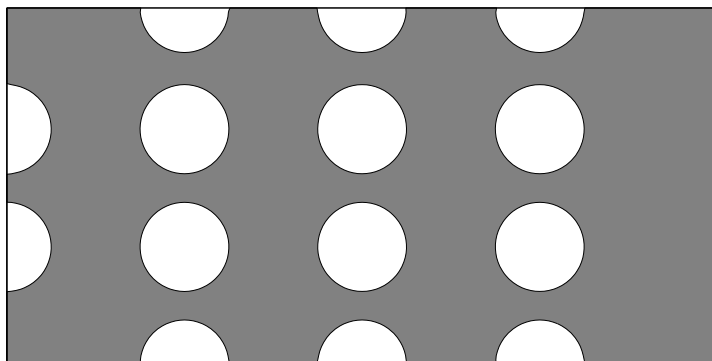


Figura 4.8: Viga sob flexão pura. Domínio *level set* inicial.



Figura 4.9: Viga sob flexão pura. Campo de densidades.

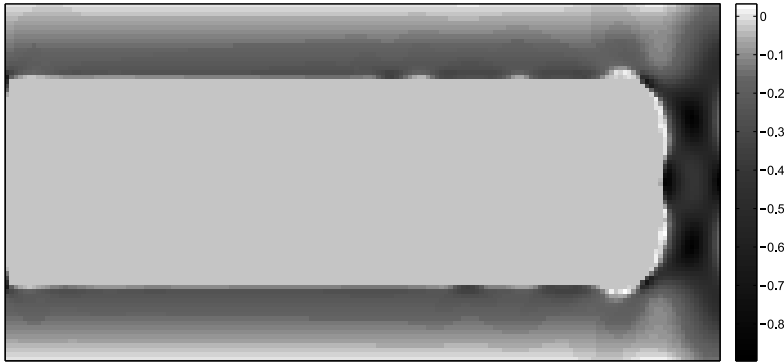


Figura 4.10: Viga sob flexão pura. Campo de funções de falha ε -relaxadas.

é praticamente igual à tensão admissível de falha). Entretanto, como esperado, na parcela um pouco mais interna (mas ainda sobre as mesas da viga) observa-se que as tensões não estão saturadas no valor da tensão de falha. O valor máximo encontrado de g_ε gira em torno de $3,2 \times 10^{-2}$. O decréscimo da função objetivo pode ser visto na Fig. (4.11). A Fig. (4.12) mostra as três parcelas da função objetivo separadamente, com as parcelas associadas à penalização tendendo a zero no final do processo iterativo.

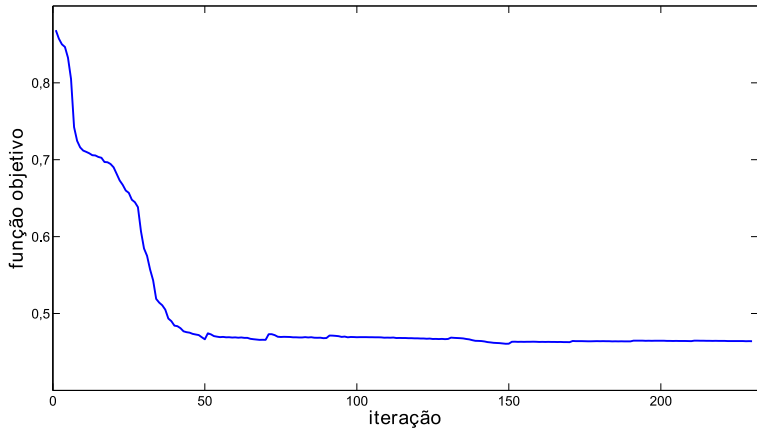


Figura 4.11: Viga sob flexão pura. Convergência da função objetivo.

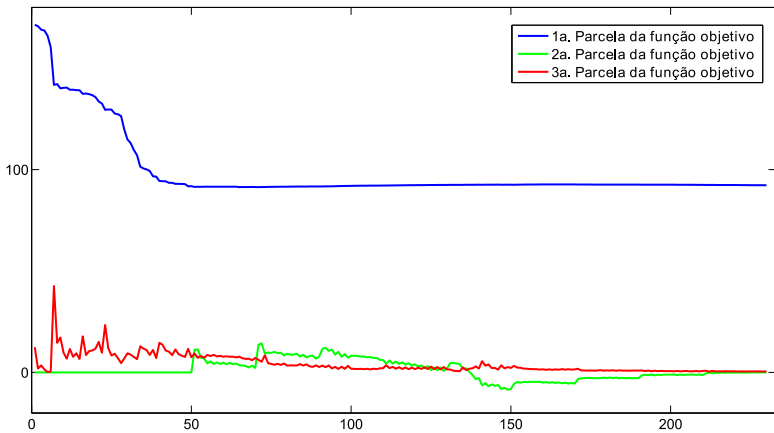


Figura 4.12: Viga sob flexão pura. A figura mostra as três parcelas da função objetivo.

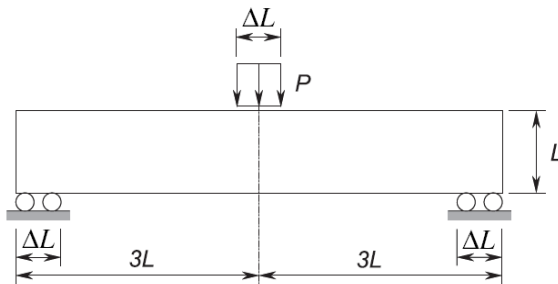


Figura 4.13: Viga bi-apoiada sob carregamento transversal central (MBB). Modelo utilizado.

4.4 Viga MBB

Este é um dos mais clássicos problemas de otimização de topologia estrutural. Trata-se de uma estrutura em EPT bi-apoiada e submetida a um carregamento transversal na região central. Simula, assim, uma viga sob flexão (Fig. 4.13). A denominação deste problema tem como origem o nome da empresa aeronáutica alemã que o sugeriu: *Messerschmitt-Bolkow-Blohm GmbH* (MBB).

Em virtude da simetria vertical, é modelada somente metade da estrutura (direita) com uma malha de 150×50 elementos finitos. Para discretizar a função *level set*, utiliza-se um *grid* de 151×51 . Os parâmetros geométricos e materiais do modelo são:

$$\begin{aligned} P &= 2,0 \text{ kN} \\ \sigma_{adm} &= 17,80 \text{ kPa} \\ L &= 1,0 \text{ m} \\ \Delta L &= 0,2 \text{ m} \end{aligned}$$

O parâmetro ξ para a aproximação da função Heaviside é igual a 0,8 vezes a largura do *grid*. Para o processo de otimização, são realizadas 20 atualizações do Lagrangiano Aumentado com 50 iterações no *loop* interno, com exceção das iterações $k = 1$ e $k = 2$ do ciclo externo onde são feitas 300 e 100 iterações internas, respectivamente. São utilizados os seguintes parâmetros: $c = 100$, $\beta = 1,2$ e $\gamma = 0,9$. Para a regularização do perímetro

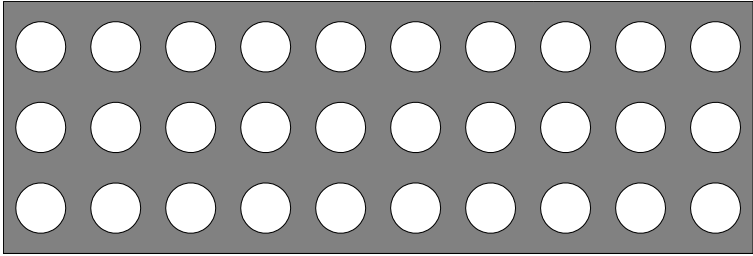


Figura 4.14: Viga bi-apoiada sob carregamento transversal central (MBB). Domínio *level set* inicial.

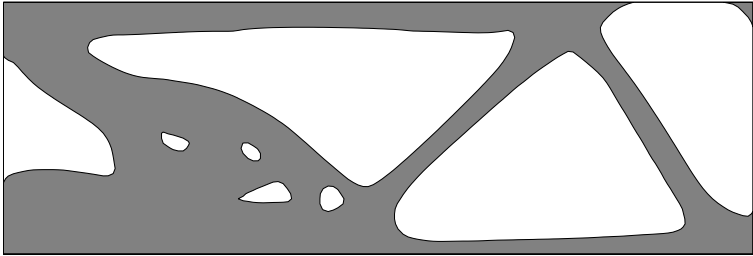


Figura 4.15: Viga bi-apoiada sob carregamento transversal central (MBB). Campo de densidades.

usa-se $\mu = 0,001$.

O domínio *level set* inicial é mostrado na Fig. (4.14). Observe-se que a função *level set* ϕ é inicializada como sendo positiva nas regiões onde é aplicado o carregamento e nos apoios. Esta condição de existência de material é imposta em todo o processo iterativo de otimização, através da função Heaviside ($H(\phi) = 1$). A topologia final é mostrada na Fig. (4.15). O campo de funções de falha ε -relaxadas pode ser visualizado na Fig. (4.16). Note-se que as restrições não estão totalmente satisfeitas no domínio de projeto. A restrição g_ε para a topologia final obtida é violada em valores de aproximadamente $1,3 \times 10^{-1}$ (como pode ser visto nas áreas mais claras da figura). Estes valores são bastante elevados se comparados com os exemplos anteriores.

