Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Álgebras de von Neumann - Fatores

João Nilton Garcia
Orientador: Prof. Dr. Ruy Exel Filho

Florianópolis
Janeiro 2011

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Álgebras de von Neumann - Fatores

Dissertação apresentada ao Curso de Pós - Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

João Nilton Garcia

Florianópolis
Janeiro de 2011

Álgebras de von Neumann - Fatores

por

João Nilton Garcia

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre"
Área de Concentração em Análise e aprovada em sua forma final
pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica.

Prof. Dr. Ruy Exel Filho
Coordenador da Pós-Graduação em Matemática

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Ruy Exel Filho
Orientador – UFSC

Prof. Dr. Alcides Buss (UFSC)

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro (UFSC)

Prof. Dr. Michael Dokuchaev (Universidade de São Paulo)

Florianópolis, 27 de Janeiro de 2011.

Agradecimentos

No momento que escrevo meus agradecimentos, vem a mente vários nomes que me ajudaram de forma direta e indireta. Não sou religioso, mas acredito em energias que vivem nos empurrando para frente. Então agradeço a essas forças que me ajudaram, pois tive muitos obstáculos para concluir o mestrado.

Devo agradecer aos meus colegas de profissão Fábio Celso de Mattos, José Carlos Zanini e Eleudemar Ferreira Rodrigues, pois eles foram essenciais na minha ingressão e conclusão do mestrado.

Também agradeço aos professores Ruy Charão e Jáuber Cavalcante de Oliveira por me ajudaram em Análise e EDO. Agradeço também ao professsor Fermin por me ajudar a ter uma visão melhor da matemática.

Deixo aqui meu agradecimento para minha colega de mestrado Clarice, pois nos momentos que eu estava esgotado a mesma me dizia para não "*correr do bicho sem antes ver o seu pelo*".

Agradeço muito ao professor Ruy Exel Filho, por ter me aceitado como seu orientando. Sua didática, paciência e precisão nos seus conhecimentos, fazem dele uma referência para o meu futuro. Eu poderia escrever mais sobre esse excelente pesquisador e professor, mas já estaria nos agradecimentos em outras dissertações. Agradeço ainda, por ter me dado a oportunidade de participar dos seminários de Álgebra de Operadores.

Agradeço a minha esposa Andréia Regina Goulart Garcia, pela dose de paciencia ao longo dos anos de graduação e mestrado.

Agradeço ao professor Alcides Buss. Seus comentários, durante minhas apresentações no seminário de Álgebras de Operadores, foram importantes na correção desse trabalho.

Não poderia esquecer da Elisa Borba Amaral, pois me ajudou muito.

Agradeço o apoio financeiro do CAPES.

Resumo

Dada uma álgebra de *von Neumann* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$, dizemos que $\mathcal{M}$ é um *fator* se seu centro é o conjunto $\mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$, sendo $1_{\mathcal{H}}$ o operador identidade sobre $\mathcal{H}$. Quando $\mathcal{M}$ é um *fator*, podemos classificá-lo em tipo I, II ou III. Além disso, o tipo II pode ser dividido em subtipo II_1 e II_∞. O objetivo dessa dissertação é exibir exemplos de *fatores*, bem como exemplos de fatores do tipo I, II_1 e II_∞.

Abstract

Given a *von Neumann* algebra $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$, we say that $\mathcal{M}$ is a *factor* if its center is $\mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$, with $1_{\mathcal{H}}$ being the identity operator on $\mathcal{H}$. When $\mathcal{M}$ is a *factor*, we can classify it as type I, II or III. Furthermore, type II can be divided into subtypes II_1 and II_∞. The goal of this dissertation is to give examples of *factors*, as well as examples of factors of type I, II_1 and II_∞.

Sumário

Introdução

Dado um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, dizemos que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$, onde $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ é o espaço dos operadores limitados sobre $\mathcal{H}$, é uma álgebra de *von Neumann* se $\mathcal{M}$ é uma sub-*-álgebra fechada na topologia operador-fraco e $1_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}$, sendo $1_{\mathcal{H}}$ operador identidade de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Se o centro de $\mathcal{M}$ é $\mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$ então dizemos que $\mathcal{M}$ é um *fator*. Os fatores são classificados em tipo I, II e III. Além disso, os fatores do tipo II são divididos em tipo II_1 e II_∞. Tal divisão será feita de acordo com projeções no fator. Nessa dissertação serão estudados fatores do tipo I, II_1 e II_∞.

No capítulo 1 definiremos o que é uma álgebra de von Neumann, apresentaremos alguns exemplos e demonstraremos resultados importantes que serão necessários no desenvolvimento da teoria sobre fatores. Um resultado importante é o fato de que uma álgebra de von Neumann é gerada pelas suas projeções como um espaço de Banach.

No capítulo 2 definiremos quando uma álgebra de von Neumann é um fator. Será mostrado um fato interessante, afirmando que não há ideais próprios fortemente fechados numa álgebra de von Neumann se e somente o seu centro é o conjunto $\mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$. Na sequência definimos quando um fator é do tipo I e mostraremos alguns exemplos. Ao final desse capítulo provaremos um teorema com seguinte enunciado: *se $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é um fator do tipo I, com $\mathcal{H}$ separável, então $\mathcal{M} \simeq M_n(\mathbb{C})$ ou $\mathcal{M} \simeq \mathcal{L}(\ell_2)$.*

O capítulo 3 será dedicado à construção da álgebra de von Neumann $W^*(G)$ associada à um grupo enumerável G. Mostraremos que, dependendo do grupo G escolhido, $W^*(G)$ será um fator ou não.

No capítulo 4 desenvolveremos a teoria para os fatores do tipo II_1 e II_∞ e apresentaremos exemplos desses fatores. Demonstraremos que para cada fator do tipo II_1 obtemos um fator do tipo II_∞ e que dado um fator $\mathcal{N}$ do tipo II_∞ existe um fator $\mathcal{M}$ do tipo II_1 tal que $\mathcal{N}$ e $(\mathcal{M} \otimes \infty)$ são isomorfos, em que $(\mathcal{M} \otimes \infty) := \overline{(\mathcal{M} \otimes \infty)_0}^{TOF}$ é um fator do tipo II_∞, de modo que, as matrizes dos operadores em $(\mathcal{M} \otimes \infty)_0$ são infinitas com entradas em $\mathcal{M}$.

No capítulo 5(Apêndice) daremos as definições de topologia operador forte, topologia operador fraco, convergência nas topologias operador forte e fraco. Além disso, enunciaremos e em alguns casos demonstraremos, resultados que serão aplicados no desenvolvimento da dissertação.

1 *Álgebras de von Neumann*

Nesse capítulo definiremos o que é uma álgebra de von Neumann, mostraremos alguns exemplos e apresentaremos alguns resultados fundamentais para o desenvolvimento dos próximos capítulos. Nesta dissertação, $\mathcal{H}$ será um espaço de *Hilbert* e $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ o espaço dos operadores lineares e limitados sobre $\mathcal{H}$.

1.1 Definições e Exemplos

Começamos nessa seção definindo o que é o *comutante* e *duplo comutante* de um conjunto $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$, onde $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ é o espaço dos operadores lineares e limitados sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Com essas definições iniciamos o estudo das álgebras de von Neumann. Na sequência, enunciaremos o **Teorema da densidade de von Neumann** e o **Teorema do duplo comutante**. Com esses dois importantes teoremas definiremos o que é uma *álgebra de von Neumann* e mostraremos dois exemplos.

Definição 1.1.1. *Seja* $S \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$. *Definimos*

$$S' := \{T' \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : TT' = T'T \ \forall T \in S\}$$

que será denominado o ***comutante*** *de* S.

Observação 1.1.2. *Denotaremos por*

$$S'' = (S')' = \{T'' \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : T''T' = T'T'' \ \forall T' \in S'\}$$

o ***duplo comutante*** *de* S. *É fácil ver que* $S \subseteq S''$.

Observação 1.1.3. *Por convenção, denotaremos por*

- $\overline{}^{TOf}$ *o fecho na topologia operador-fraco*
- $\overline{}^{TOF}$ *o fecho na topologia operador-forte*
- $\overline{}^{TN}$ *o fecho na topologia norma-operador*
- $1_{\mathcal{H}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *o operador identidade*

Sobre as topologias operador-fraco e operador-forte ver Apêndice.

Proposição 1.1.4. *Se* $S \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$, *de modo que* $S^* = S$, *então* S' *é uma sub-*-álgebra, com* $1_{\mathcal{H}} \in S'$, *fechada na topologia operador-fraco, consequentemente na topologia operador-forte e na topologia da norma do operador.*

Demonstração: Sejam $S \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e S' o comutante de S. A prova de que S' é uma sub-*-álgebra, com $1_{\mathcal{H}} \in S'$, é fácil de ver. Vamos provar que $S' = \overline{S'}^{TOf}$.
" $\subseteq$ " : Óbvio

" $\supseteq$ " : Seja $y \in \overline{S'}^{TOf}$. Fixe $\xi \in \mathcal{H}$, $f \in \mathcal{H}'$ e $x \in S$. Defina $\varphi, \psi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ tais que $\varphi(z) = f(x(z(\xi)))$ e $\psi(z) = f(z(x(\xi)))$.

Afirmação: φ e ψ são contínuas na topologia operador-fraco.
Considere uma sequência $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $z_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} z$ na topologia operador-fraco. Então para cada $g \in \mathcal{H}'$ e $\eta \in \mathcal{H}$ temos que $g(z_n(\eta)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g(z(\eta))$. Em particular, $f(z_n(x(\xi))) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(z(x(\xi)))$ e $f(x(z_n(\xi))) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x(z(\xi)))$. Logo,

$$\psi(z_n) = f(z_n(x(\xi))) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(z(x(\xi))) = \psi(z)$$

e

$$\varphi(z_n) = f(x(z_n(\xi))) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x(z(\xi))) = \varphi(z).$$

Portanto, φ e ψ são fracamente contínuas.

Para cada $z \in S'$ temos $\varphi(z) = f(x(z(\xi))) = f(z(x(\xi))) = \psi(z)$. Como φ e ψ são contínuas e coincidem em S', que é denso em $\overline{S'}^{TOf}$, logo $\varphi(z) = \psi(z)\ \forall z \in \overline{S'}^{TOf}$. Assim, é verdade que $\varphi(y) = \psi(y)$, ou melhor, $f(x(y(\xi))) = f(y(x(\xi)))$. Note que

$$f(x(y(\xi))) = f(y(x(\xi))) \Longleftrightarrow f(x(y(\xi))) - f(y(x(\xi))) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f(x(y(\xi)) - y(x(\xi))) = 0.$$

Como f é arbitrário, então $x(y(\xi)) - y(x(\xi)) = 0$ (*ver [1] Corolário 4.3-4*). Logo, $x(y(\xi)) = y(x(\xi))$. Como ξ é arbitrário, segue que $xy = yx$. Sendo x arbitrário, segue que $y \in S'$. Portanto, $\overline{S'}^{TOf} \subseteq S'$.
Sendo S' convexo, temos que $\overline{S'}^{TOf} = \overline{S'}^{TOF}$ (*ver Teorema 5.1.9*). Então $S' = \overline{S'}^{TOF}$ e com isso S' é fortemente fechado.
Seja $T \in \overline{S'}^{TN}$ arbitrário. Então existe uma *net* $\{T_i\}_{i \in I} \subset S'$ tal que $\|T_i - T\| \xrightarrow{i \in I} 0$. Note que

$$\|T_i(\xi) - T(\xi)\| \leq \|T_i - T\| \, \|\xi\| \xrightarrow{i \in I} 0 \; \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Logo, $T \in \overline{S'}^{TOF} = S'$. Como T é arbitrário, segue que $\overline{S'}^{TN} \subseteq S'$. Como é óbvio que $S' \subseteq \overline{S'}^{TN}$, segue S' é fechado na topologia na norma do operador.

$\blacksquare$

Corolário 1.1.5. *Para o conjunto S da Proposição 1.1.4, temos $S'' = (S')'$ fechado nas topologias operador-fraco e operador-forte.*

Demonstração: Como S' é um subconjunto de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, de modo que $(S')^* \subseteq S'$, segue da *Proposição 1.1.4* que $(S')'$ é uma sub-*-álgebra fechada nas topologias operador-fraco e operador-forte.

■

Teorema 1.1.6. ***(Teorema da densidade de von Neumann)*** *Seja* $A \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *uma sub-*-álgebra tal que* $1_{\mathcal{H}} \in A$. *Então* A'' *é o fecho de* A *na topologia operador-forte.*

Demonstração: Ver demonstração do Teorema 3.4.6 em [5].

■

Corolário 1.1.7. ***(Teorema do duplo comutante)*** *Seja* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *uma sub-*-álgebra tal que* $1_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}$. *Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\mathcal{M}$ *é fechado na topologia operador-fraco*

ii) $\mathcal{M}$ *é fechado na topologia operador-forte*

iii) $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$: Como $\mathcal{M}$ é convexo, então $\overline{\mathcal{M}}^{TOF} = \overline{\mathcal{M}}^{TOf}$ (*ver Teorema 5.1.9*). Logo, $\mathcal{M}$ é fechado na topologia operador-forte.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: É imediato do *Teorema 1.1.6.*
$(iii) \Rightarrow (i)$: É imediato do *Corolário 1.1.5.*

■

Definição 1.1.8. *Uma sub-*-álgebra* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$, *com* $1_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}$, *que satisfaz uma das afirmações do Corolário 1.1.7, é dita uma* ***álgebra de von Neumann****.*

Exemplo 1.1.9. O espaço $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ é uma **álgebra de von Neumann**, pois $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ é fechado na topologia operador-forte. O espaço das matrizes $M_n(\mathbb{C})$ também é uma álgebra de von Neumann.

Exemplo 1.1.10. O conjunto

$$\mathcal{M} = \{M_f : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]) / f \in L^\infty([0,1])\},$$

em que $M_f(g) = fg$, é uma álgebra de von Neumann em $\mathcal{L}(L^2([0,1]))$.
Seja $f \in L^\infty([0,1])$ arbitrário e defina

$$M_f : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$$

dado por $M_f(g) = fg$. Prova-se que M_f está bem definido, M_f é linear e limitado e que $\mathcal{M}$ é uma sub-*-álgebra de $\mathcal{L}(L^2([0,1]))$ (ver [6] Exemplo 2.4.11). Em seguida, prova-se que $1_{L^2([0,1])} \in \mathcal{M}$ e que $\mathcal{M}$ é fechada na topologia operador-fraco (ver [6] Exemplo 5.1.6). Assim, $\mathcal{M}$ é uma álgebra de von Neumann.

Exemplo 1.1.11. Vamos mostrar que o espaço dos operadores compactos $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, com $dim\mathcal{H} = \infty$, não é uma

Álgebra de von Neumann. Obviamente que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ é uma sub-*-álgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Afirmamos que $1_{\mathcal{H}} \notin \mathcal{K}(\mathcal{H})$. De fato, considere um sequência ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$. Note que $\|1_{\mathcal{H}}(e_n) - 1_{\mathcal{H}}(e_m)\|^2 = \|e_n - e_m\|^2 = \langle e_n - e_m, e_n - e_m\rangle = \langle e_n, e_n\rangle + \langle e_m, e_m\rangle = 2$ implica em $\|1_{\mathcal{H}}(e_n) - 1_{\mathcal{H}}(e_m)\| = \sqrt{2}$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \neq n$. Então, nenhuma subsequencia de $\{1_{\mathcal{H}}(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Logo, $1_{\mathcal{H}}$ não é compacto e com isso $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ não é uma álgebra de von Neumann.

1.2 Projeções numa Álgebra de von Neumann

Projeções ortogonais numa álgebra de von Neumann são de fundamental importância, pois será demonstrado que uma álgebra de von Neumann é gerada pelas suas projeções. Além disso, serão apresentadas algumas definições e resultados, usando projeções, que são alguns dos pilares no desenvolvimento da teoria.

Definição 1.2.1. *Seja $p \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dizemos que p é uma projeção se $p^2 = p = p^*$.*

Proposição 1.2.2. *Se $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é uma álgebra de von Neumann então $\mathcal{M}$ é gerada como um espaço de Banach pelo conjunto $P(\mathcal{M}) = \{p \in \mathcal{M} : p = p^* = p^2\}$*

Demonstração: Sejam $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ uma álgebra de von

Neumann e

$$P(\mathcal{M}) = \{p \in \mathcal{M} : p = p^* = p^2\}.$$

Vamos provar que $\mathcal{M} = \overline{span}^{TN} P(\mathcal{M})$.

" $\supseteq$ ": Sendo $\mathcal{M}$ um subespaço vetorial, então $span\{P(\mathcal{M})\} \subseteq \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ é fechado na topologia operador-forte e consequentemente na topologia da norma do operador, então $\overline{span}^{TN}\{P(\mathcal{M})\} \subseteq \mathcal{M}$.

" $\subseteq$ ": Seja $x \in \mathcal{M}$, qualquer, tal que $x = x^*$. Sendo x normal, pois $x^*x = xx^*$, existe uma representação $\pi : C(\sigma(x)) \to C^*(\{1_{\mathcal{H}}, x\})$, onde $\sigma(x)$ é o espectro de x (*ver Proposição 3.3.10 em [5]*). Seja $\mathcal{B}_{\sigma(x)}$ a família de conjuntos borelianos de $\sigma(x)$. Então existe uma medida de probabilidade μ, definida sobre $\mathcal{B}_{\sigma(x)}$, e uma representação $\widetilde{\pi} : L^\infty(\sigma(x), \mathcal{B}_{\sigma(x)}, \mu) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (*ver Lema 5.1.10*).

Afirmação: $\widetilde{\pi}(L^\infty(\sigma(x), \mathcal{B}_{\sigma(x)}, \mu)) \subseteq \mathcal{M}$

Sabemos que

$$\pi(C(\sigma(x))) = C^*(\{1_{\mathcal{H}}, x\}) \subseteq \mathcal{M},$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}''$$

e

$$(\pi(C(\sigma(x))))'' = \widetilde{\pi}(L^\infty(\sigma(x), \mathcal{B}_{\sigma(x)}, \mu)) \quad (\textit{ver Lema 5.1.10}) .$$

Logo,

$$\widetilde{\pi}(L^\infty(\sigma(x), \mathcal{B}_{\sigma(x)}, \mu)) \subseteq (\pi(C(\sigma(x))))'' \subseteq \mathcal{M}'' = \mathcal{M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widetilde{\pi}(L^\infty(\sigma(x), \mathcal{B}_{\sigma(x)}, \mu)) \subseteq \mathcal{M}.$$

Considere um conjunto boreliano $E \subset \sigma(x)$ e a função característica χ_E. Como $\chi_E = (\chi_E)^2 = (\chi_E)^*$ então $\widetilde{\pi}(\chi_E) = \widetilde{\pi}(\chi_E)^2 = \widetilde{\pi}(\chi_E)^*$. Logo, $\widetilde{\pi}(\chi_E)$ é uma projeção e com isso $\widetilde{\pi}(\chi_E) \in P(\mathcal{M})$. Seja $f_1 \in \mathcal{B}(\sigma(x))$ dada por $f_1(\lambda) = \lambda$ $\forall \lambda \in \sigma(x)$. Pela *Proposição 3.3.10* em [5] e o *Lema 5.1.10*, $\widetilde{\pi}(f_1) = \pi(f_1) = x$. Como f_1 é mensurável e limitada, então existe uma sequência $\{f_n\}_n$ de funções simples e mensuráveis tal que $f_n \overset{unif}{\rightarrow} f$ (*ver [9] Corolário 6.37*). Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $f_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i^n \chi_{E_i^n}$, com $E_i^n \subseteq \sigma(x)$ e $\lambda_i^n \in \mathbb{C}$ para $i = 1, .., k_n$. É claro que $\widetilde{\pi}(f_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i^n \widetilde{\pi}(\chi_{E_i^n}) \in spanP(\mathcal{M})$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sendo $\widetilde{\pi}$ uma isometria (*ver Lema 5.1.10*), em particular contrativa, segue que

$$\|\widetilde{\pi}(f_n) - x\| = \|\widetilde{\pi}(f_n) - \widetilde{\pi}(f_1)\| = \|\widetilde{\pi}(f_n - f_1)\| \leq$$

$$\leq \|f_n - f_1\|_{L_\infty} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo, $x \in \overline{span}^{TN} P(\mathcal{M})$.

Dado $y \in \mathcal{M}$ arbitrário, podemos escrever $y = a + ib$,

com $a, b \in \mathcal{M}$ tal que $a = a^*$ e $b = b^*$. Então $a, b \in \overline{span}^{TN} P(\mathcal{M})$ e também $ib \in \overline{span}^{TN} P(\mathcal{M})$. Logo, $a + ib = y \in \overline{span}^{TN} P(\mathcal{M})$. Como y é arbitrário, segue que $\mathcal{M} \subseteq \overline{span}^{TN} P(\mathcal{M})$.
Portanto, $\mathcal{M} = \overline{span}^{TN} P(\mathcal{M})$.

■

Definição 1.2.3. *A projeção $\widetilde{\pi}(\chi_E)$ que aparece na Proposição 1.2.2, é denominada projeção espectral e denotaremos por P_E.*

Proposição 1.2.4. *Sejam $p, q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ projeções. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $q \leq p$, *ou seja,* $(p - q)$ *é um operador positivo*

ii) $Im(q) \subseteq Im(p)$

iii) $qp = q = pq$

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$: Por hipótese $q \leq p$, então $p - q \geq 0$. Sendo $p - q$ um operador positivo, temos que $\langle (p - q)\xi, \xi \rangle \geq 0$ $\forall \xi \in \mathcal{H}$ e isso implica em $\langle p\xi, \xi \rangle \geq \langle q\xi, \xi \rangle$ $\forall \xi \in \mathcal{H}$. Seja $A = \{\xi \in \mathcal{H} : \|q(\xi)\| = \|\xi\|\}$.

Afirmação: $Im(q) = A$
" $\subseteq$ ": Óbvio.
" $\supseteq$ ": Seja $\xi \in A$. Sendo $\mathcal{H} = Im(q) \oplus Ker(q)$, considere

$\xi = (\xi_1 + \xi_2) \in \mathcal{H}$. Então

$$\|\xi\|^2 = \|\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2 = \|\xi_1\|^2 + \|\xi - \xi_1\|^2 =$$

$$= \|q(\xi)\|^2 + \|\xi - q(\xi)\|^2 .$$

Como $\|q(\xi)\| = \|\xi\| \, (\xi \in A)$, então $\|\xi - q(\xi)\|^2 = 0$ e isso implica em $\xi - q(\xi) = 0$. Logo, $\xi = q(\xi)$ e com isso $\xi \in Im(q)$. Como ξ é arbitrário, concluímos que $A \subseteq Im(q)$.

Seja $\xi \in Im(q)$. Note que

$$\|\xi\|^2 = \|q(\xi)\|^2 = \langle q(\xi), q(\xi)\rangle \leq \langle p(\xi), p(\xi)\rangle =$$

$$= \|p(\xi)\|^2 \leq \|\xi\|^2 .$$

Logo, $\|p(\xi)\| = \|\xi\|$. Pela afirmação acima podemos concluir que $\xi \in Im(p)$. Sendo ξ arbitrário, concluímos que $Im(q) \subseteq Im(p)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Note que $pq(\xi) = p(q(\xi)) = q(\xi)$ $\forall \xi \in \mathcal{H}$, pois $Im(q) \subseteq Im(p)$ por hipótese. Logo, $pq = q$. Observe que $pq = q \Rightarrow (pq)^* = q^* \Rightarrow qp = q$. Portanto, $qp = q = pq$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Para provar que $p - q \geq 0$, basta mostrar que $\langle (p-q)\xi, \xi\rangle \geq 0$. Note que

$$\|q(\xi)\| = \|qp(\xi)\| \leq \|p(\xi)\| \;\; \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Então

$$\langle (p-q)\xi, \xi\rangle = \langle p\xi, \xi\rangle - \langle q\xi, \xi\rangle = \langle p\xi, p\xi\rangle - \langle q\xi, q\xi\rangle =$$

$$= \|p\xi\|^2 - \|q\xi\|^2 \geq 0 \ \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Portanto, $p - q \geq 0$, ou melhor, $q \leq p$.

■

Definição 1.2.5. *Uma projeção q que satisfaz uma das afirmações da Proposição 1.2.4, é denominada* ***subprojeção*** *de p.*

1.3 Decomposição Polar e Ideais numa Álgebra de von Neumann

Nessa seção demonstraremos dois resultados, envolvendo decomposição polar e ideais, que serão importantes no desenvolvimento da teoria do capítulo 2.

Proposição 1.3.1. *Sejam $\mathcal{M}$ uma álgebra de von Neumann, $T \in \mathcal{M}$ e $U|T|$ a decomposição polar de T.*
Então $U, |T| \in \mathcal{M}$.

Demonstração: Seja $\mathcal{M}$ uma álgebra de von Neumann. Tome $T \in \mathcal{M}$. Pela decomposição polar, existem $U, |T| \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $T = U|T|$ e $ker(T) = ker(U) = ker(|T|)$, onde U é uma isometria parcial e $|T| = (T^*T)^{1/2}$ é um operador positivo. Como $T, T^* \in \mathcal{M}$, então $(T^*T) \in \mathcal{M}$ e com isso $(T^*T)^{1/2} \in \mathcal{M}$. Seja $T' \in \mathcal{M}'$ arbitrário. Note que

$$T'U|T|\xi = T'T\xi = TT'\xi \text{ e}$$

$$UT'|T|\xi = U|T|T'\xi = TT'\xi \ \forall \xi \in \mathcal{H},$$

logo U e T' comutam sobre $Im(|T|)$, ou seja, $(T'U)x = (UT')x \ \forall x \in Im(|T|)$. Como T' comuta com $|T|$ então $T'|T|\xi = |T|T'\xi \ \forall \xi \in \mathcal{H}$ e isso implica em $T'(Im(|T|)) \subseteq Im(|T|)$, ou seja, T' é invariante sobre $Im(|T|)$. Agora vamos provar que T' é invariante sobre $Im(|T|)^{\perp}$. Sejam $\xi \in Im(|T|)^{\perp}$ e $\eta \in Im(|T|)$. Então existe $\zeta \in \mathcal{H}$ tal que $|T|\zeta = \eta$. Note que

$$\langle T'(\xi), \eta \rangle = \langle T'(\xi), |T|(\zeta) \rangle = \langle (|T|T')\xi, \zeta \rangle = \langle (T'|T|)\xi, \zeta \rangle =$$

$$= \langle \xi, |T|((T')^*\zeta) \rangle = 0$$

implica em $T'(\xi) \in Im(|T|)^{\perp}$, logo T' é invariante sobre $Im(|T|)^{\perp}$ pois ξ é arbitrário. Sabendo que $ker(|T|)^{\perp} = \overline{Im(|T|^*)}$ (*ver Lema 5.1.5*), $|T| = |T|^*$ e que $ker(U) = ker(|T|)$, então $ker(U)^{\perp} = ker(|T|)^{\perp} = \overline{Im(|T|)}$ e com isso $ker(U) = ker(|T|) = Im(|T|)^{\perp}$. Então, U é nulo sobre $Im(|T|)^{\perp}$ implicando em $T'U$ ser nulo sobre $Im(|T|)^{\perp}$. Como T' é invariante sobre $Im(|T|)^{\perp}$ então UT' também é nulo sobre $Im(|T|)^{\perp}$. Portanto, $T'U$ e UT' comutam sobre $Im(|T|) \oplus Im(|T|)^{\perp} = \mathcal{H}$. Como T' é arbitrário, concluímos que $U \in \mathcal{M}$.

■

Proposição 1.3.2. *Sejam $\mathcal{M}$ uma álgebra de von Neumann e J um ideal de $\mathcal{M}$. Então J é uma sub-*-álgebra.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{M}$ uma álgebra de von Neumann, J um ideal de $\mathcal{M}$ e $T \in J$. Pela decomposição polar, $T = U(T^*T)^{1/2}$, onde provamos que $U, (T^*T)^{1/2} \in \mathcal{M}$. Devemos lembrar que $U_{|(kerU)^{\perp}}$ é uma isometria e $(kerU)^{\perp} = \overline{Im((T^*T)^{1/2})}$. Então $(T^*T)^{1/2} = U^*U(T^*T)^{1/2} = U^*T \in J$, pois $U \in \mathcal{M}$. Como $(T^*T)^{1/2} \in J$, então $T^* = (T^*T)^{1/2}U^* \in J$. Sendo J um ideal, por definição, é uma sub-álgebra e como provamos que J é auto-adjunto, logo J é uma sub-*-álgebra.

