

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELO VIBROACÚSTICO DE REATORES
ELÉTRICOS COM NÚCLEO DE AR**

Tese submetida à

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

para a obtenção do grau de

DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

LEONARDO FERREIRA LOPES

Florianópolis, fevereiro de 2011.

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária
da
Universidade Federal de Santa Catarina

L864m Lopes, Leonardo Ferreira
Modelo vibroacústico de reatores elétricos com núcleo
de ar [tese] / Leonardo Ferreira Lopes ; orientador,
Arcanjo Lenzi.- Florianópolis, SC, 2011.
267 p.: il., grafs., tabs

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina,
Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia mecânica. 2. Reatores elétricos. 3.
Eletromagnetismo. 4. Vibração. 5. Radiação. I. Lenzi, Arcanjo.
II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU 621

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELO VIBROACÚSTICO DE REATORES
ELÉTRICOS COM NÚCLEO DE AR**

LEONARDO FERREIRA LOPES

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

DOUTOR EM ENGENHARIA

**ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO VIBRAÇÕES E ACÚSTICA**

sendo aprovada em sua forma final.

Arcanjo Lenzi, Ph.D. - Orientador

Eduardo Fancello, Dr. Eng. - Coordenador

BANCA EXAMINADORA

Arcanjo Lenzi, Ph.D. - Presidente

**José Carlos de Carvalho Pereira,
Dr. Eng.**

**Alberto Tamagna,
Dr. Eng.**

Carlos Alberto Martin, Dr. Ing.

José Maria C. dos Santos, Dr. Eng.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida maravilhosa que me foi concedida.

Entre o mestrado e o doutorado foram sete anos de estudo na UFSC e, como disse o Professor Arcanjo, “é uma boa parte da vida”. Durante este período, em meio a muitos desafios e dificuldades, houve um grande aprendizado, muitas descobertas, conquistas e amadurecimento profissional. Foi um caminho árduo que exigiu muito trabalho e dedicação, mas tais características já faziam parte do meu gene, afinal, elas são marcas registradas de meus queridos pais. Quem melhor do que eles para demonstrar que com amor, trabalho e honestidade podemos alcançar nossos sonhos. Todos nós temos ídolos e, com toda certeza, vocês são os meus.

A minha irmã, Larissa, e a todos os meus familiares, avós, tios e primos, muito obrigado pela força e incentivo.

A minha bela “namo” que dividiu comigo cada instante desta caminhada. Obrigado por tornar a minha vida mais doce e divertida.

Ao Professor Arcanjo, que além de partilhar seu vasto conhecimento mostrou-se um grande amigo. Aos demais Professores do LVA, Roberto Heiderich, Roberto Jordan e Samir Gerges, e ao Professor Mauricio do GRUCAD.

Merci aux Professeurs Jean Louis Lilien et Patrick Dular de l’Université de Liège. Je remercie aussi les amis que j’ai connu pendant mon séjour en Belgique.

Aos amigos e companheiros de projeto, Thiago, Cristiano Stumpf, Léo Learth, Vitor Coelho e Felipe Longo e aos demais amigos do LVA, Olavo, Mikio, Fabinho, Humberto, Marcão, Zinho, Caetano, Érico, Júlio Hermes, Jesus, Ilka, Raquel, Júlio Cordioli, Stephan, Will, Paulão, Myrria, Ricardo Knoblauch, Giovanni, Mário, Eric, Portela, Renato, Camila, Fabilson, Rippel, Mannes, Leandro, Daniel, Thiago SP, Henrique e a todos aqueles que passaram por aqui ao longo destes sete anos.

Ao CNPq, Capes e AREVA pelo apoio financeiro que permitiu o desenvolvimento deste trabalho.

“É melhor tentar e falhar, que preocupar-se e ver a vida passar. É melhor tentar, ainda que em vão, que sentar-se fazendo nada até o final. Eu prefiro na chuva caminhar, que em dias frios em casa me esconder. Prefiro ser feliz, embora louco, que em conformidade viver...”

(Martin Luther King)

RESUMO

Nos sistemas de corrente contínua em alta tensão usados para transmissão de energia elétrica em longas distâncias, o processo de retificação, que consiste na transformação de corrente alternada para corrente contínua, e o processo de inversão, que corresponde à transformação de corrente contínua para corrente alternada, produzem tensões e correntes harmônicas que podem gerar elevados níveis de ruído. Dentre os equipamentos elétricos que mais contribuem na geração do ruído estão os reatores com núcleo de ar. Em geral, o ruído gerado por estes equipamentos depende principalmente da vibração que é induzida na sua estrutura através da ação de forças magnéticas resultantes do fluxo de corrente que circula no reator. O objetivo principal desta pesquisa consiste no desenvolvimento de um modelo vibroacústico que permita determinar o ruído gerado por estes equipamentos. Devido à natureza do problema abordado, o modelo proposto é formado por três modelos discretos desacoplados. O primeiro modelo é usado para calcular as forças resultantes da indução magnética gerada pelo reator. O segundo modelo busca representar o comportamento dinâmico dos reatores em funcionamento, permitindo assim, determinar a velocidade de vibração ao longo de toda a superfície do reator. E o terceiro modelo simula a radiação sonora dos reatores. Os dois primeiros modelos foram desenvolvidos a partir do método numérico de elementos finitos enquanto que o modelo de radiação sonora foi elaborado usando o método de elementos de contorno, uma vez que o domínio de cálculo tem uma extensão infinita. Ensaios experimentais para caracterizar o comportamento estrutural e também o campo acústico foram realizados com o objetivo de aprimorar e validar o modelo vibroacústico proposto.

Palavras-chave: Subestações elétricas; reatores com núcleo de ar; eletromagnetismo; vibração estrutural e radiação sonora.

ABSTRACT

High voltage direct current (HVDC) converter stations operate by rectifying high voltage AC power to DC power. As a consequence of the AC/DC conversion process, voltage and current harmonics are produced at both AC and DC sides. The voltage and current harmonics are then applied through the components within the converter station. Thus, sounds with different tones and magnitudes are excited. Often the sound generated is perceived as a nuisance at nearby residential areas. Regarding acoustics requirements, air-core reactors, transformers and capacitors are the major sound sources in HVDC stations. The generation of sound by an air-core reactor is mainly dependent on vibration of its structure caused by electrical excitation, as a result of current flow through the equipment. The aim of this research is to develop a vibroacoustic numerical model in order to calculate the sound generated by air-core reactors. According to the type of the problem that is being studied, the model proposed is established by three discrete-uncoupled models. The first one is used to calculate the forces generated by the magnetic induction acting on the reactor. The second model describes the dynamic behavior of the reactor while it is running. As a result of the second model we have the velocity of vibration of the reactor. The last model is used to simulate the sound radiation by the reactor. While the first two models were developed using finite element method, the model that describes the sound radiation was developed using boundary element method. Experimental tests were made to describe the structural and acoustic behavior and also to update and validate the results obtained with the vibroacoustic model proposed.

Keywords: Power substations; air-core reactors; electromagnetics; structural vibration; sound radiation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Detalhe da cruzeta superior de um reator formado por várias bobinas.....	7
Figura 2 – Reator com núcleo de Ar, tecnologia FED. (a) Vista isométrica, (b) Detalhe da estrutura interna.....	8
Figura 3 – Montagem dos reatores para utilização em sistema trifásico.	8
Figura 4 – (a) Detalhe de corte na seção transversal do reator, (b) Sistema de eixos de ortotropia.....	15
Figura 5 – Máquina EMIC DL 2000 utilizada para realizar o ensaio de tração.....	17
Figura 6 – Diagrama tensão-deformação das amostras analisadas.....	18
Figura 7 – Região da amostra com fios a 45°, onde ocorreram as fraturas.....	19
Figura 8 – Diagrama do carregamento utilizado para realizar os testes.	20
Figura 9 – Vista dos equipamentos utilizados para realizar os ensaios de flexão.....	22
Figura 10 – Módulo de elasticidade em função do tempo. (Amostras fios a 0°).....	24
Figura 11 – Módulo de elasticidade em função do tempo. (Amostras fios a 90°).....	24
Figura 12 – Equipamentos empregados no método da viga vibrante....	26
Figura 13 – Posicionamento dos suportes para excitar o 1° modo flexão.....	28
Figura 14 – Representação da forma de vibração do 1° modo de flexão.....	28
Figura 15 – Posicionamento dos suportes para excitar o 1° modo torcional.....	29
Figura 16 – Representação da forma de vibração do 1° modo torcional.....	30
Figura 17 – Posicionamento da amostra com fios a 0°. Módulo de elasticidade.....	31
Figura 18 – Posicionamento da amostra com fios a 0°. Módulo de cisalhamento.....	31
Figura 19 – Posicionamento da amostra com fios a 90°. Módulo de elasticidade.....	32
Figura 20 – Posicionamento da amostra com fios a 90°. Módulo de cisalhamento.....	32
Figura 21 – Determinação da massa do corpo de prova no ar.....	35
Figura 22 – Determinação da massa do corpo de prova na água.....	35

Figura 23 – Modos estruturais do reator. (a) Respiração. (b) Compressão.	38
Figura 24 – Detalhe de alguns dos pontos de medição criados para realizar a análise modal do protótipo 3.	39
Figura 25 – Curvas soma das FRFs dos protótipos 1, 3, 4 e 5.	41
Figura 26 – Funções coerência obtidas para o ponto 85 dos protótipos.	41
Figura 27 – Vista isométrica dos modos de vibração do Protótipo 1. (a) 77 Hz (b) 123 Hz.	42
Figura 28 – Vista isométrica dos modos de vibração do Protótipo 1. (a) 132 Hz (b) 156 Hz.	43
Figura 29 – Vista superior dos modos de vibração do Protótipo 1. (a) 77 Hz (b) 123 Hz.	43
Figura 30 – Vista superior dos modos de vibração do Protótipo 1. (a) 132 Hz (b) 156 Hz.	43
Figura 31 – Detalhe da fixação das cruzetas no reator.	44
Figura 32 – Vista isométrica dos modos de vibração do Protótipo 3. (a) 57 Hz (b) 125 Hz.	45
Figura 33 – Vista superior dos modos de vibração do Protótipo 3. (a) 57 Hz (b) 125 Hz.	45
Figura 34 – Vistas isométricas dos modos de vibração do Protótipo 4. (a) 57 Hz (b) 138 Hz.	45
Figura 35 – Vistas superiores dos modos de vibração do Protótipo 4. (a) 57 Hz (b) 138 Hz.	46
Figura 36 – Vista isométrica dos modos de vibração do Protótipo 5. (a) 168 Hz (b) 208 Hz.	46
Figura 37 – Vista superior dos modos de vibração do Protótipo 5. (a) 168 Hz (b) 208 Hz.	47
Figura 38 – Esquema do circuito elétrico usado nos ensaios.	48
Figura 39 – Gerador usado nos ensaios.	48
Figura 40 – Banco de capacitores usado nos ensaios.	49
Figura 41 – Protótipo 5 conectado ao circuito elétrico.	49
Figura 42 – Acelerômetros posicionados na parte interna do reator.	50
Figura 43 – Acelerômetros posicionados na parte externa do reator. ...	51
Figura 44 – Influência da indução magnética internamente. Acelerômetro 1.	51
Figura 45 – Influência da indução magnética internamente. Acelerômetro 2.	52
Figura 46 – Influência da indução magnética externamente. Acelerômetro 1.	52
Figura 47 – Influência da indução magnética externamente. Acelerômetro 2.	53

Figura 48 – Influência da indução magnética sobre os acelerômetros em 120 Hz, quando os mesmos encontram-se no interior do reator.	53
Figura 49 – Influência da indução magnética sobre os acelerômetros em 120 Hz, quando os mesmos encontram-se na região externa do reator.	54
Figura 50 – Detalhe do posicionamento do vibrômetro LASER utilizado.	55
Figura 51 – Detalhe da medição de vibração no ponto 11 usando o vibrômetro LASER e o acelerômetro.	55
Figura 52 – Níveis de vibração medidos no ponto 10. LASER e acelerômetro.	56
Figura 53 – Níveis de vibração medidos no ponto 15. LASER e acelerômetro.	56
Figura 54 – Vibração (m/s) em 120 Hz medida com LASER e acelerômetro simultaneamente. Pontos 1, 5, 10, 11, 15 e 20.	57
Figura 55 – Vibração (dB) em 120 Hz medida com LASER e acelerômetro simultaneamente. Pontos 1, 5, 10, 11, 15 e 20.	57
Figura 56 – Velocidade de vibração em 120 Hz medida no ponto 13... 58	
Figura 57 – Velocidade de vibração em 120 Hz na superfície do reator.	58
Figura 58 – Espectro de velocidade medido no ponto 21 (Protótipo 3).59	
Figura 59 – Espectro de velocidade medido no ponto 33 no mesmo instante da medição no ponto 21 (Protótipo 3).	60
Figura 60 – Velocidade média de vibração no ponto 33 do protótipo 3.	61
Figura 61 – Velocidade média de vibração no ponto 33 do protótipo 4.	61
Figura 62 – Velocidade média de vibração no ponto 33 do protótipo 5.	62
Figura 63 – Velocidade média de vibração do protótipo 3.....	62
Figura 64 – Velocidade média de vibração do protótipo 4.....	63
Figura 65 – Velocidade média de vibração do protótipo 5.....	63
Figura 66 – Velocidade de vibração em 120 Hz no ponto 33 do protótipo 3.	64
Figura 67 – Velocidade de vibração em 120 Hz na superfície do protótipo 3.....	64
Figura 68 – Velocidade de vibração em 120 Hz no ponto 33 do protótipo 4.	65

Figura 69 – Velocidade de vibração em 120 Hz na superfície do protótipo 4.	65
Figura 70 – Velocidade de vibração em 120 Hz no ponto 33 do protótipo 5.	66
Figura 71 – Velocidade de vibração em 120 Hz na superfície do protótipo 5.	66
Figura 72 – Níveis de vibração. (a) Extremidades e ½ altura (b) Pontos afastados e coincidentes com as cruzetas.	68
Figura 73 – Velocidade (m/s) em 120 Hz nas extremidades inferior, superior e meia altura do protótipo 3.	68
Figura 74 – Velocidade (m/s) em 120 Hz nas extremidades inferior, superior e meia altura do protótipo 4.	69
Figura 75 – Velocidade (m/s) em 120 Hz nas extremidades inferior, superior e meia altura do protótipo 5.	69
Figura 76 – Velocidade (dB) em 120 Hz nas extremidades inferior, superior e meia altura do protótipo 3.	70
Figura 77 – Velocidade (dB) em 120 Hz nas extremidades inferior, superior e meia altura do protótipo 4.	70
Figura 78 – Velocidade (dB) em 120 Hz nas extremidades inferior, superior e meia altura do protótipo 5.	71
Figura 79 – Velocidade nos pontos coincidentes com os braços da cruzeta (Protótipo 3).	71
Figura 80 – Velocidade nos pontos coincidentes com os braços da cruzeta (Protótipo 4).	72
Figura 81 – Velocidade nos pontos coincidentes com os braços da cruzeta (Protótipo 5).	72
Figura 82 – Velocidade nos pontos mais distantes dos braços da cruzeta (Protótipo 3).	73
Figura 83 – Velocidade nos pontos mais distantes dos braços da cruzeta (Protótipo 4).	73
Figura 84 – Velocidade nos pontos mais distantes dos braços da cruzeta (Protótipo 5).	74
Figura 85 – Mapa de cores ilustrando a distribuição da velocidade na superfície do protótipo 3, em 120 Hz.	74
Figura 86 – Mapa de cores ilustrando a distribuição da velocidade na superfície do protótipo 4, em 120 Hz.	75
Figura 87 – Mapa de cores ilustrando a distribuição da velocidade na superfície do protótipo 5, em 120 Hz.	75
Figura 88 – Superfície do protótipo 3 deformada durante o funcionamento, em 120 Hz. (a) Vista isométrica (b) Vista superior.	76

Figura 89 – Superfície do protótipo 4 deformada durante o funcionamento, em 120 Hz. (a) Vista isométrica (b) Vista superior.	76
Figura 90 – Superfície do protótipo 5 deformada durante o funcionamento, em 120 Hz. (a) Vista isométrica (b) Vista superior.	77
Figura 91 - Identificação das 4 alturas onde foram medidos os níveis de ruído.	81
Figura 92 – Identificação dos pontos onde foram posicionados os microfones.	81
Figura 93 – Afastamento do reator em relação às paredes mais próximas.	83
Figura 94 – Medição de ruído na câmara semi-aneecóica.	83
Figura 95 – Medição de ruído no laboratório da AREVA.	84
Figura 96 – Níveis médios de pressão sonora do protótipo 3 nas 4 alturas.	84
Figura 97 – Níveis médios de pressão sonora do protótipo 4 nas 4 alturas.	85
Figura 98 – Níveis médios de pressão sonora do protótipo 5 nas 4 alturas.	85
Figura 99 – Níveis de pressão sonora por ponto, em 125 Hz, nas 4 alturas medidas no protótipo 3.	86
Figura 100 – Níveis de pressão sonora por ponto, em 125 Hz, nas 4 alturas medidas no protótipo 4.	86
Figura 101 – Níveis de pressão sonora por ponto, em 125 Hz, nas 4 alturas medidas no protótipo 5.	87
Figura 102 – Distribuição do nível de pressão sonora na banda de 125 Hz para o protótipo 3.	88
Figura 103 – Distribuição do nível de pressão sonora na banda de 125 Hz para o protótipo 4.	88
Figura 104 – Distribuição do nível de pressão sonora na banda de 125 Hz para o protótipo 5.	89
Figura 105 – Níveis de pressão sonora do protótipo 3.	90
Figura 106 – Níveis de pressão sonora do protótipo 4.	90
Figura 107 – Níveis de pressão sonora do protótipo 5.	91
Figura 108 – Níveis de potência sonora do protótipo 3.	91
Figura 109 – Níveis de potência sonora do protótipo 4.	92
Figura 110 – Níveis de potência sonora do protótipo 5.	92
Figura 111 – Exemplo de espectro. (a) Correntes que atuam no reator, (b) Forças que atuam no reator.	96
Figura 112 – Trecho de um solenoide visto de perfil.	97

Figura 113 – Indução magnética dB produzida no ponto P a partir de um elemento de corrente.....	98
Figura 114 – Representação da regra da mão direita.	100
Figura 115 – Vista de perfil de uma espira circular, de raio R , percorrida por uma corrente $i(t)$	100
Figura 116 – Indução magnética axial em um ponto P sobre o eixo central da bobina.....	103
Figura 117 – Indução axial média e indução axial real no eixo central do protótipo 3.	106
Figura 118 – Distribuição da força e da indução magnética radial em função do tempo.	107
Figura 119 – Indução magnética criada pela corrente que percorre um condutor retilíneo.....	108
Figura 120 – Indução magnética radial resultante que atua sobre a primeira espira.	109
Figura 121 – Indução radial linear e indução radial média no eixo central do protótipo 3.	111
Figura 122 – Divisão do eletromagnetismo segundo sua aplicação [29].	113
Figura 123 – Malhas criadas para calcular a indução magnética. (a) Protótipo 3 (b) Protótipo 5.....	117
Figura 124 – Representação da espira equivalente definida no modelo numérico.	117
Figura 125 – Vetor Potencial Magnético [Wb/m]. (a) Protótipo 3 (b) Protótipo 4 (c) Protótipo 5.	120
Figura 126 – Indução magnética [T] do Protótipo 3.	120
Figura 127 – Indução magnética [T]. (a) Protótipo 4 (b) Protótipo 5.	121
Figura 128 – Variação da densidade do fluxo eletromagnético com a distância.	121
Figura 129 – Força magnética radial gerada por espira do protótipo 3.	122
Figura 130 – Força magnética radial gerada por espira em cada uma das bobinas do protótipo 4.	122
Figura 131 – Força magnética radial gerada por espira em cada uma das bobinas do protótipo 5.	123
Figura 132 – Força magnética axial gerada por espira do protótipo 3.	123
Figura 133 – Força magnética axial gerada por espira em cada uma das bobinas do protótipo 4.	124
Figura 134 – Força magnética axial gerada por espira em cada uma das bobinas do protótipo 5.	124

Figura 135 – Comparação entre as forças radiais determinadas analiticamente e numericamente. Protótipo 3.	125
Figura 136 – Diferença entre as forças radiais determinadas analiticamente e numericamente. Protótipo 3.	126
Figura 137 – Comparação entre as forças radiais determinadas analiticamente e numericamente. Protótipo 4.	126
Figura 138 – Diferença entre as forças radiais determinadas analiticamente e numericamente. Protótipo 4.	127
Figura 139 – Sistema de coordenadas global, de referência e de ortotropia.	132
Figura 140 – Transformação de tensão no plano x^2 - y^2	132
Figura 141 – Malhas estruturais dos protótipos. (a) Protótipo 3 (b) Protótipo 4 (c) Protótipo 5.	134
Figura 142 – (a) Vetores de posição dos 4 nós do elemento (b) Vetores \mathbf{v}_{12} e \mathbf{v}_{14}	137
Figura 143 – Vetor \mathbf{v}_n resultante do produto vetorial $\mathbf{v}_{14} \times \mathbf{v}_{12}$	138
Figura 144 – Malhas criadas para a análise de radiação sonora do protótipo 3.	138
Figura 145 – Carregamento do protótipo 3 no plano x-z. (a) Constante (b) Variável.	139
Figura 146 – Estrutura deformada em função do carregamento aplicado. (a) Constante (b) Variável.	140
Figura 147 – Distribuição da velocidade de vibração do protótipo 3. (a) Constante (b) Variável.	140
Figura 148 – Velocidade de vibração e nível de pressão sonora do protótipo 3. (a) Constante (b) Variável.	141
Figura 149 – Distribuição da velocidade de vibração no protótipo 3. (a) F_{rad} e F_{axi} (b) Somente F_{rad}	141
Figura 150 – Velocidade de vibração e nível de pressão sonora do protótipo 3. (a) F_{rad} e F_{axi} (b) Somente F_{rad}	142
Figura 151 – Velocidade de vibração e nível de pressão sonora do protótipo 3. (a) $\xi=0,02$ (b) $\xi=0,2$	143
Figura 152 – Forças radial e axial aplicadas em cada um dos nós da malha estrutural do Protótipo 3.	144
Figura 153 – Velocidade de vibração do protótipo 3, admitindo um carregamento constante ao longo da faixa de frequências.	145
Figura 154 – Modos estruturais de vibração do Protótipo 3.	145
Figura 155 – Respostas forçadas do Protótipo 3.	146
Figura 156 – Nível de pressão sonora em pontos externos do protótipo 3, admitindo um carregamento constante.	146

Figura 157 – Nível de pressão sonora em pontos internos do protótipo 3, admitindo um carregamento constante.	147
Figura 158 – Nível de pressão sonora em pontos externos do protótipo 3, admitindo velocidade constante.....	148
Figura 159 – Nível de pressão sonora em pontos internos do protótipo 3, admitindo velocidade constante.....	149
Figura 160 – Condições de contorno estabelecidas para determinar os modos acústicos da cavidade interna.....	150
Figura 161 – Ressonâncias acústicas da cavidade interna do protótipo 3.	151
Figura 162 – Vista no plano x - y dos modos acústicos da cavidade interna do protótipo 3. (a) 372 Hz (b) 680 Hz (c) 984 Hz.	151
Figura 163 – Seção transversal de uma casca cilíndrica, onde se nota uma considerável variação na espessura.....	152
Figura 164 – Casca do protótipo 4 preparada para realização da análise modal experimental.	153
Figura 165 – Curvas soma das FRFs obtidas para cada uma das cascas dos protótipos 3, 4 e 5.....	154
Figura 166 – Curvas soma das FRFs até 250 Hz para cada uma das cascas dos protótipos 3, 4 e 5.	154
Figura 167 – Formas de vibração das cascas. (a) 1° modo torcional (b) 1° modo flexão.	155
Figura 168 – Malha correspondente a casca do protótipo 3 com a identificação das diferentes espessuras.....	156
Figura 169 – Estrutura deformada em função do carregamento aplicado.(a) Protótipo 3 (b) Protótipo 4 (c) Protótipo 5.	158
Figura 170 – Velocidade de vibração ao longo da superfície. (a) Protótipo 3 (b) Protótipo 4.....	159
Figura 171 – Velocidade de vibração ao longo da superfície do Protótipo 5.....	159
Figura 172 – Nível de pressão sonora na malha de pontos cilíndrica. Protótipo 3.....	160
Figura 173 – Nível de pressão sonora na malha de pontos cilíndrica. Protótipo 4.	160
Figura 174 – Nível de pressão sonora na malha de pontos cilíndrica. Protótipo 5.	161
Figura 175 – Vista no plano x - y da radiação sonora. (a) Protótipo 3 (b) Protótipo 4 (c) Protótipo 5.....	161
Figura 176 – Vista no plano x - z da radiação sonora. (a) Protótipo 3 (b) Protótipo 4 (c) Protótipo 5.....	162

Figura 177 – Análise de um problema de meio contínuo usando o método de elementos finitos [61].	177
Figura 178 – Inter-relacionamento das formulações direta, variacional e de resíduos no método de elementos finitos [61].	180
Figura 179 – Coordenadas adimensionais do elemento tridimensional e bidimensional linear.	181
Figura 180 – Representação das funções de Lagrange de primeiro grau.	182
Figura 181 – Localização de pontos de integração de Gauss-Legendre.	185
Figura 182 – Corpo em equilíbrio no espaço tridimensional.	187
Figura 183 – Corpo seccionado livre com uma força interna ΔF .	188
Figura 184 – Estado de tensão geral sobre um elemento infinitesimal.	189
Figura 185 – Elemento infinitesimal com tensões e forças de campo atuando.	190
Figura 186 – Deformação linear unidimensional.	192
Figura 187 – Elementos carregados nas posições inicial e final.	193
Figura 188 – Deformações tangenciais.	194
Figura 189 – Representação de domínio e fronteira.	197
Figura 190 – Mapeamento do elemento no domínio padrão para o domínio real.	211
Figura 191 – Relação adiabática entre pressão e densidade.	219
Figura 192 – Fluxo de massa através de um volume de controle.	221
Figura 193 – Elemento de volume sujeito aos gradientes de pressão na direção x .	224
Figura 194 – Aumento da velocidade de um barco navegando no sentido da constricção de um rio.	225
Figura 195 – Representação da radiação sonora de um corpo flexível imerso em um meio acústico.	228
Figura 196 – Face do elemento na qual se aplica a condição de contorno de deslocamento.	239
Figura 197 – Criação do sistema de coordenadas local $x'-y'$. (a) Vista superior (b) Vista isométrica do elemento.	239
Figura 198 – Mapeamento do elemento no domínio padrão para o domínio real.	240
Figura 199 – Faces dos elementos onde se aplica a condição de contorno de impedância.	242
Figura 200 – Mapeamento do elemento no domínio padrão para o domínio real.	242

Figura 201 – Criação do sistema de coordenadas local $x'-y'$. (a) Vista superior (b) Vista isométrica do elemento.....	243
Figura 202 – Mapeamento quando se aplica impedância na superfície inferior da malha.....	244
Figura 203 – Mapeamento quando se aplica impedância na superfície superior da malha.	244
Figura 204 – Representação geométrica do produto escalar.....	249
Figura 205 – Representação gráfica do produto vetorial.	251

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Características elétricas dos protótipos desenvolvidos e estudados.....	9
Tabela 2 – Características construtivas dos protótipos 3 e 4.....	10
Tabela 3 – Características construtivas das bobinas 1, 2 e 3 do protótipo 5.	10
Tabela 4 – Características construtivas das bobinas 4, 5 e 6 do protótipo 5.	11
Tabela 5 – Dimensões dos corpos de prova da amostra 7.	16
Tabela 6 – Resultados obtidos no ensaio de tração para a amostra 7. ...	18
Tabela 7 - Propriedades das amostras com fios no sentido circunferencial do reator (Direção 1).	21
Tabela 8 - Propriedades das amostras com fios no sentido axial do reator (Direção 3).	21
Tabela 9 – Síntese dos parâmetros utilizados nos ensaios de flexão.	22
Tabela 10 – Módulos de elasticidade calculados a partir da excitação impulsiva.....	33
Tabela 11 – Módulos de cisalhamento calculados a partir da excitação impulsiva.....	34
Tabela 12 – Resultados da densidade para os diferentes corpos de prova.	36
Tabela 13 – Equipamentos utilizados nos ensaios de análise modal.	39
Tabela 14 – Equipamentos usados para medir o nível de vibração.	50
Tabela 15 – Níveis médios de vibração dos protótipos em 120 Hz.	67
Tabela 16 – Equipamentos utilizados nos ensaios de ruído.	82
Tabela 17 – Critérios para aceitação das medições de ruído efetuadas.	89
Tabela 18 – Síntese dos resultados dos níveis de pressão sonora e dos níveis de potência sonora dos protótipos obtidos na câmara.	93
Tabela 19 – Síntese dos resultados dos níveis de pressão sonora e dos níveis de potência sonora dos protótipos obtidos no laboratório.	93
Tabela 20 – Características das espiras dos protótipos.	119
Tabela 21 – Características das bobinas dos protótipos.	119
Tabela 22 – Frequências naturais dos 3 primeiros modos de vibração.	155
Tabela 23 – Fatores de amortecimento dos 3 primeiros modos de vibração.....	155
Tabela 24 – Comparação entre os modos experimentais e numéricos.	156

Tabela 25 – Comparação entre os resultados numéricos e experimentais.	157
Tabela 26 – Forças radiais e a axiais aplicadas nos modelos numéricos.	158
Tabela 27 – Resultados numéricos e experimentais do NPS a 1,0 m.	162
Tabela 28 – Pontos de integração, fatores-peso e ordens de integração de Gauss-Legendre.....	185

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>ASTM</i>	<i>American Society of Testing and Materials</i>
<i>B&K</i>	<i>Bruel and Kjaer</i>
<i>BEM</i>	<i>Boundary Element Method</i>
<i>FDPI</i>	<i>Frequency-Domain Direct Parameter Identification</i>
<i>FED</i>	<i>Fiberglass Encapsulated Design</i>
<i>FEM</i>	<i>Finite Element Method</i>
<i>FRF</i>	Função resposta em frequência
<i>HVDC</i>	<i>High Voltage Direct Current</i>
<i>IEC</i>	<i>International Electrotechnical Commission</i>
<i>IEEE</i>	<i>Institute of Electrical and Electronic Engineers</i>
<i>LVA</i>	Laboratório de Vibrações e Acústica
<i>LSCE</i>	<i>Least Squares Complex Exponential</i>
<i>LSCF</i>	<i>Least Squares Complex Frequency-Domain</i>
<i>ODS</i>	<i>Operating Deflection Shape</i>
<i>OSD</i>	<i>Open Style Design</i>
<i>PEEC</i>	<i>Partial Element Equivalence Circuit</i>
<i>PTV</i>	Princípio dos Trabalhos Virtuais
<i>RMS</i>	<i>Root Mean Square</i>
<i>UFSC</i>	Universidade Federal de Santa Catarina

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Distância do engaste até o ponto de aplicação de força (m)
A	Fator de correção
\mathbf{B}	Vetor indução magnética (T)
\mathbf{b}	Vetor forças de corpo (N/m^3)
b	Largura da viga (m)
B	Fator de correção
\mathbf{B}	Vetor indução magnética (T)
\mathbf{B}_{axi}	Vetor indução magnética axial (T)
$\mathbf{B}_{axi\ média}$	Vetor indução magnética axial média (T)
\mathbf{B}_{rad}	Vetor indução magnética radial (T)
$\mathbf{B}_{rad\ média}$	Vetor indução magnética radial média (T)
$\mathbf{B}_{rad\ max}$	Vetor indução magnética radial máxima (T)
b_x, b_y, b_z	Componentes do vetor de força de corpo (N/m^3)
c_f	Velocidade das ondas de flexão (m/s)
c_0	Velocidade de propagação no meio (m/s)
C	Razão entre a largura e a espessura da viga
C_n	Constante do modo de vibração n
\mathbf{D}	Indução elétrica (C/m^2)
$d\mathbf{B}$	Elemento infinitesimal do vetor indução magnética

$d\mathbf{B}_{\parallel}$	Indução magnética infinitesimal paralela ao eixo axial da espira
$d\mathbf{B}_{\perp}$	Indução magnética infinitesimal perpendicular ao eixo axial da espira
$d\mathbf{l}$	Vetor comprimento
e	Espessura da espira (m ou mm)
\mathbf{E}	Tensor de deformações, vetor campo elétrico (V/m)
E	Módulo de elasticidade (N/m ²)
f	Frequência (Hz)
\mathbf{f}	Vetor forças de superfície (N/m ²)
\mathbf{F}	Vetor força magnética (N)
F	Força medida pela célula de força (N)
\mathbf{F}_{axi}	Vetor força magnética axial (N/m)
\mathbf{F}_{axi_bobina}	Vetor força magnética axial gerada pela bobina (N/m)
\mathbf{F}_{axi_media}	Vetor força magnética axial média por espira (N/m)
$F_{axi_nó}$	Amplitude da força magnética axial aplicada no nó (N)
f_f	Frequência de ressonância do modo de flexão da viga (Hz)
f_n	Frequência de ressonância do modo n (Hz)
\mathbf{F}_{rad}	Vetor força magnética radial (N/m)
\mathbf{F}_{rad_bobina}	Vetor força magnética radial gerada pela bobina (N/m)
\mathbf{F}_{rad_media}	Vetor força magnética radial média por espira (N/m)

$F_{rad_nó}$	Amplitude da força magnética radial aplicada no nó (N)
f_t	Frequência de ressonância do modo de torção da viga (Hz)
F_x	Componente da força radial do nó na direção x (N)
F_x, F_y, F_z	Componentes do vetor de força de superfície (N/m ²)
F_y	Componente da força radial do nó na direção y (N)
F_z	Força axial (N)
G	Módulo de cisalhamento (N/m ²)
h	Ordem da frequência harmônica, altura do reator sem as cruzetas (m)
\mathbf{H}	Vetor indução magnética (A/m)
H	Altura do conjunto de espiras (m)
i	Corrente (A)
I	Amplitude RMS da corrente (A), momento de inércia (m ⁴)
i_{env}	Corrente elétrica total envolvida pela curva (A)
\mathbf{J}	Vetor Densidade superficial de corrente (A/m ²)
J	Densidade superficial de corrente (A/m ²)
l	Comprimento do condutor/espira (m), perímetro da superfície de medição (m)
L	Comprimento do suporte (m), distância entre apoios (m), comprimento da amostra (m)
L_p	Nível de pressão sonora (dB)

\bar{L}_p	Nível de pressão sonora médio (dB)
\bar{L}_{pA0}	Nível de ruído gerado pelo reator (dB)
$\bar{L}_{bgA} máx$	Nível de ruído de fundo máximo (dB)
$\bar{L}_{bgA} inicial$	Nível de ruído de fundo antes de colocar o reator em operação (dB)
$\bar{L}_{bgA} final$	Nível de ruído de fundo depois de colocar o reator em operação (dB)
L_W	Nível de potência sonora (dB)
m	Massa da viga (g)
\dot{m}	Vazão mássica (kg/s)
m_{ap}	Massa aparente (kg)
m_c	Massa do corpo (kg)
N	Espiras por unidade de comprimento (espira/m)
n	Número do modo, número de nós
\mathbf{n}	Vetor normal
n_a	Número de nós na direção axial
n_{br}	Número de espiras
n_c	Número de nós na direção circunferencial
n_e	Número de nós do elemento
N_i	Funções de forma do elemento

n_{pi}	Número de pontos de integração
n_r	Número de nós na direção radial
p	Pressão (Pa), pressão sonora (Pa)
p'	Pressão sonora (Pa)
\hat{p}	Pressão sonora virtual (Pa)
p_0	Pressão do ar atmosférico em condições normais, pressão de referência (20,0E-6 Pa)
p_1, p_2, p_3	Número de pontos de integração
$P1, P3$	Ponto de fixação do acelerômetro
\mathbf{r}	Vetor distância (m), função resíduo
r	Distância (m)
R	Raio médio da espira (m), raio médio do reator (m), constante do gás (J/kg K), raio da superfície (m)
\mathbf{R}	Tensor de rotações
R_e	Raio externo da malha de elementos finitos (m)
R_i	Raio interno da malha de elementos finitos (m)
S	Área da superfície de medição (m ²), área da seção transversal da espira (m ²)
S_0	Área de referência (1,0 m ²)
t	Tempo (s)
\mathbf{T}	Tensor de tensões (N/m ²)

T	Temperatura (K)
T_1	Fator de correção
u	Vetor deslocamento (m)
\dot{u}	Vetor velocidade (m/s), vetor velocidade de partícula (m/s)
\ddot{u}	Vetor aceleração (m/s ²)
\dot{u}_n	Vetor velocidade de partícula normal à superfície (m/s)
\hat{u}	Vetor deslocamento virtual (m)
U	Amplitude do deslocamento (m)
V	Volume (kg/m ³)
v_n	Vetor de velocidade normal da superfície (m/s), vetor normal
W	Potência sonora da fonte (W)
W_0	Potência sonora de referência (1,0 E-12 W)
W_i	Fatores-peso usados na integração numérica
\mathbf{x}	Vetor posição de um elemento infinitesimal no espaço tridimensional
x	Coordenada no sistema cartesiano
x'	Coordenada no sistema cartesiano local
$X1, X3$	Ponto de impacto
y	Coordenada no sistema cartesiano
y'	Coordenada no sistema cartesiano local

z	Distância entre o ponto P e a espira (m)
Z	Impedância acústica (Rayls)
z	Coordenada no sistema cartesiano
μ	Permeabilidade do meio (H/m)
μ_0	Permeabilidade do ar (1,26E-6 H/m)
θ	Ângulo entre \mathbf{r} e o elemento de corrente ($^\circ$), ângulo de rotação do sist. local coordenadas ($^\circ$)
α	Ângulo entre \mathbf{r} e o plano da espira ($^\circ$)
ψ	Ângulo entre \mathbf{r} e o eixo axial da espira ($^\circ$)
ω	Frequência angular (rad/s)
ϕ	Diâmetro do fio condutor (m), ângulo formado pelas coordenadas y e x de um determinado nó
ξ	Coordenada adimensional, fator de amortecimento
η	Coordenada adimensional
ζ	Coordenada adimensional
Δf	Elemento diferencial de força de superfície
ΔA	Elemento diferencial de área
τ	Tensões de cisalhamento (N/m ²)
σ	Tensões normais (N/m ²), desvio padrão, condutividade elétrica (S/m)

σ^2	Variância
u, v, ζ	Componentes do vetor deslocamento (m)
ε	Deformação, permissividade do meio (F/m)
γ	Deformação angular, razão entre calores específicos
Ω	Volume ocupado pelo corpo
∇	Gradiente
Γ	Fronteiras
ρ	Densidade volumétrica do material (kg/m^3), densidade do fluido (kg/m^3), densidade volumétrica de carga (C/m^3).
ρ_0	Densidade do ar atmosférico em condições normais (kg/m^3)
ρ_L	Densidade do líquido (kg/m^3)
ρ_c	Densidade do corpo (kg/m^3)
ε	Vetor deformação
σ	Vetor tensão (N/m^2)
ν	Coefficiente de Poisson
λ	Comprimento de onda (m)
κ	Coefficiente de compressibilidade efetivo do gás (Pa)
v_{\max}	Deflexão máxima (m)

SUMÁRIO

1.0) Introdução	1
2.0) Características gerais de reatores elétricos.....	5
2.1) Princípio de funcionamento dos reatores	5
2.2) Projeto construtivo do reator elétrico com núcleo de ar.....	6
2.3) Protótipos desenvolvidos para a pesquisa	9
2.4) Principais aplicações dos reatores com núcleo de ar.....	11
2.4.1) Limitador de corrente de curto circuito	12
2.4.2) Alisamento ou <i>smoothing</i>	12
2.4.3) Aterramento de neutro	12
2.4.4) Limitação de correntes provenientes da inserção de banco de capacitores	13
2.4.5) Filtro de correntes harmônicas	13
2.4.6) Compensador estático.....	14
3.0) Determinação das propriedades mecânicas do material.....	15
3.1) Materiais compostos e suas características gerais.....	15
3.2) Ensaio de tração	16
3.3) Método da flexão em quatro pontos.....	19
3.4) Método da viga vibrante	25
3.5) Método da excitação impulsiva.....	27
3.6) Determinação da densidade.....	34
4.0) Comportamento dinâmico-estrutural dos reatores	37
4.1) Análise modal experimental.....	37
4.1.1) Procedimento de medição.....	38
4.1.2) Pós-processamento e resultados	40
4.2) Nível de vibração dos reatores em funcionamento	47
4.2.1) Procedimento de medição.....	47
4.2.2) Influência da indução magnética sobre os resultados.....	50
4.2.3) Pós-Processamento e resultados	59
5.0) Radiação sonora dos reatores.....	79
5.1) Conceito de potência sonora	79
5.2) Determinação do nível de potência sonora dos reatores	80
5.2.1) Procedimento de medição.....	80
5.2.2) Pós-Processamento e resultados	84
6.0) Modelagem analítica e numérica dos reatores	95
6.1) Mecanismos de geração de ruído nos reatores	95
6.2) Modelo analítico da indução magnética dos reatores.....	96
6.2.1) Lei de Biot-Savart.....	97
6.2.2) Lei de Ampère	98

6.2.3)	Lei de Laplace	99
6.2.4)	Determinação da força magnética radial	100
6.2.5)	Determinação da força magnética axial	108
6.3)	Modelo numérico da indução magnética dos reatores	112
6.3.1)	O eletromagnetismo e as equações de Maxwell.....	112
6.3.2)	Modelagem e resultados.....	116
6.4)	Comparação entre os modelos analítico e numérico.....	125
7.0)	Modelos numéricos vibroacústicos dos reatores.....	129
7.1)	Modelos numéricos estruturais	129
7.2)	Modelos numéricos de radiação sonora.....	134
7.3)	Resultados e análises de parâmetros	139
7.3.1)	Carregamento constante e carregamento variável ao longo do eixo axial.....	139
7.3.2)	Forças radial e axial.....	141
7.3.3)	Influência do amortecimento no ruído radiado	142
7.3.4)	Análise para uma faixa de frequências admitindo um carregamento constante.....	144
7.3.5)	Análise para uma faixa de frequências admitindo um campo de velocidade constante.....	148
7.3.6)	Determinação dos modos acústicos da cavidade.....	149
7.4)	Validação numérico-experimental	152
7.4.1)	Validação das propriedades mecânicas medidas	152
7.4.2)	Validação do modelo numérico estrutural.....	157
7.4.3)	Validação do modelo numérico de radiação sonora.....	160
8.0)	Conclusões.....	163
	Referências bibliográficas.....	167
	Apêndice 1 - Introdução ao método elementos finitos.....	175
1.1)	O método de elementos finitos e suas aplicações	175
1.2)	Origem, história e generalização.....	178
1.3)	Família de elementos	181
1.4)	Integração numérica.....	184
	Apêndice 2 - Elementos finitos em elasticidade linear	187
2.1)	Conceitos fundamentais de mecânica dos sólidos	187
2.1.1)	Tensor de tensões	189
2.1.2)	Equações diferenciais de equilíbrio.....	190
2.1.3)	Tensor de deformações.....	192
2.2)	Aplicação do princípio dos trabalhos virtuais (PTV).....	197
2.3)	Soluções aproximadas.....	203
2.4)	Mapeamento	210
2.5)	Integração numérica.....	214
	Apêndice 3 - Elementos finitos em acústica linear	217

3.1)	Propagação sonora em fluidos: Equação de ondas planas	217
3.2)	Aplicação do princípio dos trabalhos virtuais (PTV).....	227
3.3)	Soluções aproximadas.....	233
3.4)	Mapeamento.....	236
3.5)	Integração numérica.....	246
Apêndice 4 - Conceitos matemáticos fundamentais.....		249
4.1)	Produto escalar.....	249
4.2)	Produto vetorial.....	250
4.3)	Operador gradiente.....	252
4.4)	Tensores.....	254
4.4.1)	Soma de tensores.....	256
4.4.2)	Produto de tensores.....	256
4.4.3)	Tensor transposto.....	256
4.4.4)	Tensores simétrico e antissimétrico.....	257
4.4.5)	Produto tensorial de dois vetores.....	258
4.4.6)	Traço.....	258
4.5)	Operador divergente.....	259
4.6)	Teorema da Divergência.....	262
4.7)	Derivadas do produto de funções.....	262

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas foi identificada a viabilidade do uso de sistemas de corrente contínua em alta tensão para a transmissão de grandes blocos de energia a longas distâncias. O uso deste tipo de sistema fornece uma série de vantagens, tais como a interligação de dois sistemas em corrente alternada, que podem estar fora de sincronismo ou em frequências diferentes, e a redução do custo da linha de transmissão, uma vez que a quantidade de cabos é significativamente reduzida. No entanto, o processo de conversão de corrente contínua para corrente alternada produz tensões e correntes harmônicas que podem gerar elevados níveis de ruído, em diferentes faixas de frequências. Além disso, o crescimento econômico, o populacional, e o uso crescente de energia elétrica, exigem a construção de subestações para transmissão de energia junto aos grandes centros de consumo, fazendo com que as comunidades vizinhas sejam afetadas pelo ruído gerado nestes locais.

O problema do ruído gerado nas subestações não está apenas associado ao incômodo gerado pelos elevados níveis de ruído como também ao fato de serem ruídos tonais, que provocam um grande desconforto. Por isso, órgãos ambientais, principalmente da Europa e Estados Unidos, passaram a adotar leis mais rigorosas que definem os níveis máximos toleráveis e exigem a especificação do nível de potência sonora dos equipamentos a serem usados nestas subestações, para que o nível de ruído global gerado pela planta industrial seja estimado.

Em geral, o ruído gerado por componentes elétricos depende principalmente da vibração que é induzida na estrutura a partir da ação de forças elétricas resultantes do fluxo de corrente que circula no componente ou de tensões aplicadas sobre ele. Particularmente, quando uma ou mais frequências do espectro de forças coincidem com uma das inúmeras frequências de ressonância da estrutura, ocorre uma amplificação dos níveis de vibração e conseqüentemente um aumento considerável no nível de ruído gerado pelo equipamento.

Entre as principais fontes de geração de ruído nestas plantas industriais encontram-se os transformadores, os capacitores e os reatores com núcleo de ar. Nesta pesquisa tem-se como objetivo principal o desenvolvimento de um modelo numérico vibroacústico que permita determinar o ruído gerado pelos reatores com núcleo de ar. Como o ruído gerado por estes equipamentos está diretamente associado às suas características elétricas e mecânicas, o modelo vibroacústico proposto é

composto por três modelos numéricos desacoplados. O primeiro modelo é usado para calcular as forças resultantes da indução magnética gerada pelo reator. O segundo permite determinar o comportamento dinâmico estrutural do reator e o terceiro simula a radiação sonora deste equipamento.

Ao longo de todo o documento, são abordadas as várias áreas do conhecimento que estão relacionadas ao problema do ruído dos reatores. No Capítulo 2 apresentam-se as características gerais e o princípio de funcionamento dos reatores elétricos, destacando as formas construtivas, os principais componentes e as principais aplicações dos reatores com núcleo de ar. Além disso, apresentam-se as informações técnicas e características construtivas dos três protótipos construídos para realização dos ensaios experimentais.

A caracterização mecânica estrutural dos reatores tem início no Capítulo 3 onde são apresentados os ensaios realizados para determinar as propriedades elásticas do material, formado por uma mistura de fibra de vidro, resina epóxi e fios de alumínio. Além da descrição da metodologia empregada em cada ensaio, se faz uma análise crítica dos resultados obtidos, uma vez que as propriedades determinadas experimentalmente serão usadas nos modelos numéricos estruturais e, portanto, poderão afetar significativamente os resultados obtidos nestas simulações.

As frequências naturais e os modos de vibração dos três protótipos analisados nesta pesquisa são apresentados no Capítulo 4. A identificação das frequências de ressonância da estrutura tem um papel fundamental quando se deseja avaliar se as forças que atuam no equipamento podem excitar algum modo estrutural e, conseqüentemente, implicar no aumento do nível de vibração e do ruído gerado pelo reator. Como a energia sonora radiada pelo reator está diretamente relacionada à velocidade de vibração da superfície, apresentam-se também neste capítulo os testes experimentais realizados para determinar a forma e os níveis de vibração dos reatores em funcionamento.

Concluindo esta série de avaliações experimentais, no Capítulo 5 apresentam-se os ensaios realizados para avaliar o ruído gerado pelos reatores. Nestes testes, determina-se o nível de potência sonora de cada um dos protótipos e a partir da avaliação dos níveis de pressão sonora registrados nos diversos pontos de medição, se faz uma análise da diretividade do campo acústico dos reatores. Os ensaios experimentais não tiveram como único objetivo a validação dos resultados fornecidos pelo modelo vibroacústico proposto, pois, a partir dos mesmos, foi

obtida uma série de conclusões que contribuíram para o enriquecimento técnico científico desta pesquisa e aprimoramento do modelo proposto.

Do ponto de vista de geração de ruído, a amplitude de vibração e as dimensões da superfície de radiação do reator determinam essencialmente a potência sonora gerada pelo mesmo. Por isso, tem-se interesse em determinar as forças que fazem com que a superfície do reator vibre. Conforme se apresenta no Capítulo 6, estas forças resultam da interação entre o fluxo de corrente que percorre o reator e sua indução magnética. Para determiná-las propõe-se dois modelos, um analítico e outro numérico. No modelo analítico, admite-se que a indução magnética criada pelo fluxo de corrente no reator seja similar àquela de um solenoide. Já no modelo numérico, a indução magnética é obtida a partir de uma equação diferencial deduzida das equações de Maxwell e da aplicação do método de elementos finitos.

No Capítulo 7 se descreve o modelo numérico estrutural e o modelo de radiação sonora. O modelo estrutural foi desenvolvido a partir do método de elementos finitos e com ele pretende-se representar o comportamento dinâmico dos reatores em funcionamento e, assim, determinar a velocidade de vibração ao longo de toda a superfície do reator. No modelo numérico de radiação sonora, a excitação do campo acústico é introduzida a partir da consideração de que a velocidade de partícula na interface entre a superfície do reator e o campo acústico é igual àquela da superfície. Por se tratar de um problema de radiação sonora, cujo domínio de cálculo tem uma extensão infinita, no modelo de radiação sonora emprega-se o método de elementos de contorno. Ainda neste capítulo, são feitas análises envolvendo uma série de parâmetros tais como, tipo de carregamento e ressonâncias acústicas da cavidade interna dos reatores, para identificar quais são os parâmetros que mais contribuem para o ruído gerado pelos reatores e como cada um deles influencia na radiação sonora. E finalmente, apresenta-se uma comparação entre os resultados numéricos e os experimentais para avaliar se os modelos desenvolvidos representam adequadamente o problema abordado.

No Capítulo 8 apresenta-se uma síntese contendo as conclusões obtidas com esta pesquisa, sejam elas resultados da profunda investigação experimental realizada ou das várias análises realizadas através dos modelos numéricos desenvolvidos. Além disso, propõem-se alguns assuntos que poderiam ser estudados em pesquisas futuras, almejando um aperfeiçoamento dos modelos aqui desenvolvidos.

Na parte inicial dos Apêndices, se faz uma breve introdução ao método de elementos finitos para que posteriormente, a partir das

equações diferenciais que definem o problema estrutural dinâmico e o problema acústico, seja desenvolvido todo o equacionamento matemático necessário para obtenção dos modelos discretos. O desenvolvimento detalhado de cada uma das etapas envolvidas na definição do modelo discreto não visa somente à apresentação do procedimento matemático que se encontra por trás dos programas comerciais de elementos finitos. O objetivo principal consiste na elaboração de um programa próprio que além de ser utilizado como uma ferramenta complementar ao ensino na área de vibrações e acústica permita calcular o ruído radiado por reatores. Além disso, tal desenvolvimento procura fornecer aos pesquisadores em geral, uma referência bibliográfica que sirva de base para futuros trabalhos que abordem o método numérico de elementos finitos ou que desejem implementar códigos próprios para a solução de outros problemas estruturais ou acústicos.

CAPÍTULO 2

CARACTERÍSTICAS GERAIS DE REATORES ELÉTRICOS

Neste capítulo, além de informações gerais sobre os reatores com núcleo de ar, apresentam-se as características construtivas e elétricas dos protótipos desenvolvidos para realizar esta pesquisa.

2.1) Princípio de funcionamento dos reatores

Os reatores, ou ainda os indutores, são dispositivos fabricados para introduzir indutância em um circuito elétrico, consistindo de uma série de espiras de um fio condutor bobinado convenientemente e especialmente preparado e arranjado de modo a produzir fluxo magnético quando circula corrente. Normalmente as espiras são enroladas em torno de um material magnético, denominado núcleo, o qual é capaz de armazenar uma quantidade maior de energia por Ampère de corrente, que o próprio ar. A resistência dos reatores deve ser mínima, pois são construídos para se comportar como indutâncias.

O princípio de funcionamento do reator é descrito pelas leis de Faraday e Lenz. Através de experiências, Faraday observou que sempre que houver uma variação de fluxo magnético através de uma espira surge nesta espira uma força eletromotriz induzida. A este fenômeno foi dado o nome de indução eletromagnética. Esta força, em qualquer hipótese, é temporária e cessa quando se interrompe a variação do valor do fluxo que atravessa a espira. Através de medições foi observado que a força eletromotriz induzida depende da intensidade da perturbação sofrida pelo fluxo que abraça a espira e também do número de espiras existentes. A lei que permite obter a força é conhecida por Lei de Faraday. No entanto, esta força eletromotriz induzida está em oposição à causa que lhe deu origem e foi explicada inicialmente pelo físico alemão Heinrich Lenz, sendo conhecida como Lei de Lenz.

Segundo Ferreira [1], uma força eletromotriz pode ser induzida em um condutor ou em uma bobina quando há uma variação na corrente que percorre o próprio elemento. Sabe-se que uma corrente fluindo ao longo de um condutor produz, em torno deste, uma indução magnética. Quando a corrente muda de valor, a indução varia e induz no condutor uma força eletromotriz. Este efeito é chamado de autoindução e a força a ele associada é conhecida como força eletromotriz autoinduzida. Esta corrente percorrendo o condutor produz uma indução magnética que é capaz de armazenar energia. Se a indução magnética produzida por esta

corrente está em um meio não ferromagnético, ou seja, em um meio no qual não existe material magnético nas vizinhanças, então o fluxo é proporcional à corrente que o produziu. A relação entre o fluxo e a corrente, ou seja, a constante de proporcionalidade é chamada de autoindutância, indutância própria, ou simplesmente indutância da bobina.

A indutância do reator depende do formato do mesmo (área e comprimento), da permeabilidade do material do qual é feito o núcleo, do número de espiras, da distância entre as espiras, da forma como estas espiras são enroladas e outros fatores.

As principais partes constituintes de um reator são:

- a) O núcleo, que pode ser de ar ou de ferro;
- b) Os enrolamentos são semelhantes aos dos transformadores, podendo ser em disco, disco entrelaçado, helicoidal ou em camadas.
- c) O isolamento, constituído basicamente de óleo e celulose, sendo uma estrutura semelhante a do isolamento dos transformadores. Pode-se também, no caso de reatores secos, utilizar materiais como *mylar*, *nomex* ou esmalte para o isolamento entre as espiras.

Particularmente, na presente pesquisa, serão estudados os reatores com núcleo de ar, ou seja, aqueles reatores em que o núcleo não é formado por um material magnético. Portanto, a seguir são apresentadas informações detalhadas sobre as características e formas construtivas deste tipo de reatores.

2.2) Projeto construtivo do reator elétrico com núcleo de ar

Os reatores com núcleo de ar oferecem uma resposta linear de impedância versus corrente, o que é essencial para inúmeras aplicações. Neste tipo de reatores, destacam-se duas tecnologias de construção, a FED (*Fiberglass Encapsulated Design*) e a OSD (*Open Style Design*).

Na tecnologia OSD o reator consiste basicamente de uma bobina cujas espiras são feitas de um perfil de alumínio de seção retangular, sendo que as mesmas são separadas em intervalos idênticos por meio de calços de fibra de vidro de alta resistência mecânica.

Já na tecnologia FED, que representa a tecnologia de construção dos reatores estudados nesta pesquisa, o reator consiste basicamente de uma ou mais bobinas cujas espiras são formadas por um ou por vários condutores de alumínio de seção circular, isolados entre si através de um filme de poliéster e conectados em paralelo. O número de condutores

que formam a espira deve ser definido de modo que o fluxo de corrente através da espira não provoque um aquecimento excessivo.

Os condutores são mecanicamente imobilizados e encapsulados por meio de um enrolamento de resina e fibra de vidro. Além de imobilizar os condutores mecanicamente, o enrolamento de resina e fibra de vidro evita a exposição direta da bobina às condições atmosféricas e assegura a sua proteção em procedimentos de manutenção e transporte. Estruturalmente, o conjunto de espiras da bobina envolvido pela resina e fibra de vidro denomina-se casca cilíndrica.

Dependendo da potência do reator, são utilizados uma ou mais bobinas concêntricas, conectadas em paralelo e distanciadas entre si por meio de espaçadores de fibra de vidro, que permitem a circulação de ar entre elas e, conseqüentemente, o resfriamento do reator.

Nas extremidades do reator, duas cruzetas de alumínio são interligadas às cascas cilíndricas por meio de amarrações de fibra de vidro, conforme se observa na Figura 1. Além disso, é nas cruzetas onde se encontram os terminais que irão conectar o reator ao circuito elétrico e onde os conectores de cada uma das bobinas são soldados.

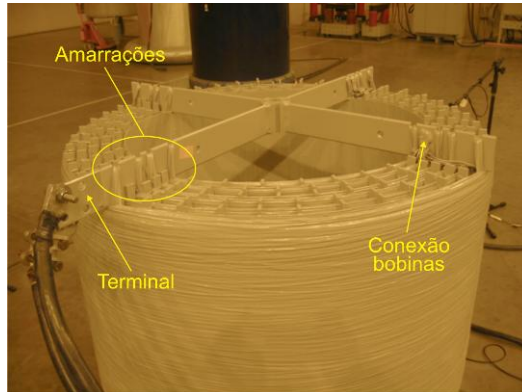


Figura 1 – Detalhe da cruzeta superior de um reator formado por várias bobinas.

Na Figura 2 observa-se uma representação da estrutura e dos principais componentes dos reatores com núcleo de ar, construído usando a tecnologia FED.

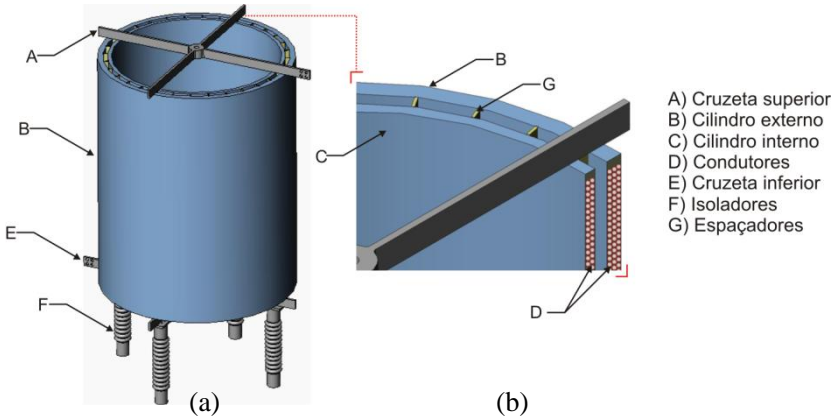


Figura 2 – Reator com núcleo de Ar, tecnologia FED. (a) Vista isométrica, (b) Detalhe da estrutura interna.

Embora estes reatores sejam monofásicos, podem ser usados em sistemas de transmissão trifásicos, porém, neste caso se utiliza um reator para cada uma das fases, montados um sobre o outro, como pode se verificar na Figura 3.



Figura 3 – Montagem dos reatores para utilização em sistema trifásico.

É importante ressaltar que os resultados e conclusões obtidas na presente pesquisa baseiam-se em estudos e ensaios feitos na configuração monofásica. A configuração trifásica exige um estudo complementar, uma vez que devido ao acoplamento magnético entre os

três reatores, devem surgir forças complementares que não podem ser desprezadas.

2.3) Protótipos desenvolvidos para a pesquisa

Para esta pesquisa foram construídos três reatores, denominados protótipo 3, protótipo 4 e protótipo 5. Todos possuem núcleo de ar e suas formas construtivas baseiam-se na tecnologia FED. Por outro lado, cada um deles apresenta características elétricas distintas, de modo que podem ser avaliados diversos parâmetros relacionados ao comportamento dinâmico e, conseqüentemente, o ruído gerado por estes equipamentos. Na Tabela 1 são apresentadas as características elétricas dos protótipos 3, 4 e 5.

Tabela 1 – Características elétricas dos protótipos desenvolvidos e estudados.

Descrição	Protótipo 3	Protótipo 4	Protótipo 5
Indutância Nominal	3,5 mH	3,4 mH	2,5 mH
Impedância Nominal	1,319 Ω	1,282 Ω	0,942 Ω
Resistência Elétrica	129 m Ω	66 m Ω	47 m Ω
Corrente Nominal	300,0 A	410,0 A	480,0 A
Tensão Nominal	1,2 kV	1,2 kV	1,2 kV
Frequência Nominal	60 Hz	60 Hz	60 Hz
Material condutor	Alumínio	Alumínio	Alumínio
Área da seção condutora	63,4 mm ²	126,9 mm ²	144,2 mm ²
Altura da cruzeta	76,2 mm	76,2 mm	76,2 mm
Espessura da cruzeta	9,525 mm	9,525 mm	9,525 mm
Nº de braços da cruzeta	4	4	4
Altura total	1,355 m	1,434 m	1,226 m
Peso total	98,0 kg	178,1 kg	216,6 kg

Cada uma das bobinas que compõe o reator apresenta características construtivas particulares. Na Tabela 2 podem ser observadas as características da única bobina que forma o protótipo 3, e das duas bobinas que compõe o protótipo 4, enquanto que nas Tabelas 3 e 4 são verificadas as propriedades das seis bobinas do protótipo 5.