A eficiência do algoritmo com objetivo de minimizar a função objetivo pode ser comprovado na Fig. (4.17). As parcelas individuais da função ob-



Figura 4.16: Viga bi-apoiada sob carregamento transversal central (MBB). Campo de funções de falha ε -relaxadas.

jetivo também são mostradas na Fig. (4.18). Note-se que a primeira parcela relativa à massa decresce e estabiliza nas primeiras 400 iterações. Porém, observa-se que a segunda e terceira parcelas não são anuladas ao longo do processo iterativo (o que corresponde a não-satisfação da restrição do critério de falha ε -relaxado em alguns elementos), resultando no crescimento da primeira parcela no decorrer do processo iterativo.

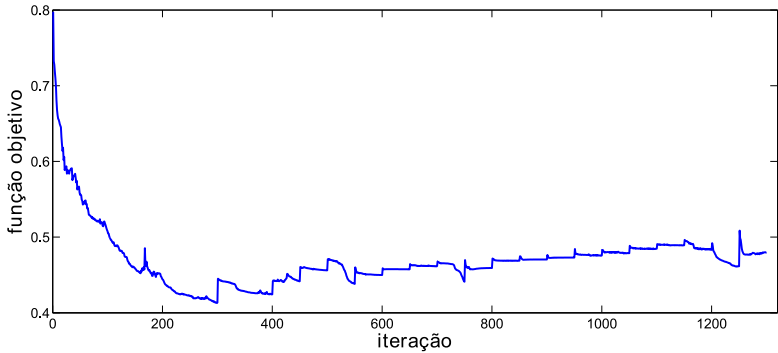


Figura 4.17: Viga bi-apoiada sob carregamento transversal central (MBB). Convergência da função objetivo.

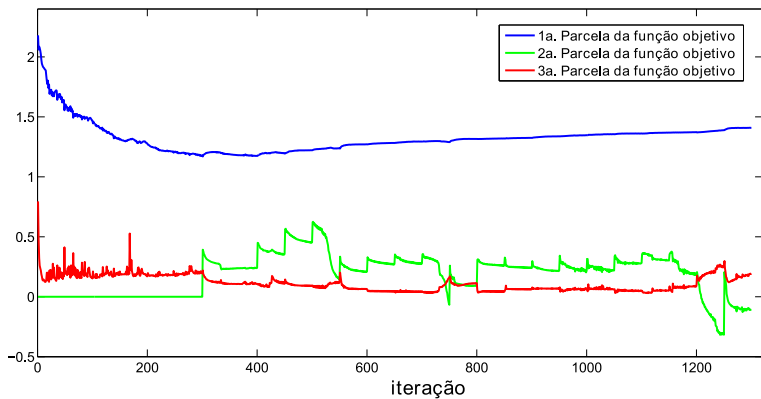


Figura 4.18: Viga bi-apoiada sob carregamento transversal central (MBB). A figura mostra as três parcelas da função objetivo.

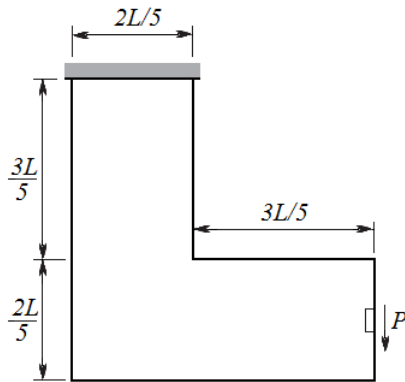


Figura 4.19: Estrutura em formato de L engastada na parte superior. Modelo utilizado.

4.5 Estrutura em formato L

Este exemplo consiste num problema clássico de otimização de topologia estrutural considerando restrição sobre as tensões. Trata-se de uma estrutura plana em formato de L, engastada na parte superior e submetida a um carregamento vertical na região central da extremidade direita, conforme Fig. (4.19). Os principais parâmetros geométricos e materiais do modelo são:

$$\begin{aligned}
 P &= 1,0 \text{ N} \\
 \sigma_{adm} &= 42 \text{ Pa} \\
 L &= 1,0 \text{ m}
 \end{aligned}$$

As malhas são geradas em todo o domínio $L \times L$. Para a malha de elementos finitos, utilizam-se 80 x 80 elementos e, para a função *level set*, forma-se um *grid* de 81 x 81. Para construir a função *level set* inicial, define-se que na região $3L/5 \times 3L/5$ a função possui valor igual a H_{\min} , representando a ausência de material. A função ϕ é inicializada como sendo positiva nas regiões onde é aplicado o carregamento e nos apoios. Estas condições de existência ou não-existência de material são impostas para cada iteração, através da função Heaviside: $H(\phi) = 1$ nas regiões de aplicação do carregamento e $H(\phi) = H_{\min}$ onde não há material. Com isto, o domínio *level*

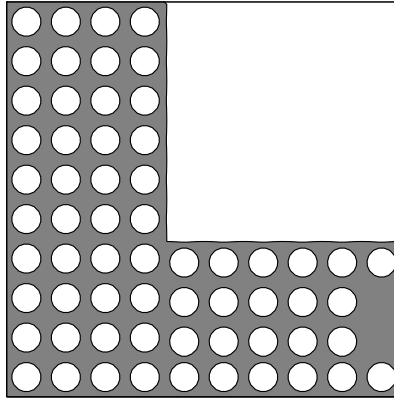
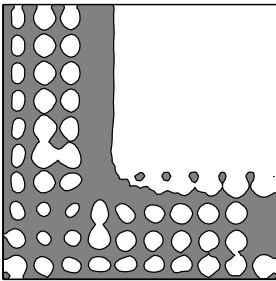


Figura 4.20: Estrutura em formato de L engastada na parte superior. Domínio *level set* inicial.

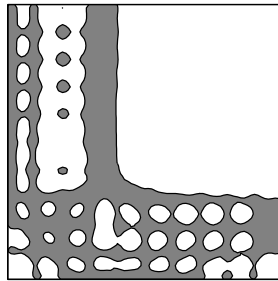
set inicial é mostrado na Fig. (4.20). O histórico do processo iterativo de concepção pode ser visto na Fig. (4.21) nas iterações 2, 5, 10, 300, 400 e 550.

Para a obtenção destes resultados, o parâmetro ξ é escolhido como sendo igual a 0,75 vezes a largura do *grid*. Para a convergência do primeiro *loop* externo (onde não existe atuação dos multiplicadores de Lagrange) são necessárias 300 iterações. No entanto, para o restante do processo de otimização são realizadas 50 iterações no *loop* interno num total de 20 atualizações do Lagrangiano aumentado (*loop* externo). São adotados os seguintes parâmetros de otimização: $c = 250$, $\beta = 1,2$ e $\gamma = 0,9$. O coeficiente da curvatura média para a regularização do perímetro é escolhido empiricamente como sendo $\mu = 0,01$.

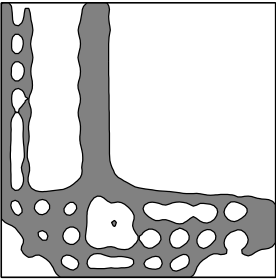
A topologia final é obtida na iteração= 1300 (Fig. 4.22). Observe-se que a topologia está praticamente definida na iteração= 550, como pode ser visto na Fig. (4.21), porém, devido ao grande número de restrições impostas no problema, são necessárias mais iterações. Nestas iterações restantes, os passos de tempo para a solução da equação de Hamilton-Jacobi são mais reduzidos, movimentando as fronteiras de forma sutil. É importante observar o arredondamento obtido nas quinas do problema inicial, com o intuito de aliviar a singularidade sobre as tensões e garantir que não ocorra falha do material. Isto pode ser constatado pelo campo de funções de falha ε -relaxado



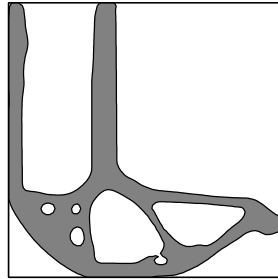
topologia na iteração = 2



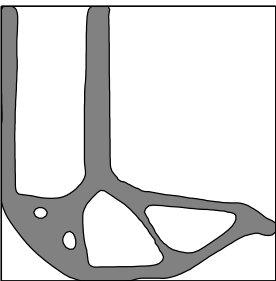
topologia na iteração = 5



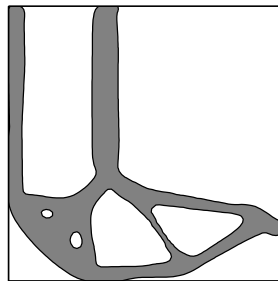
topologia na iteração = 10



topologia na iteração = 300



topologia na iteração = 400



topologia na iteração = 550

Figura 4.21: Estrutura em formato de L engastada na parte superior. A figura mostra os resultados intermediários do processo iterativo de otimização.

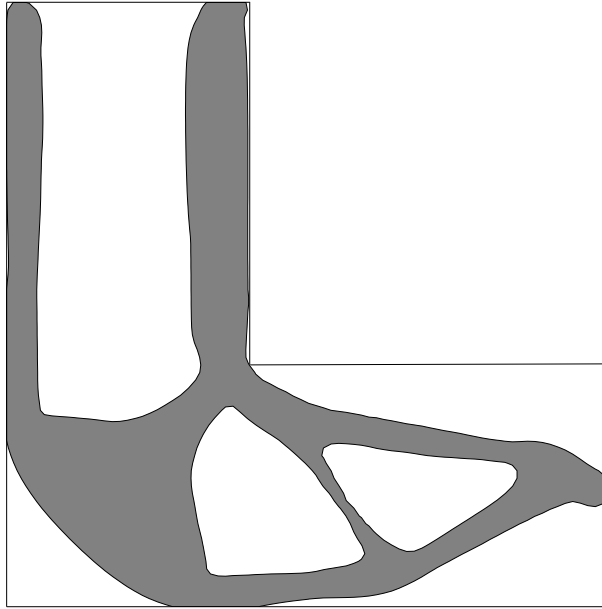


Figura 4.22: Estrutura em formato de L engastada na parte superior. Topologia obtida.