■

1.4 Teorema da Densidade de von Neumann(versão sem unidade) e Ideais numa Álgebra de von Neumann

Nessa seção demonstraremos uma versão do Teorema da Densidade de von Neumann para uma sub-*-álgebra sem unidade. Para isso, vamos definir o que é *espaço essencial* de uma álgebra e provaremos alguns resultados envolvendo tal definição. Na sequência, demonstraremos alguns resultados com o objetivo de provar um importante teorema que afirma o seguinte: *o centro de uma álgebra de von Neumann* $\mathcal{M}$ *é igual a* $\mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$*, se e somente se,* $\mathcal{M}$ *não possui ideais próprios fechados na topologia operador-forte.*

Definição 1.4.1. *Dada uma sub-*-álgebra* $A \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$*, definimos o* ***espaço essencial*** *de* A*, denotado por ess* A*, como* $\overline{span}\{a\xi\colon a \in A \text{ e } \xi \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}$.

Proposição 1.4.2. *Sejam* $A \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *uma sub-*-álgebra e* $X = \{\xi \in \mathcal{H} : a\xi = 0 \ \forall a \in A\}$*. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) $X = (essA)^{\perp}$

ii) $X = \{0\}$ *se e somente se* $essA = \mathcal{H}$.

Demonstração: *(i)*: Seja $\xi \in \mathcal{H}$. Então $\xi \in (essA)^{\perp} \Leftrightarrow \langle \xi, a\eta \rangle = 0 \ \forall a \in A$ e $\eta \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \langle a^*\xi, \eta \rangle = 0$ $\forall a \in A$ e $\eta \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \langle (a^*)^*\xi, \eta \rangle = \langle a\xi, \eta \rangle = 0 \ \forall a \in A$ e $\eta \in \mathcal{H}$ $\Leftrightarrow \langle a\xi, a\xi \rangle = 0 \ \forall a \in A \Leftrightarrow \|a\xi\|^2 = 0 \ \forall a \in A \Leftrightarrow a\xi = 0$ $\forall a \in A \Leftrightarrow \xi \in X$.

(ii): Se $X = \{0\}$ então, pelo item *(i)*, $essA = \{0\}^{\perp} = \mathcal{H}$. Agora, se $essA = \mathcal{H}$ então $(essA)^{\perp} = \mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$ e novamente pelo item *(i)* temos $X = \{0\}$.

$\blacksquare$

Proposição 1.4.3. *Sejam $A \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ uma sub-*-álgebra tal que $essA = \mathcal{H}$ e um subespaço fechado $Y \subseteq \mathcal{H}$ invariante por A. Então $\overline{span}\{a\xi : a \in A \text{ e } \xi \in Y\} = Y$, ou seja, $essA_{|Y} = Y$.*

Demonstração: Defina

$$V := \{\xi \in \mathcal{H} : a\xi = 0 \ \forall a \in A\}$$

e

$$W := \{\xi \in Y : a\xi = 0 \ \forall a \in A\}.$$

Por hipótese $essA = \mathcal{H}$, então pela *Proposição 1.4.2(ii)* temos $V = \{0\}$. Como $W \subseteq V = \{0\}$, é óbvio que $W = \{0\}$. Como Y é invariante por A, então podemos usar a restrição $A_{|Y} \subseteq \mathcal{L}(Y)$. Assim, pela Proposição 1.4.2(ii) temos

$$essA_{|Y} = \overline{span}\{a\xi : a \in A \text{ e } \xi \in Y\} = Y,$$

pois Y é invariante por A.

■

Corolário 1.4.4. *Se $A \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é uma sub-*-álgebra tal que $essA = \mathcal{H}$ e $\xi \in \mathcal{H}$, então $\xi \in \overline{\{a\xi : a \in A\}}$.*

Demonstração: Fixe $\xi \in \mathcal{H}$. Defina

$$Y_0 := \{\lambda\xi + a\xi : \lambda \in \mathbb{C}, a \in A\}$$

e $Y := \overline{Y_0}$. Obviamente que Y_0 é subespaço de $\mathcal{H}$.

Afirmação: Y é invariante por A

De fato, sejam $b \in A$ e $y_0 \in Y_0$. Note que

$$by_0 = b(\lambda\xi + a\xi) = \lambda b\xi + ba\xi = (0\xi + (\lambda b + ba)\xi) \in Y_0.$$

Agora seja $x \in Y$. Então

$$bx = b(\lim_{n\to\infty} \lambda_n\xi + a_n\xi) = \lim_{n\to\infty} b(\lambda_n\xi + a_n\xi) \in Y.$$

Logo, Y é invariante por A.

É óbvio que $\{c\xi : c \in A\}$ é um subespaço. Observe que

$$\overline{span}\{a\eta : a \in A, \eta \in Y_0\} =$$

$$= \overline{span}\{a(\lambda\xi + b\xi) : a, b \in A, \lambda \in \mathbb{C}\} =$$

$$= \overline{span}\{(\lambda a + b)\xi : a, b \in A, \lambda \in \mathbb{C}\} \subseteq \overline{\{c\xi : c \in A\}}.$$

Assim, segue que

$$\overline{span}\{a\eta : a \in A, \eta \in Y\} \subseteq \overline{\{c\xi : c \in A\}}.$$

É óbvio que

$$\overline{\{c\xi : c \in A\}} \subseteq \overline{span}\{a\eta : a \in A, \eta \in Y\},$$

logo
$$\overline{\{c\xi : c \in A\}} = \overline{span}\{a\eta : a \in A, \eta \in Y\}.$$

Pela *Proposição 1.4.3*, $\overline{span}\{a\eta : a \in A, \eta \in Y\} = Y$, logo $\overline{\{c\xi : c \in A\}} = Y$. Desde que $\xi = (1\xi + 0\xi) \in Y$, concluímos que $\xi \in \overline{\{c\xi : c \in A\}}$.

$\blacksquare$

Teorema 1.4.5. ***(Teorema da densidade - versão sem unidade)*** *Seja $A \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ uma sub-*-álgebra tal que $essA = \mathcal{H}$. Então A'' é o fecho de A na topologia operador forte.*

Demonstração: Desde que $A \subseteq A''$ e A'' é fechado na topologia operador-forte, basta provar que A é fortemente denso em A''. Seja $z \in A''$, arbitrário. Pela definição de topologia operador-forte, devemos provar que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathcal{H}$ e $\epsilon \in \mathbb{R}$ $\exists x \in A$ tal que $\|(x - z)\xi_i\| < \epsilon$ $\forall 1 \leq i \leq n$. Vamos dividir a demonstração em 2 casos:

CASO PARTICULAR: Suponha $n = 1$

Defina $\xi := \xi_1$ e seja $M = \overline{\{a\xi : a \in A\}} \subseteq \mathcal{H}$. Pelo Corolário 1.4.4, $\xi \in M$. É claro que M é subespaço e que M é invariante sobre A, ou seja, $AM \subset M$. Então dada um projeção p sobre M, $p \in A'$ (ver Proposição 3.4.5(d) em [5]). Como $z \in A''$ então $zp = pz$ e com isso $zM = z(pM) = p(zM) \subset M$. Em particular, $z\xi \in M$. Então existe $x \in A$ tal que $\|x\xi - z\xi\| < \epsilon$.

CASO GERAL: Suponha $n \in \mathbb{N}$ qualquer

Ver demonstração do Teorema 3.4.6(Case (ii)) em [5].

■

Observação 1.4.6. *A partir daqui será necessário trabalhar com a representação matricial de um operador linear limitado num espaço de Hilbert.*
Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, espaços de Hilbert, e a soma direta externa $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Considere $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, operador de inclusão $\iota_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}$ e a projeção $p_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_i$, com $i = 1, 2$. Defina $P_i := \iota_i p_i$. Fixe $\eta_i \in \mathcal{H}_i$. Para cada $(\xi_1, \xi_2) = \xi \in \mathcal{H}$, temos

$$\langle p_1^*(\eta_1), \xi\rangle = \langle(\eta_1, 0), p_1(\xi)\rangle = \langle(\eta_1, 0), p_1((\xi_1, \xi_2))\rangle =$$

$$= \langle(\eta_1, 0), (\xi_1, 0)\rangle = \langle(\eta_1, 0), (\xi_1, \xi_2)\rangle \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \langle p_1^*(\eta_1) - (\eta_1, 0), \xi\rangle = 0.$$

Em particular, para $\xi = p_1^*(\eta_1) - (\eta_1, 0)$

$$\langle p_1^*(\eta_1) - (\eta_1, 0), p_1^*(\eta_1) - (\eta_1, 0)\rangle = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow p_1^*(\eta_1) - (\eta_1, 0) = 0 \Longrightarrow p_1^*(\eta_1) = (\eta_1, 0).$$

Então $p_1^*(\eta_1) = (\eta_1, 0)$ $\forall \eta_1 \in \mathcal{H}_1$ e com isso concluímos que $p_1^* = \iota_1$. De modo análogo, concluímos que $p_2^* = \iota_2$.
Agora observe que, para cada $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{H}$, temos que

$$P_1(\xi) + P_2(\xi) = P_1((\xi_1, \xi_2)) + P_2((\xi_1, \xi_2)) =$$

$$= \iota_1 p_1((\xi_1, \xi_2)) + \iota_2 p_2((\xi_1, \xi_2)) = \iota_1(\xi_1) + \iota_2(\xi_2) =$$

$$= (\xi_1, 0) + (0, \xi_2) = (\xi_1, \xi_2) = \xi.$$

Logo, $P_1 + P_2 = 1_{\mathcal{H}}$*.*

Defina $T_{ij} := p_i T \iota_j : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$*, com* $i = 1, 2$*. Temos que*

$$T = 1_{\mathcal{H}} T 1_{\mathcal{H}} = (P_1 + P_2) T (P_1 + P_2) = \sum_{k,l=1}^{2} P_k T P_l.$$

Assim, para cada $\xi \in \mathcal{H}$ *segue que*

$$T(\xi) = \sum_{k,l=1}^{2} P_k T P_l(\xi) = \sum_{k,l=1}^{2} P_k T \iota_l p_l(\xi) = \sum_{k,l=1}^{2} P_k T \iota_l(\xi_l) =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{2} \iota_k p_k T \iota_l(\xi_l) = \sum_{k,l=1}^{2} \iota_k T_{kl}(\xi_l) =$$

$$= \iota_1(T_{11}(\xi_1)) + \iota_1(T_{12}(\xi_2)) + \iota_2(T_{21}(\xi_1)) + \iota_2(T_{22}(\xi_2)) =$$

$$= \iota_1(T_{11}(\xi_1) + T_{12}(\xi_2)) + \iota_2(T_{21}(\xi_1) + T_{22}(\xi_2)).$$

Dado o par (x, y)*, por convenção faremos* $(x, y) := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$*.*

Dessa forma, para cada $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{H}$*, podemos escrever*

$$T(\xi) = \begin{bmatrix} T_{11}(\xi_1) + T_{12}(\xi_2) \\ T_{21}(\xi_1) + T_{22}(\xi_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

Proposição 1.4.7. *Se* $\mathcal{M}$ *é uma álgebra de von Neumann e* J *um ideal de* $\mathcal{M}$ *fechado na topologia operador-forte, então* $\exists 1_J \in J$ *que é a unidade de* J*.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{M}$ uma álgebra de von Neumann e J um ideal de $\mathcal{M}$ fechado na topologia operador-forte. Pela Proposição 1.3.2, J é uma sub-*-álgebra. Defina $\mathcal{H}_1 = ess\ J$. Como $\mathcal{H}_1$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$, então podemos escrever $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ onde $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1^{\perp}$. Sejam $T \in J$ e $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in \mathcal{H}$ quaisquer, com $\xi_1 \neq 0$ e $\xi_2 \neq 0$.
Considere

$$[T] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ e } [\xi] = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

as representações matriciais de T e ξ, respectivamente. Observe que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\xi_1 + B\xi_2 \\ C\xi_1 + D\xi_2 \end{bmatrix}$$

é a matriz do vetor $T(\xi) \in \mathcal{H}_1$. Então é necessário que $C\xi_1 + D\xi_2 = 0$. Diante disso vamos ver quem são os operadores A, B, C e D. Para o vetor $\xi' = \xi_1 + 0$ temos que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\xi_1 \\ C\xi_1 \end{bmatrix}$$

é a matriz do vetor $T(\xi') \in \mathcal{H}_1$. Novamente é necessário que $C\xi_1 = 0$. Como $C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, logo devemos ter $C = 0$.

Agora, para o vetor $\xi'' = 0 + \xi_2$ segue que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\xi_2 \\ D\xi_2 \end{bmatrix}$$

é a matriz do vetor $T(\xi'') \in \mathcal{H}_1$. Como $D : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$, devemos ter $D\xi_2 = 0$ e com isso $D = 0$.
Até aqui, concluímos que a matriz de T é $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Sabemos que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ B^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Para $\eta = \eta_1 + \eta_2 \in \mathcal{H}$, com $\eta_1 \neq 0$, temos que

$$\begin{bmatrix} A^* & 0 \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^*\eta_1 \\ B^*\eta_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_1.$$

Como $B^* : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, então devemos ter $B^*(\eta_1) = 0$, implicando em $B^* = 0$.

Afirmação: $B = 0$

De fato, observe que $\langle x_1, B(x_2)\rangle = \langle B^*(x_1), x_2\rangle \ \forall x_1 \in \mathcal{H}_1$ e $x_2 \in \mathcal{H}_2$. Como $B^* = 0$, então $\langle x_1, B(x_2)\rangle = 0 \ \forall x_1 \in \mathcal{H}_1$ e $x_2 \in \mathcal{H}_2$. Em particular,

$$\langle B(x_2), B(x_2)\rangle = \|B(x_2)\|^2 = 0 \ \forall x_2 \in \mathcal{H}_2.$$

Logo, $B = 0$.

Concluímos que a matriz de todo operador em J é da forma $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, com $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$.

Defina $\widehat{J} := \left\{ A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) : \text{ onde } \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ é a matriz de}\right.$ $\left.\text{um operador de } J \right\}$.

Afirmação: $\widehat{J}$ é uma sub-*-álgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$

Sejam $A, B \in \widehat{J}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Como $\alpha A + B, AB, A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ e

$$\begin{bmatrix} (\alpha A + B) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são matrizes de operadores em J, então $\widehat{J}$ é uma sub-*-álgebra.

É óbvio que $J = \left\{ T \oplus 0 : T \in \widehat{J} \right\}$.

Afirmação: $\widehat{J}$ é fechado em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ na topologia operador-forte

Seja $T \in \overline{\widehat{J}}^{TOF}$ qualquer. Então existe uma *net* $\{T_i\}_{i \in I} \subseteq \widehat{J}$ que converge para $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ na topologia operador-forte. Para cada $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in \mathcal{H}$,

$$\begin{bmatrix} T_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i \xi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{i \in I} \begin{bmatrix} T \xi_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix},$$

pois $T_i\xi_1 \overset{i\in I}{\longrightarrow} T\xi_1 \ \forall \xi_1 \in \mathcal{H}_1$. Devemos lembrar que, cada matriz $\begin{bmatrix} T_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ representa um operador, que denotaremos por $S_i = (T_i \oplus 0) \in J$. Da mesma forma, a matriz $\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ representa um operador $S = (T \oplus 0) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Então $S_i \overset{i\in I}{\to} S$ na topologia operador-forte. Como J é fechado na topologia operador-forte, segue que $S \in J$. Assim, $T \in \widehat{J}$ e com isso $\widehat{J}$ é fechado na topologia operador-forte.

Afirmação: $ess\widehat{J} = \mathcal{H}_1 (= essJ)$

" $\subseteq$ ": Por definição, $ess\widehat{J} = \overline{span}\{a\xi : a \in \widehat{J} \text{ e } \xi \in \mathcal{H}_1\}$. Obviamente que $ess\widehat{J} \subseteq \mathcal{H}_1$.

" $\supseteq$ ": Fixe $a \in J$ e $\xi = (\xi_1 + \xi_2) \in \mathcal{H}$. Obviamente que $a\xi \in essJ (= \mathcal{H}_1)$. Seja $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ a representação matricial de a, onde $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Pela definição de $\widehat{J}$, $A \in \widehat{J}$.

Note que $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\xi_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ implica que $a\xi = A\xi_1 + 0 = A\xi_1 \in ess\widehat{J}$.

Seja $\sum_{i=1}^{n} a^i\xi^i \in essJ$. Pelo raciocínio acima, $a^i\xi^i = A^i\xi_1^i$, logo $\sum_{i=1}^{n} a^i\xi^i \in ess\widehat{J}$.

Agora, seja $\eta \in essJ$. Então $\eta = \lim_{i\to\infty} \eta_i$, onde $\eta_i \in span\{a \in J \text{ e } \xi \in \mathcal{H}\} \subseteq ess\widehat{J} \ \forall i \in \mathbb{N}$. Como

$ess\widehat{J}$ é fechado, logo $\eta \in ess\widehat{J}$ e com isso $\mathcal{H}_1 \subseteq ess\widehat{J}$.
Assim, concluímos que $ess\widehat{J} = \mathcal{H}_1$.

Usando o *Teorema 1.4.5* para $\widehat{J} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, conclui-se que $\widehat{J} = \left(\widehat{J}\right)''$.
Note que

$$1_{\mathcal{H}_1} \in \left\{ A'' \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1) : A''A' = A'A'' \ \forall A' \in \left(\widehat{J}\right)' \right\} = \left(\widehat{J}\right)''.$$

Então $1_{\mathcal{H}_1} \in \widehat{J}$. Considere $1_J \in J$ tal que a sua matriz seja $\begin{bmatrix} 1_{\mathcal{H}_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. É fácil ver que, 1_J é a unidade de J e com isso concluímos a demonstração.

■

Definição 1.4.8. *Dada uma álgebra $\mathcal{A}$, definimos*

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}) := \{a \in \mathcal{A} : ab = ba \ \forall b \in \mathcal{A}\}$$

o centro de $\mathcal{A}$.

Proposição 1.4.9. *Se $\mathcal{M}$ é uma álgebra de von Neumann, J um ideal de $\mathcal{M}$ fechado na topologia operador-forte e $1_J \in J$ a unidade de J então $1_J \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$.*

Demonstração: Sendo J um ideal de $\mathcal{M}$, então $1_J m, m1_J \in J \ \forall m \in \mathcal{M}$. Note que $1_J m = (1_J m)1_J$ e $m1_J = 1_J(m1_J)$. Logo, $1_J m = m1_J \ \forall m \in \mathcal{M}$. Com isso, $1_J \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$.

■

Proposição 1.4.10. *Se $\mathcal{M}$ é uma álgebra de von Neumann então $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ também é.*

Demonstração: Seja $\mathcal{M}$ uma álgebra de non Neumann. Sabemos que

$$\mathcal{M}' = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : TS = ST \ \forall S \in \mathcal{M}\},$$

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \{T \in \mathcal{M} : TS = ST \ \forall S \in \mathcal{M}\}$$

e

$$\mathcal{M}' = \overline{\mathcal{M}'}^{TOF}.$$

Então é óbvio que $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ é uma álgebra de von Neumann.

■

Proposição 1.4.11. *Sejam $\mathcal{M}$ uma álgebra de von Neumann e um operador auto-adjunto $T \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$. Então $\overline{C^*(\{1_{\mathcal{H}}, T\})}^{TOF} \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{M})$. Além disso, toda projeção espectral está em $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$.*

Demonstração: Como $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ é uma C^*-álgebra que contem $1_{\mathcal{H}}$ e T, então

$$C^*(\{1_{\mathcal{H}}, T\}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{M})$$

pois por definição, $C^*(\{1_{\mathcal{H}}, T\})$ é a menor C^*-álgebra que contem $1_{\mathcal{H}}$ e T. Como $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ é fechado na topologia

operador-forte, logo $\overline{C^*(\{1_{\mathcal{H}}, T\})}^{TOF} \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{M})$.
Sendo T auto-adjunto, existe uma representação

$$\pi : C(\sigma(T)) \to C^*(\{1_{\mathcal{H}}, T\}),$$

onde $\sigma(T)$ é o espectro de T (*ver Proposição 3.3.10 em [5]*). Sendo $\mathcal{B}_{\sigma(T)}$ a família de conjuntos borelianos, existe uma medida de probabilidade μ, definida sobre $\mathcal{B}_{\sigma(T)}$, e uma representação $\widetilde{\pi} : L^\infty(\sigma(T), \mathcal{B}_{\sigma(T)}, \mu) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (*ver Lema 5.1.10*). Pelo *Teorema 1.1.6*, a sub-*-álgebra $\pi(C(\sigma(T)))(= C^*(\{1_{\mathcal{H}}, T\}))$ é fortemente densa em $(\pi(C(\sigma(T))))''$ e pelo *Lema 5.1.10* $\widetilde{\pi}(L^\infty(\sigma(T), \mathcal{B}_{\sigma(T)}, \mu)) = (\pi(C(\sigma(T))))''$. Então

$$\widetilde{\pi}(L^\infty(\sigma(T), \mathcal{B}_{\sigma(T)}, \mu)) = \overline{C^*(\{1_{\mathcal{H}}, T\})}^{TOF}.$$

Logo, $\widetilde{\pi}(L^\infty(\sigma(T), \mathcal{B}_{\sigma(T)}, \mu)) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{M}))$. Portanto, para cada conjunto boreliano $E \subseteq \sigma(T)$, a projeção espectral $P_E = \widetilde{\pi}(\chi_E)$ é central, ou seja, $P_E \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$.

$\blacksquare$

Teorema 1.4.12. *Se $\mathcal{M}$ é uma álgebra de von Neumann então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$

ii) Os únicos ideais fechados na topologia operador-forte, em $\mathcal{M}$, são $\{0\}$ e $\mathcal{M}$

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Suponha que $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$. Seja J um ideal de $\mathcal{M}$, fechado na topologia operador-forte.

Sendo 1_J a unidade de J, pela *Proposição 1.4.9*, $1_J \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$. Então $1_J = \alpha 1_{\mathcal{H}}$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$. Temos 2 casos para α:

CASO $\boldsymbol{\alpha = 0}$

Então $1_J = 0$ e com isso $x = x1_J = 0\, \forall x \in J$. Logo, $J = \{0\}$.

CASO $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$

Então $1_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\alpha} 1_J$ e como J é um ideal de $\mathcal{M}$, é verdade que $m = m1_{\mathcal{H}} = m\frac{1}{\alpha}1_J \in J\ \forall m \in \mathcal{M}$. Logo, $\mathcal{M} \subseteq J$. Como $J \subseteq \mathcal{M}$, então $J = \mathcal{M}$.

Portanto os únicos ideais de $\mathcal{M}$, fechados na topologia operador-forte, são $\{0\}$ e $\mathcal{M}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponha que $\mathcal{M}$ não possui ideais próprios fechados na topologia operador-forte.

Seja $T \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$. Suponha $T = T^*$.

Sendo T auto-adjunto então existe uma representação $\pi : C(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ para $C(\sigma(T))$, onde $\sigma(T)$ o espectro de T. Seja $\mathcal{B}_{\sigma(T)}$ a família de conjuntos borelianos de $\sigma(T)$. Então existe uma medida de probabilidade μ, definida sobre $\mathcal{B}_{\sigma(T)}$, e uma representação $\widetilde{\pi} : L^{\infty}(\sigma(T), \mathcal{B}_{\sigma(T)}, \mu) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Sejam $E \subseteq \sigma(T)$ um conjunto boreliano, P_E projeção espectral e

$$J_E = \{S \in \mathcal{M} : S(1_{\mathcal{H}} - P_E) = 0\}.$$

Afirmação: J_E é um ideal fechado na topologia operador-forte.

Sejam $A, B \in J_E$, $R \in \mathcal{M}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Note que

1. $(\alpha A + B)(1_{\mathcal{H}} - P_E) = \alpha(A(1_{\mathcal{H}} - P_E) + B(1_{\mathcal{H}} - P_E) = \alpha 0 + 0) = 0$

2. $AR(1_{\mathcal{H}} - P_E) = A(R1_{\mathcal{H}} - RP_E) = A(R1_{\mathcal{H}} - P_E R) = A(1_{\mathcal{H}} - P_E)R = 0$

3. $RA(1_{\mathcal{H}} - P_E) = 0$

Pelos itens (1),(2),(3), J_E é um ideal.

Vamos provar que J_E é fechado na topologia operador-forte.

Seja $A \in \overline{J_E}^{TOF}$, arbitrário. Então existe uma *net* $\{S_i\}_{i\in I} \subseteq J_E$ tal que $S_i \xrightarrow{i\in I} A$ na topologia operador-forte. Observe que para cada $\xi \in \mathcal{H}$,

$$A(1_{\mathcal{H}} - P_E)\xi = \lim_{i\in I} S_i(1_{\mathcal{H}} - P_E)\xi = 0.$$

Segue que, $A(1_{\mathcal{H}} - P_E) = 0$ e com isso $A \in J_E$. Logo, J_E é fechado na topologia operador-forte.

Como, por hipótese, $\mathcal{M}$ não posssui ideais próprios fechado na topologia operador-forte, então $J_E = \{0\}$ ou $J_E = \mathcal{M}$.

CASO 1: $J_E = \{0\}$

Como $P_E = 1_{\mathcal{H}} P_E \in J_E$, então $P_E = 0$

CASO 2: $J_E = \mathcal{M}$

Afirmação: $P_E = 1_{\mathcal{H}}$

Como $1_{\mathcal{H}} - P_E \in \mathcal{M} = J_E$, logo $(1_{\mathcal{H}} - P_E)(1_{\mathcal{H}} - P_E) = (1_{\mathcal{H}} - P_E) = 0$ e isso implica que $1_{\mathcal{H}} = P_E$.

Pelo **CASO 1** e **CASO 2**, concluímos que para cada conjunto boreliano $E \subseteq \sigma(T)$, $P_E = 0$ ou $P_E = 1_{\mathcal{H}}$.

Pela *Proposição 1.2.2*, T é o limite de somas finitas de projeções espectrais. Como as únicas projeções espectrais em $\mathcal{M}$, são 0 e $1_{\mathcal{H}}$, logo $T = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n 1_{\mathcal{H}} \in \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$. Portanto, quando $T = T^*$ temos $T \in \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$.

CASO GERAL:

Podemos escrever $T = a + ib$, onde $a = a^*$ e $b = b^*$. Para a e b auto-adjuntos provamos que $a, b \in \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$. Sendo $a = \alpha 1_{\mathcal{H}}$ e $b = \beta 1_{\mathcal{H}}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, segue que $T = a + ib = \alpha 1_{\mathcal{H}} + i\beta 1_{\mathcal{H}} = (\alpha + i\beta)1_{\mathcal{H}} \in \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$.

Portanto, concluímos que se $\mathcal{M}$ não tem ideal próprio fechado na topologia operador-forte então $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$.

$\blacksquare$

2 Fator

Neste capítulo definiremos quando uma álgebra de von Neumann é um $fator$. Tal definição é o ponto de partida dessa dissertação, pois é a partir desta definição que começamos nosso trabalho rumo ao estudo da classificação de fatores.

2.1 Definição e Exemplos de Fator

Definição 2.1.1. *Seja $p \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ uma projeção não nula. Dizemos que p é minimal se para toda projeção $q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $q \leq p$, tem-se $q = p$ ou $q = 0$.*

Exemplo 2.1.2. Qualquer projeção não nula $p \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, com $dimIm(p) = 1$, é uma projeção minimal pois, as únicas subprojeções de p são 0 ou p.

Exemplo 2.1.3. Seja

$$M = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right] : A \in M_2(\mathbb{C}) \right\} \subseteq M_4(\mathbb{C}).$$

Considere as projeções A, B e C, em M, dadas pelas matrizes

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

respectivamente. Observe que B e C são subprojeções de A, pois $AB = B = BA$ e $AC = C = CA$. Veja também que B e C são minimais, pois as únicas subprojeções, em M, de B são 0 e B e para C são 0 e C. Além disso, $dimIm(B) = dimIm(C) = 2$ e isso mostra que nem toda projeção minimal tem dimensão 1.

Atenção para o fato de que a projeção $D = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ é uma subprojeção de A em relação à $M_4(\mathbb{C})$, mas não em relação à M pois $D \notin M$.