Tabela 2 – Características construtivas dos protótipos 3 e 4.

Descrição	Protótipo 3	Protótipo 4	
	Bobina 1	Bobina 1	Bobina 2
Diâmetro interno	1, 1313 m	1, 0797 m	1, 1339 m
Diâmetro externo	1,150 m	1,0951 m	1,1497 m
Diâmetro do condutor	5,189 mm	5,189 mm	5,189 mm
Espessura interna da fibra de vidro	1,9 mm	1,9 mm	0,82 mm
Espessura externa da fibra de vidro	1,9 mm	0,6 mm	1,9 mm
Nº de espiras	66,5	71,25	66,5
Altura total das espiras	1,103 m	1,1818 m	1,103 m
Densidade de corrente	4,73 A/mm ²	3,17 A/mm ²	3,30 A/mm ²
Percentual de corrente	100 %	49 %	51 %

Tabela 3 – Características construtivas das bobinas 1, 2 e 3 do protótipo 5.

Descrição	Protótipo 5		
	Bobina 1	Bobina 2	Bobina 3
Diâmetro interno	0,6458 m	0,6979 m	0,7439 m
Diâmetro externo	0,6592 m	0,7051 m	0,7516 m
Diâmetro do condutor	2,052 mm	2,175 mm	2,442 mm
Espessura interna da fibra de vidro	1,9 mm	0,82 mm	0,82 mm
Espessura externa da fibra de vidro	0,6 mm	0,6 mm	0,6 mm
Nº de espiras	100,5	83,25	78,75
Altura total das espiras	0,962 m	0,8375 m	0,8763 m
Densidade de corrente	3,03 A/mm ²	4,01 A/mm ²	3,67 A/mm ²
Percentual de corrente	17 %	12 %	14 %

As espessuras de fibra de vidro apresentadas nas Tabelas 2, 3 e 4 são dados de projeto, na realidade, em função do processo produtivo, estas espessuras variam significativamente ao longo de toda a superfície do reator.

Tabela 4 – Características construtivas das bobinas 4, 5 e 6 do protótipo 5.

Descrição	Protótipo 5		
	Bobina 4	Bobina 5	Bobina 6
Diâmetro interno	0,7904 m	0,8372 m	0,8840 m
Diâmetro externo	0,7984 m	0,8452 m	0,8997 m
Diâmetro do condutor	2,590 mm	2,590 mm	2,590 mm
Espessura interna da fibra de vidro	0,82 mm	0,82 mm	0,82 mm
Espessura externa da fibra de vidro	0,6 mm	0,6 mm	1,9 mm
Nº de espiras	74,0	68,5	68,625
Altura total das espiras	0,8667 m	0,8023 m	0,8037 m
Densidade de corrente	3,56 A/mm ²	3,71 A/mm ²	2,93 A/mm ²
Percentual de corrente	16 %	16 %	26 %

Como o projeto e a fabricação destes protótipos exigiram um tempo considerável, na fase inicial da pesquisa, foram utilizados dois reatores, denominados protótipos 1 e 2. Estes dois equipamentos foram construídos pela empresa AREVA para realizar ensaios elétricos específicos. Por se tratar de equipamentos que não foram especialmente desenvolvidos para este projeto e pelo fato de não conhecer todas as suas características, os mesmos só foram utilizados em alguns ensaios e por este motivo serão mencionados em apenas algumas seções do presente documento.

É importante deixar claro que apesar de serem denominados protótipos, todos os cinco reatores possuem características reais que poderiam ser utilizados nos sistemas de transmissão e distribuição de energia elétrica. Além disso, salienta-se que durante a pesquisa foram realizados ensaios para avaliar o ruído de 20 reatores com características elétricas e construtivas distintas.

2.4) Principais aplicações dos reatores com núcleo de ar

Os reatores com núcleo de ar oferecem uma resposta linear de impedância versus corrente, o que é essencial para inúmeras aplicações. Dependendo da função desejada, os reatores podem ser conectados em série ou em paralelo com a linha de transmissão ou com o circuito

elétrico. Particularmente, quando estão conectados em paralelo, denominam-se reatores em derivação ou *shunt*.

Baseado no trabalho de Alves [2], a seguir apresentam-se as principais aplicações de reatores com núcleo de ar, sendo que as duas primeiras são obtidas quando os reatores são conectados em série e as demais aplicações quando os reatores são conectados em paralelo.

2.4.1) Limitador de corrente de curto circuito

Em sistemas de potência quando se deseja reduzir possíveis correntes de curto-circuito, causadas principalmente pela existência de um grande número de unidades geradoras, ou de unidades geradoras de porte elevado, em pontos específicos de um sistema utilizam-se reatores em série. Nestas condições têm-se como função limitar correntes, salvaguardando a operação de componentes como disjuntores, chaves seccionadoras e outros equipamentos e componentes do sistema.

2.4.2) Alisamento ou *smoothing*

São usados para reduzir a ondulação sobreposta em sistemas de corrente contínua, e em série com grandes motores de corrente contínua, alimentados por retificadores, que são usados, por exemplo, nas indústrias de processamento de aço e mineração. Também são usados em sistemas de transmissão de alta tensão em corrente contínua (HVDC) e outras aplicações industriais (retificadores, sistemas de tração). Sucintamente, pode-se dizer que reatores de alisamento são utilizados para reduzir as correntes harmônicas e as sob-recorrentes transitórias em sistemas de corrente contínua.

2.4.3) Aterramento de neutro

Nos sistemas trifásicos com neutro perfeitamente isolado a tensão do ponto neutro (o centro de gravidade das tensões dos sistemas de potência) não é fixa, ou seja, flutua livremente. Isto termina por impor a necessidade de isolamento adequado aos terminais de neutro dos equipamentos. Quando estes sistemas trabalham em condição simétrica, os potenciais dos pontos de neutro e de terra coincidem. Deste modo todas as tensões entre fase e terra possuem a mesma amplitude.

No entanto, quando ocorre um curto circuito para a terra, a fase envolvida passa a apresentar como potencial o valor do potencial de terra. Em decorrência deste fato, ocorre um deslocamento do ponto de neutro e as tensões entre os condutores e o terra passam, em módulo,

serem iguais as tensões entre as fases. Como resultado direto deste fato, o isolamento dos equipamentos é submetido a uma sobretensão da ordem de $\sqrt{3}$ vezes a tensão nominal fase terra equilibrada em regime permanente do sistema. Dependendo da filosofia em termos de proteção adotada, este período transitório, pode ter duração indeterminada.

Para solucionar este problema costuma-se utilizar um reator para aterrar o sistema. Este reator tem por muito tempo sua utilização no sistema de potência unicamente direcionada para o escoamento das cargas armazenadas nas fases de linhas isoladas para a terra.

2.4.4) Limitação de correntes provenientes da inserção de banco de capacitores

Os reatores podem também ser utilizados na limitação de correntes provenientes da energização do banco de capacitores. As correntes *inrush*, como são conhecidas, podem atingir valores que provocam danos ao sistema onde são inseridas. Desta forma, os reatores tendem a limitar este efeito a valores suportáveis.

2.4.5) Filtro de correntes harmônicas

As características de resposta de frequência em um sistema elétrico apresentam pontos de ressonância, isto é, frequências para as quais a impedância do sistema assume um valor máximo (ressonância paralelo) ou mínimo (ressonância série).

Se o sistema alimenta uma carga não senoidal, surgirão correntes harmônicas, de frequências múltiplas da frequência fundamental podendo acontecer a ressonância do sistema, o que pode resultar em valores apreciáveis de tensões harmônicas. Quando estas tensões ficam superpostas à tensão fundamental de suprimento do sistema, a mesma poderá ficar totalmente distorcida.

A presença de tensões distorcidas no sistema poderá causar dano ou mal desempenho de equipamentos das concessionárias de energia elétrica e seus consumidores. Logo, para evitar tais problemas utiliza-se o reator, em conjunto com capacitores e, ocasionalmente, com resistores (filtro amortecido), para criar um circuito de filtro sintonizado em uma determinada frequência (frequência de ressonância) com o objetivo de reduzir, bloquear ou prover um caminho de baixa impedância para as correntes harmônicas.

2.4.6) Compensador estático

Os compensadores estáticos, que são controladores em paralelo, basicamente são compostos de bancos de capacitores e reatores. Através de controles adequados são inseridos e retirados estes bancos de tal modo que o compensador possa gerar (capacitor) ou absorver (reator) potência reativa.

Compensadores estáticos têm sido utilizados há mais de 35 anos em indústrias, principalmente no controle de oscilações rápidas de tensão.

CAPÍTULO 3

DETERMINAÇÃO DAS PROPRIEDADES MECÂNICAS DO MATERIAL

A determinação das propriedades mecânicas do material que forma o reator é de fundamental importância para o desenvolvimento dos modelos numéricos estruturais que irão influenciar diretamente nos resultados fornecidos pelos modelos de radiação sonora. Embora, o material dos reatores seja formado por uma mistura de fibra de vidro, resina epóxi e fios de alumínio, têm-se como objetivo determinar as propriedades equivalentes do material e não de cada uma das suas camadas. Assim, nesta seção, são descritos alguns métodos utilizados para determinar as propriedades mecânicas deste material.

3.1) Materiais compostos e suas características gerais

Principalmente devido a sua leveza e elevada resistência, os materiais compostos vêm sendo aplicados em diferentes áreas da engenharia, despertando em pesquisadores como Jones [3], Tsai e Hahn [4], e Chawla [5] um grande interesse pelo estudo de seu comportamento e aplicação. Um material composto é formado pela união de dois ou mais elementos de propriedades diferentes, cujo desempenho é superior àquele de seus componentes individuais. Em geral, a estrutura de um material composto divide-se em duas partes: as fibras, que conferem ao material suas características de rigidez e resistência à ruptura, e a matriz, cuja função principal é transferir as solicitações mecânicas às fibras e protegê-las do ambiente externo.

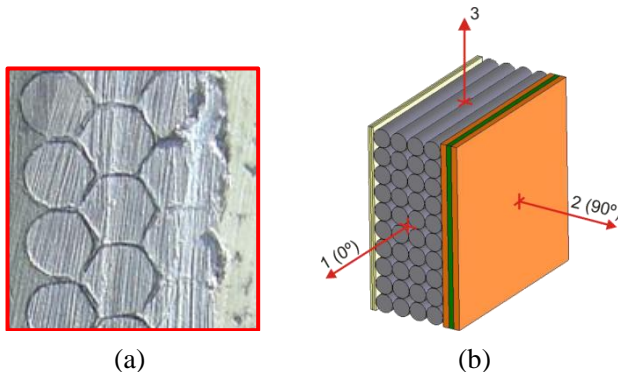


Figura 4 – (a) Detalhe de corte na seção transversal do reator, (b) Sistema de eixos de ortotropia.

Por serem formados pela união de materiais com diferentes propriedades mecânicas, os materiais compostos não possuem um comportamento isotrópico, ou seja, eles não apresentam as mesmas propriedades mecânicas em todas as direções. Portanto, frequentemente define-se para este tipo de material um sistema de eixos ortogonais, chamado sistema de eixos de ortotropia, dentro do qual as propriedades mecânicas são identificadas. Nesta pesquisa, um dos eixos, denominado 1, é definido na direção dos condutores elétricos, outro, denominado 2, é colocado transversalmente as fibras e um terceiro é definido ortogonalmente aos dois anteriores, como se pode observar na Figura 4.

Quando as propriedades mecânicas nas direções 2 e 3 são idênticas, designa-se que este material se trata de um isotrópico transverso. Tal hipótese é assumida nesta pesquisa, porque se admite que nas direções 2 e 3 as propriedades mecânicas do material do reator são idênticas. Sendo assim, os métodos empregados para determinar as propriedades mecânicas do material, que serão apresentados a seguir, deverão ser conduzidos de maneira que possam ser determinadas as propriedades mecânicas nos eixos de ortotropia.

3.2) Ensaio de tração

A norma ASTM D 638-03 [6] descreve o procedimento e os equipamentos necessários para determinar as propriedades mecânicas de amostras plásticas, podendo também ser utilizado na determinação das propriedades de materiais modelados com resina fenólica e materiais laminados. Este procedimento é frequentemente utilizado em materiais que possuem uma espessura máxima de 14 mm.

Os corpos de prova construídos para os ensaios são retangulares e tiveram seus comprimentos e larguras definidos a partir da extrapolação daqueles recomendados pela norma ASTM D 638-03 para corpos de prova do tipo III. As dimensões típicas de um corpo de prova podem ser observadas na Tabela 5.

Tabela 5 – Dimensões dos corpos de prova da amostra 7.

Amostra 7	Espessura (mm)	Largura (mm)	Comprimento (mm)
0°	12,5	37,80	215,0
45°	12,5	26,4	204,0
90°	12,5	37,8	195,0

Por se tratar de um material composto, foram preparados três corpos de prova, cada um deles com diferentes orientações dos fios de alumínio, a 0° (direção circunferencial do reator), 90° (direção axial do reator) e 45°, desta forma, poderiam ser determinadas as suas propriedades em diferentes direções.

O procedimento de medição consistiu basicamente em fixar a amostra nos grampos da máquina de ensaio de tração EMIC DL 2000, conforme pode se observar na Figura 5, e ajustar a velocidade de avanço. Assim, automaticamente em determinados intervalos de tempo, a máquina registra a força aplicada e o respectivo deslocamento de sua garra móvel, até o instante de ruptura da amostra. A razão entre a força aplicada e a área da seção transversal do corpo de prova determina a tensão aplicada na amostra. Já a deformação sofrida pelo corpo de prova é obtida a partir da razão entre o deslocamento da garra e o comprimento inicial da amostra.

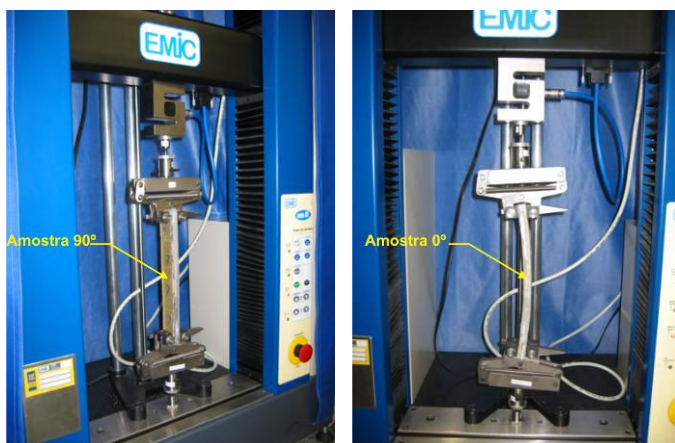


Figura 5 – Máquina EMIC DL 2000 utilizada para realizar o ensaio de tração.

O comportamento do material de cada um dos corpos de prova avaliados ao longo do ensaio de tração pode ser analisado no diagrama tensão-deformação, apresentado na Figura 6.

Supondo que na faixa onde os níveis de tensão e deformação são pequenos o material tenha um comportamento linear, a relação entre a tensão e a deformação pode ser expressa através da lei de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.1)$$

onde σ corresponde a tensão, expressa em Pa, ε a deformação e E o módulo de elasticidade, expresso em Pa.

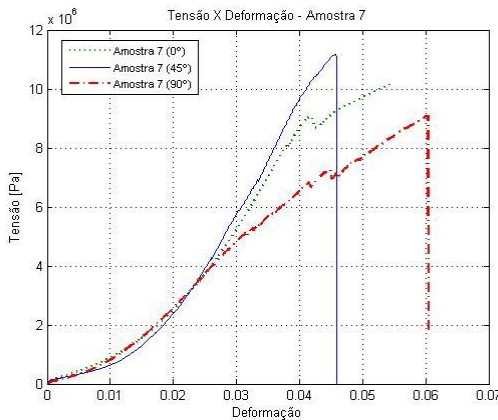


Figura 6 – Diagrama tensão-deformação das amostras analisadas.

Logo, o módulo de elasticidade pode ser calculado a partir da razão entre a tensão e deformação sofrida pela amostra testada. Os valores dos módulos de elasticidade e tensão de ruptura determinados para cada um dos corpos de prova avaliados neste ensaio de tração são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 – Resultados obtidos no ensaio de tração para a amostra 7.

Amostra 7	Tensão ruptura em tração (MPa)	Módulo de elasticidade (MPa)
0°	-	361,0
45°	11,0	437,3
90°	9,1	231,8

Embora, o corpo de prova com os fios a 0° tivesse uma maior tensão de ruptura, o seu valor não pode ser determinado, porque o equipamento utilizado não possuía capacidade (Carga máxima de 2 kN) para provocar a ruptura desta amostra. Já os outros dois corpos de prova romperam na região onde se localizava a fita de poliéster usada no processo de fabricação dos reatores, como se verifica na Figura 7.



Figura 7 – Região da amostra com fios a 45°, onde ocorreram as fraturas.

Para melhorar os resultados obtidos neste ensaio, ao invés de utilizar a própria garra do equipamento para medir o deslocamento, poderiam ser utilizados extensômetros para que o erro associado à determinação da deformação fosse reduzido significativamente. Além disso, seria necessário utilizar um equipamento com maior capacidade de carga. No entanto, este método não se mostrou apropriado para determinar as propriedades mecânicas equivalentes destes materiais. A grande irregularidade da superfície das amostras permitiu que a garra tracionadora escorregasse e conseqüentemente introduzisse erros grosseiros que acabaram comprometendo a credibilidade dos resultados obtidos.

3.3) Método da flexão em quatro pontos

O método da flexão em quatro pontos é utilizado para determinar o módulo de elasticidade, a tensão de flexão, a deformação de flexão e a resposta tensão-deformação em flexão do material. A grande vantagem do teste de flexão em quatro pontos é a fácil preparação do teste e do corpo de prova. No entanto, este método apresenta algumas desvantagens: os resultados obtidos são sensíveis à geometria do carregamento e do corpo de prova, e a razão de deformação.

De acordo com a Norma ASTM D 6272-02 [7] a distância mínima entre os pontos de apoio deve ser tal que a relação entre esta e a espessura seja de 16:1. De acordo com esta norma técnica, para materiais compostos reforçados com alta resistência, incluindo laminados altamente ortotrópicos, esta razão deverá ser escolhida de forma que ocorram falhas nas fibras externas da amostra devido somente ao momento de dobramento. São recomendadas três razões entre o comprimento do suporte e a espessura da amostra, são elas 16:1, 32:1, e

40:1. No entanto, para alguns materiais compostos altamente anisotrópicos, deformações cisalhantes podem influenciar significativamente as medições dos módulos de elasticidade, mesmo que a relação entre o comprimento do suporte e a espessura seja de 40:1. Então, para estes materiais, um aumento nesta relação é recomendado para eliminar os efeitos cisalhantes, sugerindo-se uma relação de 60:1. Deveria ser observado também que a rigidez a flexão de laminados altamente isotrópicos é uma função fortemente influenciada pela sequência de empilhamento das fibras e não será correlacionado com a rigidez extensional, a qual não é dependente da sequência de empilhamento.

Como regra geral, a relação de 16:1 é satisfatória quando a razão entre a resistência a tração e a resistência ao cisalhamento é menor que 8:1, porém o comprimento do suporte deve ser aumentado para lâminas que possuem resistência ao cisalhamento no plano do laminado relativamente baixa e resistência à tração paralela ao comprimento dos apoios relativamente alta.

A distância entre os pontos de aplicação de carga pode ser igual a $1/3$ ou $1/2$ do comprimento do suporte. Com o objetivo de submeter uma área maior do corpo de prova ao carregamento, utilizou-se a distância de $1/2$ do comprimento do suporte. Na Figura 8 apresenta-se um diagrama da configuração escolhida.

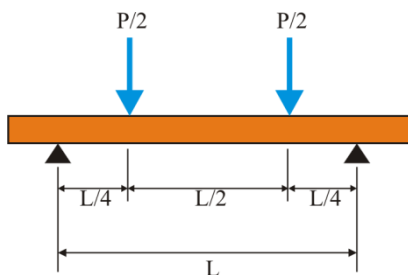


Figura 8 – Diagrama do carregamento utilizado para realizar os testes.

Segundo esta norma técnica, amostras com espessura maior que 3,2 mm deverão apresentar uma largura que não exceda $1/4$ do comprimento do suporte.

O comprimento da amostra deve ser tal que cada uma de suas extremidades sobressaia pelo menos 10% do comprimento do suporte e não menos que 6,4 mm. Além disso, os raios das pontas de aplicação de

força devem ser 1,6 vezes a espessura da amostra e não menor que 5 mm.

Definidos todos estes requisitos, a amostra deverá ser flexionada até que ocorra a ruptura de suas fibras externas ou até que seja alcançada 5% da deformação máxima da fibra, dependendo qual ocorrerá primeiro. Os cálculos realizados para se obter as propriedades mecânicas baseiam-se nos procedimentos de medição descritos na norma ASTM D5947 e o equipamento utilizado para medir a deflexão deve atender os requisitos da Classe C exigidos pela norma ASTM E 83.

Diante de todas essas exigências da norma técnica e das propriedades das amostras a serem avaliadas, apresentadas nas Tabelas 7 e 8, apresenta-se na Tabela 9 uma síntese dos parâmetros principais do ensaio.

Tabela 7 - Propriedades das amostras com fios no sentido circunferencial do reator (Direção 1).

Amostra com fios a 0°	Espessura (mm)	Largura (mm)	Comprimento (mm)	Massa (g)
A1	13	24	233	149,2
A2	13	25	233	155,4
A3	13	24	233	148,6
A4	13	25	233	154,48

Tabela 8 - Propriedades das amostras com fios no sentido axial do reator (Direção 3).

Amostra com fios a 90°	Espessura (mm)	Largura (mm)	Comprimento (mm)	Massa (g)
A1	13	26	199	136,43
A2	13	25	200	129,86
A3	13	24	202	126,23
A4	13	24	201	129,70

Definidos todos os parâmetros do ensaio, os suportes superior e inferior foram acoplados na máquina de ensaio de tração EMIC, conforme se observa na Figura 9.

Tabela 9 – Síntese dos parâmetros utilizados nos ensaios de flexão.

Parâmetros	Recomendado pela Norma	Amostra 0°	Amostra 90°
		Utilizado	Utilizado
Distância dos apoios L=16*e	208 mm	160 mm	160 mm
Comprimento total da amostra	250 mm	233 mm	200 mm
Distância dos pontos de aplicação de carga	104 mm	80 mm	80 mm
Largura máxima das amostras	52 mm	25 mm	25 mm
Sobre saliência das extremidades da amostra	20,8 mm	36,5 mm	20 mm
Raio das pontas de aplicação de carga	20,8 mm	21 mm	21 mm
Procedimento de cálculo	A ou B	A	A
Razão do deslocamento da garra	A=5,56 mm/min B=55,57 mm/min	3,29	3,29
Deflexão no meio do vão	38,27	38,27	38,27

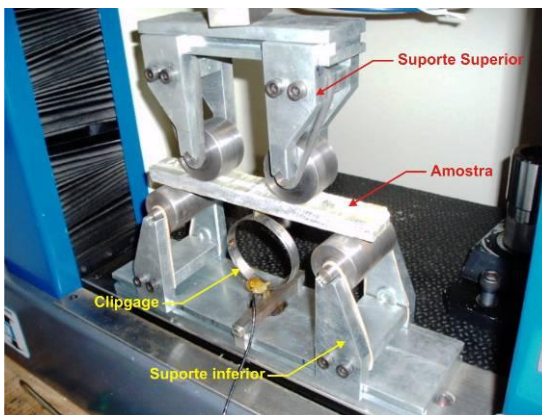


Figura 9 – Vista dos equipamentos utilizados para realizar os ensaios de flexão.

Em seguida, o corpo de prova era posicionado de forma que ficasse centralizado sobre o suporte. Desta forma, o equipamento era ligado para que o carregamento fosse aplicado sobre o corpo de prova ensaiado e os dados referentes à força aplicada e ao deslocamento fossem armazenados. O *clipgage* conectado a um analisador de sinais permitia a medição da deflexão em determinados intervalos de tempo. A leitura da força é feita através de uma célula de força inserida na máquina EMIC.

A partir dos dados de força e deflexão, o módulo de elasticidade da viga para cada intervalo de tempo pode ser calculado através da seguinte Equação:

$$E = \frac{Fa}{48v_{\max} I} (3L^2 - 4a^2) \quad (3.2)$$

onde a corresponde a distância do engaste até o ponto de aplicação de carga (m); L a distância entre os apoios (m); F a força medida pela célula de força (N); v_{\max} a deflexão medida pelo *clipgage* (m) e I o momento de inércia (m⁴). Lembrando que para uma viga com seção transversal retangular o momento de inércia em relação ao eixo centroidal é dado por:

$$I = \frac{be^3}{12} \quad (3.3)$$

onde b corresponde a largura da viga (m) e e a espessura da viga (m).

Assim, na Figura 10, podem ser observadas as curvas resultantes dos diferentes módulos de elasticidade calculados em cada um dos instantes em que foram efetuadas as aquisições das amostras com os fios a 0°. Já na Figura 11 são observados os resultados do módulo de elasticidade das amostras com fios a 90°.

Ao observar as Figuras 10 e 11, percebe-se que nos instantes iniciais, o módulo de elasticidade, parte de zero até um valor máximo. Esta variação ocorre devido à acomodação da amostra sobre o suporte, uma vez que as imperfeições na superfície do corpo de prova fazem com que, nestes instantes iniciais do ensaio uma das pontas de aplicação de força entre em contato com o corpo de prova antes da outra. Já nos instantes finais, o valor do módulo de elasticidade tende a se estabilizar. Assim, o módulo de elasticidade das duas amostras com fios a 0° é de

aproximadamente 30 GPa e 12 GPa, já o módulo de elasticidade das duas amostras com fios a 90° fica em torno de 5,3 GPa.

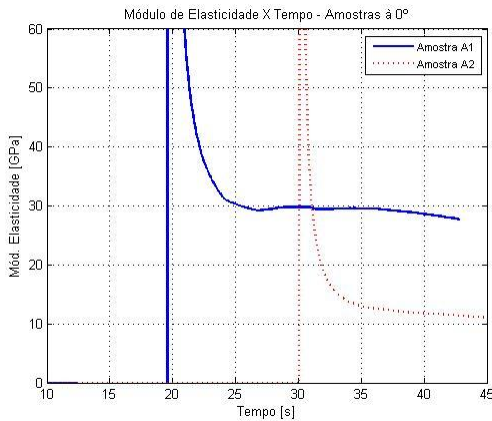


Figura 10 – Módulo de elasticidade em função do tempo. (Amostras fios a 0°).

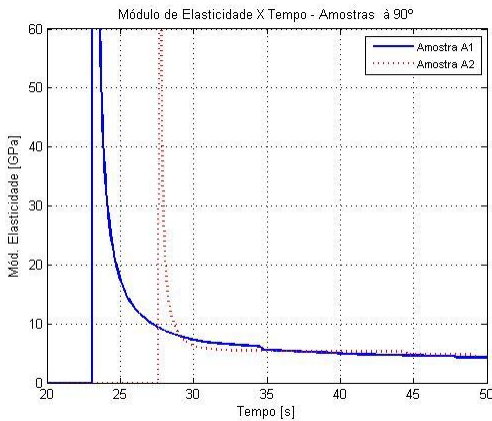


Figura 11 – Módulo de elasticidade em função do tempo. (Amostras fios a 90°).

Embora os resultados deste ensaio tenham sido melhores quando comparados aos obtidos no ensaio de tração, a variação dos resultados ao longo do tempo de aplicação do carregamento e a grande sensibilidade dos resultados em função da curva de calibração do *clipgage* fizeram com que novos métodos para determinar as propriedades mecânicas do material fossem procurados.

3.4) Método da viga vibrante

O método descrito na norma ASTM E 756-98 [8] é frequentemente utilizado para determinar as propriedades mecânicas e dinâmicas de materiais viscos-elásticos, tais como fator de perda, módulo de elasticidade e módulo de cisalhamento. O método fornece resultados a partir da utilização de equações analíticas da teoria clássica de vigas, especificamente a de uma viga engastada. Os termos envolvendo inércia rotacional e deformação cisalhante não são considerados e se assume que as seções planas permanecem planas após a aplicação da força de excitação.

Para o cálculo das propriedades são necessárias as frequências de ressonância de cada modo de vibração, as propriedades geométricas e a densidade do material que compõe a viga submetida ao ensaio.

Baseado neste método, o módulo de elasticidade das amostras de material do reator pode ser determinado a partir da Equação (3.4)

$$E = \frac{12\rho L^4 f_n^2}{e^2 C_n^2} \quad (3.4)$$

onde E corresponde ao módulo de elasticidade do material do corpo de prova (Pa), ρ a densidade do material (kg/m^3), L o comprimento da viga (m), n o número do modo de vibração, f_n frequência de ressonância do modo n (Hz), e espessura da viga (m) e C_n o coeficiente para o modo n .

Considerando uma viga engastada, os coeficientes dos modos de vibração são: $C_1 = 0,55959$; $C_2 = 3,5069$; $C_3 = 9,8194$; $C_4 = 19,242$; $C_5 = 31,809$ e para $n > 5$ o coeficiente pode ser calculado a partir da Equação (3.5):

$$C_n = \left(\frac{\pi}{2} \right) n - 0,5^2 \quad (3.5)$$

O aparato experimental utilizado neste ensaio, observado na Figura 12, consiste de uma base rígida utilizada para engastar a viga, um transdutor de vibração (acelerômetro), um martelo de impacto com ponteira de nylon e a instrumentação apropriada para aquisição e processamento dos sinais de excitação e resposta.

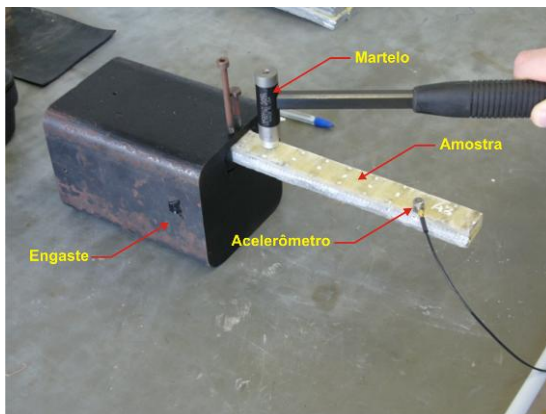


Figura 12 – Equipamentos empregados no método da viga vibrante.

Tal suporte deve ser rígido e possuir uma grande massa que permita assegurar uma condição de engaste, condição esta indispensável, uma vez que o método baseia-se nas equações de vibração transversal de vigas uniformes com condição de contorno de deslocamento e inclinação zero na extremidade fixa. Além destes cuidados, deve-se verificar para que os cabos dos transdutores não adicionem rigidez ou amortecimento à viga, devendo para isso serem finos, leves e fixados de tal forma que não apliquem nenhuma força no sensor.

Assim, como no ensaio anterior, fez-se necessário preparar dois tipos de corpos de prova, um com os fios de alumínio orientados a 0° , direção circunferencial do reator, e o outro a 90° , direção axial do reator. As dimensões típicas das amostras usadas nesse ensaio são equivalentes aquelas apresentadas nas Tabelas 7 e 8.

A excitação foi feita a partir de impactos sobre um ponto fixo localizado junto à extremidade engastada da viga, enquanto que a resposta foi medida em vários pontos ao longo da direção longitudinal da mesma. Assim, ao medir a força aplicada no ponto de excitação e a aceleração em cada um dos pontos de resposta, são obtidas as funções resposta em frequência (FRFs) necessárias para determinar as frequências naturais e os respectivos modos de vibração da viga.

Determinou-se um módulo de elasticidade de 2,3 GPa, para a amostra com fios a 90° , cuja frequência de ressonância correspondente ao primeiro modo de flexão estava em 67,0 Hz. Já para amostra com fios a 0° , que possui uma rigidez maior, a frequência de ressonância do

primeiro modo de flexão se encontrava na frequência de 164,3 Hz, resultando em um módulo de elasticidade de 28,7 GPa.

Comparado aos outros métodos, apresentados anteriormente, este apresentou os melhores resultados e boa repetibilidade. Porém, a necessidade de se determinar o módulo de cisalhamento do material, exigiu que outro método fosse utilizado.

3.5) Método da excitação impulsiva

Esse método baseia-se na norma ASTM E 1876-01 [9] cujo objetivo consiste em determinar as propriedades dinâmicas elásticas de materiais. Os corpos de prova usados no ensaio possuem frequências de ressonância específicas que são determinadas a partir do seu módulo de elasticidade, massa e dimensões geométricas. O módulo de elasticidade é determinado utilizando a frequência de ressonância do modo de flexão da viga, enquanto que o módulo de cisalhamento é obtido através da frequência de ressonância do modo torcional.

Nesse método, a frequência de ressonância de uma amostra com uma determinada geometria é obtida através da excitação por um martelo de impacto. Um acelerômetro capta essa vibração transformando-a em sinal elétrico que será adquirido e processado por um analisador de sinais. Como será visto a seguir, o posicionamento do suporte, o ponto em que a amostra é excitada e a posição onde é feita a medição de vibração são definidos pela norma com o objetivo de excitar apenas o modo de vibração de interesse.

Normalmente, este método é utilizado para determinar as propriedades de materiais elásticos, homogêneos e isotrópicos. No entanto, pode também ser utilizado para materiais compostos desde que alguns cuidados especiais sejam tomados a fim de considerar os efeitos de anisotropia.

De acordo com a norma técnica, para excitar o primeiro modo de flexão da amostra, os dois suportes devem ser posicionados a uma distância de $0,224L$ das extremidades da viga, onde L corresponde ao comprimento da amostra, conforme se observa na Figura 13. Essa distância garante que os suportes estarão posicionados sobre as linhas nodais deste modo de vibração. Os nós são definidos como sendo os pontos da viga que têm deslocamento nulo neste respectivo modo de vibração.

O posicionamento do acelerômetro e o ponto de excitação do corpo de prova devem ser aqueles observados na Figura 13, permitindo assim que apenas os sinais referentes ao primeiro modo de flexão da

viga sejam obtidos. Observe que o afastamento do acelerômetro em relação à linha nodal deve ser o suficiente para tornar possível a identificação desse modo de vibração. Não é aconselhável posicionar o acelerômetro sobre o ponto de maior deslocamento, pois, a adição de massa poderia alterar a frequência natural do sistema. Para evitar erros grosseiros na determinação da frequência de ressonância deste modo, o corpo de prova é excitado cinco vezes, para que se obtenha uma função resposta em frequência média a partir da qual será definida esta frequência de ressonância.

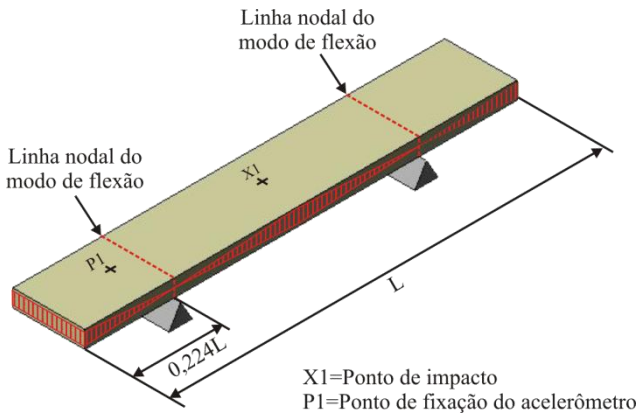


Figura 13 – Posicionamento dos suportes para excitar o 1º modo flexão.

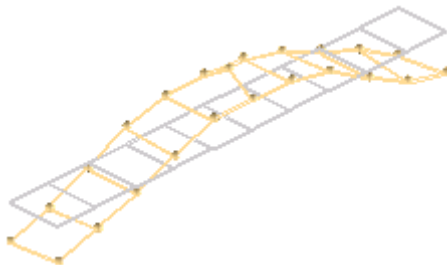


Figura 14 – Representação da forma de vibração do 1º modo de flexão.

Definidos todos estes parâmetros é possível determinar o módulo de elasticidade do material que compõe a amostra através da seguinte equação:

$$E = 0,9465(m f_f^2 / b)(L^3 / e^3)T_1 \quad (3.6)$$

onde E corresponde ao módulo de elasticidade (Pa), m a massa da viga (g), b a largura da viga (mm), L comprimento (mm), e a espessura (mm), f_f a frequência de ressonância do primeiro modo de flexão da viga em flexão (Hz), apresentado na Figura 14, e T_1 um fator de correção relacionado ao coeficiente de Poisson ν , definido pela seguinte expressão:

$$T_1 = 1 + 6,585(1 + 0,752\nu + 0,8109\nu^2)(e/L)^2 - 0,868(e/L)^4 - \left[\frac{8,340(1 + 0,2023\nu + 2,173\nu^2)(e/L)^4}{1,000 + 6,338(1 + 0,1408\nu + 1,536\nu^2)(e/L)^2} \right] \quad (3.7)$$

Se a razão $L/e \geq 20$, a expressão do fator de correção pode ser simplificada, para a seguinte expressão

$$T_1 = \left[1 + 6,585(e/L)^2 \right] \quad (3.8)$$

Para determinar o módulo de cisalhamento do material que compõe a amostra, os suportes da viga devem ser posicionados na linha média da largura e do comprimento da viga, conforme se observa na Figura 15, para que o primeiro modo torcional de vibração seja excitado.

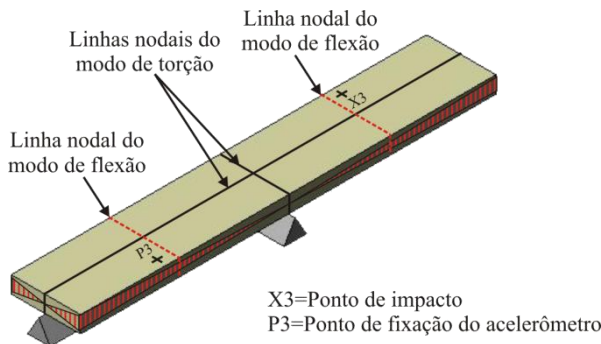


Figura 15 – Posicionamento dos suportes para excitar o 1º modo torcional.

O posicionamento do acelerômetro deve se localizar no quadrante diagonalmente oposto ao ponto onde a viga será excitada, conforme se

observa na Figura 15. Assim, o módulo de cisalhamento do material que compõe a amostra pode ser calculado a partir da Equação (3.9).

$$G = \frac{4Lm f_t^2}{be} B / (1 + A) \quad (3.9)$$

onde G corresponde ao módulo de cisalhamento (Pa), f_t a frequência fundamental do modo de torção (Hz), indicada na Figura 16, e B e A correspondem aos fatores de correção calculados a partir das seguintes equações:

$$B = \left[\frac{C + e/b}{4(e/b) - 2,52(e/b)^2 + 0,21(e/b)^6} \right] \quad (3.10)$$

$$A = \frac{\left[0,5062 - 0,8776C + 0,3504C^2 - 0,0078C^3 \right]}{\left[12,03C + 9,892C^2 \right]} \quad (3.11)$$

onde C corresponde a razão entre a largura e a espessura da viga.

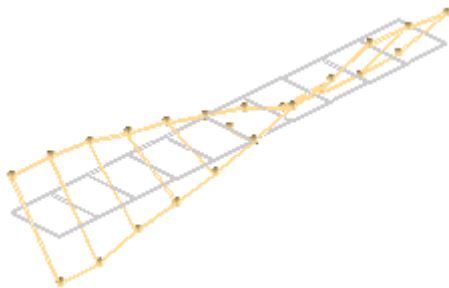


Figura 16 – Representação da forma de vibração do 1º modo torcional.

Conforme mencionado anteriormente, o fato do material ser ortotrópico torna-se necessário determinar as propriedades elásticas do material em dois corpos de prova, um com os fios de alumínio orientados na direção circunferencial do reator, Figuras 17 e 18, e o outro com os fios na direção axial do reator, Figuras 19 e 20. As dimensões típicas das amostras usadas nesse ensaio são equivalentes aquelas apresentadas nas Tabelas 7 e 8.



Figura 17 – Posicionamento da amostra com fios a 0° . Módulo de elasticidade.



Figura 18 – Posicionamento da amostra com fios a 0° . Módulo de cisalhamento.

Dentre as vantagens apresentadas por este método destacam-se a de que é um ensaio não destrutivo e de fácil realização, uma vez que a instrumentação utilizada faz parte do cotidiano das medições experimentais na área de vibrações e acústica. Além disso, como se trata de um método dinâmico, as propriedades determinadas condizem com a situação real de funcionamento do reator, principalmente com relação às frequências de operação. Por estas razões este método foi o escolhido para determinar as propriedades elásticas do material que forma os reatores.

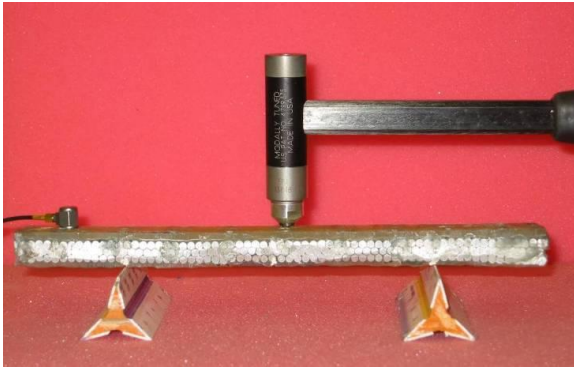


Figura 19 – Posicionamento da amostra com fios a 90°. Módulo de elasticidade.

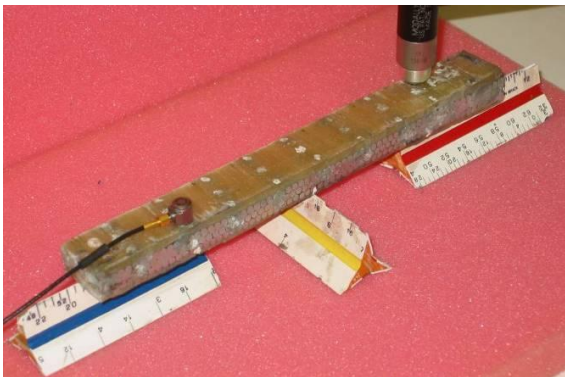


Figura 20 – Posicionamento da amostra com fios a 90°. Módulo de cisalhamento.

Em função da heterogeneidade do material, para cada um dos corpos de prova foram testadas três amostras teoricamente idênticas. Os valores médios dos módulos de elasticidade e cisalhamento do material de cada um dos protótipos podem ser observados nas Tabelas 10 e 11, que apresentam ainda a variância σ^2 e o desvio padrão σ destas grandezas. Salienta-se que os corpos de prova foram retirados das bobinas externas dos protótipos 3, 4 e 5.

Tabela 10 – Módulos de elasticidade calculados a partir da excitação impulsiva.

	Orientação	Amostra	f_f (Hz)	E (GPa)	$E_{\text{Médio}}$ (GPa)	σ^2 σ
Protótipo 3	0°	1	1257,3	32,1	31,90	0,12 0,35
		2	1233	31,5		
		3	1172	32,1		
	90°	1	805,4	10,4	10,23	0,02 0,15
		2	803,6	10,2		
		3	799,7	10,1		
Protótipo 4	0°	1	1024	25,6	26,13	4,62 2,15
		2	886,1	28,5		
		3	973,3	24,3		
	90°	1	412,4	3,54	3,18	0,10 0,32
		2	377,4	3,04		
		3	369,8	2,95		
Protótipo 5	0°	1	726,6	27,2	31,13	16,89 4,11
		2	781,4	35,4		
		3	763,2	30,8		
	90°	1	343,6	3,13	3,28	0,18 0,43
		2	358	2,95		
		3	349,2	3,76		

Ao analisar os resultados apresentados nas Tabelas 10 e 11, observa-se que em todas as situações, as amostras com fios a 0° apresentam uma rigidez maior, conforme esperado, pois é nessa direção que as fibras de vidro e os fios de alumínio estão orientados. Além disso, através da análise da variância e do desvio padrão verifica-se a grande heterogeneidade do material que forma o reator. E embora as características da única bobina do protótipo 3 e da bobina externa do protótipo 4, apresentadas na Tabela 2, sejam praticamente idênticas, os resultados dos módulos de elasticidade e cisalhamento para ambos diferem de forma significativa.

Tabela 11 -Módulos de cisalhamento calculados a partir da excitação impulsiva.

	Orientação	Amostra	f_t (Hz)	G (GPa)	$G_{\text{Médio}}$ (GPa)	σ^2 σ
Protótipo 3	0°	1	2274,4	3,48	3,08	0,12 0,35
		2	2136,9	2,9		
		3	2078,9	2,86		
	90°	1	2219,4	2,56	2,61	0,01 0,11
		2	2244,6	2,74		
		3	2209,6	2,54		
Protótipo 4	0°	1	1898,9	2,48	2,61	0,26 0,51
		2	1902,5	3,18		
		3	1771,5	2,18		
	90°	1	1999,2	2,55	2,40	0,02 0,15
		2	1921,1	2,41		
		3	1902,3	2,25		
Protótipo 5	0°	1	1465,8	2,53	2,81	0,12 0,35
		2	1647,3	3,21		
		3	1490,9	2,71		
	90°	1	1523,5	1,59	1,70	0,05 0,22
		2	1566,3	1,55		
		3	1611,2	1,95		

3.6) Determinação da densidade

Sabe-se que um corpo imerso na água se torna mais leve devido a uma força exercida pelo líquido sobre o corpo que alivia o seu peso. Essa força do líquido sobre o corpo, é denominada empuxo e atua na direção vertical e para cima. A partir desta observação que foi estabelecido o Princípio de Arquimedes.

Baseando-se neste princípio, a densidade do material que forma os reatores foi determinada usando uma balança Mettler Toledo X5 204.



Figura 21 – Determinação da massa do corpo de prova no ar.

Basicamente, a determinação experimental da densidade, dividiu-se em duas etapas. Na primeira foi determinada a massa do corpo de prova no ar, como se observa na Figura 21, e na segunda etapa foi determinada a massa do corpo de prova quando o mesmo encontrava-se submerso na água, conforme se verifica na Figura 22.

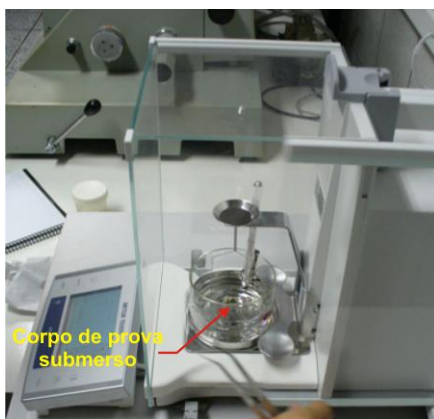


Figura 22 – Determinação da massa do corpo de prova na água.

Assim, a partir da Equação (3.12), definida no manual de operação do equipamento [10], pode ser calculada a densidade do material ensaiado.

$$\rho_c = \left(\frac{m_c}{m_c - m_{ap}} \right) (\rho_L - \rho_0) + \rho_0 \quad (3.12)$$

onde, m_c corresponde a massa do corpo no ar, m_{ap} a massa aparente do corpo, ou seja, a sua massa quando imerso em água, ρ_L a densidade do líquido e ρ_0 a densidade do ar.

Cinco corpos de prova retirados dos protótipos 3, 4 e 5 com aproximadamente 20 mm de comprimento, 15 mm de largura e 13 mm de espessura foram submetidos ao ensaio.

O valor da densidade obtido para cada um dos corpos de prova, os valores médios, a variância e o desvio padrão podem ser observados na Tabela 12. Ao observar os resultados constata-se que não há uma grande variação desta propriedade, de modo que o valor médio, calculado a partir da média aritmética simples, é representativo.

Tabela 12 – Resultados da densidade para os diferentes corpos de prova.

		Densidade [kg/m ³]		
		Prot. 3	Prot. 4	Prot. 5
Amostra	1	2.108,0	2.178,2	2.116,1
	2	2.147,9	2.154,1	2.074,9
	3	2.118,9	2.152,0	2.098,9
	4	2.127,4	2.170,8	2.120,1
	5	2.127,8	2.163,5	2.115,7
Média [kg/m ³]		2.126,0	2.163,7	2.105,1
Variância (σ^2)		0,215	0,122	0,352
Desvio padrão (σ)		0,463	0,350	0,593

CAPÍTULO 4

COMPORTAMENTO DINÂMICO-ESTRUTURAL DOS REATORES

No presente capítulo serão descritas as etapas de obtenção dos parâmetros modais de cada um dos protótipos estudados. Os parâmetros modais consistem nas formas de vibração, nas frequências naturais e nos fatores de amortecimento dos modos de vibração da estrutura analisada. Além disso, como a energia sonora radiada pelo reator está diretamente relacionada à velocidade de vibração de sua superfície, serão apresentados neste capítulo, os testes realizados para determinar a forma e os níveis de vibração dos reatores em funcionamento.

4.1) Análise modal experimental

Todos os componentes elétricos são estruturas mecânicas que possuem um número infinito de frequências naturais. Cada frequência natural está associada a uma forma modal e a um amortecimento modal. Dependendo do tipo e da frequência do carregamento aplicado, a forma de vibração da estrutura pode ser determinada pelo modo estrutural e a amplitude de vibração definida pelo amortecimento modal. O grau de participação do modo estrutural na definição da forma de vibração da estrutura depende de quanto a força poderia excitar o modo, ou seja, a semelhança entre a forma do carregamento e do modo estrutural, e da proximidade entre a frequência da força de excitação e a frequência natural da estrutura.

Como será visto no Capítulo 6, as forças de excitação dos reatores são simétricas, portanto era esperado que somente modos de vibração estruturais simétricos, coincidentes com a forma de distribuição das forças, fossem excitados. No entanto, os espaçadores de fibra de vidro inseridos entre as bobinas e não homogeneidades decorrentes do processo de fabricação podem fazer com que outros modos estruturais sejam excitados.

Em função das forças radiais e axiais que atuam no reator durante seu funcionamento, o *International Council on Large Electric Systems* [11] destaca que dois modos de vibração da estrutura merecem atenção, uma vez que eles podem ser excitados por estas forças. O primeiro, denominado modo de respiração, é um modo completamente simétrico e sua forma coincide com aquela das forças magnéticas radiais. As forças tentam alternadamente expandir e comprimir o reator na direção radial, como se observa na Figura 23 (a). Em outras palavras pode-se dizer que

cada casca cilíndrica do reator é deformada como um vaso de pressão cilíndrico. Este modo de vibração depende essencialmente das propriedades do material que forma o reator e é inversamente proporcional ao diâmetro do reator. Já no segundo modo, denominado modo de compressão, as forças axiais tendem a comprimir o reator na direção axial, no sentido de seu plano médio, como se observa na Figura 23 (b).

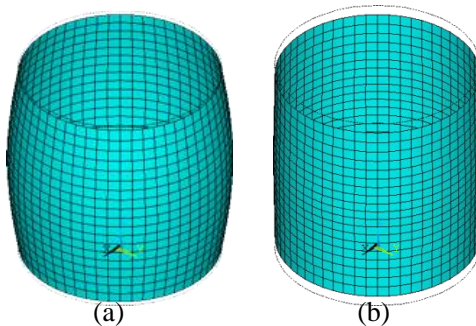


Figura 23 – Modos estruturais do reator. (a) Respiração. (b) Compressão.

De acordo com Avitabile [12] a análise modal é um processo pelo qual se descreve uma estrutura em termos de suas características naturais, frequência, amortecimento e forma modal. Como os parâmetros modais são propriedades intrínsecas da estrutura, não dependem das forças ou carregamentos. Os parâmetros modais são alterados caso as propriedades do material como massa, rigidez e amortecimento mudarem ou se as condições de contorno, como a fixação da estrutura, forem alteradas.

Sendo assim, para realizar a análise modal de um equipamento ou de uma estrutura, não é necessário que a mesma esteja em operação. Basta que ela seja excitada usando um *shaker* ou um martelo de impacto para que possam ser determinadas, em um número suficiente de pontos de medição, as funções resposta em frequência (FRFs). As FRFs, por sua vez, são obtidas a partir da relação entre o sinal de excitação, força aplicada para excitar a estrutura, e o sinal de resposta, geralmente a aceleração provocada pela excitação.

4.1.1) Procedimento de medição

Para realizar as análises modais dos protótipos foram definidos 180 pontos de medição na superfície da casca cilíndrica externa de cada um deles, uma combinação de 18 pontos na direção circunferencial e 10

pontos na direção axial. O número de pontos foi definido de modo que o ensaio forneça bons resultados para a faixa de frequências de interesse. A única exceção a este padrão foi o protótipo 1, pois, além de terem sido definidas duas superfícies de medição, uma na casca cilíndrica interna e outra na externa, para que pudesse ser verificado se ambos vibravam em fase, também foram medidos pontos sobre os braços das cruzetas.

Na Figura 24 pode-se observar a marcação dos pontos sobre a superfície externa do protótipo 3. Percebe-se que na região em que o braço da cruzeta toca a casca cilíndrica existe uma linha de pontos coincidentes. Embora os outros braços da cruzeta deste reator não apareçam na figura, em todos eles há uma linha de pontos coincidentes.



Figura 24 – Detalhe de alguns dos pontos de medição criados para realizar a análise modal do protótipo 3.

A descrição de todos os equipamentos utilizados para realizar as análises modais dos protótipos pode ser verificada na Tabela 13.

Tabela 13 – Equipamentos utilizados nos ensaios de análise modal.

Qtd	Equipamento
1	Analizador de sinais LMS® Pimento 12 canais
1	Computador portátil Toshiba® Satellite A100
1	Transdutor de força B&K®, 8200, sensibilidade 3,95 pC/N
1	Acelerômetro PCB®, 353B33, sensibilidade 10,25 mV/ms ⁻²
1	Amplificador de carga PCB®, 422E12, sensibilidade 10 mV/pC

Nestes ensaios, optou-se por excitar a estrutura nos 180 pontos e medir a aceleração num ponto fixo, o ponto de número 33. A excitação foi feita usando um martelo de impacto com um transdutor de força acoplado e a aceleração foi medida com um acelerômetro. Toda a aquisição e processamento dos dados para obtenção dos parâmetros modais foi feita com o analisador de sinais LMS® Pimento, usando os módulos *Impact* e *Modal Analysis* do *software* LMS® Pimento Rev. 6.1.

Para realizar a aquisição dos sinais de excitação e resposta, foi definida uma frequência máxima de interesse de 1,25 kHz, e um período de aquisição de 0,8192 s, o que resultou em uma discretização em frequência de 1,22 Hz.

4.1.2) Pós-processamento e resultados

O *software* utilizado faz uso do método conhecido comercialmente como *Polymax* para determinar os parâmetros modais da estrutura. De acordo com Peeters et al. [13], este método é a mais recente evolução do método *Least Squares Complex Frequency-Domain* (LSCF). Assim como no método *Frequency-Domain Direct Parameter Identification* (FDPI), o método *Polymax* usa as funções de transferência medidas como dados de entrada. Métodos no domínio do tempo como o método da polireferência, *Least Square Complex Exponential* (LSCE), adotado como padrão nas aplicações industriais, necessitam das respostas impulsivas obtidas a partir da transformada inversa de Fourier das FRFs como dados de entrada.

A grande vantagem do método *polymax*, em relação aos métodos clássicos é a grande estabilidade do algoritmo usado para determinar as possíveis soluções do sistema de equações, reduzindo assim o número de polos espúrios e conseqüentemente fornecendo melhores resultados. Recomenda-se o uso deste método para estruturas complexas, como a dos reatores.

Na Figura 25 são apresentadas as curvas soma das FRFs determinadas pelo algoritmo para cada um dos protótipos testados. Note que cada pico da curva soma corresponde a um possível modo de vibração da estrutura analisada. A análise da Figura 25 permite observar a variação das frequências de ressonância em função das diferentes características mecânicas de cada um dos reatores.

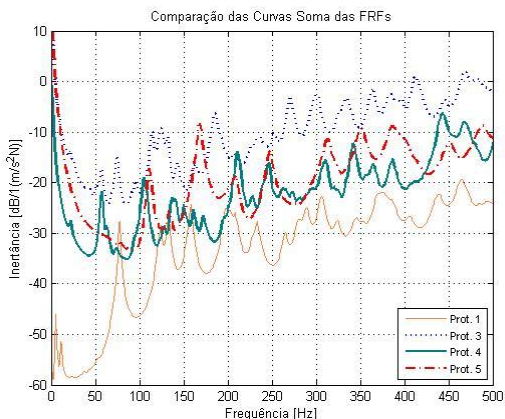


Figura 25 – Curvas soma das FRFs dos protótipos 1, 3, 4 e 5.

Na Figura 26 são observadas as funções coerência resultantes das medições efetuadas no ponto 85 dos protótipos 1, 3, 4 e 5. Nota-se que para todos os protótipos a função coerência apresentou um bom comportamento, assumindo valores acima de 0,9 em praticamente toda a faixa de frequências.

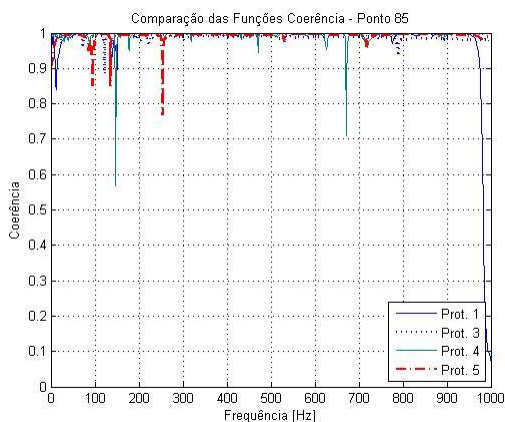


Figura 26 – Funções coerência obtidas para o ponto 85 dos protótipos.

A partir da curva soma, o algoritmo inicia a fase final do processo, a etapa de estabilização, onde os possíveis modos de vibração e suas respectivas formas modais e amortecimento são determinadas.

Como as frequências naturais e as formas de vibração de cascas cilíndricas com comprimento finito têm uma importância considerável em problemas de engenharia, várias pesquisas já foram desenvolvidas buscando determinar estas frequências. Hutchinson e El-Azhari [14] propõe determinar as frequências naturais de uma casca cilíndrica através do desenvolvimento de uma solução particular da equação de elasticidade tridimensional. Já Singal e Williams [15], além de fazer uso do método da energia para investigar as vibrações em cascas cilíndricas, apresenta um estudo experimental sobre o problema. Loy e Lam [16] apresenta um modelo para avaliar cascas cilíndricas espessas, no qual, as tensões e deformações transversais são consideradas. Outros trabalhos, como o de Wang e Williams [17], analisam várias pesquisas feitas a respeito do assunto, buscando classificar os modos de vibração em grupos, como os axiais e radiais, e também avaliar os efeitos que a variação do comprimento e da espessura das cascas cilíndricas causam em cada um dos modos estruturais.

Para o protótipo 1, os quatro primeiros picos observados na Figura 25, nas frequências de 77 Hz, 123 Hz, 132 Hz e 156 Hz, correspondem aos quatro primeiros modos de vibração, cujas formas modais podem ser visualizadas nas Figuras 27, 28, 29 e 30. Como já foi mencionado, na análise modal do protótipo 1 foram avaliadas as suas duas bobinas, a interna representada pelas linhas azuis e a externa representada pelas linhas em amarelo.

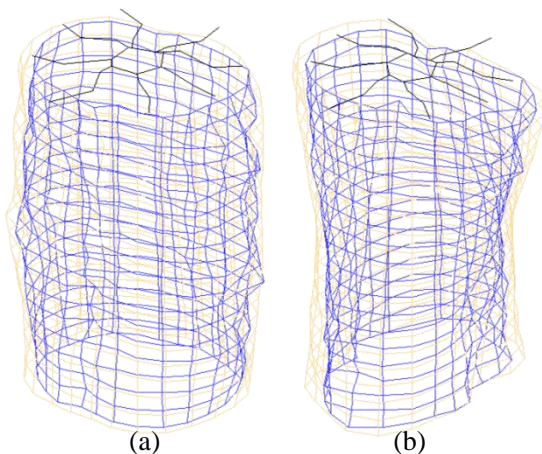


Figura 27 – Vista isométrica dos modos de vibração do Protótipo 1. (a) 77 Hz
(b) 123 Hz

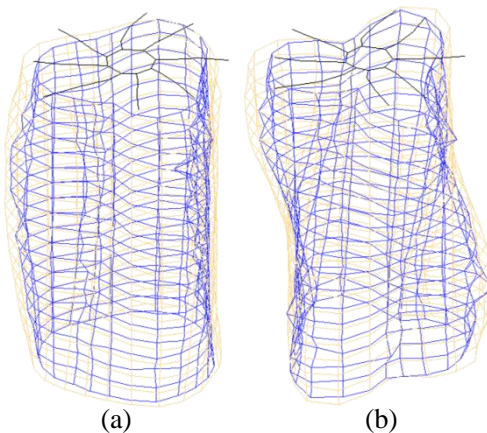


Figura 28 – Vista isométrica dos modos de vibração do Protótipo 1. (a) 132 Hz (b) 156 Hz.

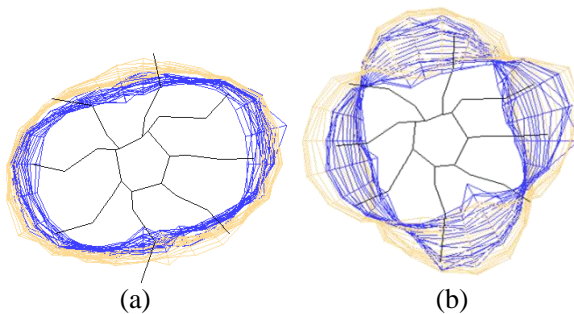


Figura 29 – Vista superior dos modos de vibração do Protótipo 1. (a) 77 Hz (b) 123 Hz.

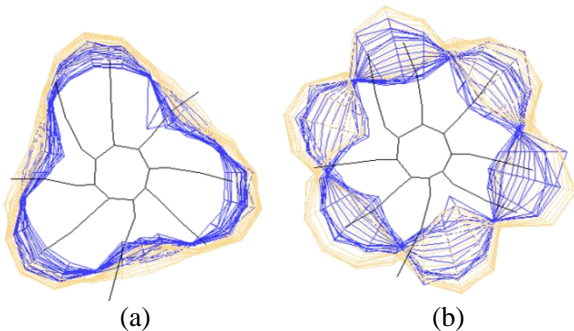


Figura 30 – Vista superior dos modos de vibração do Protótipo 1. (a) 132 Hz (b) 156 Hz.