(Fig. 4.23), onde a maioria dos valores são negativos (ou seja, não ocorre falha). O valor máximo de g_ϵ para esta topologia obtida violando a restrição do problema gira em torno de $1,5 \times 10^{-2}$, o que pode ser considerado um valor “aceitável” levando em conta a complexidade do problema.

A história do decréscimo e convergência da função objetivo (ou funcional Lagrangiano aumentado) está mostrada na Fig. (4.24). Na Fig. (4.25) é possível analisar as três parcelas da função objetivo. Note-se que as parcelas relacionadas à penalização convergem para zero, o que significa satisfação das restrições de tensões.

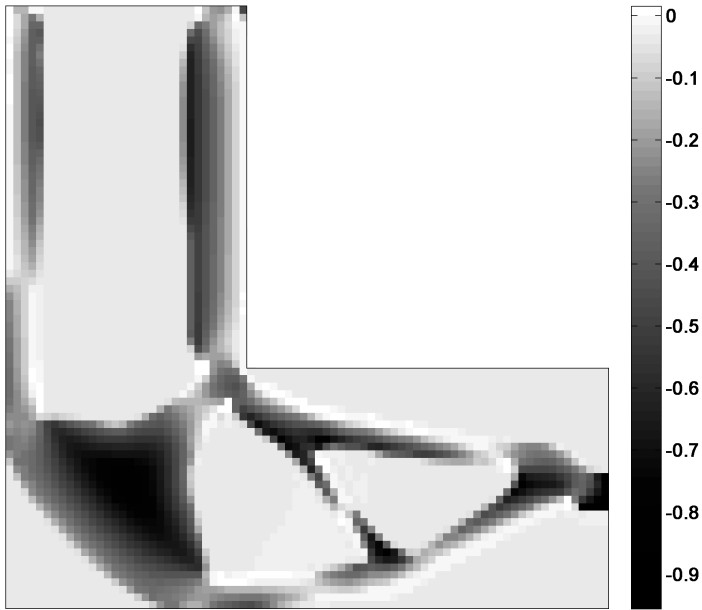


Figura 4.23: Estrutura em formato de L engastada na parte superior. Campo de funções de falha ε -relaxadas.

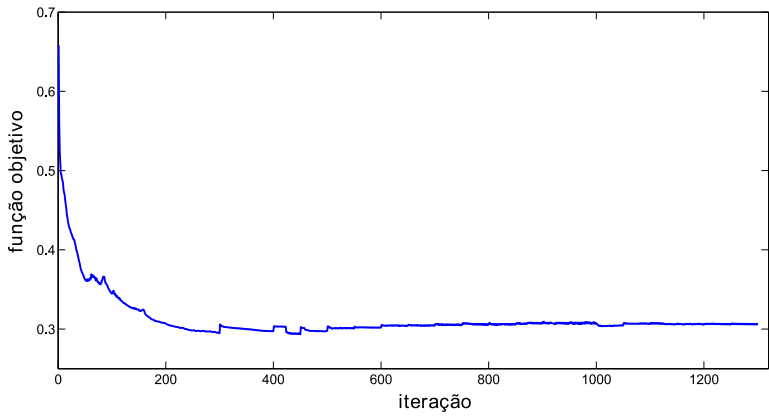


Figura 4.24: Estrutura em formato de L engastada na parte superior. Convergência da função objetivo no processo iterativo.

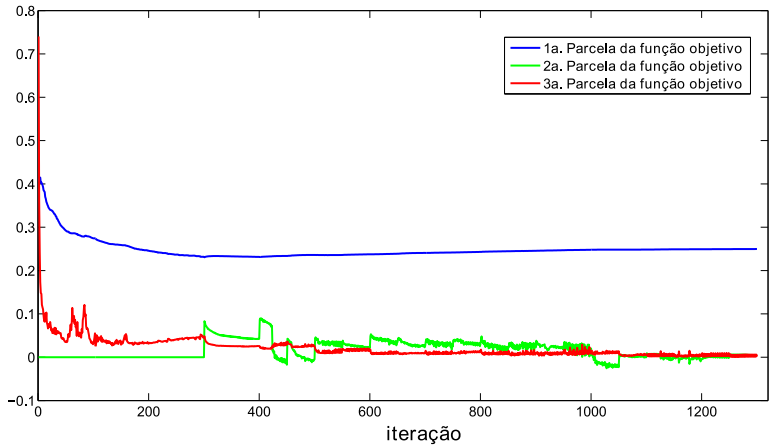


Figura 4.25: Estrutura em formato de L engastada na parte superior. A figura mostra as três parcelas da função objetivo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 Conclusões

O método *level set* utilizado para problemas de otimização topológica é bastante comum na literatura, porém a maior parte destina-se a resolver problemas de mínima flexibilidade (*compliance*). Os motivos principais para isto estão associados ao bom nível de desenvolvimento das técnicas matemáticas relacionadas a este tipo de problema, aliado ao pequeno número de restrições (uma única restrição sobre a quantidade de material). Este trabalho teve como principal objetivo propor o método *level set* para otimização topológica mas, cujo objetivo é a minimização da massa de uma estrutura com restrição de falha material local. Neste problema, existem maiores dificuldades devido ao elevado número de restrições (pelo menos igual ao número de elementos) resultando num elevado custo computacional. Assim sendo, dentre as principais conclusões obtidas de todo trabalho desenvolvido, destacam-se:

- O campo de velocidades usado para resolução da equação *level set*, que foi definido através da análise de sensibilidade, provou realmente ser uma direção de descida do funcional objetivo, permitindo construir um algoritmo de otimização. Vale a pena mencionar que neste trabalho foi empregado simplesmente o método do gradiente, sendo que a convergência do algoritmo poderia ser acelerada usando, por exemplo, conceitos dos métodos quase-Newton.
- Todo o desenvolvimento das equações baseia-se em uma função de falha do material em forma genérica (mas dependente das tensões e/ou deformações). Embora tenha sido empregado o critério de von Mises para obtenção da função de falha, a única diferença na implementação das várias funções de falha existentes na literatura encontra-se na obtenção do valor da função propriamente dito e na sua derivada em relação aos invariantes de tensões. Com isso, é de grande facilidade a implementação numérica de qualquer outra classe de material.
- Para resolver a equação de Hamilton-Jacobi foi utilizado o esquema explícito *upwind* de primeira ordem. O uso de outras técnicas numéricas mais recentes (XIA et al., 2006; LUO et al., 2008) podem ter um impacto significativo nos aspectos de eficiência numérica.
- O processo de reinicialização necessário para manter a função *level set* como uma *função distância com sinal* pode ser considerado

como uma das maiores desvantagens do método *level set*. A questão é que a evolução da função *level set* não tem como solução uma *função distância com sinal*, justificando a necessidade do uso da reinicialização. A desvantagem da reinicialização, além do custo computacional, é que ela pode movimentar a fronteira de forma indesejável e, por este motivo, deveria ser evitada tanto quanto possível. O desenvolvimento de novas técnicas de reinicialização ainda é um assunto ativo na pesquisa.

- O método Lagrangiano Aumentado empregado neste trabalho para incorporar as restrições sobre as tensões no funcional objetivo, permitiu resolver, na maior parte dos exemplos numéricos apresentados, a satisfação das restrições de falha material. Com exceção do exemplo da viga MBB, os demais exemplos possuem valores adequados para o campo das funções de falha ε -relaxadas a menos de uma pequena tolerância. No caso do formato L, violação de no máximo 0,02 em alguns pontos e ainda valores inferiores a este para os exemplos da barra sob tração e da viga sob flexão pura. Os valores numericamente mais elevados de violação da restrição foram encontrados no exemplo da viga MBB, onde a violação de g_ε chega a 0,13 em alguns pontos.
- A solução dos exemplos numéricos obtidos neste trabalho são comparados aos resultados obtidos em Pereira, Fancello e Barcellos (2004), no qual busca soluções para o mesmo problema mas utilizando o método SIMP. As topologias finais são semelhantes e é interessante observar que, apesar do exemplo da viga MBB possuir valores numericamente maiores violando g_ε do que os outros exemplos, a topologia obtida possui características perfeitamente comparáveis à de Pereira, Fancello e Barcellos (2004).
- O resultado final (topologia obtida) é altamente dependente da função *level set* inicial, uma vez que o esquema *upwind* não permite a criação de furos. O método *level set* demonstrou uma certa flexibilidade para manipular as mudanças topológicas do processo de evolução da função *level set*, unindo e cancelando os furos definidos no domínio inicial.
- Devido à tensão ser calculada apenas no centro dos elementos, conduzindo a uma pobre estimativa de tensão na estrutura, uma melhor avaliação da tensão usando técnicas mais apropriadas ou técnicas de recuperação de tensão deveriam ser testadas a fim de obter resultados

mais satisfatórios. Por exemplo, utilizar uma malha de Elementos Finitos com maior frequência de informações para o nó do *grid level set* pode ser uma alternativa para obtenção de melhores resultados.

- Na implementação deste trabalho, o controle do número de passos de tempo da condição CFL ($n\Delta t_{CFL}$) necessários para encontrar o valor mínimo do funcional objetivo numa certa direção (isto é, o valor de n), é realizado fazendo testes para determinados valores de n . Desenvolver um algoritmo de otimização para determinar n reduziria consideravelmente o custo computacional.