Definição 2.1.4. *Uma álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ é um fator, se $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$, em que*

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \{T \in \mathcal{M} : ST = TS \ \forall S \in \mathcal{M}\}.$$

Exemplo 2.1.5. $M_n(\mathbb{C})$ é um fator

Seja $A = (a_{ij}) \in \mathcal{Z}(M_n(\mathbb{C}))$ qualquer. Então $AB = BA$ $\forall B \in M_n(\mathbb{C})$. Em particular, para $E_{kl} \in M_n(\mathbb{C})$, onde E_{kl}

tem valor 1 na posição (k,l) e 0 em todas as outras posições, vale $AE_{kl} = E_{kl}A$. Note que,

$$AE_{kl} = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & ... & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & ... & ... & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & ... & a_{1k} & ... & 0 \\ 0 & ... & a_{2k} & ... & 0 \\ 0 & ... & \vdots & ... & 0 \\ 0 & ... & a_{nk} & ... & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$E_{kl}A = \begin{bmatrix} 0 & ... & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & ... & ... & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & ... & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a coluna l de AE_{kl} é igual a coluna k de A, e a linha k de $E_{kl}A$ é igual a linha l de A. Como $AE_{kl} = E_{kl}A$, então $a_{1,k} = ... = a_{k-1,k} = a_{k+1,k} = ... = a_{n,k} = 0$, $a_{l,1} = ... = a_{l,l-1} = a_{l,l+1} = ... = a_{l,n} = 0$ e $a_{kk} = a_{ll}$. Repetindo o raciocínio anterior para cada $1 \leq k, l \leq n$, concluímos que $a_{kk} = a_{ll}$ e quando $k \neq l$ temos $a_{kl} = 0$. Logo, $A = \lambda I$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Como A é arbitrário, segue que $\mathcal{Z}(M_n(\mathbb{C})) = \mathbb{C}I$ e isso implica que $M_n(\mathbb{C})$ é um fator.

Exemplo 2.1.6. $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ é um fator

Fixe uma base ortonormal $\{e_n : n \in I \subseteq \mathbb{N}\}$ para $\mathcal{H}$.

Se $dim\mathcal{H} < \infty$ então $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \simeq M_n(\mathbb{C})$. Como *-isomorfismos preservam o centro(ver Proposição 5.1.17), logo $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ é um fator.

Suponha que $dim\mathcal{H} = \infty$. Sejam $T \in \mathcal{Z}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ arbitrário, $A = (a_{kl}) \in M_\infty(\mathbb{C})$ a representação matricial de T. Temos que $TS = ST \ \forall S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Em particular, para $S_{ij} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dado por $S_{ij}(x) = S_{ij}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n\right) = \lambda_j e_i$, vale $AE_{ij} = E_{ij}A$ onde $E_{ij} \in M_\infty(\mathbb{C})$ é a representação matricial de S_{ij} tal que E_{ij} tem valor 1 na posição (i,j) e 0 nas outras posições. Note que,

$$AE_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & ... \\ \vdots & \ddots & \vdots & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} & ... \\ \vdots & \vdots & ... & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & ... & ... & ... \\ \vdots & \ddots & 1 & ... \\ 0 & ... & \ddots & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & a_{1i} & 0 & ... \\ 0 & ... & 0 & \vdots & 0 & ... \\ 0 & ... & 0 & a_{ni} & 0 & ... \\ \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots & ... \end{bmatrix}$$

e

$$E_{ij}A = \begin{bmatrix} 0 & ... & ... & ... \\ \vdots & \ddots & 1 & ... \\ 0 & ... & \ddots & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & ... \\ \vdots & \ddots & \vdots & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} & ... \\ \vdots & \vdots & ... & \ddots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & ... & ... & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & ... \\ a_{j1} & ... & a_{jn} & ... \\ 0 & ... & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... \end{bmatrix}.$$

Usando o mesmo raciocínio do Exemplo 2.1.5, concluímos que $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ii} = a_{jj}$ para $\forall i, j \in \mathbb{N}$. Portanto, $A = \lambda I_\infty$ onde I_∞ é a matriz identidade em $M_\infty(\mathbb{C})$. Logo, $T = \lambda 1_{\mathcal{H}}$. Como T é arbitrário , segue que $\mathcal{Z}(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$.

2.2 Fatores do Tipo I

Na seção anterior definimos que uma álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ é um *fator* se e somente se $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$. A partir dessa seção estaremos interessados na classificação dos fatores e tal classificação será feita em função das suas projeções. Na definição de *equivalencia* entre projeções será necessário saber o que é uma *isometria parcial* (*ver Definição 5.1.7*).

Definição 2.2.1. *Um fator $\mathcal{M}$ é do tipo I, se $\mathcal{M}$ contem alguma projeção minimal.*

Definição 2.2.2. *Sejam $\mathcal{M}$ uma álgebra de von Neumann e $p, q \in \mathcal{M}$ projeções. Dizemos que p é* ***equivalente*** *a q, e denotamos por $p \sim q$, se existe uma isometria parcial $u \in \mathcal{M}$ tal que $uu^* = q$ e $u^*u = p$, isto é, $\sim$ é uma relação de equivalencia.*

Proposição 2.2.3. *Sejam $\mathcal{M}$ uma álgebra de von Neumann e $p, q, r \in \mathcal{M}$ projeções. Se $p \sim q$ e $q \sim r$ então $p \sim r$, $q \sim p$ e $p \sim p$.*

Demonstração: Ver demonstração da Proposição 6.1.5 em [7].

■

Definição 2.2.4. *Sejam $\mathcal{M}$ uma álgebra de von Neumann e $p, q \in \mathcal{M}$ projeções. Dizemos que p é* ***mais fraca*** *que q, e denotamos por $p \precsim q$, se existe uma projeção $r \in \mathcal{M}$ tal que $p \sim r$ e $r \leq q$.*

Exemplo 2.2.5. Considere as projeções
$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ no fator $M_3(\mathbb{C})$. Afirmamos que $q \precsim p$.

De fato, considere a projeção $p_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Como $qp_0 = p_0 = p_0q$, então p_0 é uma subprojeção de q. Agora, considere a matriz $u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Note que

$$uu^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = p_0$$

e

$$u^*u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = p.$$

Como u^*u é projeção, então u é uma isometria parcial. Assim, $p \sim p_0$ pois $u \in M_3(\mathbb{C})$. Portanto, $p \sim p_0 \leq q$.

Proposição 2.2.6. *Sejam $\mathcal{M}$ um fator e $p, q \in \mathcal{M}$ projeções. Então $p \precsim q$ ou $q \precsim p$.*

Demonstração: Ver demonstração do Teorema 6.2.6 em [7].

∎

Lema 2.2.7. *Se $\mathcal{M}$ é uma álgebra de von Neumann e $p, q \in$*

$\mathcal{M}$ são projeções, tais que p é minimal e $p \sim q$, então q é minimal.

Demonstração: Sejam $\mathcal{M}$ uma álgebra de von Neumann e $p, q \in \mathcal{M}$ projeções tais que p é minimal e $p \sim q$. Então existe uma isometria parcial $u \in \mathcal{M}$ tal que $u^*u = p$ e $uu^* = q$. Devemos lembrar que $Im(u^*) = Im(p) \Leftrightarrow Im(u) = Im(q)$ (*ver [5] Remark 4.2.3*). Seja $q' \leq q$ e defina $K := u^*(Im(q')) \subseteq Im(p)$. Defina p' como a projeção sobre K. Como $K = Im(p') \subseteq Im(p)$ implica em $p' \leq p$ e sendo p minimal por hipótese, então $p' = 0$ ou $p' = p$. Logo, $K = \{0\}$ ou $K = Im(p)$. Se $K = \{0\}$ então $u(\{0\}) = u(K) = u(u^*(Im(q'))) = q(Im(q')) = Im(q')$ e isso implica em $Im(q') = \{0\}$. Se $K = Im(p)$ então $u(Im(p)) = u(K) = u(u^*(Im(q'))) = q(Im(q')) = Im(q')$. Como $u(Im(p)) = Im(q)$, logo $Im(q) = Im(q')$. Portanto, $q' = 0$ ou $q' = q$ e com isso podemos concluir que q é minimal.

■

Lema 2.2.8. *Se $\mathcal{M}$ é uma álgebra de von Neumann e $\mathcal{F} = \{p_i \in \mathcal{M} : i \in I\}$ uma família de projeções duas-a-duas ortogonais, então são verdadeiras as seguintes afirmações:*

i) $\sum_{i \in I} p_i$ *converge na topologia operador-forte*

ii) $\sum_{i \in I} p_i$ *é uma projeção*

Demonstração: A demonstração dos itens (i) e (ii) está na Proposição 2.5.4 em [5].

■

Lema 2.2.9. *Se $\mathcal{M}$ é uma álgebra de von Neumann, então existe uma família maximal $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$ de projeções minimais, 2 a 2 ortogonais e 2 a 2 equivalentes.*

Demonstração: Seja $\mathcal{M}$ uma álgebra von Neumann. Se não existe nenhuma projeção minimal em $\mathcal{M}$, então $\mathcal{F} = \emptyset$ e desse modo $\mathcal{F}$ é maximal. Suponha que $\mathcal{M}$ contem projeção minimal. Considere $\mathcal{P}$ a família de todos os conjuntos P, onde cada P é um conjunto de projeções minimais 2 a 2 ortogonais e 2 a 2 equivalentes. Vamos definir uma relação de ordem " $\leq$ " em $\mathcal{P}$ dada por $\subseteq$. É óbvio que " $\leq$ " é uma ordem parcial. Seja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ arbitrário e totalmente ordenado.

Afirmação: $\displaystyle\bigcup_{P\in\mathcal{C}} P \in \mathcal{P}$

Sejam $p, q \in \displaystyle\bigcup_{P\in\mathcal{C}} P$ arbitrários. Então existem $P, Q \in \mathcal{C}$ tal que $p \in P$ e $q \in Q$. Como $\mathcal{C}$ é totalmente ordenado então $P \leq Q$ ou $Q \leq P$. Considere, sem perda de generalidade, que $P \leq Q$. Logo, $P \subseteq Q$ e com isso $p, q \in Q$. Assim, $p \perp q$ e $p \sim q$. Portanto, $\displaystyle\bigcup_{P\in\mathcal{C}} P \in \mathcal{P}$.

Afirmação: $\displaystyle\bigcup_{P\in\mathcal{C}} P$ é um majorante de $\mathcal{C}$

É óbvio que $P \subseteq \bigcup\limits_{P \in \mathcal{C}} P \Rightarrow P \leq \bigcup\limits_{P \in \mathcal{C}} P \; \forall P \in \mathcal{C}$. Logo, $\bigcup\limits_{P \in \mathcal{C}} P$ é um majorante de $\mathcal{C}$.

Logo, pelo *Lema de Zorn* existe uma família $\mathcal{F} \in \mathcal{P}$ que é maximal.

$\blacksquare$

Corolário 2.2.10. *Se $\mathcal{M}$ é um fator então para a família maximal $\mathcal{F} = \{p_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{M}$, do Lema 2.2.9, tem-se que $1_{\mathcal{H}} = \sum\limits_{i \in I} p_i$.*

Demonstração: Tome $p_{i_0} \in \mathcal{F}$. Considere $p = \sum\limits_{i \in I} p_i$ e $q = 1_{\mathcal{H}} - p$. Pela *Proposição 2.2.6* $p_{i_0} \precsim q$ ou $q \precsim p_{i_0}$. Vamos analisar 2 casos:

CASO 1: Suponha $q \precsim p_{i_0}$.

Então existe $q' \in \mathcal{M}$ tal que $q \sim q'$ e $q' \leq p_{i_0}$. Também existe uma isometria parcial $u \in \mathcal{M}$ tal que $u^*u = q'$ e $uu^* = q$. Como p_{i_0} é minimal então temos 2 casos para q':

CASO 1.1: $q' = 0$. Então $u^*u = 0$ e isso implica que $\|u^*u\| = 0$. Como $\mathcal{M}$ é uma C^*-álgebra, então $\|u^*u\| = \|u\|^2$ e isso implica em $u = 0$. Assim, $q = 0$ e $p = 1_{\mathcal{H}}$.

CASO 1.2: $q' = p_{i_0}$. Então $q \sim p_{i_0}$. Como $p_{i_0} \sim p_i \; \forall i \in I$, logo $q \sim p_i \; \forall i \in I$. Obviamente que $q \perp p_i \; \forall i \in I$. Dessa forma, constatamos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F} \cup \{q\}$, contrariando o fato de $\mathcal{F}$ ser maximal.

Portanto, pelo CASO 1, devemos ter $q' = 0$ e isso implica em $q = 0$.

CASO 2: Suponha $p_{i_0} \precsim q$
Então existe projeção $r \in \mathcal{M}$ tal que $p_{i_0} \sim r$ e $r \leq q$. Como p_{i_0} é minimal, então r é minimal (*ver Lema 2.2.7*). Sabendo que $r \leq q$ implica $qr = r = rq$ e que $q \perp p_i \; \forall i \in I$, então $rp_i = rqp_i = r0 = 0 \; \forall i \in I$ implica $r \perp p_i \; \forall i \in I$. Note que $r \sim p_i \; \forall i \in I$, pois $r \sim p_{i_0}$ e $p_{i_0} \sim p_i \; \forall i \in I$. Dessa forma, constatamos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F} \cup \{r\}$, contrariando o fato de $\mathcal{F}$ ser maximal. Logo, não é verdade que $p_{i_0} \precsim q$.
Concluímos que $q \precsim p_{i_0}$ e isso implica em $q = 0$. Portanto, $p = 1_{\mathcal{H}}$.

$\blacksquare$

Comentário: Antes de enunciar e demonstrar o principal teorema desse capítulo, faremos algumas considerações e demonstraremos alguns fatos que serão importantes para o teorema.
Sejam $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ uma álgebra de von Neumann e $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ uma projeção de $\mathcal{M}$. Podemos escrever $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, onde $\mathcal{H}_1 = Im(P)$ e $\mathcal{H}_2 = Ker(P)$. Vale lembrar que duas funções f e g são iguais se

i) O domínio de f e g são iguais

ii) O contradomínio de f e g são iguais

iii) $f(x) = g(x)\ \forall x \in Dom(f)$

Considere $p : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_1$ uma projeção sobre $\mathcal{H}_1$. Note que $p(\xi) = P(\xi)\ \forall \xi \in \mathcal{H}$, mas o contradomínio de P é $\mathcal{H}$ e de p é $\mathcal{H}_1$. Logo, P e p são operadores diferentes. Fixe $\eta \in \mathcal{H}_1$. Para cada $\xi_1 + \xi_2 = \xi \in \mathcal{H}$, temos

$$\langle p^*(\eta), \xi\rangle = \langle \eta, p(\xi)\rangle = \langle \eta, p(\xi_1 + \xi_2)\rangle = \langle \eta, p(\xi_1) + p(\xi_2)\rangle =$$

$$= \langle \eta, \xi_1 + 0\rangle = \langle \eta, \xi_1\rangle + \langle \eta, 0\rangle = \langle \eta, \xi_1\rangle + \langle \eta, \xi_2\rangle = \langle \eta, \xi_1 + \xi_2\rangle =$$

$$= \langle \eta, \xi\rangle \Longrightarrow \langle p^*(\eta) - \eta, \xi\rangle = 0.$$

Em particular, para $\xi = p^*(\eta) - \eta$

$$\langle p^*(\eta) - \eta, p^*(\eta) - \eta\rangle = 0 \Longrightarrow p^*(\eta) - \eta = 0 \Longrightarrow p^*(\eta) = \eta.$$

Então $p^*(\eta) = \eta\ \forall \eta \in \mathcal{H}_1$ e com isso concluímos que $p^* = \iota$, onde $\iota : \mathcal{H}_1 \hookrightarrow \mathcal{H}$ é o operador de inclusão. Como $P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $p : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_1$ e $\iota : \mathcal{H}_1 \hookrightarrow \mathcal{H}$, então para cada $\xi_1 + \xi_2 = \xi \in \mathcal{H}$, temos

$$(p \circ \iota)\xi_1 = p(\iota(\xi_1)) = p(\xi_1 + 0) = \xi_1$$

e

$$(\iota \circ p)\xi = \iota(p(\xi)) = \iota(\xi_1) = \iota(\xi_1 + 0) \in \mathcal{H}.$$

Assim, $p \circ \iota = 1_{\mathcal{H}_1}$ e $\iota \circ p = P$.

Seja $T \in \mathcal{M}$. Considere $[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$, com

$T_{ij} : \mathcal{H}_j \longrightarrow \mathcal{H}_i$ e $1 \leq i,j \leq 2$, $[p] = \begin{bmatrix} 1_{\mathcal{H}_1} & 0 \end{bmatrix}$ e $[\iota] = \begin{bmatrix} 1_{\mathcal{H}_1} \\ 0 \end{bmatrix}$ as representações matriciais dos operadores T, p e ι respectivamente. Note que $[p][T][\iota] = \begin{bmatrix} 1_{\mathcal{H}_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{\mathcal{H}_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{\mathcal{H}_1} \\ 0 \end{bmatrix} = [T_{11}]$, logo podemos concluir que $p \circ T \circ \iota = T_{11}$.

Proposição 2.2.11. *$p\mathcal{M}\iota$ é uma álgebra de von Neumann em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$.*

Demonstração: Tome $T, S \in \mathcal{M}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ quaisquer. Observe que,

i) $\alpha pT\iota + pS\iota = p(\alpha T + S)\iota \in p\mathcal{M}\iota$;

ii) $(pT\iota)(pS\iota) = pT(\iota p)S\iota = p(TPS)\iota \in p\mathcal{M}\iota$, pois $TPS \in \mathcal{M}$

iii) $p1_{\mathcal{H}}\iota = p\iota = 1_{\mathcal{H}_1}$

iv) $(pT\iota)^* = \iota^* T^* p^* = pT^*\iota \in p\mathcal{M}\iota$

v) Seja $S \in \overline{p\mathcal{M}\iota}^{TOF}$.
Então existe uma *net* $\{pT_i\iota\}_{i \in I} \subseteq p\mathcal{M}\iota$ tal que $pT_i\iota \stackrel{i \in I}{\rightarrow} S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ na topologia operador-forte.
Note que

$$(pS\iota)\xi_1 = p(S(\iota(\xi_1)) = p(S(\xi_1 + 0)) = p(S\xi_1) =$$

$$= p(\lim_{i\in I}(pT_i\iota)\xi_1) = \lim_{i\in I}(p^2T_i\iota)\xi_1 = \lim_{i\in I}(pT_i\iota)\xi_1 \; \forall \xi_1 \in \mathcal{H}_1.$$

Logo, $pT_i\iota \overset{i\in I}{\to} pS\iota$ na topologia operador-forte e pela unicidade de limites $S = pS\iota$. Como S é arbitrário, concluímos que $p\mathcal{M}\iota$ é fechado na topologia operador-forte.

Portanto, por (i),(ii),(iii),(iv) e (v), $p\mathcal{M}\iota$ é uma álgebra de von Neumann em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$.

$\blacksquare$

Corolário 2.2.12. *Se P é minimal então toda projeção $q \in p\mathcal{M}\iota$ é $1_{\mathcal{H}_1}$ ou 0. Além disso, $P\mathcal{M}P = \mathbb{C}P$.*

Demonstração: Considere $T \in \mathcal{M}$ tal que $q := pT\iota$ seja projeção e defina $Q := \iota qp$. Note que,

i) $Q = \iota qp = \iota(pT\iota)p = \iota pT\iota p = PTP \in \mathcal{M}$;

ii) $Q^2 = (\iota qp)(\iota qp) = \iota q(p\iota)qp = \iota q 1_{\mathcal{H}_1} qp = \iota qp = Q$;

iii) $Q^* = (\iota qp)^* = p^* q \iota^* = \iota qp = Q$, pois $p^* = \iota$

iv) $QP = (\iota qp)P = (\iota qp)(\iota p) = (\iota q(p\iota)p) = \iota(q1_{\mathcal{H}_1})p = \iota qp = Q$

v) $pQ\iota = p(\iota qp)\iota = p\iota qp\iota = 1_{\mathcal{H}_1} q 1_{\mathcal{H}_1} = q$

Pelos itens (i), (ii) e (iii), Q é uma projeção em $\mathcal{M}$ e pelo item (iv), Q é uma subprojeção de P. Por hipótese, P é minimal, logo $Q = P$ ou $Q = 0$.

CASO 1: $Q = P$

Então $q = pQ\iota = pP\iota = p(\iota p)\iota = 1_{\mathcal{H}_1}1_{\mathcal{H}_1} = 1_{\mathcal{H}_1}$.

CASO 2: $Q = 0$

Então $q = 0$. Portanto, $q = 1_{\mathcal{H}_1}$ ou $q = 0$.

Sabendo que uma álgebra de von Neumann é gerada pelas suas projeções, então $p\mathcal{M}\iota = \overline{span}^{TN}\{0, 1_{\mathcal{H}_1}\} = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}_1}$.

Afirmamos que $P\mathcal{M}P = \mathbb{C}P$. De fato, note que $P\mathcal{M}P = \iota(p\mathcal{M}\iota)p = \iota\mathbb{C}1_{\mathcal{H}_1}p = \mathbb{C}\iota p = \mathbb{C}P$.

■

Agora estamos pronto para demonstrar o principal teorema deste capítulo. Com esse teorema podemos dizer que cada fator $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ do tipo I, com $\mathcal{H}$ separável, se comporta como a álgebra das matrizes $M_n(\mathbb{C})$ ou como a álgebra dos operadores lineare e limitados $\mathcal{L}(\ell_2)$.

Teorema 2.2.13. *Se $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é um fator do tipo I, com $\mathcal{H}$ separável, então*

$$\mathcal{M} \simeq M_n(\mathbb{C}) \text{ ou } \mathcal{M} \simeq \mathcal{L}(\ell_2).$$

Demonstração: Seja $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ um fator do tipo I, com $\mathcal{H}$ separável. Então pelo *Lema 2.2.9* existe uma família maximal $\mathcal{F} = \{p_i : i \in J\} \subseteq \mathcal{M}$ de projeções minimais 2 a 2 ortogonais e 2 a 2 equivalentes. Sejam

$k, l \in J$ distintos e considere as projeções $p_k, p_l \in \mathcal{F}$. Como p_k e p_l são minimais, então $Im(p_k) \neq \{0\}$ e $Im(p_l) \neq \{0\}$. Com isso podemos escolher $\xi_k \in Im(p_k)$ e $\xi_l \in Im(p_l)$, ambos não nulos, com $\|\xi_k\| = \|\xi_l\| = 1$. Observe que $\|\xi_k - \xi_l\|^2 = \langle \xi_k - \xi_l, \xi_k - \xi_l \rangle = \langle \xi_k, \xi_k \rangle - 2Re\,\langle \xi_k, \xi_l \rangle + \langle \xi_l, \xi_l \rangle = 1 - 2Re0 + 1 = 2$. Então $\|\xi_k - \xi_l\|^2 = 2$, ou melhor, $\|\xi_k - \xi_l\| = \sqrt{2}$. Como ξ_k e ξ_l são arbitrários, temos que $\|\xi - \eta\| = \sqrt{2}\ \forall \xi \in Im(p_k)$ e $\eta \in Im(p_l)$, com $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$. Como $\mathcal{H}$ é separável, por hipótese, existe $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}$ denso e enumerável. Fixe $i_0, j_0 \in J$ distintos. Sejam $r \in \mathbb{R}$ e $\xi_{i_0}, \xi_{j_0} \in \mathcal{H}$, tal que $0 < r < \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\|\xi_{i_0}\| = \|\xi_{j_0}\| = 1$. Como $\mathcal{D}$ é denso, então existem $d_{i_0} \in B(\xi_{i_0}, r)$ e $d_{j_0} \in B(\xi_{j_0}, r)$, com $d_{i_0} \neq d_{j_0}$, pois $B(\xi_{i_0}, r) \cap B(\xi_{j_0}, r) = \emptyset$. Então $\forall i, j \in J$, com $i \neq j$, existem $d_i, d_j \in \mathcal{D}$ tal que $d_i \neq d_j$. Com isso temos uma correspondência injetiva entre J e $\mathcal{D}$, o que implica em J ser enumerável, pois $\mathcal{D}$ é enumerável. Como $\mathcal{D}$ está numa correspondência injetiva com $\mathbb{N}$, podemos considerar $J \subseteq \mathbb{N}$. Sendo J enumerável, podendo ser finito ou infinito, $\mathcal{F}$ também é enumerável e isso implica em $\mathcal{F}$ ser finito ou infinito.

Fixe $p_1 \in \mathcal{F}$. Como $p_i \sim p_1\ \forall i \in J$, então para cada $i \in J$ existe uma isometria parcial $u_i \in \mathcal{M}$ tal que $u_i^* u_i = p_i$ e $u_i u_i^* = p_1$. Defina $e_{ij} := u_i^* u_j \in \mathcal{M}$.

Afirmação: O operador e_{ij} tem as seguintes propriedades:

i) $e_{ij}e_{kl} = \delta_{j,k}e_{il}$

ii) $(e_{ij})^* = (u_i^*u_j)^* = u_j^*u_i = e_{ji}$

iii) $e_{ii} = p_i$

i) Se $j \neq k$ então $e_{ij}e_{kl} = u_i^*u_ju_k^*u_l = u_i^*(u_ju_j^*u_j)(u_k^*u_ku_k^*)u_l = u_i^*u_j(u_j^*u_j)(u_k^*u_k)u_k^*u_l = u_i^*u_jp_jp_ku_k^*u_l = u_i^*u_j0u_k^*u_l = 0$, pois p_j e p_k são ortogonais.
Se $j = k$ então $e_{ij}e_{jl} = u_i^*(u_ju_j^*)u_l = u_i^*p_1u_l = u_i^*(u_lu_l^*)u_l = u_i^*u_l = e_{il}$. Logo, $e_{ij}e_{kl} = \delta_{j,k}e_{il}$.

ii) $(e_{ij})^* = (u_i^*u_j)^* = u_j^*u_i = e_{ji}$

iii) $e_{ii} = u_i^*u_i = p_i$

Afirmação: Se $T \in \mathcal{M}$ então para cada $i, j \in J$ existe $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ tal que $e_{ii}Te_{jj} = \lambda_{ij}e_{ij}$
Seja $T \in \mathcal{M}$ e fixe $i, j \in J$. Note que

$$u_iTu_j^* = u_iu_i^*u_iTu_j^*u_ju_j^* = p_1(u_iTu_j^*)p_1 \in p_1\mathcal{M}p_1 =$$

$$= \mathbb{C}p_1 \text{ (ver Corolário 2.2.12).}$$

Logo, $u_iTu_j^* = \lambda_{ij}p_1$, para algum $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$.
Agora, observe que

$$e_{ii}Te_{jj} = u_i^*u_iTu_j^*u_j = u_i^*\lambda_{ij}p_1u_j = \lambda_{ij}u_i^*(u_ju_j^*u_j) =$$

$$= \lambda_{ij} u_i^* u_j = \lambda_{ij} e_{ij}.$$

Portanto, existe $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ tal que $e_{ii} T e_{jj} = \lambda_{ij} e_{ij}$.

Defina $\mathcal{M}_0 := span\{e_{ij}\}$. É claro que $\mathcal{M}_0$ é uma sub-*-álgebra de $\mathcal{M}$. Como o objetivo é provar $\mathcal{M} \simeq M_n(\mathbb{C})$ ou $\mathcal{M} \simeq \mathcal{L}(\ell_2)$, então vamos analisar dois casos.

CASO 1: Suponha que $\mathcal{F}$ seja finito.
Então podemos escrever $\mathcal{F} = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Note que dados $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_{ij}$,$\displaystyle\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl} e_{kl} \in \mathcal{M}_0$ temos

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_{ij}\right)\left(\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl} e_{kl}\right) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij} b_{kl} e_{ij} e_{kl} =$$

$$= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij} b_{kl} \delta_{jk} e_{il} = \sum_{i,j,l=1}^{n} a_{ij} b_{jl} e_{il}.$$

Observe que $\displaystyle\sum_{i,j,l=1}^{n} a_{ij} b_{jl} e_{il} = \sum_{i,l=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} e_{il}\Big) = \sum_{i,l=1}^{n} \left(\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl}\Big) e_{il}\right) = \sum_{i,l=1}^{n} c_{il} e_{il},$ onde $c_{il} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{jl}$.
Considerando $(a_{ij}), (b_{jl}) \in M_n(\mathbb{C})$ obtemos $(c_{il}) = (a_{ij})(b_{jl}) \in M_n(\mathbb{C})$ Assim, podemos concluir que para cada $(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ temos $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_{ij} \in M_0 \subseteq \mathcal{M}$. Logo, podemos definir um *-homomorfismo $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}$

dado por $\varphi((a_{ij})) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}e_{ij}$. É óbvio que $Ker(\varphi)$ é um ideal fechado na topologia operador-forte de $M_n(\mathbb{C})$.