Ao observar as formas de vibração do protótipo 1, fica claro que ambas as cascas cilíndricas vibram em fase e possuem a mesma forma de vibração. Além disso, verifica-se que as cruzetas, representadas pelas linhas em preto, praticamente não restringem o movimento das cascas cilíndricas que formam o reator. A explicação para tal comportamento está na forma de como as cruzetas são fixadas no reator. Observe na Figura 31 que as cruzetas são apoiadas na casca cilíndrica e fixadas através de um cordão de fibra de vidro, logo, a pequena rigidez do cordão e a pequena superfície de contato entre o reator e a cruzeta resultam numa força de atrito muito pequena. Apesar desta força se opor ao movimento da casca cilíndrica, ela não é grande o suficiente para impedir a vibração do mesmo.

Esta conclusão somada à pequena área de radiação sonora das cruzetas, justificam o motivo pelo qual não foram feitas medições sobre as cruzetas nas análises modais dos demais protótipos. Optou-se apenas por identificar a região de contato entre os braços e a bobina através de pontos em verde.



Figura 31 – Detalhe da fixação das cruzetas no reator.

Os picos em 57 Hz e 125 Hz, encontrados na curva soma das FRFs do protótipo 3, correspondem aos modos de vibração apresentados nas Figuras 32 e 33. Já nas Figuras 34 e 35, são apresentados os modos de vibração do protótipo 4 nas frequências de 57 Hz e 138 Hz.

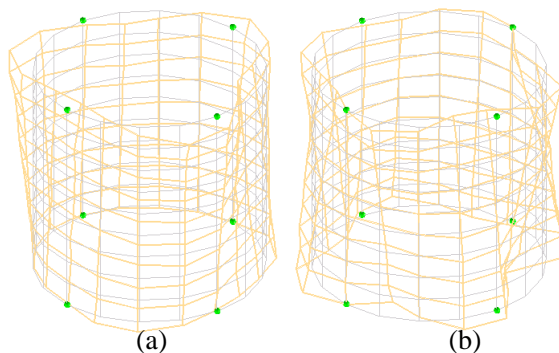


Figura 32 – Vista isométrica dos modos de vibração do Protótipo 3. (a) 57 Hz (b) 125 Hz.

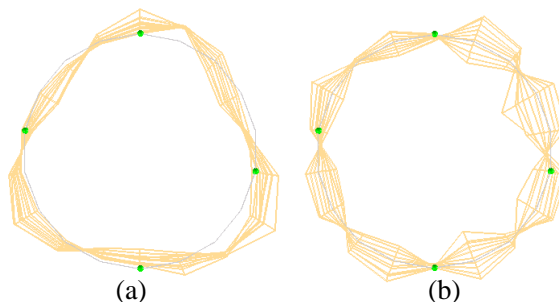


Figura 33 – Vista superior dos modos de vibração do Protótipo 3. (a) 57 Hz (b) 125 Hz.

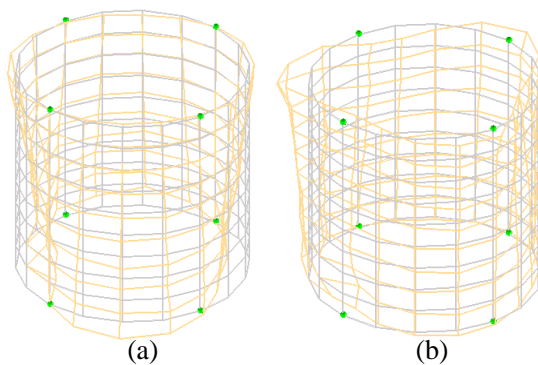


Figura 34 – Vistas isométricas dos modos de vibração do Protótipo 4. (a) 57 Hz (b) 138 Hz.

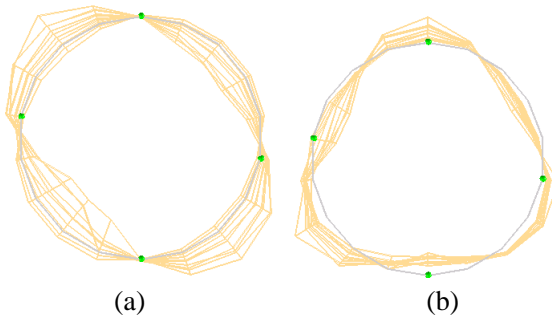


Figura 35 – Vistas superiores dos modos de vibração do Protótipo 4. (a) 57 Hz
(b) 138 Hz.

Voltando a observar a Tabela 2, que apresenta as características construtivas dos protótipos 3 e 4, verifica-se que as características da bobina externa do protótipo 4 são praticamente iguais àquelas da única bobina que forma o protótipo 3. No entanto, o modo de vibração do protótipo 3 que aparece em 57 Hz, no protótipo 4 aparece em uma frequência mais alta, em 138 Hz. Isto acontece devido ao aumento da rigidez estrutural da casca cilíndrica do protótipo 4 devido aos espaçadores de fibra de vidro que estão presentes apenas nos reatores formados por duas ou mais bobinas.

Finalmente, nas Figuras 36 e 37, podem ser observados os modos de vibração do protótipo 5 nas frequências de 168 Hz e 208 Hz.

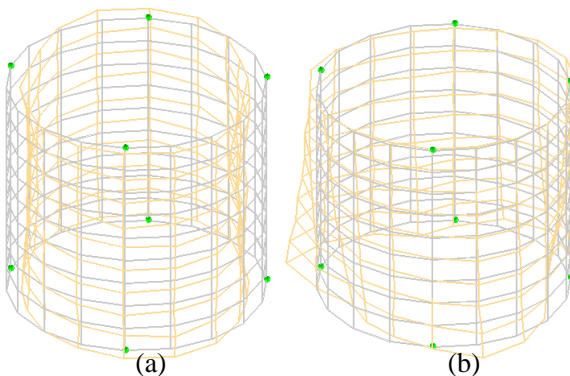


Figura 36 – Vista isométrica dos modos de vibração do Protótipo 5. (a) 168 Hz
(b) 208 Hz.

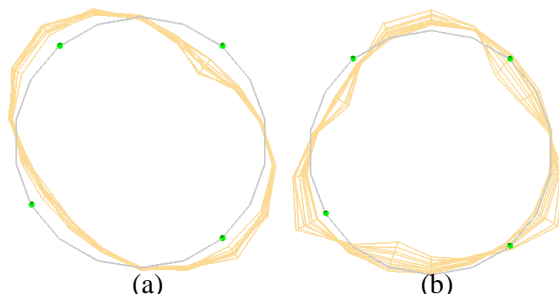


Figura 37 – Vista superior dos modos de vibração do Protótipo 5. (a) 168 Hz (b) 208 Hz.

Percebe-se ainda que os modos de vibração de todos os protótipos correspondem aos modos de vibração típicos de cascas cilíndricas.

4.2) Nível de vibração dos reatores em funcionamento

Segundo Richardson [18], a deflexão da superfície de um equipamento em operação, termo conhecido em inglês como *Operating Deflection Shape* (ODS), pode apresentar uma forma completamente diferente daquelas observadas em seus modos de vibração, pois, em operação, a deformação da estrutura dependerá das forças ou do carregamento que atua sobre ela. Logo, ao se modificar o carregamento, as formas de vibração da estrutura serão modificadas.

O grande mérito desta análise nesta pesquisa consiste em responder a pergunta: ‘Qual é o deslocamento real da estrutura em uma determinada frequência?’.

A deflexão da superfície de um equipamento em operação pode ser obtida a partir de diferentes respostas no domínio do tempo, sejam elas, aleatórias, impulsivas ou senoidais. Pode também ser obtida a partir de diferentes tipos de funções no domínio da frequência, como auto-espectro, espectro cruzado, funções resposta em frequência e transmissibilidades.

4.2.1) Procedimento de medição

Para avaliar o comportamento dinâmico dos reatores durante seu funcionamento foram realizadas medições dos níveis de vibração na superfície externa do protótipo 3, e nas superfícies externas das cascas cilíndricas externas dos protótipos 4 e 5. Estes ensaios foram conduzidos no laboratório da empresa AREVA, localizada na cidade de Itajubá,

Minas Gerais, o qual apresenta os requisitos técnicos e de segurança indispensáveis para a realização dos mesmos.

Os componentes do circuito elétrico necessários para realizar os ensaios são representados na Figura 38. Com estes equipamentos, as características elétricas do circuito, tais como, corrente elétrica e tensão podiam ser alteradas conforme aquelas especificadas no projeto do reator a ser testado.

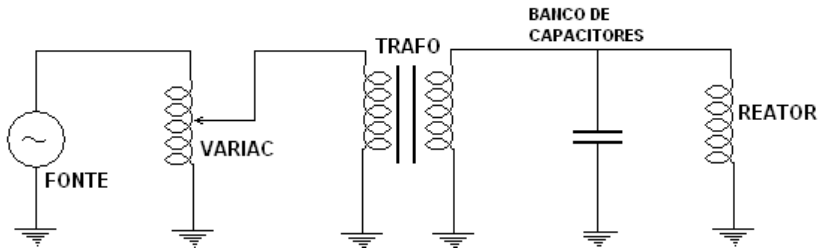


Figura 38 – Esquema do circuito elétrico usado nos ensaios.

Nas Figuras 39 e 40, apresentam-se alguns equipamentos do circuito elétrico usado nos testes, enquanto que na Figura 41 observa-se o reator conectado ao circuito, pronto para dar início aos ensaios.



Figura 39 – Gerador usado nos ensaios.

Nos ensaios realizados em laboratório, os reatores foram alimentados com uma corrente de 60 Hz, porém, em campo, o reator pode ser alimentado por uma corrente fundamental e por suas componentes harmônicas simultaneamente, cujo número e amplitude dependem entre outros fatores da aplicação do reator.



Figura 40 – Banco de capacitores usado nos ensaios.



Figura 41 – Protótipo 5 conectado ao circuito elétrico.

Para medir o nível de vibração foram utilizados dois acelerômetros. Um deles permaneceu fixo sobre o ponto de número 33 enquanto que o outro foi utilizado para medir o nível de vibração em cada um dos 180 pontos da superfície de medição que havia sido definida para realizar a análise modal. Desta maneira, a informação da fase do movimento da superfície foi preservada, logo, além da amplitude poderia se verificar se os pontos apresentavam o mesmo sentido de vibração.

Salienta-se que, embora o nível de vibração medido pelos acelerômetros tenha unidade de aceleração, m/s^2 , do ponto de vista de radiação sonora, prefere-se apresentar este nível com unidade de

velocidade, m/s, portanto, os sinais medidos pelos acelerômetros foram integrados em relação ao tempo para serem expressos em m/s.

A descrição completa de todos os equipamentos usados para medir o nível de vibração dos reatores, encontra-se na Tabela 14.

Tabela 14 – Equipamentos usados para medir o nível de vibração.

Qtd	Equipamento
1	Analizador de sinais LMS® Pimento 12 canais
1	Computador portátil Toshiba® Satellite A100
2	Acelerômetros B&K®, 4366, sensibilidade 4,73 pC/ms ⁻²
2	Amplificadores de carga PCB®, 422E12, sensibilidade 10 mV/pC

4.2.2) Influência da indução magnética sobre os resultados

A grande intensidade da indução magnética gerada pelos reatores pode provocar uma distorção da resposta dos sinais gerados pelos acelerômetros, porém, não se dispõe de informações que tratem de tal problema. Assim, fez-se necessário realizar um teste relativamente simples para esclarecer se tal fenômeno poderia estar influenciando os resultados das medições.

Inicialmente, os acelerômetros foram colocados na parte interna do reator, como se observa na Figura 42, e depois na parte externa, conforme se observa na Figura 43.

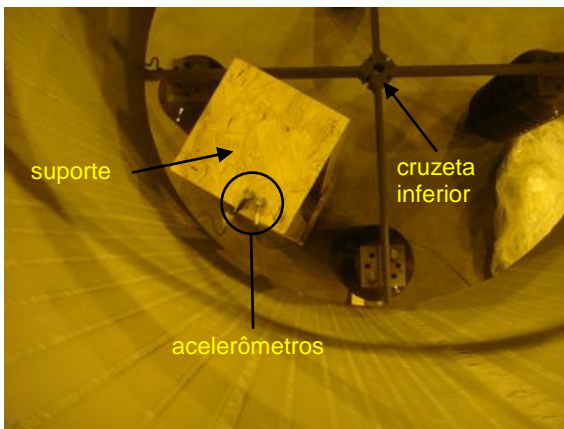


Figura 42 – Acelerômetros posicionados na parte interna do reator.

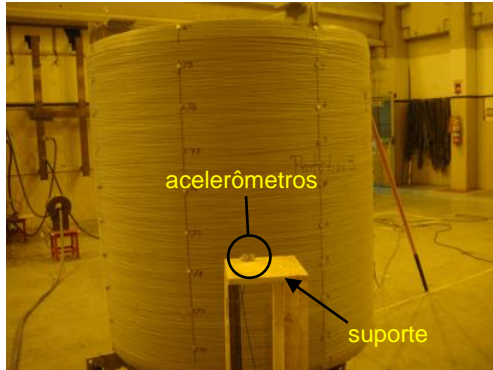


Figura 43 – Acelerômetros posicionados na parte externa do reator.

O teste consistiu basicamente em deixar dois acelerômetros próximos da superfície do protótipo 3, e medir o nível de vibração do reator em duas condições, desligado e em funcionamento. Observe que os transdutores não entraram em contato com o reator, os mesmos foram fixados sobre um suporte de madeira, material não condutor, cuja altura foi definida de modo que os acelerômetros ficassem em uma altura correspondente à metade da altura do reator.

Nas Figuras 44 e 45 observam-se os níveis de vibração medidos com os acelerômetros posicionados na região interna do reator, com ele desligado e em funcionamento. Nas Figuras 46 e 47 se faz a mesma análise, porém, com os acelerômetros posicionados na região externa.

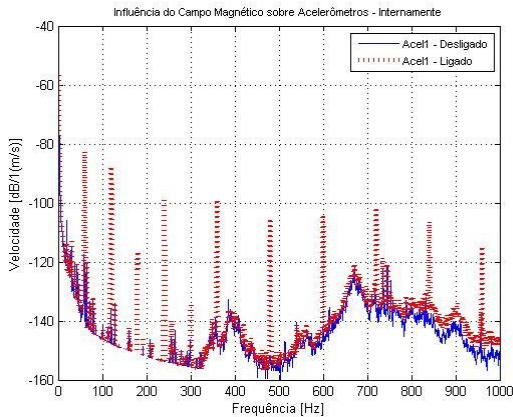


Figura 44 – Influência da indução magnética internamente. Acelerômetro 1.

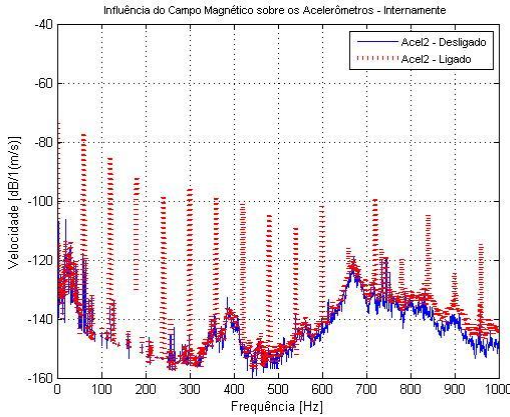


Figura 45 – Influência da indução magnética internamente. Acelerômetro 2.

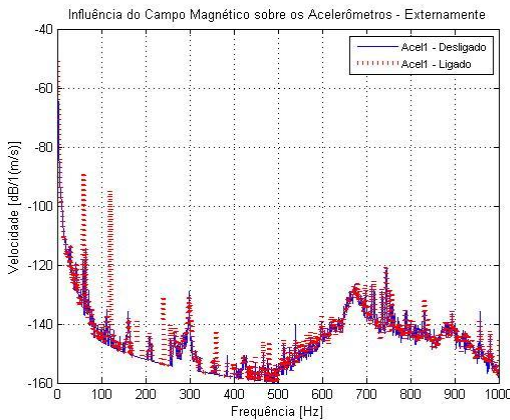


Figura 46 – Influência da indução magnética externamente. Acelerômetro 1.

Observa-se nas duas situações que ao ligar o reator surgem picos na frequência de 60 Hz e em suas componentes harmônicas. Tais picos não aparecem quando o reator encontra-se desligado, indicando que existe influência da indução magnética sobre os equipamentos.

Nota-se ainda que ao posicionar os acelerômetros no interior do reator, os picos apresentam amplitudes maiores. Tal comportamento se deve ao fato de que a indução magnética na região interna do reator é muito maior que àquela na região externa.

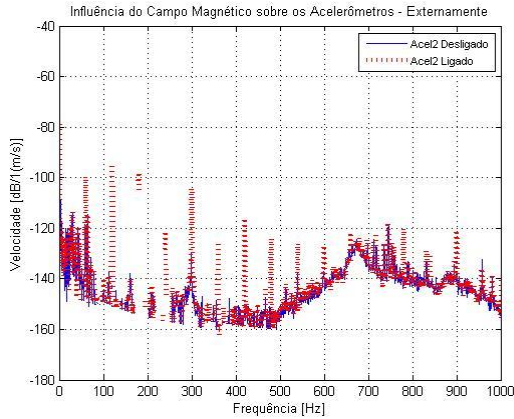


Figura 47 – Influência da indução magnética externamente. Acelerômetro 2.

Como se tem um interesse particular na frequência de 120 Hz, nas Figuras 48 e 49, se faz uma comparação do nível de vibração medido nesta frequência para cada um dos acelerômetros em cada uma destas situações.

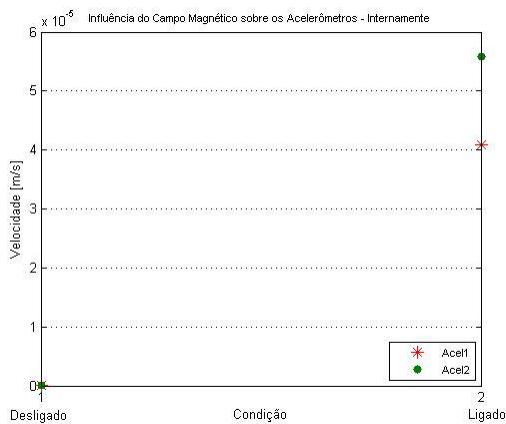


Figura 48 – Influência da indução magnética sobre os acelerômetros em 120 Hz, quando os mesmos encontram-se no interior do reator.

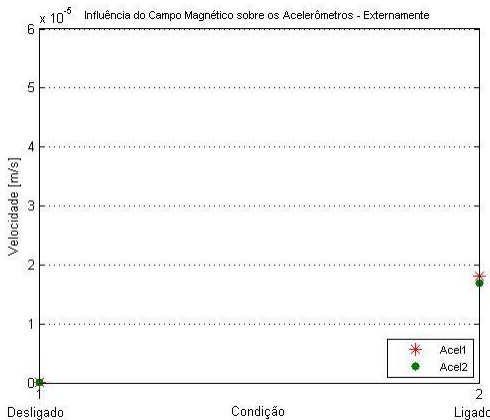


Figura 49 – Influência da indução magnética sobre os acelerômetros em 120 Hz, quando os mesmos encontram-se na região externa do reator.

Quando o reator está desligado observa-se que os níveis são idênticos, porém, com o reator em funcionamento os níveis medidos pelos acelerômetros apresentam diferenças, que são mais acentuadas quando os acelerômetros estão na região interna do reator.

Embora estas análises indiquem que há influência da indução magnética sobre os transdutores, observa-se que o nível máximo de vibração na frequência de 120 Hz, $5,5E-5$ m/s, observado na Figura 48, é cerca de 9 vezes menor que o nível médio de vibração do protótipo 3 indicado na Tabela 15, apresentada na página 67. Portanto, pode-se afirmar que esta influência não afeta significativamente os resultados das medições.

No entanto, buscando realizar um novo teste, que permita afirmar com clareza, que a influência da indução magnética sobre os acelerômetros é desprezível, foi realizada a medição do nível de vibração de um reator idêntico ao protótipo 3 utilizando um vibrômetro LASER, conforme se observa na Figura 50. A grande vantagem deste equipamento consiste em possibilitar a medição do nível de vibração de uma superfície sem que haja contato, porém, o seu correto posicionamento e o ajuste do foco tornam o procedimento de medição mais demorado e complexo.

Para realizar este ensaio, a superfície de medição foi reduzida a 80 pontos, uma combinação de 10 pontos na direção axial e 8 pontos na direção circunferencial. Um acelerômetro permaneceu fixo sobre o ponto 13 e um vibrômetro LASER da Ometron®, modelo VH-1000D,

foi usado para medir o nível de vibração em cada um dos 80 pontos marcados sobre a superfície externa do reator, mantendo sempre uma distância de 1,48 m em relação à sua superfície externa.

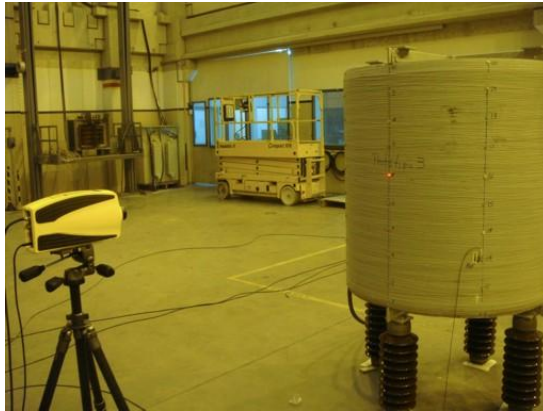


Figura 50 – Detalhe do posicionamento do vibrômetro LASER utilizado.

Desejando comparar os níveis de vibração medidos com o acelerômetro e com o LASER, nos pontos 1, 5, 10, 11, 15 e 20 foi realizada a medição do nível de vibração utilizando estes dois equipamentos ao mesmo tempo, como pode se observar na Figura 51.



Figura 51 – Detalhe da medição de vibração no ponto 11 usando o vibrômetro LASER e o acelerômetro.

A comparação entre os níveis de vibração medidos por estes dois equipamentos, no ponto 10 e no ponto 15, pode ser conferida nas Figuras 52 e 53.

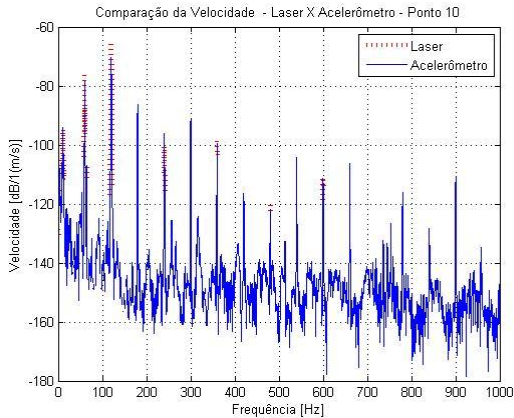


Figura 52 – Níveis de vibração medidos no ponto 10. LASER e acelerômetro.

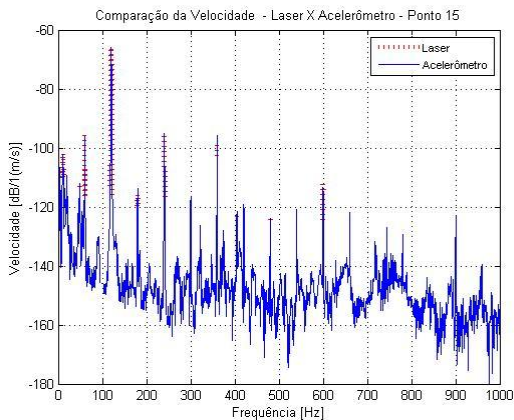


Figura 53 – Níveis de vibração medidos no ponto 15. LASER e acelerômetro.

Observe que tanto os sinais adquiridos com o LASER quanto aqueles obtidos com o acelerômetro apresentam nas frequências de 60 Hz e em algumas componentes harmônicas, picos com amplitudes muito próximas. Como se observa o mesmo comportamento para estas duas formas de medição, com e sem contato, conclui-se que as respostas dos

acelerômetros não foram distorcidas em função da forte indução magnética gerada pelos reatores.

Nas Figuras 54 e 55 se faz a comparação do nível de vibração em 120 Hz, em m/s e em dB, para cada um daqueles pontos em que se mediu a vibração da superfície utilizando o vibrômetro LASER e o acelerômetro simultaneamente.

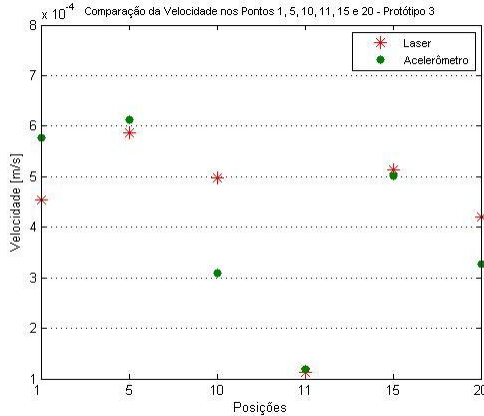


Figura 54 – Vibração (m/s) em 120 Hz medida com LASER e acelerômetro simultaneamente. Pontos 1, 5, 10, 11, 15 e 20.

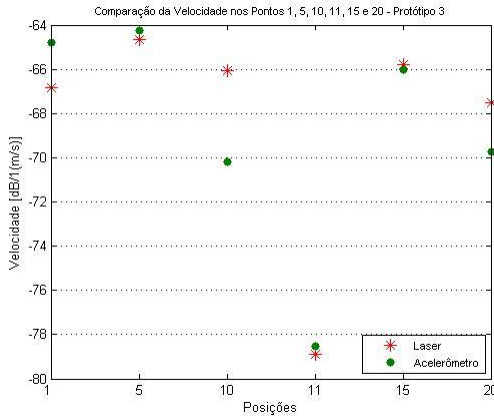


Figura 55 – Vibração (dB) em 120 Hz medida com LASER e acelerômetro simultaneamente. Pontos 1, 5, 10, 11, 15 e 20.

Observe que nos pontos 5, 11 e 15 os níveis de vibração estão muito próximos, porém nos pontos 1, 10 e 20 as diferenças são consideráveis, um fator de aproximadamente 1,5 vezes. Como pode se verificar na Figura 51, o acelerômetro não era posicionado exatamente sobre o ponto onde estava sendo efetuada a medição com o LASER, logo, a causa desta variação pode estar na diferente rigidez que estas áreas apresentavam.

Na Figura 56 podem ser observados os níveis de vibração medidos pelo acelerômetro posicionado sobre o ponto 13 e na Figura 57 aqueles medidos com o LASER em cada um dos 80 pontos definidos sobre a superfície de um reator idêntico ao protótipo 3.

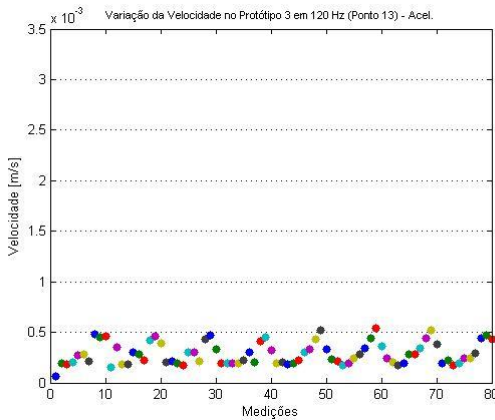


Figura 56 – Velocidade de vibração em 120 Hz medida no ponto 13.

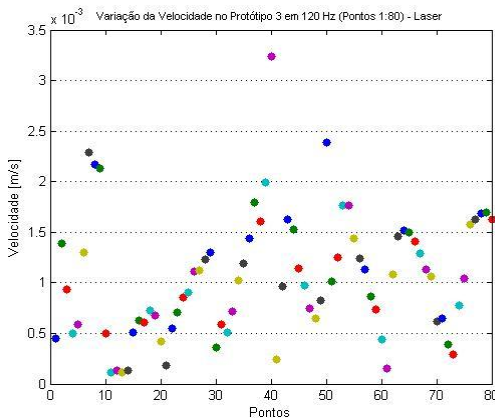


Figura 57 – Velocidade de vibração em 120 Hz na superfície do reator.

4.2.3) Pós-Processamento e resultados

Conforme será explicado no Capítulo 6, quando o reator é alimentado com uma corrente senoidal pura, ou seja, de frequência única, as forças resultantes da indução magnética, criada pelo reator em operação, atuarão numa frequência correspondente ao dobro daquela da corrente. Logo, os níveis de vibração significativos também deverão ser encontrados nesta frequência, ou seja, em 120 Hz, uma vez que a frequência da corrente aplicada nos ensaios era 60 Hz.

Porém, quando se parte para análise dos níveis de vibração ao longo da frequência, como aquele apresentado na Figura 58, observa-se que em alguns casos o nível registrado na frequência fundamental, 60 Hz, é praticamente igual ou superior àquele registrado em 120 Hz. Além disso, observa-se que algumas componentes harmônicas, como 240 Hz e 360 Hz apresentam uma amplitude significativa.

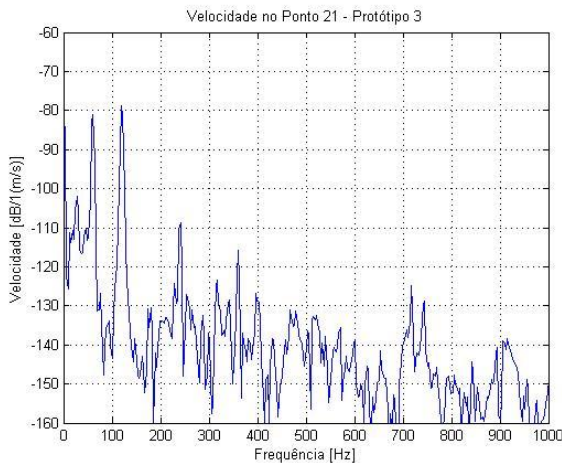


Figura 58 – Espectro de velocidade medido no ponto 21 (Protótipo 3).

Como o laboratório onde foi realizado os ensaios compartilha a mesma rede elétrica da fábrica, alguns equipamentos utilizados no processo produtivo, tais como, fornos, motores e exaustores poderiam estar introduzindo estas componentes harmônicas no circuito elétrico. Assim, para verificar se o nível de vibração medido em um determinado ponto da superfície do reator não é resultado da influência de um equipamento ligado naquele instante, na Figura 59, apresenta-se o espectro de velocidade medido no ponto 33 exatamente no mesmo

instante em que foi medido o nível de vibração no ponto 21, apresentado na Figura 58.

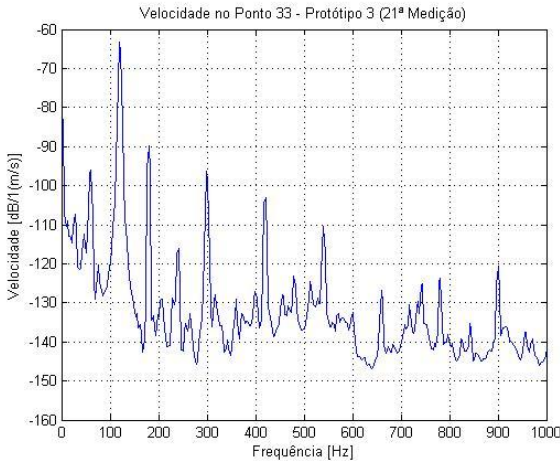


Figura 59 – Espectro de velocidade medido no ponto 33 no mesmo instante da medição no ponto 21 (Protótipo 3).

Note que não se observa o mesmo comportamento nos dois casos, pois na Figura 59, a amplitude da velocidade em 120 Hz é superior àquela observada em 60 Hz. Então, conclui-se que a variação do nível de vibração é devido à posição em que está se efetuando a medição e não devido a uma possível variação de parâmetros na rede elétrica.

Ao verificar o nível de vibração ao longo da superfície dos reatores, constatou-se que ele não é constante. Para determinar o valor médio da velocidade de vibração da superfície dos reatores calculou-se a média aritmética simples da velocidade registrada nos 180 pontos medidos. De forma similar, o nível médio de vibração registrado no ponto 33, ponto de referência, foi calculado a partir da média das 180 medições feitas neste ponto.

A velocidade média de vibração em função da frequência, no ponto 33, para cada um dos protótipos, pode ser observada nas Figuras 60, 61 e 62.

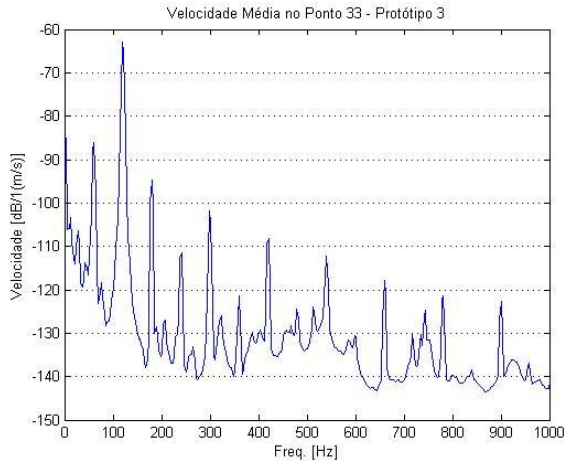


Figura 60 – Velocidade média de vibração no ponto 33 do protótipo 3.

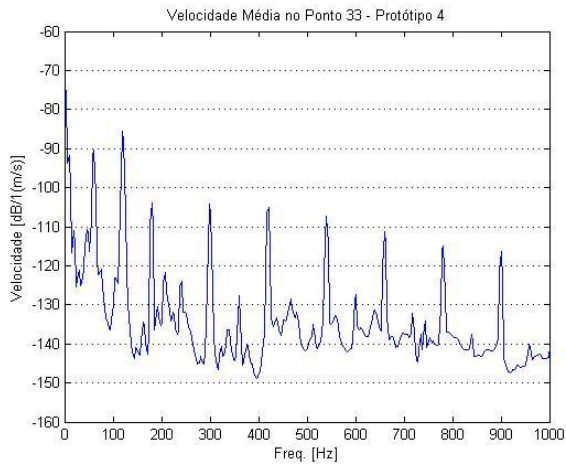


Figura 61 – Velocidade média de vibração no ponto 33 do protótipo 4.

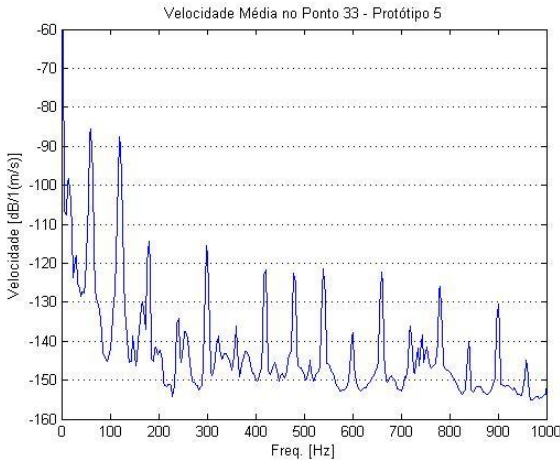


Figura 62 – Velocidade média de vibração no ponto 33 do protótipo 5.

Já a velocidade de vibração da superfície dos reatores resultante da média da velocidade registrada nos 180 pontos, pode ser observada nas Figuras 63, 64 e 65.

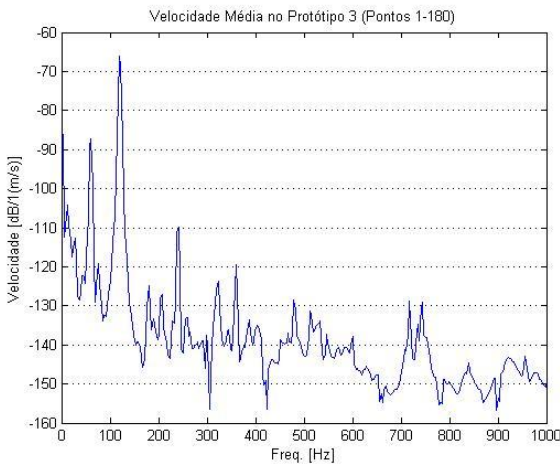


Figura 63 – Velocidade média de vibração do protótipo 3.

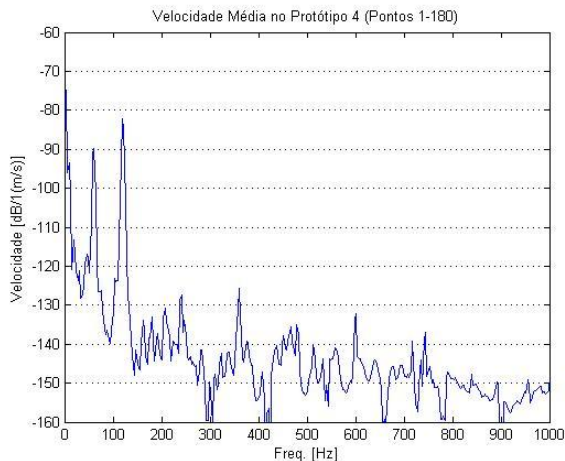


Figura 64 – Velocidade média de vibração do protótipo 4.

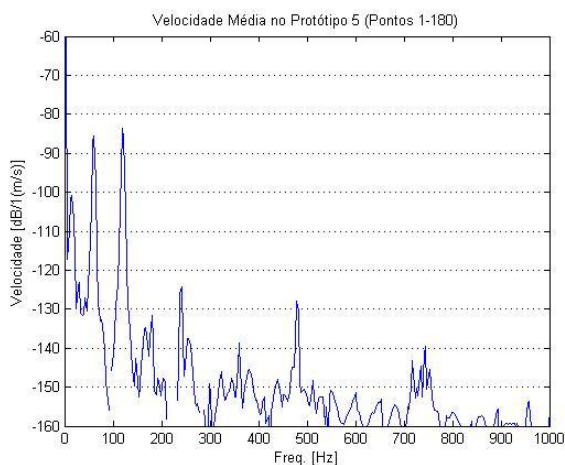


Figura 65 – Velocidade média de vibração do protótipo 5.

Ao observar os espectros de velocidade média dos três protótipos, conclui-se que as maiores amplitudes se encontram nas frequências de 60 Hz e 120 Hz. Além disso, verifica-se que para o protótipo com maior número de bobinas, mais próximos estarão os níveis de vibração registrados nestas duas frequências.

Mesmo que nos gráficos anteriores tenha se observado picos em determinadas frequências harmônicas, estes têm pouca influência no nível global de vibração e no nível de ruído global dos reatores, por isso tem-se interesse em analisar especificamente o comportamento dinâmico do reator em 120 Hz. A seguir, na Figura 66 faz-se a comparação dos níveis de vibração medidos em 120 Hz pelo acelerômetro fixo, posicionado sobre o ponto 33, e na Figura 67 se faz a comparação dos níveis de vibração medidos em cada um dos 180 pontos distribuídos sobre a superfície externa do protótipo 3.

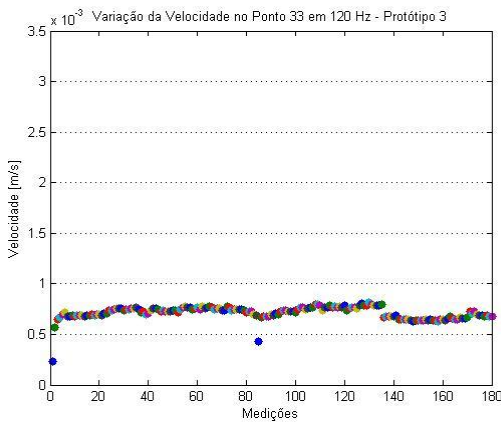


Figura 66 – Velocidade de vibração em 120 Hz no ponto 33 do protótipo 3.

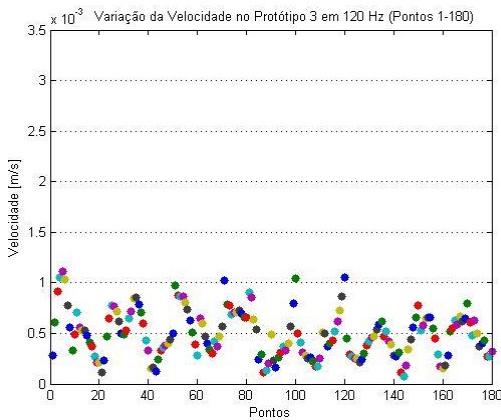


Figura 67 – Velocidade de vibração em 120 Hz na superfície do protótipo 3.

Similarmente ao que foi feito anteriormente para o protótipo 3, nas Figuras 68 e 69, faz-se a comparação dos níveis de vibração medidos em 120 Hz pelos dois acelerômetros usados para medir o nível de vibração sobre a superfície externa do protótipo 4.

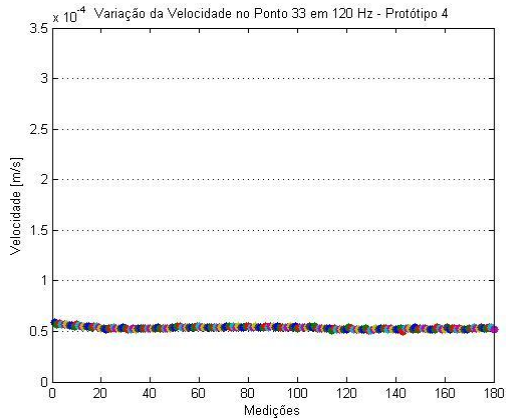


Figura 68 – Velocidade de vibração em 120 Hz no ponto 33 do protótipo 4.

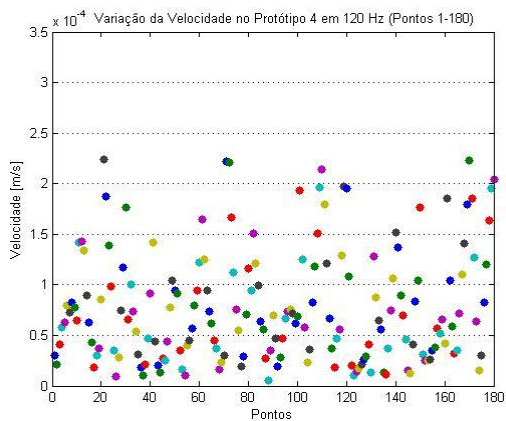


Figura 69 – Velocidade de vibração em 120 Hz na superfície do protótipo 4.

Finalmente, nas Figuras 70 e 71, faz-se a comparação dos níveis de vibração medidos em 120 Hz pelos dois acelerômetros usados para medir o nível de vibração sobre a superfície externa do protótipo 5.

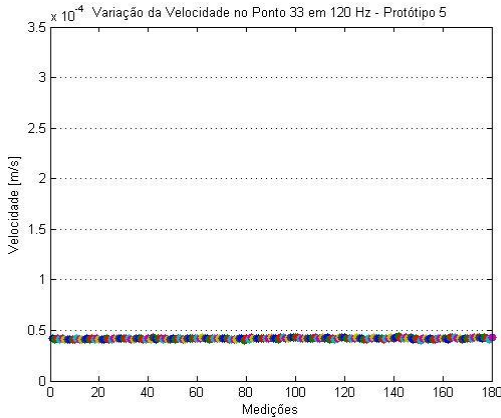


Figura 70 – Velocidade de vibração em 120 Hz no ponto 33 do protótipo 5.

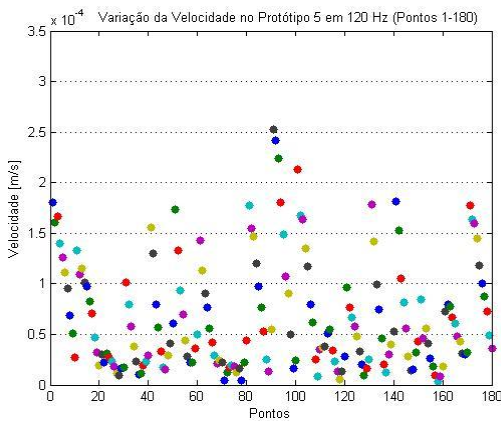


Figura 71 – Velocidade de vibração em 120 Hz na superfície do protótipo 5.

Ao observar os níveis de vibração medidos por cada um dos acelerômetros, fica claro que a variação do nível de vibração do ponto fixo é pequena comparada àquela registrada pelo segundo acelerômetro, que foi posicionado ao longo de toda a superfície do reator. Isto indica que durante os ensaios, os parâmetros elétricos não sofreram alterações significativas, garantindo um regime constante de funcionamento do reator. Verifica-se também que o nível de vibração ao longo da superfície dos reatores não é constante, pois, conforme a posição que o acelerômetro é fixado, maior ou menor será o nível de vibração,

dependendo da rigidez daquela região onde está sendo efetuada a medição.

Na Tabela 15 apresentam-se as velocidades médias de vibração do ponto fixo e as velocidades médias calculadas a partir dos níveis medidos em cada um dos 180 pontos distribuídos sobre as superfícies dos reatores.

Tabela 15 – Níveis médios de vibração dos protótipos em 120 Hz.

Protótipo	Acelerômetro Fixo	Acelerômetro Móvel
Protótipo 3	7,14E-4 m/s	4,95E-4 m/s
Protótipo 4	5,34E-5 m/s	7,77E-5 m/s
Protótipo 5	4,19E-5 m/s	6,67E-5 m/s

Observa-se que o nível de vibração medido no protótipo 3, que apresenta apenas uma bobina, é cerca de dez vezes maior que aqueles medidos nos protótipos 4 e 5, que apresentam respectivamente, duas e seis bobinas. Salienta-se ainda que nas medições com o LASER, o nível médio de vibração do reator idêntico ao protótipo 3 foi de 10,51E-4 m/s, praticamente o dobro daquele apresentado na Tabela 15, resultante do ensaio feito com os acelerômetros. Tal diferença não é resultado do equipamento usado na medição; ela surge por não se tratar do mesmo reator.

A diferença de rigidez ao longo da superfície do reator pode ser resultado das suas características construtivas. Por isso, a seguir, analisa-se detalhadamente a distribuição da velocidade na superfície do reator para que seja avaliado se existem regiões específicas, como aquelas apresentadas na Figura 72, que apresentam o mesmo comportamento.

Nas Figuras 73, 74 e 75 são observados os níveis de velocidade medidos em três alturas distintas, na extremidade inferior, à meia altura e na extremidade superior dos protótipos 3, 4 e 5. Percebe-se que existe uma variação significativa da amplitude de vibração medida nos pontos que estão sobre uma mesma altura, ficando impossível determinar se existe uma relação entre a altura em que o ponto se encontra e seu nível de vibração.

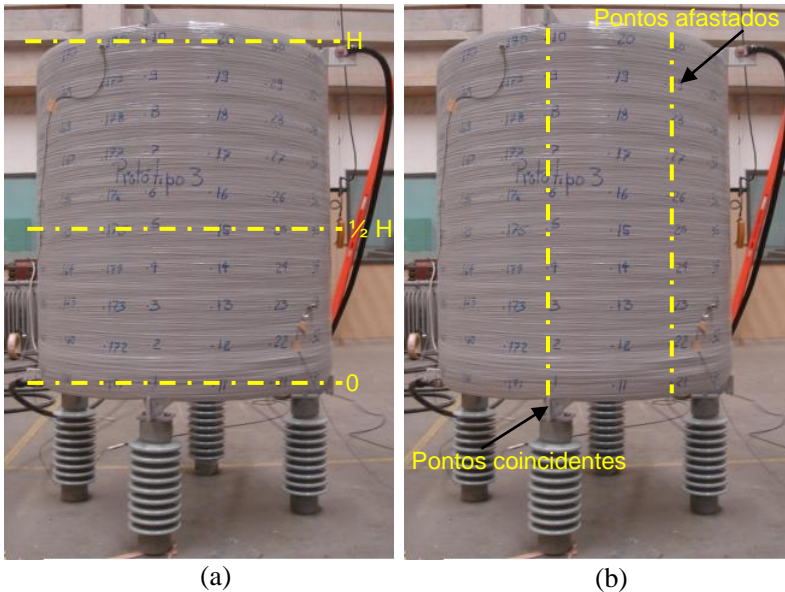


Figura 72 – Níveis de vibração. (a) Extremidades e 1/2 altura (b) Pontos afastados e coincidentes com as cruzetas.

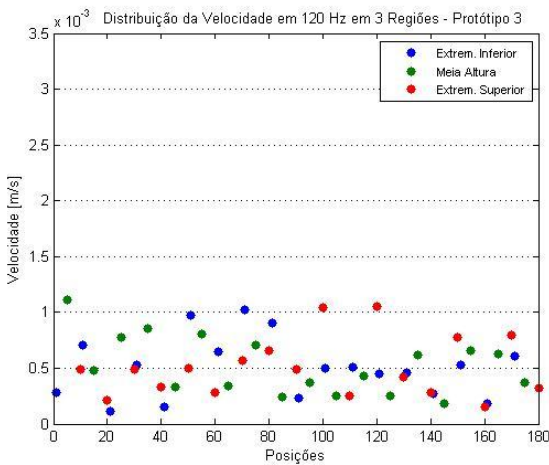


Figura 73 – Velocidade (m/s) em 120 Hz nas extremidades inferior, superior e meia altura do protótipo 3.

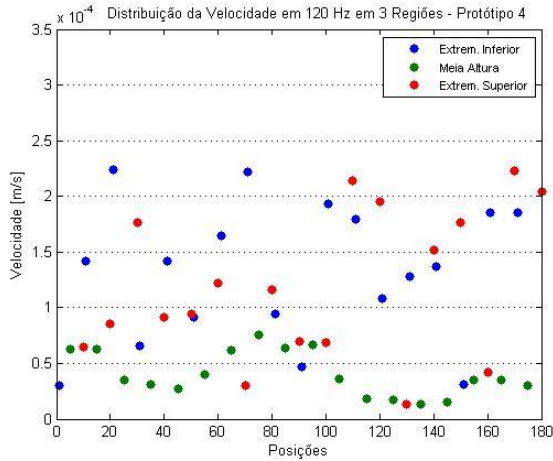


Figura 74 – Velocidade (m/s) em 120 Hz nas extremidades inferior, superior e meia altura do protótipo 4.

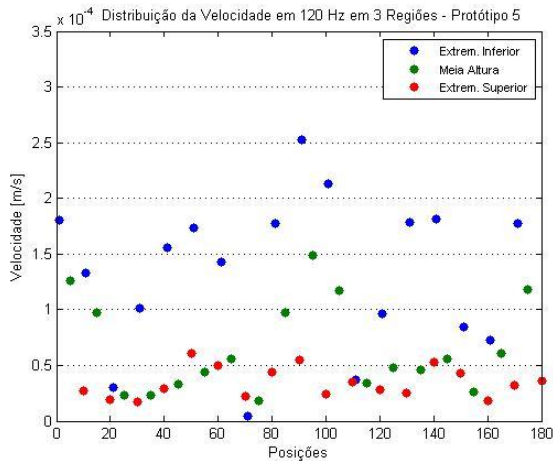


Figura 75 – Velocidade (m/s) em 120 Hz nas extremidades inferior, superior e meia altura do protótipo 5.

Os níveis de velocidade medidos para cada um dos protótipos nestas três alturas distintas, expressos em decibéis, são apresentados nas Figuras 76, 77 e 78.

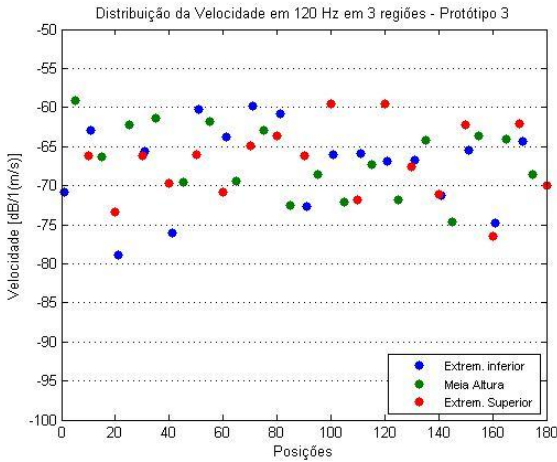


Figura 76 – Velocidade (dB) em 120 Hz nas extremidades inferior, superior e meia altura do protótipo 3.

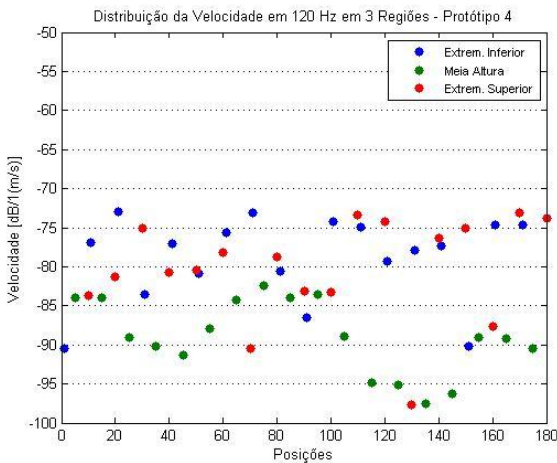


Figura 77 – Velocidade (dB) em 120 Hz nas extremidades inferior, superior e meia altura do protótipo 4.

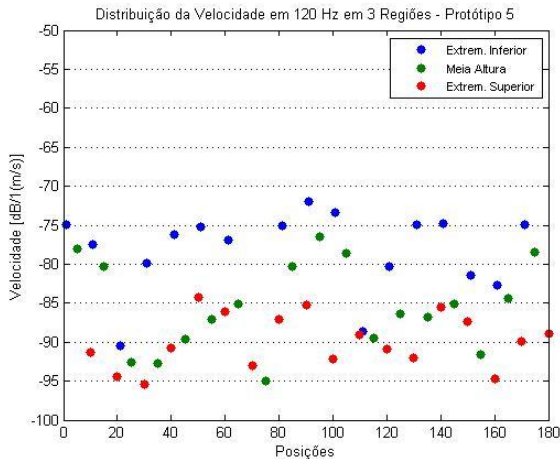


Figura 78 – Velocidade (dB) em 120 Hz nas extremidades inferior, superior e meia altura do protótipo 5.

Os níveis de vibração dos protótipos 3, 4 e 5 para aqueles pontos coincidentes com os braços das cruzetas podem ser observados nas Figuras 79, 80 e 81.

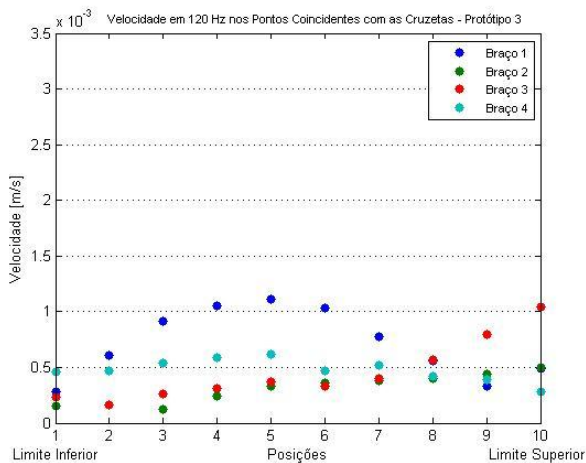


Figura 79 – Velocidade nos pontos coincidentes com os braços da cruzeta (Protótipo 3).

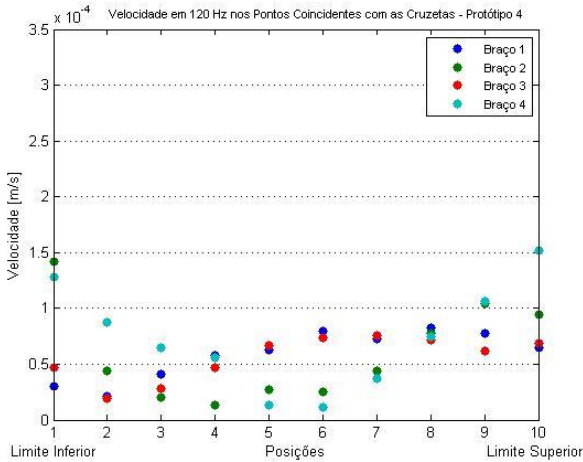


Figura 80 – Velocidade nos pontos coincidentes com os braços da cruzeta (Protótipo 4).

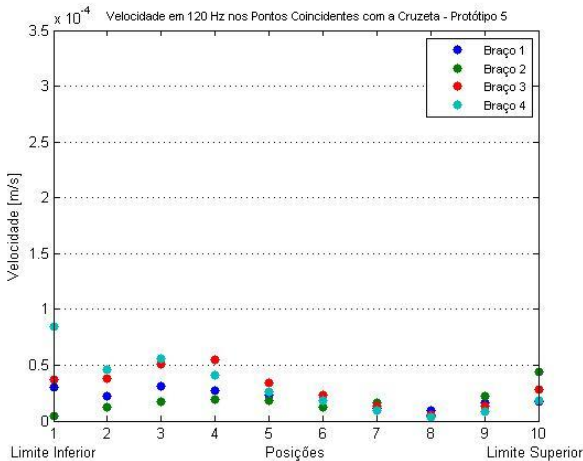


Figura 81 – Velocidade nos pontos coincidentes com os braços da cruzeta (Protótipo 5).

Os níveis de vibração dos protótipos 3, 4 e 5 para aqueles pontos que se encontram mais afastados dos braços das cruzetas, podem ser observados nas Figuras 82, 83 e 84.

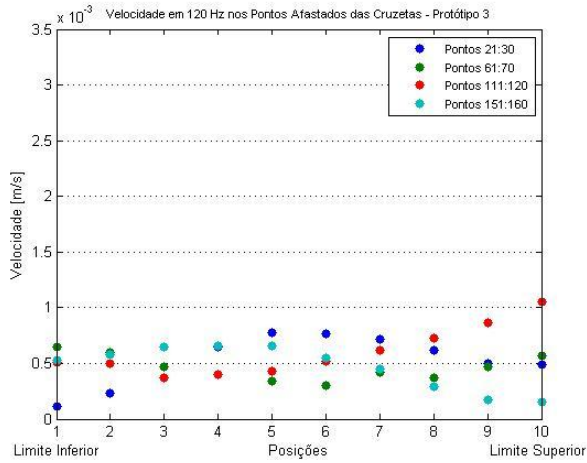


Figura 82 – Velocidade nos pontos mais distantes dos braços da cruzeta (Protótipo 3).

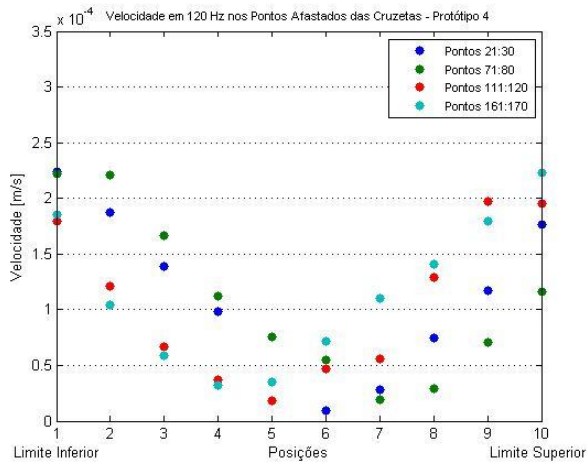


Figura 83 – Velocidade nos pontos mais distantes dos braços da cruzeta (Protótipo 4).

Embora a amplitude de vibração dos pontos coincidentes com os braços das cruzetas seja menor que aquela percebida nos pontos mais afastados, pode-se afirmar que a variação de rigidez introduzida pelo processo de fabricação dos reatores, tem uma maior relação com este

comportamento não uniforme de vibração dos reatores que a própria presença das cruzetas ou um parâmetro construtivo qualquer.

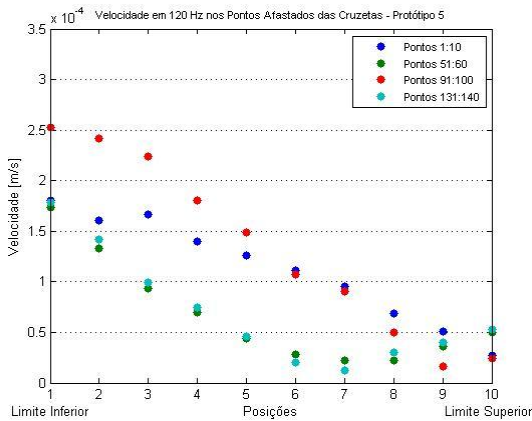


Figura 84 – Velocidade nos pontos mais distantes dos braços da cruzeta (Protótipo 5).

Nas Figuras 85, 86 e 87 apresentam-se respectivamente, os mapas de cores dos protótipos 3, 4 e 5 para ilustrar os diferentes níveis de vibração medidos em cada um dos 180 pontos localizados na superfície externa dos reatores.

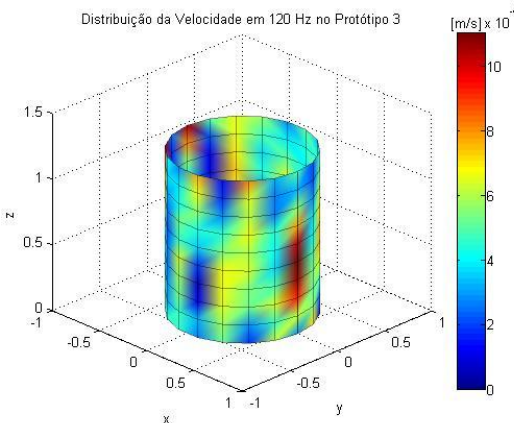


Figura 85 – Mapa de cores ilustrando a distribuição da velocidade na superfície do protótipo 3, em 120 Hz.