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

Uma série de melhorias podem ser implementadas para uma maior qualidade do trabalho sob o ponto de vista computacional. A seguir, são apresentadas algumas destas:

- A utilização de malhas não-uniformes de Elementos Finitos, possibilitando a realização de refinamentos em sub-regiões para uma avaliação mais precisa das tensões.
- Criar um algoritmo para determinar o número de passos de tempo n da condição CFL para obter o menor valor do funcional objetivo.
- Desenvolver novos métodos de reinicialização a fim de realizar um maior controle neste processo. Ou ainda, implementar outras técnicas numéricas para resolver a equação de evolução de Hamilton-Jacobi, como por exemplo, as utilizadas nos trabalhos de Xia et al. (2006) ou Luo et al. (2008).
- Criar uma malha de Elementos Finitos coincidente com o *grid level set*, utilizando um método de suavização para avaliar o campo de velocidades sobre os nós dos Elementos Finitos.
- Como sugestão para desenvolvimentos futuros, implementar a formulação desenvolvida neste trabalho para o caso de estruturas 3D.

REFERÊNCIAS

- ALLAIRE, G. et al. *CMAF - Ecole Polytechnique*. January 2008. Disponível em: <http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/freemem_en.html>.
- ALLAIRE, G.; JOUVE, F.; TOADER, A. M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, v. 194, p. 363–393, 2004.
- AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A. A. Topological optimization of structures subject to von mises stress constraints. *Struct Multidisc Optim*, v. 41, p. 407–420, 2010.
- BELYTSCHKO, T.; XIAO, S. P.; PARIMI, C. Topology optimization with implicitly function and regularization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Optimization*, v. 57, p. 1177–1196, 2003.
- BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, v. 1, p. 193–202, 1989.
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 71(2), p. 197–224, 1988.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. *Topology Optimization: Theory, methods and applications*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2003.
- BERTSEKAS, D. P. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Belmont, MA, U.S.A.: Athena Scientific, 1996.
- CHALLIS, V. J. A discrete level-set topology optimization code written in matlab. *Struct Multidisc Optim*, v. 41, p. 453–464, 2010.
- CHENG, G.; GUO, X. e-relaxed approach in structural topology optimization. *Struct Optim*, v. 13, p. 258–266, 1997.
- CHENG, G. D.; JIANG, Z. Study on topology optimization with stress constraints. *Engineering Optimization*, v. 20, p. 129–148, 1992.
- DUYSINX, P.; BENDSØE, M. P. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 43, p. 1453–1478, 1998.

- ESCHENAUER, H.; KOBELEV, V.; SCHUMACHER, A. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural and Multi-disciplinary Optimization*, v. 8, p. 142–151, 1994.
- ESCHENAUER, H. A.; OLHOFF, N. Topology of continuum structures: a review. *Applied Mechanics Review*, v. 54, p. 331–390, 2001.
- FANCELLO, E. A. *Análise de Sensibilidade, Geração Adaptativa de Malhas e o Método dos Elementos Finitos na Otimização de Forma em Problemas de Contato e Mecânica da Fratura*. Tese (Doutorado) — COPPE-URFJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1993.
- FARIAS, J.-M. C.; CARDOSO, E. L.; MUÑOZ-ROJAS, P. A. Topology optimization with stress constraints using superconvergent patch recovery. In: *3rd International Symposium on Solid Mechanics*. Florianópolis, Brazil: Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2011. p. 175–195.
- GUO, X.; ZHANG, W. S.; WANG, M. Y. Stress-related topology optimization via level set approach. In: *6th China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems*. Kyoto, Japan: Japan Society of Mechanical Engineers and International Society for Structural and Multidisciplinary Optimization, 2010.
- GURTIN, M. E. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Londres, EUA: Academic Press, 1981.
- HAUG, E. J.; CHOI, K. K.; KOMKOV, V. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Orlando: Academic Press, 1986.
- HE, L.; KAO, C. Y.; OSHER, S. Incorporating topological derivatives into shape derivative based level set methods. *Journal of Computational Physics*, v. 225, p. 891–909, 2007.
- HILL, R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Londres, UK: University Press, 1950.
- KIRSCH, U. On singular topologies in optimal structural design. *Struct Multidisc Optim*, v. 2, p. 133–142, 1990.
- LI, C. et al. Distance regularized level set evolution and its application to image segmentation. *IEEE TRANSACTIONS ON IMAGE PROCESSING*, v. 19, p. 3243–3254, 2010.

- LUO, J. et al. A semi-implicit level set method for structural shape and topology optimization. *Journal of Computational Physics*, v. 227, p. 5561–5581, 2008.
- MARTÍNEZ, J. M. *Otimização prática usando o Lagrangiano Aumentado*. Campinas, SP: Depto de Matemática Aplicada - IMCC - UNICAMP, 2006.
- MARTÍNEZ, J. M.; SANTOS, S. A. *Métodos Computacionais de Otimização. Notas de Aula*. Campinas, SP: Depto de Matemática Aplicada - IMCC - UNICAMP, 1995.
- MURAT, F.; SIMON, J. *Sur le Contrôle par un Domaine Géométrique*. Tese (Doutorado) — Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, França, 1976.
- NOVOTNY, A.; FEIJÓO, R. A.; TAROCO, E. O. Derivada topológica via análise de sensibilidade à mudança de forma na otimização topológica. *Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.*, v. 18, p. 499–519, 2002.
- NOVOTNY, A. A. *Análise de Sensibilidade Topológica*. Tese (Doutorado) — Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC, Petrópolis - Rio de Janeiro, 2003.
- NOVOTNY, A. A.; CAMPEÃO, D. E. Topology design of kirchhoff plates based on topological derivative and a level-set domain representation. In: *3rd International Symposium on Solid Mechanics*. Florianópolis, Brazil: Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2011. p. 401–419.
- OSHER, S.; FEDKIW, R. P. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surface*. New York: Springer-Verlag, 2002.
- OSHER, S.; SETHIAN, J. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, v. 79, p. 12–49, 1988.
- PARÍS, J. et al. Topology optimization of continuum structures with local and global stress constraints. *Struct Multidisc Optim*, v. 39, p. 419–437, 2009.
- PEREIRA, J. T.; FANCELLO, E. A.; BARCELLOS, C. S. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints. *Struct Multidisc Optim*, v. 26, p. 50–66, 2004.

- SAPIRO, G. *Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- SETHIAN, J. A. *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. New York, USA: Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- SETHIAN, J. A.; WIEGMANN, A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods. *Journal of Computational Physics*, v. 163 (2), p. 489–528, 2000.
- SHIM, P. Y.; MANOOCHEHRI, S. Generating optimal configurations in structural design using simulated annealing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, p. 1053–1069, 1997.
- SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. *Computational Inelasticity*. USA: Springer-Verlag New York, 1998.
- SOKOŁOWSKI, J.; ZOCHOWSKI, A. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM Journal of Control Optimization*, v. 37, p. 1251–1272, 1999.
- SOKOŁOWSKI, J.; ZOLÉSIO, J. P. Introduction to shape optimization: shape sensitivity analysis. *Springer-Verlag*, v. 10, 1992.
- STEVEN, G. P.; LI, Q.; XIE, Y. M. Multicriteria optimization that minimizes maximum stress and maximizes stiffness. *Computers and Structures*, v. 80, p. 2433–2448, 2002.
- SVED, G.; GINOS, Z. Structural optimization under multiple loading. *Int. J. Mech. Science*, v. 10, p. 803–805, 1968.
- TANSKANEN, P. The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, p. 5485–5498, 2002.
- WANG, M.; WANG, X.; GUO, D. A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, p. 217–224, 2003.
- WANG, M. Y.; CHEN, S.; XIA, Q. *CMDL - The Chinese University of Hong Kong*. October 2005. Disponível em: <<http://www2.acae.cuhk.edu.hk/~cmdl/download.htm>>.

- WANG, S. Y. et al. An extended level set method for shape and topology optimization. *Journal of Computational Physics*, v. 221, p. 395–421, 2007.
- WANG, X.; WANG, M. Y.; GUO, D. Structural shape and topology optimization in a level-set-based framework of region representation. *Struct Multidisc Optim*, v. 27, p. 1–19, 2004.
- WANG, X. W. M. Pde-driven level sets, shape sensitivity and curvature flow for structural topology optimization. *Tech Science Press*, v. 6, p. 373–395, 2004.
- XIA, Q.; SHI, T.; WANG, M. Y. A level set based method for topology optimization of continuum structures with stress constraint. In: *6th China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems*. Kyoto, Japan: Japan Society of Mechanical Engineers and International Society for Structural and Multidisciplinary Optimization, 2010.
- XIA, Q. et al. Semi-lagrange method for level-set-based structural topology and shape optimization. *Struct Multidisc Optim*, v. 31, p. 419–429, 2006.
- XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & Structures*, v. 49(5), p. 885–896, 1993.

APÊNDICE A – DERIVADA GÂTEAUX E FRÉCHET DE UM FUNCIONAL

Neste apêndice são apresentados dois dos mais importantes conceitos utilizados ao longo do texto, quais sejam: derivada Gâteaux e Fréchet de um funcional. Portanto, seja U um espaço de Banach (espaço vetorial normado) e \mathcal{F} um funcional tal que

$$\mathcal{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{R}, \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathcal{U} \subset U$ é o conjunto das funções admissíveis (conjunto de busca de soluções) e definindo $\mathcal{V} \subset U$ como o espaço das variações admissíveis, então:

Definição (Derivada Gâteaux): *Se o funcional \mathcal{F} admite a expansão*

$$\mathcal{F}(u+t\eta) = \mathcal{F}(u) + t\delta\mathcal{F}(u; \eta) + \vartheta(t), \quad (\text{A.2})$$

com $t \in \mathfrak{R}^+$, então o termo

$$\delta\mathcal{F}(u; \eta) \quad (\text{A.3})$$

é denominado derivada Gâteaux de \mathcal{F} avaliada em $u \in U$ na direção $\eta \in \mathcal{V}$. Se este termo existe para todo $\eta \in \mathcal{V}$, então \mathcal{F} é dito Gâteaux diferenciável.