Afirmação: $Ker(\varphi) = \{0\}$

Sendo $M_n(\mathbb{C})$ um fator, então os únicos ideais próprios de $M_n(\mathbb{C})$ fechados na topologia operador-forte são $\{0\}$ ou $M_n(\mathbb{C})$. Então $Ker(\varphi) = \{0\}$ ou $Ker(\varphi) = M_n(\mathbb{C})$.

Se $Ker(\varphi) = M_n(\mathbb{C})$ então $\varphi(A) = 0\ \forall A \in M_n(\mathbb{C})$, o que implica em $\varphi \equiv 0$. Mas $\varphi \equiv 0$ é falso, pois dado $A \in M_n(\mathbb{C})$, de modo que somente $a_{11} \neq 0$, então $\varphi(A) = a_{11}e_{11} = p_1 \neq 0$. Logo, $Ker(\varphi) = \{0\}$.

Sendo $Ker(\varphi) = \{0\}$, concluímos que φ é um *-homomorfismo injetor.

Agora, o objetivo é provar que φ é sobrejetor. Para isso, vamos mostrar que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_0 = \varphi(M_n(\mathbb{C}))$, já que obviamente $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$. Seja $T \in \mathcal{M}$ arbitrário. Note que

$$T = 1_{\mathcal{H}}T1_{\mathcal{H}} = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)T\left(\sum_{j=1}^{n} p_j\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} e_{ii}\right)T\left(\sum_{j=1}^{n} e_{jj}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ii}Te_{jj} = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij}e_{ij}$$

e com isso $T \in \mathcal{M}_0$. Como T é arbitrário, podemos concluir que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_0$. Portanto, φ é um *-isomorfismo e com isso provamos que $\mathcal{M} \simeq M_n(\mathbb{C})$.

CASO 2: Suponha que $\mathcal{F}$ seja infinito.
Fixe $\xi_1 \in Im(p_1)$ tal que $\|\xi_1\| = 1$. Defina $\xi_i = u_i^*(\xi_1)$. Note que

$$\langle \xi_i, \xi_j \rangle = \left\langle u_i^*(\xi_1), u_j^*(\xi_1) \right\rangle = \langle u_j u_i^*(\xi_1), \xi_1 \rangle =$$

$$= \left\langle u_j u_j^* u_j u_i^* u_i u_i^*(\xi_1), \xi_1 \right\rangle =$$

$$= \langle u_j p_j p_i u_i^*(\xi_1), \xi_1 \rangle = \langle u_j 0 u_i^*(\xi_1), \xi_1 \rangle = 0 \, \forall i, j \in J, \text{ com } i \neq j$$

e

$$\|\xi_i\|^2 = \langle \xi_i, \xi_i \rangle = \langle u_i^*(\xi_1), u_i^*(\xi_1) \rangle = \langle u_i u_i^*(\xi_1), \xi_1 \rangle =$$

$$= \langle p_1(\xi_1), \xi_1 \rangle = \langle \xi_1, \xi_1 \rangle = \|\xi_1\|^2 = 1 \ \forall i \in J.$$

Dessa forma obtemos um conjunto ortonormal $\mathcal{K} = \{\xi_k : k \in \mathbb{N}\}$.
Defina $\mathcal{H}_1^0 = span\ \mathcal{K}$ e $\mathcal{H}_1 = \overline{\mathcal{H}_1^0}$. Obviamente que $\mathcal{H}_1$ é um espaço de Hilbert.

Afirmação: $\mathcal{H}_1$ é invariante por $\mathcal{M}_0$, ou seja, $\mathcal{M}_0 \mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_1$
Fixe $e_{ij} \in \mathcal{M}_0$ e $\xi_k \in \mathcal{K}$. Note que $e_{ij}(\xi_k) = (u_i^* u_j)(u_k^*(\xi_1)) = u_i^* u_j u_k^*(\xi_1)$. Temos 2 casos:

- CASO 1: $j = k$
  $e_{ij}(\xi_j) = (u_i^* u_j)(u_j^*(\xi_1)) = u_i^* u_j u_j^*(\xi_1) = u_i^* p_1(\xi_1) = u_i^*(\xi_1) = \xi_i$

- CASO 2: $j \neq k$
  $e_{ij}(\xi_k) = (u_i^* u_j)(u_k^*(\xi_1)) = u_i^* u_j u_k^*(\xi_1) = u_i^* u_j {u_j}^* u_j u_k^* u_k u_k^*(\xi_1) = u_i^* u_j p_j p_k u_k^*(\xi_1) = 0$, pois $p_j \perp p_k$

Então podemos escrever $e_{ij}(\xi_k) = \delta_{jk}\xi_i$. Observe que,

$$e_{ij}\left(\sum_{l=1}^{n} \alpha_l \xi_l\right) = \sum_{l=1}^{n} e_{ij}(\alpha_l \xi_l) = \sum_{l=1}^{n} \delta_{jl}\alpha_l \xi_i \in span\{\xi_i\} \subseteq \mathcal{H}_1^0.$$

Assim, segue que

$$e_{ij}(\mathcal{H}_1^0) \subseteq \mathcal{H}_1^0 \subseteq \mathcal{H}_1.$$

Como e_{ij} é contínuo, temos que $e_{ij}(\mathcal{H}_1) \subseteq \mathcal{H}_1$. Logo, $\left(\sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\right)(\mathcal{H}_1) \subseteq \mathcal{H}_1$ e com isso $\mathcal{M}_0\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_1$.

Afirmação: $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}_0}^{TOF}$
É claro que $\overline{\mathcal{M}_0}^{TOF} \subseteq \mathcal{M}$. Seja $T \in \mathcal{M}$, arbitrário. Então

$$T = 1_{\mathcal{H}} T 1_{\mathcal{H}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i\right) T \left(\sum_{j=1}^{\infty} p_j\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} e_{ii}\right) T \left(\sum_{j=1}^{\infty} e_{jj}\right) = \sum_{i,j=1}^{\infty} e_{ii} T e_{jj} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i,j=1}^{N} \lambda_{ij} e_{ij}.$$

Logo, $T \in \overline{\mathcal{M}_0}^{TOF}$ e como T é arbitrário segue que $\mathcal{M} \subseteq \overline{\mathcal{M}_0}^{TOF}$.

Afirmação: $\mathcal{H}_1$ é invariante por $\mathcal{M}$, ou seja, $\mathcal{M}\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_1$
Seja $T \in \mathcal{M}$, arbitrário. Então existe uma *net* $\{T_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{M}_0$ que converge para T na topologia operador-forte. Como $T_i(\eta) \xrightarrow{i\in I} T(\eta)\ \forall\eta \in \mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_1$ é fechado e $T_i(\eta) \in \mathcal{M}_0\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_1$ $\forall\eta \in \mathcal{H}_1, i \in I$, então $T(\eta) \in \mathcal{H}_1\ \forall\eta \in \mathcal{H}_1$. Logo, $T(\mathcal{H}_1) \subseteq \mathcal{H}_1$ e como T é arbitrário, podemos concluir que $\mathcal{M}\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_1$.

Dessa forma, podemos definir um operador

$$\Psi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$$

dado por $\Psi(T) = T_{|\mathcal{H}_1}$. Obviamente que Ψ está bem definido.

Afirmação: São verdadeiras as seguintes afirmações:

i) Ψ é um *-homomorfismo

ii) $Ker(\Psi)$ é um ideal fechado na topologia operador-forte

iii) Ψ é injetor

iii) Ψ é fracamente contínuo

(i) Óbvio

(ii) Seja $U \in Ker(\Psi)$ arbitrário. Vamos provar que $UR, RU \in Ker(\Psi)\ \forall R \in \mathcal{M}$.

Note que

$$\Psi(UR) = \Psi(U)\Psi(R) = 0\Psi(R) = 0 = \Psi(R)\Psi(U) =$$

$$= \Psi(RU) \ \forall R \in \mathcal{M}.$$

Logo, $Ker(\Psi)$ é um ideal.

Seja $\{T_i\}_{i\in I} \subseteq ker(\Psi)$ uma *net* que converge para $T \in \mathcal{M}$. Vamos provar que $T \in ker(\Psi)$, ou seja, $\Psi(T) = T_{|\mathcal{H}_1} = 0$. Sabemos que $T_i(\xi) \to T(\xi)\ \forall \xi \in \mathcal{H}$ e $T_{i|\mathcal{H}_1} = \Psi(T_i) = 0\ \forall i \in I$. Então $T_i(\xi) = 0 \xrightarrow{i\in I} T(\xi)\ \forall \xi \in \mathcal{H}_1$ implica que $\Psi(T) = T_{|\mathcal{H}_1} = 0$. Logo, $T \in Ker(\Psi)$ o que implica em $Ker(\Psi)$ ser fechado na topologia operador-forte.

(iii) Provamos que os únicos ideais próprios fechados na topologia operador-forte num fator $\mathcal{M}$ são $\{0\}$ ou $\mathcal{M}$. Então $Ker(\Psi) = \{0\}$ ou $Ker(\Psi) = \mathcal{M}$. Suponha que $Ker(\Psi) = \mathcal{M}$. Então $\Psi \equiv 0$, o que é absurdo pois $\Psi(1_{\mathcal{H}}) = 1_{\mathcal{H}_1} \neq 0$. Logo, só nos resta $ker(\Psi) = \{0\}$ e isso implica que Ψ é injetor.

(iv) Considere a *net* $\{T_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{M}$ que converge para T na topologia operador-fraco. Então $\langle (T_i - T)\xi, \eta\rangle \overset{i\in I}{\to} 0$ para cada $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Logo, é óbvio que $\langle (\Psi(T_i) - \Psi(T))\xi_1, \eta_1\rangle \overset{i\in I}{\to} 0$ para cada $\xi_1, \eta_1 \in \mathcal{H}_1$.

Até aqui sabemos que $Im(\Psi) = \Psi(\mathcal{M}) \supseteq \Psi(\mathcal{M}_0)$. Fixe a base canônica $(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell_2$ e defina $f_{ij} : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ dado por

$$f_{ij}((\alpha_k)) = f_{ij}((\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ...\alpha_j, ...)) =$$

$$= \underbrace{(0, 0, ..., 0, \alpha_j, 0, ...)}_{\alpha_j \text{ na i-ésima posição}} = \alpha_j e_i.$$

Devemos lembrar que existe um isomorfismo isométrico $\phi : \ell_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ e um isomorfismo $\psi : \mathcal{L}(\ell_2) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, onde $\phi((\alpha_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$ e $\psi(T) = \phi T \phi^{-1}$, respectivamente. A idéia para demostração de que Ψ é um *-isomorfismo pode ser divida em duas partes. Na primeira parte prova-se os seguintes passos: $\Psi(\mathcal{M}_0) = span\{\psi(f_{ij})\}$, $span\{f_{ij}\}$ é fortemente denso em $\mathcal{L}(\ell_2)$ e que $\Psi(\mathcal{M}_0)$ é fortemente densa em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, pois ψ é fortemente contínuo. Na segunda parte, sabendo que $\Psi(\mathcal{M}_0) \subseteq \Psi(\mathcal{M})$ e $\overline{\Psi(\mathcal{M}_0)}^{TOF} = \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, deve-se provar que $\Psi(\mathcal{M})$ é fechado na topologia operador-forte e assim concluir que Ψ é sobrejetora mostrando que $\Psi(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$.

Afirmação: $\Psi(e_{ij}) = (e_{ij})_{|\mathcal{H}_1} = \psi(f_{ij})$

Seja $\xi_k \in \mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}_1$. Como $\xi_k = 0\xi_1 + 0\xi_2 + ... + 0\xi_{k-1} + 1\xi_k +$

$0\xi_{k+1} + ...$, vamos definir

$$x_k := \phi^{-1}(\xi_k) = \underbrace{(0,0,...0,1,0,...)}_{\text{1 na k-ésima posição}} .$$

Temos que

$$f_{ij}(x_k) = f_{ij}((0,0,...0,1,0,...)) =$$

$$= \begin{cases} 0 = (0,0,...0,0,0,...), & j \neq k \\ x_i = \underbrace{(0,0,...0,1,0,...)}_{\text{1 na i-ésima posição}} , & j = k \end{cases}$$

Então podemos escrever $f_{ij}(x_k) = \delta_{jk} x_i \; \forall k \in \mathbb{N}$. Já provamos que $e_{ij}(\xi_k) = \delta_{jk}\xi_i$. Logo,

$$e_{ij}(\xi_k) = \delta_{jk}\phi(x_i) = \phi(\delta_{jk}x_i) = \phi(f_{ij}(x_k)) = \phi(f_{ij}(\phi^{-1}(\xi_k))) =$$

$$= \phi f_{ij}\phi^{-1}(\xi_k) = \psi(f_{ij})(\xi_k) \; \forall \xi_k \in \mathcal{K}.$$

Assim, $e_{ij}(\mathcal{K}) = \psi(f_{ij})(\mathcal{K})$, implicando em $e_{ij}(\mathcal{H}_0^1) = \psi(f_{ij})(\mathcal{H}_0^1)$ e por sua vez em $e_{ij}(\mathcal{H}_1) = \psi(f_{ij})(\mathcal{H}_1)$. Portanto, $\psi(f_{ij}) = \Psi(e_{ij})$.

Sabemos que $\Psi(\mathcal{M}_0) \subseteq \Psi(\mathcal{M}) = Im(\Psi)$ e pela afirmação imediatamente acima podemos concluir que $span\{\psi(f_{ij})\} = \Psi(\mathcal{M}_0)$. Para provarmos que Ψ é sobrejetor, e portanto um isomorfismo, devemos mostrar que $span\{\psi(f_{ij})\}$ é fortemente denso em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ e $Im(\Psi)$ é fechada na topologia operador-forte, respectivamente. Esses dois fatos seram demonstrados nas seguintes afirmações:

Afirmação: $span\{f_{ij}\}$ é denso, com relação a topologia operador-forte, em $\mathcal{L}(\ell_2)$

Sejam $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$, arbitrário, e a base canônica $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $R_n \in \mathcal{L}(\ell_2)$ uma projeção sobre $span\{e_1, ...e_n\}$. Afirmamos que $R_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1_{\ell_2}$ na topologia operador-forte. De fato, observe que

$$\|R_n(x) - 1_{\ell_2}(x)\| =$$

$$= \|(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) - (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, ...)\| =$$

$$= \|(0, 0, ...0, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, ...)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \forall x \in \ell_2.$$

Logo, $R_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} 1_{\ell_2}(x)$ $\forall x \in \ell_2$ e isso implica em $R_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1_{\ell_2}$ na topologia operador-forte.

Podemos escrever $T = 1_{\ell_2} T 1_{\ell_2} = (\lim\limits_{n\to\infty} R_n) T (\lim\limits_{n\to\infty} R_n)$.

Considere $[T] = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_{11} & ... & \lambda_{1n} & ... \\ \vdots & \ddots & \vdots & ... \\ \lambda_{n1} & ... & \lambda_{nn} & ... \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right)$ e

$[R_n] = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & ... & 0 & 0 & ... \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ... \\ 0 & ... & 1 & 0 & ... \\ \hline 0 & ... & 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right)$ as representações matriciais de T e R_n, respectivamente.

Observe que, $[R_n][T][R_n] =$

$$= \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & ... & 0 & 0 & ... \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ... \\ 0 & ... & 1 & 0 & ... \\ \hline 0 & ... & 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_{11} & ... & \lambda_{1n} & ... \\ \vdots & \ddots & \vdots & ... \\ \lambda_{n1} & ... & \lambda_{nn} & ... \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & ... & 0 & 0 & ... \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ... \\ 0 & ... & 1 & 0 & ... \\ \hline 0 & ... & 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|cc} \lambda_{11} & ... & \lambda_{1n} & 0 & ... \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ... \\ \lambda_{n1} & ... & \lambda_{nn} & 0 & ... \\ \hline 0 & ... & 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} F_{ij},$$

onde $F_{ij} \in M_\infty(\mathbb{C})$ de modo que todas as entradas são iguais a 0 com excessão da entrada (i, j) que é igual a 1. Mas F_{ij} é a representação matricial de f_{ij}, ou seja, $F_{ij} = [f_{ij}]$. Assim,

$R_nTR_n = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} f_{ij}$ e isso implica em

$$T = 1_{\ell_2} T 1_{\ell_2} = (\lim_{n\to\infty} R_n) T (\lim_{n\to\infty} R_n) = \lim_{n\to\infty} R_n T R_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} f_{ij}.$$

Como T é arbitrário, concluímos que $span\{f_{ij}\}$ é denso, com relação a topologia do operador-forte, em $\mathcal{L}(\ell_2)$.

Afirmação: ψ é contínua na topologia do operador-forte

Seja $\{T_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{L}(\ell_2)$ uma *net* que converge fortemente para $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$. Note que,

$$\psi(T)\xi = (\phi T \phi^{-1})\xi = \phi(\lim_{i\in I} T_i \phi^{-1}\xi) = \lim_{i\in I}(\phi T_i \phi^{-1}\xi) =$$

$$= \lim_{i\in I}(\psi(T_i)\xi) \ \forall \xi \in \mathcal{H}_1.$$

Logo, $\psi(T_i) \xrightarrow{i\in I} \psi(T)$ na topologia do operador-forte e isso implica que ψ é fortemente contínua.

Afirmação: $Im(\Psi)$ é fechada na topologia operador-forte, ou seja, $Im(\Psi) = \overline{Im(\Psi)}^{TOF}$

É óbvio que $Im(\Psi) \subseteq \overline{Im(\Psi)}^{TOF}$. Seja $T \in \overline{Im(\Psi)}^{TOF}$, não nulo e arbitrário e defina $\alpha = \frac{1}{\|T\|}$. Então $\|\alpha T\| = 1$. Sendo $Im(\Psi)$ é sub-*-álgebra, pois Ψ é um *-homomorfismo entre álgebras, e considerando os conjuntos

$$B_{\overline{Im(\Psi)}^{TOF}}[0,1] = \{x \in \overline{Im(\Psi)}^{TOF} : \|x\| \leq 1\}$$

e

$$\overline{B_{Im(\Psi)}[0,1]}^{TOF} = \overline{\{x \in Im(\Psi) : \|x\| \leq 1\}}^{TOF},$$

podemos usar o *Teorema da Densidade de Kaplansky* (*ver Teorema 5.1.16*) e concluir que

$$B_{\overline{Im(\Psi)}^{TOF}}[0,1] \subseteq \overline{B_{Im(\Psi)}[0,1]}^{TOF}.$$

Assim, $\alpha T \in B_{\overline{Im(\Psi)}^{TOF}}[0,1] \subseteq \overline{B_{Im(\Psi)}[0,1]}^{TOF}$ e com isso existe uma *net* $\{T_i\}_{i\in I} \subseteq B_{Im(\Psi)}[0,1]$ que converge fortemente para αT. Como convergencia na topologia operador-forte implica em convergencia na topologia operador-fraco, então $T_i \overset{i\in I}{\rightarrow} \alpha T$ fracamente. Considere a sequência $\{S_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{M}$ onde $S_i = \Psi^{-1}(T_i)$. Sendo Ψ um *-homomorfismo injetor, então pela *ver Proposição 5.1.14* Ψ é isométrico e com isso podemos concluir que $\{S_i\}_{i\in I} \subseteq B[0,1] \subseteq \mathcal{M}$. Como a bola unitária $B_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}[0,1]$ é compacta na topologia operador-fraco (*ver Teorema 5.1.15*), então existe uma *subnet* $\{S_{i_j}\}_{j\in I} \subseteq \{S_i\}_{i\in I}$ tal que $S_{i_j} \xrightarrow{j\in I} S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ fracamente. Como $\mathcal{M}$ é fracamente fechado, então $S \in \mathcal{M}$. Sendo Ψ é fracamente contínua, então $\Psi(S_{i_j}) \xrightarrow{j\in I} \Psi(S)$ fracamente. Relembre que $\Psi(S_{i_j}) = T_{i_j} \xrightarrow{j\in I} \alpha T$, então $\alpha T = \Psi(S)$ pela unicidade do limite. Como $\alpha T \in Im(\Psi)$, obviamente que $T \in Im(\Psi)$. Sendo T é arbitrário, concluímos que $Im(\Psi) \supseteq \overline{Im(\Psi)}^{TOF}$. Portanto, $Im(\Psi) = \overline{Im(\Psi)}^{TOF}$.

Sabemos que

$$Im(\Psi) = \Psi(\mathcal{M}) \supseteq \Psi(\mathcal{M}_0) = span\{\psi(f_{ij})\}$$

e $span\{f_{ij}\}$ é fortemente denso em $\mathcal{L}(\ell_2)$. Como $\mathcal{L}(\ell_2) \simeq \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, então $span\{\psi(f_{ij})\}$ é denso, com relação a topologia operador-forte, em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, pois ψ é fortemente contínuo. Assim, $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1) = \overline{\Psi(\mathcal{M}_0)}^{TOF} \subseteq \overline{\Psi(\mathcal{M})}^{TOF} = \Psi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, logo $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1) = \Psi(\mathcal{M})$.
Portanto, Ψ é sobrejetor e com isso Ψ é um isomorfismo, concluindo a demonstração do teorema.

$\blacksquare$

3 Fator $W^*(G)$

Esse capítulo será dedicado para a construção do fator $W^*(G)$. Além disso, no capítulo 4 será demonstrado que $W^*(G)$ é um fator do tipo II_1

3.1 A álgebra de von Neumann $W^*(G)$

Vamos dedicar essa seção para a construção de uma álgebra de von Neumann, denotada por $W^*(G)$, sobre os operadores unitários de $\mathcal{L}(\ell_2(G))$, onde G é um grupo enumerável. Na sequência vamos provar que $W^*(G)$ é um fator desde que G seja $I.C.C.$, isto é, que as classes de conjugação de G sejam infinitas. Como exemplos de grupos $I.C.C.$ vamos apresentar o grupo Π de permutações sobre um conjunto infinito e $\mathbb{F}_2$(grupo livre de dois geradores).

Teorema 3.1.1. *Dados $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $\{e_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$ uma base ortonormal e $\sigma : I \to I$ uma função bijetora, existe um operador unitário $u \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $u(e_i) = e_{\sigma(i)}$*

$\forall i \in I$.

Demonstração: Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $\{e_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$ uma base ortonormal e $\sigma : I \to I$ uma função bijetora. Defina $u_0 : span\{e_i\} \to span\{e_{\sigma(i)}\}$ dada por $u_0\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_{\sigma(i)}$. É claro que u_0 está bem definida e é linear.

Afirmação: u_0 é isométrico e portanto limitado

De fato, como estamos trabalhando com vetores num espaço de Hilbert então

$$\left\| u_0\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_{\sigma(i)}\right\| = \sum_{i=1}^{N} |\lambda_i|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i\right\|.$$

Logo, u_0 é isométrico e portanto limitado.

Sabendo que $\mathcal{H} = \overline{span}\{e_i\}$ e u_0 é linear e limitado, então podemos estender u_0 continuamente para um operador $u : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $u_{|span\{e_i\}} = u_0$.

Afirmação: u é isométrico

Seja $\xi = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i \in \mathcal{H}$. Sabendo que $\xi = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i$ então

$$\|u(x)\| = \left\| u\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i\right)\right\| = \left\|\lim_{N\to\infty} u\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i\right)\right\| =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left\| u\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i \right) \right\| = \lim_{N\to\infty} \left\| u_0\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i \right) \right\| =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i \right\| = \|x\| .$$

Logo, u é isométrico. O fato de u ser isométrico implica que $Im(u)$ é fechada.

Afirmação: u é sobrejetivo
De fato, observe que $\mathcal{H} = \overline{span}\{e_{\sigma(i)}\} = \overline{Im(u_0)} \subseteq Im(u) \subseteq \mathcal{H}$ implica em $\mathcal{H} = Im(u)$. Logo, u é sobrejetivo.

Portanto, sendo $u \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ isométrico e sobrejetivo conclui-se que u é unitário (*ver [1] Teorema3.10-6(f)*).

$\blacksquare$

Agora, o objetivo é construir uma álgebra de von Neumann usando o *Teorema 3.1.1*. Para isso, vamos fixar um grupo G enumerável. Para cada $g \in G$, considere a função $\lambda_g : G \to G$ dada por $\lambda_g(h) = gh$.

Afirmação: λ_g é bijetora
Fixe $g \in G$ e considere $h_1, h_2 \in G$ arbitrários. Se $\lambda_g(h_1) = \lambda_g(h_2)$ então

$$gh_1 = gh_2 \Longrightarrow g^{-1}gh_1 = g^{-1}gh_2 \Longrightarrow 1_G h_1 = 1_G h_2 \Longrightarrow h_1 = h_2.$$

Segue que é λ_g é injetiva. Seja $k \in G$ arbitrário e defina $h := g^{-1}k$. Note que $\lambda_g(h) = gg^{-1}k = k$ e isso implica em λ_g ser sobrejetora. Logo, λ_g é bijetora.

Fixe a base canônica $\{e_g\}_{g\in G} \subset \ell_2(G)$. Tendo em mãos o grupo G enumerável, as funções λ_g acima definida e a base $\{e_g\}_{g\in G}$, temos as hipóteses necessárias para usar a *Teorema 3.1.1* e obter um conjunto $U := \{u_g : g \in G\}$ de operadores unitários em $\ell_2(G)$ tal que $u_g(e_h) = e_{\lambda_g(h)} = e_{gh}$. Obviamente que $u_{1_G}(e_g) = e_{1_G g} = e_g$ $\forall g \in G$ implica que $u_{1_G} = 1_{\ell_2}$.

Lema 3.1.2. *U é linearmente independente.*

Demonstração: Seja $F \subseteq G$ finito e arbitrário. Considere $\sum\limits_{g\in F} \alpha_g u_g = 0$, onde $\{\alpha_g : g \in F\} \subseteq \mathbb{C}$. Então $\sum\limits_{g\in F} \alpha_g u_g(e_{1_G}) = \sum\limits_{g\in F} \alpha_g e_g = 0$. Como $\{e_g\}_{g\in F}$ é L.I, segue que $\{u_g\}_{g\in F}$ é L.I. Portanto, U é L.I.

■

Definição 3.1.3. *Vamos denotar por $W^*(G)$ a menor sub-*-álgebra fortemente fechada de operadores em $\ell_2(G)$ que contem U, isto é, $W^*(G)$ é a álgebra de von Neumann gerada por U.*

Definição 3.1.4. *Dizemos que uma sequência $\{a_g\}_{g\in G} \subseteq \mathbb{C}$ tem suporte finito se $\{g : a_g \neq 0\}$ for finito.*

Observação 3.1.5. *É claro que existe uma bijeção entre a família de todas as sequências, em $\mathbb{C}$, de suporte finito e span U.*

Afirmação: As seguintes afirmações são verdadeiras:

i) $u_g u_h = u_{gh}\ \forall u_g, u_h \in U$

ii) $u_g^* = u_{g^{-1}}\ \forall u_g \in U$

iii) $spanU$ é uma sub-*-álgebra

iv) $W^*(G) = \overline{span}^{TOF} U$

(i) Para $u_g, u_h \in U$, quaisquer, temos

(a) $(u_g u_h)(e_k) = u_g(u_h(e_k)) = u_g(e_{hk}) = e_{ghk} = e_{(gh)k} = u_{gh}(e_k)\ \forall k \in G$

(b) Como $u_g u_h$ e u_{gh} coincidem na base então $u_g u_h$ e u_{gh} coincidem no $spanU$

(c) Como $u_g u_h$ e u_{gh} são contínuos e coincidem no conjunto denso $spanU$, então $u_g u_h$ e u_{gh} coincidem no $\overline{span}^{TOF} U$

(ii) Dado $u_g \in U$ arbitrário, observe que

$$(u_g u_{g^{-1}})(e_k) = u_g(e_{g^{-1}k}) = e_{gg^{-1}k} = e_k$$

e

$$(u_{g^{-1}} u_g)(e_k) = u_{g^{-1}}(e_{gk}) = e_{g^{-1}gk} = e_k$$

$\forall k \in G$. Logo, $u_g^{-1} = u_{g^{-1}}$. Como u_g é unitário então $u_g^* = u_g^{-1} = u_{g^{-1}}$.

(iii) Defina $W_0 := spanU$. Sejam $\{\alpha_g\}_{g\in G}, \{\beta_h\}_{h\in G} \subseteq \mathbb{C}$ sequências de suporte finito. Como $\sum_{g\in G} \alpha_g u_g, \sum_{h\in G} \beta_h u_h \in W_0$, então

$$\left(\sum_{g\in G} \alpha_g u_g\right)\left(\sum_{h\in G} \beta_h u_h\right) = \sum_{g,h\in G} \alpha_g \beta_h u_g u_h =$$

$$= \sum_{g,h\in G} \alpha_g \beta_h u_{gh} \in W_0$$

e

$$\left(\sum_{g\in G} \alpha_g u_g\right)^* = \sum_{g\in G} (\alpha_g u_g)^* = \sum_{g\in G} \overline{\alpha_g} u_{g^{-1}} \in W_0.$$

Logo, W_0 é uma sub-*-álgebra.