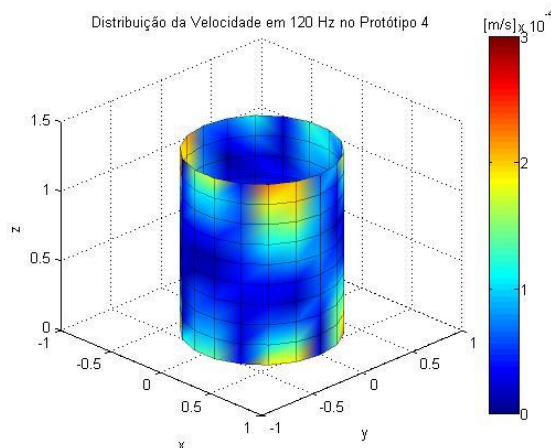


Figura 86 – Mapa de cores ilustrando a distribuição da velocidade na superfície do protótipo 4, em 120 Hz.

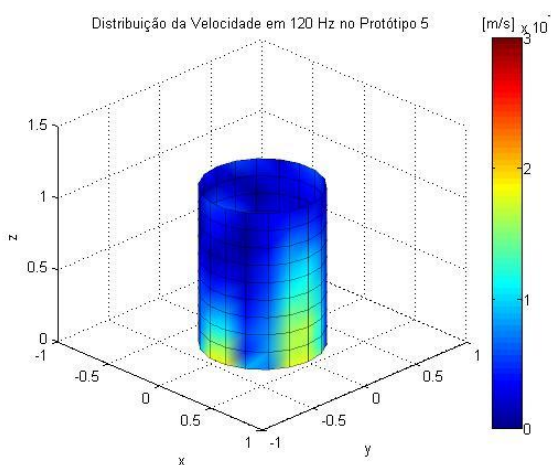


Figura 87 – Mapa de cores ilustrando a distribuição da velocidade na superfície do protótipo 5, em 120 Hz.

A análise das Figuras 85, 86 e 87 permite concluir que as não homogeneidades decorrentes do processo de fabricação resultam em uma variação aleatória do nível de vibração ao longo da superfície dos reatores. Além disso, observa-se que os níveis de vibração dos protótipos 4 e 5 são mais uniformes que aqueles do protótipo 3, uma vez

que neste último, grande parte da superfície apresenta cores distintas, indicando que os níveis não têm a mesma ordem de grandeza.

Para concluir a análise do comportamento dinâmico dos reatores, nas Figuras 88, 89 e 90, são apresentadas as formas de vibração assumidas pela superfície externa dos protótipos durante seu funcionamento em 120 Hz. Os pontos em verde, observados nestas Figuras, representam a região de contato entre as cruzetas e o reator, e as linhas em cinza, representam a estrutura não deformada.

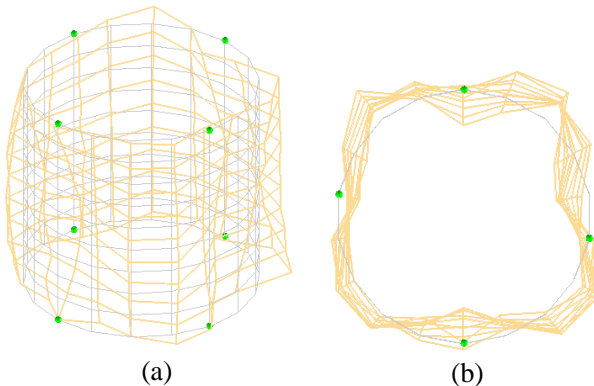


Figura 88 – Superfície do protótipo 3 deformada durante o funcionamento, em 120 Hz. (a) Vista isométrica (b) Vista superior.

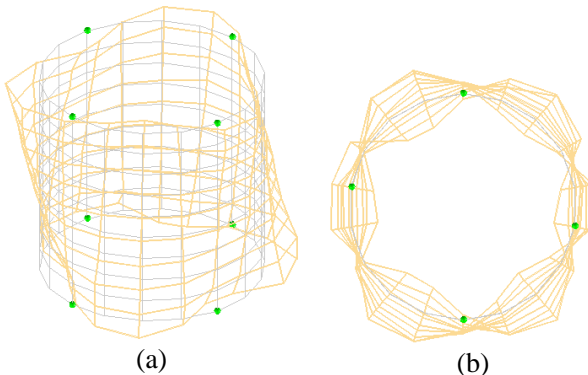


Figura 89 – Superfície do protótipo 4 deformada durante o funcionamento, em 120 Hz. (a) Vista isométrica (b) Vista superior.

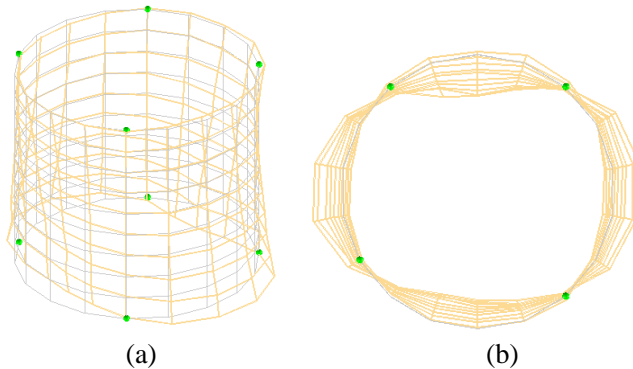


Figura 90 – Superfície do protótipo 5 deformada durante o funcionamento, em 120 Hz. (a) Vista isométrica (b) Vista superior.

Observa-se das Figuras 88, 89 e 90, que a resposta dos reatores quando em operação, isto é, quando excitados pelas forças resultantes da indução magnética, concentrada em 120 Hz, difere em relação à distribuição uniforme destas forças e também em relação aos modos próprios obtidos da análise modal, em frequências próximas de 120 Hz. A não homogeneidade construtiva dos reatores gera respostas não uniformes das paredes. Além disso, a resposta forçada resulta da combinação dos modos próprios com frequências próximas da de excitação (120 Hz). É também possível que as cruzetas exerçam alguma influência na resposta das paredes apesar de não apresentarem influência predominante nos resultados da análise modal. Salienta-se ainda que o fato dos protótipos apresentarem características geométricas e construtivas distintas faz com que a superfície de cada um deles se deforme de uma maneira particular.

CAPÍTULO 5 RADIÇÃO SONORA DOS REATORES

Neste capítulo, além de apresentar a metodologia e o procedimento experimental empregado para determinar o nível de potência sonora dos reatores, se faz um estudo detalhado da radiação sonora destes equipamentos.

5.1) Conceito de potência sonora

A potência sonora W corresponde à energia sonora total emitida por uma fonte por unidade de tempo. Assim, a potência sonora depende apenas da própria fonte, sendo independente do meio onde a fonte se encontra ou da distância em relação a esta fonte.

Procurando expressar esta grandeza numa escala que tenha uma melhor correlação com a audição humana define-se o nível de potência sonora L_w , cuja relação com a potência sonora é dada através da seguinte equação:

$$L_w = 10 \log \left(\frac{W}{W_0} \right) \quad (dB) \quad (5.1)$$

onde W corresponde a potência sonora da fonte em Watts e W_0 a potência de referência, $1 \text{ E-}12 \text{ W}$. Usando o conceito de intensidade sonora, a equação que define o nível de potência sonora pode ser reescrita da seguinte forma:

$$L_w = \overline{L_p} + 10 \log \left(\frac{S}{S_0} \right) \quad (dB) \quad (5.2)$$

onde $\overline{L_p}$ corresponde ao valor médio do nível de pressão sonora em dB, S_0 a área de referência, 1 m^2 , e S a área da superfície de medição em m^2 . No caso de reatores, a norma técnica IEC 60076-10 [19] define que ao posicionar os microfones a 1,0 m de sua superfície, a área da superfície de medição deve ser calculada a partir da Equação (5.3).

$$S = (h + 1)l \quad (5.3)$$

onde h corresponde à altura do reator sem as cruzetas e l o perímetro da superfície de medição.

Já o nível de pressão sonora L_p , uma grandeza que varia de acordo com o ambiente em que a fonte se encontra, é definido matematicamente como:

$$L_p = 10 \log \left(\frac{p^2}{p_0^2} \right) \quad (dB) \quad (5.4)$$

onde p corresponde a pressão sonora em Pa e p_0 corresponde ao limiar da audição em 1 kHz, 20E-06 Pa.

5.2) Determinação do nível de potência sonora dos reatores

A norma técnica IEEE C57.16-1996 [20] é um documento indispensável para as empresas que produzem reatores elétricos com núcleo de ar, pois nela são estabelecidas exigências que devem ser levadas em conta no projeto deste tipo de reatores. Nesta norma encontram-se também os testes aos quais os reatores devem ser submetidos para verificar se atendem ou não a todas as exigências estabelecidas. Porém, nesta pesquisa tem-se interesse particular pelo Item 11.8 desta norma, que relata os procedimentos envolvidos no teste de medição do nível de ruído dos reatores.

A norma técnica IEC 60076-10 [19] define métodos para medição do nível de pressão sonora e do nível de intensidade sonora a partir dos quais os níveis de potência sonora de transformadores e reatores podem ser determinados. Outras normas técnicas como a IEEE C57.12.90-1999 [21] e a IEEE C57.12.91-2001 [22] também apresentam informações relacionadas a medição do nível de pressão sonora dos reatores.

5.2.1) Procedimento de medição

Segundo as normas técnicas apresentadas acima, para reatores que possuem altura igual ou inferior a 2,5 m, as medições do nível de pressão sonora devem ser feitas com os microfones posicionados à meia altura do equipamento. Já para equipamentos com altura superior, os microfones devem ser posicionados à 1/3 e 2/3 da altura.

Embora todos os reatores avaliados nesta pesquisa tenham altura inferior a 2,5m, optou-se por medir o nível de ruído em quatro alturas

diferentes, para que pudesse ser avaliada a distribuição do nível de pressão sonora ao longo da altura dos mesmos. Observe na Figura 91 a representação destes quatro planos criados para realizar os ensaios.

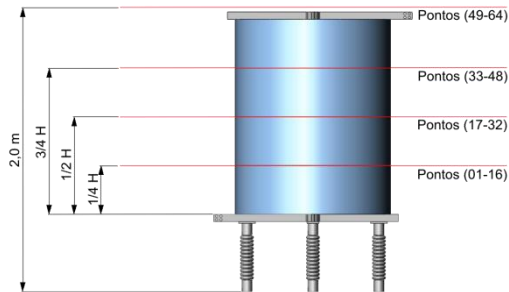


Figura 91 - Identificação das 4 alturas onde foram medidos os níveis de ruído.

Para cada uma dessas alturas, foi estabelecido um contorno prescrito, uma linha imaginária, de centro geométrico coincidente com o do equipamento, sobre a qual foram definidas 16 posições de medição, assegurando que toda a superfície do equipamento fosse envolvida. As normas sugerem que a posição de número 1, coincida com o terminal inferior do reator, e que a ordem de numeração siga o sentido horário.

O afastamento do contorno prescrito em relação à superfície externa do reator pode ser de 0,3 m, 1,0 m, 2,0 m ou 3,0 m. Nestes testes usou-se o afastamento de 1,0 m. A Figura 92 apresenta uma representação da vista superior do reator, identificando os pontos onde foram realizadas as medições e o afastamento do contorno prescrito em relação à superfície externa do reator.

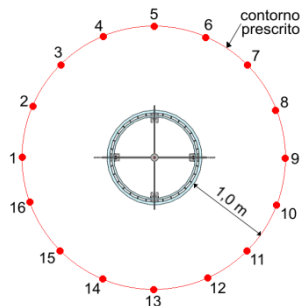


Figura 92 – Identificação dos pontos onde foram posicionados os microfones.

Definidos todos estes detalhes e usando os equipamentos apresentados na Tabela 16, os ensaios para determinação do ruído dos reatores puderam ser realizados.

Tabela 16 – Equipamentos utilizados nos ensaios de ruído.

Qtd	Equipamento
1	Analizador de sinais LMS® Pimento 12 canais de entrada
1	Computador portátil Toshiba® Satellite A100
1	Analizador de sinais B&K® Pulse 3560 4 canais de entrada
1	Computador portátil HP® Omnibook 6000
4	Microfone ½" campo livre com pré-amplificador B&K®4189-A-021
1	Calibrador de nível sonoro B&K® 4231

Os ensaios foram realizados em dois ambientes, na câmara semi-aneecóica do laboratório de vibrações e acústica da UFSC, um ambiente controlado, e no laboratório da Empresa AREVA. Neste último, as medições foram conduzidas durante a madrugada para evitar a interferência de ruído proveniente de fontes externas, uma vez que não se tratava de um ambiente controlado.

A realização dos ensaios de ruído nestes dois ambientes busca verificar se os resultados de ruído determinados no próprio laboratório da empresa são adequados, uma vez que a realização dos ensaios na câmara semi-aneecóica era limitada devido à falta de equipamentos necessários para energizar os reatores e também devido à falta de dispositivos de segurança e de transporte apropriados.

Nas medições efetuadas em ambientes internos não controlados é importante que o equipamento esteja localizado numa posição em que os transdutores tenham um afastamento mínimo de 3 metros em relação a superfícies que possam refletir as ondas sonoras, como paredes, muros e teto. Seguindo esta recomendação, na Figura 93 pode se observar uma representação do posicionamento dos reatores nas medições realizadas no laboratório da empresa.

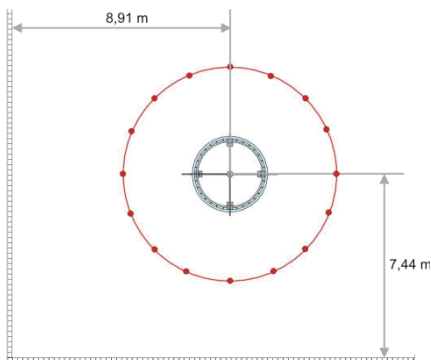


Figura 93 – Afastamento do reator em relação às paredes mais próximas.

Nas Figuras 94 e 95 observam-se dois protótipos prontos para serem submetidos ao ensaio de ruído, o primeiro na câmara semi-aneecóica e o segundo no laboratório da empresa.



Figura 94 – Medição de ruído na câmara semi-aneecóica.

Outro ponto importante nas medições do nível de ruído dos reatores é a verificação da influência da indução eletromagnética sobre os transdutores utilizados. Para tal verificação, os transdutores foram calibrados antes e depois das medições. Caso a diferença dos níveis registrados nestas duas calibrações fosse maior que 1,0 dB o ensaio deveria ser repetido, pois possivelmente os microfones teriam sido afetados pela indução eletromagnética gerada pelos reatores. Nestes ensaios a diferença entre as duas calibrações foi em torno de 0,15 dB.



Figura 95 – Medição de ruído no laboratório da AREVA.

5.2.2) Pós-Processamento e resultados

Nas Figuras 96, 97 e 98, apresentam-se os níveis médios de pressão sonora dos protótipos 3, 4 e 5 determinados na câmara semi-aneecóica para cada uma das alturas em que foram efetuadas as medições.

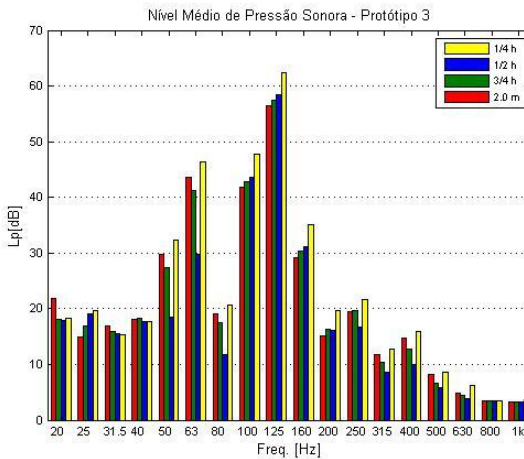


Figura 96 – Níveis médios de pressão sonora do protótipo 3 nas 4 alturas.

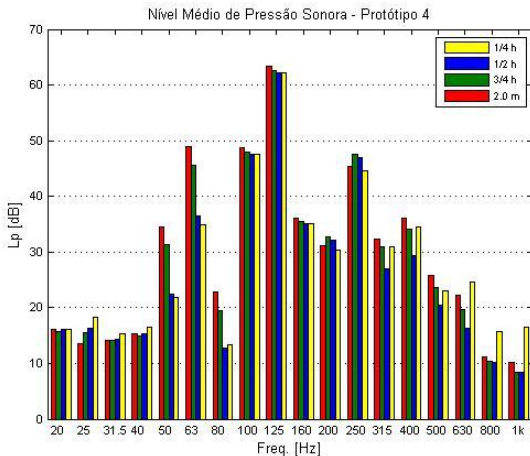


Figura 97 – Níveis médios de pressão sonora do protótipo 4 nas 4 alturas.

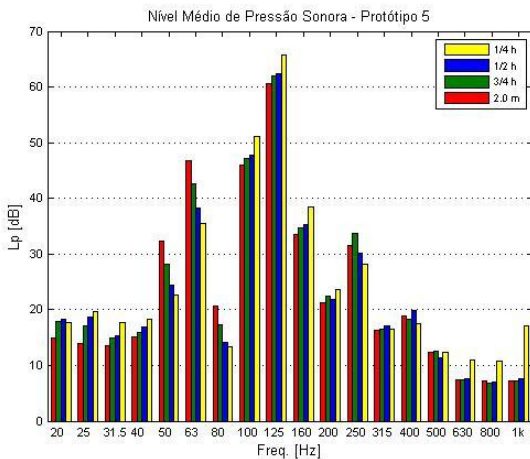


Figura 98 – Níveis médios de pressão sonora do protótipo 5 nas 4 alturas.

Nota-se que para todos os protótipos, os maiores níveis de ruído se encontram na faixa de frequências de 125 Hz.

Nas Figuras 99, 100, e 101, para cada uma das alturas avaliadas se observa o nível de ruído medido em 125 Hz nos 16 pontos que constituíam o contorno prescrito. Também neste caso, os níveis

apresentados correspondem àqueles obtidos a partir dos ensaios conduzidos na câmara semi-anecóica.

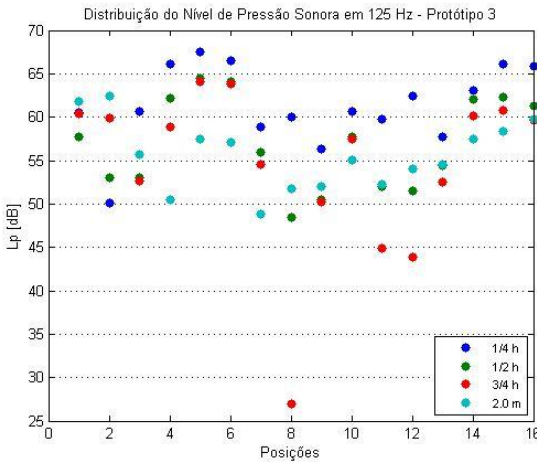


Figura 99 – Níveis de pressão sonora por ponto, em 125 Hz, nas 4 alturas medidas no protótipo 3.

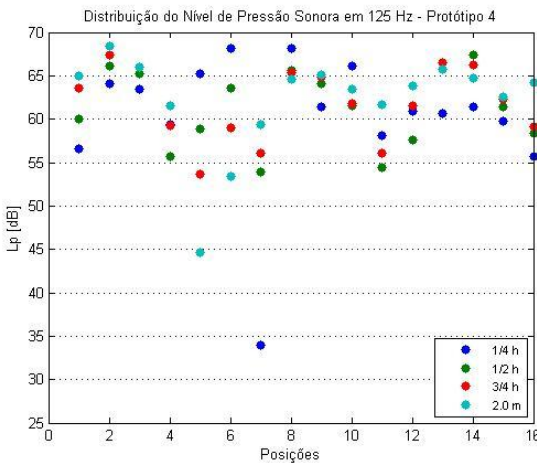


Figura 100 – Níveis de pressão sonora por ponto, em 125 Hz, nas 4 alturas medidas no protótipo 4.

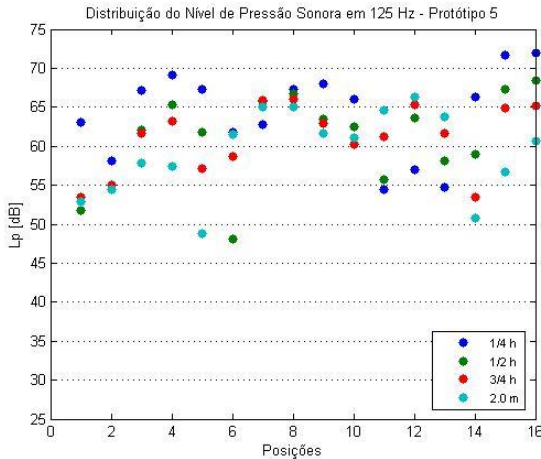


Figura 101 – Níveis de pressão sonora por ponto, em 125 Hz, nas 4 alturas medidas no protótipo 5.

Ao comparar o nível de ruído medido à meia altura do reator com aqueles registrados nas demais alturas, se percebe para a banda de frequências de 125 Hz uma pequena diferença, cerca de 4,0 dB para o protótipo 3 e de 1,2 dB e 3,2 dB para os protótipos 4 e 5. Já ao se analisar o nível de ruído medido em cada um dos 16 pontos que formavam um determinado contorno prescrito, percebem-se diferenças significativas, algumas vezes superiores a 10,0 dB. Tal constatação mostra que assim como o nível de vibração, a radiação sonora dos reatores não possui simetria.

Nas Figuras 102, 103 e 104 apresentam-se os mapas de cores dos protótipos 3, 4 e 5 ilustrando os diferentes níveis de pressão sonora medidos na banda de 125 Hz em cada um dos 64 pontos estabelecidos para realizar os ensaios de ruído.

Observe que as superfícies apresentadas nestas Figuras não correspondem àquelas dos reatores. São uma representação da área formada pela união dos quatro contornos prescritos criados para realizar estas medições. Já os pontos em preto são projeções daquelas posições definidas sobre a superfície do reator para realizar as medições do nível de vibração.

Comparado ao protótipo 3, os protótipos 4 e 5 apresentam uma distribuição mais uniforme, porém, assim como na análise dos níveis de

vibração, a variação é totalmente aleatória e não existem regiões típicas, onde são registrados níveis de ruído mais baixos ou mais altos.

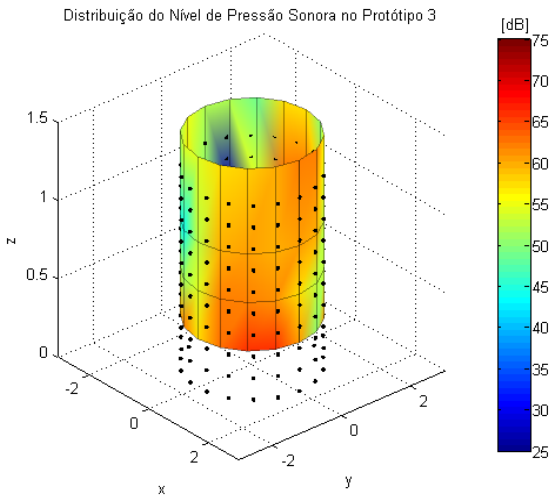


Figura 102 – Distribuição do nível de pressão sonora na banda de 125 Hz para o protótipo 3.

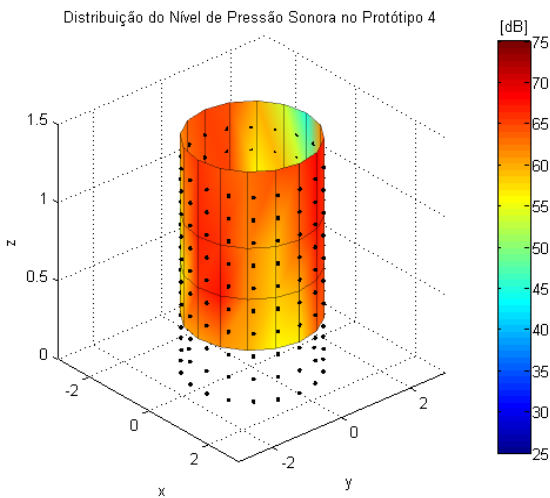


Figura 103 – Distribuição do nível de pressão sonora na banda de 125 Hz para o protótipo 4.

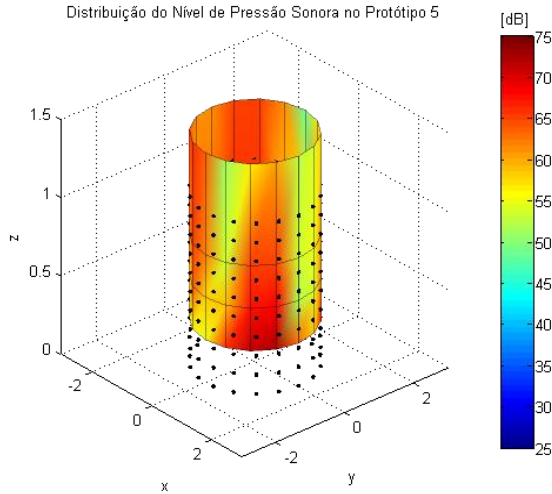


Figura 104 – Distribuição do nível de pressão sonora na banda de 125 Hz para o protótipo 5.

Segundo as normas técnicas IEEE C57.16-1996 [20] e IEC 60076-10 [19] que tratam do ruído gerado por reatores elétricos, o ruído de fundo do ambiente onde a medição é efetuada deve ser constante, por isso, o mesmo deve ser medido imediatamente antes de iniciar o teste com o reator em funcionamento e imediatamente após. O ideal é que a diferença entre o ruído de fundo e o ruído gerado pelo equipamento em funcionamento seja de no mínimo 6,0 dB. Além disso, como se pode observar na Tabela 17, a Norma IEC 60076-10 estabelece critérios para aceitação do teste.

Tabela 17 – Critérios para aceitação das medições de ruído efetuadas.

$\overline{L_{pA0}} - \overline{L_{bgA}} máx$	$\overline{L_{bgA}} inicial - \overline{L_{bgA}} final$	Decisão
$\geq 8 \text{ dB}$	-	Teste aceito
$< 8 \text{ dB}$	$< 3 \text{ dB}$	Teste aceito
$< 8 \text{ dB}$	$> 3 \text{ dB}$	Rejeitar teste
$< 3 \text{ dB}$	-	Rejeitar teste

Estes critérios se baseiam na comparação entre o ruído gerado pelo reator e o ruído de fundo máximo, como mostra a primeira coluna, e na comparação entre o ruído de fundo medido antes e depois de colocar o reator em funcionamento, como mostra a segunda coluna.

Seguindo estes critérios e demais recomendações das normas técnicas, nas Figuras 105, 106 e 107, são apresentados os níveis de pressão sonora dos protótipos 3, 4 e 5 e nas Figuras 108, 109 e 110 os níveis de potência sonora.

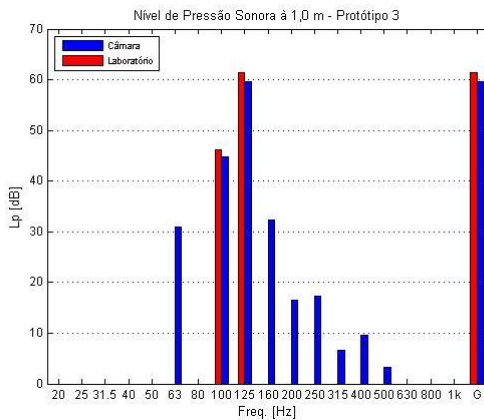


Figura 105 – Níveis de pressão sonora do protótipo 3.

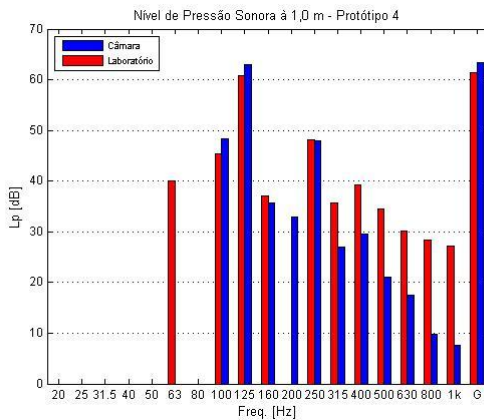


Figura 106 – Níveis de pressão sonora do protótipo 4.

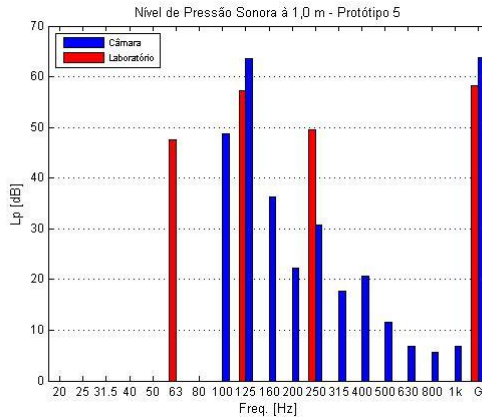


Figura 107 – Níveis de pressão sonora do protótipo 5.

Por se tratar de um ambiente controlado, as medições feitas na câmara semi-aneecóica permitiram que um número maior de faixas de frequências atendessem às exigências especificadas na Tabela 17, no entanto, os níveis de ruído registrados nestas faixas de frequências, praticamente não interferem no nível de ruído global do reator, o qual é praticamente igual àquele medido na banda de 125 Hz e identificado nos gráficos pela letra G.

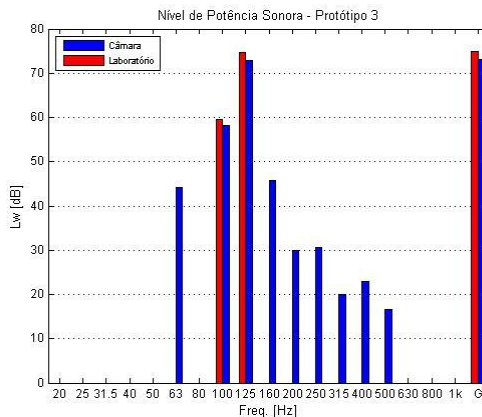


Figura 108 – Níveis de potência sonora do protótipo 3.

Percebe-se ainda que em cada um destes gráficos, são apresentados dois resultados, em azul os resultantes dos testes realizados na câmara semi-aneecóica e em vermelho os obtidos a partir dos ensaios realizados no laboratório da empresa.

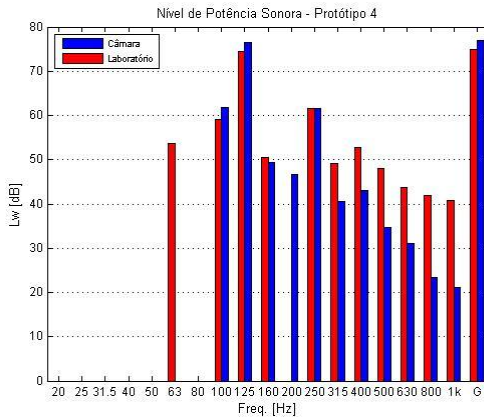


Figura 109 – Níveis de potência sonora do protótipo 4.

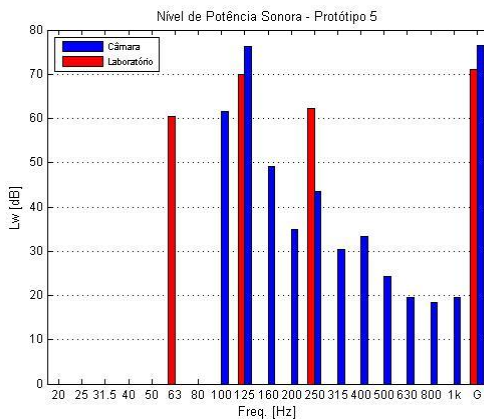


Figura 110 – Níveis de potência sonora do protótipo 5.

Ao analisar os níveis de ruído dos protótipos 4 e 5, na banda de frequências de 125 Hz, constata-se que aqueles níveis medidos na câmara semi-aneecóica são maiores que aqueles obtidos no laboratório. Tal comportamento se deve à presença de ondas estacionárias no

laboratório, as quais são geradas em função das características do ambiente e do ruído tonal radiado pelo reator.

Apesar da presença das ondas estacionárias, o nível de pressão sonora e o nível de potência sonora global dos reatores determinados nestes dois ambientes estão muito próximos, como se verifica mais facilmente através das Tabelas 18 e 19, as quais apresentam uma síntese dos resultados das medições de ruído para cada um dos protótipos analisados.

Tabela 18 – Síntese dos resultados dos níveis de pressão sonora e dos níveis de potência sonora dos protótipos obtidos na câmara.

	Câmara semi-aneecóica			
	L _P à 1,0 m (dB)		L _W (dB)	
	125 Hz	Global	125 Hz	Global
Protótipo 3	59,6	59,7	73,0	73,1
Protótipo 4	63,0	63,3	76,5	76,8
Protótipo 5	63,5	63,7	76,3	76,4

Tabela 19 – Síntese dos resultados dos níveis de pressão sonora e dos níveis de potência sonora dos protótipos obtidos no laboratório.

	Laboratório			
	L _P à 1,0 m (dB)		L _W (dB)	
	125 Hz	Global	125 Hz	Global
Protótipo 3	61,3	61,5	74,7	74,9
Protótipo 4	60,9	61,3	74,4	74,8
Protótipo 5	57,2	58,3	70,0	71,1

Sendo assim, a determinação do nível de potência sonora dos reatores pode ser feita a partir de medições de ruído realizadas no laboratório da própria empresa. No entanto, quando se deseja avaliar a diretividade ou fazer um estudo mais detalhado do ruído gerado pelos reatores, é de fundamental importância que os mesmos sejam conduzidos em uma câmara semi-aneecóica, pois, mesmo que o laboratório apresente grandes dimensões, ou seja, um grande volume, as suas características podem interferir nos resultados.

Outra informação importante fornecida por estes ensaios é de que mesmo apresentando características construtivas diferentes, como o

número de bobinas, os protótipos analisados apresentam níveis de potência sonora muito próximos.

CAPÍTULO 6

MODELAGEM ANALÍTICA E NUMÉRICA DOS REATORES

Neste capítulo serão apresentados dois modelos, um analítico e outro numérico, desenvolvidos para determinar a indução magnética gerada pelos reatores. O cálculo da indução magnética permitirá, a partir das relações entre as grandezas eletromagnéticas e mecânicas, determinar as forças que atuam no reator e que induzem vibrações ao longo de sua estrutura durante o seu funcionamento.

6.1) Mecanismos de geração de ruído nos reatores

De acordo com o *International Council on Large Electric Systems* [11], as forças que fazem com que a superfície das bobinas dos reatores vibre, resultam da interação entre o fluxo de corrente que percorre o reator e sua indução magnética. Segundo Smede J. et al. [23], do ponto de vista de geração de ruído, a amplitude de vibração e a área da superfície de radiação do reator determinam essencialmente a potência sonora gerada pelo mesmo. Logo, tem-se grande interesse em determinar as forças que atuam na direção radial, pois, são elas que induzem ondas de flexão na superfície do reator. No caso dos reatores, a eficiência de radiação sonora das ondas de flexão é muito maior que aquela das ondas longitudinais, que são excitadas através das forças axiais. Portanto, a contribuição das forças axiais e de outros componentes do reator, como as cruzetas, à energia sonora radiada é relativamente pequena.

As frequências em que o ruído é gerado dependem do espectro de frequências de corrente a que o reator é submetido. Portanto, o ruído gerado dependerá significativamente da aplicação do reator. Quando o reator é percorrido por uma corrente alternada em uma frequência específica, as forças que atuarão no reator ocorrerão em uma frequência equivalente ao dobro daquela da corrente. No entanto, quando o reator é percorrido simultaneamente por várias correntes em frequências diferentes, além das forças que atuarão na frequência equivalente ao dobro daquela da corrente, surgirão componentes de frequências adicionais. Para exemplificar este último caso, na Figura 111 (a), apresenta-se o espectro de frequências elétricas de um reator utilizado como filtro de correntes harmônicas que possui uma componente fundamental f e uma componente harmônica h . Na prática o espectro da corrente sempre possui mais que uma componente harmônica.

O espectro das forças que atuam em um reator deste tipo possui uma pré-carga estática, e quatro outras componentes, de frequências $2f$, $f(h-1)$, $f(h+1)$ e $2fh$, como se observa na Figura 111 (b). Segundo o *International Council on Large Electric Systems* [11] somente as componentes das forças contribuem na geração do ruído, a pré-carga estática não interfere na potência sonora do reator.

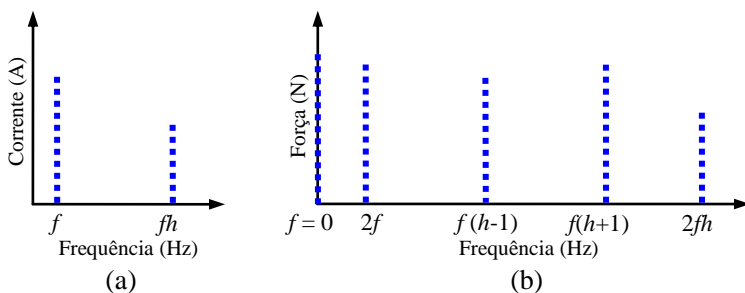


Figura 111 – Exemplo de espectro. (a) Correntes que atuam no reator, (b) Forças que atuam no reator.

Verifica-se que as frequências das componentes das forças possuem um deslocamento em relação às frequências das componentes da corrente. Além disso, observa-se que o número das componentes da força corresponde ao quadrado do número de componentes da corrente. Portanto, o espectro de frequências sonoras aumentará significativamente quando o reator é submetido à várias correntes harmônicas.

Em grande parte das aplicações, a corrente aplicada no reator possui amplitudes significativas até a sexta componente harmônica, a partir daí a amplitude das demais harmônicas reduz-se consideravelmente.

6.2) Modelo analítico da indução magnética dos reatores

Neste primeiro modelo, admite-se que a indução magnética B criada pela corrente que circula no reator em funcionamento seja similar à indução magnética de um solenoide. Um solenoide consiste em uma bobina helicoidal formada por espiras circulares muito próximas.

Tripler [24] define que a indução magnética de um solenoide consiste na soma vetorial das induções produzidas pelas suas espiras. No caso de pontos muito próximos de uma espira, o fio se comporta magneticamente quase como um fio retilíneo, e as linhas de B são quase

círculos concêntricos, como se observa na Figura 112. Também pode se observar na Figura 112 que, em pontos no interior do solenoide e razoavelmente afastados do fio, \mathbf{B} é aproximadamente paralela ao eixo central do solenoide.

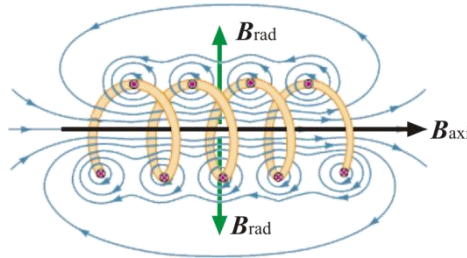


Figura 112 – Trecho de um solenoide visto de perfil.

A determinação da indução magnética total ao longo de todos os pontos do reator depende da solução de equações numéricas complexas. Desta forma, para facilitar a sua determinação, propõe-se dividi-lo em duas parcelas. A primeira consiste no cálculo da indução magnética na direção axial (\mathbf{B}_{axi}) que produz uma força magnética radial (\mathbf{F}_{rad}). Já a segunda corresponde ao cálculo da indução magnética na direção radial (\mathbf{B}_{rad}), que produz uma força magnética axial (\mathbf{F}_{axi}).

Para determinar estas induções magnéticas e as respectivas forças por elas originadas faz-se necessário usar os conceitos de algumas leis clássicas do eletromagnetismo que serão apresentadas a seguir, a lei de Biot-Savart, a lei de Ampère e a força magnética originada por um fio percorrido por uma determinada corrente.

6.2.1) Lei de Biot-Savart

A Figura 113 mostra um fio de forma arbitrária percorrido por uma corrente $i(t)$. Para calcular a indução magnética \mathbf{B} em um ponto próximo P , divide-se o fio em elementos infinitesimais dl e define-se para cada elemento um vetor comprimento dl , cujo módulo é dl e cuja direção é a mesma da corrente no elemento dl . Em seguida, define-se um elemento de corrente idl e calcula-se a indução $d\mathbf{B}$ produzida no ponto P através da seguinte equação:

$$d\mathbf{B}(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} i(t) \frac{dl \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (6.1)$$

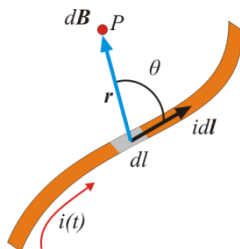


Figura 113 – Indução magnética $d\mathbf{B}$ produzida no ponto P a partir de um elemento de corrente.

A indução total \mathbf{B} no ponto P pode ser determinada a partir da soma, por integração, das contribuições $d\mathbf{B}$ de todos os elementos de corrente. Portanto, a indução $d\mathbf{B}$ produzida no ponto P por um elemento de corrente idl é dada por:

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} i(t) \oint \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (6.2)$$

onde μ_0 corresponde à permeabilidade do ar, cujo valor, por definição, é dado por $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm} / \text{A} \approx 1,26 \times 10^{-6} \text{ H} / \text{m}$.

As Equações (6.1) e (6.2) são conhecidas como lei de Biot-Savart, pois, expressam o valor da indução magnética \mathbf{B} criada por um elemento $d\mathbf{l}$ percorrido por uma corrente $i(t)$, em um ponto P localizado a uma distância r do condutor.

A unidade de \mathbf{B} no SI é chamada de Tesla (T) que corresponde à:

$$1\text{T} = 1 \frac{\text{Newton}}{(\text{Coulumb} / \text{segundo})(\text{metro})} = 1 \frac{\text{N}}{\text{Am}} \quad (6.3)$$

6.2.2) Lei de Ampère

Em eletromagnetismo clássico a Lei de Ampère relaciona a indução magnética sobre um laço com a corrente elétrica que passa através dele.

Como visto no item anterior, a indução magnética resultante em um ponto devido a qualquer distribuição de correntes pode ser obtida pela Lei de Biot-Savart. Entretanto, se esta distribuição apresentar certo grau de simetria, seja ela, planar, cilíndrica ou esférica pode-se aplicar a lei de Ampère para determinar a indução magnética com um esforço

consideravelmente menor. Esta lei, que pode ser demonstrada a partir da lei de Biot-Savart, relaciona a indução magnética \mathbf{B} sobre uma curva, com a corrente $i(t)$, que circula através da mesma a partir da seguinte Equação:

$$\oint \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i_{env}(t) \quad (6.4)$$

O círculo no símbolo da integral indica que a integração do produto escalar $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ deve ser realizada ao longo de um laço, denominado laço de Ampère, ou amperiana. A corrente $i_{env}(t)$ é a corrente elétrica total envolvida pela curva.

De acordo com Halliday, Resnick e Walker [25] o produto escalar $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ do lado esquerdo da Equação (6.4) é igual a $B \cos \theta dl$. Assim, a lei de Ampère pode ser reescrita na forma:

$$\oint \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{l} = \oint B \cos \theta dl = \mu_0 i_{env}(t) \quad (6.5)$$

Desta forma, interpreta-se o produto escalar $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ como o produto de um comprimento elementar dl da amperiana pela componente da indução $B \cos \theta$ tangente à amperiana neste ponto. Nesse caso, a integral pode ser interpretada como a soma destes produtos para toda a amperiana.

6.2.3) Lei de Laplace

Quando uma espira é percorrida por uma corrente elétrica e exposta a uma indução magnética, cada uma das cargas em movimento, as quais compreendem a corrente, é submetida à denominada força de Lorentz, e juntas elas podem criar uma força macroscópica na espira, frequentemente denominada força de Laplace.

Matematicamente, a força magnética que atua sobre um condutor de comprimento dl , percorrido por uma corrente e submetido a uma indução magnética, é definida como:

$$\mathbf{F}(t) = \oint i(t) d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (6.6)$$

Pela própria definição de produto vetorial, apresentada no Apêndice 4, percebe-se que a força é perpendicular ao plano formado pelos vetores $d\mathbf{l}$ e \mathbf{B} . Frequentemente, a direção e o sentido desta força

são determinados a partir da regra da mão direita, demonstrada na Figura 114.

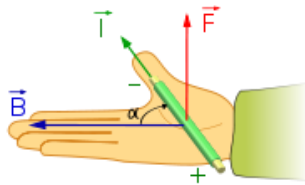


Figura 114 – Representação da regra da mão direita.

6.2.4) Determinação da força magnética radial

Para determinar a força magnética radial que atua no reator é necessário calcular a indução magnética em uma bobina formada por n espiras. Portanto, o passo inicial consiste na determinação da indução magnética de uma espira circular de raio R , percorrida por uma corrente $i(t)$.

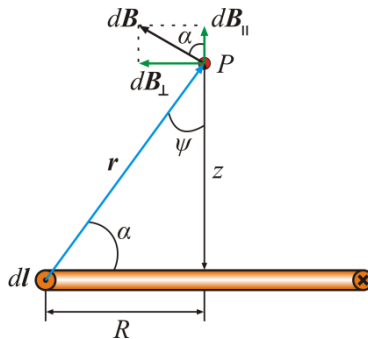


Figura 115 – Vista de perfil de uma espira circular, de raio R , percorrida por uma corrente $i(t)$.

Buscando simplificar o problema, propõe-se calcular a indução magnética somente em pontos situados sobre o eixo central da bobina, como o ponto P , apresentado na Figura 115, que se encontra sobre o eixo central a uma distância z do plano da espira.

Suponha um elemento de comprimento dl situado na extremidade esquerda da espira, cujo vetor comprimento dl aponta perpendicularmente para fora do plano do papel. O plano formado entre

os dois vetores $d\mathbf{l}$ e \mathbf{r} é perpendicular ao plano do papel e contém tanto \mathbf{r} quanto $d\mathbf{l}$, que possuem um ângulo θ de 90° entre si. De acordo com a lei de Biot-Savart, o elemento de indução magnética $d\mathbf{B}$ produzido no ponto P pela corrente no elemento $d\mathbf{l}$ é perpendicular a este plano e, portanto, paralelo ao plano do papel e perpendicular a \mathbf{r} , como se observa na Figura 115.

Observe que $d\mathbf{B}$ pode ser decomposto em duas componentes, a primeira, paralela ao eixo da espira $d\mathbf{B}_\parallel$ e a segunda, perpendicular ao eixo da espira $d\mathbf{B}_\perp$. Por simetria, a soma vetorial das componentes perpendiculares produzidas por todos os elementos $d\mathbf{l}$ da espira é nula, restando apenas as componentes paralelas $d\mathbf{B}_\parallel$. Consequentemente, a indução magnética total que atua no ponto P pode ser definida como:

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}_\parallel \quad (6.7)$$

Para o elemento $d\mathbf{l}$, mostrado na Figura 115, a lei de Biot-Savart, Equação (6.1), mostra que a indução magnética a uma distância r é dada por:

$$d\mathbf{B}(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i(t) dl \sen 90^\circ}{r^2} \quad (6.8)$$

Tem-se também que:

$$d\mathbf{B}_\parallel(t) = d\mathbf{B}(t) \cos \alpha \quad \text{ou} \quad d\mathbf{B}_\parallel(t) = d\mathbf{B}(t) \sen \psi \quad (6.9)$$

Combinando as duas últimas Equações, obtém-se:

$$d\mathbf{B}_\parallel(t) = \frac{\mu_0 i(t) \cos \alpha dl}{4\pi r^2} \quad \text{ou} \quad d\mathbf{B}_\parallel(t) = \frac{\mu_0 i(t) \sen \psi dl}{4\pi r^2} \quad (6.10)$$

Ao analisar novamente a Figura 115 percebe-se que existe uma relação entre r e α , na qual ambos podem ser expressos em termos da distância entre o ponto P e o centro da espira, ou seja, da variável z . As relações são as seguintes:

$$r = \sqrt{R^2 + z^2} \quad (6.11)$$

$$\cos \alpha = \text{sen} \psi = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (6.12)$$

Substituindo as Equações (6.11) e (6.12) na Equação (6.10), obtém-se:

$$d\mathbf{B}_{\parallel}(t) = \frac{\mu_0 i(t) R}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} dl \quad (6.13)$$

Observe que $i(t)$, R e z têm o mesmo valor para todos os elementos dl da espira, por isso, quando se integra esta equação, descobre-se que:

$$\mathbf{B}(z, t) = \int d\mathbf{B}_{\parallel}(t) = \frac{\mu_0 i(t) R}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int dl \quad (6.14)$$

Como $\int dl$ corresponde ao perímetro da espira, ou seja, $2\pi R$ no caso da espira circular, a Equação (6.14) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{B}(z, t) = \frac{\mu_0 i(t) R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (6.15)$$

Admitindo que a corrente que circula no condutor pode ser representada como uma função senoidal de frequência ω variando com o tempo (t), na forma:

$$i(t) = \sqrt{2} I \text{sen } \omega t \quad (6.16)$$

A Equação (6.15) que representa a indução magnética que atua sobre toda a espira pode então ser reescrita como:

$$\mathbf{B}(z, t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\mu_0 I R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \text{sen } \omega t \quad (6.17)$$

onde I corresponde ao valor eficaz da corrente, ou seja, à amplitude RMS da corrente.

Agora, a expressão da indução magnética de uma espira será generalizada para um conjunto de espiras, ou seja, para uma bobina como a apresentada na Figura 116.

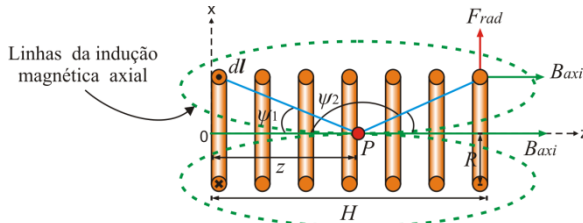


Figura 116 – Indução magnética axial em um ponto P sobre o eixo central da bobina.

Para facilitar o desenvolvimento das equações, prefere-se reescrever a Equação (6.10) em função do raio da espira:

$$d\mathbf{B}_{\parallel}(t) = \frac{\mu_0 i(t) \text{sen} \psi \, dl}{4\pi R / \text{sen} \psi} = \frac{\mu_0 i(t) \text{sen}^3 \psi \, dl}{4\pi R^2} \quad (6.18)$$

Similarmente, ao que foi feito anteriormente, a indução magnética atuante em toda a espira é obtida a partir da integração da Equação (6.18) ao longo do perímetro da espira, que resulta em:

$$\mathbf{B}(z, t) = \frac{\mu_0 i(t) \text{sen}^3 \psi}{4\pi R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 i(t) \text{sen}^3 \psi}{2R} \quad (6.19)$$

Para um número de N espiras por unidade de comprimento, a Equação (6.19) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{B}(z, t) = \frac{\mu_0 i(t) \text{sen}^3 \psi}{2R} N dz \quad (6.20)$$

onde N é calculado em função do diâmetro do condutor ϕ a partir da seguinte relação:

$$N = \frac{1}{\phi} \quad (6.21)$$

Ao observar o ângulo ψ , na Figura 115, pode se estabelecer por trigonometria que:

$$\tan \psi = \frac{R}{z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{R}{\tan \psi} = R \cot \psi \quad (6.22)$$

Derivando esta expressão em relação ψ obtém-se dz :

$$\frac{dz}{d\psi} = R \operatorname{cosec}^2 \psi = \frac{-R}{\operatorname{sen}^2 \psi} \quad \Rightarrow \quad dz = -\frac{R}{\operatorname{sen}^2 \psi} d\psi \quad (6.23)$$

Substituindo o valor de dz na Equação (6.20), obtém-se:

$$\mathbf{B}(z, t) = -\frac{\mu_0 i(t) \operatorname{sen} \psi}{2} N d\psi \quad (6.24)$$

Integrando a expressão acima em relação aos limites ψ_1 e ψ_2 , define-se que:

$$\mathbf{B}(z, t) = \frac{\mu_0 i(t) N}{2} \cos \psi_1 - \cos \psi_2 \quad (6.25)$$

Usando as relações trigonométricas, pode-se definir a seguinte relação entre os ângulos ψ_2 e α , observados na Figura 116:

$$\cos \alpha = -\cos \psi_2 \quad (6.26)$$

Além disso, aplicando o teorema de Pitágoras, outras duas relações podem ser estabelecidas para os ângulos entre os ângulos ψ_1 e α , observados na Figura 116:

$$\cos \psi_1 = \frac{z}{\left[R^2 + z^2 \right]^{1/2}} \quad e \quad \cos \alpha = \frac{(H - z)}{\left[(H - z)^2 + R^2 \right]^{1/2}} \quad (6.27)$$

Substituindo a Equação (6.26) na Equação (6.25) define-se que:

$$\mathbf{B}(z,t) = \frac{\mu_0 i(t) N}{2} \cos \psi_1 + \cos \alpha \quad (6.28)$$

Usando as duas relações apresentadas na Equação (6.27), a Equação (6.28) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{B}(z,t) = \frac{\mu_0 i(t) N}{2} \left(\frac{z}{[R^2 + z^2]^{1/2}} + \frac{(H-z)}{[(H-z)^2 + R^2]^{1/2}} \right) \quad (6.29)$$

Finalmente, substituindo o valor de $i(t)$, definido na Equação (6.16), obtém-se a Equação da indução magnética axial que atua sobre o ponto P localizado no eixo central da bobina:

$$\mathbf{B}_{axi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mu_0 I N \left(\frac{z}{[R^2 + z^2]^{1/2}} + \frac{(H-z)}{[(H-z)^2 + R^2]^{1/2}} \right) \text{sen } \omega t \quad (6.30)$$

Com o objetivo de se estabelecer um valor médio para a indução magnética axial, Pelzer [26] sugere calcular a média espacial da indução magnética axial:

$$\mathbf{B}_{axi\text{ média}} = \frac{1}{H} \int_0^H \mathbf{B}(z,t) dz \quad (6.31)$$

onde H corresponde a altura da bobina.

Assim, o valor médio da indução magnética axial é definido pela seguinte Equação:

$$\mathbf{B}_{axi\text{ média}} = \mathbf{B}(t) = \frac{\sqrt{2} \mu_0 I N}{H} [R^2 + H^2]^{1/2} - R \text{ sen } \omega t \quad (6.32)$$

A fim de avaliar os efeitos desta simplificação, na Figura 117 se faz uma comparação entre as induções magnéticas axiais obtidas a partir das expressões (6.30) e (6.32).

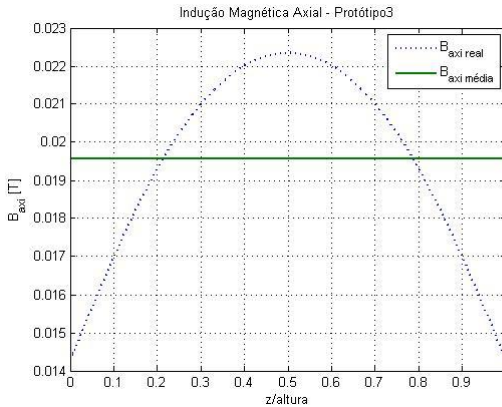


Figura 117 – Indução axial média e indução axial real no eixo central do protótipo 3.

Ao observar a Figura 117 fica claro que a indução magnética axial real é máxima no centro e mínima nas extremidades. Logo, o uso do valor médio faz com que a indução magnética axial seja superestimada nas extremidades, uma vez que o valor médio é superior ao valor real.

Finalmente, usando o conceito apresentado no Item 6.2.3) a força magnética resultante da indução axial que atua sobre o ponto P , expressa em N, é dada por:

$$\mathbf{F}(z, t) = i\mathbf{l} \times \mathbf{B}_{axi} = il B_{axi} \text{sen}\theta \quad (6.33)$$

Como o ângulo θ formado entre o elemento de comprimento $d\mathbf{l}$ e a indução axial é 90° , a Equação (6.33) pode ser resumida a:

$$\mathbf{F}_{rad}(z, t) = il B_{axi} \quad (6.34)$$

onde l corresponde ao comprimento do condutor, ou seja, da espira.

A direção desta força é perpendicular a indução axial, e seu sentido aponta para fora da bobina, como se observa na Figura 116.

Tem-se o interesse em expressar a força radial, em N/m. Para isto, basta dividi-la pelo comprimento l da espira de modo que:

$$\mathbf{F}_{rad}(z, t) = i B_{axi} \quad [N / m] \quad (6.35)$$

Substituindo na Equação (6.35), a expressão de $i(t)$, definida na Equação (6.16), e a expressão de $\mathbf{B}_{axi}(t)$, definida na Equação (6.31), obtém-se a força radial média por espira, expressa em N/m:

$$\mathbf{F}_{rad\ média}(t) = \frac{2\mu_0 I^2 N}{H} \left[R^2 + H^2 \right]^{1/2} - R \sen^2 \omega t \quad (6.36)$$

A análise da Equação (6.36) permite concluir que a força radial é proporcional ao quadrado da amplitude da corrente e ao número de espiras por unidade de comprimento (N).

Ao traçar um gráfico da distribuição da indução magnética e da força radial em função do tempo, como aquele observado na Figura 118, se percebe que a frequência da força é o dobro da frequência da corrente e da indutância magnética. Conclui-se também que esta força é unidirecional e repulsiva, ou seja, não provoca deformações no interior da bobina.

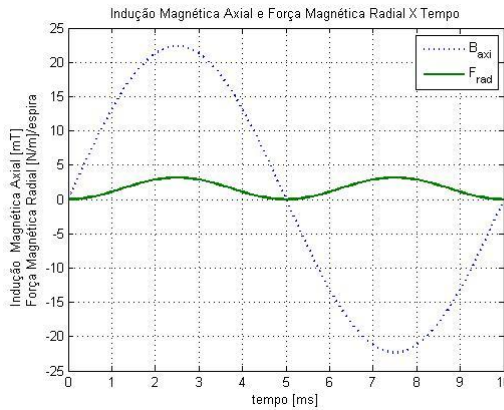


Figura 118 – Distribuição da força e da indução magnética radial em função do tempo.

A força radial média gerada pela bobina, ou seja, pelo conjunto de espiras nbr , expressa em N/m, é dada por:

$$\mathbf{F}_{rad_Bobina}(t) = \mathbf{F}_{rad\ média} nbr \quad [N / m] \quad (6.37)$$

6.2.5) Determinação da força magnética axial

Inicialmente faz-se necessário definir a indução magnética produzida pela corrente $i(t)$ em um fio longo retilíneo, como aquele observado na Figura 119.

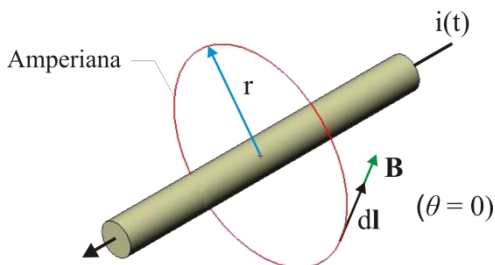


Figura 119 – Indução magnética criada pela corrente que percorre um condutor retilíneo.

A indução magnética \mathbf{B} produzida por esta corrente tem o mesmo módulo em todos os pontos situados a uma distância r do fio, ou seja, tem simetria cilíndrica em relação ao fio. Pode-se tirar vantagem desta simetria para simplificar a integral que aparece na lei de Ampère envolvendo o fio em uma amperiana circular concêntrica de raio r . Deste modo pode-se dizer que a indução magnética \mathbf{B} tem o mesmo módulo B em todos os pontos da amperiana.

A parcela $B \cos \theta$ da Lei de Ampère, Equação (6.5), pode ser simplificada uma vez que tanto \mathbf{B} como $d\mathbf{l}$ são tangentes à amperiana em todos os pontos. Assim, \mathbf{B} e $d\mathbf{l}$ são paralelos ou antiparalelos em todos os pontos da amperiana. Adotando-se a primeira hipótese, em todos os pontos o ângulo θ entre \mathbf{B} e $d\mathbf{l}$ é 0, assim o termo a esquerda da Lei de Ampère se torna:

$$\oint \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{l} = \oint B \cos \theta dl = B \oint dl = B(2\pi r) \quad (6.38)$$

Observe que $\oint dl$ é a soma de todos os segmentos de reta dl da amperiana, o que corresponde ao perímetro da curva $2\pi r$.

De acordo com a regra da mão direita, o sinal da corrente da Figura 119 é positivo. Assim, o termo do lado direito da lei de Ampère se torna $+\mu_0 i(t)$, de forma que:

$$B(2\pi r) = \mu_0 i(t) \quad \text{ou} \quad B = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} \quad (6.39)$$

Esta expressão deve ser generalizada para uma bobina com n espiras. Suponha que a bobina possui quatro espiras paralelas, dispostas uma contra as outras, como mostra a Figura 120. A concentração da indução magnética excitada na primeira espira é equivalente à soma da contribuição da indução criada pelas outras espiras.

$$\mathbf{B}_{rad,1}(t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi} \left(\frac{1}{\phi} + \frac{1}{2\phi} + \frac{1}{3\phi} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\mu_0 i(t)}{2j\pi\phi} = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi\phi} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{j} \quad (6.40)$$

onde ϕ é a distância entre centros de cada espira, ou seja, o diâmetro do fio condutor.

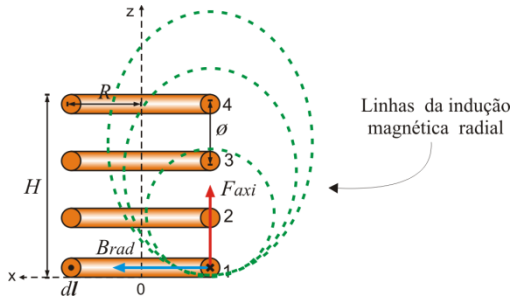


Figura 120 – Indução magnética radial resultante que atua sobre a primeira espira.

É possível que para a segunda espira a indutância resultante das espiras 1 e 3 se anule por simetria. Como não existe condutor além da quarta espira, a indução na espira 2 pode ser simplificada para:

$$\mathbf{B}_{rad,2}(t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi} \left(\frac{1}{2\phi} \right) \quad (6.41)$$

Portanto, a indução magnética radial resultante sobre uma espira na meia altura da bobina é nula. Generalizando a expressão da indução magnética radial para uma bobina com n espiras, e substituindo o

valor de $i(t)$ definido na Equação (6.16), obtém-se as seguintes equações:

$$\mathbf{B}_{rad,max}(t) = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi\phi} \sum_{j=1}^{nbr-1} \frac{1}{j} sen(\omega t) \quad \text{quando } z = 0 \quad (6.42)$$

$$\mathbf{B}_{rad}(t) = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi\phi} \sum_{j=nespira}^{nbr-(nespira-1)} \frac{1}{j} sen(\omega t) \quad \text{quando } z < \frac{H}{2} \quad (6.43)$$

$$\mathbf{B}_{rad}(t) = 0 \quad \text{quando } z = H / 2 \quad (6.44)$$

$$\mathbf{B}_{rad}(t) = -\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi\phi} \sum_{j=nbr-nespira+1}^{(nespira-1)} \frac{1}{j} sen(\omega t) \quad \text{quando } z > \frac{H}{2} \quad (6.45)$$

$$\mathbf{B}_{rad,max}(t) = -\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi\phi} \sum_{j=1}^{nbr-1} \frac{1}{j} sen(\omega t) \quad \text{quando } z = H \quad (6.46)$$

onde “*nespira*” é o número da espira em que está sendo determinada a indução magnética.