Observação: *Se $\mathcal{F}(u)$ está definido e se $\mathcal{F}(u+t\eta)$ está definido para todo $t > 0$ suficientemente pequeno, então*

$$\delta\mathcal{F}(u; \eta) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}(u+t\eta) \right|_{t=0}. \quad (\text{A.4})$$

Definição (Derivada Fréchet): *Se o funcional \mathcal{F} admite a expansão*

$$\mathcal{F}(u+\eta) = \mathcal{F}(u) + \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}(u), \eta \right\rangle + h(u, \eta), \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}(u), \eta \right\rangle \quad (\text{A.6})$$

é linear e contínuo em relação a η e $h(u, \eta)$ é tal que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{|h(u, \eta)|}{\|\eta\|_U} = 0, \quad (\text{A.7})$$

então o termo dado pela Eq. (A.6) é denominado derivada Fréchet de \mathcal{F} avaliada em u na direção $\eta \in \mathcal{V}$ e \mathcal{F} é dito Fréchet diferenciável.

Proposição: Se $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathfrak{R}$ é Fréchet diferenciável em $u \in U$, então \mathcal{F} é Gâteaux diferenciável e

$$\delta \mathcal{F}(u; \eta) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}(u), \eta \right\rangle. \quad (\text{A.8})$$

Prova. Sejam $\eta \in \mathcal{V}$ e $t \in \mathfrak{R}^+$ suficientemente pequeno tal que $(u + t\eta) \in \mathcal{U}$. Como \mathcal{F} é Fréchet diferenciável, então

$$\mathcal{F}(u + t\eta) = \mathcal{F}(u) + \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}(u), t\eta \right\rangle + h(u, t\eta), \quad (\text{A.9})$$

logo, da linearidade da derivada Fréchet com relação a η , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}(u + t\eta) - \mathcal{F}(u)}{t} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}(u), \eta \right\rangle + \frac{1}{t} h(u, t\eta) \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}(u), \eta \right\rangle + \frac{1}{t} \|\eta\|_U \frac{h(u, t\eta)}{\|\eta\|_U} \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}(u), \eta \right\rangle + \|\eta\|_U \frac{h(u, t\eta)}{\|t\eta\|_U}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

e tomando o limite com $t \rightarrow 0$ obtém-se o resultado desejado ■

Corolário: Se $\mathcal{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{R}$ é Fréchet diferenciável em $u \in U$, então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}(u), \eta \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}(u + t\eta) \Big|_{t=0}. \quad (\text{A.11})$$

Sendo assim, o problema inicialmente bastante complexo de obtenção da derivada Fréchet de um funcional, se reduz ao cálculo de uma derivada ordinária em relação a um único parâmetro de controle t .

APÊNDICE B – RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE HAMILTON-JACOBI

A equação de Hamilton-Jacobi é resolvida através de técnicas *upwind* em diferenças finitas e a metodologia apresentada a seguir somente é válida para malhas estruturadas (em *grid* cartesiano). Os procedimentos para tratar problemas com outros tipos de malhas, como malhas triangulares não estruturadas, podem ser encontrados em Sethian (1999).

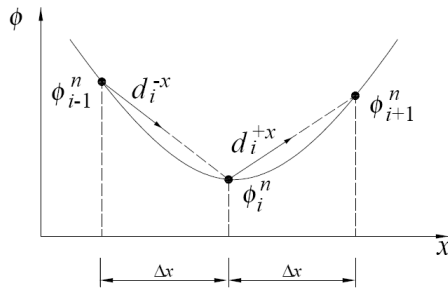


Figura B.1: Derivadas parciais em 1D, para resolução da equação de Hamilton-Jacobi.

Conforme Sethian (1999), adotando-se a técnica *upwind* de primeira ordem em 1D para resolução da equação *level set* (Eq. 2.19), que é uma equação do tipo Hamilton-Jacobi, tem-se para o i -ésimo nó

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \Delta t \left[\max((v_n)_i, 0) \nabla_i^+ + \min((v_n)_i, 0) \nabla_i^- \right], \quad (\text{B.1})$$

onde

$$\nabla_i^+ = \left[\max(d_i^{-x}, 0)^2 + \min(d_i^{+x}, 0)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla_i^- = \left[\max(d_i^{+x}, 0)^2 + \min(d_i^{-x}, 0)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.3})$$

As derivadas do funcional em relação ao eixo x são dadas por

$$d_i^{+x} = \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\Delta x}, \quad (\text{B.4a})$$

$$d_i^{-x} = \frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{\Delta x}, \quad (\text{B.4b})$$

onde Δx corresponde à distância, em relação ao eixo x , entre os pontos do *grid* em consideração, conforme é apresentado na Fig. (B.1).

Já em 3D, para um *grid* cartesiano, conforme a Fig. (B.2), tem-se que as curvas são atualizadas através de

$$\phi_{i,j,k}^{n+1} = \phi_{i,j,k}^n - \Delta t \left[\max \left((v_n)_{i,j,k}, 0 \right) \nabla_{i,j,k}^+ + \min \left((v_n)_{i,j,k}, 0 \right) \nabla_{i,j,k}^- \right], \quad (\text{B.5})$$

onde

$$\begin{aligned} \nabla_{i,j,k}^+ = & \left[\max \left(d_{i,j,k}^{-x}, 0 \right)^2 + \min \left(d_{i,j,k}^{+x}, 0 \right)^2 + \max \left(d_{i,j,k}^{-y}, 0 \right)^2 \right. \\ & \left. + \min \left(d_{i,j,k}^{+y}, 0 \right)^2 + \max \left(d_{i,j,k}^{-z}, 0 \right)^2 + \min \left(d_{i,j,k}^{+z}, 0 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{i,j,k}^- = & \left[\max \left(d_{i,j,k}^{+x}, 0 \right)^2 + \min \left(d_{i,j,k}^{-x}, 0 \right)^2 + \max \left(d_{i,j,k}^{+y}, 0 \right)^2 \right. \\ & \left. + \min \left(d_{i,j,k}^{-y}, 0 \right)^2 + \max \left(d_{i,j,k}^{+z}, 0 \right)^2 + \min \left(d_{i,j,k}^{-z}, 0 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

As derivadas $d_{i,j,k}^{+y}$, $d_{i,j,k}^{-y}$, $d_{i,j,k}^{+z}$ e $d_{i,j,k}^{-z}$ são obtidas a partir das Eqs. (B.4a) e (B.4b).

Para o caso de *grid* em 2D, pode-se utilizar as mesmas equações apresentadas para o caso 3D, excluindo-se o sub-índice k e tomando-se

$$d_{i,j,k}^{+z} = d_{i,j,k}^{-z} = 0. \quad (\text{B.8})$$

Constata-se que sobre a fronteira externa do domínio, não há como realizar a atualização de suas curvas de nível de acordo com o procedimento apresentado. Desta forma, sugere-se realizar a projeção das curvas de nível nestes pontos ou considerar pontos externos à fronteira para permitir o cálculo das derivadas de pontos situados na fronteira.

O parâmetro Δt da equação de evolução se mantém fixo durante o processo de otimização e deve ser limitado para garantir a estabilidade dos

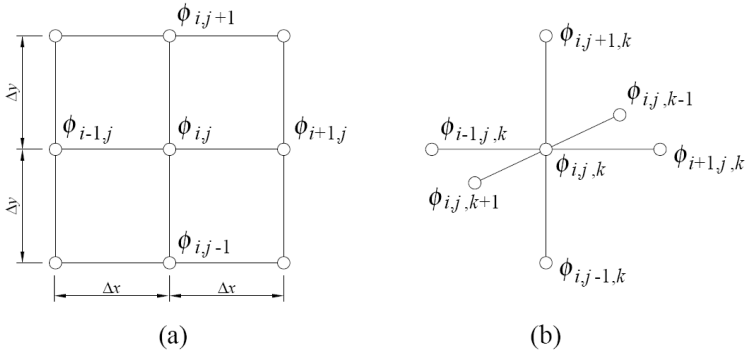


Figura B.2: Atualização das curvas de nível para resolução da equação de Hamilton-Jacobi para problemas (a) 2D e (b) 3D.

esquemas *upwind*. Para que esta condição seja atendida, utiliza-se a condição de Courant-Friedrich-Lewy (CFL), onde a fronteira não pode mover-se mais do que uma célula a cada passo de tempo Δt_{CFL} , isto é,

$$\Delta t_{CFL} \max |(v_n)_{i,j,k}| \leq \Delta_{\min} = \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z),$$

onde Δ_{\min} corresponde à largura mínima do *grid*, e Δx , Δy e Δz representam as dimensões do *grid* em relação aos eixos cartesianos (OSHER; SETHIAN, 1988). Entretanto, o tempo de integração Δt não é limitado para um único passo de tempo Δt_{CFL} na iteração, mas geralmente n passos, ou seja, $\Delta t = n\Delta t_{CFL}$.