(iv) Por definição, $W^*(G) \supseteq U$. Como $W^*(G)$ é uma *-álgebra fechada na topologia operador-forte então $W^*(G) \supseteq \overline{span}^{TOF} U$. Ainda pela definição, $W^*(G)$ é a menor sub-*-álgebra fortemente fechada que contem U. Pelo item (iii) $spanU$ é uma sub-*-álgebra, logo $W^*(G) \subseteq \overline{span}^{TOF} U$. Portanto, $W^*(G) = \overline{span}^{TOF} U$.

Alcançamos nosso objetivo de construir a álgebra de von Neumann $W^*(G)$.

Proposição 3.1.6. *Se $a, b \in W_0$ então $c_k = \sum_{g \in G} a_g b_{g^{-1}k}$ é o termo geral da sequência de ab , onde $\{a_g\}_{g\in G}$ e $\{b_h\}_{h\in G}$ são as sequências de a e b, respectivamente.*

Demonstração: Sejam $a, b \in W_0$ e suas sequências $\{a_g\}_{g\in G}$ e $\{b_h\}_{h\in G}$, respectivamente. Como $ab \in W_0$, existe uma sequência de suporte finito $\{c_k\}_{k\in G}$ tal que $ab = \sum_{k\in G} c_k u_k$. Mas

$$ab = \left(\sum_{g\in G} a_g u_g\right)\left(\sum_{h\in G} b_h u_h\right) = \sum_{g,h\in G} a_g b_h u_g u_h = \sum_{g,h\in G} a_g b_h u_{gh}.$$

Então $\sum_{k\in G} c_k u_k = \sum_{g,h\in G} a_g b_h u_{gh}$ e para que tenhamos $u_k = u_{gh}$, devemos ter $k = gh$, ou melhor, $h = g^{-1}k$. Assim, $\sum_{k\in G} c_k u_k = \sum_{g,k\in G} a_g b_{g^{-1}k} u_k$ e isso implica em $c_k = \sum_{g\in G} a_g b_{g^{-1}k}$, pois U é L.I.

■

3.2 O Fator $W^*(G)$

Provaremos que $W^*(G)$ é um fator desde que o grupo G seja *I.C.C.*, ou seja, que cada conjunto $C_g := \{hgh^{-1} : h \in G\}$ é infinito $\forall g \in G$, com exceção para $g \neq 1_G$. Em seguida, serão apresentados dois grupos *I.C.C* a fim de termos exemplos de fatores $W^*(G)$. Antes de iniciarmos o processo de demonstração de que $W^*(G)$ é um fator, vamos apresentar duas afirmações sobre os operadores u_g que obtivemos na seção anterior.

Proposição 3.2.1. *Se $a \in W^*(G)$ então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $a \in \mathcal{Z}(W^*(G))$

ii) $au_h = u_h a \ \forall u_h \in U$

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$: Seja $a \in \mathcal{Z}(W^*(G))$. Então $ab = ba \ \forall b \in W^*(G)$. Em particular, $au_h = u_h a \ \forall u_h \in U$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Fixe $a \in W^*(G)$ e considere $b \in W_0$ arbitrário. Seja $\{b_h\}_{h \in G}$ a sequência de b e suponha que $au_h = u_h a$ $\forall u_h \in U$. Então

$$ab = a\left(\sum_{h \in G} b_h u_h\right) = \sum_{h \in G} ab_h u_h = \sum_{h \in G} b_h u_h a =$$

$$= \left(\sum_{h \in G} b_h u_h\right) a = ba.$$

Logo, $ab = ba \ \forall b \in W_0$.
Agora considere $c \in W^*(G)$ arbitrário. Então existe uma *net* $\{c_i\}_{i \in I} \subset W_0$ tal que $c = \lim_{i \in I} c_i$ na topologia operador-forte. Para cada $\xi \in \ell_2(G)$, note que

$$ac\xi = a\left(\lim_{i \in I} c_i \xi\right) = \lim_{i \in I} ac_i\xi = \lim_{i \in I} c_i a\xi = ca\xi.$$

Segue que $a \in \mathcal{Z}(W^*(G))$.

■

Uma vez provado que $W^*(G)$ é uma álgebra de von Neumann, o próximo objetivo é provar que $W^*(G)$ é um fator, ou seja, provaremos que $\mathcal{Z}(W^*(G)) = \mathbb{C}1_{\ell_2}$.

Proposição 3.2.2. *Se as classes de conjugação C_g, com $g \neq 1_G$, são I.C.C então $\mathcal{Z}(W^*(G)) \cap W_0 = \mathbb{C}1_{\ell_2}$.*

Demonstração: Sejam $a \in \mathcal{Z}(W^*(G)) \cap W_0$ e $u_h \in U$ arbitrários. Considere $\{a_g\}_{g \in G}$ a sequência de a. Pela *Proposição 3.2.1* $au_h = u_h a$, então

$$au_h = \left(\sum_{g \in G} a_g u_g\right) u_h = \sum_{g \in G} a_g u_g u_h = \sum_{g \in G} a_g u_{gh}$$

e

$$u_h a = u_h \left(\sum_{g \in G} a_g u_g\right) = \sum_{g \in G} a_g u_h u_g = \sum_{g \in G} a_g u_{hg}$$

implicam em

$$\sum_{g \in G} a_g u_{gh} = \sum_{g \in G} a_g u_{hg}.$$

Para cada $g \in G$ defina $g' := gh$ e $g'' := hg$. É fácil verificar que essas definições geram duas bijeções. Então

$$\sum_{g \in G} a_g u_{gh} = \sum_{g' \in G} a_{g'h^{-1}} u_{g'}$$

e

$$\sum_{g\in G} a_g u_{hg} = \sum_{g''\in G} a_{h^{-1}g''} u_{g''}.$$

Como essas últimas duas igualdades valem $\forall g', g'' \in G$ então podemos escrever

$$\sum_{g\in G} a_g u_{gh} = \sum_{g'\in G} a_{g'h^{-1}} u_{g'} = \sum_{g\in G} a_{gh^{-1}} u_g$$

e

$$\sum_{g\in G} a_g u_{hg} = \sum_{g''\in G} a_{h^{-1}g''} u_{g''} = \sum_{g\in G} a_{h^{-1}g} u_g.$$

Como $\{u_g\}_{g\in G}$ é linearmente independente então $a_{h^{-1}g} = a_{gh^{-1}}$ $\forall g \in G$. Logo, para cada $k \in G$ vale $a_{k^{-1}g} = a_{gk^{-1}}$ $\forall g \in G$. Assim, concluímos que, se $a \in \mathcal{Z}(W^*(G)) \cap W_0$ então $a_{k^{-1}g} = a_{gk^{-1}}$ $\forall k, g \in G$. Fixe $g \in G$. Definindo $g''' := k^{-1}g$, então podemos escrever $a_{g'''} = a_{kg'''k^{-1}}$ $\forall k, g''' \in G$. Denotando por $C_{g'''} = \{kg'''k^{-1} : k \in G\}$ a classe de conjugação de cada $1_G \neq g''' \in G$, conclui-se que todos os coeficientes correspondentes são iguais. A classe de conjugação C_{1_G} não é infinita, pois $C_{1_G} = \{h1_Gh^{-1} : h \in G\} = \{1_G\}$.

Afirmação: C_g infinita implica em $a_g = 0$ $\forall g \in G, 1_G \neq g$
Seja $g \in G$, qualquer, tal que $1_G \neq g$. Denotando por *supp* o suporte de $\{a_g\}_{g\in G}$, é óbvio que $C_g \not\subseteq$ *supp*, pois C_g é infinito e *supp* é finito. Logo, $\exists h \in C_g$ onde h é conjugado g, ou seja, $\exists k \in G$ tal que $h = kgk^{-1}$ e $h \notin$ *supp*. Como

$h \notin supp$ então $a_h = 0$ e com isso $a_g = 0 = a_h$. Como g foi escolhido arbitrariamente, logo a afirmação é verdadeira.

Assim, para cada $g \in G$, com $g \neq 1_G$, tem-se $a_g = 0$ e isso implica que

$$a = \sum_{g \in G} a_g u_g = a_{1_G} u_{1_G} = a_{1_G} id_{\ell_2} \in \mathbb{C}1_{\ell_2}.$$

Como a é arbitrário, concluímos que $\mathcal{Z}(W^*(G)) \cap W_0 = \mathbb{C}1_{\ell_2}$.

■

O próximo passo é provar que $\mathcal{Z}(W^*(G)) = \mathbb{C}1_{\ell_2}$, ou seja, $W^*(G)$ é um fator. Agora não estaremos trabalhando com elementos de W_0 e sim de $\overline{W_0}^{TOF} = W^*(G)$. Assim, não poderemos trabalhar diretamente com somas, como foi feito acima. Para nos auxiliar nas demonstrações de fatos que nos conduzirão para afirmação de que $W^*(G)$ é um fator, vamos definir uma função $\Delta : W^*(G) \to \ell_2(G)$ dada por $\Delta(a) = a(e_{1_G})$. É claro que Δ é linear. Para cada $g \in G$ defina a função $\delta_g : G \to G$ dada por $\delta_g(h) = hg$.

Afirmação: δ_g é uma bijeção
Fixe $g \in G$ e considere $h_1, h_2 \in G$ arbitrários. Se $\delta_g(h_1) = \delta_g(h_2)$ então

$$gh_1 = gh_2 \Longrightarrow g^{-1}gh_1 = g^{-1}gh_2 \Longrightarrow 1_G h_1 = 1_G h_2 \Longrightarrow$$

$$\implies h_1 = h_2.$$

Logo, δ_g é injetiva. Seja $k \in G$ arbitrário e defina $h := g^{-1}k$. Note que $\delta_g(h) = gg^{-1}k = k$ e isso implica em δ_g ser sobrejetora. Portanto, δ_g é bijetora.

Tendo em mãos as funções δ_g, o grupo G enumerável e a base canônica $\{e_g\}_{g\in G} \subseteq \ell_2$, temos as hipóteses necessárias para usar *Teorema 3.1.1* e afirmar que existem operadores unitários $\rho_g : \ell_2(G) \to \ell_2(G)$ tal que $\rho_g(e_h) = e_{\delta_g(h)} = e_{hg}$. Obviamente que $\rho_{1_G}(e_g) = e_{g1_G} = e_g$ $\forall g \in G$ implica que $\rho_{1_G} = 1_{\ell_2}$.

Proposição 3.2.3. *Para cada $u_g \in U$, temos $u_g\rho_h = \rho_h u_g$ $\forall h \in G$.*

Demonstração: Sejam $u_g \in U$ e $h \in G$ quaisquer. Note que

$$u_g\rho_h(e_k) = u_g(\rho_h(e_k)) = u_g(e_{kh}) = e_{gkh}$$

e

$$\rho_h u_g(e_k) = \rho_h(u_g(e_k)) = \rho_h(e_{gk}) = e_{gkh}$$

$\forall k \in G$. Logo, $u_g\rho_h = \rho_h u_g$.

■

Lema 3.2.4. *Para cada $h \in G$ $\rho_h^* = \rho_{h^{-1}}$.*

Demonstração: Dado ρ_h arbitrário, observe que

$$(\rho_h \rho_{h^{-1}})(e_k) = \rho_h(e_{kh^{-1}}) = e_{kh^{-1}h} = e_k$$

e

$$(\rho_{h^{-1}} \rho_h)(e_k) = \rho_{h^{-1}}(e_{kh}) = e_{khh^{-1}} = e_k$$

$\forall k \in G$. Logo, $\rho_h^{-1} = \rho_{h^{-1}}$. Como ρ_h é unitário então $\rho_h^* = \rho_h^{-1} = \rho_{h^{-1}}$.

■

Afirmação: $ker(\Delta)$ é fortemente fechado

Considere uma *net* $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq ker(\Delta)$ que converge para $a \in W^*(G)$ na topologia operador-forte. Então

$$\Delta(a) = a(e_{1_G}) = \lim_{i \in I} a_i(e_{1_G}) = 0.$$

Logo, $a \in ker(\Delta)$.

Afirmação: Δ é injetora

Seja $c \in ker(\Delta)$. Então existe uma *net* $\{c_i\}_{i \in I}$ que converge para c na topologia operador-forte. Temos que $\Delta(c) = c(e_{1_G}) = 0$ implica em

$$0 = \rho_h(c(e_{1_G})) = \rho_h(\lim_{i \in I} c_i e_{1_G}) = \lim_{i \in I} \rho_h c_i e_{1_G} = \lim_{i \in I} c_i \rho_h e_{1_G} =$$

$$= c(\rho_h(e_{1_G})) = c(e_h) \ \forall h \in G.$$

Logo, $c = 0$ e com isso $ker(\Delta) = \{0\}$ concluindo que Δ é injetora.

Proposição 3.2.5. *Se $a \in W^*(G)$ então $a\rho_h = \rho_h a$ $\forall h \in G$.*

Demonstração: Seja $a \in W^*(G)$ arbitrário. Existe uma *net* $\{a_i\}_{i\in I} \subset W_0$ que converge para a na topologia operador-forte. Pela *Proposição 3.2.3*, $\rho_h u_g = u_g \rho_h$ $\forall g, h \in G$, então é claro que $a_i\rho_h = \rho_h a_i$ $\forall h \in G$ e $i \in I$. Segue que para cada $\xi \in \ell_2(G)$

$$a\rho_h\xi = (\lim_{i\in I} a_i)\rho_h\xi = \lim_{i\in I} a_i\rho_h\xi = \lim_{i\in I} \rho_h a_i\xi =$$

$$= \rho_h(\lim_{i\in I} a_i\xi) = \rho_h a\xi.$$

Logo, $a\rho_h = \rho_h a$ $\forall h \in G$.

■

Agora, o objetivo é mostrar que $\mathcal{Z}(W^*(G)) = \mathbb{C}1_{\ell_2}$. Para isso, vamos provar que para qualquer $a \in \mathcal{Z}(W^*(G))$, os escalares α_g em $\Delta(a) = a(e_{1_G}) = \left(\sum_{g\in G} \alpha_g e_g\right)$ são todos nulos, com exceção de α_{1_G}.
Seja $a \in \mathcal{Z}(W^*(G))$ arbitrário. Então

$$\Delta(a) = a(e_{1_G}) = \sum_{g\in G} \alpha_g e_g, \text{ sendo } \alpha_g = \langle a(e_{1_G}), e_g\rangle .$$

Defina uma sequência $\widehat{a} : G \to \mathbb{C}$ dada por

$$\widehat{a}(g) = \langle a(e_{1_G}), e_g \rangle \ (= \alpha_g).$$

Se $a \in W_0$ então existe uma sequência de suporte finito $\{a_h\}_{h \in G}$ e com isso

$$\widehat{a}(g) = \langle a(e_{1_G}), e_g \rangle = \left\langle \left(\sum_{h \in G} a_h u_h \right) (e_{1_G}), e_g \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{h \in G} a_h (u_h)(e_{1_G}), e_g \right\rangle = \left\langle \sum_{h \in G} a_h (e_h), e_g \right\rangle =$$

$$= \sum_{h \in G} a_h \langle e_h, e_g \rangle = a_g.$$

Agora, se $a \notin W_0$ então existe uma *net* $\{a^i\}_{i \in I} \subset W_0$ que converge para a na topologia operador-forte e isso implica em

$$\widehat{a}(g) = \langle a(e_{1_G}), e_g \rangle = \left\langle \lim_{i \in I} a^i (e_{1_G}), e_g \right\rangle = \lim_{i \in I} \left\langle a^i (e_{1_G}), e_g \right\rangle =$$

$$= \lim_{i \in I} \widehat{a^i}(g) \ \forall g \in G.$$

Para cada $u_h \in U$, provamos que $au_h = u_h a$ (ver Proposição 3.2.1). Como $au_h, u_h a \in W^*(G)$, então de modo análogo

$$\widehat{au_h}(g) = \widehat{u_h a}(g) \ \forall g \in G.$$

Afirmação: $\widehat{au_h}(g) = \widehat{a}(gh^{-1})$ e $\widehat{u_h a}(g) = \widehat{a}(h^{-1}g)$ $\forall g, h \in G$

Fixe $g, h \in G$. Vamos analisar 2 casos:

CASO 1: Suponha $a \in W_0$

Então

$$\widehat{au_h}(g) = \langle au_h(e_{1_G}), e_g\rangle = \langle a(e_h), e_g\rangle = \langle a\rho_h(e_{1_G}), e_g\rangle =$$

$$= \langle \rho_h a(e_{1_G}), e_g\rangle = \langle a(e_{1_G}), \rho_h^*(e_g)\rangle \overset{Lema\ 3.2.4}{=}$$

$$\langle a(e_{1_G}), \rho_{h^{-1}}(e_g)\rangle = \langle a(e_{1_G}), e_{gh^{-1}}\rangle = \widehat{a}(gh^{-1})$$

e

$$\widehat{u_h a}(g) = \langle u_h a(e_{1_G}), e_g\rangle = \langle a(e_{1_G}), u_h^*(e_g)\rangle = \langle a(e_{1_G}), u_{h^{-1}}(e_g)\rangle =$$

$$= \langle a(e_{1_G}), e_{h^{-1}g}\rangle = \widehat{a}(h^{-1}g).$$

Logo, $\widehat{au_h}(g) = \widehat{a}(gh^{-1})$ e $\widehat{u_h a}(g) = \widehat{a}(h^{-1}g)$.

CASO 2: $a \in W^*(G)$

Então existe uma *net* $\{a^i\}_{i\in I} \subset W_0$ que converge para a na topologia operador-forte e disso segue que,

$$\widehat{au_h}(g) = \langle au_h(e_{1_G}), e_g\rangle = \left\langle (\lim_{i\in I} a^i)u_h(e_{1_G}), e_g \right\rangle =$$

$$= \left\langle \lim_{i\in I}(a^i u_h)(e_{1_G}), e_g \right\rangle = \lim_{i\in I} \langle a^i u_h(e_{1_G}), e_g\rangle = \lim_{i\in I} \widehat{a^i u_h}(g) =$$

$$= \lim_{i \in I} \widehat{a^i}(gh^{-1}) = \widehat{a}(gh^{-1})$$

e

$$\widehat{u_h a}(g) = \langle u_h a(e_{1_G}), e_g \rangle = \left\langle u_h (\lim_{i \in I} a_i)(e_{1_G}), e_g \right\rangle =$$

$$= \left\langle (\lim_{i \in I} u_h a_i)(e_{1_G}), e_g \right\rangle = \lim_{i \in I} \langle u_h a_i(e_{1_G}), e_g \rangle = \lim_{i \in I} \widehat{u_h a_i}(g) =$$

$$= \lim_{i \in I} \widehat{a_i}(h^{-1}g) = \widehat{a}(h^{-1}g)$$

Assim, $\widehat{au_h}(g) = \widehat{a}(gh^{-1})$ e $\widehat{u_h a}(g) = \widehat{a}(h^{-1}g)$.
Como $g, h \in G$ são arbitrários, logo a afirmação é verdadeira.

Sabendo que $\widehat{au_h}(g) = \widehat{u_h a}(g)$, então pela *afirmação acima* temos que

$$\widehat{a}(gh^{-1}) = \widehat{a}(h^{-1}g) \ \forall g, h \in G.$$

Para cada $g, h \in G$, defina $\widetilde{g} := h^{-1}g$. Então $g = h\widetilde{g}$. Assim,

$$\widehat{a}(h^{-1}g) = \widehat{a}(gh^{-1}) \Longrightarrow \widehat{a}(\widetilde{g}) = \widehat{a}(h\widetilde{g}h^{-1}) \ \forall \widetilde{g} \in G.$$

Logo, $\widehat{a}$ é constante em cada classe de conjugação. Como G é I.C.C, então $\widehat{a}(g) = 0 \ \forall g \in G$, com $g \neq 1_G$ (ver afirmação na Proposição 3.2.2). Assim,

$$\Delta(a) = a(e_{1_G}) = \sum_{g \in G} \widehat{a}(g) e_g = \widehat{a}(1_G) e_{1_G}.$$

Defina $b := \widehat{a}(1_G)u_{1_G}$. Note que

$$\Delta(b) = b(e_{1_G}) = \widehat{a}(1_G)u_{1_G}(e_{1_G}) = \widehat{a}(1_G)e_{1_G} = \Delta(a).$$

Como $\Delta(a) = \Delta(b)$, Δ é injetora e $u_{1_G} = 1_{\ell_2}$ então $a = b = \widehat{a}(1_G)u_{1_G} = \widehat{a}(1_G)1_{\ell_2} \in \mathbb{C}1_{\ell_2}$.
Portanto, concluímos que $W^*(G)$ é um fator quando G é I.C.C.

Afim de mostrar exemplos de fatores $W^*(G)$, devemos encontrar exemplos de grupos I.C.C. A seguir, vamos propor 2 grupos $I.C.C$ e dessa forma explicitar 2 exemplos. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $\Pi_n := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}/ \text{ f é bijetora e } f_{|\{k \in \mathbb{N} : k > n\}} = id\}$. É fácil verificar que Π_n é um grupo $\forall n \in \mathbb{N}$. Como Π_n tem exatamente $n!$ bijeções, então cada Π_n é finito e portanto enumerável. Seja $\Pi = \cup_{n \in \mathbb{N}} \Pi_n$. É claro que $\Pi_1 \subseteq \Pi_2 \subseteq ... \subseteq \Pi_n \subseteq \Pi_{n+1} \subseteq ...$, logo fácil ver que Π é um grupo. Sabendo que a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável, logo Π é enumerável.

Afirmação: Π é I.C.C

Seja $f \in \Pi$, com $f \neq id$, tal que $f(i) = j$, $i \neq j$, e C_f a classe de conjugação de f. Fixe $n \in \mathbb{N}$ e considere $g_n \in \Pi$ tal que $g_n(i) = j$ e $g_n(j) = n$. Note que $g_n \circ f \circ g_n^{-1}(j) = g_n(f(i)) = g_n(j) = n$. Agora, vamos provar

que dados distintos $k, k' \in \mathbb{N}$, $g_{k'} \circ f \circ g_{k'}^{-1} \neq g_k \circ f \circ g_k^{-1}$. De fato, note que $g_{k'} \circ f \circ g_{k'}^{-1}(j) = k' \neq k = g_k \circ f \circ g_k^{-1}(j)$. Como a demonstração vale para cada $k \in \mathbb{N}$, concluímos que C_f é infinita.
Agora se $f = id$, é óbvio que $g_n \circ id \circ g_n^{-1} = id$. Logo, $C_{id} = \{id\}$. Portanto, Π é I.C.C.

Assim, $W^*(\Pi)$ é um fator.

Vamos construir outro grupo I.C.C, denotado por $\mathbb{F}_2$, afim de produzir mais um exemplo de fator $W^*(G)$.
Considere o conjunto $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ com elementos dois-a-dois distintos. Uma *palavra* é uma sequência finita de elementos de S. Por exemplo, $aab^{-1}a$, $ab^{-1}ba^{-1}$, $abb^{-1}ab$ são *palavras*. Quando numa *palavra* ocorrer a e a^{-1} juntos ou b e b^{-1} juntos, então temos um *cancelamento* e dessa forma podemos reescrevê-la retirando todos os cancelamentos. Exemplo: na *palavra* $aaabbb^{-1}bb$ temos um *cancelamento* bb^{-1}, então podemos reescrevê-la como $aaabbb$. Dizemos que uma *palavra* é *reduzida* quando não ocorre nenhum *cancelamento*. Por exemplo, $ab^{-1}a$, $ab^{-1}a^{-1}$, $ab^{-1}ab$ são *palavras reduzidas*. A *palavra vazia* será a *palavra* que não contem elementos de S e denotaremos por $\emptyset$. Dessa forma, denotaremos por $\mathbb{F}_2 = \{palavras\ reduzidas\} \cup \{palavra\ vazia\}$. Por convenção, faremos $x_1x_2...x_n := x_1, x_2, ..., x_n$, onde

$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ é uma *palavra*. Vamos definir uma operação multiplicação $* : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ com a seguinte regra: primeiro fazemos a justaposição e em seguida efetuamos os *cancelamentos*, se necessários. Também definiremos $(a^{-1})^{-1} := a$ e $(b^{-1})^{-1} := b$

Afirmação: $\mathbb{F}_2$ é um grupo com a operação *

Sejam $x, y, z \in \mathbb{F}_2$, arbitrários, tal que $x = x_1x_2...x_k, y = y_1y_2...y_l$ e $z = z_1z_2...z_m$. Sejam p e q as quantidades de *cancelamentos* em $y * z$ e $x * y$, respectivamente. Então

$$x*(y*z) = x*(y_1y_2...y_lz_1z_2...z_m) = x*(y_1y_2...y_{l-p}z_pz_2...z_m) =$$

$$= x_1x_2...x_ky_1y_2...y_{l-p}z_pz_2...z_m = x_1x_2...x_{k-q}y_q...y_{l-p}z_1z_2...z_p$$

e

$$(x*y)*z = (x_1x_2...x_ky_1y_2...y_l)*z = (x_1x_2...x_{k-q}y_q...y_l)*z =$$

$$= x_1x_2...x_{k-q}y_q...y_lz_1z_2...z_m = x_1x_2...x_{k-q}y_q...y_{l-p}z_pz_2...z_m.$$

Logo, $x * (y * z) = (x * y) * z$.

Definindo $x^{-1} := x_k^{-1}...x_2^{-1}x_1^{-1}$, temos que

$$x * x^{-1} = x_1x_2 \ldots x_{k-1}x_kx_k^{-1}x_{k-1}^{-1} \ldots x_2^{-1}x_1^{-1} =$$

$$= x_1x_2 \ldots x_{k-1}x_{k-1}^{-1} \ldots x_2^{-1}x_1^{-1} =$$

$$= x_1x_2 \ldots x_2^{-1}x_1^{-1} = \cdots = x_1x_2x_2^{-1}x_1^{-1} = \emptyset.$$

De modo análogo $x^{-1} * x = \emptyset$. É claro que $x * \emptyset = x = \emptyset x$. Portanto, $\mathbb{F}_2$ é um grupo.

Afirmação: $\mathbb{F}_2$ é I.C.C

Seja $x = x_1x_2...x_n \in \mathbb{F}_2$, com $x \neq \emptyset$ e C_x a classe de conjugação de x. Observe que, ao escolhermos $y = y_1y_2...y_k \in \mathbb{F}_2$, desejamos que yxy^{-1} seja uma *palavra reduzida.* Então a escolha de y deve satisfazer as restrições $y_kx_1^{-1} \neq \emptyset$ e $y_kx_n \neq \emptyset$, pois para que yxy^{-1} seja *reduzida* não deve ter nenhum *cancelamento* em $y_1y_2...y_kx_1x_2...x_ny_k^{-1}...y_1^{-1}$. Logo, devemos ter $y_k \neq x_1^{-1}$ e $y_k \neq x_n$.

Como $x_1^{-1}, x_n \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ então obtemos $z \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\} - \{x_1^{-1}, x_n\}$. Assim, para cada $m \in \mathbb{N}$, $z^mxz^{-m} \in C_x$ é uma *palavra reduzida.* Logo, C_x é infinito. Agora, se $x = \emptyset$ então está claro que $C_\emptyset = \emptyset$. Portanto, $\mathbb{F}_2$ é I.C.C.

Assim, produzimos mais um fator $W^*(\mathbb{F}_2)$.

4 Fator do Tipo II

Nesse capítulo estudaremos fatores do tipo II e seus subtipos II_1 e II_∞. Esses subtipos serão definidos de acordo com a relação que as projeções tem entre si.

4.1 Fator do Tipo II_1

Definição 4.1.1. *Sejam $\mathcal{M}$ uma álgebra de von Neumann e $p \in \mathcal{M}$ uma projeção. Dizemos que p é **infinita**, relativo a $\mathcal{M}$, se existe uma projeção $q \in \mathcal{M}$, distinta de p, tal que $p \sim q$ e $q \leq p$.*

Observação 4.1.2. *Quando p não é **infinita** dizemos que p é **finita**.*

Exemplo 4.1.3. Considere a álgebra de von Neumann $\mathcal{M} = M_n(\mathbb{C})$, a projeção $p = I \in \mathcal{M}$ e o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$. Definindo $K := Im(p) = \mathcal{H}$ temos $K^\perp = \{0\}$. Vamos provar que p é finita. Suponha, por absurdo, que p é infinita. Então existe uma projeção $q \in \mathcal{M}$, distinta de p, tal que $p \sim q$ e $q < p$. O fato $q < p$ implica que $Im(q) \subset Im(p)$ e com isso dim Im(q) $<$ dim Im(p). Sendo $p \sim q$, existe uma isometria parcial $u \in \mathcal{M}$ tal que $u^*u = p$ e $u^*u = q$. Como $u_{|K} : Im(p) \rightarrow Im(q)$ é unitário (ver Proposição 4.2.2 em [5]), então dim Im(p) = dim Im(q) o que é absurdo, pois dim Im(q) $<$ dim Im(p). Portanto, I é finita.