A presença de séries matemáticas torna estas expressões difíceis de serem transformadas em expressões analíticas. Apenas as séries $\sum_{j=1}^{nbr-1} (1/j)$ permitem uma primeira aproximação na forma $\ln(nbr)$, conforme sugere Pelzer [26].

Dessa forma, sugere-se linearizar a indução magnética radial a partir de dois pontos, o ponto de máximo e o de mínimo, passando pelo centro da bobina, $z = 0,5H$.

$$\mathbf{B}_{rad}(z,t) = \mathbf{B}_{rad,linear}(z,t) = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi\phi} \ln(nbr) \left(\frac{-2z}{H} + 1 \right) sen(\omega t) \quad (6.47)$$

Finalmente, a partir da Equação (6.47) pode-se estabelecer a indução magnética radial média ao longo da altura da bobina através das seguintes equações:

$$\mathbf{B}_{rad}(t) = \mathbf{B}_{rad,média}(t) = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi\phi} \ln(nbr) sen(\omega t) \quad \text{quando } z < \frac{H}{2} \quad (6.48)$$

$$\mathbf{B}_{rad}(t) = \mathbf{B}_{rad\text{ média}}(t) = 0 \text{ quando } z = H / 2 \quad (6.49)$$

$$\mathbf{B}_{rad}(t) = \mathbf{B}_{rad\text{ média}}(t) = -\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi\phi} \ln(nbr) \text{sen}(\omega t) \text{ quando } z > \frac{H}{2} \quad (6.50)$$

A comparação entre os valores lineares e médios da indução magnética radial que atua ao longo da bobina pode ser verificada na Figura 121.

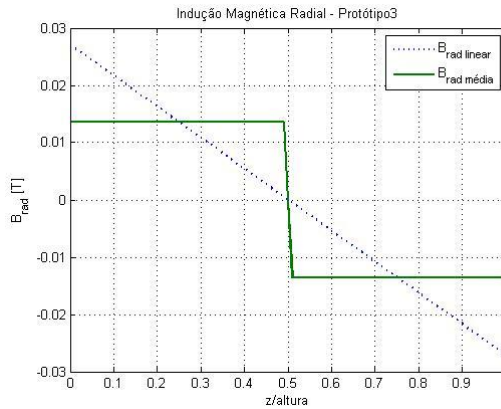


Figura 121 – Indução radial linear e indução radial média no eixo central do protótipo 3.

Para determinar a força axial resultante da ação da indução radial gerada pela bobina, recorre-se novamente à Equação (6.6). Assim como no caso da indução magnética axial o ângulo formado entre o elemento de comprimento dl e a indução magnética axial é 90° , portanto, a equação que define a força axial em N/m é:

$$\mathbf{F}_{axi}(z, t) = i \mathbf{B}_{rad} \quad [N / m] \quad (6.51)$$

Substituindo na Equação (6.51) a expressão de $i(t)$ definida na Equação (6.16) e as expressões de \mathbf{B}_{rad} definida nas Equações (6.48), (6.49) e (6.50), obtém-se a força axial média que cada uma das espiras da bobina será submetida:

$$F_{axi\ média}(t) = \left\{ \frac{\mu_0 I^2 \ln(nbr) \text{sen}^2(\omega t)}{2\pi\phi} \right\} \text{ quando } z < \frac{H}{2} \quad (6.52)$$

$$F_{axi\ média}(t) = 0 \text{ quando } z = H/2 \quad (6.53)$$

$$F_{axi\ média}(t) = \left\{ \frac{-\mu_0 I^2 \ln(nbr) \text{sen}^2(\omega t)}{2\pi\phi} \right\} \text{ quando } z > \frac{H}{2} \quad (6.54)$$

Ao observar as equações acima, observa-se que a força axial que atua em cada uma das espiras é proporcional ao quadrado da amplitude da corrente e possui uma frequência correspondente ao dobro daquela da corrente e da indução magnética radial. Além disso, sua distribuição tende a comprimir a bobina no sentido de z .

Assim, como no caso da força radial, a força axial média gerada pela bobina é dada por:

$$F_{axi_Bobina}(t) = F_{axi_média} nbr \quad [N/m] \quad (6.55)$$

6.3) Modelo numérico da indução magnética dos reatores

Existem modelos analíticos mais elaborados que o proposto no Item 6.2). Entre eles, destacam-se os propostos por Enohnyaket [27] que busca solucionar o problema eletromagnético de reatores com núcleo de ar a partir de dois modelos. O primeiro, de parâmetros concentrados, usado para baixas frequências, e o segundo que se baseia no método denominado *Partial Element Equivalente Circuit* (PEEC), usado para altas frequências. No entanto, estes modelos analíticos assumem hipóteses e fazem simplificações que podem comprometer os resultados obtidos. Além dos modelos analíticos, existem modelos numéricos que obtêm a indução magnética a partir de uma equação diferencial deduzida das equações de Maxwell. Dentre os métodos usados na modelagem numérica, destaca-se o método de elementos finitos. Nesta seção, será apresentado um modelo em elementos finitos para calcular a indução magnética dos reatores e conseqüentemente as forças por eles geradas.

6.3.1) O eletromagnetismo e as equações de Maxwell

De acordo com Bastos [28] o eletromagnetismo pode ser descrito a partir das quatro equações de Maxwell. O grande mérito de Maxwell

foi o de unificar sob quatro equações os diferentes estudos de seus predecessores, Ampère, Gauss e Faraday, entre outros. Para realizar este feito, introduziu a noção da corrente de deslocamento que generalizou a Lei de Ampère e a tornou válida em todas as situações.

Embora descrever o eletromagnetismo baseado nas equações de Maxwell seja relativamente simples, existem problemas reais que podem ser muito complicados, de difícil solução, e em alguns casos até mesmo impossíveis de serem solucionados analiticamente. Esta é a razão, segundo Bastos [28], pela qual métodos numéricos vêm sendo fortemente utilizados como ferramentas para solução de problemas no campo da engenharia elétrica.

Em eletromagnetismo, existem dois domínios, o das altas frequências e o das baixas frequências. O domínio das altas frequências compreende o estudo de ondas eletromagnéticas e a propagação de energia pelas mesmas. Já no domínio das baixas frequências, encontram-se a maioria dos dispositivos eletromagnéticos, como, por exemplo, transformadores e disjuntores. Neste domínio, onde as frequências envolvidas são inferiores a algumas dezenas de kHz, correspondentes aos estados quase estacionários, os campos elétricos e magnéticos podem ser estudados separadamente.

Esquemáticamente, o eletromagnetismo pode ser dividido de acordo com o diagrama abaixo, onde cada bloco representa uma situação particular das equações de Maxwell.

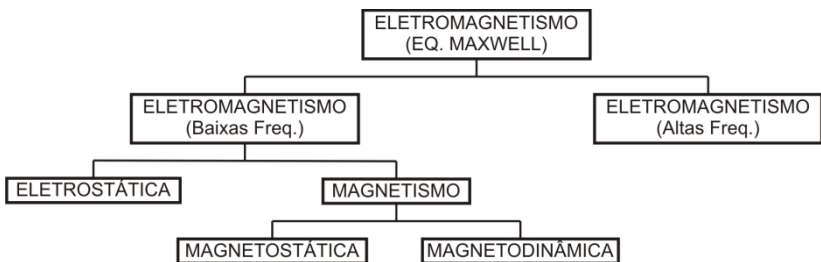


Figura 122 – Divisão do eletromagnetismo segundo sua aplicação [29].

Nesta pesquisa, tem-se interesse pelo domínio das baixas frequências e mais especificamente, o caso da magnetostática.

As quatro equações de Maxwell são as seguintes:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6.56)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (6.57)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.58)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (6.59)$$

onde *rot* corresponde ao operador rotacional aplicado sobre \mathbf{H} , que por sua vez corresponde a indução magnética [A/m]. \mathbf{J} representa a densidade superficial de corrente [A/m²], \mathbf{D} a indução elétrica [C/m²] e t o tempo [s]. Já *div* corresponde ao operador divergente, \mathbf{B} a indução magnética [T], \mathbf{E} o campo elétrico [V/m] e ρ a densidade volumétrica de carga [C/m³].

Segundo Bastos [28], a Equação (6.56) expressa a maneira com a qual a indução magnética pode ser criada a partir da corrente de condução e da variação temporal de indução elétrica. A Equação (6.57) mostra que o fluxo magnético é conservativo enquanto que a Equação (6.58) mostra que uma variação temporal de indução magnética é capaz de criar um campo elétrico. E, finalmente, a Equação (6.59) mostra que o fluxo do vetor indução elétrica não é conservativo.

Como se tem interesse no domínio das baixas frequências e, em particular, no caso estático, o termo relativo à corrente de deslocamento desaparece, pois se considera $\mathbf{J} \gg (\partial \mathbf{D} / \partial t)$. Ao desprezar este termo, torna-se possível desacoplar este sistema de equações em dois outros.

O primeiro sistema tem a característica de tratar os problemas de magnetismo, sendo que se não houver variação temporal de grandeza ($\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$) caracteriza-se um problema de magnetostática. Caso contrário, o problema se encontra no domínio da magnetodinâmica.

As equações que constituem o domínio da magnetodinâmica são:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (6.60)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (6.61)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.62)$$

acompanhado das relações constitutivas:

$$\mathbf{B} = \|\mu\| \mathbf{H} \quad (6.63)$$

$$\mathbf{J} = \|\sigma\| \mathbf{E} \quad (6.64)$$

onde $\|\mu\|$ corresponde ao tensor de permeabilidade e $\|\sigma\|$ o tensor de condutividade.

A magnetostática é um caso particular, onde não há variações temporais de grandezas. Assim, as equações da magnetostática são:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (6.65)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (6.66)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (6.67)$$

acompanhando a relação constitutiva:

$$\mathbf{B} = \|\mu\| \mathbf{H} \quad (6.68)$$

O segundo sistema trata de problemas de eletrostática, e se resume nas seguintes equações:

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (6.69)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (6.70)$$

acompanhado da relação constitutiva:

$$\mathbf{D} = \|\varepsilon\| \mathbf{E} \quad (6.71)$$

onde $\|\varepsilon\|$ corresponde ao tensor de permissividade.

É de fundamental importância salientar que os campos elétricos que aparecem nas Equações (6.62) e (6.71) são de natureza totalmente diferentes. O primeiro é criado por um efeito magnético, representado pela variação temporal de \mathbf{B} , e o segundo devido à presença de cargas estáticas.

A seguir, no Item 6.3.2), são apresentados os resultados obtidos a partir da aplicação do método de elementos finitos para problemas de magnetostática, onde a fonte de indução magnética é a densidade superficial de corrente J , cujas equações foram apresentadas nesta seção. Para obter os valores das forças dos reatores, foi usado o valor de J referente ao valor da corrente eficaz. Embora a aplicação do método de elementos finitos a problemas de magnetismo exija uma série de outras etapas e manipulações das equações aqui apresentadas, estas não fazem parte do escopo deste trabalho e não serão demonstradas. Assinala-se que as mesmas podem ser encontradas nas obras publicadas por Bastos [29] e Meunier et al. [30].

6.3.2) Modelagem e resultados

Os modelos numéricos desenvolvidos para determinar a indução magnética gerada pelos reatores foram elaborados a partir da utilização de dois *softwares* livres, desenvolvidos pelos professores Christophe Geuzaine [31] e Patrick Dular [32], da Universidade de Liège, Bélgica. O primeiro *software*, denominado Gmsh, é um gerador de malhas de elementos finitos tridimensional com uma ferramenta interna de CAD e um módulo de pós-processamento. O segundo *software*, GetDP, segundo Dular et al. [33], permite solucionar problemas genéricos definidos a partir do método de elementos finitos.

Como a geometria dos reatores é axi-simétrica e devido à própria natureza do problema abordado, usou-se uma formulação magnetostática axi-simétrica em potencial vetor magnético. Na Figura 123 pode-se observar a malha no plano de corte transversal do reator. Nessa Figura encontra-se a malha de elementos finitos do protótipo 3 que apresenta uma bobina, e do protótipo 5 que possui 6 bobinas. Note que são observadas três regiões nas malhas construídas. A primeira, identificada pelos elementos de cor vermelha, representa a seção transversal das bobinas. A segunda, identificada pelos elementos azuis, corresponde ao ar atmosférico em torno do reator. E, finalmente, aquela em verde, que representa uma aproximação do domínio infinito exterior.

Nos detalhes apresentados na Figura 123, observa-se uma ampliação da malha na região em que se encontram as bobinas do reator. Percebe-se que o núcleo do reator e as regiões próximas das bobinas possuem uma maior discretização para que bons resultados sejam obtidos.

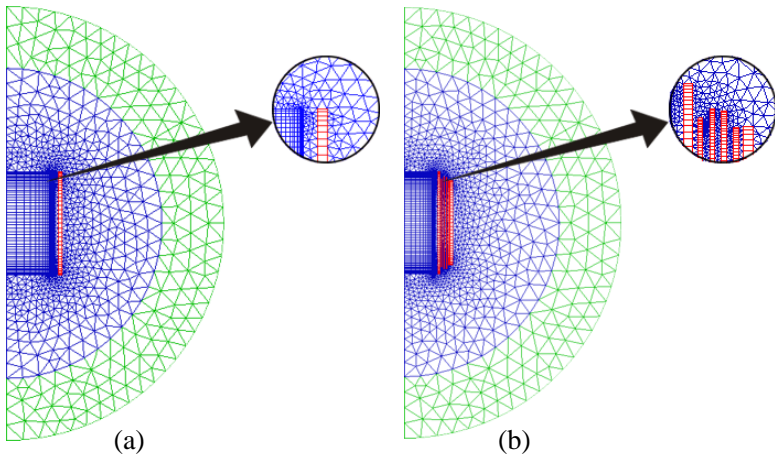


Figura 123 – Malhas criadas para calcular a indução magnética. (a) Protótipo 3 (b) Protótipo 5.

É importante salientar que no modelo numérico usado, não foram modelados cada um dos fios condutores que compunham as espiras da bobina, e sim uma espira equivalente, como aquela representada na Figura 124.

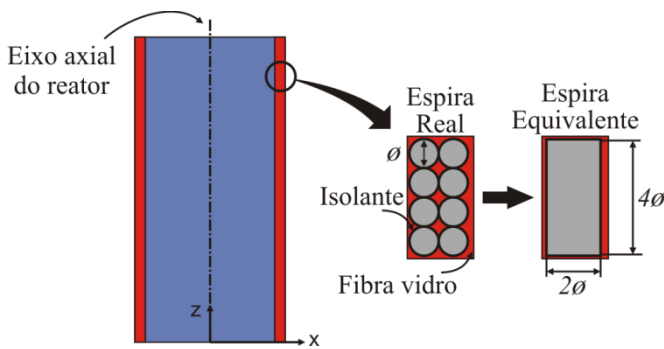


Figura 124 – Representação da espira equivalente definida no modelo numérico.

Observe que as espiras reais, de seção transversal circular, são simplificadas por espiras equivalentes de seção transversal retangular. Para que tal simplificação não introduza erros nos cálculos, deve ser estabelecido um fator de correção que garanta que a densidade de corrente em ambas as espiras seja a mesma, ou seja, $J_{eq} = J_{real}$.

Para definir este fator, basta lembrar que a densidade de corrente é definida como:

$$J = \frac{I}{S} \quad (6.72)$$

onde I corresponde à amplitude da corrente [A] e S a área da seção transversal da espira [m²].

Como a densidade de corrente deve ser constante em ambas as espiras, tem-se que:

$$\frac{I_{eq}}{S_{eq}} = \frac{I_{real}}{S_{real}} \quad \text{ou} \quad I_{eq} = I_{real} \frac{S_{eq}}{S_{real}} \quad (6.73)$$

Portanto, o fator de correção corresponde à razão entre as áreas da seção transversal da espira equivalente e da espira real.

Considerando toda a bobina, ou seja, o conjunto de espiras que forma o reator, esta relação é dada por:

$$\frac{S_{eq}}{S_{real}} = \frac{H e}{nbr (\pi\phi^2 / 4)} \quad (6.74)$$

onde H corresponde a altura do conjunto de espiras [m], e a espessura da espira [m], nbr o número total de espiras da bobina e ϕ o diâmetro do condutor [m].

Definido este fator de correção, as características das espiras que compõe cada protótipo, apresentadas na Tabela 20, e as características de cada uma das bobinas, apresentadas na Tabela 21, são as informações necessárias para efetuar o cálculo da indução magnética.

Um dos resultados, apresentado na Figura 125, corresponde ao vetor potencial magnético. Tal grandeza é expressa em [Wb/m] e permite visualizar a distribuição das linhas de fluxo magnético dos reatores.

Ao analisar a Figura 125 verifica-se que existe uma maior concentração das linhas de fluxo no núcleo dos reatores. Na região externa, se percebe que à medida que o raio aumenta a distância entre as linhas de campo também aumenta.

Tabela 20 – Características das espiras dos protótipos.

	Bobina	Espessura (mm)	Área seção (mm²)
Protótipo 3	1	5,19	63,44
Protótipo 4	1	5,19	63,44
	2	5,19	63,44
Protótipo 5	1	4,10	26,46
	2	2,18	14,86
	3	2,44	18,73
	4	2,59	21,07
	5	2,59	21,07
	6	5,18	42,15

Tabela 21 – Características das bobinas dos protótipos.

	Bobina	Altura (mm)	Nº espiras	Raio médio (mm)	% Corrente
Protótipo 3	1	1.103,0	66,5	570,35	100
Protótipo 4	1	1.181,8	71,25	544,35	49
	2	1.103,0	66,5	570,35	51
Protótipo 5	1	974,0	101,75	325,85	17
	2	837,5	83,25	350,85	12
	3	876,3	78,75	373,95	14
	4	866,7	74,00	397,30	16
	5	802,3	68,50	420,70	16
	6	805,2	68,75	444,10	26

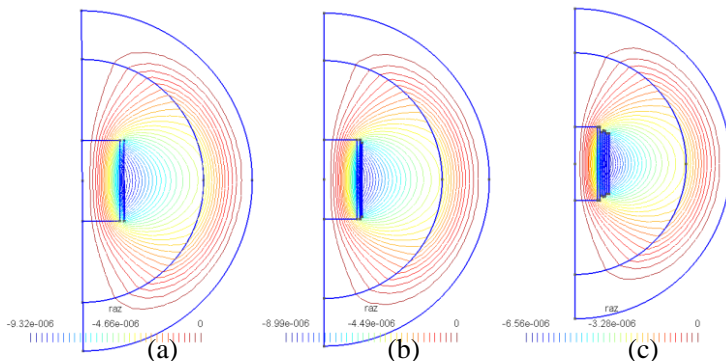


Figura 125 – Vetor Potencial Magnético [Wb/m]. (a) Protótipo 3 (b) Protótipo 4 (c) Protótipo 5.

Na Figura 126 podem ser observados os vetores de indução magnética B que atuam no protótipo 3. Ainda nesta Figura, podem ser observadas duas vistas ampliadas destes vetores em duas regiões distintas do reator, uma próxima do centro e a outra próxima da extremidade superior. Observe que na região central, os vetores são paralelos ao eixo axial do reator. Por isso, nesta região o valor da indução magnética radial é nulo. À medida que se afasta desta região central, percebe-se que os vetores apresentam uma inclinação em relação ao eixo axial do reator, a qual aumenta a medida que se aproxima de uma das extremidades. Logo, próximo das extremidades, a indução magnética radial é máxima e a axial é mínima.

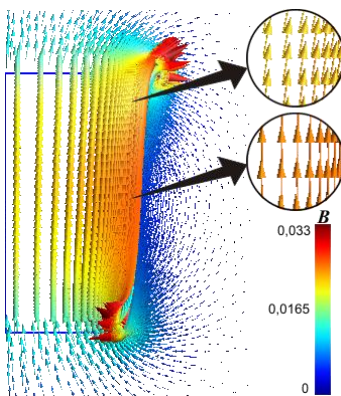


Figura 126 – Indução magnética [T] do Protótipo 3.

Salienta-se ainda que na região acima da linha média do reator, a indução magnética apresenta um sentido contrário daquele observado na região inferior a esta linha.

Na Figura 127 podem ser verificados os vetores de indução magnética dos protótipos 4 e 5.

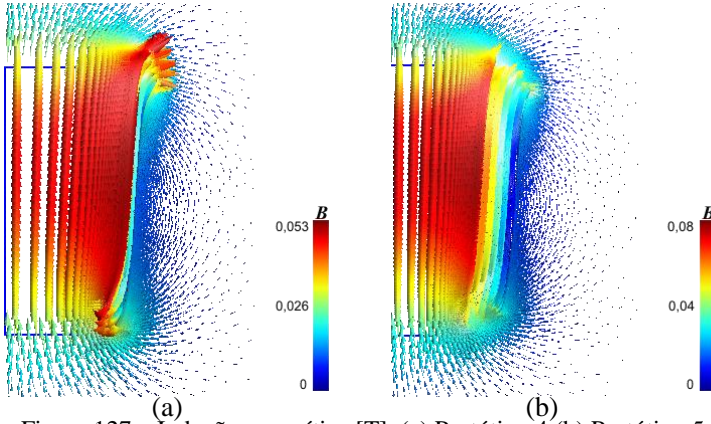


Figura 127 – Indução magnética [T]. (a) Protótipo 4 (b) Protótipo 5.

Como as medições do nível de pressão sonora foram feitas com os microfones posicionados a uma distância de 1,0 m em relação à superfície externa dos reatores, na Figura 128, apresenta-se um gráfico da variação da indução magnética em função da distância em relação ao eixo axial do reator.

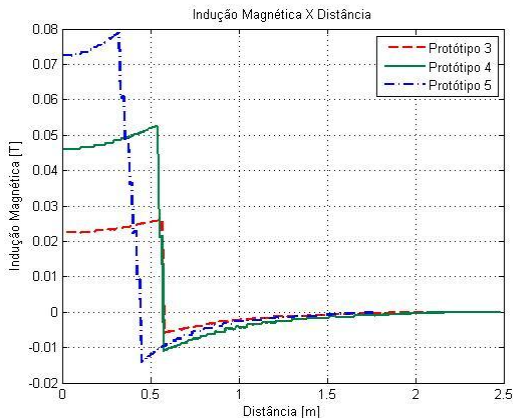


Figura 128 – Variação da densidade do fluxo eletromagnético com a distância.

Observe que na posição em que os microfones foram colocados, aproximadamente 1,5 m, a indução é praticamente nula.

Nas Figuras 129, 130 e 131, são apresentadas as forças magnéticas radiais de cada uma das bobinas que formam os protótipos 3, 4 e 5.

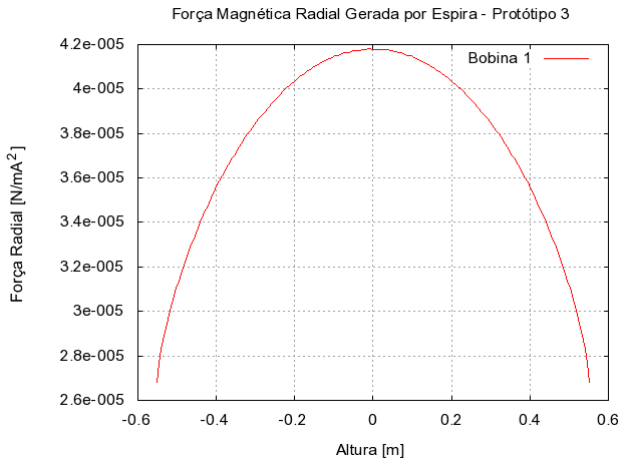


Figura 129 – Força magnética radial gerada por espira do protótipo 3.

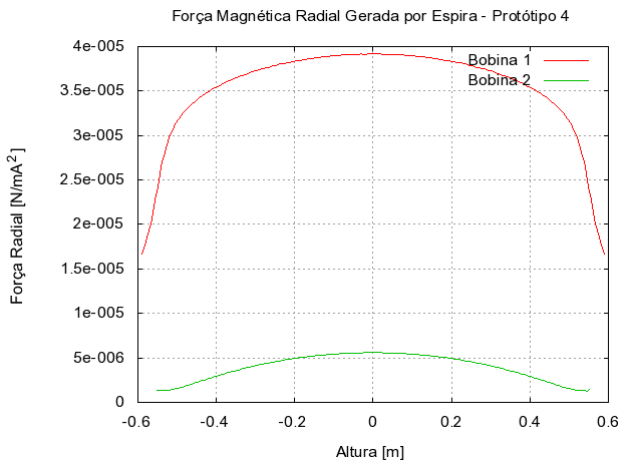


Figura 130 – Força magnética radial gerada por espira em cada uma das bobinas do protótipo 4.

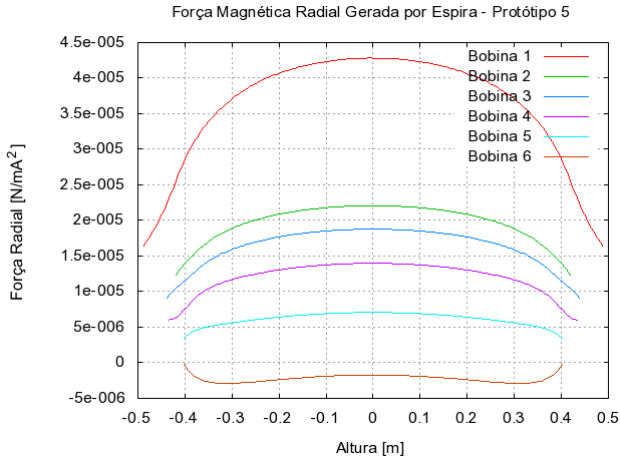


Figura 131 – Força magnética radial gerada por espira em cada uma das bobinas do protótipo 5.

Nos reatores formados por várias bobinas, observa-se que a amplitude da força radial diminui à medida que o diâmetro da bobina aumenta, ou seja, a força radial das bobinas internas é maior que aquela das bobinas externas.

Finalmente, nas Figuras 132, 133 e 134, são apresentadas as forças magnéticas axiais de cada uma das bobinas que formam os protótipos 3, 4 e 5.

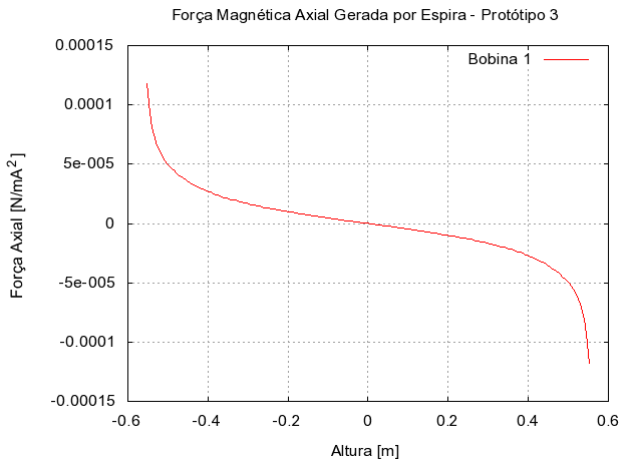


Figura 132 – Força magnética axial gerada por espira do protótipo 3.

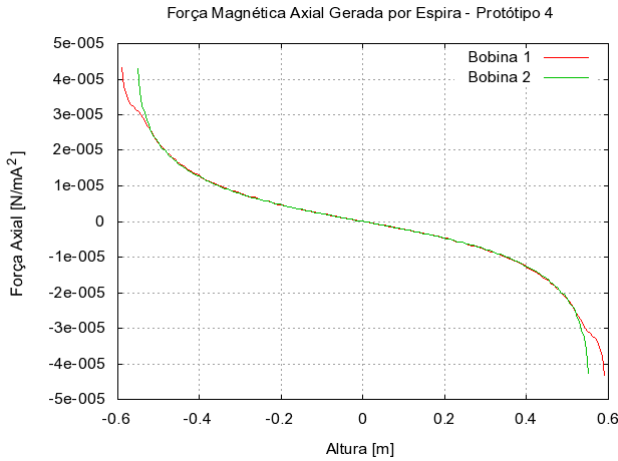


Figura 133 – Força magnética axial gerada por espira em cada uma das bobinas do protótipo 4.

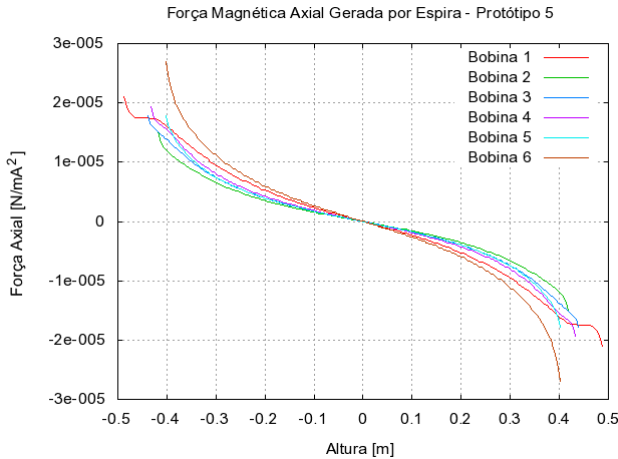


Figura 134 – Força magnética axial gerada por espira em cada uma das bobinas do protótipo 5.

Assim como a indução magnética, a amplitude da força varia em função da altura do reator. A amplitude máxima da força radial se encontra na espira localizada no centro do reator enquanto que a

amplitude máxima da força axial está sobre as espiras que estão nas extremidades do reator.

6.4) Comparação entre os modelos analítico e numérico

Finalmente, com o objetivo de definir qual dos modelos será usado para calcular as forças magnéticas dos reatores, se faz uma comparação entre os resultados fornecidos pelos modelos, analítico e numérico.

Na Figura 135 se faz uma comparação entre os valores analíticos e os valores numéricos da força radial do protótipo 3, que possui apenas uma bobina. Na Figura 136 apresenta-se um gráfico da diferença dos resultados fornecidos pelos dois modelos, a partir da razão entre as forças, analítica e numérica.

A análise das Figuras 135 e 136 mostra que a força calculada pelo modelo analítico é aproximadamente 1,2 vezes maior que a força determinada pelo modelo numérico. Tal diferença está associada ao fato de serem utilizadas hipóteses simplificadoras no modelo analítico. Entre as hipóteses admitidas no cálculo analítico da indução magnética, destacam-se aquela em que a indução é calculada a partir de um ponto situado sobre o eixo central do reator e a consideração de que os campos, axial e radial, podem ser determinados separadamente.

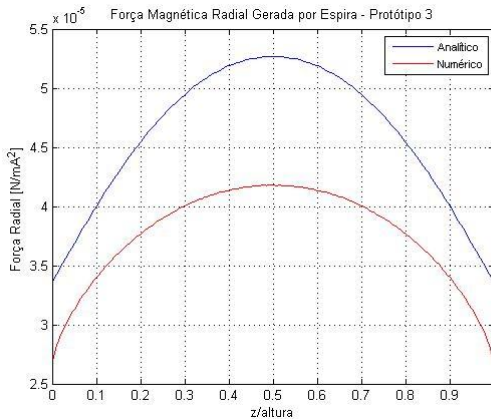


Figura 135 – Comparação entre as forças radiais determinadas analiticamente e numericamente. Protótipo 3.

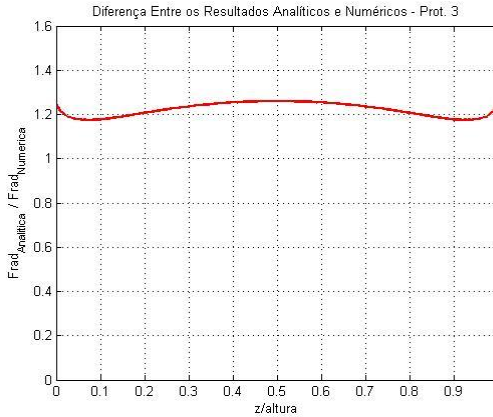


Figura 136 – Diferença entre as forças radiais determinadas analiticamente e numericamente. Protótipo 3.

Agora, buscando analisar os reatores formados por várias bobinas, nas Figuras 137 e 138 apresenta-se, respectivamente, a comparação e a diferença entre os valores analíticos e os valores numéricos da força radial do protótipo 4, que possui duas bobinas.

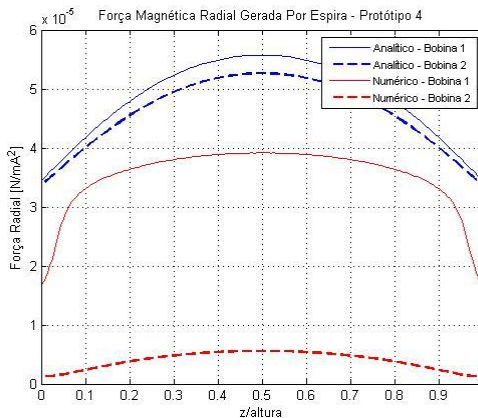


Figura 137 – Comparação entre as forças radiais determinadas analiticamente e numericamente. Protótipo 4.

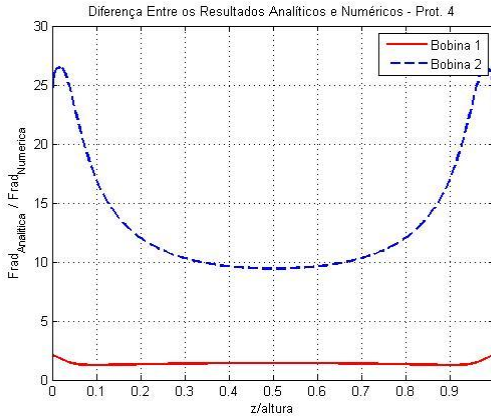


Figura 138 – Diferença entre as forças radiais determinadas analiticamente e numericamente. Protótipo 4.

Nota-se que neste caso, a força radial da bobina 1 calculada pelo modelo analítico também é aproximadamente 1,2 vezes maior que a força determinada numericamente. Entretanto, o resultado analítico da força da bobina 2 é de 10 a 25 vezes maior que o numérico. Esta grande diferença ocorre porque no modelo numérico se considera a interação entre a indução magnética das várias bobinas do reator e no modelo analítico esta interação é desprezada.

Conclui-se então, que apesar das simplificações, os resultados fornecidos pelo modelo analítico são satisfatórios para reatores que possuem apenas uma bobina. Já para reatores formados por diversas bobinas, o modelo analítico deve ser reformulado, uma vez que, nestes casos ele não fornece resultados adequados. Então, por apresentar menores restrições, adota-se o modelo numérico para efetuar o cálculo das forças magnéticas geradas pelos reatores.

CAPÍTULO 7

MODELOS NUMÉRICOS VIBROACÚSTICOS DOS REATORES

Como foi descrito no capítulo anterior, a indução magnética gerada pelos reatores em funcionamento produz forças que impõe um movimento à superfície dos reatores. Do ponto de vista de radiação sonora, esta energia vibratória é responsável pela geração de ruído nos reatores. Portanto, para determinar o ruído gerado pelos reatores, não basta apenas desenvolver um modelo referente ao campo acústico, faz-se necessário também, criar um modelo numérico que represente adequadamente o comportamento dinâmico do reator de modo que a velocidade de vibração ao longo de toda a sua superfície possa ser determinada.

7.1) Modelos numéricos estruturais

Os modelos numéricos estruturais foram desenvolvidos a partir do método de elementos finitos (FEM). Este método consiste em dividir o domínio que está sendo estudado em um determinado número de pequenos elementos conectados a um conjunto de nós. Em cada um dos elementos aplica-se uma aproximação local da variável do problema. Essa aproximação é dada por uma função de interpolação que pode ser linear, quadrática ou de outro tipo. A função de interpolação é definida em relação aos valores que a variável do problema assume nos nós vinculados a cada elemento. Desta forma a junção de todos os elementos representa um sistema de equações relativo ao modelo discreto, com um número finito de incógnitas.

Como no método de elementos finitos a variável do problema é aproximada por uma solução contínua por partes ao longo de todo o domínio, este método acaba sendo mais preciso que o método das diferenças finitas, no qual, a variável do problema é definida apenas nos nós.

Em relação à formulação, no método de elementos finitos, a equação diferencial sujeita às condições de contorno pode ser resolvida com equações algébricas obtidas a partir do uso da formulação fraca do método dos resíduos ponderados, adotando-se funções de interpolação locais.

Conceitos fundamentais sobre o método de elementos finitos e suas aplicações podem ser encontrados nas obras publicadas por Petit [34], Brebbia e Ferrante [35], Cook et al. [36] e Huebner et al. [37]. No

entanto, nos Apêndices 1 e 2, são apresentados, respectivamente, alguns conceitos fundamentais e o desenvolvimento completo da formulação para problemas tridimensionais de elasticidade linear usando o método de elementos finitos.

Com os modelos numéricos estruturais se pretende representar o comportamento dinâmico dos reatores em funcionamento, para que possa ser avaliado o desempenho mecânico da estrutura em função do carregamento aplicado. Além disso, tem-se interesse particular em determinar a velocidade de vibração ao longo de toda a superfície do reator, para que a mesma possa ser usada como condição de excitação dos modelos numéricos de radiação sonora.

Conforme foi apresentado no capítulo 6, a indução magnética gerada pelos reatores produz forças radiais e axiais que induzem vibrações ao longo de toda a estrutura do reator. Nos modelos numéricos estruturais, as forças radiais e axiais aplicadas em cada nó, definidas na Equação (7.1), tiveram suas amplitudes determinadas a partir da razão entre a força total gerada por um conjunto de espiras e o número de nós em que o carregamento fosse aplicado,

$$F_{rad_nó} = \frac{(F_{rad}nbr)(2\pi R)}{n} \quad F_{axi_nó} = \frac{(F_{axi}nbr)(2\pi R)}{n} \quad (7.1)$$

onde F_{rad} e F_{axi} correspondem, respectivamente, às forças radial e axial, calculadas numericamente e expressas em N/m, R o raio médio da bobina e nbr e n o número de espiras e o número de nós da região onde a força foi aplicada.

O fato da malha ter sido gerada no sistema de coordenadas cartesiano, o qual tem sua origem localizada no centro do reator, torna necessário que a força radial seja decomposta em duas componentes F_x e F_y , dadas por

$$F_x = \cos(\phi)F_{rad_nó} \quad F_y = \sen(\phi)F_{rad_nó} \quad (7.2)$$

onde ϕ corresponde ao ângulo formado entre as coordenadas x e y do nó onde está sendo aplicada a força. Este ângulo pode ser calculado a partir da função arcotangente nos quatro quadrantes, usando a Equação (7.3),

$$\phi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (7.3)$$

Conforme foi descrito no Item 2.2), os reatores são formados por várias peças. Porém, nos modelos numéricos foram modeladas apenas as cascas cilíndricas e os espaçadores de fibra de vidro. As cruzetas não foram consideradas e também não foram estabelecidas condições de contorno que as representassem porque, conforme foi verificado nas análises modais experimentais e nos ensaios do nível de vibração dos reatores, a forma com que as mesmas são fixadas nos reatores não afeta significativamente o comportamento dinâmico do reator.

Em termos de propriedades mecânicas, as cascas cilíndricas apresentam duas regiões bem distintas: as extremidades onde não há fios condutores, formadas apenas por fibra de vidro e resina epóxi; e a região onde se encontram as espiras, que além da resina e da fibra de vidro possui os fios de alumínio. Ambas as regiões foram representadas por materiais equivalentes, cujas propriedades elásticas correspondem àquelas determinadas a partir do método da excitação impulsiva, descrito no Item 3.5).

Por se tratar de um material composto, faz-se necessário definir um sistema de eixos ortogonais, no qual as propriedades mecânicas são identificadas. A este sistema denomina-se sistema de coordenadas de ortotropia. De acordo com a forma em que formulação de elementos finitos apresentada no Apêndice 2 foi estabelecida, a matriz de flexibilidade, apresentada por Christensen [38], no sistema de eixos de ortotropia, é dada por:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} \end{bmatrix}^T \quad (7.4)$$

onde ν_{ij} corresponde ao coeficiente de Poisson (deformação causada na direção j , devido a uma solicitação na direção i), E_i ao módulo de elasticidade na direção i e G_{ij} ao módulo de cisalhamento no plano ij .

Como a matriz de flexibilidade é simétrica, pode se estabelecer as seguintes relações:

$$v_{21} = v_{12} \frac{E_2}{E_1} \quad v_{31} = v_{13} \frac{E_3}{E_1} \quad v_{32} = v_{23} \frac{E_3}{E_2} \quad (7.5)$$

Desta forma, para que a análise do comportamento mecânico do reator seja feita, faz-se necessário definir uma matriz de transformação que permita determinar a matriz de flexibilidade no sistema de coordenadas global em que a malha foi definida. Como ponto de partida, define-se um sistema de coordenadas de referência o qual é rotacionado em torno do eixo 3 do sistema de coordenadas de ortotropia. Para facilitar a compreensão, observa-se na Figura 139 uma vista superior da malha estrutural criada, na qual são identificados o sistema de coordenadas de ortotropia (1,2,3) e o sistema de coordenadas de referência (x',y',z'), que por sua vez é paralelo ao sistema global (x,y,z). Note que os eixos 3, z' e z são paralelos e são perpendiculares ao plano da Figura.

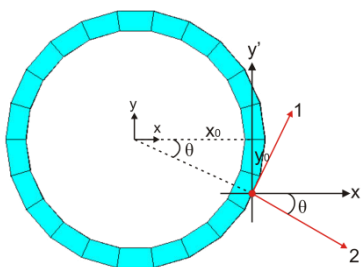


Figura 139 – Sistema de coordenadas global, de referência e de ortotropia.

Sendo assim, uma das maneiras de determinar a matriz de transformação, a qual relaciona também as tensões dadas no sistema de eixos de referência com as tensões no sistema de eixos de ortotropia, é através do equilíbrio de forças nas direções x' , y' e z' sobre o elemento, conforme sugere a Figura 140.

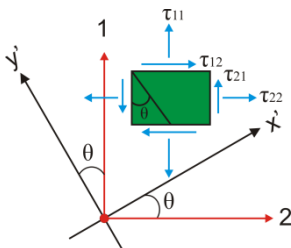


Figura 140 – Transformação de tensão no plano x' - y'

Aplicando as equações de equilíbrio estático nas três direções pode-se estabelecer a matriz de transformação $[T_\sigma]$ como:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 2X & 0 & 0 \\ \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & -2X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ X & -X & 0 & Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} \quad (7.6)$$

onde $X = (\sin\theta\cos\theta)$ e $Y = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$.

Simplificadamente, as matrizes da Equação (7.6) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\sigma = T_\sigma \sigma^1 \quad (7.7)$$

Segundo Pereira [39], a matriz rigidez dada no sistema de eixos de referência é:

$$C = T_\sigma [\bar{C}] T_\sigma \quad (7.8)$$

onde $[\bar{C}]$ representa a matriz de rigidez no sistema de eixos de ortotropia, que por sua vez corresponde à inversa da matriz flexibilidade no sistema de eixos de ortotropia $[\bar{Q}]$.

Em função das características da estrutura e do tipo de esforço aplicado nestes modelos, a estrutura do reator foi modelada com elementos do tipo casca quadrilaterais usando o *software* comercial Ansys® 11.0. Comercialmente este elemento denomina-se *shell63*, ele possui seis graus de liberdade em cada nó, três de translação e três de rotação, totalizando 24 graus de liberdade por elemento. Além disso, este elemento suporta esforços de membrana e de flexão.

Em função da faixa de frequências de análise e desejando obter bons resultados tanto nas análises modais quanto nas análises harmônicas, a discretização da malha estrutural foi estabelecida definindo 12 elementos por comprimento de onda de flexão:

$$razao = \frac{1}{12} \frac{c_f}{f} \quad (7.9)$$

onde c_f representa a velocidade das ondas de flexão na superfície do reator e f a frequência de interesse, em Hz.

Tal discretização resultou no seguinte número de elementos para cada um dos protótipos: 1.064 elementos para o protótipo 3; 3.276 elementos para o protótipo 4 e 10.580 elementos para o protótipo 5.

Na Figura 141, podem ser observadas as malhas correspondentes aos protótipos 3, 4 e 5, sendo que cada cor representa uma região com propriedades mecânicas distintas. Em vermelho estão os espaçadores de fibra de vidro, em roxo as extremidades onde não há fios condutores, e em azul a região onde se encontram as espiras.

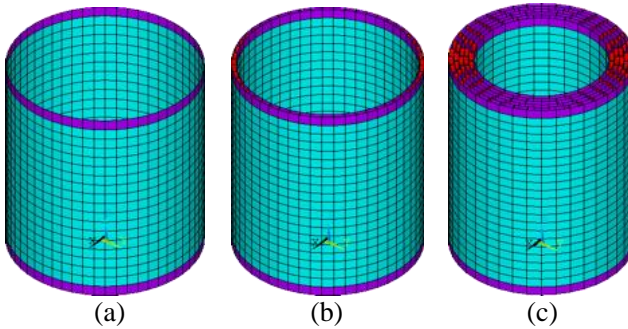


Figura 141 – Malhas estruturais dos protótipos. (a) Protótipo 3 (b) Protótipo 4 (c) Protótipo 5.

7.2) Modelos numéricos de radiação sonora

A eficiência de radiação sonora de cascas cilíndricas com comprimento finito foi avaliada por alguns pesquisadores, entre eles, destacam-se Wang e Lai [40] [41] e Fyfe e Ismail [42]. As conclusões obtidas nestas pesquisas mostram que o efeito da curvatura, a natureza e o tipo de excitação podem influenciar significativamente os resultados de radiação sonora destas estruturas. Por isso, modelos analíticos, como aqueles propostos por Lilien [43] e Fiorentin [44], que determinam a radiação sonora de reatores com núcleo de ar baseados na radiação sonora de fontes esféricas e cilíndricas não fornecem resultados satisfatórios, principalmente naqueles casos em que os reatores são constituídos por várias bobinas. Por esta razão, neste trabalho a análise

da radiação sonora será realizada a partir da definição de um modelo discreto.

Os dois principais métodos utilizados para desenvolver modelos discretos do campo acústico são: o método de elementos finitos (FEM) e o método dos elementos de contorno (BEM) ou também conhecido por *boundary integral equation method*. Ambos os métodos são exclusivamente usados para resolver equações diferenciais parciais e podem ser somente aplicados quando o problema físico pode ser expresso como tal.

A escolha do método deve ser feita em função do tipo de análise que se pretende realizar. Em problemas em que o domínio é externo à fronteira, como problemas de radiação sonora, a extensão do domínio é infinita, portanto, prefere-se usar BEM para solucioná-los. Embora o método de elementos de contorno seja o mais indicado para problemas de radiação sonora, Dokumaci [45] apresenta situações em que podem ocorrer falhas que levam a resultados incorretos na determinação da pressão sonora na superfície.

O método de elementos finitos requer que todo o domínio seja discretizado. Por este motivo, o tempo e o processamento computacional exigidos pelo mesmo são muito maiores que aqueles necessários no método de elementos de contorno. As análises acústicas usando FEM são utilizadas para determinar a resposta acústica no domínio da frequência ou para determinar os modos acústicos de cavidades. No Apêndice 3, encontra-se o desenvolvimento completo da formulação do método de elementos finitos para problemas de acústica linear tridimensionais.

Já o método de elementos de contorno necessita discretizar apenas a superfície das fronteiras do domínio, o que resulta em um número reduzido de graus de liberdade, ou seja, uma redução significativa na quantidade de dados necessários para resolver o problema, implicando em uma melhor eficiência computacional. As análises harmônicas em BEM, permitem resolver problemas de radiação sonora e estimar a resposta acústica em domínios fechados e abertos. No entanto, na sua forma usual, a utilização do BEM fica restrita aos problemas lineares e campos homogêneos.

O uso do método de elementos de contorno em acústica expressa as variáveis acústicas (pressão, velocidade de partícula, intensidade) no interior do domínio como uma integral de superfície sobre a fronteira do domínio acústico. A integral de superfície, originada a partir de manipulações matemáticas da equação de Helmholtz, contém as variáveis principais da formulação, a função de Green e suas derivadas.

Atualmente, existem duas variações do método de elementos de contorno para análise acústica. O método tradicional, denominado método de elementos de contorno direto, que se baseia na resolução da clássica equação integral de Helmholtz para um domínio interno finito, o denominado BEM direto interior, e para um domínio externo infinito, o designado BEM direto exterior. A variável primária usada no BEM direto é a pressão sonora, e outra característica importante deste método consiste na possibilidade de usar tanto elementos contínuos, como os isoparamétricos lineares e quadráticos, quanto elementos descontínuos.

A outra variação, que segundo Wu [46] é resultado de uma abordagem diferente feita por Seybert, Cheng e Wu [47], consiste no BEM variacional indireto. Este método resolve simultaneamente a equação de Helmholtz em ambos os domínios, interno e externo, mesmo que um deles não seja necessário para a análise ou não contenha um fluido. A variável primária no BEM indireto é a diferença de pressão na fronteira dos domínios. O BEM indireto aceita somente elementos contínuos, e em geral, necessita de um tempo maior para definir o sistema de equações, porém, ao contrário do BEM direto, a matriz resultante será simétrica.

Usando uma linguagem menos formal, pode-se afirmar que o método indireto permite trabalhar com domínios abertos (malhas que não são fechadas) de modo que as propriedades definidas para o fluido, tanto na parte interna, quanto na parte externa, são as mesmas. Já o método direto só pode ser utilizado em malhas fechadas, que não apresentam nenhum tipo de abertura ou furos, optando por realizar a análise da região interna da malha ou da região externa.

Outras informações, como os conceitos fundamentais do método de elementos de contorno, o desenvolvimento das formulações e a aplicação das soluções aproximadas para problemas de engenharia podem ser encontrados em Brebbia e Dominguez [48] e Hartmann [49]. Já o desenvolvimento específico do método para aplicações em acústica pode ser encontrado em Marburg e Nolte [50], Kirkup [51], Wu [46], e Fahy e Gardonio [52].

Em função das características dos métodos de elementos finitos e elementos de contorno apresentadas e da forma geométrica dos reatores, os modelos numéricos desenvolvidos para representar a radiação sonora dos reatores foram desenvolvidos no *software* LMS Sysnoise® 5.6, usando o método de elementos de contorno indireto.

As malhas utilizadas para simular a radiação sonora dos protótipos 3, 4 e 5 foram as mesmas usadas nos modelos numéricos estruturais. Em relação às propriedades do fluido, densidade e

velocidade de propagação sonora, definiram-se, respectivamente, 1,21 kg/m³ e 343 m/s, valores típicos do ar atmosférico a uma temperatura de 20 °C.

A excitação do campo acústico deve ser introduzida através das velocidades normais de vibração da superfície localizada na fronteira. Como nos modelos numéricos estruturais são determinados os deslocamentos nodais em cada um dos eixos cartesianos, são necessárias algumas manipulações matemáticas para determinar a velocidade normal da superfície. Inicialmente, admite-se um movimento harmônico e deriva-se o deslocamento em relação ao tempo para se obter a velocidade. Em seguida, são criados quatro vetores correspondentes às posições dos quatro nós que compõem o elemento, conforme se observa na Figura 142 (a) e, então, determinam-se os vetores v_{12} e v_{14} , observados na Figura 142 (b), a partir da seguinte operação:

$$v_{12} = v_2 - v_1 \quad e \quad v_{14} = v_4 - v_1 \quad (7.10)$$

O conceito de produto vetorial, definido no Apêndice 4, pode ser aplicado a estes dois vetores, de forma que a operação $v_{14} \times v_{12}$ resulte em um vetor v_n perpendicular ao plano formado por estes outros dois, conforme se observa na Figura 143. Tem-se interesse que o módulo deste vetor seja unitário, logo, as coordenadas deste vetor são divididas pelo seu módulo.

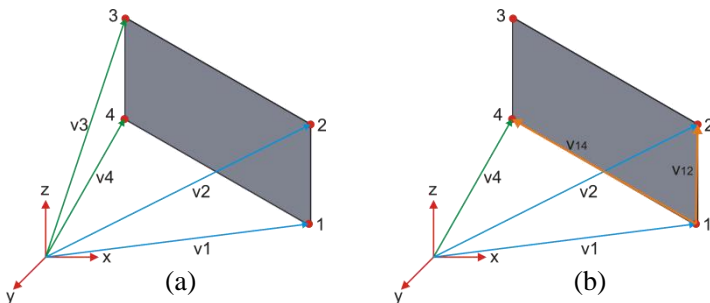


Figura 142 – (a) Vetores de posição dos 4 nós do elemento (b) Vetores v_{12} e v_{14} .

Este procedimento é repetido para os outros três nós que compõem o elemento, de modo que sejam definidos quatro vetores normais normalizados, um em cada um dos nós do elemento.

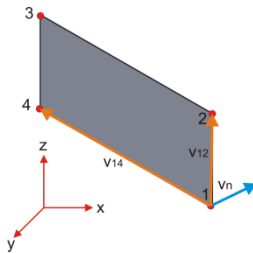


Figura 143 – Vetor v_n resultante do produto vetorial $v_{14} \times v_{12}$.

O conceito de produto escalar, apresentado no Item 4.1) do Apêndice 4, pode ser aplicado entre o vetor velocidade \dot{u} de um determinado nó e seu respectivo vetor normal normalizado v_n , de maneira que se obtenha a velocidade escalar daquele dado nó. Logo, a partir das quatro velocidades escalares determinadas para cada um dos nós do elemento, se determina a velocidade escalar média do elemento através da seguinte Equação:

$$\dot{u}_n = \frac{(\dot{u}_1 + \dot{u}_2 + \dot{u}_3 + \dot{u}_4) v_n}{4} \tag{7.11}$$

Assim, para realizar a análise da radiação sonora dos reatores deve-se ainda definir a faixa de frequências de interesse, que neste caso corresponde à frequência de 120 Hz. Por fim, para verificar os resultados e fazer o pós-processamento, foram criadas duas malhas de pontos, uma cilíndrica, equivalente ao contorno prescrito definido na determinação experimental do nível de potência sonora dos reatores, observada na Figura 144 (a), e outra representada por dois planos ortogonais, observada na Figura 144 (b), cuja finalidade é avaliar a distribuição do campo sonoro a uma distância de até 2 m em relação a superfície externa do reator.

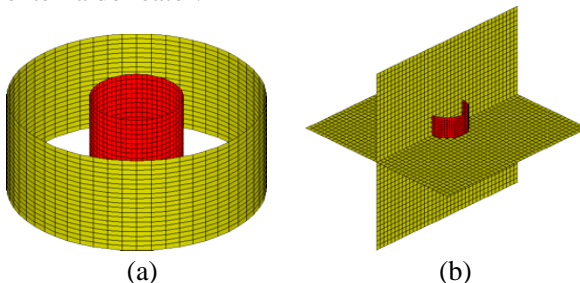


Figura 144 – Malhas criadas para a análise de radiação sonora do protótipo 3.

7.3) Resultados e análises de parâmetros

Nesta seção se faz um estudo detalhado do comportamento vibroacústico a partir dos modelos numéricos desenvolvidos. O objetivo principal consiste em realizar uma série de análises que permitam avaliar cada uma das variáveis envolvidas no problema e, por consequência, determinar aquelas que afetam significativamente o ruído radiado pelos reatores.

7.3.1) Carregamento constante e carregamento variável ao longo do eixo axial

Conforme se apresentou no capítulo 6, tanto as forças radiais quanto as forças axiais variam ao longo da altura do reator, caracterizando um carregamento variável ao longo do eixo z . Buscando verificar se a aplicação de um carregamento constante fornece bons resultados, faz-se a comparação dos resultados dos modelos numéricos estruturais e acústicos desenvolvidos para o protótipo 3.

Observa-se que a variação da intensidade das forças quando se aplica o carregamento constante, observado na Figura 145 (a), varia muito pouco comparada àquela do carregamento variável, observado na Figura 145 (b).

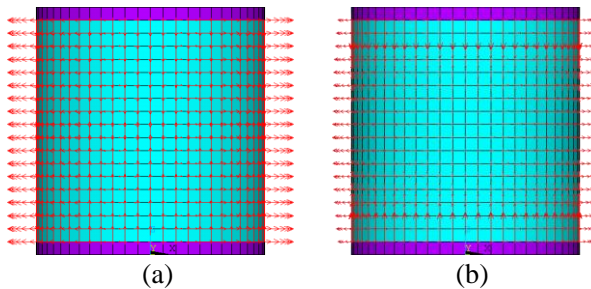


Figura 145 – Carregamento do protótipo 3 no plano x - z . (a) Constante (b) Variável.

O carregamento constante resulta da razão entre as forças axiais e radiais totais geradas pela bobina e o número de nós onde elas são aplicadas, sendo que as forças totais são obtidas a partir da multiplicação do valor médio das forças por espira e o número total de espiras da bobina.

Como pode se observar na Figura 146, a forma assumida pela estrutura em função do carregamento é a mesma em ambas as situações.

Inclusive, ainda pode-se afirmar que exceto para os casos em que a forma dos modos estruturais é análoga àquela da estrutura deformada a estrutura irá apresentar uma resposta forçada, cuja forma não coincide com aquela de nenhum modo estrutural, sendo caracterizada apenas pelo carregamento aplicado.

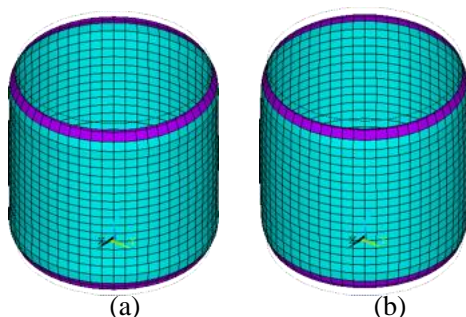


Figura 146 – Estrutura deformada em função do carregamento aplicado. (a) Constante (b) Variável.

A faixa da velocidade de vibração da superfície do protótipo 3, apresentada na Figura 147 varia entre $1,84\text{E-}4$ m/s e $2,62\text{E-}4$ m/s quando se aplica o carregamento constante, e entre $2,02\text{E-}4$ m/s e $2,97\text{E-}4$ m/s quando se aplica o carregamento distribuído.

Esta pequena variação da velocidade de vibração em função do tipo de carregamento aplicado resulta em uma diferença de apenas 0,3 dB entre os dois casos, sendo que o nível de pressão sonora médio do protótipo 3 foi de 63,1 dB quando se utilizou carregamento constante e 63,4 dB quando se utilizou carregamento variável.

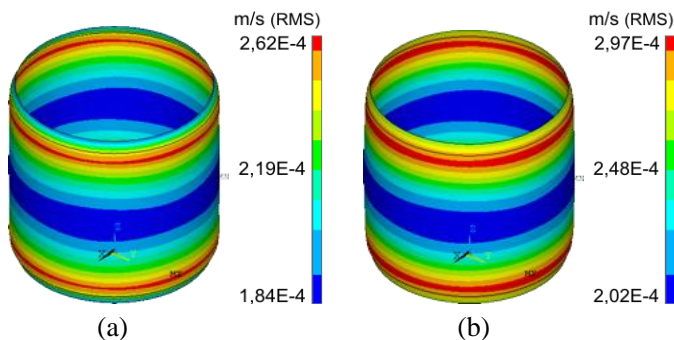


Figura 147 – Distribuição da velocidade de vibração do protótipo 3. (a) Constante (b) Variável.

Na Figura 148, pode se observar ao longo da superfície do reator a distribuição da velocidade de vibração usada como excitação do campo acústico, e a distribuição do nível de pressão sonora na malha de pontos em ambas as situações. Salienta-se que o afastamento entre a superfície do reator e a malha de pontos é de 1,0 m.

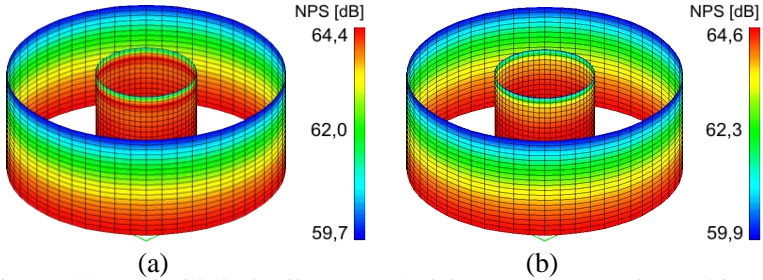


Figura 148 – Velocidade de vibração e nível de pressão sonora do protótipo 3. (a) Constante (b) Variável.

Pelo fato do carregamento constante fornecer bons resultados e possuir uma fácil implementação nos modelos numéricos, este tipo será o adotado para efetuar todas as demais análises.

7.3.2) Forças radial e axial

Com a finalidade de avaliar a contribuição de cada uma das forças no ruído gerado pelos reatores, a seguir são comparados os resultados decorrentes do modelo que considera somente as forças radiais com aquele resultante da aplicação de ambas as forças, axial e radial.

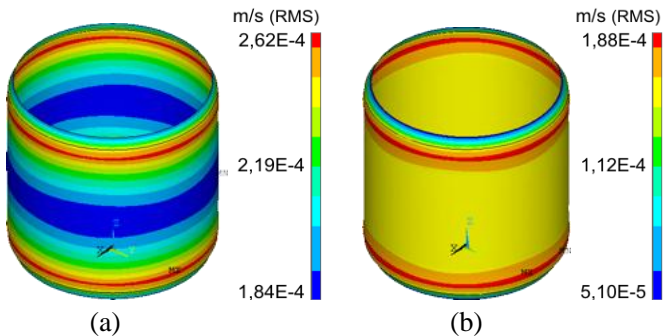


Figura 149 – Distribuição da velocidade de vibração no protótipo 3. (a) F_{rad} e F_{axi} (b) Somente F_{rad} .