APÊNDICE C – CRITÉRIOS DE FALHA MATERIAL

Um critério de falha material significa, neste contexto, uma função f capaz de identificar o quanto um ponto material submetido a um estado de tensão quase estático suporta sem falhar. Esta falha pode significar o escoamento para um material dúctil ou a iniciação de trincas em um material frágil. Conforme Hill (1950), o critério de falha material pode ser escrito, para material isotrópico, em função das três componentes das tensões principais (invariantes) e dos parâmetros do material (módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, etc.), ou seja,

$$f(I_1, J_2, J_3, k_1, k_2, \dots) = 0, \quad (\text{C.1})$$

onde I_1 , J_2 e J_3 correspondem, respectivamente, ao primeiro invariante do tensor de tensões de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$, ao segundo e terceiro invariantes do tensor de tensões desviadoras $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ e os parâmetros k_1, k_2, \dots , são parâmetros constantes relacionados às propriedades dos materiais. É considerado que a falha não ocorre se $f \leq 0$. Neste caso, os invariantes são dados por

$$I_1 = \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})] = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \quad (\text{C.2})$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \quad (\text{C.3})$$

$$J_3 = \frac{1}{3} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}), \quad (\text{C.4})$$

onde

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})] \mathbf{I} = \left(\mathbf{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}). \quad (\text{C.5})$$

Aqui, \mathbf{I} e $\mathbf{\Pi}$ representam, respectivamente, o tensor identidade de segunda e quarta ordem, e \mathbf{P} é matriz que relaciona o tensor desviador com o tensor tensão.

C.1 Critérios de escoamento

O critério de escoamento (ou critério de falha material) determina o nível de tensão sob o qual a deformação plástica (para material dúctil) ou a fratura frágil (para material frágil) tem início. Define, portanto, o limite elástico do material sob estado geral de tensões e está associado tanto ao tipo

de falha do material, como ao valor numérico em que se inicia a falha. Este valor é avaliado localmente (em cada ponto). Pode ser visto, também, como o mapeamento de um estado de tensões multiaxial em um estado uniaxial e a comparação deste com um valor de tensão característico do material, para o qual é iniciada a falha do mesmo. A representação geométrica de um determinado critério pode ser realizada pela definição de uma superfície no espaço de tensões de Haigh-Westergaard, obtida pelo lugar geométrico de todos os pontos tensão onde ocorre a falha material. Neste caso, tem-se a superfície de falha no espaço de tensões.

Os critérios de escoamento dos materiais são definidos a partir da Eq. (C.1). Existem na literatura uma série de critérios para diversos tipos de material, porém serão apresentados os mais comuns para materiais dúteis: os critérios de Tresca e de von Mises.

C.1.1 Critério de escoamento de Tresca

Um dos primeiros critérios de escoamento para um estado de tensões multiaxial foi proposto em 1864 por Tresca, e estabelece que o escoamento devido a plastificação material em um dado ponto ocorre quando a *máxima tensão cisalhante* (τ_{\max}) atinge um determinado valor k , característico do material correspondente à metade da tensão de escoamento em um teste de tração uniaxial (σ_{adm}).

Considerando as tensões principais no ponto material ordenadas, tais que $\sigma_{\max} = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 = \sigma_{\min}$, pode-se escrever o critério de falha da máxima tensão cisalhante como

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2} \sigma_{adm} \quad (C.6)$$

A forma final do critério de escoamento de Tresca (f_{Tr}) em termos dos invariantes de tensões é dada por

$$f_{Tr} = \frac{2\sqrt{J_2} \cos \theta}{\sigma_{adm}} - 1, \quad (C.7)$$

onde

$$\theta = \frac{1}{3} \text{sen}^{-1} \left(\frac{-3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}} \right), \quad (C.8)$$

corresponde ao parâmetro geométrico relativo ao espaço de tensões de Haigh-Westergaard. Define-se que o material não falha se $f_{Tr} \leq 0$.

C.1.2 Critério de escoamento de von Mises

Postulado inicialmente em 1913 por von Mises, é também conhecido como critério da *máxima energia de distorção*. O critério estabelece que o material inicia o escoamento plástico quando o valor da tensão octaédrica (τ_{oct}) no ponto atingir um valor crítico k , característico do material. A tensão cisalhante octaédrica pode ser obtida pela expressão

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2}. \quad (C.9)$$

Considerando um ensaio de tração uniaxial, pode-se equacionar o critério de escoamento de von Mises através da função de falha f_{vM} como

$$f_{vM} = \frac{\sigma_{vM}}{\sigma_{adm}} - 1, \quad (C.10)$$

onde

$$\sigma_{vM} = \sqrt{3J_2}, \quad (C.11)$$

corresponde à tensão equivalente ou efetiva de von Mises e σ_{adm} representa o valor da tensão admissível para o material. Note-se que o material não está sofrendo falha se $f_{vM} \leq 0$. A tensão efetiva de von Mises também pode ser escrita em função das tensões, ou seja,

$$\begin{aligned} \sigma_{vM}^2 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right] \\ + 3 (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2). \end{aligned} \quad (C.12)$$

Deve-se observar que, assim como o critério de Tresca, o critério de von Mises também é independente do primeiro invariante do tensor de tensões de Cauchy I_1 , associado à pressão hidrostática. Estabelecem, portanto, a falha do material somente em termos da distorção do elemento material. Estes critérios são adequados a materiais dúcteis como alumínio, cobre, ligas de aço, etc.

C.2 Derivada dos invariantes em relação ao campo de deslocamentos

Neste trabalho, o critério de falha material é adotado como uma das restrições impostas ao problema de otimização e faz-se necessária a análise de sensibilidade das funções de falha. Como comentado anteriormente, pode-

se escrever o critério de falha material em função dos invariantes de tensões. Assim, derivando a função de falha em relação ao campo de deslocamentos, usando o conceito de derivada Fréchet obtém-se, pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{\varepsilon}(\mathbf{u}, \phi)}{\partial \mathbf{u}} [\delta \mathbf{u}] &= \frac{\partial h_{\varepsilon}(\mathbf{u}, \phi)}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{u}} [\delta \mathbf{u}] + \frac{\partial h_{\varepsilon}(\mathbf{u}, \phi)}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{u}} [\delta \mathbf{u}] \\ &\quad + \frac{\partial h_{\varepsilon}(\mathbf{u}, \phi)}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \mathbf{u}} [\delta \mathbf{u}]. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

que corresponde à Eq. (2.53). A derivada do primeiro invariante em relação a \mathbf{u} é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{u}} [\delta \mathbf{u}] &= \left\langle \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right\rangle = \left. \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} + t \delta \mathbf{u})] \right|_{t=0} \\ &= \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\delta \mathbf{u}) = \mathbf{I} \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) = \mathbf{C} \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Já o termo relativo à derivada do segundo invariante é calculada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{u}} [\delta \mathbf{u}] &= \left\langle \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right\rangle = \left. \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \mathbf{S}(\mathbf{u} + t \delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u} + t \delta \mathbf{u}) \right] \right|_{t=0} \\ &= \mathbf{S}(\mathbf{u} + t \delta \mathbf{u}) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{S}(\mathbf{u} + t \delta \mathbf{u})] \right|_{t=0} = \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{P} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{P}^T \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) = \mathbf{C} \mathbf{P}^T \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Finalmente, a derivada associada ao terceiro invariante é dada como

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_3}{\partial \mathbf{u}} [\delta \mathbf{u}] &= \left\langle \frac{\partial J_3}{\partial \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right\rangle = \left. \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{3} \mathbf{S}(\mathbf{u} + t \delta \mathbf{u}) \mathbf{S}(\mathbf{u} + t \delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u} + t \delta \mathbf{u}) \right] \right|_{t=0} \\ &= \mathbf{S}(\mathbf{u} + t \delta \mathbf{u}) \mathbf{S}(\mathbf{u} + t \delta \mathbf{u}) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{S}(\mathbf{u} + t \delta \mathbf{u})] \right|_{t=0} \\ &= \mathbf{S}(\mathbf{u}) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{P} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) = \mathbf{C} \mathbf{P}^T \mathbf{S}(\mathbf{u}) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

C.3 Derivada da função de falha em relação aos invariantes de tensões

Esta seção tem por objetivo adotar uma função de falha f e calcular as suas derivadas em relação aos invariantes que surgem na Eq. (C.13). Devido à simplicidade e aplicabilidade a uma ampla classe de materiais metálicos, utiliza-se o critério de falha de von Mises. Entretanto, este tra-

balho não está restrito somente a este critério de falha, ou seja, é apresentada uma formulação geral para o problema de otimização considerando qualquer critério de falha material. Assim, a função de falha $g(\mathbf{u})$ é dada por

$$g(\mathbf{u}) = f_{vM} = \frac{\sqrt{3J_2}}{\sigma_{adm}} - 1, \quad (\text{C.17})$$

e a função de falha usada na formulação do problema com relaxação como

$$g_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) \equiv H(\phi)f_{vM} - \varepsilon(1 - H(\phi)). \quad (\text{C.18})$$

Desta forma, a partir da Eq. (2.40) podemos escrever

$$h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) = \max \left\{ H(\phi)f_{vM} - \varepsilon(1 - H(\phi)); -\frac{\alpha}{c} \right\}. \quad (\text{C.19})$$

Para resolver a equação acima, supõe-se dois casos:

Caso 1. Se

$$[H(\phi)f_{vM} - \varepsilon(1 - H(\phi))] \geq -\frac{\alpha}{c},$$

então

$$h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) = H(\phi)f_{vM} - \varepsilon(1 - H(\phi)). \quad (\text{C.20})$$

Substituindo a Eq. (C.17) em (C.20) e derivando em relação aos invariantes, obtém-se

$$\frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial I_1} = \frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial J_3} = 0, \quad (\text{C.21})$$

$$\frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial J_2} = \frac{3H(\phi)}{2\sigma_{adm}\sqrt{3J_2}} = \frac{3}{2} \frac{H(\phi)}{\sigma_{adm}\sigma_{vM}} \quad (\text{C.22})$$

Desta forma, o tensor $\mathbf{A}(\mathbf{u}, \phi)$ dado pela Eq. (2.59) fica

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \phi) = \frac{3}{2} \frac{H(\phi)}{\sigma_{adm}\sigma_{vM}} \mathbf{P}^T \mathbf{S}(\mathbf{u}). \quad (\text{C.23})$$

Caso 2. Se

$$[H(\phi)f_{vM} - \varepsilon(1 - H(\phi))] < -\frac{\alpha}{c},$$

então

$$h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi) = -\frac{\alpha}{c}. \quad (\text{C.24})$$

Derivando em relação aos invariantes, obtém-se

$$\frac{\partial h_{\varepsilon}(\mathbf{u}, \phi)}{\partial I_1} = \frac{\partial h_{\varepsilon}(\mathbf{u}, \phi)}{\partial J_2} = \frac{\partial h_{\varepsilon}(\mathbf{u}, \phi)}{\partial J_3} = 0, \quad (\text{C.25})$$

e o tensor $\mathbf{A}(\mathbf{u}, \phi)$ é identicamente zero.