Exemplo 4.1.4. Considere $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{N})$, a álgebra de von Neumann $\mathcal{M} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e a projeção $p = 1_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}$. Considere uma base ortonormal $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{H}$ e o operador shift à direita $S \in \mathcal{M}$. Temos que

$$S^*S((e_1, e_2, ..., e_n, ...)) = S^*((0, e_1, e_2, ..., e_n, ...)) =$$

$$= (e_1, e_2, ..., e_n, ...) \Rightarrow S^*S = p$$

e $SS^*((e_1, e_2, ..., e_n, ...)) = S((e_2, ..., e_n, ...)) = (0, e_2, ..., e_n, ...)$ define uma projeção $q = SS^*$ sobre $\overline{span}\{e_2, e_3, ..., e_n, ...\}$ tal que $q < p$. Note que S faz o papel da isometria parcial u que procuramos, para que $u^*u = p$ e $uu^* = q$. Logo, $p = 1_{\mathcal{H}}$ é infinita pois $1_{\mathcal{H}} \sim q < 1_{\mathcal{H}}$.

Proposição 4.1.5. *Seja $\mathcal{M}$ uma álgebra de von Neumann. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) Se $E \in \mathcal{M}$ é uma projeção finita então toda sub-projeção de E é finita

ii) Toda projeção minimal em $\mathcal{M}$ é finita *iii) Se $E, F \in \mathcal{M}$ são projeções tais que $E \sim F$ e E é finita então F é finita*

Demonstração: *(i)*: Sejam $E \in \mathcal{M}$ é uma projeção finita e E_0 uma subprojeção de E. Suponha, por hipótese, que E_0 seja infinita. Então existe projeção $E_1 \in \mathcal{M}$, distinta de E_0, tal que $E_1 < E_0$ e $E_0 \sim E_1$. O fato de $E_0 \sim E_1$, implica que existe uma isometria parcial $V \in \mathcal{M}$ tal que $V^*V = E_0$ e $VV^* = E_1$. Note que

$$(E - E_0 + V)^*(E - E_0 + V) =$$

$$= E - E_0 + EV - E_0E + E_0 - E_0V + V^*E - V^*E_0 + V^*V =$$

$$= E - E_0 + EVV^*V - E_0 + E_0 - E_0VV^*V + V^*VV^*E-$$

$$+V^*VV^*E_0 + E_0 = E + EE_1V - E_0E_1V + V^*E_1E - V^*E_1E_0 =$$

$$= E + E_1V - E_1V + V^*E_1 - V^*E_1 = E$$

e

$$(E - E_0 + V)(E - E_0 + V)^* =$$

$$= E - E_0 + EV^* - E_0E + E_0 - E_0V^* + VE - VE_0 + VV^* =$$

$$= E - E_0 + EV^*VV^* - E_0 + E_0 - E_0V^*VV^* + VV^*VE-$$

$$+VV^*VE_0 + E_1 = E - E_0 + EE_0V^* - E_0E_0V^* + VE_0E-$$

$$+VE_0E_0 + E_1 = E - E_0 + E_0V^* - E_0V^* + VE_0 - VE_0 + E_1 =$$

$$= E - E_0 + E_1.$$

Logo, $(E - E_0 + V)$ é uma isometria parcial. Como

$Im(E - E_0 + E_1) \subseteq Im(E) \Rightarrow (E - E_0 + E_1) \leq E$, então $E \sim (E - E_0 + V) \leq E$ e isso implica que é infinita, contrariando o fato de E ser finita. Portanto, E_0 é finita.

(ii): Seja E minimal. Suponha que E seja infinIta. Então existe projeção F tal que $E \sim F < E$. Pelo fato $E \sim F$, existe uma isometria parcial $U \in \mathcal{M}$ tal que $U^*U = E$ e $UU^* = F$. Como E é minimal e $E \neq F$, então $F = 0$. Logo, $UU^* = 0 \Rightarrow U = UU^*U = 0$. Logo, $E = 0$ contrariando o fato de E ser minimal. Portanto, E é finita.

(iii): Suponha que F seja infinita. Então existe projeção F_0, distinta de F, tal que $F_0 < F$ e $F \sim F_0$. O fato $F \sim F_0$, implica que existe uma isometria parcial $W \in \mathcal{M}$ tal que $W^*W = F$ e $WW^* = F_0$. Por hipótese, $E \sim F$, logo existe uma isometria parcial $V \in \mathcal{M}$ tal que $V^*V = E$ e $VV^* = F$. Observe que

$$(V^*WV)^*(V^*WV) = V^*W^*VV^*WV = V^*W^*FWV =$$

$$V^*W^*FWW^*WV = V^*W^*FF_0WV = V^*W^*F_0WV =$$

$$V^*W^*WW^*WV = V^*FFV = V^*FV = V^*VV^*V = EE = E$$

e

$$(V^*WV)(V^*WV)^* = V^*WVV^*W^*V = V^*WFW^*V =$$

$$= V^*WW^*WW^*V = V^*F_0F_0V = V^*F_0V.$$

É claro que V^*F_0V é uma projeção. Assim, V^*WV é uma isometria parcial e dessa forma $E \sim V^*F_0V$. Note que $V^*F_0VE = V^*F_0VV^*V = V^*F_0V$ e isso implica em V^*F_0V ser uma subprojeção de E, ou seja, $(V^*F_0V) \leq E$. Se $(V^*F_0V) \neq E$ então E seria infinita, o que é absurdo. Portanto, F é finita.

■

Definição 4.1.6. *Um estado sobre uma C^*-álgebra A com unidade é um funcional linear $\phi : A \to \mathbb{C}$ tal que $\phi(a^*a) \geq 0$ $\forall a \in A$ e $\phi(1_A) = 1$.*

Definição 4.1.7. *Um traço sobre uma C^*-álgebra A com unidade é um estado τ tal que $\tau(ab) = \tau(ba)$ $\forall a, b \in A$.*

Como estamos trabalhando com álgebra de von Neumann, é de nosso interesse os traços contínuos na topologia operador-forte.

Sejam G um grupo I.C.C. enumerável e uma base ortonormal $\{e_g : g \in G\}$ de $\ell_2(G)$. Defina $\tau : W^*(G) \to \mathbb{C}$ dada por $\tau(a) = \widehat{a}(1_G)$, onde $\widehat{a} : G \to \mathbb{C}$ é dado por $\widehat{a}(g) = \langle a(e_{1_G}), e_g \rangle$.

Afirmação: τ é fortemente contínuo

Seja $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq W^*(G)$ uma *net* tal que $a_i \overset{i \in I}{\to} a \in W^*(G)$ na topologia operador-forte. Note que

$$\lim_{i \in I} \tau(a_i) - \tau(a) = \lim_{i \in I} \widehat{a}_i(1_G) - \widehat{a}(1_G) =$$

$$= \lim_{i \in I} \langle a_i(e_{1_G}), e_{1_G} \rangle - \langle a(e_{1_G}), e_{1_G} \rangle =$$

$$= \left\langle \lim_{i \in I} a_i(e_{1_G}), e_{1_G} \right\rangle - \langle a(e_{1_G}), e_{1_G} \rangle =$$

$$= \left\langle \lim_{i \in I} a_i(e_{1_G}) - a(e_{1_G}), e_{1_G} \right\rangle = 0.$$

Logo, τ é fortemente contínuo.

Afirmação: τ é um traço

Observe que

1. É óbvio que τ é linear

2. $\tau(1_{\mathcal{H}}) = \widehat{1_{\mathcal{H}}}(e_{1_G}) = \langle 1_{\mathcal{H}}(e_{1_G}), e_{1_G} \rangle = \langle e_{1_G}, e_{1_G} \rangle = 1$

3. para qualquer $a \in W^*(G)$,
   $\tau(a^*a) = \widehat{a^*a}(e_{1_G}) = \langle (a^*a)e_{1_G}, e_{1_G} \rangle = \langle a(e_{1_G}), a(e_{1_G}) \rangle = \|a(e_{1_G})\|^2 \geq 0$

4. Sejam $a, b \in W^*(G)$ arbitrários
   CASO 1: Suponha $a, b \in W_0$
   Então existem sequências de suporte finito $\{a_g\}_{g \in G}, \{b_h\}_{h \in G} \subseteq \mathbb{C}$ associadas a a e b, respectivamente. Pela *Proposição 3.1.6*, o termo geral da sequência associada a ab é dado por $c_k = \sum_{g \in G} a_g b_{g^{-1}k}$.

Assim,

$$\tau(ab) = \widehat{ab}(1_G) = \langle ab(e_{1_G}), e_{1_G} \rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{k \in G} c_k u_k(e_{1_G}), e_{1_G} \right\rangle = \sum_{k \in G} c_k \langle e_k, e_{1_G} \rangle = c_{1_G}$$

e

$$\tau(ba) = \widehat{ba}(1_G) = \langle ba(e_{1_G}), e_{1_G} \rangle =$$

$$= \left\langle b\left(\sum_{g \in G} a_g u_g(e_{1_G})\right), e_{1_G} \right\rangle = \sum_{g \in G} a_g \langle be_g, e_{1_G} \rangle =$$

$$= \sum_{g \in G} a_g \left\langle \left(\sum_{h \in G} b_h u_h e_g\right), e_{1_G} \right\rangle = \sum_{g,h \in G} a_g b_h \langle e_{hg}, e_{1_G} \rangle =$$

$$= \sum_{g \in G} a_g b_{g^{-1}} \langle e_{1_G}, e_{1_G} \rangle = c_{1_G}.$$

Logo, $\tau(ab) = \tau(ba)\ \forall a, b \in W_0$.

CASO 2: Suponha que $a, b \notin W_0$.

Então existem *nets* $\{a_j\}_{j \in I}$, $\{b_i\}_{i \in I} \subset W_0$ tais que $a = \lim\limits_{j \in I} a_j$ e $b = \lim\limits_{i \in I} b_i$ na topologia operador-forte. Como τ é fortemente contínuo, segue que

$$\tau(ab) = \widehat{ab}(1_G) = \langle ab(e_{1_G}), e_{1_G} \rangle = \left\langle a(\lim_{i \in I} b_i e_{1_G}), e_{1_G} \right\rangle =$$

$$= \lim_{i \in I} \langle ab_i e_{1_G}, e_{1_G} \rangle = \lim_{i \in I} \left\langle \lim_{j \in I} a_j(b_i e_{1_G}), e_{1_G} \right\rangle =$$

$$= \lim_{i \in I} \lim_{j \in I} \langle a_j b_i e_{1_G}, e_{1_G} \rangle = \lim_{i \in I} \lim_{j \in I} \widehat{a_j b_i}(1_G) =$$

$$= \lim_{i\in I}\lim_{j\in I}\tau(a_jb_i) = \lim_{i\in I}\lim_{j\in I}\tau(b_ia_j) =$$

$$= \lim_{i\in I}\lim_{j\in I}\widehat{b_ia_j}(1_G) = \lim_{i\in I}\lim_{j\in I}\langle b_ia_je_{1_G}, e_{1_G}\rangle =$$

$$= \lim_{i\in I}\left\langle b_i(\lim_{j\in I}a_je_{1_G}), e_{1_G}\right\rangle = \lim_{i\in I}\langle b_i(ae_{1_G}), e_{1_G}\rangle =$$

$$= \left\langle \lim_{i\in I} b_i(ae_{1_G}), e_{1_G}\right\rangle = \langle bae_{1_G}, e_{1_G}\rangle = \widehat{ba}(1_G) = \tau(ba).$$

CASO 3: Suponha, sem perda de generalidade, que $a \in W_0$ e $b \notin W_0$.

Então

$$\tau(ab) = \widehat{ab}(1_G) = \langle ab(e_{1_G}), e_{1_G}\rangle = \left\langle a(\lim_{i\in I} b_ie_{1_G}), e_{1_G}\right\rangle =$$

$$= \lim_{i\in I}\langle ab_ie_{1_G}, e_{1_G}\rangle = \lim_{i\in I}\widehat{ab_i}(1_G) = \lim_{i\in I}\tau(ab_i) =$$

$$= \lim_{i\in I}\tau(b_ia) = \lim_{i\in I}\widehat{b_ia}(1_G) = \lim_{i\in I}\langle b_iae_{1_G}, e_{1_G}\rangle =$$

$$= \left\langle \lim_{i\in I} b_i(ae_{1_G}), e_{1_G}\right\rangle = \langle bae_{1_G}, e_{1_G}\rangle = \widehat{ba}(1_G) = \tau(ba).$$

Logo, $\tau(ab) = \tau(ba)\ \forall a, b \in W^*(G)$.

Portanto, por (1), (2), (3) e (4), τ é um traço.

Definição 4.1.8. *Dizemos que um estado ϕ sobre uma C^*-álgebra A é fiel se*

$$\phi(a^*a) = 0 \Longrightarrow a = 0.$$

Exemplo 4.1.9. O traço τ, definido acima, é fiel
Note que $\tau(a^*a) = \widehat{a^*a}(e_{1_G}) = \langle (a^*a)e_{1_G}, e_{1_G}\rangle = \langle a(e_{1_G}), a(e_{1_G})\rangle = \|a(e_{1_G})\|^2 = 0 \Rightarrow a(e_{1_G}) = 0$. Pela definição da função Δ (*ver Seção 3.2 pg. 73*), temos $\Delta(a) = a(e_{1_G})$. Como $Ker(\Delta) = \{0\}$ (*ver Seção 3.2 pg. 75*), então $a = 0$ e isso conclui que τ é fiel.

Definição 4.1.10. *Dizemos que um fator $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é do tipo II se em $\mathcal{M}$ não existe projeção minimal, mas existe projeção finita.*

Definição 4.1.11. *Dizemos que um fator $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é do tipo II_1 se é do tipo II e todas as projeções são finitas.*

Definição 4.1.12. *Dizemos que um fator $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é do tipo II_∞ se é do tipo II e existe projeção infinita.*

Definição 4.1.13. *Dizemos que um fator $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é do tipo III se em $\mathcal{M}$ todas as projeções são infinitas.*

Com as informações até o momento, podemos demonstrar a seguinte proposição:

Teorema 4.1.14. *Se $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é um fator, com $\mathcal{H}$ separável e $dim\mathcal{H} = \infty$, que adimite um traço fortemente contínuo e fiel então $\mathcal{M}$ é do tipo II_1.*

Demonstração: Vamos descartar o caso de $\mathcal{M}$ ser um fator do tipo II_∞ ou do tipo III, provando que não existe projeção infinita em $\mathcal{M}$.

Afirmação: Não existe projeção infinita em $\mathcal{M}$

Suponha, por absurdo, que existe uma projeção infinita $p \in \mathcal{M}$. Então por definição existe uma projeção $q \in \mathcal{M}$, distinta de p, tal que $q < p$ e $q \sim p$. Como $q \sim p$, então existe uma isometria parcial $u \in \mathcal{M}$ tal que $uu^* = p$ e $u^*u = q$. Por hipótese, existe uma traço fiel τ. Então $\tau(u^*u) = \tau(uu^*)$ e com isso $\tau(p) = \tau(q) \Rightarrow \tau(p-q) = 0$. Como $p - q > 0$ e τ é fiel, segue que $p - q = 0$ e com isso $p = q$, contradizendo o fato de p ser distinta de q. Portanto, toda projeção em $\mathcal{M}$ é finita.

Pela afirmação acima, $\mathcal{M}$ não é do tipo II_∞ nem do tipo III. Nos resta descartar a possibilidade $\mathcal{M} \simeq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ou $\mathcal{M} \simeq M_n(\mathbb{C})$, ou seja, $\mathcal{M}$ não ser do tipo I. Por hipótese, $dim\mathcal{H} = \infty$, então $\mathcal{M} \not\simeq M_n(\mathbb{C})$. Como $\mathcal{H} \simeq \ell_2$, então pelo *Exemplo 4.1.4* $1_\mathcal{H}$ é infinita relativamente a $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Provamos na afirmação acima que todas as projeções em $\mathcal{M}$ são finita, logo $1_\mathcal{H}$ é finita relativamente a $\mathcal{M}$. Assim, $\mathcal{M} \not\simeq \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Logo, $\mathcal{M}$ não é do tipo I. Portanto, podemos concluir que $\mathcal{M}$ é do tipo II_1.

$\blacksquare$

Como consequência da Teorema 4.1.14, dado um grupo G enumerável e I.C.C , $W^*(G)$ é um fator do tipo II_1.

4.2 Fator do Tipo II_∞

Até o momento mostramos exemplos de fatores do tipo I e II_1. A seguir mostraremos o processo de como obter fatores do tipo II_∞. Antes de iniciar tal processo, fixemos um fator $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ do tipo II_1, com $\mathcal{H}$ separável, somente para essa seção. A partir dessa seção, usaremos as seguintes notações: $\oplus_\infty^{ext}\mathcal{H}$ para o fecho da *soma direta externa* de infinitas cópias de $\mathcal{H}$ e $\oplus_\infty^{int}\mathcal{H}$ para a *soma direta interna* de infinitas cópias de $\mathcal{H}$. Uma vez que $\mathcal{H}$ é separável, $\oplus_\infty^{ext}\mathcal{H}$ também é.

Proposição 4.2.1. *Seja $(T_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \in M_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ tal que $T_{ij} = 0$ para $\forall i, j \in \mathbb{N} - F$, onde $F \subset \mathbb{N}$ é finito. Então existe $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^\infty)$ tal que a matriz de T é $(T_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$, em que $\mathcal{H}^\infty = \oplus_\infty^{ext}\mathcal{H}$.*

Demonstração: Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & ... & T_{1n} & 0 & ... \\ T_{21} & T_{22} & ... & T_{2n} & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & 0 & ... \\ T_{n1} & T_{n2} & ... & T_{nn} & 0 & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & ... \end{bmatrix} \in M_\infty(\mathcal{L}(\mathcal{H})),$$

onde $A_{i,j} = 0 \ \forall i, j > n$.
Seja $x = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...) \in \mathcal{H}^\infty$ e $[x]$ a matriz coluna de x. Defina

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \end{bmatrix} := A[x] = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^\infty T_{1j}(x_j) \\ \sum_{j=1}^\infty T_{2j}(x_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^\infty T_{nj}(x_j) \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Obviamente que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} T_{ij}(x_j) = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}(x_j) = y_i \in \mathcal{H} \ \forall i \in \mathbb{N}$.
Logo, $y = (y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}, ...) \in \mathcal{H}^\infty$. Assim, podemos definir uma função $T : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}^\infty$ que é obviamente linear.

Afirmação: T é limitado
Seja $v \in \mathcal{H}^\infty$. Note que

$$\|Tv\|^2 = \|w\|^2 = \|(w_1, w_2, ..., w_n, ...)\|^2 =$$

$$= \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} T_{1j}(v_j), \sum_{j=1}^{\infty} T_{2j}(v_j), ..., \sum_{j=1}^{\infty} T_{nj}(v_j), 0, ... \right) \right\|^2 = (*).$$

Antes de prosseguir com os cálculos, observe que $T_{ij} = 0$ para cada $i, j > n$. Assim, podemos definir $K := \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \|T_{ij}\| < \infty$.

Então

$$(*) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} T_{ij}(v_j) \right\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T_{ij}\| \, \|v_j\| \right)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|T_{ij}\| \, \|v_j\| \right)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|T_{ij}\| \right)^2 \|v_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} K^2 \|v_j\|^2 = K^2 \|v\|^2 .$$

Logo, $\|Tv\| \leq K \|v\|$, implicando em T ser limitado.

Portanto, existe o operador T tal que A é a sua matriz.

$\blacksquare$

Defina o conjunto

$$M_0 := \{(T_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}} \in M_\infty(\mathcal{M}) : \exists F \subset \mathbb{N} \text{ finito tal que}$$

$$T_{ij} = 0 \ \forall i, j \in \mathbb{N} - F\}.$$

Pela *Proposição 4.2.1*, para M_0 obtemos o conjunto

$$(\mathcal{M} \otimes \infty)_0 := \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^\infty) : [T] \in M_0\}.$$

Afirmação: $(\mathcal{M} \otimes \infty)_0$ é uma sub-*-álgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H}^\infty)$

Sejam $T, S \in (\mathcal{M} \otimes \infty)_0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Sendo $[T]$ e $[S]$ as matrizes de T e S, respectivamente, segue que

$$(\lambda T+S)x=\lambda(Tx)+Sx \Longrightarrow [\lambda T+S][x]=[(\lambda T+S)x]=$$

$$=\lambda[Tx]+[Sx]=\lambda[T][x]+[S][x]=(\lambda[T]+[S])[x]\ \forall x\in\mathcal{H}^{\infty}.$$

Então $[\lambda T+S]\in M_0$ e desse forma $\lambda T+S\in(\mathcal{M}\otimes\infty)_0$. Note que

$$(TS)x=T(Sx)\Longrightarrow [TS][x]=[(TS)x]=[T(Sx)]=$$

$$=[T][Sx]=[T][S][x]\ \forall x\in\mathcal{H}^{\infty}.$$

Logo, $[TS]=[T][S]$ e isso implica $TS\in(\mathcal{M}\otimes\infty)_0$. Para $x,y\in\mathcal{H}^{\infty}$, temos que

$$[T][x]=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{\infty}T_{1j}(x_j)\\ \sum_{j=1}^{\infty}T_{2j}(x_j)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{\infty}T_{nj}(x_j)\\ 0\\ \vdots\end{bmatrix}\ \text{e}\ [T]^*[y]=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{\infty}T_{j1}^*(y_j)\\ \sum_{j=1}^{\infty}T_{j2}^*(y_j)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{\infty}T_{jn}^*(y_j)\\ 0\\ \vdots\end{bmatrix}.$$

Está claro que $[T]^*\in M_0$. Seja $S\in(\mathcal{M}\otimes\infty)_0$ tal que $[T]^*=[S]$. Agora, observe que $\langle Sy,x\rangle=$

$$=\left\langle\left(\sum_{j=1}^{\infty}T_{j1}^*(y_j),...,\sum_{j=1}^{\infty}T_{jn}^*(y_j),0,...\right),(x_1,...,x_n,...)\right\rangle=$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} T_{ji}^{*}(y_j), x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle y_j, T_{ij}(x_j) \rangle$$

e $\langle y, Tx \rangle =$

$$= \left\langle (y_1, ..., y_n, ...), \left(\sum_{j=1}^{\infty} T_{1j}(x_j), ..., \sum_{j=1}^{\infty} T_{nj}(x_j), 0, ... \right) \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} y_i, T_{ij}(x_j) \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle y_j, T_{ij}(x_j) \rangle .$$

Logo, $\langle Sy, x \rangle = \langle y, Tx \rangle \ \forall x, y \in \mathcal{H}^{\infty}$. Portanto, $T^{*} = S \in (\mathcal{M} \otimes \infty)_0$. Concluímos então que $(\mathcal{M} \otimes \infty)_0$ é uma sub-*-álgebra.

Afirmação: $1_{\mathcal{H}^{\infty}} \in \overline{(\mathcal{M} \otimes \infty)_0}^{TOF}$

Seja $I_n \in (\mathcal{M} \otimes \infty)_0$ cuja matriz é

$$[I_n] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1_{\mathcal{H}} & ... & 0 & 0 & ... \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1_{\mathcal{H}} & 0 & ... \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right] .$$

É claro que $I_n(x) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ...)$ implica em $I_n(x) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} x = 1_{\mathcal{H}^{\infty}}(x) \ \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \mathcal{H}^{\infty}$. Logo, $I_n \overset{n \to \infty}{\to} 1_{\mathcal{H}^{\infty}}$ na topologia operador-forte. Como $\overline{(\mathcal{M} \otimes \infty)_0}^{TOF}$ é fechado, segue que $1_{\mathcal{H}^{\infty}} \in \overline{(\mathcal{M} \otimes \infty)_0}^{TOF}$.

Portanto, podemos concluir que $\overline{(\mathcal{M}\otimes\infty)_0}^{TOF}$ é uma álgebra de von Neumann em $\mathcal{L}(\mathcal{H}^\infty)$ e vamos definir $(\mathcal{M}\otimes\infty) := \overline{(\mathcal{M}\otimes\infty)_0}^{TOF}$.

Observação 4.2.2. *Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^\infty)$ e $(T_{ij})_{i,j}$ a matrix de T. Sabemos que $T_{ij} : \mathcal{H}_j = \mathcal{H} \to \mathcal{H}_i = \mathcal{H}$. Considere o operador de inclusão $\iota_j : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}^\infty$ dado por $\iota_j(\xi) = (0,0,...,0,\underbrace{\xi}_{j^{\underline{a}}},0,...)$. Denotando por $p_j = \iota_j^* : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}_j$, onde $\iota^*((\xi_1,\xi_2,...,\xi_j,...)) = \xi_j$, é fácil ver que p_j é uma projeção. Dessa forma podemos escrever $T_{ij} = \iota_i^* T \iota_j$.*

Lema 4.2.3. *Se $T \in (\mathcal{M}\otimes\infty)$ e $(T_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ é a sua matriz então $(T_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \in M_\infty(\mathcal{M})$.*

Demonstração: Sejam $T \in (\mathcal{M}\otimes\infty)$ e $(T_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ a matriz de T. Então existe uma *net* $(T^n)_{n\in I} \subset (\mathcal{M}\otimes\infty)_0$ tal que $T = \lim_{n\in I} T^n$ na topologia operador-forte. Para cada $n \in I$ considere $(T^n_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ a matriz de T^n. Note que, para cada $i,j \in \mathbb{N}$

$$T_{ij} = \iota_i^* T \iota_j = \iota_i^*(\lim_{n\in I} T^n)\iota_j = \lim_{n\in I} \iota_i^* T^n \iota_j = \lim_{n\in I} T^n_{ij}.$$

Como $T^n_{ij} \in \mathcal{M}$ $\forall n \in I$, logo $(T_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \in M_\infty(\mathcal{M})$.

$\blacksquare$

Proposição 4.2.4. *Se $\mathcal{M}$ é um fator então $(\mathcal{M}\otimes\infty)$ também é um fator.*

Demonstração: Seja $\mathcal{M}$ um fator. Para provar que $(\mathcal{M}\otimes\infty)$ é um fator, vamos analisar $\mathcal{Z}((\mathcal{M}\otimes\infty))$. Sejam $T\in\mathcal{Z}((\mathcal{M}\otimes\infty))$ e $[T]$ a matriz de T. Sabendo que $\mathcal{Z}((\mathcal{M}\otimes\infty))=(\mathcal{M}\otimes\infty)\cap(\mathcal{M}\otimes\infty)'$, vamos primeiro analisar $(\mathcal{M}\otimes\infty)'$. Por definição $(\mathcal{M}\otimes\infty)'=\{T\in\mathcal{L}(\mathcal{H}^\infty):TS=ST\ \forall S\in(\mathcal{M}\otimes\infty)\}$. Analisemos $T\in(\mathcal{M}\otimes\infty)'$. Em paricular, $TS=ST\ \forall S\in(\mathcal{M}\otimes\infty)_0$. Tome $S\in(\mathcal{M}\otimes\infty)_0$ tal que $[S]=E_{ij}$, onde a matriz $E_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & 0 & ... \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ... \\ 0 & ... & 0 & 1_{\mathcal{H}} & ... \\ \vdots & ... & \vdots & \ddots & ... \end{bmatrix}$ tem $1_{\mathcal{H}}$ na posição (i,j) e 0 em todas as outras posições.
Então

$$[T][S]=\begin{bmatrix} T_{11} & ... & T_{1n} & ... \\ \vdots & ... & \vdots & ... \\ T_{n1} & ... & T_{nn} & ... \\ \vdots & ... & \vdots & ... \end{bmatrix} E_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & T_{1i} & 0 & ... \\ 0 & ... & 0 & T_{2i} & 0 & ... \\ \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots & ... \\ 0 & ... & 0 & T_{ni} & 0 & ... \\ \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots & ... \end{bmatrix}$$

e

$$[S][T] = E_{ij}\begin{bmatrix} T_{11} & ... & T_{1n} & ... \\ \vdots & ... & \vdots & ... \\ T_{n1} & ... & T_{nn} & ... \\ \vdots & ... & \vdots & ... \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & ... \\ \vdots & ... & \vdots & ... \\ 0 & ... & 0 & ... \\ T_{j1} & ... & T_{jn} & ... \\ 0 & ... & 0 & ... \\ \vdots & ... & \vdots & ... \end{bmatrix}.$$

De modo análogo ao *Exemplo 2.1.6*, concluímos que $[T]$ é diagonal e $T_{11} = T_{22} = ... = T_{nn} = ...$

Agora considere $V \in (\mathcal{M} \otimes \infty)_0$ tal que $[V] = \begin{bmatrix} m & 0 & ... \\ 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & ... \end{bmatrix}$.