Ao observar a Figura 149, fica claro que ao aplicar somente as forças radiais, a distribuição da velocidade de vibração ao longo da superfície é mais homogênea, e seu nível fica entre $5,10\text{E-}5$ m/s e $1,88\text{E-}4$ m/s enquanto que para a situação em que se considera ambas as forças o nível fica entre $1,84\text{E-}4$ m/s e $2,62\text{E-}4$ m/s.

Por outro lado, como se observa na Figura 150, a distribuição do nível de pressão sonora é praticamente igual. No caso em que apenas a força radial é considerada, o nível de pressão médio é de 62,5 dB enquanto que ao considerar ambas as forças o nível é de 63,1 dB.

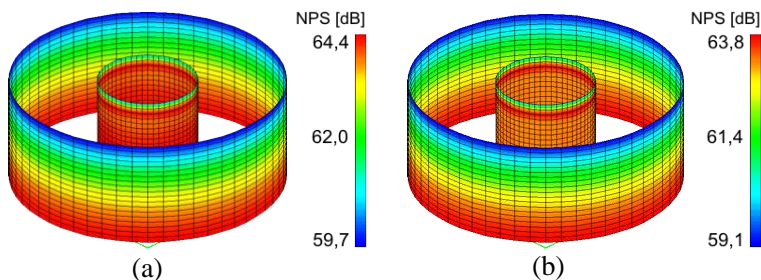


Figura 150 – Velocidade de vibração e nível de pressão sonora do protótipo 3.

(a) F_{rad} e F_{axi} (b) Somente F_{rad} .

Do ponto de vista de radiação sonora, esta análise permite afirmar que as forças radiais são as principais responsáveis pela geração de ruído nos reatores e que o fato de desprezar as forças axiais nos modelos não descaracterizará a distribuição do campo sonoro tão pouco a amplitude do nível de pressão sonora médio, que deverá ter uma diferença inferior a 1,0 dB.

7.3.3) Influência do amortecimento no ruído radiado

Em um sistema dinâmico qualquer, o amortecimento resulta em perda de energia, provocando uma redução na amplitude do movimento. Portanto, a seguir são feitas análises levando em conta o amortecimento para avaliar a influência do mesmo no ruído radiado pelos reatores.

Existem diferentes tipos de amortecimento, entre eles destacam-se, o amortecimento estrutural, o amortecimento viscoso, o viscoelástico e o amortecimento de *Coulumb*. As características fundamentais de cada tipo de amortecimento podem ser encontradas em Nashif et al. [53] e Beranek e Vér [54]. No amortecimento viscoso, a força que se opõe ao movimento é linearmente proporcional à velocidade e, conseqüentemente, à frequência. Já no amortecimento estrutural, que

depende exclusivamente das características da estrutura, a força que se opõe ao movimento depende do deslocamento, logo, este tipo de amortecimento é constante com a frequência, sendo caracterizado pelo fator de amortecimento ξ . Existem vários métodos para determinar o amortecimento, entre eles destacam-se o método da potência de entrada, descrito por Carfagni e Pierini [55][56] e o método do decaimento da resposta impulsiva, apresentado por Bloss e Rao [57].

Em uma primeira análise, se considera no modelo numérico estrutural, um fator de amortecimento de 0,02, um valor típico para esta estrutura, como pode se observar nos fatores de amortecimento determinados nas análises modais experimentais. Neste primeiro caso, o nível de vibração na superfície do protótipo 3 variou entre 1,85E-4 m/s e 2,6E-4 m/s, ou seja, praticamente igual àquele do modelo em que o amortecimento foi desprezado, cuja variação está entre 1,84E-4 m/s e 2,62E-4 m/s.

O nível de pressão sonora médio, determinado a partir das velocidades de vibração obtidas quando se admite um fator de amortecimento de 0,02 foi de 63,1 dB, exatamente igual àquele determinado quando o amortecimento foi desprezado.

Como o amortecimento aplicado não afetou significativamente os resultados, decidiu-se realizar outra análise, considerando um fator de amortecimento de 0,2, um amortecimento elevado, equivalente ao encontrado em amortecedores de certos automóveis. E mesmo neste caso, o nível de pressão sonora médio ficou muito próximo daquele calculado quando o amortecimento é desprezado, 62,5 dB. Além disso, pode se observar que a distribuição do campo sonoro usando estes dois fatores de amortecimento, observada na Figura 151, é idêntica àquela onde não se admite amortecimento, observada na Figura 150 (a).

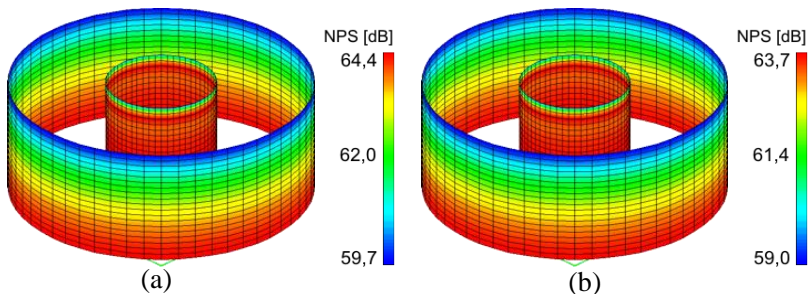


Figura 151 – Velocidade de vibração e nível de pressão sonora do protótipo 3.
(a) $\xi=0,02$ (b) $\xi=0,2$.

Conclui-se, que pelo fato da estrutura do reator possuir uma resposta forçada, o amortecimento não tem uma influência significativa no ruído radiado pelo reator.

7.3.4) Análise para uma faixa de frequências admitindo um carregamento constante

Para avaliar se o comportamento dinâmico da estrutura tem uma influência significativa sobre o ruído gerado pelos reatores, nesta análise aplica-se um carregamento constante para toda a faixa de frequências, compreendida entre 2,0 Hz e 1,2 kHz. Conforme se observa na Figura 152, as forças radiais e axiais aplicadas em cada um dos nós da malha estrutural do protótipo 3 foram, respectivamente, 1,84 N e 1,02 N.

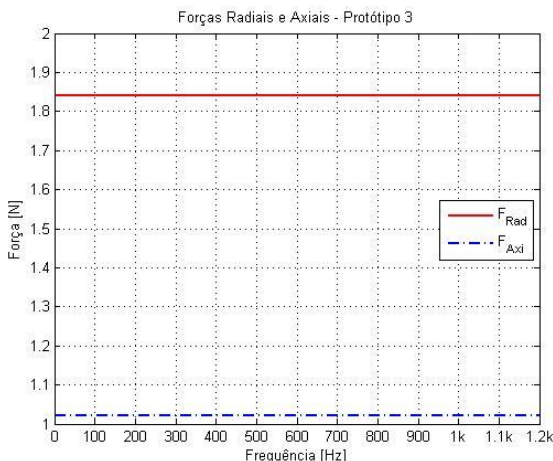


Figura 152 – Forças radial e axial aplicadas em cada um dos nós da malha estrutural do Protótipo 3.

A velocidade de vibração resultante do carregamento aplicado nesta análise pode ser observado na Figura 153. Particularmente, estes são resultados referentes ao nó 10, de coordenadas [0,570 0 0,585], ou seja, localizado à meia altura do reator.

A análise da Figura 153 mostra que a amplitude da velocidade de vibração tende a aumentar com o aumento da frequência. Observa-se ainda, que existem frequências específicas nas quais a amplitude da velocidade assume valores máximos. Estas frequências coincidem com aquelas dos modos estruturais apresentados na Figura 154.

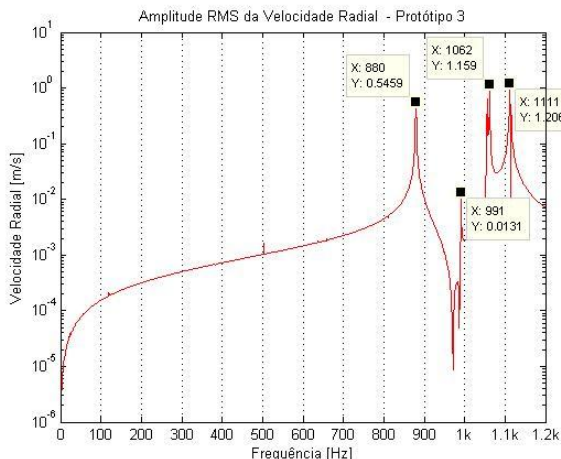


Figura 153 – Velocidade de vibração do protótipo 3, admitindo um carregamento constante ao longo da faixa de frequências.

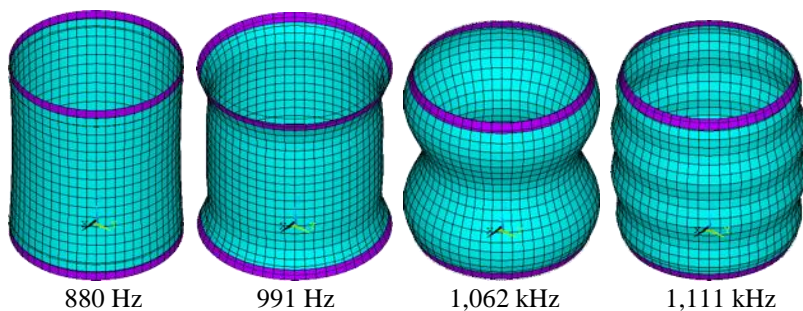


Figura 154 – Modos estruturais de vibração do Protótipo 3.

Então, conforme se observa na Figura 155, a semelhança entre as formas do carregamento e dos modos estruturais faz com que as forças acabem excitando estas frequências naturais. Logo, a estrutura do reator é deformada de acordo com o modo excitado. Portanto, nestas frequências o reator não apresenta uma resposta forçada como aquela obtida em 120 Hz, mostrada na Figura 146 (a).

Ao usar estas velocidades de vibração como condição de excitação do campo acústico, determinam-se, através do modelo numérico de radiação sonora, os resultados do nível de pressão sonora do protótipo 3.

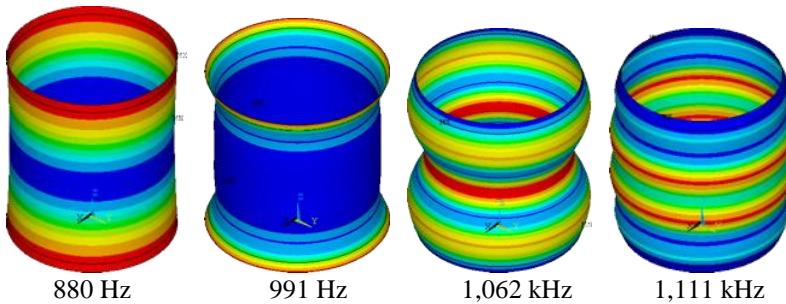


Figura 155 – Respostas forçadas do Protótipo 3.

Na Figura 156 apresentam-se os níveis de pressão sonora de três pontos localizados na extremidade inferior, na meia altura e na extremidade superior da malha de pontos cilíndrica definida à 1,0 m da superfície do reator.

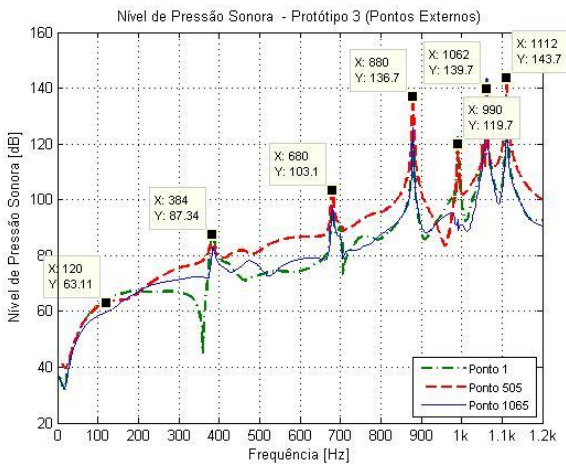


Figura 156 – Nível de pressão sonora em pontos externos do protótipo 3, admitindo um carregamento constante.

Já na Figura 157 observa-se o nível de pressão sonora de três pontos localizados nestas alturas, porém, sobre o eixo axial do reator, na cavidade interna.

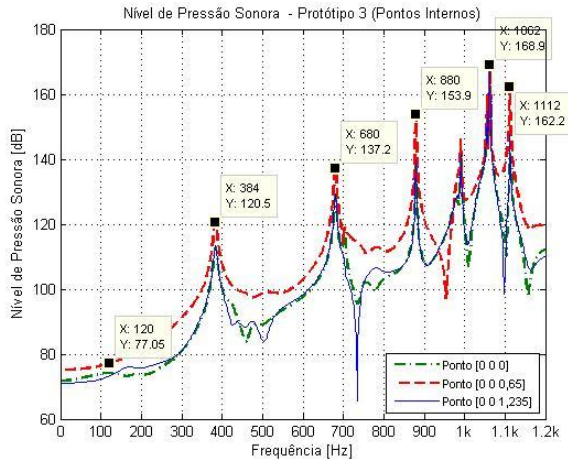


Figura 157 – Nível de pressão sonora em pontos internos do protótipo 3, admitindo um carregamento constante.

Observa-se que os maiores níveis de pressão sonora se encontram naquelas frequências coincidentes com os modos de vibração estruturais, logo, fica evidente a grande influência do comportamento dinâmico da estrutura no ruído gerado pelos reatores. Além disso, observa-se que com o aumento da frequência tem-se um aumento do nível de pressão sonora, uma vez que os modos tendem a ter maior eficiência de radiação. Salienta-se que os níveis de pressão sonora calculados nestas frequências não são reais, uma vez que, a intensidade da corrente elétrica aplicada nos reatores diminui consideravelmente com a frequência, o que implica em forças de excitação com menores amplitudes. Os resultados desta análise servem apenas para evidenciar que o nível de ruído gerado pelos reatores pode aumentar consideravelmente quando a frequência das forças de excitação coincide com àquelas de determinados modos estruturais.

Nota-se ainda que em ambos os casos são observados elevados níveis de pressão sonora nas frequências de 384 Hz e 680 Hz. A explicação para tal comportamento pode estar relacionada com os modos acústicos da cavidade interna do reator, que serão determinados no Item 7.3.6).

7.3.5) Análise para uma faixa de frequências admitindo um campo de velocidade constante

Buscando verificar apenas a influência dos modos acústicos da cavidade interna no ruído gerado pelos reatores, apresenta-se aqui uma análise na qual a excitação do campo acústico é feita através da aplicação de uma velocidade de vibração constante ao longo de toda a faixa de frequências. Particularmente, a faixa de frequências se estende de 2,0 Hz até 1,2 kHz, com intervalos de 2 Hz e o nível de velocidade considerado corresponde aquele determinado pelo modelo numérico estrutural na frequência de 120 Hz, quando se aplica um carregamento constante ao longo do eixo axial do reator. A distribuição desta velocidade ao longo da superfície do reator pode ser observada na Figura 147 (a).

Os resultados dos níveis de pressão sonora ao longo da faixa de frequências para três pontos localizados na extremidade inferior, na meia altura e na extremidade superior da malha de pontos cilíndrica, podem ser observados na Figura 158.

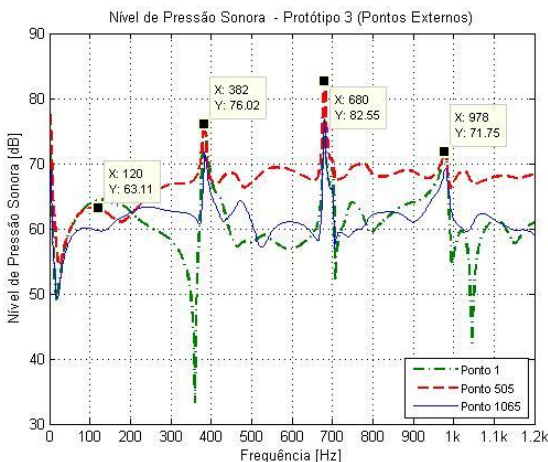


Figura 158 – Nível de pressão sonora em pontos externos do protótipo 3, admitindo velocidade constante.

Já na Figura 159 observa-se o nível de pressão sonora de três pontos localizados nestas três alturas, porém, sobre o eixo axial do reator, na cavidade interna.

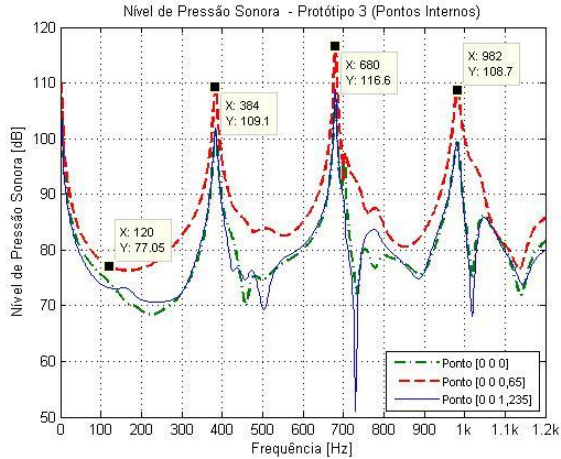


Figura 159 – Nível de pressão sonora em pontos internos do protótipo 3, admitindo velocidade constante.

Observe que o nível de pressão sonora registrado na região interna do reator é superior àquele registrado na região externa, afastada 1,0 m de sua superfície. Além disso, observa-se que para as frequências de 382 Hz, 680 Hz e 982 Hz são registrados os maiores níveis de pressão sonora. Conforme será visto no Item 7.3.6), isto ocorre devido à influência dos modos acústicos radiais da cavidade interna do reator. Salienta-se que duas destas frequências, 382 Hz e 680 Hz, também apresentaram elevados níveis de pressão sonora na análise apresentada no Item 7.3.4).

7.3.6) Determinação dos modos acústicos da cavidade

Como os reatores possuem grandes dimensões, no modelo proposto, a excitação do campo acústico é feita através da inserção de uma fonte esférica pontual no interior da cavidade interna. Conforme apresentado por Reynolds [58] ao admitir-se um movimento senoidal, as ondas sonoras incidentes geradas por uma fonte esférica se propagam no espaço de acordo com a seguinte equação:

$$p_{inc} = \frac{P}{r} e^{-jkr} \quad (7.12)$$

onde r corresponde a distância entre a fonte e o ponto no qual se deseja determinar o campo sonoro incidente e k o número de onda. Como não há interesse em determinar o nível absoluto de pressão sonora, considera-se que a amplitude da onda sonora incidente, P , tem valor unitário.

Visto que em uma análise em BEM indireto, o fluido da região interna e da região externa é o mesmo, a condição de continuidade de pressão deve ser satisfeita. Portanto, faz-se necessário que seja definido nas extremidades da malha uma condição de contorno que represente esta continuidade. Observe na Figura 160 as condições de contorno definidas para determinar os modos acústicos da cavidade interna do protótipo 3.

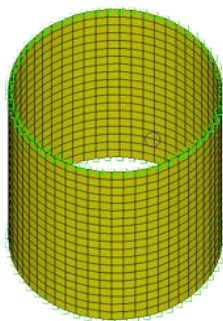


Figura 160 – Condições de contorno estabelecidas para determinar os modos acústicos da cavidade interna.

Note que o círculo no interior da malha representa a fonte esférica, que intencionalmente foi posicionada sobre um ponto não simétrico de coordenadas $[0,33 \ 0,17 \ 0,45]$, para evitar linhas nodais e garantir que todos os modos sejam excitados.

Resolvendo este problema, tem-se como resultado a distribuição do nível de pressão sonora ao longo da frequência, que por sua vez, indicará as ressonâncias acústicas da cavidade interna do protótipo 3. Na Figura 161, podem ser observados os níveis de pressão sonora de dois pontos, um situado sobre o eixo axial, na extremidade inferior do reator, e o outro definido sobre uma posição não simétrica, de coordenadas $[0,27 \ 0,45 \ 0,60]$. Cada um dos picos apresentados na Figura 161 corresponde a uma respectiva ressonância da cavidade interna do protótipo 3. Nota-se que alguns picos observados na resposta de um determinado ponto não são observados na resposta do outro, uma vez

que o mesmo se encontra sobre um ponto nodal daquele respectivo modo acústico.

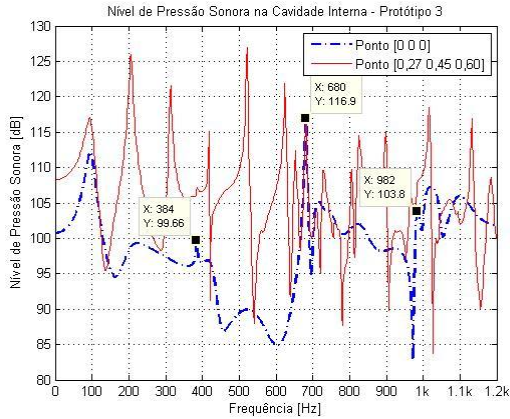


Figura 161 – Ressonâncias acústicas da cavidade interna do protótipo 3.

Tem-se interesse em analisar as ressonâncias que aparecem nas frequências de 372 Hz, 680 Hz e 984 Hz, uma vez que são nestas frequências ou em frequências muito próximas que as análises apresentadas nos Itens 7.3.4) e 7.3.5) apresentaram elevados níveis de pressão sonora. Portanto, na Figura 162 apresentam-se as distribuições do campo sonoro da cavidade interna do protótipo 3 no plano x - y para cada uma destas frequências.

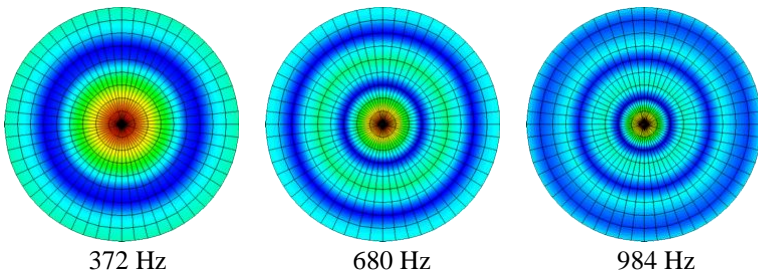


Figura 162 – Vista no plano x - y dos modos acústicos da cavidade interna do protótipo 3. (a) 372 Hz (b) 680 Hz (c) 984 Hz.

Conforme se observa na Figura 162, estas ressonâncias correspondem a modos acústicos puramente radiais. Portanto, pode-se afirmar que os modos acústicos radiais da cavidade interna dos reatores

influenciam significativamente no ruído gerado pelos reatores. Já os modos longitudinais e os circunferenciais não afetam significativamente o ruído gerado pelos reatores.

7.4) Validação numérico-experimental

Aqui são feitas comparações entre os resultados experimentais e os resultados numéricos para verificar se os modelos desenvolvidos permitem representar adequadamente o problema físico abordado.

7.4.1) Validação das propriedades mecânicas medidas

O processo de fabricação dos reatores não apresenta um rígido controle de fabricação em relação à distribuição da fibra de vidro e da resina ao longo da sua superfície. Portanto, existe uma variação significativa da espessura das cascas cilíndricas que compõem o reator, principalmente nas extremidades, conforme pode se observar na Figura 163.



Figura 163 – Seção transversal de uma casca cilíndrica, onde se nota uma considerável variação na espessura.

O processo de fabricação somado às pequenas dimensões das amostras utilizadas nos ensaios realizados para determinar as propriedades mecânicas do material, podem comprometer os resultados

obtidos. Logo, para verificar se as propriedades mecânicas determinadas representam adequadamente o comportamento de toda a estrutura, nesta seção realiza-se a comparação entre os resultados experimentais e numéricos obtidos a partir da análise modal de três cascas, que representam respectivamente, 1/8 da superfície do protótipo 3, e 1/8 das superfícies externas dos protótipos 4 e 5.

Para realizar a análise modal experimental, a casca correspondente a um determinado protótipo foi suspensa em um suporte através de elementos elásticos, conforme se observa na Figura 164. Esta forma de fixação permite total liberdade de movimento da casca em todas as direções, e é comumente denominada como condição de contorno do tipo livre-livre.



Figura 164 – Casca do protótipo 4 preparada para realização da análise modal experimental.

A malha de pontos de medição criada para representar a superfície da casca apresenta 81 pontos, 9 pontos na direção axial e 9 pontos na direção circunferencial.

O procedimento de medição consistiu em determinar as funções resposta em frequência (FRFs) de inércia a partir da medição da aceleração num ponto fixo da casca, o ponto 66, e da força proveniente do impacto do martelo ao longo dos 81 pontos de medição.

Do pós-processamento das FRFs de inércia medidas, obtêm-se as curvas soma das FRFs, apresentadas nas Figuras 165 e 166, onde os picos correspondem aos possíveis modos de vibração da estrutura analisada.

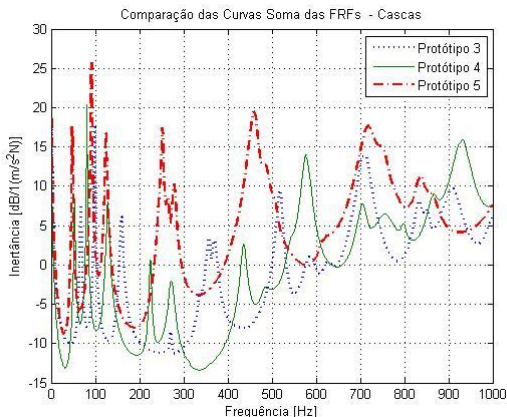


Figura 165 – Curvas soma das FRFs obtidas para cada uma das cascas dos protótipos 3, 4 e 5.

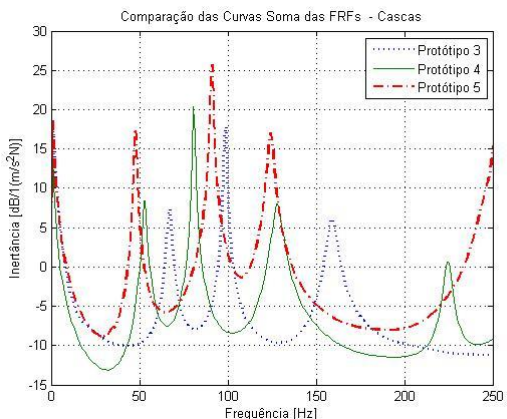


Figura 166 – Curvas soma das FRFs até 250 Hz para cada uma das cascas dos protótipos 3, 4 e 5.

Particularmente, na Figura 165 a faixa de frequências se estende até 1 kHz, e na Figura 166 limita-se em 250 Hz para evidenciar a diferença dos três primeiros modos de vibração, cujas frequências e respectivos fatores de amortecimento são apresentados nas Tabelas 22 e 23. Ao se observar a Figura 166 fica claro que a rigidez do material que forma o protótipo 3 é maior que aquela dos outros protótipos, uma vez que suas ressonâncias se encontram em frequências mais altas. Observe

que a mesma conclusão é obtida quando são comparados os módulos de elasticidade determinados pelo método da excitação impulsiva, descrito no Item 3.5).

Tabela 22 – Frequências naturais dos 3 primeiros modos de vibração.

	1º modo	2º modo	3º modo
Protótipo 3	67,0 Hz	99,0 Hz	159,0 Hz
Protótipo 4	53,0 Hz	81,0 Hz	128,0 Hz
Protótipo 5	47,0 Hz	91,0 Hz	124,0 Hz

Tabela 23 – Fatores de amortecimento dos 3 primeiros modos de vibração.

	ξ (1º modo)	ξ (2º modo)	ξ (3º modo)
Protótipo 3	1,32%	0,24%	1,37%
Protótipo 4	1,93%	0,44%	1,70%
Protótipo 5	0,97%	0,41%	0,99%

As formas de vibração referentes às duas primeiras ressonâncias correspondem ao primeiro modo torcional e primeiro modo de flexão da casca, como se observa na Figura 167.

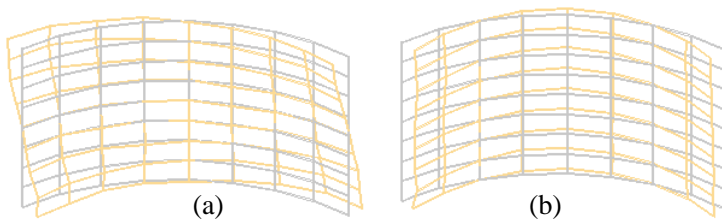


Figura 167 – Formas de vibração das cascas. (a) 1º modo torcional (b) 1º modo flexão.

Nos modelos numéricos desenvolvidos para realizar a análise modal foram utilizadas as propriedades mecânicas equivalentes determinadas através do método da excitação impulsiva. A malha de elementos correspondente a cada uma das cascas foi criada utilizando elementos do tipo casca, e a espessura das mesmas variava ao longo do

eixo axial, como pode se observar na Figura 168, onde se apresenta a malha criada para representar a casca do protótipo 3.

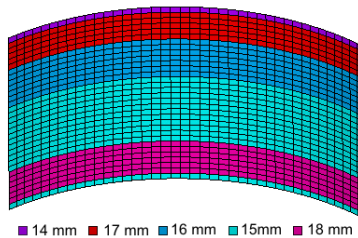


Figura 168 – Malha correspondente a casca do protótipo 3 com a identificação das diferentes espessuras.

As frequências de ressonância, determinadas numericamente e experimentalmente, correspondentes aos três primeiros modos de vibração das cascas dos protótipos 3, 4 e 5 são observadas na Tabela 24, que apresenta também a diferença entre os resultados experimentais e os numéricos.

Tabela 24 – Comparação entre os modos experimentais e numéricos.

		1º modo	2º modo	3º modo
Protótipo 3	Num.	53 Hz	91 Hz	135 Hz
	Exp.	67 Hz	99 Hz	159 Hz
	Dif.	20,9 %	8,0 %	15,0 %
Protótipo 4	Num.	41 Hz	67 Hz	103 Hz
	Exp.	53 Hz	81 Hz	128 Hz
	Dif.	22,6 %	17,3 %	19,5 %
Protótipo 5	Num.	35 Hz	81 Hz	105 Hz
	Exp.	47 Hz	91 Hz	124 Hz
	Dif.	25,5 %	11,0 %	15,3 %

Dada a grande variação das propriedades geométricas e a complexidade do material, constituído por fios de alumínio, fibra de vidro e resina epóxi, a determinação das propriedades mecânicas através do método da excitação impulsiva apresenta resultados considerados satisfatórios. No entanto, as propriedades mecânicas do material

determinadas através deste ensaio, poderiam ser melhoradas a partir da utilização de metodologias de ajuste de modelos, como aquelas propostas por Friswell e Mottershead [59], e Lauwagie e Dascotte [60].

7.4.2) Validação do modelo numérico estrutural

Assim como no caso das cascas, a comparação entre os resultados experimentais e os resultados numéricos dos modos de vibração dos protótipos 3, 4 e 5 mostra pequenas divergências, evidenciando mais uma vez a importância no método usado para a determinação das propriedades mecânicas do material do reator. Na Tabela 25 pode se observar uma comparação das frequências de ressonância dos modos de vibração apresentados no Item 4.1.2).

Tabela 25 – Comparação entre os resultados numéricos e experimentais.

		Modo 1	Modo 2	Modo 3
Protótipo 3	Num.	62 Hz	119 Hz	120 Hz
	Exp.	57 Hz	114 Hz	125 Hz
	Dif.	8,8 %	4,4 %	-4,0 %
Protótipo 4	Num.	57 Hz	133 Hz	162 Hz
	Exp.	57 Hz	138 Hz	150 Hz
	Dif.	0,0 %	-3,6 %	8,0 %
Protótipo 5	Num.	141 Hz	287 Hz	306 Hz
	Exp.	168 Hz	208 Hz	312 Hz
	Dif.	-16,1 %	38,0 %	1,9 %

Observe que a diferença entre os resultados numéricos e experimentais são maiores para o protótipo 5. Tal comportamento está relacionado ao fato das propriedades mecânicas dos protótipos serem determinadas a partir de amostras retiradas da casca cilíndrica externa. Portanto, ao admitir que as propriedades mecânicas de todas as cascas cilíndricas que constituem o protótipo 5 são iguais, acabam induzindo a um erro maior.

Em relação ao comportamento estrutural dos reatores em funcionamento, além das propriedades mecânicas, as forças geradas pela indução magnética podem influenciar nos resultados. Por isso, vale lembrar que nas análises numéricas estruturais foi admitido um

carregamento constante ao longo do eixo axial do reator, no qual, a força total gerada pela bobina foi dividida pelo número de nós da bobina em que a força seria aplicada. As amplitudes das forças totais geradas pelas bobinas dos protótipos 3, 4 e 5, assim como a amplitude da força aplicada em cada nó, podem ser observadas na Tabela 26.

Tabela 26 – Forças radiais e a axiais aplicadas nos modelos numéricos.

Protótipo	Bobina	Força Radial [N]		Força Axial [N]	
		Total	Nodal	Total	Nodal
Protótipo 3	Bobina 1	1855,2	1,8405	514,9	1,0217
Protótipo 4	Bobina 1	6748,4	6,4888	1045,4	2,0103
	Bobina 2	791,5	0,7611	921,9	1,7728
Protótipo 5	Bobina 1	3466,1	5,6268	390,9	1,2692
	Bobina 2	1894,2	1,5375	226,3	0,3674
	Bobina 3	1657,6	2,3545	295,5	0,8395
	Bobina 4	1227,8	0,8720	320,6	0,4555
	Bobina 5	678,3	0,4282	284,6	0,3594
	Bobina 6	-270,8	-0,3078	462,8	1,0517

A forma da superfície deformada de cada um dos protótipos pode ser verificada na Figura 169 e a distribuição da velocidade de vibração ao longo da superfície dos protótipos podem ser observadas nas Figuras 170 e 171.

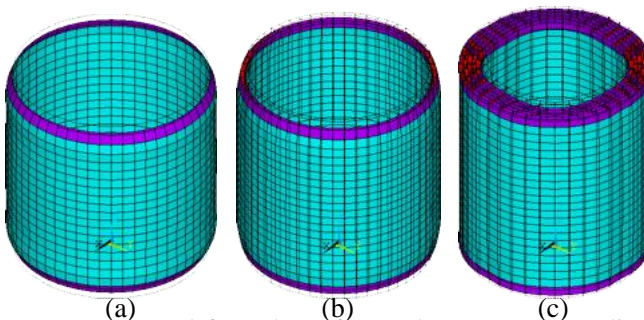


Figura 169 – Estrutura deformada em função do carregamento aplicado. (a) Protótipo 3 (b) Protótipo 4 (c) Protótipo 5.

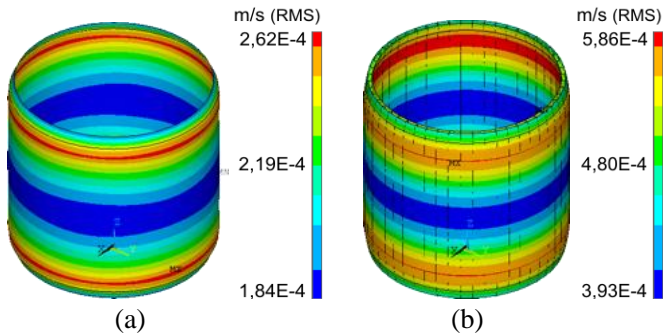


Figura 170 – Velocidade de vibração ao longo da superfície. (a) Protótipo 3 (b) Protótipo 4.

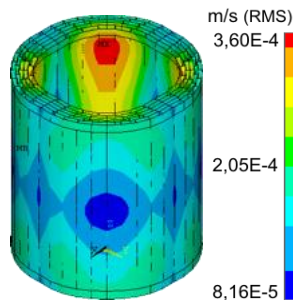


Figura 171 – Velocidade de vibração ao longo da superfície do Protótipo 5.

A amplitude do nível de vibração em 120 Hz determinada numericamente para o protótipo 3, oscilou entre $1,84E-4$ m/s e $2,62E-4$ m/s, para o protótipo 4, entre $3,93E-4$ m/s e $5,86E-4$ m/s e para o protótipo 5 entre $8,16E-5$ m/s e $3,6E-4$ m/s. Ao comparar estes valores com os níveis experimentais médios de vibração, $4,95E-4$ m/s para o protótipo 3, $7,77E-5$ m/s do protótipo 4 e $6,67E-5$ m/s do protótipo 5, observa-se uma diferença significativa, principalmente nos protótipos 4 e 5.

Ao contrário do que se observou nas medições experimentais do nível de vibração dos três protótipos, nos modelos numéricos, tanto a variação da velocidade na superfície dos reatores, quanto a forma da estrutura deformada apresentam uma simetria, em função das propriedades e carregamentos definidos. Observe que os maiores níveis de vibração, regiões de cor vermelha, se encontram próximos das extremidades e que a forma da estrutura deformada dos protótipos 3 e 4 são idênticas, enquanto que a forma do protótipo 5 deformado é

determinada em função do número e do posicionamento dos espaçadores de fibra de vidro.

Vale lembrar que os reatores apresentam uma resposta forçada, uma vez que os modos estruturais próximos da frequência de excitação, 120 Hz, não são excitados.

7.4.3) Validação do modelo numérico de radiação sonora

Como os modelos numéricos de radiação sonora dependem da velocidade de vibração da superfície dos reatores, determinada através dos modelos numéricos estruturais, a distribuição do nível de pressão sonora ao longo de todo o ambiente que envolve o reator é axi-simétrica, assim, como a distribuição de velocidade.

Nas Figuras 172, 173 e 174 pode-se observar a distribuição do nível de pressão sonora ao longo da malha de pontos cilíndrica, criada para representar o contorno prescrito exigido para a determinação experimental do nível de potência sonora dos protótipos 3, 4 e 5.

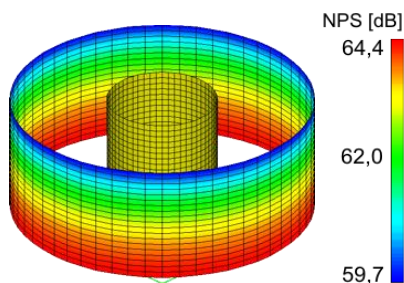


Figura 172 – Nível de pressão sonora na malha de pontos cilíndrica. Protótipo 3.

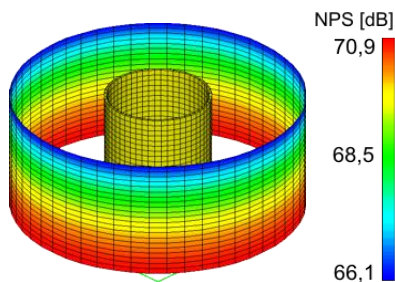


Figura 173 – Nível de pressão sonora na malha de pontos cilíndrica. Protótipo 4.

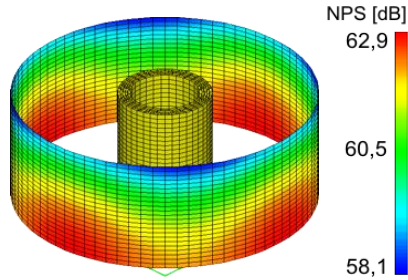


Figura 174 – Nível de pressão sonora na malha de pontos cilíndrica. Protótipo 5.

Nestas malhas de pontos, que se encontram a 1 m da superfície externa dos reatores, o nível de pressão sonora do protótipo 3 varia entre 59,7 dB e 64,4 dB, do protótipo 4 entre 66,1 dB e 70,9 dB, e do protótipo 5 entre 58,1 dB e 62,9 dB. Percebe-se ainda que em todos os casos, os níveis mais elevados de pressão sonora se encontram na extremidade inferior devido à reflexão sonora proporcionada pelo piso refletor, cuja influência foi considerada nas simulações numéricas através da definição de um plano de simetria, no qual a velocidade normal é igual a zero.

Observa-se também que a distribuição do nível de pressão sonora do protótipo 5, difere daquelas dos protótipos 3 e 4, devido à presença e posicionamento dos espaçadores, que alteram a rigidez da estrutura.

Já nas Figuras 175 e 176 pode-se observar a distribuição do nível de pressão sonora em cada um dos planos que cortam os eixos centrais dos reatores, se estendendo até uma distância de 2 m em relação à superfície externa do reator.

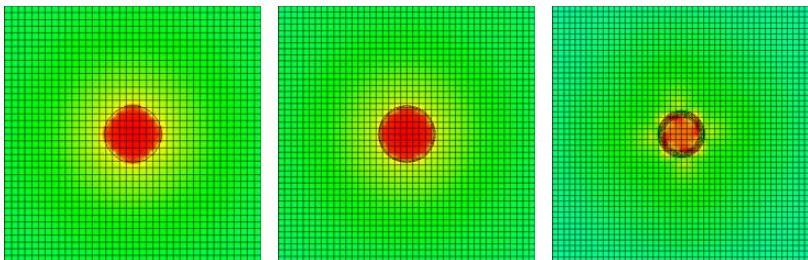


Figura 175 – Vista no plano x - y da radiação sonora. (a) Protótipo 3 (b) Protótipo 4 (c) Protótipo 5.

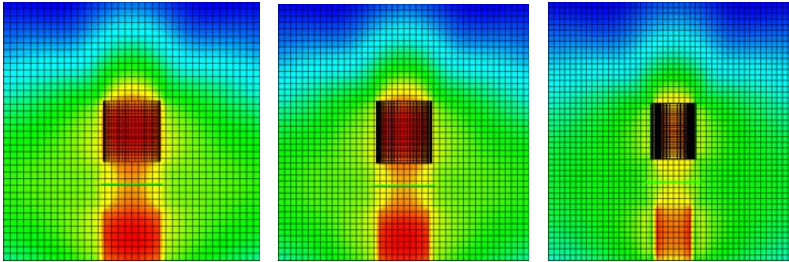


Figura 176 – Vista no plano x - z da radiação sonora. (a) Protótipo 3 (b) Protótipo 4 (c) Protótipo 5.

Embora a distribuição do campo sonoro gerado numericamente pelos reatores apresente uma simetria, o que não é observado nas medições experimentais, a determinação do nível de pressão sonora e, conseqüentemente, do nível de potência sonora de cada um dos reatores a partir dos modelos numéricos fornecem resultados satisfatórios, uma vez que os níveis médios de pressão sonora determinados nas análises numéricas estão próximos daqueles determinados experimentalmente, como se observa na Tabela 27.

Tabela 27 – Resultados numéricos e experimentais do NPS a 1,0 m.

	Num.	Exp.	Diferença
Protótipo 3	63,1 dB	59,7 dB	3,4 dB
Protótipo 4	69,6 dB	63,3 dB	6,3 dB
Protótipo 5	61,5 dB	63,7 dB	-2,2 dB

Admite-se que os resultados são aceitáveis em função da complexidade na determinação das propriedades equivalentes do material que forma os reatores, e também baseado no fato de que nas medições experimentais do nível de pressão sonora os pontos apresentam diferenças entre 15 dB e 20 dB.

CAPÍTULO 8 CONCLUSÕES

Os resultados fornecidos pelo modelo vibroacústico proposto dependem significativamente daqueles obtidos no modelo numérico estrutural, pois, a velocidade de vibração da superfície do reator é usada como condição de contorno de excitação do campo acústico simulado no modelo de radiação sonora. Por isso, a escolha de métodos adequados para determinar as propriedades mecânicas do material é de fundamental importância. Nesta pesquisa foram avaliados quatro métodos experimentais para determinar o módulo de elasticidade e o módulo de cisalhamento do material que forma os reatores. Nos métodos estáticos, o ensaio de flexão em quatro pontos foi o que apresentou melhores resultados, porém, foram os métodos dinâmicos que se mostraram mais robustos. Embora o método da viga vibrante tenha fornecido bons resultados, a grande influência do engaste nos resultados e o fato de que neste método se determina apenas o módulo de elasticidade, fizeram com que o método da excitação impulsiva fosse o escolhido para determinar tais propriedades. A comparação dos resultados numéricos e experimentais da análise modal de placas feitas com o material do reator, na condição livre-livre, mostrou que existem diferenças entre os resultados. Portanto, a realização deste ensaio para um número maior de amostras poderia melhorar os resultados, porém, como o material é muito heterogêneo sugere-se que sejam feitas novas pesquisas, que tratem exclusivamente da caracterização destes materiais. Poder-se-ia, por exemplo, usar equações analíticas da teoria de cascas ou modelos numéricos e metodologias de ajuste de modelo para desenvolver um método de caracterização das propriedades mecânicas destes materiais. Além disso, seria interessante realizar um trabalho junto ao fabricante dos reatores para aperfeiçoar o processo de fabricação e estabelecer tolerâncias de fabricação mais rígidas que possibilitassem uma maior uniformidade do equipamento produzido.

As medições experimentais do nível de vibração dos reatores mostraram que a forma de vibração da estrutura em operação difere daquela distribuição uniforme das forças magnéticas e também daquela dos modos estruturais que se encontram em frequências próximas de 120 Hz. Além disso, se observou que os níveis de vibração não são constantes ao longo de toda a superfície e, sobretudo que a amplitude de vibração não está associada a regiões específicas, como aquelas em que a força radial é maior ou aquelas que estão próximas das cruzetas e

espaçadores. Esta variação é aleatória e resulta da não homogeneidade construtiva dos reatores. A heterogeneidade do material ao longo da superfície se deve ao processo produtivo, que não possui um rigoroso controle de fabricação, e desta forma, possibilita, por exemplo, que em algumas regiões seja adicionada uma quantidade maior de material.

Nos ensaios experimentais realizados para determinar a potência sonora dos reatores constatou-se que os maiores níveis de ruído se encontram na banda de frequências de 125 Hz, pois, ao se alimentar o reator com uma corrente senoidal pura, no caso 60 Hz, as forças resultantes da indução magnética, responsáveis pela geração de ruído, atuarão numa frequência correspondente ao dobro daquela da corrente. Os níveis de ruído registrados nas outras faixas de frequências, praticamente não interferem no nível de ruído global do reator. Além disso, a análise do nível de pressão sonora medido em cada um dos pontos do contorno prescrito, criado para realizar as medições de ruído, mostrou diferenças significativas, algumas vezes superiores a 10,0 dB. Portanto, assim como o nível de vibração, a radiação sonora dos reatores não possui simetria, variando em função da diferença de rigidez encontrada ao longo de toda a superfície do reator. A comparação entre os resultados das medições de ruído conduzidas na câmara semi-aneecóica do LVA e no laboratório da empresa mostra que mesmo não sendo um ambiente controlado, o laboratório, poderia ser usado para realizar as medições do nível de pressão sonora dos reatores, pois, os resultados teriam uma pequena diferença em relação aqueles realizados em ambiente controlado.

Para calcular a indução magnética produzida pelo reator e conseqüentemente determinar as forças que induzem vibrações na sua estrutura, foram desenvolvidos dois modelos, um modelo analítico, no qual o reator é tratado como um solenoide, e um modelo numérico no qual a indução magnética é determinada a partir de um modelo desenvolvido em elementos finitos. Apesar das hipóteses simplificadoras, o modelo analítico proposto apresenta resultados satisfatórios para o cálculo da indução magnética de reatores formados por uma bobina. No entanto, para reatores que possuem mais que uma bobina, o modelo é impróprio. Por considerar os efeitos causados pela interação entre as bobinas e por admitir hipóteses menos restritivas, as forças magnéticas determinadas pelo modelo numérico estão mais próximas das reais.

A comparação entre os resultados experimentais e aqueles fornecidos pelo modelo numérico estrutural apontou pequenas divergências na determinação dos modos estruturais dos reatores, e

diferenças razoáveis na amplitude de vibração em 120 Hz. Embora o modelo de radiação sonora proposto dependa dos resultados fornecidos pelo modelo estrutural, os níveis de pressão sonora determinados numericamente foram satisfatórios, como mostrou a comparação feita entre os resultados numéricos e experimentais. Portanto, em função das diversas incertezas a que o modelo vibroacústico está exposto, desde o cálculo das forças magnéticas até a determinação do nível de pressão sonora, pode-se dizer que o modelo proposto fornece resultados aceitáveis. Além disso, do ponto de vista de projeto acústico, o modelo vibroacústico consiste em uma importante ferramenta para auxiliar na determinação de características geométricas e construtivas que minimizem o ruído gerado pelos reatores.

Alguns temas poderiam ser abordados em futuras pesquisas com o objetivo de complementar e enriquecer o conhecimento adquirido neste trabalho. Entre eles destacam-se: O desenvolvimento de um modelo numérico para determinar as forças magnéticas considerando a interação entre as espiras; a avaliação da eficiência de radiação sonora de cascas cilíndricas; o desenvolvimento de um modelo para estimar as propriedades elásticas do material que forma os reatores; a avaliação da influência dos fenômenos térmicos no comportamento dinâmico e acústico do reator e o estudo de métodos de controle do ruído, usando meios passivos ou ativos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] FERREIRA, C. **Reatores em sistemas elétricos de potência: Conceitos básicos de sistemas elétricos de potência**. Itajubá: AREVA/UNIFEI, 2001.
- [2] ALVES, M. F. **Reatores com núcleo de ar**. Itajubá: AREVA, 1982.
- [3] JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**. 2. ed. New York: Taylor & Francis, 1999. 519 p.
- [4] TSAI, S. W.; HAHN H. T. **Introduction to composite materials**. Pennsylvania: Technomic Publishing Company, 1980. 455 p.
- [5] CHAWLA, K. K. **Composite materials: Science and engineering**. 2. ed. New York: Springer, 1998. 483 p.
- [6] AMERICAN SOCIETY OF TESTING AND MATERIALS. **ASTM D 638 - 03**: Standard test method for tensile properties of plastics. 2003. 15 p.
- [7] AMERICAN SOCIETY OF TESTING AND MATERIALS. **ASTM D 6272 - 02**: Standard test method for flexural properties of unreinforced and reinforced plastics and electrical insulating materials by four-point bending. 2002. 9 p.
- [8] AMERICAN SOCIETY OF TESTING AND MATERIALS. **ASTM E 756 -98**: Standard test method for measuring vibration-damping properties of materials. 1998. 12 p.
- [9] AMERICAN SOCIETY OF TESTING AND MATERIALS, **ASTM E 1876 - 01**: Standard test method for dynamic young's modulus, shear modulus, and Poisson's ratio by impulse excitation of vibration. 2001. 16 p.
- [10] METTLER TOLEDO. **Density determination kit for excellence XP/XS precision balances**. Greifensee: Mettler-Toledo GmbH, Laboratory & Weighing Technologies, 2004. 16 p.

- [11] INTERNATIONAL COUNCIL ON LARGE ELECTRIC SYSTEMS. **WG 14.26: HVDC stations audible noise**. Sweden, 2001. 99 p.
- [12] AVITABILE, P. Experimental modal analysis: A simple non-mathematical presentation. **Sound and Vibration**, p. 1-11, January. 2001.
- [13] PEETERS, B., et al. A new procedure for modal parameter estimation. **Sound and Vibration**, p. 24–29, January. 2004.
- [14] HUTCHINSON J. R.; EL-AZHARI S. A. Vibrations of free hollow circular cylinders. **Journal of Applied Mechanics**, v. 53, p. 641-646. 1986.
- [15] SINGAL R. K.; WILLIAMS K. A theoretical and experimental study of vibrations of thick circular cylindrical shell and rings. **Journal of Sound, Acoustics, Stress and Reliability in Design**, v. 110, p. 533-537. 1988.
- [16] LOY, C. T.; LAM, K. Y. Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity. **Journal of Sound and Vibration**, v. 226, n. 4, p. 719-737. 1999.
- [17] WANG, H.; WILLIAMS, K. Vibrational modes of thick cylinders of finite length. **Journal of Sound and Vibration**, v. 191, n. 5, p. 955-971. 1996.
- [18] RICHARDSON, M. H. Is it mode shape or an operating deflection shape? **Sound and Vibration Magazine**, p. 1-11, March. 1997.
- [19] INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION. **International standard IEC 60076-10: Power transformers – Part 10: Determination of sound levels**. 2001. p. 1-35.
- [20] INSTITUTE OF ELECTRICAL AND ELECTRONIC ENGINEERS. **IEEE Std. C57.16: IEEE standard requirements, terminology, and test code for dry-type air-core reactors series-connected reactors**. 1996. p. 47-62.
- [21] INSTITUTE OF ELECTRICAL AND ELECTRONIC ENGINEERS. **IEEE Std. C57.12.90: IEEE standard test code for**

- liquid-immersed distribution, power, and regulating transformers. 1999. p. 61-70.
- [22] INSTITUTE OF ELECTRICAL AND ELECTRONIC ENGINEERS. **IEEE Std. C57.12.91**: IEEE standard test code for dry-type distribution and power transformers. 2001. p. 67-71.
- [23] SMEDE, J., et al. Design of HVDC converter stations with respect to audible noise requirements. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 10, n. 2, p. 747-758. 1995.
- [24] TRIPLER, P. **Física: Eletricidade e magnetismo**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1995. 3 v.
- [25] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. 3 v.
- [26] PELZER, G. **Réactances de compensation: Vibrations et gêne acoustique**. 1998. 136 f. Monografia – Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, Liège.
- [27] ENOHNYAKET, M. **PEEC modeling and verification for broadband analysis of air-core reactors**. 2007. 120 f. Thesis - Department of Computer Science and Electrical Engineering, Lulea University of Technology, Lulea, Sweden.
- [28] BASTOS, J. P. A. **Eletromagnetismo e cálculo de campos**. 3. ed. Florianópolis: Editora da Universidade Federal de Santa Catarina, 1996. 452 p.
- [29] BASTOS, J. P. A.; SADOWSKI, N. **Electromagnetic modeling by finite elements**. New York: Marcel Dekker, 2003. 497 p.
- [30] MEUNIER, G. et al. **The finite element method for electromagnetic modeling**. London: ISTE Ltd, 2008. 602 p.
- [31] GEUZAINÉ, C.; REMACLE, J.F. Gmsh: A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 79, n. 11, p. 1309-1331. 2009.

- [32] DULAR, P. et al. A general environment for the treatment of discrete problems and its application to the finite element method. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 34, n. 5, p. 3395-3398. 1998.
- [33] DULAR, P. et al. An evolutive software environment for teaching finite element methods in electromagnetism. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 35, n. 3, p. 1682-1685. 1999.
- [34] PETYT, M. **Introduction to finite element vibration analysis**. New York: Cambridge University Press, 1990. 558 p.
- [35] BREBBIA, C. A.; FERRANTE A. J. **The finite element technique**. Porto Alegre: Editora da URGs, 1975. 409 p.
- [36] COOK, R. D., et al. **Concepts and applications of finite element analysis**. 4. ed. New York: John Wiley & Sons, 2002. 718 p.
- [37] HUEBNER, K. H., et al. **The finite element method for engineers**. 4. ed. New York: John Wiley & Sons, 2001. 720 p.
- [38] CHRISTENSEN, R. M. **Mechanics of composite materials**. New York: Dover Publications, 2005. 348 p.
- [39] PEREIRA J. C. **Curso de projeto estrutural com materiais compostos**. 2005. Apostila – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- [40] WANG, C.; LAI, J. C. S. The sound radiation efficiency of finite length acoustically thick circular cylindrical shells under mechanical excitation I: Theoretical analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 232, n. 2, p. 431-447. 2000.
- [41] WANG C.; LAI J. C. S. The sound radiation efficiency of finite length circular cylindrical shells under mechanical excitation II: Limitation of the infinite length model. **Journal of Sound and Vibration**, v. 241, n. 5, p. 825-838. 2001.
- [42] FYFE, K. R.; ISMAIL, F. An investigation of the acoustic properties of vibrating finite cylinders. **Journal of Sound and Vibration**, v. 128, n. 3, p. 361-375. 1989.

- [43] LILIEN J. L. Acoustic noise generated by air power reactor in open-air substations. **European Transaction on Electrical Power**, v. 16, p. 297-310. 2006.
- [44] FIORENTIN, T. A. **Estudo de geração de ruído em reatores de núcleo de ar**. 2007. 91 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- [45] DOKUMACI, E. A study of the failure of numerical solutions in boundary element analysis of acoustic radiation problems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 139, n. 1, p. 83-97. 1990.
- [46] WU, T. W. **Boundary element acoustics: Fundamentals and computer codes**. Southampton: WIT Press, 2000. 238 p.
- [47] SEYBERT A. F.; CHENG C. Y. R.; WU T. W. The solution of coupled interior/exterior acoustic problems using the boundary element method. **Journal of the Acoustical Society of America**, v. 88, n. 3, p. 1612-1618. 1990.
- [48] BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ J. **Boundary elements: An introductory course**. 2. ed. Southampton: WIT Press/Computational Mechanics Publications, 1992. 313 p.
- [49] HARTMANN, F. **Introduction to boundary elements: Theory and applications**. Berlin: Springer, 1989. 416 p.
- [50] MARBURG, S.; NOLTE B. **Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids: Finite and Boundary Element Methods**. Berlin: Springer, 2008. 578 p.
- [51] KIRKUP S. **The boundary element method in acoustics**. London: Integrated sound software, 1998. 148 p.
- [52] FAHY, F; GARDONIO, P. **Sound and structural vibration: Radiation, transmission and response**. Oxford: Elsevier, 2007. 633 p.
- [53] NASHIF, A. D., et al. **Vibration damping**. New York: John Wiley & Sons, 1985. 453 p.

- [54] BERANEK, L. L.; VÉR I. L. **Noise and vibration control engineering: Principles and applications**. 2. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006. 966 p.
- [55] CARFAGNI M.; PIERINI M. Determining the loss factor by the power input method (PIM), Part 1: Numerical investigation. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 121, p. 417-421. 1999.
- [56] CARFAGNI M.; PIERINI M. Determining the loss factor by the power input method (PIM), Part 2: Experimental investigation with impact hammer excitation. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 121, p. 422-428. 1999.
- [57] BLOSS B. C.; RAO M. D. Estimation of frequency-averaged loss factors by the power injection and the impulse response decay methods. **Journal of the Acoustical Society of America**, v. 117, n. 1, p. 240-249. 2005.
- [58] REYNOLDS, D. D. **Engineering principles: Noise and vibration control**. Massachusetts: Allyn and Bacon, 1981. 641 p.
- [59] FRISWELL, M. I.; MOTTERSHEAD, J. E. **Finite element model updating in structural dynamics**. London: Kluwer, 1995. 286 p.
- [60] LAUWAGIE P. T.; DASCOTTE, E. Layered material identification using multi-model updating. In: **STRUCTURAL DYNAMICS MODELING CONFERENCE**, 3., 2002, Madeira. **Proceedings...**2002. p. 1-8.
- [61] SORIANO, H. L. **Método de elementos finitos em análise de estruturas**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003. 580 p.
- [62] POPOV, E. P. **Introdução à mecânica dos sólidos**. São Paulo: Edgard Blucher, 1978. 534 p.
- [63] SHAMES, I. H. **Introdução à mecânica dos sólidos**. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1983. 556 p.
- [64] FANCELLO, E. A.; MENDONÇA, P. T. **Introdução à mecânica dos sólidos computacional**. 2002. Apostila – Faculdade de

Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

- [65] FAHY, F. **Foundations of engineering acoustics**. London: Academic Press, 2003. 435 p.
- [66] BLACKSTOCK, D. T. **Fundamentals of physical acoustics**. New York: Wiley-Interscience, 2000. 541 p.
- [67] WHITE, R. G.; WALKER, J. G. **Noise and vibration**. New York: John Wiley & Sons, 1986. 866 p.
- [68] SCIAVICCO, L.; SICILIANO, B. **Modeling and control of robot manipulators**. New York: McGraw-Hill. 1996.
- [69] BOLDRINI, J. L., et al. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1984. 411 p.
- [70] BITTENCOURT M. L., NETO E. M. **Mecânica do contínuo**. 2001. Apostila – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.

APÊNDICE 1

INTRODUÇÃO AO MÉTODO ELEMENTOS FINITOS

Apresentam-se aqui conceitos gerais sobre os métodos numéricos e algumas das particularidades relacionadas ao método de elementos finitos.

1.1) O método de elementos finitos e suas aplicações

No estudo do comportamento de sistemas físicos são utilizados modelos físicos ou modelos matemáticos. O avanço da ciência e a comparação entre esses modelos têm motivado um grande desenvolvimento dos modelos matemáticos, proporcionando modelagens realísticas, confiáveis e de aplicações práticas na engenharia, muito mais econômicas do que os modelos físicos. Embora no modelo matemático sejam adotadas hipóteses simplificadoras em relação ao sistema físico original, a solução é dita exata.

Nos modelos matemáticos tridimensionais ou de volume, a geometria a ser analisada é descrita em função de 3 coordenadas, as quais se tornam essenciais na descrição do comportamento desta estrutura. Especificamente este comportamento é expresso por equações diferenciais em relação a estas coordenadas. Esses modelos costumam ser referidos como modelos contínuos, por se ter um número infinito de pontos para a determinação de grandezas desconhecidas, e suas equações diferenciais tem soluções analíticas conhecidas apenas para condições simples de contorno e de carregamento.

Com a finalidade de substituir a resolução analítica das equações diferenciais dos modelos matemáticos bi e tridimensionais pela resolução de sistemas de equações algébricas, foram desenvolvidos os métodos discretos, numéricos ou aproximados. Esses métodos introduzem aproximações adicionais aos modelos matemáticos, formando os correspondentes modelos discretos, nos quais se busca a determinação de incógnitas em um número finito de pontos. Entre estes métodos, citam-se os métodos de diferenças finitas, de elementos finitos e de elementos de contorno. Podem-se identificar casos práticos em que cada um desses métodos seja superior aos demais. Contudo, pode-se afirmar que o método de elementos finitos é o que se aplica de forma mais ampla, simples e eficiente em análise estrutural.

O método de elementos finitos foi desenvolvido para análise de meios contínuos, possibilitando, nos dias de hoje, a análise da maior

parte dos sistemas físicos dos quais trata a engenharia, tais como problemas estruturais, de transferência de calor, eletromagnetismo e acústica. Neste método, o domínio de definição do modelo matemático é dividido em um número discreto de subdomínios ou elementos de dimensões finitas, denominados elementos finitos, interligados por um número reduzido de pontos nodais.