APÊNDICE D – ESTADO PLANO DE TENSÕES (EPT)

Os estados planos de tensões são típicos de placas delgadas submetidas a cargas contidas no plano da superfície média da placa. Considera-se também, nestes modelos, que o carregamento não varia ao longo da espessura da placa. A revisão apresentada a seguir baseia-se em Simo e Hughes (1998).

Denota-se \mathbb{Q} como sendo o espaço vetorial dos tensores simétricos de segunda ordem. Esta condição de simetria implica que $\dim[\mathbb{Q}] = 6$. O subespaço plano de tensões, denotado por $\mathbb{Q}_p \subset \mathbb{Q}$, é obtido de \mathbb{Q} incluindo três restrições:

$$\mathbb{Q}_p := \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{Q} \mid \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} \equiv 0\}. \quad (\text{D.1})$$

Portanto, o tensor de tensões possui componentes somente no plano e o tensor tensão num ponto genérico tem a forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

Similarmente, o subespaço dos tensores de segunda ordem simétricos desviadores, denotado por $\mathbb{Q}_D \subset \mathbb{Q}$, é definido incluindo três restrições em \mathbb{Q} :

$$\mathbb{Q}_D := \{\mathbf{S} \in \mathbb{Q} \mid S_{13} = S_{23} = 0, \text{tr}[\mathbf{S}] := S_{kk} \equiv 0\}. \quad (\text{D.3})$$

Introduzindo a notação vetorial, é possível expressar $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{Q}_p$ e $\mathbf{S} \in \mathbb{Q}_D$ como

$$\boldsymbol{\sigma} := [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}]^T, \quad (\text{D.4})$$

$$\mathbf{S} := [S_{11} \quad S_{22} \quad S_{12} \quad S_{33}]^T. \quad (\text{D.5})$$

Define-se o mapeamento $\mathbf{P}_{EPT} : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_D$ onde $\dim \mathbf{P}_{EPT} = [4 \times 3]$, relacionando o tensor de tensão *restrito* $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{Q}_p$ e seu desviador $\mathbf{S} = \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}] \in \mathbb{Q}_D$ através da seguinte notação matricial

$$\mathbf{S} = \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}] = \mathbf{P}_{EPT} \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{D.6})$$

onde

$$\mathbf{P}_{EPT} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.7})$$

Levando em conta que $\text{tr}[\mathbf{S}] = 0$, a parcela S_{33} pode ser escrita como

$$S_{33} = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (\text{D.8})$$

Para um sólido elástico linear isotrópico, as deformações em função das tensões se escrevem

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \mathbf{I}. \quad (\text{D.9})$$

A partir desta equação e usando os conceitos do EPT, tem-se que o estado de deformações não é plano. Existe a componente ε_{33} devido ao efeito de Poisson. Assim, a representação das componentes de deformação fica dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.10})$$

onde a componente ε_{33} pode ser expressa em função das deformações no plano, ou seja,

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\nu}{(1-\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}). \quad (\text{D.11})$$

A partir de (D.9) e EPT, é possível escrever as relações em forma matricial:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_{EPT} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (\text{D.12})$$

onde \mathbf{C}_{EPT} é a matriz de elasticidade para o estado plano de tensões.

D.1 Redução do problema 3D para o problema 2D

Esta seção tem por objetivo mostrar o formato do tensor \mathbf{A} (Eq. 2.59) para as condições de EPT apresentados acima, em notação vetorial. Vale a

pena ressaltar que toda a abordagem discutida é geral para um problema tri-dimensional. Sua redução para o problema de EPT pode ser feita diretamente reduzindo os índices das matrizes.

Seja o funcional dado pela Eq. (2.58) associado à derivada da função de falha $h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)$ em relação ao campo de deslocamentos na direção $\delta\mathbf{u}$, no EPT:

$$\frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial \mathbf{u}} [\delta\mathbf{u}] = \mathbf{C}_{EPT} \mathbf{A}_{EPT} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) \quad (\text{D.13})$$

Considerando o critério de falha de von Mises (ver Apêndice C), o tensor de segunda ordem \mathbf{A} (Eq. 2.59) para o EPT pode ser escrito como,

$$\mathbf{A}_{EPT} = \frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial J_2} \mathbf{P}_{EPT}^T \mathbf{S} \quad (\text{D.14})$$

ou na forma matricial,

$$\mathbf{A}_{EPT} = \frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial J_2} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{33} \end{Bmatrix}. \quad (\text{D.15})$$

Operando matricialmente e usando (D.8), encontra-se

$$\mathbf{A}_{EPT} = \frac{\partial h_\varepsilon(\mathbf{u}, \phi)}{\partial J_2} \mathbf{S}^*, \quad (\text{D.16})$$

onde

$$\mathbf{S}^* = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix}, \quad (\text{D.17})$$

representa o tensor desviador \mathbf{S} considerando a parcela S_{33} . Note que a matriz \mathbf{C}_{EPT} tem dimensão $[3 \times 3]$ e o tensor \mathbf{A}_{EPT} é usado na notação vetorial com dimensão $[3 \times 1]$, permitindo a operação destes termos para obter a derivada da expressão (D.13).

APÊNDICE E – ELEMENTOS FINITOS EM EPT

Todos os exemplos numéricos apresentados neste trabalho são modelos que utilizam as definições do Estado Plano de Tensões (EPT). Este apêndice tem por objetivo apresentar o tipo de elemento usado para a análise, bem como a matriz de rigidez e a força adjunta elementares para o caso específico do EPT.

E.1 Tipo de elemento e matriz de deformação

Utiliza-se um elemento quadrilátero bilinear (Q4), cujas funções de interpolação estão dadas pelas equações

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \\ \psi_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \\ \psi_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \\ \psi_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta).\end{aligned}$$

A Fig. (E.1) mostra o mapeamento deste elemento no domínio real xy para o domínio do elemento isoparamétrico.

São utilizadas malhas estruturadas, ou seja, malhas ortogonais ou cartesianas onde todos elementos possuem o mesmo tamanho e a posição dos nós obedece ao mesmo sistema coordenado. Isto permite calcular a matriz Jacobiana \mathbf{J} , dada por

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad (\text{E.1})$$

logo, sua inversa é determinada como

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/a & 0 \\ 0 & 2/b \end{bmatrix}. \quad (\text{E.2})$$

Portanto, a matriz de deformação \mathbf{B} é a mesma para todos os elementos e dada

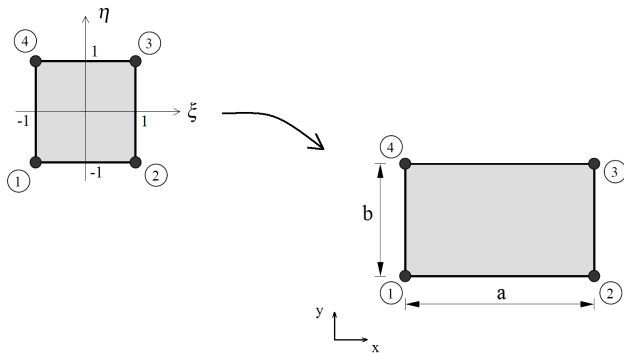


Figura E.1: Mapeamento do elemento finito de quatro nós no domínio real xy para o espaço $\xi\eta$ do elemento finito padrão.

por

$${}^e\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2a}(\eta - 1) & 0 & \frac{1}{2b}(\xi - 1) \\ 0 & \frac{1}{2b}(\xi - 1) & \frac{1}{2a}(\eta - 1) \\ \frac{1}{2a}(1 - \eta) & 0 & -\frac{1}{2b}(\xi + 1) \\ 0 & -\frac{1}{2b}(\xi + 1) & \frac{1}{2a}(1 - \eta) \\ \frac{1}{2a}(\eta + 1) & 0 & \frac{1}{2b}(\xi + 1) \\ 0 & \frac{1}{2b}(\xi + 1) & \frac{1}{2a}(\eta + 1) \\ -\frac{1}{2a}(\eta + 1) & 0 & \frac{1}{2b}(1 - \xi) \\ 0 & \frac{1}{2b}(1 - \xi) & -\frac{1}{2a}(\eta + 1) \end{bmatrix}^T. \quad (\text{E.3})$$

E.2 Matriz de rigidez elementar

A matriz de rigidez do elemento pode ser integrada no domínio do elemento finito padrão. Assim, com as devidas mudanças de variáveis, obtém-se

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{H}(\phi) {}^e\mathbf{B}^T \mathbf{C}_{EPT} {}^e\mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta. \quad (\text{E.4})$$