Então

$$[T][V] = \begin{bmatrix} T_{11}m & 0 & ... \\ 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & ... \end{bmatrix} \text{ e } [V][T] = \begin{bmatrix} mT_{11} & 0 & ... \\ 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & ... \end{bmatrix}.$$

Sendo $[T][V] = [V][T]$, então $T_{11}m = mT_{11}$. Logo, $\forall m \in \mathcal{M}$ temos $T_{11}m = mT_{11}$ e isso implica que $T_{11} \in \mathcal{M}'$.

Dessa forma conseguimos identificar os operadores em $(\mathcal{M} \otimes \infty)'$. Assim, podemos escrever $(\mathcal{M} \otimes \infty)' := \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^\infty) : [T] \text{ é diagonal e } T_{ii} = D \ \forall i, \text{ com } D \in \mathcal{M}'\}$. Como $T \in (\mathcal{M} \otimes \infty)$, pois $T \in \mathcal{Z}((\mathcal{M} \otimes \infty))$, então pelo *Lema 4.2.3* segue que $T_{ii} \in \mathcal{M}$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Logo, $T_{ii} \in \mathcal{M}' \cap \mathcal{M} = \mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, pois $\mathcal{M}$ é um fator. Logo, $T \in \mathcal{Z}((\mathcal{M} \otimes \infty)) \Rightarrow$

$[T] = \lambda I$ e podemos concluir que $T = \lambda 1_{\mathcal{H}^\infty}$. Portanto, $(\mathcal{M} \otimes \infty)$ é um fator.

$\blacksquare$

Proposição 4.2.5. $1_{\mathcal{H}^\infty}$ *é uma projeção infinita relativamente à* $(\mathcal{M} \otimes \infty)$.

Demonstração: Devemos encontrar uma projeção $Q \in (\mathcal{M} \otimes \infty)$ tal que $Q < 1_{\mathcal{H}^\infty}$ e $Q \sim 1_{\mathcal{H}^\infty}$. Defina $U, U^n : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}^\infty$ dados por

$$U((\xi_1, \xi_2, ...)) = (0, \xi_1, \xi_2, ...)$$

e

$$U^n((\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)) = (0, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, 0, ...).$$

É fácil constatar que $U^*((\xi_1, \xi_2, ...)) = (\xi_2, \xi_3, ...)$.
Observe que a matriz de U^n é $(U^n_{ij})_{i,j} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & ... & 0 & 0 & ... \\ 1_{\mathcal{H}} & ... & 0 & 0 & ... \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & ... \\ 0 & ... & 1_{\mathcal{H}} & 0 & ... \\ \hline 0 & ... & 0 & 0 & ... \\ \vdots & ... & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right]$, onde o bloco no canto superior esquerdo é $(n+1) \times n$. Então $U^n \in (\mathcal{M} \otimes \infty)_0$. É claro que

$$U^n((\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)) =$$

$$= (0, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, 0, ...) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (0, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) =$$

$$= U((\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)) \ \forall (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) \in \mathcal{H}^\infty.$$

Logo, $U^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} U$ na topologia operador-forte. Como $\{U^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (\mathcal{M} \otimes \infty)$ e $(\mathcal{M} \otimes \infty)$ é fortemente fechado, segue que $U \in (\mathcal{M} \otimes \infty)$.
Note que,

- Para cada $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) \in \mathcal{H}^\infty$

  $$U^*U((\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)) = U^*((0, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)) =$$

  $$= (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...).$$

  Logo, $U^*U = 1_{\mathcal{H}^\infty}$

- $UU^*((\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)) = (0, \xi_2, ..., \xi_n, ...)$ $\forall (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) \in \mathcal{H}^\infty$, define uma projeção $Q = UU^*$, pois

  $$Q^2 = (UU^*)^2 = UU^*UU^* = U1_{\mathcal{H}^\infty}U^* = UU^* = Q$$

  e

  $$Q^* = (UU^*)^* = UU^* = Q.$$

Seguramente $Q \neq 1_{\mathcal{H}^\infty}$ e U é uma isometria parcial, pois UU^* é uma projeção. Como $Im(Q) \subset Im(1_{\mathcal{H}^\infty})$, então $Q < 1_{\mathcal{H}^\infty}$. Portanto, $1_{\mathcal{H}^\infty}$ é infinita.

■

Proposição 4.2.6. *Existe projeção finita em* $(\mathcal{M} \otimes \infty)$.

Demonstração: Seja $p \in (\mathcal{M} \otimes \infty)$ uma projeção cuja matriz é $[p] = \begin{bmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 & ... \\ 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$.
Suponha, por absurdo, que p seja infinta. Então existe uma projeção $q \in (\mathcal{M} \otimes \infty)$, distinta de p, tal que $q \leq p$ e $q \sim p$. Então existe uma isometria parcial $u \in (\mathcal{M} \otimes \infty)$ tal que $uu^* = q$ e $u^*u = p$. Como a isometria parcial u não é única, então vamos definir outra isometria parcial $v \in (\mathcal{M} \otimes \infty)$ tal que $v^*v = p$ e $vv^* = q$. Defina $v := qup$. Note que

$$v^*v = (qup)^*qup = pu^*qqup = pu^*qup = pu^*uu^*up = pppp = p$$

e

$$vv^* = qup(qup)^* = quppu^*q = qupu^*q = quu^*uu^*q = qqqq = q.$$

Como assumimos $q \leq p$, então $pq = q = qp$. Logo, $pqp = pq = q$ e com isso

$$[p][q][p] = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & ... \\ 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = [q].$$

Assim, $[v] = [q][u][p] = \begin{bmatrix} q_{11}u_{11} & 0 & ... \\ 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$. Pelo *Lema 4.2.3* $[u], [q] \in M_\infty(\mathcal{M})$, logo $v_{11} = q_{11}u_{11} \in \mathcal{M}$. Como q é uma projeção, então q_{11} também é uma projeção em $\mathcal{M}$. Sendo $vv^* = q$ e $v^*v = p$, segue que $[v][v^*] = [q]$ e $[v^*][v] = [p]$ implica em $v_{11}v_{11}^* = q_{11}$ e $v_{11}^*v_{11} = 1_{\mathcal{H}}$. Logo, $q_{11} \sim 1_{\mathcal{H}}$. Observe que $[q] \neq [p]$ implica em $q_{11} \neq 1_{\mathcal{H}}$. Assim, $1_{\mathcal{H}}$ é infinita relativamente a $\mathcal{M}$, o que é absurdo pois sendo $\mathcal{M}$ um fator do tipo II_1, todas as projeções em $\mathcal{M}$ são finitas. Portanto, p é finita.

■

Proposição 4.2.7. *Se $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é um fator do tipo I, com $\mathcal{H}$ separável e $dim\mathcal{H} = \infty$, então para cada projeção $p \in \mathcal{M}$, não nula, existe uma projeção minimal $q \in \mathcal{M}$ tal que $q \leq p$.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{M}$ um fator do tipo I e $p \in \mathcal{M}$ uma projeção não nula. Sendo $\mathcal{M}$ do tipo I, com $\mathcal{H}$ separável e $dim\mathcal{H} = \infty$, então existe um isomorfismo $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{L}(\ell_2)$. Sejam $P = \phi(p)$ e $E = \{e_n\}_n$ uma base de $Im(P)$. Fixe $e_n \in E$ e considere $K = \overline{span}\{e_n\}$. Como K é um subespaço fechado de ℓ_2, então existe uma projeção $Q \in \mathcal{L}(\ell_2)$ tal que $K = Im(Q)$. O fato de $dimK = 1$, implica que para qualquer projeção $Q' \in \mathcal{L}(\ell_2)$ tal que $Q' \leq Q$ necessariamente $Q' = 0$ ou $Q' = Q$. Logo, Q é minimal em $\mathcal{L}(\ell_2)$.
Como $K \subseteq Im(P)$, então $Q = QP = PQ$ e aplicando ϕ temos

$$\phi^{-1}(Q) = \phi^{-1}(QP) = \phi^{-1}(Q)\phi^{-1}(P) = \phi^{-1}(Q)p$$

e

$$\phi^{-1}(Q) = \phi^{-1}(PQ) = \phi^{-1}(P)\phi^{-1}(Q) = p\phi^{-1}(Q).$$

Definindo $q := \phi^{-1}(Q)$, temos $q = pq = qp$.

Afirmação: q é minimal
Suponha que $\exists q' \in \mathcal{M}$ tal que $q' \leq q$. Então $q' = qq' = q'q$ e $\phi(q') = Q\phi(q') = \phi(q')Q$ implicam em $\phi(q') \leq Q$. Como Q é minimal, tem-se $\phi(q') = 0$ ou $\phi(q') = Q$. Então $\phi^{-1}(\phi(q')) = q' = 0$ ou $\phi^{-1}(\phi(q')) = q' = q = \phi^{-1}(Q)$. Logo, q é minimal.

Portanto, para cada projeção ortogonal $p \in \mathcal{M}$, não nula, $\exists q \in \mathcal{M}$ minimal tal que $q \leq p$.

■

Até momento concluímos que em $(\mathcal{M} \otimes \infty)$ existe projeção infinita e finita. Agora, para provarmos que $(\mathcal{M} \otimes \infty)$ é um fator do tipo II_∞ resta-nos demonstrar que $(\mathcal{M} \otimes \infty)$ não é do tipo I.

Afirmação: $(\mathcal{M} \otimes \infty)$ não é do tipo I
Suponha, por absurdo, que $(\mathcal{M} \otimes \infty)$ é do tipo I. Considere a projeção p usada na *Proposição 4.2.6*. Pela *Proposição 4.2.7*, existe uma projeção minimal $q \in (\mathcal{M} \otimes \infty)$ tal que $q \leq p$. Provamos, na *Proposição 4.2.6*, que a matriz $[q]$ tem q_{11} com único elemento não nulo. Seja $r_{11} \in \mathcal{M}$ uma

projeção tal que $r_{11} \leq q_{11}$. Considere $r \in (\mathcal{M} \otimes \infty)$ tal que sua matriz seja $[r] = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & ... \\ 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$. Obviamente que $Im(r_{11}) \subseteq Im(q_{11}) \Rightarrow Im(r) \subseteq Im(q) \Rightarrow r \leq q$. Como q é minimal, então $r = 0$ ou $r = q$. Logo, $r_{11} = 0$ ou $r_{11} = q_{11}$ e com isso q_{11} é minimal, o que é absurdo pois $\mathcal{M}$ é do tipo II_1.

Portanto, $(\mathcal{M} \otimes \infty)$ não é do tipo I.

Da afirmação acima, $(\mathcal{M} \otimes \infty)$ não tem projeção minimal e sabendo que coexistem projeção finita e infinita em $(\mathcal{M} \otimes \infty)$, então por definição $(\mathcal{M} \otimes \infty)$ é um fator do tipo II_∞.

De modo geral, dado um fator $\mathcal{M}$ do tipo II_1, obtemos um fator $(\mathcal{M} \otimes \infty)$ do tipo II_∞.

4.3 Fatores do tipo II_1 a partir de um fator do tipo II_∞

Na seção anterior mostramos que dado um fator do tipo II_1 produzimos outro fator do tipo II_∞. Então surge a pergunta: será que dado um fator $\mathcal{N}$ do tipo II_∞, é possível encontrar um fator $\mathcal{M}$ do tipo II_1 tal que $(\mathcal{M} \otimes \infty) \simeq \mathcal{N}$? A resposta é SIM e faremos isso, seguindo o seguinte roteiro:

1. Encontrar uma família $\{p_n : n \in I \subseteq \mathbb{N}\}$ de projeções

finitas duas-a-duas ortogonais e equivalentes tal que $\sum_{n \in I} p_n = 1_{\mathcal{K}}$, num fator $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{K})$ do tipo II_∞ com $\mathcal{K}$ separável

2. Definindo $\mathcal{M} := \{\iota^* T \iota : T \in \mathcal{N}\}$ onde $\iota : \mathcal{H} \to K$ com $\mathcal{H} = Im(p_1)$, provar que $\mathcal{M} \otimes \infty \simeq \mathcal{N}$

3. Provar que $\mathcal{M}$ é um fator do tipo II_1

Vamos assumir que $\mathcal{K}$ é um espaço de Hilbert separável.

Lema 4.3.1. *Se p e q são projeções finitas e ortogonais numa álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ então $p+q$ é uma projeção finita.*

Demonstração: Ver demonstração do *Teorema 6.3.8* em [7].

■

Teorema 4.3.2. *Dado um fator $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{K})$ do tipo II_∞, existe uma família $\mathcal{F} = \{t_n : n \in I \subseteq \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{N}$ de projeções finitas duas-a-duas ortogonais e equivalentes tal que $\sum_{n \in I} t_n = 1_{\mathcal{K}}$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{N}$ um fator do tipo II_∞. De modo análogo feito para projeções minimais (*ver Lema 2.2.9*), existe uma família maximal $\mathcal{F}_0 = \{p_n : n \in I \subseteq \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{N}$ de projeções finitas duas-a-duas ortogonais e equivalentes. Pelo

Lema 2.2.8, $q := \sum_{n \in I} p_n$ converge na topologia operador-forte e é uma projeção.

Vamos provar que existe uma família $\mathcal{F} = \{t_n : n \in I \subseteq \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{N}$ de projeções finitas duas-a-duas ortogonais e equivalentes tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} t_n = 1_{\mathcal{K}}$.

Fixe $p_1 \in \mathcal{F}_0$. Como $1_{\mathcal{K}}, q \in \mathcal{N}$, Então $q^{\perp} = 1_{\mathcal{K}} - q \in \mathcal{N}$. Pela *Proposição 2.2.6*,

$$p_1 \precsim 1_{\mathcal{K}} - q \text{ ou } 1_{\mathcal{K}} - q \precsim p_1.$$

Suponha que $p_1 \precsim 1_{\mathcal{K}} - q$. Então existe uma projeção $r \in \mathcal{N}$ tal que $p_1 \sim r$ e $r \leq 1_{\mathcal{K}} - q$. Como $p_n \sim p_1 \sim r \ \forall n \in I$, então $p_n \sim r \ \forall n \in I$ (*ver Proposição 2.2.3*). Obviamente que $1_{\mathcal{K}} - q \perp p_n \ \forall n \in I$. Sabendo que $r \leq 1_{\mathcal{K}} - q \Rightarrow (1_{\mathcal{K}} - q)r = r$, então $p_n r = p_n(1_{\mathcal{K}} - q)r = 0 \ \forall n \in I$ e com isso $p_n \perp r$ $\forall n \in I$. Assim, constatamos que $\mathcal{F}_0 \subsetneq \mathcal{F}_0 \cup \{r\}$ o que contraria a maximalidade de $\mathcal{F}_0$. Portanto, não é verdade que $p_1 \precsim 1_{\mathcal{K}} - q$, e sim que $1_{\mathcal{K}} - q \precsim p_1$.

Então existe projeção $r_1 \in \mathcal{N}$ tal que $1_{\mathcal{K}} - q \sim r_1$ e $r_1 \leq p_1$. Fixe $n \in I$. Sabendo que $p_1 \sim p_n$, então existe uma isometria parcial $u_n \in \mathcal{N}$ tal que $u_n u_n^* = p_n$ e $u_n^* u_n = p_1$. Defina $s_1 := p_1 - r_1$.

Como $p_1 = r_1 + s_1$ e $s_1 \perp r_1$, então $Im(p_1) = Im(r_1) \oplus Im(s_1)$. Sendo u_n operador unitário de $Im(p_1)$ para $Im(p_n)$,

então

$$Im(p_n) = u_n(Im(p_1)) = u_n(Im(r_1)) \oplus u_n(Im(s_1)).$$

Seja $\xi \in \mathcal{K}$. Observe o esquema abaixo:

$$\xi \xrightarrow{p_n} p_n(\xi) \xrightarrow{u_n^*} u_n^*(p_n(\xi)) \xrightarrow{r_1} r_1 u_n^*(p_n(\xi)) \xrightarrow{u_n}$$

$$u_n r_1 u_n^*(p_n(\xi)) \in u_n(Im(r_1)).$$

Note que $u_n r_1 u_n^* p_n = u_n r_1 u_n^* u_n u_n^* = u_n r_1 u_n^*$. Defina $r_n := u_n r_1 u_n^*$. Observe que

$$r_n^2 = u_n r_1 u_n^* u_n r_1 u_n^* = u_n r_1 p_1 r_1 u_n^* = u_n r_1 u_n^* = r_n$$

e

$$r_n^* = (u_n r_1 u_n^*)^* = u_n r_1 u_n^* = r_n,$$

comprovam que r_n é uma projeção. Observe o esquema abaixo:

$$\xi \xrightarrow{p_n} p_n(\xi) \xrightarrow{u_n^*} u_n^*(p_n(\xi)) \xrightarrow{s_1} s_1 u_n^*(p_n(\xi)) \xrightarrow{u_n}$$

$$u_n s_1 u_n^*(p_n(\xi)) \in u_n(Im(s_1)).$$

Defina $s_n := u_n s_1 u_n^*$. Usando o mesmo raciocínio de r_n, verifica-se que s_n é uma projeção.

Afirmação: Para cada $n, i, j \in I$ as seguintes afirmações são verdadeiras:

i) $p_n = r_n + s_n$

ii) $r_n \perp s_n$

iii) $r_n \sim r_1$

iv) $s_n \sim s_1$

v) $(1_{\mathcal{K}} - q + s_1) \perp (r_n + s_{n+1})$

vi) $(r_i + s_{i+1}) \perp (r_j + s_{j+1})$ para $i \neq j$

i) De fato, $r_n + s_n = u_n r_1 u_n^* + u_n s_1 u_n^* = u_n(r_1 + s_1)u_n^* = u_n p_1 u_n^* = u_n u_n^* u_n u_n^* = p_n p_n = p_n$

ii) De fato, $r_n s_n = u_n r_1 u_n^* u_n s_1 u_n^* = u_n r_1 p_1 s_1 u_n^* = u_n r_1 s_1 u_n^* = 0$

iii) Note que

$$r_n = u_n r_1 u_n^* = u_n r_1 r_1 u_n^* = (u_n r_1)(u_n r_1)^*$$

e

$$(u_n r_1)^*(u_n r_1) = r_1^* u_n^* u_n r_1 = r_1^* p_1 r_1 = r_1$$

Logo, $r_n \sim r_1$.

iv) Note que

$$s_n = u_n s_1 u_n^* = u_n s_1 s_1 u_n^* = (u_n s_1)(u_n s_1)^*$$

e

$$(u_n s_1)^*(u_n s_1) = s_1^* u_n^* u_n s_1 = s_1^* p_1 s_1 = s_1$$

Logo, $s_n \sim s_1$.

v) Observe que

$$(1_{\mathcal{K}} - q + s_1)(r_n + s_{n+1}) =$$

$$= r_n - qr_n + s_{n+1} - qs_{n+1} + s_1 r_n + s_n s_{n+1} =$$

$$= r_n - qp_n r_n + s_{n+1} - qp_{n+1} s_{n+1} + s_1 p_1 p_n r_n + s_n p_n p_{n+1} s_{n+1} =$$

$$= r_n - r_n + s_{n+1} - s_{n+1} + 0 + 0 = 0$$

vi) De fato, note que

$$(r_i + s_{i+1})(r_j + s_{j+1}) = r_i r_j + r_i s_{j+1} + s_{i+1} r_j + s_{i+1} s_{j+1} =$$

$$r_i p_i p_j r_j + r_i p_i p_{j+1} s_{j+1} + s_{i+1} p_{i+1} p_j r_j + s_{i+1} p_{i+1} p_{j+1} s_{j+1} = 0$$

Para cada $i, j \in I$, r_i e s_j são ortogonais e finitas, então pelo *Lema 4.3.1* $r_i + s_j$ é finita.
Defina

$$t_n := \begin{cases} 1_{\mathcal{K}} - q + s_1 & , n = 1 \\ r_{n-1} + s_n & , n > 1 \end{cases}$$

É claro que t_n é uma projeção, pois $1_{\mathcal{K}} - q + s_1$ e $r_{n-1} + s_n$ são projeções. Além disso, para cada $i, j \in I$ tem-se $t_i \perp t_j$ se $i \neq j$, $t_i \sim t_j$ e t_i finita.
Assim, conseguimos uma família $\mathcal{F} = \{t_n : n \in I\} \subseteq \mathcal{N}$ de projeções finitas duas-a-duas ortogonais e equivalentes.

Sendo $\sum\limits_{n\in I} t_n$ uma projeção (ver Lema 2.2.8), note que

$$\sum_{n\in I} t_n = t_1 + \sum_{n=2}^{\infty} t_n = 1_{\mathcal{K}} - q + s_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(r_{n-1} + s_n) =$$

$$= 1_{\mathcal{K}} - \sum_{n\in I} p_n + s_1 + \sum_{n=2}^{\infty} r_{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} s_n =$$

$$= 1_{\mathcal{K}} - \sum_{n\in I}(r_n + s_n) + \sum_{n=2}^{\infty} r_{n-1} + s_1 + \sum_{n=2}^{\infty} s_n =$$

$$= 1_{\mathcal{K}} - \sum_{n\in I} r_n - \sum_{n\in I} s_n + \sum_{n\in I} r_n + \sum_{n\in I} s_n = 1_{\mathcal{K}}.$$

Portanto, $1_{\mathcal{K}} = \sum\limits_{n\in I} t_n$.

■

Seja $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{K})$ um fator do tipo II_∞. Pelo *Teorema 4.3.2*, existe uma família $\mathcal{F} = \{p_n : n \in I \subseteq \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{N}$ de projeções finitas duas-a-duas ortogonais e equivalentes, com $\sum\limits_{n\in I} p_n = 1_{\mathcal{K}}$. Fixe $p_1 \in \mathcal{F}$. Considere $\mathcal{H} = Im(p_1)$, $\mathcal{H}_n = Im(p_n)$, e $\iota : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ operador de inclusão.

Defina $\mathcal{M} := \{\iota^* T \iota : T \in \mathcal{N}\}$. Agora, nosso objetivo é provar que $(\mathcal{M} \otimes \infty) \simeq \mathcal{N}$ e em seguida que $\mathcal{M}$ é um fator do tipo II_1. Sabendo que $p_n \sim p_1\ \forall n \in I$, então para cada $n \in I$ existe uma isometria parcial $u_n \in \mathcal{N}$ tal que $u_n u_n^* = p_1$ e $u_n^* u_n = p_n$. Vale lembrar que $Im(p_n)$ e $Im(p_1)$ são isomorfos por u_n. Para os argumentos a seguir

é necessário um isomorfismo de $Im(p_1)$ para $Im(p_n)$, então vamos trabalhar com a isometria parcial $v_n = u_n^*$.
Defina $U : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{K}$ dado por $U((\xi_n)_n) = \sum_{n\in I} v_n \iota(\xi_n)$.

Afirmação: U é unitário
Defina $V : \mathcal{H}^\infty \to \oplus_\infty^{ext} \mathcal{H}_n$ dado por $V((\xi_n)_n) = (v_n \iota(\xi_n))_n$.
Note que

- Para cada $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^\infty$, tem-se

$$\|V((\xi_n)_n)\|^2 = \|(v_n\iota(\xi_n))_n\|^2 = \sum_{n\in I} \|v_n\iota(\xi_n)\|^2 =$$

$$= \sum_{n\in I} \|\xi_n\|^2 = \|(\xi_n)_n\|^2 .$$

  Logo, $\|V((\xi_n)_n)\| = \|(\xi_n)_n\|$ e com isso V é uma isometria.

- Dado $(\eta_n)_n \in \oplus_\infty^{ext}\mathcal{H}_n$, tem-se que para cada $\eta_n \in \mathcal{H}_n$, $\exists \xi_n \in \mathcal{H}$ tal que $\eta_n = v_n\iota(\xi_n)$. Logo, $(\eta_n)_n = (v_n\iota(\xi_n))_n$ e com isso V é sobrejetor

Sendo V isométrico e sobrejetor, então V é unitário (*ver [1] Teorema 3.10-6(f)*). Agora, sabendo que existe um operador unitário $W : \oplus_\infty^{ext}\mathcal{H}_n \to \overline{\oplus_\infty^{int}\mathcal{H}_n} = \mathcal{K}$ dado por $W((\xi_n)_n) = \sum_{n\in I}\xi_n$, então $U = W \circ V$ é um operador unitário.

Afirmação: $U^*(\xi) = (\iota^* v_n^*(\xi))_n \ \forall \xi \in \mathcal{K}$

Fixe $(\xi_n)_{n\in I} \in \mathcal{H}^\infty$. Para cada $\xi \in \mathcal{K}$, note que

$$\langle (\iota^* v_n^*(\xi))_n, (\xi_n)_n \rangle = \sum_{n\in I} \langle \iota^* v_n^*(\xi), \xi_n \rangle =$$

$$= \sum_{n\in I} \langle \xi, v_n \iota(\xi_n) \rangle = \left\langle \xi, \sum_{n\in I} v_n \iota(\xi_n) \right\rangle = \langle \xi, U((\xi_n)_n) \rangle .$$

Logo, $U^*(\xi) = (\iota^* v_n^*(\xi))_n \ \forall \xi \in \mathcal{K}$.

Defina $\phi : (\mathcal{M} \otimes \infty) \to \mathcal{N}$ dado por $\phi(T) = UTU^*$. Vamos provar que ϕ está bem definida, mostrando que $\phi(\mathcal{M} \otimes \infty) \subseteq \mathcal{N}$ e isso será feito na *Proposição 4.3.3(i)*.

Proposição 4.3.3. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) ϕ *é sobrejetora*

ii) ϕ *é injetora*

iii) ϕ *é um *-homomorfismo*

iv) $Im(\phi) = U(\mathcal{M} \otimes \infty)U^*$ *é um sub-*-álgebra fechada na topologia operador-forte de* $\mathcal{L}(\mathcal{K})$

Demonstração: *(i)* Vamos provar que $U(\mathcal{M}\otimes\infty)U^* = \mathcal{N}$.
" $\subseteq$ " : Sejam $m \in \mathcal{M}$ arbitrário e $m \otimes e_{ij} \in (\mathcal{M} \otimes \infty)_0$, de modo que a matriz $[m \otimes e_{ij}]$ tenha m na entrada (i, j) e 0 em todas as outras. Note que

$$U(m \otimes e_{ij})U^*(\xi) = U(m \otimes e_{ij})(\iota^* v_n^*(\xi))_n =$$

$$= U(m \otimes e_{ij})(\iota^* v_1^*(\xi), ..., \iota^* v_n^*(\xi), ...) =$$

$$= U(0, 0, ..., 0, \underbrace{m\iota^* v_j^*(\xi)}_{i^a}, 0, ...) = v_i \iota(m\iota^* v_j^*(\xi)) =$$

$$= v_i \iota m \iota^* v_j^*(\xi) \ \forall \xi \in \mathcal{K}.$$

Logo,

$$U(m \otimes e_{ij})U^* = v_i \iota m \iota^* v_j^* \qquad \textbf{(*)}.$$

Pela definição de $\mathcal{M}$, $\exists T \in \mathcal{N}$ tal que $m = \iota^* T \iota$. Então

$$v_i \iota m \iota^* v_j^* = u_i^* \iota(\iota^* T \iota)\iota^* u_j = u_i^* p_1 T p_1 u_j \in \mathcal{N},$$

pois $u_i^*, p_1, T, u_j \in \mathcal{N}$. Logo, $U(m \otimes e_{ij})U^* \in \mathcal{N}$.
Agora tome $m \otimes E \in (\mathcal{M} \otimes \infty)_0$. Podemos escrever $m \otimes E = \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij} \otimes e_{ij}$. Como $\mathcal{N}$ é subespaço, então $U(m \otimes E)U^* \in \mathcal{N}$.
Seja $S \in (\mathcal{M} \otimes \infty)$. Então existe uma *net* $\{S_i\}_{i \in J} \subset (\mathcal{M} \otimes \infty)_0$ tal que $S = \lim_{i \in J} S_i$ na topologia operador-forte. Já provamos que $US_iU^* \in \mathcal{N}$ $\forall i \in J$. Agora, observe que

$$\|US_iU^*(\xi) - USU^*(\xi)\| = \|U(S_i - S)U^*(\xi)\| \leq$$

$$\leq \|U\| \, \|(S_i - S)U^*(\xi)\| \xrightarrow{i \in J} 0 \ \forall \xi \in \mathcal{K}.$$

Logo, $US_iU^* \xrightarrow{i \in J} USU^*$ na topologia operador-forte. Sendo $\mathcal{N}$ fortemente fechado, segue que $USU^* \in \mathcal{N}$ e também $U(\mathcal{M} \otimes \infty)U^* \subseteq \mathcal{N}$, pois S é arbitrário.