A partir das equações algébricas (obtidas através das formulações direta, variacional ou de resíduos), que regem o comportamento aproximado de cada um dos subdomínios, monta-se o sistema de equações da malha como um todo, denominado *sistema global*, que, juntamente com as condições de contorno ainda não atendidas ao se arbitrar o(s) campo(s) de variável(eis) nos subdomínios, permite a determinação dos valores nodais de definição desse(s) campo(s). Pode-se, então, retornar à análise de cada elemento isoladamente para determinação de incógnitas em qualquer um de seus pontos.

A Figura 177, elaborada por Soriano [61], esquematiza o contexto do uso do método de elementos finitos em análise de um problema de meio contínuo, que pode ser a determinação do comportamento de uma estrutura, ou parte da mesma, submetida a determinadas ações externas, condições de contorno ou condições iniciais. Primeiramente, orientado por códigos de projeto, define-se um modelo matemático. Como esquematizado na Figura 177, após as definições dos modelos matemáticos e discreto, faz-se a resolução deste último e a avaliação da acurácia da solução numérica obtida. Essa avaliação costuma ser feita por comparação com solução exata conhecida ou por estimativa de erro por comparação entre resultados de duas ou mais discretizações com níveis crescentes de refinamentos, podendo mostrar necessidade de refinamento maior do modelo discreto. Uma vez que se tenha obtido solução dentro de tolerância de erro aceitável, a avaliação do modelo matemático por comparação da referida solução com resultados de modelos físicos semelhantes de soluções conhecidas pode evidenciar necessidade de refinar o modelo matemático, adotando hipóteses de idealização do meio contínuo menos restritivas. Depois de adequada redefinição do modelo matemático e obtenção de solução acurada através do método de elementos finitos, pode-se identificar necessidade de alterações no problema de meio contínuo, com posteriores modelagens matemática e discreta, até chegar ao meio contínuo, e à correspondente solução que atenda aos objetivos do engenheiro. Assim, o método de elementos finitos é apenas uma ferramenta para análise de modelos matemáticos de problemas de meio contínuo, cabendo ao engenheiro a tarefa de engenhar o sistema físico,

estabelecer o modelo matemático pertinente, usar adequadamente aquele método, interpretar e utilizar seus resultados.

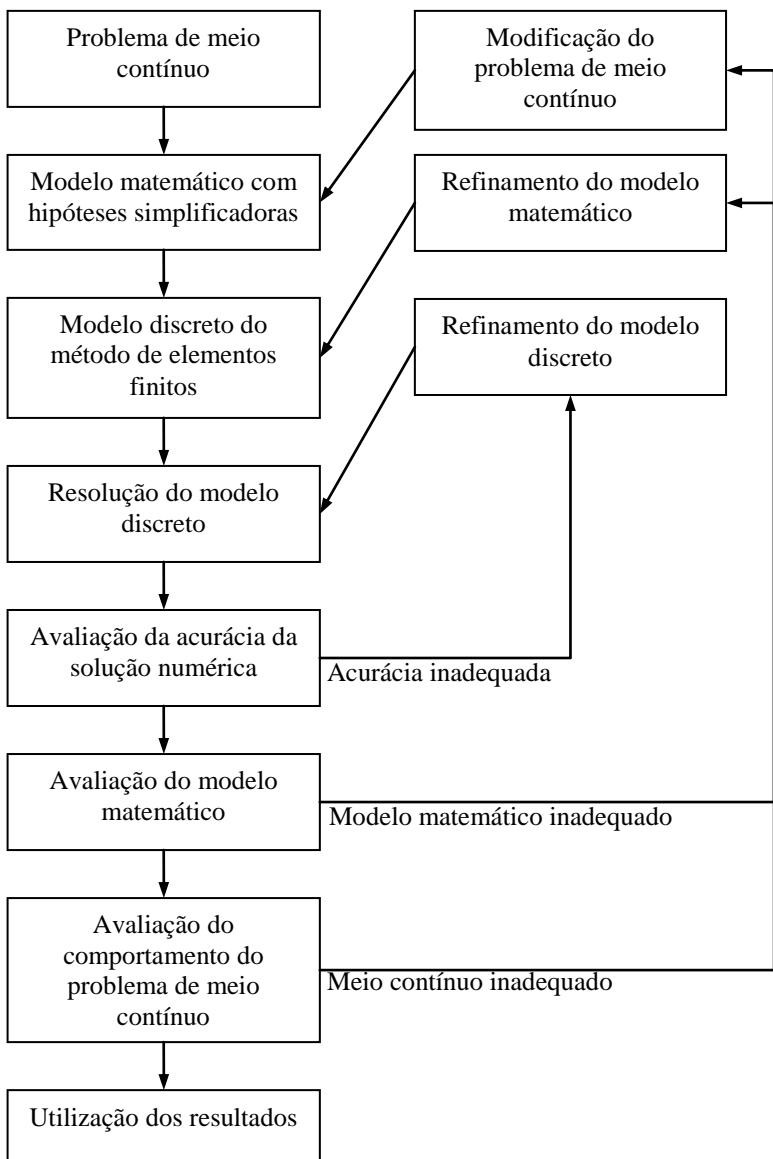


Figura 177 – Análise de um problema de meio contínuo usando o método de elementos finitos [61].

1.2) Origem, história e generalização

O método de elementos finitos surgiu em 1955 como evolução da análise matricial de elementos reticulados (concebida no início da década de 1930 na indústria aeronáutica britânica) com a disponibilidade de computadores digitais e devido à necessidade de projetar estruturas de modelos contínuos. Os primeiros elementos foram concebidos por engenheiros aeronáuticos para análise de distribuição de tensões em chapas de asa de avião. Em 1963 já existiam aplicações do método em problemas estáticos, de não linearidade e dinâmicos.

Essa abordagem inicial foi física e intuitiva, buscando a substituição do meio contínuo em análise por um conjunto de elementos de dimensões finitas, interligados por seus pontos nodais, como exposto anteriormente. A formulação dos elementos era através do princípio dos deslocamentos virtuais e não se tinha conhecimento de critérios para o desenvolvimento de elementos com garantia de convergência para a solução exata. O desenvolvimento a partir daquele princípio é denominado *formulação direta*.

Melosh (1963) apresentou formulação do método de elementos finitos a partir da minimização da grandeza escalar *funcional energia potencial total*. Veubeke (1965) apresentou a formulação do método a partir de outros funcionais da mecânica dos sólidos deformáveis. Verificou-se então que as bases do método já tinham sido estabelecidas por Lord Rayleigh em 1870, por Walther Ritz em 1909 e por Richard Courant (1943). Mostrou-se que o método de elementos finitos é um caso particular do método de Rayleigh-Ritz, estabeleceram-se critérios de convergência e verificou-se que o método poderia ser empregado em qualquer problema de meio contínuo regido por funcional. Essa é a denominada *formulação variacional*.

O conceito de energia elástica de deformação surgiu com Daniel Bernoulli (1700-1782) em 1738, mas essa energia na forma de uma função quadrática das componentes de deformação, como é hoje utilizada nos princípios variacionais da mecânica dos sólidos deformáveis, foi apresentada por George Green (1793-1841) em 1837 com o nome *função potencial*.

No cálculo variacional, a condição de “estacionaridade” de um funcional fornece as equações diferenciais e as condições de contorno do problema de meio contínuo em questão. Assim, buscar uma solução aproximada para a condição de estacionaridade de um funcional é o mesmo que buscar uma solução aproximada para as correspondentes equações diferenciais. No caso do funcional energia potencial total, a

condição de estacionaridade é de mínimo e, no método de Rayleigh-Ritz, arbitra-se uma solução aproximada para o campo de deslocamentos, no domínio do problema de meio contínuo, em função de parâmetros generalizados a serem determinados com a condição de mínimo. No método de elementos finitos, a condição de mínimo é arbitrada em cada subdomínio, denominado elemento finito, em função do deslocamento dos seus pontos nodais, deslocamentos esses que são determinados com a referida condição de mínimo. Utilizando outros funcionais, arbitram-se soluções aproximadas para outras incógnitas, em função dos correspondentes valores nodais, e buscam-se esses valores com as correspondentes condições de estacionaridade.

A consistência matemática da formulação variacional permitiu a extensão do método de elementos finitos à resolução de uma ampla gama de problemas de meio contínuo, como os de meios porosos, transferência de calor e eletrostáticos. Após o desenvolvimento da formulação variacional, Szabo e Lee (1969) verificaram que o método poderia ser formulado diretamente a partir das equações diferenciais e respectivas condições de contorno de problema de meio contínuo, como a aplicação do método de Galerkin, que é um dos métodos de resíduos ponderados. Herrmann (1972) mostrou equivalência entre elemento finito formulado a partir de campo de deslocamentos com o funcional energia potencial total e a partir do método de mínimos quadrados de resíduos de tensões. Lynn e Arya (1973) formularam o método a partir do método de mínimos quadrados, que também se enquadra no método de resíduos ponderados. Assim, o método de elementos finitos se estendeu a problemas não regidos por funcionais. Semelhantemente à formulação variacional, na *formulação de resíduos* do método de elementos finitos, arbitram-se campos de variáveis no elemento em função dos correspondentes valores nodais.

A Figura 178 sugerida por Soriano [61], mostra o inter-relacionamento das formulações direta, variacional e de resíduos.

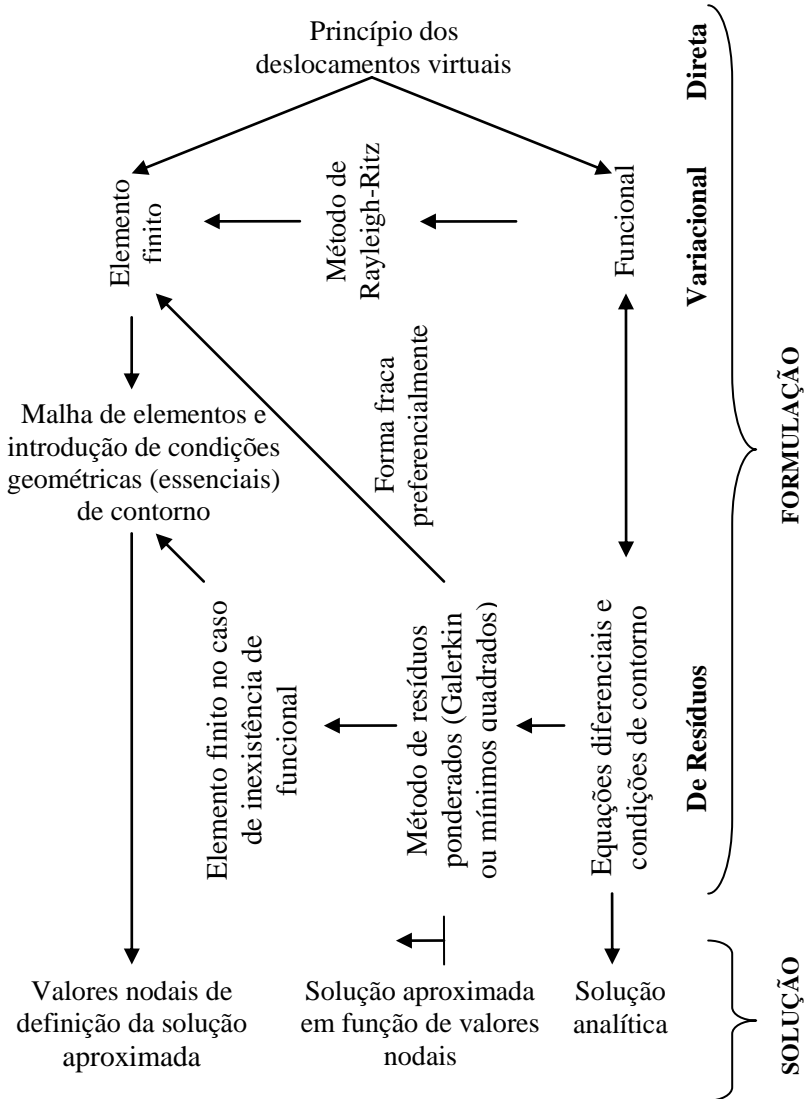


Figura 178 – Inter-relacionamento das formulações direta, variacional e de resíduos no método de elementos finitos [61].

1.3) Família de elementos

O desenvolvimento do método é muito amplo e são inúmeros os elementos disponíveis atualmente, sendo aconselhável na discretização de cada modelo matemático o uso de elementos finitos robustos e eficientes. A robustez se refere a capacidade do elemento de fornecer bons resultados em uma grande variedade de definição de parâmetros de um mesmo modelo matemático e de sua discretização, por exemplo, propriedades diversas de material, condições de contorno variadas, espessuras fina e semi-espessa em problemas de placa e de casca, formas regulares e distorcidas de elementos etc. A eficiência se refere a potencialidade do elemento ser utilizado em malhas que forneçam resultados, com exatidão satisfatória, em processamentos computacionais rápidos comparativamente com outros elementos considerados não eficientes. A eficiência do elemento é de fundamental importância em análises não lineares e/ou transientes, quando então se faz necessária uma sucessão de análises lineares.

Agora, apresenta-se a forma como são determinadas as funções de interpolação, ou também denominadas funções de forma, de dois elementos da família Lagrangeana, o elemento sólido trilinear, também conhecido como hexaédrico linear de 8 nós H8 e o elemento bidimensional quadrilateral, ou também chamado bilinear retangular Q4.

Nessa família, as funções de interpolação dos elementos são polinômios de Lagrange que podem ser obtidos a partir de funções lineares unidimensionais. Para facilitar a manipulação, adotam-se coordenadas adimensionais naturais ou normalizadas (ξ, η, ζ) com origem no centroide do elemento, representadas na Figura 179.

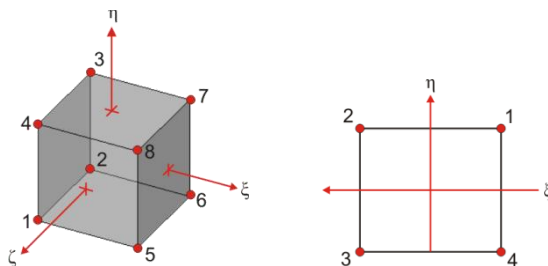


Figura 179 – Coordenadas adimensionais do elemento tridimensional e bidimensional linear.

Considerando m pontos igualmente espaçados segundo a coordenada ζ , o polinômio de Lagrange de ordem $(m-1)$, de valor

unitário no i -ésimo ponto e valores nulos nos demais pontos de designação j genérica, é dada por:

$$N_i^{(m-1)}(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \tag{9.1}$$

onde Π representa produto e o índice de ξ especifica o ponto em que essa coordenada é calculada. Exemplificando, no caso em que $m=2$ e $\xi_1=-1$ e $\xi_2=1$, as funções de interpolação são dadas por:

$$\ell_1^1(\xi) = \frac{\xi - 1}{-1 - 1} = \frac{1 - \xi}{2} \tag{9.2}$$

$$\ell_2^1(\xi) = \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 + \xi}{2} \tag{9.3}$$

Estas funções de primeiro grau são representadas na Figura 180.

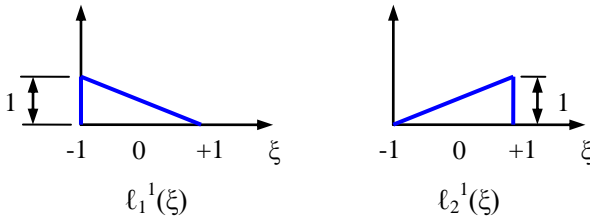


Figura 180 – Representação das funções de Lagrange de primeiro grau.

Desta forma, no caso de elemento tridimensional hexaédrico nas coordenadas ξ, η, ζ as funções de interpolação de Lagrange são obtidas através da multiplicação de uma função em ξ por outras em η e ζ . Assim, considerando o ponto nodal de numeração i do elemento, que para a direção ξ tem numeração j , para a direção η tem numeração k e para a direção ζ tem numeração h , escreve-se a função:

$$N_i = \ell_j(\xi)\ell_k(\eta)\ell_h(\zeta) \tag{9.4}$$

onde se omitem, por simplicidade, as ordens das funções em ξ, η e ζ .

Portanto, as funções de forma do elemento hexaédrico linear são:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{8} \begin{matrix} 1-\xi & 1-\eta & 1+\zeta \end{matrix} \\
 N_2 &= \frac{1}{8} \begin{matrix} 1-\xi & 1-\eta & 1-\zeta \end{matrix} \\
 N_3 &= \frac{1}{8} \begin{matrix} 1-\xi & 1+\eta & 1-\zeta \end{matrix} \\
 N_4 &= \frac{1}{8} \begin{matrix} 1-\xi & 1+\eta & 1+\zeta \end{matrix} \\
 N_5 &= \frac{1}{8} \begin{matrix} 1+\xi & 1-\eta & 1+\zeta \end{matrix} \\
 N_6 &= \frac{1}{8} \begin{matrix} 1+\xi & 1-\eta & 1-\zeta \end{matrix} \\
 N_7 &= \frac{1}{8} \begin{matrix} 1+\xi & 1+\eta & 1-\zeta \end{matrix} \\
 N_8 &= \frac{1}{8} \begin{matrix} 1+\xi & 1+\eta & 1+\zeta \end{matrix}
 \end{aligned} \tag{9.5}$$

Em analogia ao elemento tridimensional, pode-se definir para o elemento bidimensional quadrilateral a seguinte equação que define suas funções de forma:

$$N_i = \ell_j(\xi)\ell_k(\eta) \tag{9.6}$$

A mesma permite definir as seguintes funções de interpolação para cada um dos nós que formam o elemento:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4} \begin{matrix} 1+\xi & 1+\eta \end{matrix} \\
 N_2 &= \frac{1}{4} \begin{matrix} 1-\xi & 1+\eta \end{matrix} \\
 N_3 &= \frac{1}{4} \begin{matrix} 1-\xi & 1-\eta \end{matrix} \\
 N_4 &= \frac{1}{4} \begin{matrix} 1+\xi & 1-\eta \end{matrix}
 \end{aligned} \tag{9.7}$$

Ressalta-se que, embora seja fácil obter as funções de interpolação de elementos dessa família com números distintos de pontos nodais segundo diferentes coordenadas, o grande número de pontos nodais dos elementos a partir da ordem cúbica torna sua utilização pouco prática. Os elementos triquadrático e tricúbico, por exemplo, têm 27 e 64 pontos nodais, respectivamente.

1.4) Integração numérica

Quando se define a geometria do elemento através da interpolação das coordenadas nodais, as integrações presentes nas matrizes elementares não possuem uma solução analítica tão simples. Então para solucionar este problema são utilizados métodos de integração numérica.

Diversos métodos de integração numérica foram desenvolvidos desde o mais simples, integração numérica por retângulos, até métodos mais eficientes como o método de Gauss ou de Gauss-Legendre, largamente utilizado no método de elementos finitos. Nesse método, fixado um número n_{pi} de pontos de cálculo do integrando na variável ξ , as posições desses pontos e os multiplicadores dos correspondentes valores do integrando, fatores-peso W_i , foram determinados de forma a se ter a melhor precisão para a aproximação:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^{n_{pi}} f(\xi_i) W_i \quad (9.8)$$

Essa equação expressa que a integração com n_{pi} pontos é uma soma ponderada que requer a determinação de $2n_{pi}$ incógnitas W_i e ξ_i , que, uma vez determinadas, definem a integração exata de um polinômio de grau $(2n_{pi}-1)$.

A Tabela 28 fornece as posições dos pontos de integração, os correspondentes fatores-peso e ordens de integração, para até 4 pontos de integração. Então, pode-se demonstrar que com um ponto integra-se exatamente um polinômio de primeiro grau e que com dois pontos integram-se, exatamente, polinômios até o terceiro grau. Além disso, o uso de um maior número de pontos do que o necessário para a integração exata não interfere no resultado.

Tabela 28 – Pontos de integração, fatores-peso e ordens de integração de Gauss-Legendre.

Nº de pontos	Coordenada ξ_i	W_i	Ordem
1	0	2	Linear
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	Cúbica
3	$\pm\sqrt{0,6}$ 0	5/9 8/9	Quíntupla
4 com $a = \sqrt{1,2}$	$\pm\sqrt{(3+2a)/7}$ $\pm\sqrt{(3-2a)/7}$	$1/2 - 1/(6a)$ $1/2 + 1/(6a)$	Sétupla

Para integrações com duas e três variáveis independentes, adota-se sucessivamente a integração unidimensional de Gauss-Legendre para cada uma das variáveis independentes desconsiderando-se a influência das demais. Assim, faz-se para o caso bidimensional:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \int_{-1}^1 \left[\sum_{i=1}^{p_1} f(\xi_i, \eta) W_i \right] d\eta \tag{9.9}$$

$$I \cong \sum_{j=1}^{p_2} \left[\sum_{i=1}^{p_1} f(\xi_i, \eta_j) W_i \right] W_j = \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} f(\xi_i, \eta_j) W_i W_j$$

sendo p_1 e p_2 os números de pontos de integração nas direções ξ e η , respectivamente. Observa-se que no caso de um ponto de integração tem-se $I = 2 \cdot 2 \cdot f(0,0)$.

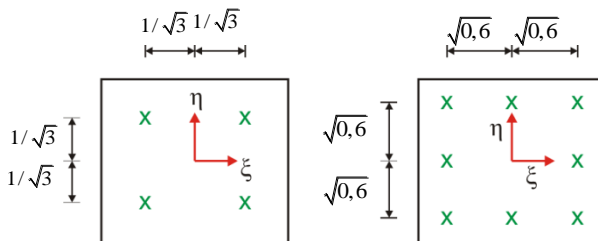


Figura 181 – Localização de pontos de integração de Gauss-Legendre.

A Figura 181 esquematiza a localização de 2 e 3 pontos de integração em cada direção do caso bidimensional. Observa-se que a soma dos fatores-peso em cada integração é igual à área do domínio auxiliar de coordenadas normalizadas.

Similarmente, define-se para o caso tridimensional a integral numérica como:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

$$I \cong \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} \sum_{k=1}^{p_3} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) W_i W_j W_k \quad (9.10)$$

O procedimento anterior permite que se altere o número de pontos de integração de uma direção para outra em função da ordem de integração que se deseja em cada coordenada. Em cada lado de elementos com igual número de nós, é natural adotar o mesmo número de pontos de integração em cada direção.

APÊNDICE 2

ELEMENTOS FINITOS EM ELASTICIDADE LINEAR

Na parte inicial deste apêndice alguns conceitos fundamentais de mecânica dos sólidos são apresentados para que as equações que caracterizam um problema estrutural sejam definidas. Posteriormente, a partir da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais e através do método numérico de elementos finitos define-se o modelo discreto para um problema desta natureza.

2.1) Conceitos fundamentais de mecânica dos sólidos

O principal objetivo da mecânica dos sólidos consiste na análise da resistência interna e da deformação de um corpo sólido submetido à determinados carregamentos. Isso exige o estudo da natureza das forças que aparecem no interior de um corpo, para compensarem o efeito das forças externas. São consideradas forças externas todas as forças que agem sobre o corpo, incluindo as de reação, causadas pelos suportes e pelo peso do corpo em si.

Os carregamentos que podem atuar sobre um corpo contínuo ou sobre partes deste corpo são:

a) Forças de contato ou de superfície aplicadas no contorno do corpo considerado pelo meio externo. São forças distribuídas, com unidade de força por unidade de área (N/m^2), representadas por F_1 e F_2 na Figura 182.

b) Forças de corpo ou forças de campo exercidas em cada partícula do corpo pelo meio externo. Estas forças são exercidas a distância, sem contato físico. O peso do corpo, ou seja, as forças inerciais devido a aceleração a que este corpo é submetido e as forças magnéticas são exemplo clássicos. As mesmas tem unidade de força por unidade de volume (N/m^3) e são representadas por b na Figura 182.

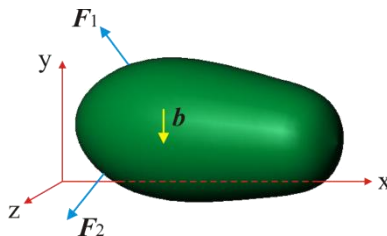


Figura 182 – Corpo em equilíbrio no espaço tridimensional.

Ao se estabelecer um plano de corte arbitrário no corpo em equilíbrio apresentado na Figura 182, torna-se possível determinar as forças internas decorrentes das externas. Na Figura 183 pode se observar o diagrama de corpo livre de uma das partes seccionadas. Então, se o corpo como um todo está em equilíbrio, qualquer parte dele também deve estar em equilíbrio. Além do mais, como um corpo estável em repouso está em equilíbrio, as forças que atuam sobre ele satisfazem as condições do equilíbrio.

Essas forças internas são de natureza vetorial e mantêm equilíbrio com as forças externas aplicadas. Em mecânica dos sólidos é particularmente significativo definir a intensidade dessas forças nas várias partes do corte como resistência à deformação. Em geral elas variam de ponto para ponto e não são obrigatoriamente paralelas ao vetor normal \mathbf{n} . É comum se decompor essas forças em componentes paralelas e perpendiculares à seção ΔA investigada.

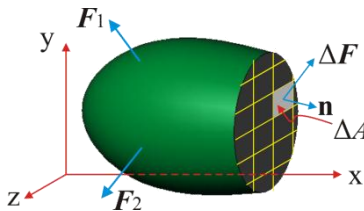


Figura 183 – Corpo seccionado livre com uma força interna ΔF .

Como as componentes da intensidade de força por unidade de área se mantêm verdadeiras apenas em um ponto, a definição matemática da tensão é:

$$\tau_{xx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}, \quad \tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A}, \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \quad (10.1)$$

onde o primeiro índice de τ , indica que o plano perpendicular ao eixo x é considerado, e o segundo designa a direção da componente da tensão.

A intensidade da força perpendicular à seção é chamada de tensão normal em um ponto. As demais componentes da intensidade da força agem paralelamente ao plano da área elementar. Essas componentes são chamadas de tensões de cisalhamento e designadas por τ .

2.1.1) Tensor de tensões

Imagine se outros planos de corte passassem sobre o corpo apresentado na Figura 183 de forma que se isolasse do corpo um cubo de dimensões infinitesimais. Todas as tensões que agem sobre tal cubo podem ser vistas na Figura 184.

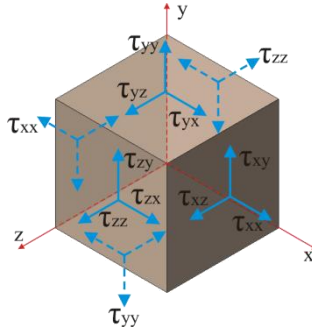


Figura 184 – Estado de tensão geral sobre um elemento infinitesimal.

A análise das tensões na Figura 184, mostra que existem três tensões normais $\tau_{xx} \equiv \sigma_x$, $\tau_{yy} \equiv \sigma_y$, $\tau_{zz} \equiv \sigma_z$ e seis tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zy} , τ_{zx} , τ_{xz} . Em contrapartida, um vetor força \mathbf{f} tem apenas três componentes F_x , F_y e F_z . Essas podem ser escritas de maneira ordenada como um vetor coluna:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

Analogamente, as componentes de tensão podem ser agrupadas da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

Essa é uma matriz de representação do tensor das tensões, conhecido como tensor de tensões de Cauchy. Ele se trata de um tensor de segunda ordem que necessita de dois índices para identificar seus componentes.

Conforme Popov [62] devido aos requisitos de equilíbrio para um elemento pode-se provar que o tensor de tensões é simétrico, isto é, $T = T^T$, ou, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Dessa forma, os índices para as tensões de cisalhamento são comutativos, isto é, sua ordem pode ser invertida e o tensor das tensões é simétrico. Esta igualdade é muito importante, e implica na igualdade das tensões de cisalhamento em planos mutuamente perpendiculares de um elemento infinitesimal. Além do mais, é possível o equilíbrio de um elemento apenas com tensões de cisalhamento simultaneamente nos quatro lados de um elemento. Isto é, em qualquer corpo em que existem tensões de cisalhamento, dois pares de tais tensões atuam em planos perpendiculares entre si. A simetria do tensor de tensões de Cauchy faz com que seja necessário determinar apenas seis componentes de tensão para se estabelecer por completo o estado de tensões de um ponto qualquer de um corpo sólido.

Sucintamente pode-se dizer que o tensor de tensões de Cauchy T representa o estado interno de tensões para cada ponto x de coordenadas x , y e z de um sólido tridimensional.

2.1.2) Equações diferenciais de equilíbrio

Agora, deseja-se estabelecer para o elemento apresentado na Figura 184 a maneira segundo a qual as tensões devem variar com a posição para garantir a condição de equilíbrio no domínio, ou seja, deseja-se determinar a forma diferencial das equações de equilíbrio deste elemento. Para que isto seja feito, na Figura 185 apresenta-se este elemento na sua configuração de equilíbrio sob a ação de tensões e forças de campo.

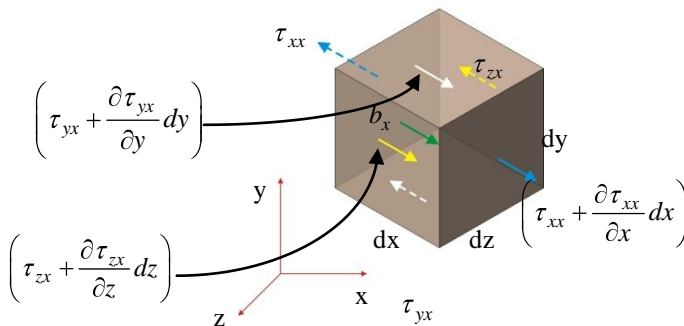


Figura 185 – Elemento infinitesimal com tensões e forças de campo atuando.

Nota-se que para simplificar a representação do desenho, apenas as tensões que dão origem as componentes de força na direção x foram mostradas. Na face 1 se indica uma tensão τ_{xx} , enquanto, na face paralela à face 1, respectivamente a face 2 no desenho, à uma distância dx em relação à face 1, mostra-se a mesma tensão, porém com uma variação infinitesimal no seu valor. O mesmo ocorre em relação aos demais pares de faces paralelas do paralelepípedo retangular.

As forças inerciais ou de campo, tais como as provocadas pelo peso ou efeito eletromagnético, são designadas por b_x , e estão relacionadas com a unidade de volume do material.

A somatória das forças na direção x corresponde a:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad \rightarrow + \\ \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz - \tau_{xx} (dydz) \\ + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} (dx dz) \\ + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} (dx dy) + b_x (dx dy dz) = 0 \end{aligned} \quad (10.4)$$

Simplificando, a expressão acima se torna:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x = 0 \quad (10.5)$$

Usando a propriedade de reciprocidade das tensões de cisalhamento e efetuando operações semelhantes nas direções y e z , podem-se estabelecer as equações de equilíbrio em um ponto do corpo, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + b_z = 0 \end{aligned} \quad (10.6)$$

Observe que as equações de equilíbrio incluem quantidades expressas como funções de posição, isto é, expressas como tensões e forças de campo, em vez de quantidades discretas, a saber, forças. Segundo Shames [63] as equações diferenciais acima não podem ser aplicadas em um ponto de aplicação de uma carga concentrada, pois, neste ponto as tensões tornam-se infinitas. O procedimento correto consiste em resolver as referidas equações diferenciais em regiões onde não existem cargas concentradas e, então, ajustar as soluções de forma a levar em conta essas cargas concentradas, as quais são consideradas como condições de contorno para este tipo de problema.

Aplicando o conceito de divergente de um tensor, apresentado na Equação (12.70), sobre o tensor de tensões de Cauchy as expressões acima podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$(\text{div}\mathbf{T}) + \mathbf{b} = 0 \tag{10.7}$$

Suponha que este mesmo elemento infinitesimal seja colocado em movimento. Neste caso para satisfazer as condições de equilíbrio faz-se necessário introduzir uma nova parcela de força resultante da aceleração a que o elemento é submetido, desta forma tem-se que:

$$(\text{div}\mathbf{T}) + \mathbf{b} + \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ou} \quad (\text{div}\mathbf{T}) + \mathbf{b} + \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0 \tag{10.8}$$

onde ρ corresponde a densidade volumétrica do material que compõe o corpo em análise.

2.1.3) Tensor de deformações

Como as deformações geralmente variam de ponto para ponto, as definições de deformação devem relacionar-se a um elemento infinitesimal. Portanto, considere uma deformação linear ocorrendo numa direção, como mostra a Figura 186.

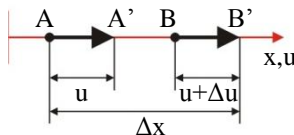


Figura 186 – Deformação linear unidimensional.

Durante a deformação, o ponto A sofre um deslocamento u . O deslocamento do ponto B é $u + \Delta u$ porque, além de u , comum a todo elemento Δx , ocorre a distensão Δu no elemento. Assim, a deformação linear é definida como:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (10.9)$$

Se um corpo sofre deformações ortogonais como é mostrado na Figura 187 (a), que representa o caso bidimensional, as deformações devem ser diferenciadas em cada uma das direções x e y . Desta forma, se u , v e ζ forem as três componentes do vetor deslocamento ocorrendo respectivamente nas direções x , y e z , as definições básicas de deformações linear para o caso tridimensional ficam:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad (10.10)$$

Em acréscimo à deformação linear, um elemento também pode sofrer uma deformação angular, como é mostrado no plano x - y da Figura 187 (b).

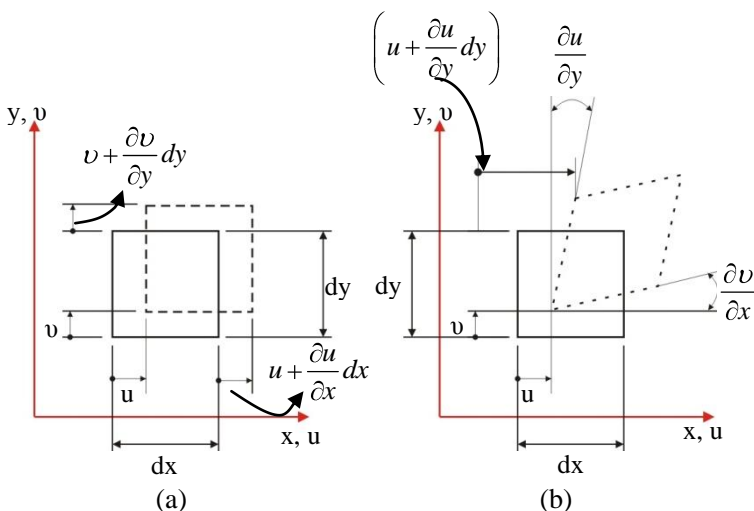


Figura 187 – Elementos carregados nas posições inicial e final.

Como v é o deslocamento na direção y , quando se move na direção x , $\partial v/\partial x$ é a inclinação do lado inicialmente horizontal do elemento infinitesimal. Analogamente, o lado vertical gira de um ângulo $\partial u/\partial y$. Como decorrência, o ângulo inicialmente reto reduz-se de $(\partial v/\partial x) + (\partial u/\partial y)$. Assim, para pequenas mudanças de ângulo, a definição da deformação angular associada com as coordenadas xy é obtida a partir da seguinte equação:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{10.11}$$

Observa-se que para se chegar a esta equação, admite-se que tangentes de pequenos ângulos sejam iguais aos ângulos em si.

As definições de deformações angulares para os planos xz e yz são semelhantes à do plano xy , sendo obtidas a partir das seguintes expressões:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \tag{10.12}$$

As tensões, linear e angular, definidas anteriormente exprimem o tensor das deformações, que é bastante análogo ao tensor das tensões. Entretanto, torna-se necessário modificar as relações das deformações angulares a fim de se obter um tensor, uma entidade que deve obedecer a certas leis de transformação como aquelas apresentadas no Item 4.4). A correta definição do componente de deformação angular como um elemento de um tensor, é apresentada na Figura 188.

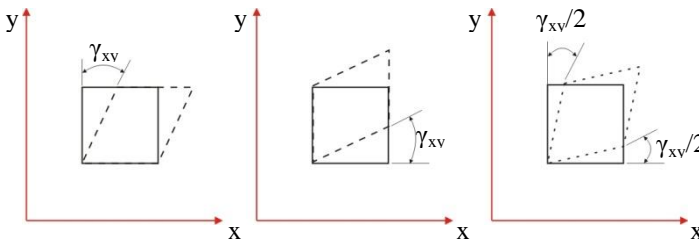


Figura 188 – Deformações tangenciais.

Seguindo essa sistemática, as deformações angulares podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\gamma_{yx}}{2} \\ \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} = \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \varepsilon_{zx} &= \varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{zx}}{2} = \frac{\gamma_{xz}}{2}\end{aligned}\tag{10.13}$$

Destas equações, o tensor das deformações que também se trata de um tensor simétrico, pode ser representado:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}\tag{10.14}$$

Expandindo seus componentes ele pode ser reescrito como:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}\tag{10.15}$$

ou ainda,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}\tag{10.16}$$

A seguir são apresentadas algumas manipulações matemáticas que permitem provar a simetria do tensor de deformações. Inicialmente

recorre-se a operação de gradiente sobre um vetor apresentada na Equação (12.22) para determinar o gradiente do campo de deslocamentos no sistema cartesiano de coordenadas.

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (10.17)$$

Este tensor pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} &= \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \\ \nabla \mathbf{u} &= \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^T + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^T \\ \nabla \mathbf{u} &= \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T] + \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T] \end{aligned} \quad (10.18)$$

Ao se realizar a operação definida pela primeira parcela a direita da igualdade da expressão (10.18), ou seja:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \right\} \quad (10.19)$$

Obtém-se exatamente o tensor de deformações apresentado na Equação (10.15). Portanto, pode-se dizer que:

$$\mathbf{E} = \mathbf{S} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T] \quad (10.20)$$

Já a segunda parcela a direita da igualdade da Equação (10.18) corresponde ao tensor de rotação, dado por:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T] \quad (10.21)$$

Portanto, o gradiente do vetor deslocamentos pode ser escrito simplificadamente a partir da soma de um tensor simétrico, o das deformações, com um antissimétrico, o das rotações:

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{E} + \mathbf{R} \quad (10.22)$$

2.2) Aplicação do princípio dos trabalhos virtuais (PTV)

Suponha que o elemento infinitesimal apresentado nos Itens 2.1.1) e 2.1.2) pertença a um corpo que ocupa uma região Ω no espaço tridimensional \mathfrak{R}^3 , limitado por uma fronteira Γ com normal \mathbf{n} , e dividida em duas regiões distintas, conforme se observa na Figura 189.

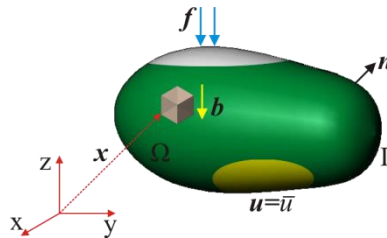


Figura 189 – Representação de domínio e fronteira.

A primeira, Γ_u , é a parte de Γ onde os deslocamentos têm valor prescrito conhecido \bar{u} . A segunda, Γ_f , é a parte da fronteira onde são aplicadas as forças de superfície \mathbf{f} (forças por unidade de superfície) de valor conhecido. No domínio Ω atuam as forças de corpo \mathbf{b} (forças por unidade de volume).

Baseado nas equações de equilíbrio apresentadas no Item 2.1.2), as condições de equilíbrio para os pontos localizados ao longo do domínio do corpo apresentado na Figura 189 são:

$$(\text{div} \mathbf{T}(\mathbf{x})) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0 \text{ em } \mathbf{x} \in \Omega \quad (10.23)$$

Já para os pontos localizados nas fronteiras, se estabelece que:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma_f \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \bar{u} \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma_u \end{aligned} \quad (10.24)$$

As condições de contorno nas quais se fixa o valor da derivada da função incógnita, no caso o vetor deslocamento \mathbf{u} , são conhecidas como condições de contorno naturais ou de Neumann. Já naquela em que se conhece o valor deslocamento, denomina-se condição de contorno essencial ou de Dirichlet.

As equações diferenciais e as condições de contorno apresentadas na forma tensorial nas Equações (10.23) e (10.24) são denominadas Forma Forte. A solução analítica destas equações de equilíbrio nem sempre pode ser obtida de maneira simples e sistemática para todos os tipos de problema, o que exige a utilização de métodos numéricos de aproximação de equações diferenciais.

Para que as condições de equilíbrio sejam resolvidas pelo método de elementos finitos elas deverão ser expressas na forma de equações integrais e não na forma de equações diferenciais. Esta nova forma das equações denomina-se Forma Fraca. A Forma Fraca para as condições de equilíbrio é obtida a partir da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Os objetivos do Princípio dos trabalhos virtuais são estabelecer os esforços externos compatíveis com os esforços internos e determinar uma expressão local para o equilíbrio entre estes esforços. Este princípio estabelece que, se o corpo está em equilíbrio, os trabalhos externo e interno são os mesmos para qualquer ação virtual de movimento $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ aplicada sobre o corpo, a partir de sua configuração deformada. O termo virtual significa que o princípio é válido para toda e qualquer ação hipotética de movimento, pequena ou grande, desde que compatível com a cinemática do problema.

Neste princípio a primeira coisa a se fazer é identificar as características principais da solução (deslocamento no caso estrutural e pressão no caso acústico) para poder procurá-la apenas no conjunto de funções que a possuem. O vetor deslocamentos $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ que soluciona a equação diferencial de equilíbrio é aquele campo de deslocamentos que deforma o corpo produzindo um estado de tensões em equilíbrio com os esforços externos.

Assim, são definidos os seguintes conjuntos de funções:

a) *Conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis* U_{adm} .

É o conjunto de todas as funções de deslocamento que satisfazem às condições de serem contínuas e diferenciáveis por partes do domínio e que satisfazem às condições de contorno do problema nos pontos onde se tem deslocamentos prescritos, ou seja:

$$U_{adm} = \{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) : \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \} \quad (10.25)$$

b) *Conjunto das variações de deslocamento* U_{var} .

Suponha que em um dado instante o corpo analisado sofre uma deformação causada por um deslocamento $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$, sendo que $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \in U_{adm}$. Se por algum motivo o corpo sofrer uma perturbação, um novo deslocamento $\mathbf{u}_2(\mathbf{x})$ ocorrerá, sendo que o mesmo também pertence à U_{adm} . A diferença entre estas duas funções arbitrárias $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$ e $\mathbf{u}_2(\mathbf{x})$ pertencentes ao conjunto U_{adm} , é uma terceira função $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ que possui o valor zero em pontos $\mathbf{x} \in \Gamma_u$. Observe que esta função, $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$, não pertence mais ao conjunto U_{adm} uma vez que o seu valor na fronteira é nulo. Portanto:

$$U_{var} = \{ \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) : \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \} \quad (10.26)$$

Se a função deslocamento \mathbf{u} aplicada no lado esquerdo da equação diferencial (10.23) for a solução exata do problema, o resultado do lado direito será zero. Por outro lado, se a função \mathbf{u} usada for uma função qualquer, o resultado não será nulo. Esse resultado será igual a um erro, denominado Função Resíduo $\mathbf{r}(\mathbf{x})$, ou seja:

$$(\text{div} \mathbf{T}(\mathbf{x})) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}) \text{ em } \mathbf{x} \in \Omega \quad (10.27)$$

O nome resíduo indica justamente que se a função $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ não for nula em algum ponto \mathbf{x} , a equação diferencial de equilíbrio não está sendo completamente satisfeita, havendo um erro residual.

Uma forma possível de identificar se uma função é nula em todo ponto do seu domínio, consiste em realizar a seguinte operação:

$$\int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (10.28)$$

sendo $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ uma função arbitrária conhecida, pertencente ao conjunto U_{var} . A esta função denomina-se deslocamento virtual. Se o resultado desta operação for o valor zero, existem chances de que a função $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ seja zero em todo ponto \mathbf{x} . É claro que com isto não se pode concluir que o resíduo seja identicamente nulo dado que o valor zero da integral pode ser produto de uma escolha particular de $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$. No entanto pode-se afirmar que a única função $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ que produz um valor nulo na integral acima para toda função $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \in U_{\text{var}}$, é a função $\mathbf{r}(\mathbf{x}) \equiv 0$. Isso equivale a dizer que:

$$\int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad (10.29)$$

Substituindo a função resíduo definida na Equação (10.27) na equação acima, obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\text{div}(\mathbf{T}(\mathbf{x})) + \mathbf{b}(\mathbf{x})) \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad (10.30)$$

Eliminando a dependência explícita em \mathbf{x} e usando a propriedade distributiva do produto escalar entre vetores, obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\text{div}\mathbf{T}) \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega = 0 \quad (10.31)$$

Substituindo o integrando da primeira parcela pelo resultado da operação apresentada no Item 4.7), particularmente a Equação (12.74), tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\text{div}(\mathbf{T}^T \hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{T} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}] d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{T}^T \hat{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (10.32)$$

Aplicando o teorema da divergência, apresentado no Item 4.6), na primeira integral da Equação (10.32), obtém-se que:

$$\int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{T}^T \hat{\mathbf{u}}) d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{T}^T \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (10.33)$$

Usando a definição de tensor transposto apresentada na Equação (12.41), a expressão obedece a seguinte igualdade:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{T}^T \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{n}) d\Gamma \quad (10.34)$$

Substituindo este resultado na Equação (10.32) obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega = 0 \quad (10.35)$$

Conforme pode se observar no Item 4.4) a multiplicação de um tensor por um vetor resulta num vetor, e como o produto escalar entre vetores é comutativo, a Equação (10.35) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega = 0 \quad (10.36)$$

Similarmente a Equação (10.22) que representa o gradiente do vetor real de deslocamentos, \mathbf{u} , pode-se definir o gradiente do vetor imaginário de deslocamento, $\hat{\mathbf{u}}$, como:

$$\nabla \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}) + \mathbf{R}(\hat{\mathbf{u}}) \quad (10.37)$$

Substituindo a expressão acima na Equação (10.36) obtém-se:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot (\mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}) + \mathbf{R}(\hat{\mathbf{u}})) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega = 0 \quad (10.38)$$

Lembrando que o produto interno entre tensores é distributivo, que o tensor de tensões de Cauchy é simétrico e que o produto interno entre um tensor simétrico por um tensor antissimétrico é sempre nulo, a Equação (10.38) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega = 0 \quad (10.39)$$

A integral sobre o contorno da Equação (10.39) pode ser dividida em duas componentes: A integral na superfície Γ_f onde $\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{f}$ e a integral na superfície Γ_u onde $\hat{\mathbf{u}} = 0$.

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Gamma = 0 \quad (10.40)$$

Note que esta expressão representa um equilíbrio entre esforços, ou seja:

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (10.41)$$

Particularmente, se fizermos análise dimensional de cada um dos termos que compõe a equação, obtém-se a unidade de trabalho Nm. O termo a esquerda da igualdade representa o trabalho virtual interno enquanto que os termos a direita correspondem ao trabalho virtual externo.

Logo, no princípio dos trabalhos virtuais que resulta na obtenção da Forma Fraca das equações de equilíbrio, Equação (10.40), busca-se uma função $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ que satisfaça esta equação, ao contrário da forma forte que procura $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Suponha que este corpo seja colocado em movimento. Neste caso para satisfazer as condições de equilíbrio faz-se necessário introduzir na equação do princípio dos trabalhos virtuais uma nova parcela de força resultante da aceleração a que o corpo é submetido, desta forma tem-se que:

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Gamma + \int_{\Omega} \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega = 0 \quad (10.42)$$

onde ρ corresponde a densidade volumétrica do material que compõe o corpo em análise.

Supondo que a força que origina este deslocamento seja uma força harmônica, do tipo $F = Fe^{j\omega t}$, a relação entre a aceleração e o deslocamento é dada por:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{u} \quad (10.43)$$

onde, ω corresponde a frequência angular de aplicação do carregamento, expressa em rad/s.

Logo, a Equação (10.42) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\Omega} \rho \omega^2 \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Gamma = 0 \quad (10.44)$$

2.3) Soluções aproximadas

Algumas vezes dependendo das características do problema tridimensional, eles podem ser representados por modelos denominados estados de elasticidade planos, os quais incorporam hipóteses particulares de comportamento que permitem a descrição plana do fenômeno reduzindo esforços de modelagem. No presente trabalho estes modelos não serão abordados, uma vez que, são desenvolvidos modelos tridimensionais e também devido a própria simplicidade da formulação tridimensional que dispensa adicionar hipóteses de comportamento às equações de equilíbrio definidas pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Inicialmente serão apresentadas algumas manipulações matemáticas que permitirão facilitar a escrita da Equação do Princípio dos Trabalhos Virtuais na forma matricial.

Recorrendo ao conceito de produto interno entre tensores definido na Equação (12.61), o produto interno entre o tensor de deformações e o tensor de tensões de Cauchy corresponde a:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{T} = tr \mathbf{E}^T \mathbf{T} \quad (10.45)$$

sendo tr o traço de um tensor, o qual é dado pela soma dos termos da diagonal principal. Substituindo as componentes cartesianas de \mathbf{T} e \mathbf{E} e efetuando o produto escalar entre eles obtém-se:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{T} = tr \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \right) \quad (10.46)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{T} = \tau_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{zz} \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \varepsilon_{xy} + \tau_{yx} \varepsilon_{yx} + \tau_{xz} \varepsilon_{xz} + \tau_{zx} \varepsilon_{zx} + \tau_{yz} \varepsilon_{yz} + \tau_{zy} \varepsilon_{zy}$$

Considerando o fato de que os dois tensores são simétricos a Equação (10.46) se reduz a:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{T} = \tau_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{zz} \varepsilon_{zz} + 2\tau_{xy} \varepsilon_{xy} + 2\tau_{xz} \varepsilon_{xz} + 2\tau_{yz} \varepsilon_{yz} \quad (10.47)$$

Substituindo o valor das componentes de deformação definidas na Equação (10.13), obtém-se:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{T} = \tau_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{zz} \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \quad (10.48)$$

Note que o resultado desta operação pode ser obtido a partir do produto escalar entre dois vetores $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$, definidos a partir dos elementos da diagonal superior dos tensores de tensões e de deformações. Observe:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (10.49)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \tau_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{zz} \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}$$

Isto é possível pelo fato de que os tensores de tensões de Cauchy e de deformações são simétricos. Portanto, a equação do princípio dos trabalhos virtuais pode ser reescrita em função destes vetores da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\Omega} \rho \omega^2 \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Gamma = 0 \quad (10.50)$$

A relação linear das tensões e deformações, chamada Lei de Hooke, permite determinar tensões em função das deformações produzidas pelo deslocamento real $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, a mesma é definida por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (10.51)$$

onde, \mathbf{C} consiste na matriz rigidez ou constitutiva do material, que corresponde a inversa da matriz de flexibilidade ou comportamento definida na Equação (10.52).

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{xz}/E_x & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_y & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_z & -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} \end{bmatrix} \quad (10.52)$$

onde, E e G correspondem respectivamente ao módulo de elasticidade e de cisalhamento em cada uma das direções do sistema cartesiano de coordenadas, e ν o coeficiente de Poisson.

Logo, a Equação (10.50) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\Omega} \rho \omega^2 \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Gamma = 0 \quad (10.53)$$

Por sua vez, o vetor de deformações pode ser escrito como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \zeta \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (10.54)$$

Então, matricialmente a Equação (10.53) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u} \cdot \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Gamma = 0 \quad (10.55)$$

O método de elementos finitos deseja obter uma solução aproximada para a forma fraca do problema definido na Equação (10.55). Para isso, são necessárias aproximações para as funções representadas por $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ e $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$.

De forma geral, as componentes do vetor deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ são aproximadas através das seguintes combinações lineares de n funções:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) u_i \\ v(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) v_i \\ \zeta(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) \zeta_i \end{aligned} \quad (10.56)$$

sendo $N_i(\mathbf{x})$ as funções de interpolação globais e os u_i , v_i , e ζ_i os coeficientes de ponderação a serem determinados. Matricialmente pode-se escrever:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ \zeta(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \zeta_i \end{Bmatrix} \quad (10.57)$$

ou seja,

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \quad (10.58)$$

Analogamente, a aproximação para a função $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ é dada por:

$$\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n [N_j(\mathbf{x})] \hat{\mathbf{u}}_j \quad (10.59)$$

sendo $\hat{\mathbf{u}}_j = \hat{u}_j \quad \hat{v}_j \quad \hat{\zeta}_j^T$ os coeficientes de ponderação a serem determinados.

Substituindo as Equações (10.58) e (10.59) na Equação (10.55), obtém-se:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \mathbf{C} \mathbf{D} N_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{D} [N_j] \hat{\mathbf{u}}_j d\Omega \\ -\omega^2 \int_{\Omega} \rho N_i \mathbf{u}_i \cdot [N_j] \hat{\mathbf{u}}_j d\Omega \\ - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot [N_j] \hat{\mathbf{u}}_j d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot [N_j] \hat{\mathbf{u}}_j d\Gamma \end{array} \right\} = 0 \quad (10.60)$$

Define-se a matriz de deformação $[\mathbf{B}_i] = [\mathbf{D}][N_i]$. Em forma expandida:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (10.61)$$

Sabendo-se que $\hat{\mathbf{u}}_j$ é constante e utilizando o conceito de transposição de matrizes, pode-se reescrever a Equação (10.60) como:

$$\sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{u}}_j \cdot \left[\sum_{i=1}^n \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} [\mathbf{B}_j]^T \mathbf{C} \mathbf{B}_i d\Omega \mathbf{u}_i \\ -\omega^2 \int_{\Omega} \rho [N_j]^T N_i d\Omega \mathbf{u}_i \\ - \int_{\Omega} [N_j]^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_f} [N_j]^T \mathbf{f} d\Gamma \end{array} \right\} \right] = 0 \quad (10.62)$$

Para que esta expressão seja nula é necessário que o termo entre colchetes seja nulo, logo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [\mathbf{B}_j]^T \mathbf{C} \mathbf{B}_i d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \rho [N_j]^T N_i d\Omega \mathbf{u}_i \\ = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [N_j]^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} [N_j]^T \mathbf{f} d\Gamma \end{aligned} \quad (10.63)$$

com $j=1, 2, \dots, n$. Onde n corresponde ao número de nós que compõe a malha de elementos finitos.

Reescrevendo de uma forma compacta:

$$\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (10.64)$$

sendo $[\mathbf{K}]$ e $[\mathbf{M}]$, respectivamente, as matrizes de rigidez global e massa global, $\{\mathbf{U}\}$ o vetor das incógnitas, neste caso representado pelo deslocamento, e $\{\mathbf{F}\}$ o vetor global dos carregamentos, dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [\mathbf{B}_j]^T \mathbf{C} \mathbf{B}_i d\Omega \\ \mathbf{M} &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \rho [N_j]^T N_i d\Omega \\ \mathbf{U} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \\ \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [N_j]^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} [N_j]^T \mathbf{f} d\Gamma \end{aligned} \quad (10.65)$$

Do ponto de vista operacional a construção das matrizes $[K]$, $[M]$ e $\{F\}$ a partir da integração das funções de forma não se mostra um procedimento tão eficaz, portanto, prefere-se fazer uma análise local para um elemento e da discretização, então, pode-se escrever as aproximações da seguinte maneira:

$$\mathbf{u}_n^e(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_e} [N_i^e(\mathbf{x})] \mathbf{u}_i^e \quad (10.66)$$

sendo n_e o número de nós do elemento.

Logo, as respectivas matrizes e vetores locais para o elemento e , denominadas matrizes elementares são:

$$\begin{aligned} [K^e] &= \sum_{i=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} [B_j^e]^T C [B_i^e] d\Omega_e \\ [M^e] &= \sum_{i=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \rho [N_j^e]^T [N_i^e] d\Omega_e \\ U^e &= \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{u}_i^e \\ F^e &= \sum_{i=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} [N_j^e]^T \mathbf{b}^e d\Omega_e + \int_{\Gamma_{fe}} [N_j^e]^T \mathbf{f}^e d\Gamma_e \end{aligned} \quad (10.67)$$

com $j=1, 2, \dots, n_e$.

Desta forma a construção das matrizes e vetores globais baseia-se na superposição das matrizes e vetores locais obtidos para cada elemento da discretização.

Observe que no caso estrutural, ao se utilizar o elemento sólido H8, tem-se três graus de liberdade por nó, referentes ao deslocamento na direção x , y e z , logo a ordem das matrizes elementares será: Se $[B^e]$ é (6×24) e $[C]$ é (6×6) , $[K^e]$ será (24×24) . Se $[N^e]$ (3×24) , $[M^e]$ será 24×24 e $[F^e]$ será (24×1) , pois $\{f\}$ e $\{b\}$ são (3×1) .

Finalmente, deve-se solucionar o sistema de equações algébricas global, definido em (10.64), a fim de se obter os valores das incógnitas $\{u_i\}$ para a aproximação. Existem vários métodos para determinar as funções de interpolação ou funções de forma definidas por $\{N_i\}$. Os polinômios de Lagrange, bem como as aproximações de base utilizando a pirâmide de Pascal, são muito utilizados com o Método dos Elementos Finitos, e são ditas, nesse caso, funções de forma nodais.

A vantagem de se efetuar uma aproximação do tipo nodal é que os valores dos coeficientes $\{\mathbf{u}_i\}$, obtidos dessa maneira, representam fisicamente o valor dos deslocamentos para cada nó da malha de elementos finitos utilizada na discretização, no caso de um problema de sólidos.

2.4) Mapeamento

No método de elementos finitos é prático e muito vantajoso definir a geometria a ser analisada por interpolação das suas coordenadas nodais. Quando se utilizam nessa definição as mesmas funções de interpolação usadas para determinar o campo de deslocamento no caso de um problema de elasticidade linear, o elemento é denominado isoparamétrico.

Assim nos elementos isoparamétricos o mapeamento das funções de interpolação definidas em um domínio elementar padrão é utilizado para facilitar a identificação da equação que define a função de interpolação de um elemento qualquer da malha uma vez que a determinação das mesmas depende das suas características polinomiais e das coordenadas que definem o elemento. Ou seja, segundo Fancello e Mendonça [64] o objetivo final deste procedimento é permitir estabelecer um único conjunto de funções de interpolação para cada tipo de elemento e efetuar a integração das matrizes elementares na configuração padrão do elemento através de uma simples mudança de variáveis de integração.

O mapeamento de todo o ponto do elemento hexaédrico padrão, apresentado na Figura 190, para o elemento hexaédrico no domínio real (x,y,z) pode ser feito a partir das funções de interpolação deste elemento hexaédrico linear, definidas pela Equação (9.5), usando as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 x_{\xi,\zeta,\eta} &= x_1N_1(\xi,\zeta,\eta) + x_2N_2(\xi,\zeta,\eta) + \dots + x_8N_8(\xi,\zeta,\eta) \\
 y_{\xi,\zeta,\eta} &= y_1N_1(\xi,\zeta,\eta) + y_2N_2(\xi,\zeta,\eta) + \dots + y_8N_8(\xi,\zeta,\eta) \\
 z_{\xi,\zeta,\eta} &= z_1N_1(\xi,\zeta,\eta) + z_2N_2(\xi,\zeta,\eta) + \dots + z_8N_8(\xi,\zeta,\eta)
 \end{aligned}
 \tag{10.68}$$

onde x_i , y_i e z_i são as coordenadas dos nós do elemento.

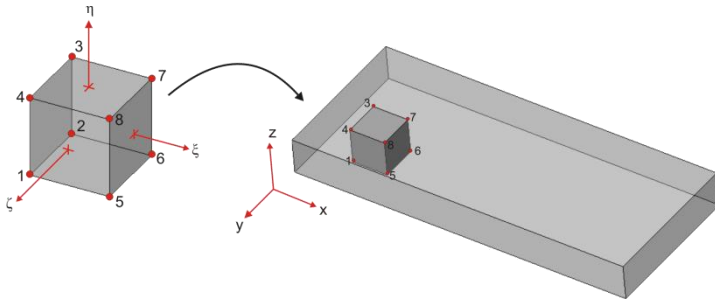


Figura 190 – Mapeamento do elemento no domínio padrão para o domínio real.

Como o elemento hexaédrico linear trata-se de um elemento isoparamétrico as mesmas funções de interpolação usadas para mapear o elemento podem ser usadas para interpolar as variáveis de interesse, nesse caso os deslocamentos, a partir das seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 u \ x, y, z &= u_1 N_1 \ \xi, \zeta, \eta + u_2 N_2 \ \xi, \zeta, \eta + \dots + u_8 N_8 \ \xi, \zeta, \eta \\
 v \ x, y, z &= v_1 N_1 \ \xi, \zeta, \eta + v_2 N_2 \ \xi, \zeta, \eta + \dots + v_8 N_8 \ \xi, \zeta, \eta \\
 \varsigma \ x, y, z &= \varsigma_1 N_1 \ \xi, \zeta, \eta + \varsigma_2 N_2 \ \xi, \zeta, \eta + \dots + \varsigma_8 N_8 \ \xi, \zeta, \eta
 \end{aligned}
 \tag{10.69}$$

Assim, considere a matriz de rigidez elementar definida na Equação (10.67):

$$\left[\mathbf{K}^e \right] = \sum_{i=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} \left[\mathbf{B}^e_j \right]^T \mathbf{C} \left[\mathbf{B}^e_i \right] d\Omega^e
 \tag{10.70}$$

Lembre que originalmente as funções de forma foram definidas em relação à x , y e z e a matriz $\left[\mathbf{B}^e \right]$ foi definida em termos das derivadas parciais das funções de forma em relação a este domínio. Porém, agora as funções de forma são definidas em termos das coordenadas padrão ξ , ζ , η , logo, suas derivadas em relação à x , y e z serão:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_i}{\partial x} \xi, \zeta, \eta &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
 \frac{\partial N_i}{\partial y} \xi, \zeta, \eta &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
 \frac{\partial N_i}{\partial z} \xi, \zeta, \eta &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{10.71}$$

ou em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix}
 \tag{10.72}$$

A determinação destas equações torna-se possível pelo fato de que é possível inverter a relação apresentada na Equação (10.68), isto é, das funções $x(\xi, \zeta, \eta)$, $y(\xi, \zeta, \eta)$ e $z(\xi, \zeta, \eta)$ é possível se obter as funções $\xi(x, y, z)$, $\zeta(x, y, z)$ e $\eta(x, y, z)$

Observe que a determinação do vetor que representa a derivada das funções de forma em relação ao domínio padrão ξ, ζ, η pode ser obtida facilmente através do cálculo da derivada das funções de forma em relação a estas coordenadas padrão. Por outro lado, a determinação da primeira matriz a direita da igualdade da Equação (10.72) é complicada uma vez que a operação necessária para calcular a função inversa da Equação (10.68), ou seja, as funções $\xi(x, y, z)$, $\zeta(x, y, z)$ e $\eta(x, y, z)$, não é tão simples. Para calcular esta matriz de forma mais fácil utiliza-se o seguinte artifício matemático:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x, y, z &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\
 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x, y, z &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\
 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x, y, z &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta}
 \end{aligned}
 \tag{10.73}$$

em forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (10.74)$$

onde J é denominada matriz Jacobiana. Os termos que compõe a matriz Jacobiana podem ser facilmente calculados. Por exemplo, as derivadas em relação à coordenada padrão ξ são obtidas através das seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{\xi, \zeta, \eta}}{\partial \xi} &= x_1 \frac{\partial N_1_{\xi, \zeta, \eta}}{\partial \xi} + \dots + x_8 \frac{\partial N_8_{\xi, \zeta, \eta}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y_{\xi, \zeta, \eta}}{\partial \xi} &= y_1 \frac{\partial N_1_{\xi, \zeta, \eta}}{\partial \xi} + \dots + y_8 \frac{\partial N_8_{\xi, \zeta, \eta}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z_{\xi, \zeta, \eta}}{\partial \xi} &= z_1 \frac{\partial N_1_{\xi, \zeta, \eta}}{\partial \xi} + \dots + z_8 \frac{\partial N_8_{\xi, \zeta, \eta}}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (10.75)$$

Observe que os vetores da Equação (10.74) são os mesmos que os da expressão (10.72), e considerando que a inversa de uma matriz, se existe, é única, a matriz Jacobiana corresponde à inversa da matriz apresentada na Equação (10.72). Logo, pode-se reescrever a Equação (10.72) como:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J^{-1}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (10.76)$$

Então, as derivadas resultantes desta equação são utilizadas para calcular cada um dos termos que constituem a matriz $[B^e]$.