Considerando que $\hat{H}(\phi)$ é constante e substituindo a Eq. (E.3) e a matriz de elasticidade para o estado plano de tensões \mathbf{C}_{EPT} (Eq. D.12) na Eq. (E.4),

resolvendo-se analiticamente a integral, obtém-se

$$\mathbf{K}^e = H(\phi) \frac{E}{(1 - \nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} k(1) & k(2) & k(3) & k(4) & k(5) & k(6) & k(7) & k(8) \\ k(2) & k(9) & k(8) & k(10) & k(6) & k(11) & k(4) & k(12) \\ k(3) & k(8) & k(1) & k(6) & k(7) & k(4) & k(5) & k(2) \\ k(4) & k(10) & k(6) & k(9) & k(8) & k(12) & k(2) & k(11) \\ k(5) & k(6) & k(7) & k(8) & k(1) & k(2) & k(3) & k(4) \\ k(6) & k(11) & k(4) & k(12) & k(2) & k(9) & k(8) & k(10) \\ k(7) & k(4) & k(5) & k(2) & k(3) & k(8) & k(1) & k(6) \\ k(8) & k(12) & k(2) & k(11) & k(4) & k(10) & k(6) & k(9) \end{bmatrix}, \quad (\text{E.5})$$

onde os termos da matriz são dados por

$$\{k\} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6ab} (va^2 - 2b^2 - a^2) \\ \frac{1}{8} (v + 1) \\ -\frac{1}{12ab} (va^2 + 4b^2 - a^2) \\ \frac{1}{8} (3v - 1) \\ \frac{1}{12ab} (va^2 - 2b^2 - a^2) \\ -\frac{1}{8} (v + 1) \\ \frac{1}{6ab} (va^2 + b^2 - a^2) \\ \frac{1}{8} (-3v + 1) \\ -\frac{1}{6ab} (vb^2 - 2a^2 - b^2) \\ \frac{1}{6ab} (vb^2 + a^2 - b^2) \\ \frac{1}{12ab} (vb^2 - 2a^2 - b^2) \\ -\frac{1}{12ab} (vb^2 + 4a^2 - b^2) \end{bmatrix}. \quad (\text{E.6})$$

Convém frisar que esta matriz de rigidez encontrada é válida para uma malha ortogonal com elementos do mesmo tamanho e para o EPT. Entretanto, também é válida para malhas onde os elementos tenham $a \neq b$. Em Bendsøe e Sigmund (2003) é feito o procedimento análogo, porém trata os elementos como sendo quadrados ($a = b$).

E.3 Força adjunta elementar

O vetor força adjunta do elemento, dado pela Eq. (3.16), é reescrito para o EPT no domínio do elemento finito padrão como

$$\mathbf{F}_a^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \overset{e}{H}(\phi) (\boldsymbol{\alpha}^e + ch_{\varepsilon}^e) \overset{e}{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_{EPT} \mathbf{A}_{EPT} \det \mathbf{J} d\xi d\eta, \quad (\text{E.7})$$

onde \mathbf{A}_{EPT} é o tensor modificado obtido para EPT dado pela Eq. (D.16). Com base nas condições apresentadas na Seção (3.2) do Capítulo 3, pode-se reescrever

$$\mathbf{F}_a^e = \overset{e}{H}(\phi) [\boldsymbol{\alpha}^e + ch_{\varepsilon}^e] \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \overset{e}{\mathbf{B}}^T \det \mathbf{J} d\xi d\eta \mathbf{C}_{EPT} \mathbf{A}_{EPT}. \quad (\text{E.8})$$

Resolvendo a integral de forma analítica, finalmente obtém-se o vetor força adjunta elementar como

$$\mathbf{F}_a^e = \overset{e}{H}(\phi) (\boldsymbol{\alpha}^e + ch_{\varepsilon}^e) \mathbf{X} \mathbf{C}_{EPT} \mathbf{A}_{EPT}, \quad (\text{E.9})$$

onde

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -b & 0 & -a \\ 0 & -a & -b \\ b & 0 & -a \\ 0 & -a & b \\ b & 0 & a \\ 0 & a & b \\ -b & 0 & a \\ 0 & a & -b \end{bmatrix} \quad (\text{E.10})$$

é uma matriz relacionada com a geometria do elemento.

APÊNDICE F – OPERAÇÕES BÁSICAS UTILIZADAS PARA O MÉTODO LEVEL SET

F.1 Relação entre integrais de fronteira e domínio

Tomando a integral de um operador $p(\mathbf{x}, t) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ definido sobre a fronteira Γ , e aplicando o Teorema da Divergência e a expressão (2.21), pode-se escrever que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} p(\mathbf{x}, t) d\Gamma &= \int_{\Gamma} p(\mathbf{x}, t) \overbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}^1 d\Gamma = \int_{\Gamma} p(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} (p(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}) d\Omega \\ &= \int_D \operatorname{div} (p(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}) H(\phi) dD. \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

Fazendo uso das operações básicas de derivação e o fato que $\mathbf{n} = -\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}$, a expressão acima pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} p(\mathbf{x}, t) d\Gamma &= \int_D \nabla(H(\phi)) \cdot \left(p(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \right) dD \\ &\quad - \int_D \nabla \cdot \left(H(\phi) p(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \right) dD. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Usando a relação $\nabla(H(\phi)) = \delta(\phi)\nabla\phi$ e, novamente utilizando o Teorema da Divergência, onde ∂D corresponde à fronteira do domínio D , obtém-se

$$\int_{\Gamma} p(\mathbf{x}, t) d\Gamma = \int_D p(\mathbf{x}, t) \delta(\phi) \|\nabla\phi\| dD - \int_{\partial D} p(\mathbf{x}, t) \frac{H(\phi)}{\|\nabla\phi\|} \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} d\partial D.$$

Impondo a condição que a função ϕ não varia na direção normal \mathbf{n} em ∂D , isto é,

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial D} = 0, \quad (\text{F.3})$$

então,

$$\int_{\Gamma} p(\mathbf{x}, t) d\Gamma = \int_D p(\mathbf{x}, t) \delta(\phi) \|\nabla\phi\| dD. \quad (\text{F.4})$$

F.2 Variação da fronteira *level set*

Denominando

$$\mathcal{A}(\phi) = \int_D p(\mathbf{x}, t) \delta(\phi) \|\nabla\phi\| dD, \tag{F.5}$$

e tomando a variação de $\mathcal{A}(\phi)$ em relação a ϕ na direção $\delta\phi$, obtém-se¹

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \phi} [\delta\phi] &= \delta \mathcal{A}(\phi) = \int_D p(\mathbf{x}, t) \{ \delta [\delta(\phi)] \|\nabla\phi\| + \delta(\phi) \delta \|\nabla\phi\| \} dD \\ &= \int_D p(\mathbf{x}, t) \left\{ \delta'(\phi) \|\nabla\phi\| \delta\phi + \delta(\phi) \frac{\nabla\phi \cdot \nabla(\delta\phi)}{\|\nabla\phi\|} \right\} dD \\ &= \int_D p(\mathbf{x}, t) \left\{ \nabla(\delta(\phi)) \cdot \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \delta\phi + \delta(\phi) \frac{\nabla\phi \cdot \nabla(\delta\phi)}{\|\nabla\phi\|} \right\} dD, \end{aligned} \tag{F.6}$$

onde $\delta'(\phi)$ é a primeira derivada da função delta de Dirac e utilizou-se a relação $\nabla\delta(\phi) = \delta'(\phi)\nabla\phi$. Pode-se simplificar $\delta \mathcal{A}(\phi)$ usando as operações de derivação fazendo as seguintes substituições:

$$\nabla(\delta(\phi)) \cdot \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} = \nabla \cdot \left(\delta(\phi) \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \right) - \delta(\phi) \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \right), \tag{F.7}$$

$$\delta(\phi) \frac{\nabla\phi \cdot \nabla(\delta\phi)}{\|\nabla\phi\|} = \nabla \cdot \left(\delta\phi \delta(\phi) \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \right) - \delta\phi \nabla \cdot \left(\delta(\phi) \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \right). \tag{F.8}$$

¹Note-se que $\delta\phi$ é a direção de modificação da função ϕ e $\delta(\phi)$ é a função delta de Dirac.

Deste modo, (F.6) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{A}(\phi) &= - \int_D p(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) \delta(\phi) \delta \phi dD \\
&\quad + \int_D p(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \left(\delta \phi \delta(\phi) \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) dD \\
&= - \int_D p(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) \delta(\phi) \delta \phi dD \\
&\quad + \int_D \left[\nabla \cdot \left(p(\mathbf{x}, t) \delta \phi \delta(\phi) \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) \right. \\
&\quad \left. - \nabla(p(\mathbf{x}, t)) \cdot \left(\delta \phi \delta(\phi) \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) \right] dD. \tag{F.9}
\end{aligned}$$

Novamente fazendo uso do Teorema da Divergência, escreve-se

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{A}(\phi) &= - \int_D \left[p(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) + \nabla(p(\mathbf{x}, t)) \cdot \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right] \delta(\phi) \delta \phi dD \\
&\quad + \int_{\partial D} p(\mathbf{x}, t) \frac{\delta(\phi)}{\|\nabla \phi\|} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \delta \phi d\partial D. \tag{F.10}
\end{aligned}$$

Finalmente, admitindo-se a condição de (F.3) e usando regra de derivação, conclui-se que

$$\delta \mathcal{A}(\phi) = - \int_D \nabla \cdot \left(p(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) \delta(\phi) \delta \phi dD = \int_D \operatorname{div}(p(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}) \delta(\phi) \delta \phi dD. \tag{F.11}$$