" $\supseteq$ " : Dado $T \in \mathcal{N}$, note que $T = 1_{\mathcal{K}} T 1_{\mathcal{K}} =$

$\left(\sum_{i\in I} p_i\right) T \left(\sum_{j\in I} p_j\right) = \sum_{i,j\in I} p_i T p_j$. Agora, observe que

$$p_i T p_j = u_i^* u_i T u_j^* u_j = u_i^* u_i u_i^* u_i T u_j^* u_j u_j^* u_j = u_i^* p_1 S p_1 u_j$$

onde $S := u_i T u_i^*$. De modo análogo,

$$u_i^* p_1 S p_1 u_j = u_i^* \iota\iota^* S \iota\iota^* u_j = u_i^* \iota m \iota^* u_j \text{ onde } m := \iota^* S \iota.$$

Lembrando que $u_i^* = v_i$, então por **(*)** temos $u_i^* \iota m \iota^* u_j = v_i \iota m \iota^* v_j^* = U(m \otimes e_{ij})U^*$. Logo, $p_i T p_j \in U(\mathcal{M} \otimes \infty)U^*$. Seja $F \subseteq I$ arbitrário e finito. Sendo $U(\mathcal{M} \otimes \infty)U^*$ sub-*-álgebra fechada na topologia operador-forte, temos

$$\sum_{i,j\in F} p_i T p_j = \left(\sum_{i\in F} p_i\right) T \left(\sum_{j\in F} p_j\right) \in U(\mathcal{M} \otimes \infty)U^* \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{i\in I} p_i\right) T \left(\sum_{j\in I} p_j\right) \in U(\mathcal{M} \otimes \infty)U^* \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 1_{\mathcal{K}} T 1_{\mathcal{K}} = T \in U(\mathcal{M} \otimes \infty)U^*.$$

Logo, $\mathcal{N} \subseteq U(\mathcal{M} \otimes \infty)U^*$.
Portanto, $U(\mathcal{M} \otimes \infty)U^* = \mathcal{N}$ e com isso ϕ é sobrejetora.

(ii) Sejam $T, S \in (\mathcal{M} \otimes \infty)$ arbitrários. Se $\phi(T) = \phi(S)$ então

$$UTU^* = USU^* \Rightarrow U^*UTU^*U = U^*USU^*U \Rightarrow 1_{\mathcal{K}} T 1_{\mathcal{K}} =$$

$$= 1_{\mathcal{K}} S 1_{\mathcal{K}} \Rightarrow T = S.$$

Logo, ϕ é injetora.

(iii) Óbvio

(iv) Pelo item *(i)* $U(\mathcal{M} \otimes \infty)U^* = \mathcal{N}$, logo $U(\mathcal{M} \otimes \infty)U^*$ é uma sub-*-álgebra fortemente fechada.

$\blacksquare$

Pela Proposição 4.3.3, concluímos que ϕ é um *-isomorfismo, ou melhor, $\mathcal{M} \otimes \infty \simeq \mathcal{N}$. Nosso grande objetivo agora, é provar que $\mathcal{M}$ é um fator do tipo II_1.

Proposição 4.3.4. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) $\mathcal{M}$ é uma álgebra de von Neumann em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$

ii) $\mathcal{M}$ é um fator

Demonstração: *(i)* Como ι^* é uma projeção (*ver Observação 1.4.6*), a demonstração é a mesma feita na *Proposição 2.2.11.*

(ii) Sejam $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$ e $Z^n \in (\mathcal{M} \otimes \infty)_0$ tal que $[Z^n]$ seja diagonal, com $Z^n_{11} = ... = Z^n_{nn} = z$ e $Z^n_{ii} = 0 \ \forall i > n$. Considere uma matriz $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ infinita e diagonal onde

$a_{ii} = z\ \forall i$. Note que para cada $\forall \xi \in \mathcal{H}^\infty$,

$$\|A[\xi]\|^2 = \|(z\xi_1, z\xi_2, ..., z\xi_n, ...)\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|z(\xi_n)\|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|z\|^2 \|\xi_n\|^2 = \|z\|^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\xi_n\|^2 =$$

$$= \|z\|^2 \|\xi\|^2 \Rightarrow \|A[\xi]\| \leq \|z\| \|\xi\|.$$

Logo, a matriz A define um operador $Z : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}^\infty$ linear e limitado. Afirmamos que $Z^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Z$ na topologia operador-forte. De fato, note que para cada $\xi \in \mathcal{H}^\infty$

$$\|Z^n(\xi) - Z(\xi)\| =$$

$$= \|(z\xi_1, z\xi_2, ..., z\xi_n, 0, ...) - (z\xi_1, z\xi_2, ..., z\xi_n, ...)\| =$$

$$= \|(0, 0, ..., 0, z\xi_{n+1}, z\xi_{n+2}, ...)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como $(\mathcal{M}\otimes\infty)$ é fortemente fechado, então "*produzimos*" um operador $Z \in (\mathcal{M} \otimes \infty)$. É fácil constatar que $A[x] = [x]A$ $\forall x \in (\mathcal{M} \otimes \infty)_0$.

Agora, para qualquer $x \in (\mathcal{M} \otimes \infty)$, tem-se

$$Zx = Z \lim_{i\in J} x_i = \lim_{i\in J} Zx_i = \lim_{i\in J} x_i Z = xZ.$$

Logo, $Z \in \mathcal{Z}(\mathcal{M} \otimes \infty)$. Devemos lembrar que $\mathcal{N}$ fator e $(\mathcal{M}\otimes\infty) \simeq \mathcal{N}$, implicam em $\mathcal{M}\otimes\infty$ ser também um fator e com isso $Z \in \mathbb{C}1_{\mathcal{H}^\infty}$. Assim, $A \in \mathbb{C}I$ e com isso $a_{ii} = z = 1_{\mathcal{H}}$ $\forall i$. Logo, $z \in \mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$, concluindo que $\mathcal{M}$ é um fator.

■

Agora nos resta provar que $\mathcal{M}$ é um fator do tipo II_1. Para isso, vamos definir $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ dado por $\psi(m) = \iota m \iota^*$. Para qualquer $m \in \mathcal{M}$, temos

$$\psi(m) = \iota m \iota^* = \iota\iota^* T \iota\iota^* = p_1 T p_1 \in \mathcal{N}$$

para algum $T \in \mathcal{N}$, logo ψ está bem definida. Vamos mostrar que ψ é um *-homomorfismo injetor e esse fato será de fundamental importância para provarmos que $\mathcal{M}$ não é do tipo I e que toda projeção em $\mathcal{M}$ é finita, concluindo que $\mathcal{M}$ é do tipo II_1.

Afirmação: ψ é um *-homomorfismo injetor

Sejam $m, m' \in \mathcal{M}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrários. Note que

- $\psi(\lambda m + m') = \iota(\lambda m + m')\iota^* = \lambda \iota m \iota^* + \iota m 1 \iota^* =$
  $= \lambda\psi(m) + \psi(m')$

- $\psi(mm') = \iota(mm')\iota^* = \iota m 1_{\mathcal{H}} m' \iota^* = \iota m \iota^* \iota m' \iota^* =$
  $\psi(m)\psi(m')$

- $\psi(m^*) = \iota m^* \iota^* = (\iota m \iota^*)^* = (\psi(m))^*$

Portanto, ψ é um *-homomorfismo. Se $\psi(m) = \psi(m')$ então $\iota m \iota^* = \iota m' \iota^* \Rightarrow \iota^* \iota m \iota^* \iota = \iota^* \iota m' \iota^* \iota \Rightarrow 1_{\mathcal{H}} m 1_{\mathcal{H}} = 1_{\mathcal{H}} m' 1_{\mathcal{H}} \Rightarrow$ $m = m'$, concluindo que ψ é injetor.

Vamos provar que $\mathcal{M}$ não é do tipo I e que todas as projeções em $\mathcal{M}$ são finitas, concluindo que $\mathcal{M}$ é do tipo II_1.

Afirmação: $\mathcal{M}$ não é do tipo I

Suponha, por absurdo, que $\mathcal{M}$ é do tipo I. Então existe uma projeção minimal $q \in \mathcal{M}$. Afirmamos que $\psi(q) = \iota q \iota^*$ é minimal. De fato, seja $r \in \mathcal{N}$ um projeção tal que $r \leq \psi(q)$. Pela definição de $\mathcal{M}$, $\iota^* r \iota \in \mathcal{M}$. Note que $\psi(q) \leq p_1$, pois $\psi(q)p_1 = \iota q \iota^* \iota \iota^* = \iota q \iota^* = \psi(q)$. Como $r \leq \psi(q) \leq p_1$, então $r \leq p_1$ e também $rp_1 = r = p_1 r$. Note que

$$(\iota^* r \iota)^2 = (\iota^* r \iota)(\iota^* r \iota) = \iota^* r p_1 r \iota = \iota^* r \iota \text{ e } (\iota^* r \iota)^* = \iota^* r \iota.$$

Logo, $\iota^* r \iota$ é uma projeção. Agora, observe que $\iota^* r \iota q = \iota^* r \iota q \iota^* \iota = \iota^* r \psi(q) \iota = \iota^* r \iota$ implica $\iota^* r \iota \leq q$. Sendo q minimal então $\iota^* r \iota = q$ ou $\iota^* r \iota = 0$. Se $\iota^* r \iota = q$ então

$$\iota \iota^* r \iota \iota^* = \iota q \iota^* \Longrightarrow p_1 r p_1 = \psi(q) \Longrightarrow r = \psi(q).$$

Se $\iota^* r \iota = 0$ então

$$\iota \iota^* r \iota \iota^* = 0 \Longrightarrow p_1 r p_1 = 0 \Longrightarrow r = 0.$$

Logo, $\psi(q) \in \mathcal{N}$ é minimal, o que é absurdo pois $\mathcal{N}$ é do tipo II_∞. Portanto, $\mathcal{M}$ não é do tipo I.

Vamos provar que $\mathcal{M}$ é do tipo II_1, afirmando que em $\mathcal{M}$ todas as projeções são finitas.

Afirmação: Toda projeção em $\mathcal{M}$ é finita
Suponha, por absurdo, que $1_{\mathcal{H}}$ é infinita. Então existe uma projeção $p \in \mathcal{M}$, distinta de $1_{\mathcal{H}}$, tal que $1_{\mathcal{H}} \sim p$ e $p \leq 1_{\mathcal{H}}$. Então existe uma isometria parcial $u \in \mathcal{M}$ tal que $uu^* = p$ e $u^*u = 1_{\mathcal{H}}$. Note que

- $\psi(p)p_1 = \iota p \iota^* \iota \iota^* = \iota p 1_{\mathcal{H}} \iota^* = \iota p \iota^* = \psi(p)$, logo $\psi(p) \leq p_1$

- $\psi(p) = \psi(uu^*) = \psi(u)\psi(u^*) = \psi(u)(\psi(u))^*$ e $\psi(1_{\mathcal{H}}) = \iota\iota^*\iota\iota^* = p_1 = \psi(u^*u) = \psi(u^*)\psi(u) = (\psi(u))^*\psi(u)$. Como $(\psi(u))^*\psi(u)$ é uma projeção, logo $\psi(u)$ é uma isometria parcial. Portanto, $\psi(p) \sim p_1$

Concluímos que $\psi(p) \leq \psi(1_{\mathcal{H}}) = p_1$ e $\psi(p) \sim \psi(1_{\mathcal{H}}) = p_1$. Se $\psi(p) \neq \psi(1_{\mathcal{H}})$ então por definição, $\psi(1_{\mathcal{H}}) = p_1$ é infinita, o que é absurdo. Agora, se $\psi(p) = \psi(1_{\mathcal{H}})$ então pelo fato de ψ ser injetora tem-se $p = 1_{\mathcal{H}}$, contrariando o fato de $p \neq 1_{\mathcal{H}}$. Portanto, $1_{\mathcal{H}}$ deve ser finita. Sabendo que toda projeção $q \in \mathcal{M}$ é subprojeção de $1_{\mathcal{H}}$, ou seja, $q \leq 1_{\mathcal{H}}$, e que $1_{\mathcal{H}}$ é finita então toda projeção em $\mathcal{M}$ é finita (*ver Proposição 4.1.5 (i)*).

Descartada a possbilidade de $\mathcal{M}$ ser do tipo I, provamos que $\mathcal{M}$ é do tipo II_1.
Concluímos que para cada fator $\mathcal{N}$ do tipo II_∞ existe um fator do tipo II_1 tal que $N \simeq \mathcal{M} \otimes \infty$.

5 *Apêndice*

5.1 Pré-Requisitos

Definição 5.1.1. *Definimos a topologia operador-forte, como a topologia inicial em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ dada pela família $\{\delta_\xi : \xi \in \mathcal{H}\}$, onde $\delta_\xi(T) = T(\xi)$.*

Observação 5.1.2. *Uma net $\{T_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ converge para $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ na topologia operador-forte se para cada $\xi \in \mathcal{H}$ $T_i(\xi) \xrightarrow{i\in I} T(\xi)$.*

Definição 5.1.3. *Definimos a topologia operador-fraco, como a topologia inicial em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ dada pela família $\{\delta_{f,\xi} : \xi \in \mathcal{H}$ e $f \in \mathcal{H}'\}$, onde $\delta_{f,\xi}(T) = f(T(\xi))$.*

Observação 5.1.4. *Uma net $\{T_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ converge para $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ na topologia operador-fraco se para cada $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ $\langle T_i(\xi), \eta\rangle \xrightarrow{i\in I} \langle T(\xi), \eta\rangle$.*

Lema 5.1.5. *Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Então*

$$Ker(T) = Ker(T^*T) = Ker(T^*T)^{1/2} = (Im(T^*))^\perp$$

e

$$(Ker(T))^{\perp} = \overline{Im(T^*)}$$

Demonstração: Ver demonstração do Lema 4.2.1 em [5].

Proposição 5.1.6. *Seja* $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. *Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $U = UU^*U$

ii) $P = U^*U$ *é uma projeção ortogonal*

iii) $U_{ker^{\perp}U}$ *é uma isometria*

Demonstração: Ver demonstração da Proposição 4.2.2 em [5].

Definição 5.1.7. *Um operador que satisfaz umas das condições, e portanto todas, da Proposição 5.1.6 é dita uma **isometria parcial**.*

Teorema 5.1.8. *Seja* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. *Então* T *adimite uma única decomposição* $T = U|T|$, *denominada decomposição polar, tal que*

i) $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ *é uma isometria parcial*

ii) $|T| \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *é um operador positivo*

iii) $Ker(U) = Ker(|T|) = Ker(T)$

Demonstração: Ver demonstração do Teorema 4.2.5 em [5].

Teorema 5.1.9. *Se $A \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é convexo então*

$$\overline{A}^{TOF} = \overline{A}^{TOf}.$$

Demonstração: Ver demonstração do Teorema 5.1.2 em [6].

$\blacksquare$

Lema 5.1.10. *Seja $\pi : C(X) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ uma representação. Então existe uma medida de probabilidade μ definida sobre $\mathcal{B}_X$, e uma representação $\widetilde{\pi} : L^\infty(X, \mathcal{B}_X, \mu) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que*

i) $\widetilde{\pi}$ *é uma isometria*

ii) $\widetilde{\pi}_{|C(X)} = \pi$

iii) *se ϕ é o limite $\mu - q.s$ de uma sequencia $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \widetilde{\pi}(L^\infty(X, \mathcal{B}_X, \mu))$ que é uniformemente limitada, então a sequencia $(\widetilde{\pi}(\phi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\widetilde{\pi}(\phi)$ na topologia operador forte*

iv) $(\pi(C(X)))'' = \widetilde{\pi}(L^\infty(X, \mathcal{B}_X, \mu))$

Demonstração: Para a demonstração dos itens (i),(ii) e (iii), ver demonstração do Lema 3.5.5 em [5]. Para a demonstração do item (iv), ver demonstração do Lema 3.5.7 em [5].

Lema 5.1.11. *Sejam as nets* $\{T_i\}_{i\in I}$, $\{S_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *tais que* $T_i \overset{i\in I}{\to} T$ *e* $S_i \overset{i\in I}{\to} S$ *na topologia operador-forte. Considere* $K = sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty$. *Então* $T_iS_i \overset{i\in I}{\to} TS$ *fortemente, ou seja,* $\lim\limits_{i\in I} T_iS_i = \left(\lim\limits_{i\in I} T_i\right)\left(\lim\limits_{i\in I} S_i\right)$ *na topologia operador-forte.*

Demonstração: Temos que

$$\|T_iS_i(\xi) - TS(\xi)\| = \|T_iS_i(\xi) + T_iS(\xi) - T_iS(\xi) - TS(\xi)\| \leq$$

$$\leq \|T_i(S_i(\xi) - S(\xi))\| + \|T_iS(\xi) - TS(\xi)\| \leq$$

$$\leq \|T_i\| \, \|S_i(\xi) - S(\xi)\| + \|T_iS(\xi) - TS(\xi)\| \leq$$

$$\leq K \, \|S_i(\xi) - S(\xi)\| + \|T_iS(\xi) - TS(\xi)\| \overset{i\in I}{\to} 0 \ \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Portanto, $T_iS_i \overset{i\in I}{\to} TS$ fortemente.

■

Proposição 5.1.12. *Suponha que* $\{f_i : X \to X_i / i \in I\}$ *é uma família de funções, onde* X_i *é um espaço topológico para cada* $i \in I$. *Uma função* $g : Y \to X$, *onde* Y *é um espaço topológico, é contínua com relação à topologia inicial de* X *se e só se* $f_i \circ g$ *é contínua para cada* $i \in I$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$: Supondo g contínua, temos que $f_i \circ g$ é contínua para cada $i \in I$ pois cada f_i é contínua.

$(\Leftarrow)$: Vamos provar que g é contínua. Seja $A \subseteq X$ aberto e arbitrário. Sabemos que $A = \cup_{\lambda\in\Delta} B_\lambda$, onde cada

B_λ é da forma $B_\lambda = \cap_{r\in F_\lambda} f_{i_r^\lambda}^{-1}(A_r^\lambda)$ sendo que A_r^λ é aberto em $X_{i_r^\lambda}$ e F_λ é um conjunto finito. Note que

$$g^{-1}(A) = g^{-1}(\cup_{\lambda\in\Delta} B_\lambda) = \cup_{\lambda\in\Delta} g^{-1}(B_\lambda).$$

Afirmação: $g^{-1}(B_\lambda)$ é aberto
De fato, note que

$$g^{-1}(B_\lambda) = g^{-1}(\cap_{r\in F_\lambda} f_{i_r^\lambda}^{-1}(A_r^\lambda)) = \cap_{r\in F_\lambda} g^{-1} f_{i_r^\lambda}^{-1}(A_r^\lambda) =$$

$$= \cap_{r\in F_\lambda} (f_{i_r^\lambda} g)^{-1}(A_r^\lambda)$$

é aberto, pois $f_{i_r^\lambda} g$ é contínua.

Pela *afirmação acima*, temos que cada $g^{-1}(B_\lambda)$ é aberto, donde $g^{-1}(A)$ é aberto. Como A é arbitrário, segue que g é contínua.

Proposição 5.1.13. *Se X e Y são espaços de Haudorff compactos e $\phi : C(X) \to C(Y)$ um *-homomorfismo, então existe uma função $h : Y \to X$ contínua tal que $\phi(f) = f \circ h$.*

Demonstração: Sabemos que exite uma bijeção entre Y e $\widehat{C(Y)}$. Logo, cada homomorfismo complexo em $\widehat{C(Y)}$ é da forma $\delta_y(f) = f(y)$ para $y \in Y$. Seja $y \in Y$ e o homomorfismo complexo $\delta_y \in \widehat{C(Y)}$. Defina $\delta_y \circ \phi = \gamma : C(X) \to \mathbb{C}$. Obviamente que γ é um homomorfismo complexo em $\widehat{C(X)}$. Como existe uma bijeção entre X e $\widehat{C(X)}$, então existe um único $x \in X$ que corresponde a γ, de modo que $\gamma(f) = f(x)$.

Observamos que para $y \in Y$, que fixamos acima, existe um único $x \in X$. Como y foi escolhido arbitrariamente, podemos definir uma função $h : Y \to X$. Note que $\gamma(f) = f(x) = f(h(y)) = f \circ h(y)$ e que $\gamma(f) = \delta_y(\phi(f)) = \phi(f)(y)\ \forall y \in Y$. Logo, $\phi(f) = f \circ h$.
Como $\phi(f)$ é contínuo (*ver Lema 3.4.2 em [5]*) e f é contínua, então pela *Proposição 5.1.12* h é contínua.

■

Proposição 5.1.14. *Se A e B são C^*-álgebras, ambas com unidade, e $\phi : A \to B$ um *-homomorfismo injetor, então ϕ é isométrico.*

Demonstração: Sejam A e B C^*-álgebras, ambas com unidade, e $\phi : A \to B$ um *-homomorfismo injetor.
CASO PARTICULAR: Suponha que A e B são comutativas
Pelo Teorema 3.3.6 em [5], existem *-isomorfismos isométricos $\Gamma_A : A \to C(\widehat{A})$ e $\Gamma_B : B \to C(\widehat{B})$ e $\widehat{A}, \widehat{B}$ compactos. Temos que $C(\widehat{A}) \xrightarrow{\Gamma_A^{-1}} A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\Gamma_B} C(\widehat{B})$. Defina $\varphi : C(\widehat{A}) \longrightarrow C(\widehat{B})$, dado por $\varphi = \Gamma_B \circ \phi \circ \Gamma_A^{-1}$. Obviamente que φ é um *-homomorfismo injetor. Pela *Proposição 5.1.13*, existe uma função contínua $h : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$ tal que $\varphi(f) = f \circ h$.

Afirmação: $Im(h) = \widehat{A}$

Suponha que $Im(h) \subsetneq \widehat{A}$. Como $Im(h)$ é compacta, pois $\widehat{B}$ é compacto e h é contínua, e $\widehat{A}$ é compacto, pelo *lema de Urysohn*, $\exists x_0 \in (\widehat{A} - Im(h))$ e $\exists f \in C(\widehat{A})$ tal que $f_{|Im(h)} = 0$ e $f(x_0) = 1$. Sendo φ injetor, então $Ker(\varphi) = \{0\}$. Logo, $\varphi(f) = 0$ implica em $f = 0$, contrariando o fato de $f(x_0) = 1$. Portanto, $Im(h) = \widehat{A}$.

Afirmação: φ é uma isometria

De fato, note que

$$\|\varphi(f)\| = \|f \circ h\| = \sup_{y \in \widehat{B}} |f(h(y))| \overset{Im(h) = \widehat{A}}{=} \sup_{x \in \widehat{A}} |f(x)| = \|f\|.$$

Como $\varphi = \Gamma_B \circ \phi \circ \Gamma_A^{-1} \Rightarrow \Gamma_B^{-1} \circ \varphi \circ \Gamma_A = \phi$, conclui-se que ϕ é isométrico quando A e B comutam.

CASO GERAL: Seja $a \in A$. Como $a^*a \in A$ e $\phi(a^*a)$ são elementos normais então temos as C^*-álgebras comutativas $C^*(\{1_A, a^*a\})$ e $C^*(\{1_B, \phi(a^*a)\})$. Obviamente que $C^*(\{1_A, a^*a\}) \subseteq A$, $C^*(\{1_B, \phi(a^*a)\}) \subseteq B$ e $\phi(C^*(\{1_A, a^*a\})) \subseteq C^*(\{1_B, \phi(a^*a)\})$. Pelo CASO PARTICULAR, $\phi_{|C^*(\{1_A, a^*a\})}$ é um *-homomorfismo isométrico, então

$$\|\phi(a^*a)\| = \|a^*a\| \overset{C^*}{=} \|a\|^2$$

e

$$\|\phi(a^*a)\| = \|\phi(a^*)\phi(a)\| = \|\phi(a)^*\phi(a)\| \overset{C^*}{=} \|\phi(a)\|^2.$$

Logo, $\|a\|^2 = \|\phi(a)\|^2$ e com isso podemos concluir que ϕ é isométrico.

■

Teorema 5.1.15. *A bola unitária*

$$B_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}[0,1] = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : \|T\| \leq 1\}$$

é compacta na topologia operador-fraco.

Demonstração: Ver demonstração do Teorema 5.1.3 em [6].

■

Teorema 5.1.16. *(Teorema da Densidade de Kaplansky) Se* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *é uma sub-*-álgebra então*

$$\overline{B_{\mathcal{M}}[0,1]}^{TOF} = B_{\overline{\mathcal{M}}^{TOF}}[0,1].$$

Demonstração: Ver demonstração do Teorema 5.3.5 em [6].

■

Proposição 5.1.17. *Se* A, B *são álgebras e* $\phi : A \to B$ *um homomorfismo sobrejetor, então* $\phi(\mathcal{Z}(A)) = \mathcal{Z}(B)$.

Demonstração: Sejam A, B álgebras e considere $\phi : A \to B$ um homomorfismo sobrejetor. Vamos provar que

$\phi(\mathcal{Z}(A)) = \mathcal{Z}(B)$.
" $\subseteq$ " : Seja $a' \in \mathcal{Z}(A)$. Então para cada $a \in A$ $a'a = aa'$. Sendo ϕ sobrejetor, para cada $b \in \mathcal{Z}(B)$ existe $a \in A$ tal que $b = \phi(a)$. Então

$$\phi(a')b = \phi(a')\phi(a) = \phi(a'a) = \phi(aa') = \phi(a)\phi(a') = b\phi(a')$$

para cada $b \in B$. Logo, $\phi(a') \in \mathcal{Z}(B)$. Como a' é arbitrário, segue que $\phi(\mathcal{Z}(A)) \subseteq \mathcal{Z}(B)$.

" $\supseteq$ " : Seja $b' \in \mathcal{Z}(B)$. Sendo ϕ sobrejetor, existe $a' \in A$ tal que $\phi(a') = b'$. Então para cada $a \in \mathcal{Z}(A)$,

$$b'\phi(a) = \phi(a')\phi(a) = \phi(a'a) = \phi(aa') = \phi(a)\phi(a') = \phi(a)b'.$$

Logo, $b' \in \phi(\mathcal{Z}(A))$. Como b' é arbitrário, segue que $\mathcal{Z}(B) \subseteq \phi(\mathcal{Z}(A))$.
Portanto, $\phi(\mathcal{Z}(A)) = \mathcal{Z}(B)$.

Referências

[1] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications.* New York: J. Wiley, 1989. 688p. (Wiley classics library) ISBN 0471504599.

[2] LIMA, E. L. *Curso de Analise.* 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006- v1. (Projeto Euclides) ISBN: 8524401184.

[3] RUDIN, W. *Functional Analysis.* New Delhi: Tata McGraw-Hill, c1973. 397p. ISBN: 0070542368.

[4] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis.* New York: McGraw-Hill, c1966. 412p. ISBN: 0070542341.

[5] SUNDER, V. S. *Functional Analysis: Spectral Theory.* Basel:Birkhauser, 1998. 241p. (Birkhauser Advanced texts). ISBN: 3764358920.

[6] KADISON, Richard V.; RINGROSE, John R. *Fundamentals of the theory of operator algebras: Elementary Theory.* New York: Academic Press, 1983. v.I. (Pure and applied mathematics). ISBN: 0123933013.

[7] KADISON, Richard V.; RINGROSE, John R. *Fundamentals of the theory of operator algebras: Advanced Theory.* Providence: American Mathematical Society, 1997. v.II. (Graduate studies in mathematics, v.16). ISBN: 0821808206.

[8] FELL, J. M. G.; DORAN, Robert S. *Representations of *-algebras, locally compact groups, and Ba-*

*nach *-algebraic bundles: Basic Representation Theory of Groups and Algebras.* Boston: Academic Press, 1998. v.I. (Pure and applied mathematics, v.125). ISBN: 0122527224.

[9] BARCHINSKI, SPILLERE. *O teorema espectral para operadores normais.* 56 p. Dissertação (Mestrado em Matemática e Computação Científica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2009.

[10] EXEL, R. *von Neumann e a teoria de álgebras de operadores.* Estudos Avançados, v.26, p. 211-225, 1996.