Finalmente, faz-se necessário definir um fator que relacione as diferenciais de volume entre um ponto no domínio padrão e o ponto correspondente no domínio real do elemento. Este fator corresponde ao determinante do jacobiano, que permite estabelecer a seguinte relação:

$$d\Omega = dx dy dz = \det J d\xi d\zeta d\eta \quad (10.77)$$

Logo, a matriz de rigidez elementar pode ser reescrita da seguinte forma:

$$[K^e] = \sum_{i=1}^{n_e} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^e_j]^T C [B^e_i] \det J d\xi d\zeta d\eta \quad (10.78)$$

Em analogia, as matrizes de massa e de força elementar podem ser reescritas como:

$$[M^e] = \sum_{i=1}^{n_e} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho [N^e_j]^T [N^e_i] \det J d\xi d\zeta d\eta \quad (10.79)$$

$$F^e = \sum_{i=1}^{n_e} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N^e_j]^T b^e \det J d\xi d\zeta d\eta + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N^e_j]^T f^e \det J d\xi d\eta \quad (10.80)$$

2.5) Integração numérica

Procurando facilitar a resolução das integrais presentes nas matrizes elementares, aplica-se a regra de Gauss de integração numérica, de modo que as matrizes possam ser reescritas como:

$$[K^e] = \sum_{i=1}^{n_e} \left(\sum_{m=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{o=1}^{p_3} [B^e_j(\xi_i, \zeta_i, \eta_i)]^T C [B^e_i(\xi_i, \zeta_i, \eta_i)] W_m W_n W_o \right) \quad (10.81)$$

$$[M^e] = \sum_{i=1}^{n_e} \left(\sum_{m=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{o=1}^{p_3} \rho [N^e_j(\xi_i, \zeta_i, \eta_i)]^T [N^e_i(\xi_i, \zeta_i, \eta_i)] W_m W_n W_o \right) \quad (10.82)$$

$$\mathbf{F}^e = \sum_{i=1}^{n_e} \left(\begin{array}{l} \sum_{m=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{o=1}^{p_3} [N_j^e(\xi_i, \zeta_i, \eta_i)]^T \mathbf{b}^e W_m W_n W_o \\ + \sum_{m=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} [N_j^e(\xi_i, \eta_i)]^T \mathbf{f}^e W_m W_n \end{array} \right) \quad (10.83)$$

onde, ξ_i, ζ_i, η_i são as coordenadas dos pontos de Gauss no sistema padrão de coordenadas e W_m, W_n e W_o os respectivos pesos de integração.

Particularmente, nas integrais de volume foram utilizados 8 pontos de integração enquanto que nas integrais de fronteira apenas 3.

APÊNDICE 3

ELEMENTOS FINITOS EM ACÚSTICA LINEAR

Nesta seção são apresentados conceitos gerais, hipóteses e algumas considerações que permitem determinar a expressão que governa a propagação sonora em fluidos. Estas equações serão o ponto de partida para o desenvolvimento da formulação do modelo de elementos finitos desenvolvido para calcular a radiação sonora dos reatores.

3.1) Propagação sonora em fluidos: Equação de ondas planas

Segundo Fahy [65], a essência do movimento mecânico está na ligação das variações temporais e espaciais das grandezas físicas envolvidas. No caso de ondas sonoras, as grandezas envolvidas são: pressão, densidade e temperatura. As mesmas estão ligadas via relações termodinâmicas, cinemáticas e dinâmicas.

No ar a sua volta, um cubo cujos lados apresentam 1 mm de comprimento contém cerca de $2,687E+10$ moléculas. Do ponto de vista de acústica é conveniente e cientificamente aceitável modelar fluidos como um meio contínuo. O modelo discreto molecular é substituído sem qualquer restrição por um meio no qual as propriedades, estado e comportamento em um ponto são expressos em termos de grandezas governadas pelo estado médio de uma grande quantidade de moléculas dentro de um “pequeno” volume que contém este ponto. Estas grandezas são conhecidas matematicamente como variáveis do modelo. A região pode ser considerada “pequena” quando as mudanças espaciais das variáveis que a atravessam podem ser expressas exatamente como o produto dos gradientes espaciais locais das variáveis e a largura da região. Comumente o termo utilizado para expressar este conceito denomina-se elemento de volume.

Numa análise de elementos finitos espera-se alcançar bons resultados admitindo uma discretização máxima e exagerada, na qual o elemento de volume tenha um comprimento correspondente a $\lambda/100$, onde λ corresponde ao comprimento de onda no meio de propagação. Logo, numa análise cujo meio é o ar atmosférico e o limite superior da faixa de frequências corresponde a 10 kHz, o elemento apresentará um comprimento de $3,43E-4$ m. Para ter-se uma ideia da quantidade de moléculas contida neste elemento de volume, basta comparar este valor

com a distância média percorrida por uma molécula entre choques sucessivos no ar, 8E-8 m.

O conceito de partícula é adotado para descrever o estado cinemático de um fluido, esta denominação corresponde a uma entidade fictícia que permite expressar os vetores médios de posição, velocidade e aceleração das moléculas em uma pequena região que contorna o ponto de interesse. Note que a velocidade de partícula, uma grandeza vetorial, não está relacionada com a velocidade média das moléculas associadas, uma grandeza escalar. Na hipótese de meio contínuo, um fluido parado apresenta um vetor médio de velocidade de moléculas zero.

O conceito de deslocamento contínuo de partícula implica em que as moléculas associadas a esta partícula têm um deslocamento médio não aleatório sobreposto aos deslocamentos randômicos delas, de forma que a massa associada às mesmas seja submetida a este deslocamento, similarmente ocorre com a velocidade e a aceleração.

As pressões e temperaturas de equilíbrio dos gases que formam os componentes da maioria dos sistemas de interesse em acústica apresentam um comportamento muito próximo de um gás perfeito, para o qual se pode escrever:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (11.1)$$

onde p é a pressão em Pa, T a temperatura absoluta em Kelvin, ρ a densidade em kg/m^3 e R uma constante dada em função do tipo de gás, que para o ar atmosférico corresponde a $287 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$.

Em frequências dentro da faixa audível, 20 Hz a 20 kHz, o fluxo de calor entre as regiões de baixa e alta temperatura são desprezíveis, porque as mesmas estão tão afastadas que os gradientes de temperatura são muito pequenos para produzir uma condução de calor significativa. Conclui-se, então, que a propagação do som representa um processo adiabático no qual a pressão está relacionada à densidade da seguinte forma,

$$p = \alpha \rho^\gamma \quad (11.2)$$

onde α é uma constante, e o expoente γ é a razão entre calores específicos a uma pressão e a um volume constante, correspondente a 1,4 para o ar atmosférico.

Som é por conseguinte um fenômeno essencialmente não linear, como se observa na Figura 191. No entanto, as ínfimas mudanças de densidade e pressão associadas aos níveis sonoros tolerados pelos seres humanos são tão pequenas que o efeito de não linearidade tem um efeito insignificante, de modo que a reta tangente à curva apresentada na Figura 191, no ponto de equilíbrio 0, é uma medida suficientemente precisa da variação da pressão sonora com a densidade.

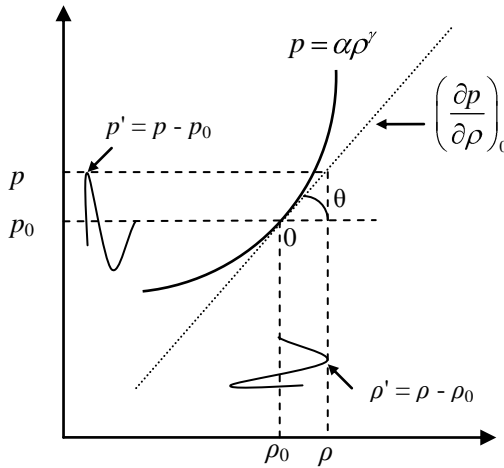


Figura 191 – Relação adiabática entre pressão e densidade.

Através de relações trigonométricas e da definição de derivada, pode-se escrever para o ponto de equilíbrio:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{p - p_0}{\rho - \rho_0} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \quad (11.3)$$

onde $p - p_0$ representa a pressão sonora p' . Em condições normais de temperatura e pressão, o ar possui $p_0 = 101.325 \text{ Pa}$ e $\rho_0 = 1,21 \text{ Kg/m}^3$. Note que o sub-índice 0 refere-se ao ponto de equilíbrio.

A relação entre as variações da densidade sobre seu valor médio e as correspondentes variações de pressão sobre seu valor médio determinam a velocidade de propagação do som no meio, que para o ponto de equilíbrio pode ser obtida a partir da manipulação das Equações (11.2) e (11.3).

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0} \rightarrow c_0 = \sqrt{\frac{p_0 \gamma}{\rho_0}} \quad (11.4)$$

Assim a Equação (11.3) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{p'}{\rho'} = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0} \rightarrow \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p'}{p_0 \gamma} \quad (11.5)$$

A constante de proporcionalidade do gás $p_0 \gamma$ é denominada módulo de compressibilidade adiabático, que para o ar possui um valor de aproximadamente $1,40\text{E}+5$ Pa ao nível do mar.

O módulo de compressibilidade ou também denominado *bulk modulus*, consiste na medida da rigidez de uma substância ou da energia necessária para produzir uma dada deformação, sendo definido como a razão da variação da pressão correspondente a uma fracionária compressão do volume.

$$\kappa = -V \frac{dp}{dV} \quad (11.6)$$

O inverso desta grandeza denomina-se compressibilidade (Pa^{-1}), logo, quanto maior o seu valor mais incompressível é o fluido.

Em alguns casos, as ondas sonoras tomam uma forma particularmente simples, denominada ondas planas, indicando que cada grandeza acústica é uniforme ao longo de toda a superfície normal à direção de propagação. Entretanto, com a variação do tempo, os valores de cada grandeza num plano qualquer variam simultaneamente de acordo com a dependência temporal do mecanismo de geração da onda sonora.

De acordo com Blackstock [66], o exemplo prático mais simples deste tipo de onda corresponde ao campo sonoro gerado por um pistão-rígido, que se move em uma das extremidades de um tubo rígido de seção transversal constante que apresenta uma terminação anecóica na outra extremidade. Supõe-se que o movimento de partícula não pode ser completamente uniforme ao longo de toda a seção transversal, porque o mesmo deve ser zero nas paredes, assim sendo, somos forçados a admitir no modelo que o fluido apresenta uma viscosidade desprezível.

A hipótese de que o fluido não apresenta viscosidade proporciona uma grande simplificação na análise de campos acústicos, sendo justificada pelo fato de que a negligência da mesma produz um erro insignificante na análise da maioria dos problemas práticos de interesse de engenharia. As demais hipóteses admitidas neste modelo são de que o fluido é homogêneo, de que suas propriedades são independentes da direção, são isotrópicos e que as perturbações acústicas são suficientemente pequenas de modo que o mesmo se comporte como um meio elástico linear.

Estabelecidas as hipóteses do modelo, retorna-se ao exemplo anterior, onde as únicas forças internas restantes que podem acelerar as partículas de fluido resultam de variações espaciais da pressão sonora, devido à ausência de tensões viscosas de cisalhamento.

Suponha que o elemento de volume da Figura 192 corresponde a um volume de controle fixo em relação ao eixo de referência para o qual o movimento do fluido é definido e que uma de suas faces está submetida a uma vazão mássica dada por $(\rho\dot{u})dydz$.

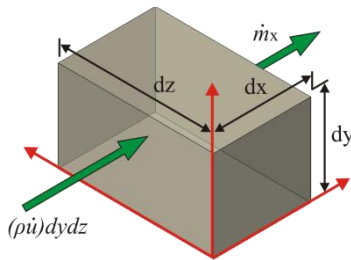


Figura 192 – Fluxo de massa através de um volume de controle.

Por tratar-se de um elemento com dimensões infinitesimais as variações de densidade e da velocidade de partícula sofrem pequenas alterações ao longo do elemento. Conseqüentemente, pode-se definir a densidade e a velocidade de partícula na face localizada em $x + dx$, através da expansão de Taylor:

$$\rho(x + dx) = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2} + \dots \tag{11.7}$$

$$\dot{u}(x + dx) = \dot{u} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2} + \dots$$

De acordo com a definição de elemento “pequeno” os termos de segunda ordem em diante podem ser desprezados, logo:

$$\rho(x + dx) = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \tag{11.8}$$

$$\dot{u}(x + dx) = \dot{u} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dx$$

Assim, pode-se afirmar de que a vazão mássica que atravessa a face do elemento, localizada em $x + dx$, é dada por:

$$\dot{m}_x = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) \left(\dot{u} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dx \right) dydz \tag{11.9}$$

A diferença instantânea entre as taxas de fluxo de massa que entram e saem do volume de controle na direção x é dada por:

$$\Delta \dot{m}_x = (\rho \dot{u}) dydz - \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) \left(\dot{u} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dx \right) dydz \tag{11.10}$$

Sabendo que $\rho = \rho_0 + \rho'$ e desprezando os termos muito pequenos, a Equação (11.10) se reduz a:

$$\Delta \dot{m}_x = -\rho_0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dx dydz \tag{11.11}$$

Nas direções y e z , as faces do volume de controle também estão submetidas a uma determinada vazão, portanto, em analogia ao que foi apresentado para a direção x , pode-se determinar que:

$$\Delta \dot{m}_y = -\rho_0 \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} dy dx dz \tag{11.12}$$

$$\Delta \dot{m}_z = -\rho_0 \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} dz dx dy$$

onde \dot{u}, \dot{v} e $\dot{\zeta}$ correspondem, respectivamente, às componentes do vetor velocidade de partícula $\dot{\mathbf{u}}$ nas direções x, y e z .

De acordo com o princípio da conservação da massa, a taxa instantânea do aumento de massa no interior do volume de controle deverá ser igual à diferença instantânea entre as taxas de fluxo de massa que entram e saem do mesmo, como segue

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dx dy dz = \Delta \dot{m}_x + \Delta \dot{m}_y + \Delta \dot{m}_z \quad (11.13)$$

ou seja,

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} dx dy dz = -\rho_0 \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (11.14)$$

Substituindo ρ' através da relação apresentada na Equação (11.5), obtém-se:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\gamma p_0 \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z} \right) \quad (11.15)$$

O termo entre parênteses da Equação (11.15) é denominado divergente do vetor velocidade de partícula $\dot{\mathbf{u}}$, logo se pode reescrevê-la da seguinte maneira:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -\gamma p_0 \text{div}(\dot{\mathbf{u}}) \quad (11.16)$$

onde o produto γp_0 é o denominado módulo de compressibilidade adiabático e o conceito de divergente é apresentado no Item 4.5) dos Anexos.

Substituindo o módulo de compressibilidade definido na Equação (11.4) e derivando a Equação (11.16) em relação ao tempo, obtém-se:

$$\left(\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \right) = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial(\text{div}(\dot{\mathbf{u}}))}{\partial t} \quad (11.17)$$

O estado cinemático de um fluido em um instante qualquer é representado em termos da distribuição espacial instantânea de seus vetores velocidades de partícula. Baseado nos princípios da mecânica clássica, os quais podem ser aplicados a todos os interesses da engenharia acústica, pode-se afirmar que as taxas de mudanças das velocidades de partícula estão relacionadas às forças totais atuantes sobre elas.

Estas forças normalmente são de dois tipos, as forças de campo, também denominadas de forças do corpo, e as forças de superfície. As forças de campo não são muito significativas, pois as mesmas afetam significativamente a propagação sonora somente em longas distâncias. Dentre as mais comuns destaca-se a força da gravidade. Já as forças de superfície são decorrentes das tensões normais e cisalhamentos que atuam no elemento de volume.

Embora forças viscosas afetem significativamente o movimento de um fluido muito próximo de superfícies sólidas e dissipem energia sonora na forma de calor durante a propagação do som, o comportamento geral dos campos sonoros, nos gases e líquidos, pode ser analisado com uma boa precisão ao considerar que o fluido apresenta uma viscosidade desprezível.

Supondo a ausência de forças eletromagnéticas e considerando as hipóteses feitas acima as únicas forças internas remanescentes que atuam no fluido causando as acelerações de partícula são aquelas de superfície devido aos gradientes espaciais de pressão. Logo, todas as faces do elemento de volume, representado na Figura 193, estão submetidas a uma força correspondente a pressão atuante naquela direção.

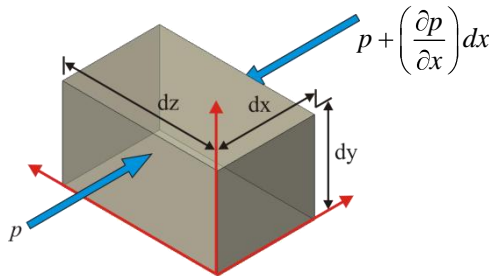


Figura 193 –Elemento de volume sujeito aos gradientes de pressão na direção x .

Para determinar as forças atuantes no elemento se recorre à segunda lei de Newton. Inicialmente devem ser determinadas as acelerações atuantes no elemento, que se tornam mais perceptíveis quando se faz uma analogia ao caso de um pequeno barco navegando sentido a constrição de um rio, representado na Figura 194.

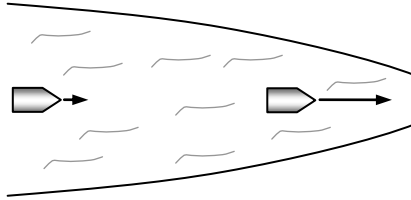


Figura 194 – Aumento da velocidade de um barco navegando no sentido da constrição de um rio.

Mesmo que o fluxo em qualquer ponto não dependa do tempo, ou seja, o fluxo seja constante, o barco é acelerado à medida que se desloca para a região onde o fluxo de água é mais rápido. Matematicamente esta parcela da aceleração é denominada convectiva, sendo calculada pela razão entre a diferença das velocidades final e inicial, e o tempo gasto para percorrer a distância entre as duas posições. Para um elemento de volume,

$$a_c = \frac{\left(\dot{u} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dx \right) - \dot{u}}{dt} \rightarrow a_c = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \dot{u} \quad (11.18)$$

onde $\partial x / \partial t \rightarrow \dot{u}$ quando $\partial t \rightarrow 0$.

Agora, suponha que houve o rompimento de uma barragem a montante do rio, a velocidade do fluxo em qualquer ponto irá variar, ou seja, o fluxo torna-se transiente, resultando numa outra parcela de aceleração dada por $a_t = \partial \dot{u} / \partial t$. Sob estas condições a aceleração do barco é uma função do tempo e da posição, como mostra a Equação (11.19).

$$a = a_c + a_t \rightarrow a = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \dot{u} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} \quad (11.19)$$

Em ondas sonoras, com amplitudes pequenas o suficiente para satisfazer a hipótese de linearidade, a razão entre o segundo e primeiro termo da Equação (11.19) é da ordem da razão entre a velocidade do som e a velocidade de partícula. Desde que as velocidades de partícula sejam tipicamente da ordem de 10^{-3} m/s, o primeiro termo pode ser seguramente negligenciado. No entanto, não pode ser negligenciado em fontes de ruído geradas por escoamentos turbulentos como o de exaustão gerado por motores a jato.

Então, ao aplicar a segunda lei de Newton na direção x , tem-se

$$\left[p - \left(p + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dx \right) \right] dydz = \rho(dx dy dz) \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} \quad (11.20)$$

Sabendo que $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$ e desprezando os termos muito pequenos a equação se reduz a:

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} \quad (11.21)$$

Em analogia, nas direções y e z obtém-se:

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = -\rho_0 \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} \quad (11.22)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -\rho_0 \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial t}$$

Utilizando o conceito de gradiente definido no Item 4.3) dos Anexos, estas equações de equilíbrio de forças em cada uma das direções, podem ser escritas de forma compacta como:

$$\nabla p' + \rho_0 \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} = 0 \quad (11.23)$$

Ao se aplicar o operador divergente a Equação (11.23), obtém-se:

$$\operatorname{div}(\nabla p') + \rho_0 \frac{\partial(\operatorname{div}(\mathbf{u}))}{\partial t} = 0 \quad (11.24)$$

Substituindo a Equação (11.17) na Equação(11.24), obtém-se a equação de ondas planas.

$$\nabla^2 p' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (11.25)$$

onde ∇^2 corresponde ao operador Laplaciano, definido no Item 4.5) do Apêndice 4.

A partir deste ponto a pressão sonora p' passará a ser representada simplesmente por p , para facilitar e simplificar o desenvolvimento das demais equações.

Admitindo a propagação de ondas sonoras harmônicas, ou seja, ondas contínuas em uma frequência constante ω , a pressão sonora p em um ponto qualquer varia com a frequência, como mostra a Equação (11.26):

$$p = P e^{j\omega t} \quad (11.26)$$

onde P , corresponde a amplitude complexa da pressão sonora em um ponto qualquer.

Substituindo a Equação (11.26) na Equação de ondas planas, definida em (11.25), obtém-se a equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 P + k^2 P = 0 \quad (11.27)$$

onde, $k = \omega / c_0$ denomina-se o número de onda. Note que, embora a equação de Helmholtz seja válida apenas para ondas sonoras de frequência constante, utilizando os princípios da transformada de Fourier e análise espectral, ela pode ser resolvida repetidamente para que seja construída a solução de ondas periódicas ou transientes.

3.2) Aplicação do princípio dos trabalhos virtuais (PTV)

Considere uma superfície vibrante Γ_i que está imersa em um meio acústico, como se observa na Figura 195.

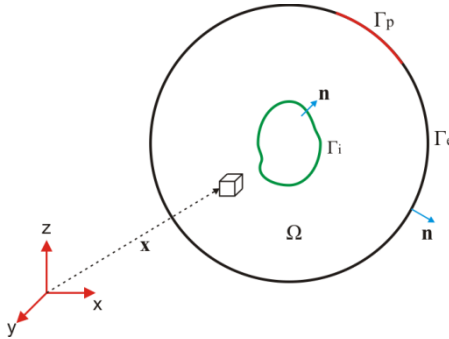


Figura 195 – Representação da radiação sonora de um corpo flexível imerso em um meio acústico.

Se Γ_i é completamente cercado por uma superfície esférica Γ_e , então a pressão sonora irradiada por Γ_i é obtida através da solução da Equação de ondas planas, definida anteriormente na Equação (11.25), no volume Ω , o volume entre Γ_i e Γ_e , sujeito as condições de contornos impostas em Γ_i e Γ_e . Portanto:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \text{ em } x \in \Omega \tag{11.28}$$

e na fronteira Γ_i , baseado no equilíbrio de forças apresentado na Equação (11.21) pode-se estabelecer que:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_0 \frac{\partial v_n}{\partial t} \text{ em } x \in \Gamma_i \tag{11.29}$$

onde v_n é a velocidade normal da superfície.

Admitindo que na interface a velocidade normal da superfície é igual à velocidade de partícula normal a superfície, a Equação (11.29) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_0 \ddot{u}_n \text{ em } x \in \Gamma_i \tag{11.30}$$

Admitindo que o movimento das partículas seja do tipo harmônico, ou seja, $\mathbf{u} = Ue^{j\omega t}$, pode-se definir a velocidade e a aceleração de partícula como:

$$\dot{\mathbf{u}} = j\omega Ue^{j\omega t} = j\omega \mathbf{u} \quad (11.31)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 Ue^{j\omega t} = j\omega \dot{\mathbf{u}} \quad (11.32)$$

Desta forma a condição de contorno na fronteira Γ_i pode ser reescrita em termos de velocidade de partícula como:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -j\rho_0\omega \dot{\mathbf{u}}_n \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma_i \quad (11.33)$$

Na fronteira Γ_e suponha que a impedância acústica Z , definida pela razão entre a pressão sonora e a velocidade de partícula, é conhecida, logo uma nova condição de contorno na fronteira Γ_e pode ser estabelecida.

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -j\rho_0\omega \frac{p}{Z} \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma_e \quad (11.34)$$

onde Z representa a impedância acústica sobre a superfície Γ_e . Admitindo que o raio da esfera é grande o suficiente de modo que as ondas que atravessam Γ_e são ondas planas, a impedância acústica pode ser definida como:

$$Z = \rho_0 c_0 \quad (11.35)$$

Segundo White e Walker [67], em situações em que o raio da esfera é menor, as ondas que atravessam a fronteira Γ_e comportam-se como ondas esféricas, isto implica em dizer que:

$$Z = \rho_0 c_0 (1 + 1/jkR)^{-1} \quad (11.36)$$

onde R é o raio da superfície Γ_e .

Para que a equação de ondas planas e as respectivas condições de contorno nas fronteiras sejam resolvidas pelo método de elementos

finitos elas deverão ser expressas na forma de equações integrais e não na forma de equações diferenciais. Então, assim como foi feito no modelo estrutural aplica-se o princípio dos trabalhos virtuais para a obtenção da Forma Fraca destas equações.

Neste princípio a primeira coisa a se fazer é identificar as características principais da solução, que neste caso corresponde à pressão sonora, para poder procurá-la apenas no conjunto de funções que a possuem.

Assim, são definidos os seguintes conjuntos de funções:

a) *Conjunto das pressões admissíveis* P_{adm} .

É o conjunto de todas as funções de pressão que satisfazem às condições de serem contínuas e diferenciáveis por partes do domínio e que satisfazem às condições de contorno do problema nos pontos onde se tem pressões prescritas, ou seja:

$$P_{adm} = \{p(\mathbf{x}) : p(\mathbf{x}) = \bar{p} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_p\} \quad (11.37)$$

b) *Conjunto das variações de pressão* P_{var} .

Suponha que em um dado instante o meio acústico analisado sofre uma perturbação causada por uma pressão $p_1(\mathbf{x})$, sendo que $p_1(\mathbf{x}) \in P_{adm}$. Se por alguma razão o campo acústico sofrer uma nova perturbação, uma nova pressão $p_2(\mathbf{x})$ ocorrerá, sendo que a mesma também pertence à P_{adm} . A diferença entre estas duas funções arbitrárias $p_1(\mathbf{x})$ e $p_2(\mathbf{x})$ pertencentes ao conjunto P_{adm} , é uma terceira função $\hat{p}(\mathbf{x})$ que possui o valor zero em pontos $\mathbf{x} \in \Gamma_p$. Observe que esta função, $\hat{p}(\mathbf{x})$, não pertence mais ao conjunto P_{adm} uma vez que o seu valor na fronteira é nulo. Portanto:

$$P_{var} = \{\hat{p}(\mathbf{x}) : \hat{p}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_p\} \quad (11.38)$$

Se a função pressão aplicada no lado esquerdo da equação de ondas planas (11.25) for a solução exata do problema, o resultado do lado direito será zero. Por outro lado, se a função p usada for uma função qualquer, o resultado não será nulo. Logo, uma função resíduo $r(\mathbf{x})$ resultante deste erro pode ser determinada:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = r(\mathbf{x}) \text{ em } \mathbf{x} \in \Omega \quad (11.39)$$

Para verificar se a função resíduo é nula em todo ponto do seu domínio, faz-se a seguinte operação:

$$\int_{\Omega} r(\mathbf{x}) \hat{p}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (11.40)$$

sendo $\hat{p}(\mathbf{x})$ uma função arbitrária conhecida, pertencente ao conjunto P_{var} .

Pode-se afirmar que a única função $r(\mathbf{x})$ que produz um valor nulo na integral acima para toda função $\hat{p}(\mathbf{x}) \in P_{\text{var}}$, é a função $r(\mathbf{x}) \equiv 0$. Isso equivale a dizer que:

$$\int_{\Omega} r(\mathbf{x}) \hat{p}(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad (11.41)$$

Substituindo a função resíduo definida na Equação (10.27) na equação acima, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \left(\nabla^2 p(\mathbf{x}) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x})}{\partial t^2} \right) \hat{p}(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad (11.42)$$

Eliminando a dependência explícita em \mathbf{x} e simplificando a notação da derivada segunda da pressão em relação ao tempo por \ddot{p} , obtém-se:

$$\int_{\Omega} \hat{p} \nabla^2 p d\Omega - \int_{\Omega} \hat{p} \frac{1}{c_0^2} \ddot{p} d\Omega = 0 \quad (11.43)$$

Usando o conceito de divergente apresentado no Item 4.5), a equação pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} \hat{p} \nabla \cdot (\nabla p) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{c_0^2} \hat{p} \ddot{p} d\Omega = 0 \quad (11.44)$$

A fim de inserir as condições de contorno nas fronteiras, faz-se o uso do conceito da derivada do produto de funções, definido no Item 4.7), para estabelecer que:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla p \hat{p}) &= \hat{p} \nabla \cdot (\nabla p) + \nabla \hat{p} \cdot \nabla p \\ \hat{p} \nabla \cdot (\nabla p) &= \nabla \cdot (\nabla p \hat{p}) - \nabla \hat{p} \cdot \nabla p\end{aligned}\quad (11.45)$$

Substituindo esta expressão no integrando da primeira parcela da Equação (11.44), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla p \hat{p}) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \hat{p} \cdot \nabla p d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{c_0^2} \hat{p} \ddot{p} d\Omega = 0 \quad (11.46)$$

Ao aplicar o teorema da divergência, apresentado no Item 4.6), na primeira integral da Equação (11.46), obtém-se que:

$$\int_{\Gamma} \hat{p} \nabla p \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \hat{p} \cdot \nabla p d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{c_0^2} \hat{p} \ddot{p} d\Omega = 0 \quad (11.47)$$

Conforme apresentado na Equação (12.19) o produto interno da primeira integral da Equação (11.47) pode ser escrito de tal forma que:

$$\int_{\Gamma} \hat{p} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \hat{p} \cdot \nabla p d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{c_0^2} \hat{p} \ddot{p} d\Omega = 0 \quad (11.48)$$

Agora torna-s possível inserir as duas condições de contorno definidas em (11.33) e (11.34) Substituindo este resultado na Equação (10.32) obtém-se:

$$\begin{aligned}- \int_{\Gamma_i} \hat{p} j \rho_0 \omega \mathbf{u}_n d\Gamma_i - \int_{\Gamma_e} \hat{p} \left(j \rho_0 \omega \frac{p}{Z} \right) d\Gamma_e \\ - \int_{\Omega} \nabla \hat{p} \cdot \nabla p d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{c_0^2} \hat{p} \ddot{p} d\Omega = 0\end{aligned}\quad (11.49)$$

Assim, a forma fraca do problema de acústica linear, formulado em termos de pressão sonora e considerando uma perturbação do tipo harmônica $p = P e^{j\omega t}$ é dada por:

$$\begin{aligned}
 & j\omega \int_{\Gamma_i} \hat{p} \cdot \rho_0 \dot{\mathbf{u}}_n \, d\Gamma_i + j\omega \int_{\Gamma_e} \hat{p} \left(\rho_0 \frac{p}{Z} \right) d\Gamma_e \\
 & + \int_{\Omega} \nabla \hat{p} \cdot \nabla p \, d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \frac{1}{c_0^2} \hat{p} p \, d\Omega = 0
 \end{aligned} \tag{11.50}$$

3.3) Soluções aproximadas

O método de elementos finitos deseja obter uma solução aproximada para a forma fraca do problema de acústica linear, definido na Equação (11.50). Para isso, são necessárias aproximações para as funções representadas por $p(\mathbf{x})$ e $\hat{p}(\mathbf{x})$.

De forma geral, a pressão $p(\mathbf{x})$ é aproximada através da seguinte combinação linear de n funções:

$$p_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) \, p_i \tag{11.51}$$

sendo $N_i(\mathbf{x})$ as funções de interpolação globais e p_i os coeficientes de ponderação a serem determinados.

Analogamente, a aproximação para a função $\hat{p}(\mathbf{x})$ é dada por:

$$\hat{p}_n(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n [N_j(\mathbf{x})] \, \hat{p}_j \tag{11.52}$$

sendo \hat{p}_j os coeficientes de ponderação a serem determinados.

Substituindo as Equações (11.51) e (11.52) na Equação (11.50), obtém-se:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{aligned} & j\omega \int_{\Gamma_i} [N_j] \, \hat{p}_j \cdot \rho_0 \dot{\mathbf{u}}_n \, d\Gamma_i \\ & + j\omega \int_{\Gamma_e} [N_j] \, \hat{p}_j \cdot \left(\rho_0 \frac{N_i \, p_i}{Z} \right) d\Gamma_e \\ & + \int_{\Omega} \nabla [N_j] \, \hat{p}_j \cdot \nabla N_i \, p_i \, d\Omega \\ & - \omega^2 \int_{\Omega} \frac{1}{c_0^2} [N_j] \, \hat{p}_j \cdot N_i \, p_i \, d\Omega \end{aligned} \right\} = 0 \tag{11.53}$$

Define-se a matriz $B_i = \nabla N_i$. Em forma expandida:

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (11.54)$$

Logo, a Equação (11.53) pode ser reescrita como:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{array}{l} j\omega \int_{\Gamma_i} [N_j] \hat{p}_j \cdot \rho_0 \dot{\mathbf{u}}_n d\Gamma_i \\ + j\omega \int_{\Gamma_e} [N_j] \hat{p}_j \cdot \left(\rho_0 \frac{N_i p_i}{Z} \right) d\Gamma_e \\ + \int_{\Omega} [B_j] \hat{p}_j \cdot B_i p_i d\Omega \\ - \omega^2 \int_{\Omega} \frac{1}{c_0^2} [N_j] \hat{p}_j \cdot N_i p_i d\Omega \end{array} \right\} = 0 \quad (11.55)$$

Sabendo-se que \hat{p}_j é constante e utilizando uma propriedade de álgebra relacionada a transposição de matrizes, pode-se reescrever a Equação (11.55) como:

$$\sum_{j=1}^n \hat{p}_j \cdot \left[\sum_{i=1}^n \left\{ \begin{array}{l} j\omega \int_{\Gamma_i} \rho_0 \dot{\mathbf{u}}_n [N_j]^T d\Gamma_i \\ + j\omega \int_{\Gamma_e} \left(\frac{\rho_0}{Z} [N_j]^T N_i d\Gamma_e \right) p_i \\ + \int_{\Omega} [B_j]^T B_i d\Omega \cdot p_i \\ - \omega^2 \int_{\Omega} \frac{1}{c_0^2} [N_j]^T N_i d\Omega p_i \end{array} \right\} \right] = 0 \quad (11.56)$$

Como a Equação (11.56) é nula, independente do valor de \hat{p}_j , é necessário que o termo entre colchetes seja nulo, logo:

$$\sum_{i=1}^n \left(\begin{array}{l} \int_{\Omega} [B_j]^T B_i d\Omega \\ -\omega^2 \int_{\Omega} \frac{1}{c_0^2} [N_j]^T N_i d\Omega \\ +j\omega \int_{\Gamma_e} \frac{\rho_0}{Z} [N_j]^T N_i d\Gamma_e \end{array} \right) p_i = \sum_{i=1}^n -j\omega \int_{\Gamma_i} \rho_0 \dot{u}_n [N_j]^T d\Gamma_i \quad (11.57)$$

com o sub-índice $j=1, 2, \dots, n$. Onde n corresponde ao número de nós que compõe a malha de elementos finitos.

Reescrevendo de uma forma compacta:

$$\mathbf{K}_{ac} - \omega^2 \mathbf{M}_{ac} + j\omega \mathbf{D}_{ac} \mathbf{P} = -j\omega \mathbf{F}_{ac} \quad (11.58)$$

sendo que estas matrizes globais necessárias para determinar o vetor das incógnitas, neste caso representado pela pressão sonora $\{\mathbf{P}\}$, são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ac} &= \int_{\Omega} [B_j]^T B_i d\Omega \\ \mathbf{M}_{ac} &= \int_{\Omega} \frac{1}{c_0^2} [N_j]^T N_i d\Omega \\ \mathbf{D}_{ac} &= \int_{\Gamma_e} \frac{\rho_0}{Z} [N_j]^T N_i d\Gamma_e \\ \mathbf{F}_{ac} &= \int_{\Gamma_i} \rho_0 \dot{u}_n [N_j]^T d\Gamma_i \end{aligned} \quad (11.59)$$

Do ponto de vista operacional a construção das matrizes $[\mathbf{K}_{ac}]$, $[\mathbf{M}_{ac}]$, $[\mathbf{D}_{ac}]$ e $[\mathbf{F}_{ac}]$ a partir da integração das funções de forma não se mostra um procedimento tão eficaz, portanto, prefere-se fazer uma análise local para um elemento e da discretização, então, pode-se escrever as aproximações da seguinte maneira:

$$p_n^e(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_e} [N_i^e(\mathbf{x})] p_i^e \quad (11.60)$$

sendo n_e o número de nós do elemento.

Logo, as respectivas matrizes e vetores locais para o elemento e , denominadas matrizes elementares são:

$$\begin{aligned} [K_{ac}^e] &= \sum_{i=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} [B_j^e]^T [B_i^e] d\Omega^e \\ [M_{ac}^e] &= \sum_{i=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} \frac{1}{C_0^2} [N_j^e]^T [N_i^e] d\Omega^e \\ [D_{ac}^e] &= \sum_{i=1}^{n_e} \int_{\Gamma^e} \frac{\rho_0}{Z} [N_j^e]^T [N_i^e] d\Gamma^e \\ \mathbf{P}^e &= \sum_{i=1}^{n_e} p_i^e \\ \mathbf{F}_{ac}^e &= \sum_{i=1}^{n_e} \int_{\Gamma^e} \rho_0 \dot{\mathbf{u}}_n [N_j^e]^T d\Gamma^e \end{aligned} \quad (11.61)$$

com $j=1, 2, \dots, n_e$.

Desta forma, assim como no caso estrutural a construção das matrizes e vetores globais baseia-se na superposição das matrizes e vetores locais obtidos para cada elemento da discretização.

Observe que no caso do problema de acústica, ao se utilizar o elemento sólido H8, tem-se somente um grau de liberdade por nó, referente à pressão sonora, logo a ordem das matrizes elementares $[K_{ac}^e]$, $[M_{ac}^e]$ e $[D_{ac}^e]$ será (8x8) e $\{\mathbf{F}_{ac}^e\}$ será (8x1).

Finalmente, deve-se solucionar o sistema de equações algébricas global, definido em (11.58), a fim de se obter os valores das incógnitas $\{p_i\}$ para a aproximação.

3.4) Mapeamento

O mapeamento no modelo acústico é idêntico aquele apresentado para o modelo estrutural, exceto para as matrizes $[D_{ac}^e]$ e $\{\mathbf{F}_{ac}^e\}$, que por se tratar de uma condição de contorno de fronteira requer que o mapeamento seja feito no espaço bidimensional, como será explicado a seguir. Embora haja esta diferença o procedimento é idêntico aquele

explicado no caso estrutural, uma vez que os elementos aqui usados também são isoparamétricos.

Então, para as matrizes $[K^c_{ac}]$ e $[M^c_{ac}]$ definidas no espaço tridimensional o mapeamento de todo o ponto do elemento hexaédrico padrão, apresentado na Figura 190, para o elemento hexaédrico no domínio real (x,y,z) pode ser feito a partir das funções de interpolação deste elemento hexaédrico linear, definidas pela Equação (9.5), usando as expressões:

$$\begin{aligned} x \xi, \zeta, \eta &= x_1 N_1 \xi, \zeta, \eta + x_2 N_2 \xi, \zeta, \eta + \dots + x_8 N_8 \xi, \zeta, \eta \\ y \xi, \zeta, \eta &= y_1 N_1 \xi, \zeta, \eta + y_2 N_2 \xi, \zeta, \eta + \dots + y_8 N_8 \xi, \zeta, \eta \\ z \xi, \zeta, \eta &= z_1 N_1 \xi, \zeta, \eta + z_2 N_2 \xi, \zeta, \eta + \dots + z_8 N_8 \xi, \zeta, \eta \end{aligned} \quad (11.62)$$

onde x_i , y_i e z_i são as coordenadas dos nós do elemento.

Desta forma, as mesmas funções de interpolação usadas para mapear o elemento são usadas para interpolar a variável de interesse, que nesse caso corresponde à pressão sonora, a partir das seguintes relações:

$$p \ x, y, z = p_1 N_1 \xi, \zeta, \eta + p_2 N_2 \xi, \zeta, \eta + \dots + p_8 N_8 \xi, \zeta, \eta \quad (11.63)$$

Assim, para a matriz $[K^c_{ac}]$ definida na Equação (11.61), onde a matriz $[B^c]$ é definida em termos das derivadas parciais das funções de forma em relação à x , y e z faz-se necessário usar artifício matemático que resulta na determinação da matriz Jacobiana, uma vez que agora as funções de forma são definidas em termos das coordenadas padrão ξ , ζ , η . Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \ x, y, z &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \ x, y, z &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \ x, y, z &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (11.64)$$

em forma matricial,

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{array} \right\} = [J^{-1}] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array} \right\} \quad (11.65)$$

onde J é a denominada matriz Jacobiana. Observe que a matriz do lado esquerdo corresponde exatamente à matriz $[B^e]$ definida na Equação (11.54)

Então, resta apenas determinar o determinante do jacobiano, para estabelecer o fator que relaciona as diferenciais de volume entre um ponto no domínio padrão e o ponto correspondente no domínio real do elemento, de forma que a matriz $[K^e_{ac}]$ seja definida por:

$$[K^e_{ac}] = \sum_{i=1}^{n_e} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_j^e]^T [B_i^e] \det J d\xi d\zeta d\eta \quad (11.66)$$

Em analogia, a matriz $[M^e_{ac}]$ pode ser reescrita como:

$$[M^e_{ac}] = \sum_{i=1}^{n_e} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{c_0^2} [N_j^e]^T [N_i^e] \det J d\xi d\zeta d\eta \quad (11.67)$$

Já para determinar as matrizes $[D^e_{ac}]$ e $\{F^e_{ac}\}$ como foi mencionado no início desta seção, o mapeamento deve ser realizado no espaço bidimensional, uma vez que estas matrizes dependem de condições de contorno que são aplicadas na superfície de análise, o deslocamento e a impedância normal a superfície.

Particularmente, no caso da matriz $\{F^e_{ac}\}$ tem-se interesse na face interna dos elementos que formam a superfície interna da malha acústica, como se observa na Figura 196.

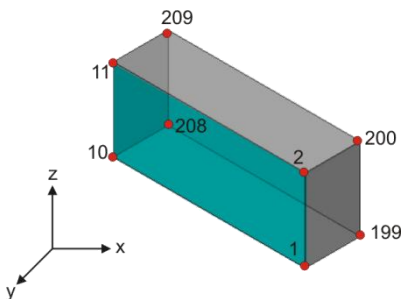


Figura 196 – Face do elemento na qual se aplica a condição de contorno de deslocamento.

Observe que a altura da face pode ser calculada facilmente através da diferença entre as coordenadas z_1 e z_2 ou z_{10} e z_{11} . Por outro lado, o comprimento da face, representado pelas arestas entre os nós 1 e 10 ou 2 e 11, não pode ser obtido simplesmente pela diferença entre as coordenadas globais de dois nós, uma vez que a direção dos eixos globais não está paralela a estas arestas. Portanto, para que esta matriz possa ser determinada faz-se necessário criar um sistema de coordenadas local $x'-y'$, sendo que o eixo y' coincide com a face do elemento em análise, como se observa na Figura 197 para um determinado elemento.

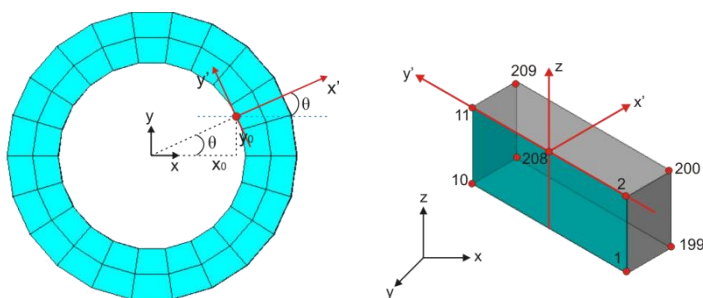


Figura 197 – Criação do sistema de coordenadas local $x'-y'$. (a) Vista superior (b) Vista isométrica do elemento.

Para determinar a origem do sistema de coordenadas local, calcula-se o valor médio das coordenadas x e y dos 4 nós que constituem a face interna do elemento em análise, ou seja, os 4 primeiros nós da matriz conectividade:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \quad e \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \quad (11.68)$$

sendo que o ângulo θ pode ser determinado através da relação trigonométrica:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y_0}{x_0} \right) \quad (11.69)$$

Desta forma faz-se necessário transformar as coordenadas dos nós desta face do elemento do sistema global para o sistema local de coordenadas. Segundo Sciavicco e Siciliano [68] esta conversão pode ser feita usando as seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} x_{loc} \\ y_{loc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (11.70)$$

onde, x_{loc} e y_{loc} correspondem as coordenadas do nó no sistema local de coordenadas e x e y correspondem às suas coordenadas no sistema global de coordenadas.

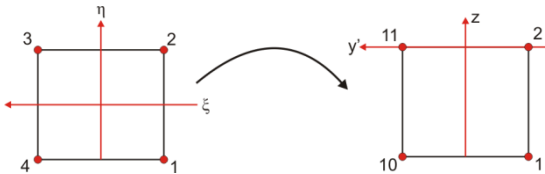


Figura 198 – Mapeamento do elemento no domínio padrão para o domínio real.

Finalmente, o mapeamento de todo o ponto da face interna do elemento hexaédrico, que corresponde a um elemento padrão bi linear retangular Q4, apresentado na Figura 198, para o elemento no domínio real (y', z) pode ser feito a partir das funções de interpolação deste elemento usando as seguintes expressões:

$$y' \xi, \eta = y_1 'N_1 \xi, \eta + y_2 'N_2 \xi, \eta + y_3 'N_3 \xi, \eta + y_4 'N_4 \xi, \eta \quad (11.71)$$

$$z_{\xi,\eta} = z_1 N_1 \xi, \eta + z_2 N_2 \xi, \eta + z_3 N_3 \xi, \eta + z_4 N_4 \xi, \eta \quad (11.72)$$

onde y_i e z_i são as coordenadas dos nós do elemento e $N_i(\xi, \eta)$ as funções de forma do elemento, definidas neste caso como:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} \begin{matrix} \xi + 1 & 1 - \eta \\ \xi + 1 & \eta + 1 \\ 1 - \xi & \eta + 1 \\ 1 - \xi & 1 - \eta \end{matrix} \\ N_2 &= \frac{1}{4} \begin{matrix} \xi + 1 & 1 - \eta \\ \xi + 1 & \eta + 1 \\ 1 - \xi & \eta + 1 \\ 1 - \xi & 1 - \eta \end{matrix} \\ N_3 &= \frac{1}{4} \begin{matrix} \xi + 1 & 1 - \eta \\ \xi + 1 & \eta + 1 \\ 1 - \xi & \eta + 1 \\ 1 - \xi & 1 - \eta \end{matrix} \\ N_4 &= \frac{1}{4} \begin{matrix} \xi + 1 & 1 - \eta \\ \xi + 1 & \eta + 1 \\ 1 - \xi & \eta + 1 \\ 1 - \xi & 1 - \eta \end{matrix} \end{aligned} \quad (11.73)$$

Sendo assim, a matriz $\{F_{ac}^e\}$ é dada por:

$$F_{ac}^e = \sum_{i=1}^{n_e} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_0 \dot{\mathbf{u}}_n [N_j^e]^T \det J d\xi d\eta \quad (11.74)$$

onde $[J]$ corresponde a matriz Jacobiana, que neste caso relaciona o domínio padrão com o domínio real da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y'}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y'}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y'} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y'} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (11.75)$$

Particularmente, no caso da matriz $[D_{ac}^e]$ onde se aplica a impedância, tem-se interesse na face externa dos elementos que formam a superfície externa da malha acústica, na face superior dos elementos que formam a superfície superior da malha acústica e na face inferior dos elementos que formam a superfície inferior da malha acústica, como se observa na Figura 199.

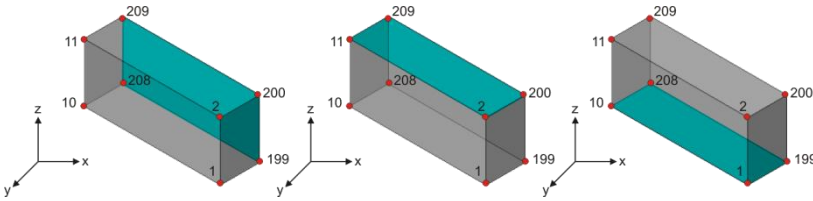


Figura 199 – Faces dos elementos onde se aplica a condição de contorno de impedância.

Observe que no caso da impedância aplicada na superfície externa da malha deve ser criado um sistema de coordenadas local, igual aquele definido na Figura 197, só que posicionado sobre a face externa do elemento. Logo, para determinar a origem do sistema de coordenadas local, calcula-se o valor médio das coordenadas x e y dos 4 nós que constituem a face externa do elemento em análise, ou seja:

$$x_0 = \frac{x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{4} \quad e \quad y_0 = \frac{y_5 + y_6 + y_7 + y_8}{4} \quad (11.76)$$

Neste caso o mapeamento também é idêntico aquele definido para a condição de deslocamento, Equação (11.71), só que neste caso os nós da face externa é que são usados no mapeamento, como mostra a Figura 200.

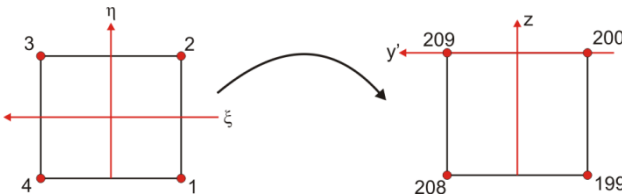


Figura 200 – Mapeamento do elemento no domínio padrão para o domínio real.

Desta maneira, a equação que define a matriz $[D^e_{ac}]$ é dada por:

$$[D^e_{ac}] = \sum_{i=1}^{n_e} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\rho_0}{Z} [N_j^e]^T [N_i^e] \det J d\xi d\eta \quad (11.77)$$

onde $[J]$ corresponde a matriz Jacobiana definida na Equação (11.75).

Por outro lado, no caso da impedância aplicada nas superfícies superior e inferior da malha, deve-se criar um sistema de coordenadas local x', y' conforme observado na Figura 201.

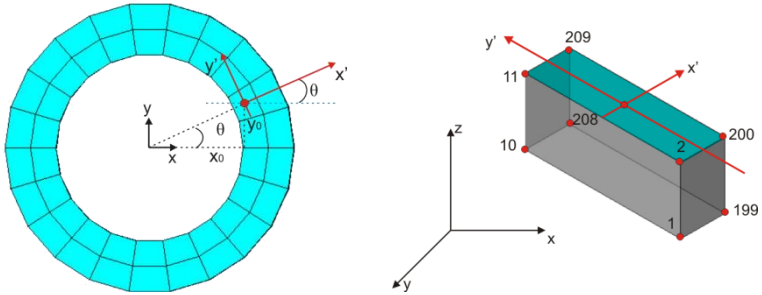


Figura 201 – Criação do sistema de coordenadas local $x'-y'$. (a) Vista superior (b) Vista isométrica do elemento.

Para determinar a origem do sistema de coordenadas local, calcula-se o valor médio das coordenadas x e y dos 4 nós que constituem a face superior interna do elemento em análise, ou seja:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{8} \tag{11.78}$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8}{8}$$

O mapeamento de todo o ponto da face superior ou inferior do elemento hexaédrico, que corresponde a um elemento padrão bi linear retangular Q4 para o elemento no domínio real (x', y') pode ser feito a partir das funções de interpolação deste elemento usando as seguintes expressões:

$$x'_{\xi, \zeta} = x_1' N_1_{\xi, \zeta} + x_2' N_2_{\xi, \zeta} + x_3' N_3_{\xi, \zeta} + x_4' N_4_{\xi, \zeta} \tag{11.79}$$

$$y'_{\xi, \zeta} = y_1' N_1_{\xi, \zeta} + y_2' N_2_{\xi, \zeta} + y_3' N_3_{\xi, \zeta} + y_4' N_4_{\xi, \zeta} \tag{11.80}$$

onde x'_i e y'_i são as coordenadas dos nós do elemento da face superior ou inferior, como mostram a Figura 202 e Figura 203, e $N_i(\xi, \zeta)$ as funções de forma do elemento, neste caso definidas como:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4} \xi + 1 \quad 1 - \zeta \\
 N_2 &= \frac{1}{4} \quad 1 - \xi \quad 1 - \zeta \\
 N_3 &= \frac{1}{4} \xi + 1 \quad \zeta + 1 \\
 N_4 &= \frac{1}{4} \quad 1 - \xi \quad \zeta + 1
 \end{aligned}
 \tag{11.81}$$

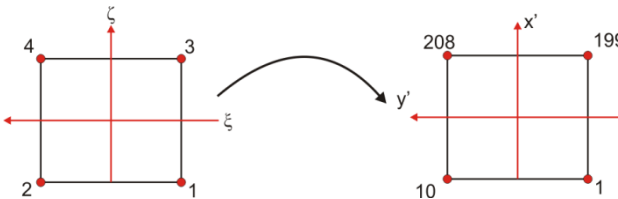


Figura 202 – Mapeamento quando se aplica impedância na superfície inferior da malha.

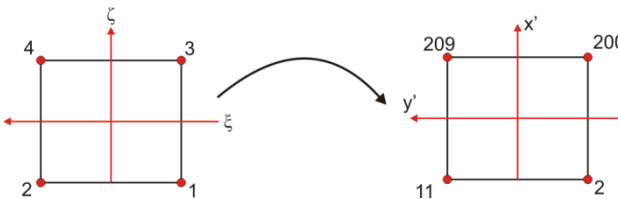


Figura 203 – Mapeamento quando se aplica impedância na superfície superior da malha.

Então, neste caso a matriz $[D^e_{ac}]$ é definida como:

$$[D^e_{ac}] = \sum_{i=1}^{n_e} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\rho_0}{Z} [N_j^e]^T [N_i^e] \det J d\xi d\zeta
 \tag{11.82}$$

onde, os termos da matriz $[N]$ são definidos pela Equação (11.81) e a matriz Jacobiana $[J]$ é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y'}{\partial \xi} & \frac{\partial x'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y'}{\partial \zeta} & \frac{\partial x'}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y'} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x'} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y'} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x'} \end{Bmatrix} \quad (11.83)$$

Como todo procedimento de cálculo deste modelo acústico baseia-se na conectividade definida para um elemento tridimensional, no caso das condições de contorno de fronteira que são definidas na face do elemento, alguns termos das matrizes elementares referentes aos nós que não fazem parte da face de interesse tem valor zero.

Especificamente, para a condição de contorno de deslocamento, a matriz elementar terá os seguintes termos não nulos.

$$\begin{bmatrix} | & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & x & x & x & x & & & & \\ 2 & x & x & x & x & & & & \\ 3 & x & x & x & x & & & & \\ 4 & x & x & x & x & & & & \\ 5 & & & & & & & & \\ 6 & & & & & & & & \\ 7 & & & & & & & & \\ 8 & & & & & & & & \end{bmatrix} \quad (11.84)$$

Já para a condição de contorno de impedância aplicada na superfície externa da malha acústica, a matriz elementar terá os seguintes termos não nulos.

$$\begin{bmatrix} | & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & & \\ 3 & & & & & & & & \\ 4 & & & & & & & & \\ 5 & & & & & x & x & x & x \\ 6 & & & & & x & x & x & x \\ 7 & & & & & x & x & x & x \\ 8 & & & & & x & x & x & x \end{bmatrix} \quad (11.85)$$

Para a condição de contorno de impedância aplicada na superfície inferior da malha acústica, a matriz elementar terá os seguintes termos não nulos.

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 \hline
 1 & x & & & x & x & & & x \\
 2 & & & & & & & & \\
 3 & & & & & & & & \\
 4 & x & & & x & x & & & x \\
 5 & x & & & x & x & & & x \\
 6 & & & & & & & & \\
 7 & & & & & & & & \\
 8 & x & & & x & x & & & x
 \end{array} \tag{11.86}$$

Enquanto que para a condição de contorno de impedância aplicada na superfície superior da malha acústica, a matriz elementar terá os seguintes termos não nulos.

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 \hline
 1 & & & & & & & & \\
 2 & & x & x & & & x & x & \\
 3 & & x & x & & & x & x & \\
 4 & & & & & & & & \\
 5 & & & & & & & & \\
 6 & & & & x & x & & x & x \\
 7 & & & & x & x & & x & x \\
 8 & & & & & & & &
 \end{array} \tag{11.87}$$

3.5) Integração numérica

Procurando facilitar a resolução das integrais presentes nas matrizes elementares, aplica-se a regra de Gauss de integração numérica, de modo que as matrizes possam ser reescritas como:

$$[K^e_{ac}] = \sum_{i=1}^{n_e} \left(\sum_{m=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{o=1}^{p_3} [B_j^e(\xi_i, \zeta_i, \eta_i)]^T [B_i^e(\xi_i, \zeta_i, \eta_i)] W_m W_n W_o \right) \tag{11.88}$$

$$[M^e_{ac}] = \sum_{i=1}^{n_e} \left(\sum_{m=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{o=1}^{p_3} \left(\frac{1}{c_0} [N_j^e(\xi_i, \zeta_i, \eta_i)]^T [N_i^e(\xi_i, \zeta_i, \eta_i)] W_m W_n W_o \right) \right) \tag{11.89}$$

$$[D^e_{ac1}] = \sum_{i=1}^{n_e} \left(\sum_{m=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} \left(\frac{\rho_0}{Z} [N_j^e(\xi_i, \eta_i)]^T [N_i^e(\xi_i, \eta_i)] W_m W_n \right) \right) \tag{11.90}$$

$$[\mathbf{D}_{ac2}^e] = \sum_{i=1}^{n_e} \left(\sum_{m=1}^{p_1} \sum_{o=1}^{p_3} \left(\frac{\rho_0}{Z} [N_j^e(\xi_i, \zeta_i)] \right)^T [N_i^e(\xi_i, \zeta_i)] W_m W_o \right) \quad (11.91)$$

$$\mathbf{F}_{ac}^e = \sum_{i=1}^{n_e} \left(\sum_{m=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} \rho_0 \dot{u}_n [N_j^e(\xi_i, \eta_i)]^T W_m W_n \right) \quad (11.92)$$

onde, ξ_i, ζ_i, η_i são as coordenadas dos pontos de Gauss no sistema padrão de coordenadas e W_m, W_n e W_o os respectivos pesos de integração. Aqui também nas integrais de volume foram utilizados 8 pontos de integração enquanto que nas integrais de fronteira apenas 3.

APÊNDICE 4
CONCEITOS MATEMÁTICOS FUNDAMENTAIS

Relembrem-se, nesta seção, algumas noções de cálculo que são de fundamental importância para a compreensão das formulações apresentadas neste trabalho.

4.1) Produto escalar

De acordo com Boldrini et al. [69] o produto escalar de vetores é um caso particular do conceito mais geral de produto interno, o qual pode ser aplicado a outras entidades matemáticas, tais como funções e tensores.

O produto escalar de dois vetores **a** e **b** é o resultado do produto do comprimento (também chamado de norma ou módulo) de **a** pela projeção escalar de **b** em **a**.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (12.1)$$

onde θ é o ângulo formado pelos vetores, e $|\mathbf{a}|$ e $|\mathbf{b}|$ são seus comprimentos.

Note que não é necessário mencionar nenhum sistema de coordenadas para se obter o valor do produto escalar. A fórmula acima é válida independente do sistema de coordenadas.

Graficamente, o produto escalar entre dois vetores pode ser representado conforme se observa na Figura 204.

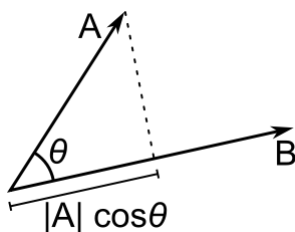


Figura 204 – Representação geométrica do produto escalar.

Em um sistema de coordenadas ortonormal de n dimensões, onde escrevemos os vetores **a** e **b** em termos de componentes como:

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T \quad e \quad \mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]^T \quad (12.2)$$

O produto escalar entre \mathbf{a} e \mathbf{b} é escrito como sendo:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \quad (12.3)$$

A expressão acima nos fornece uma forma de obter o comprimento de um vetor qualquer em termos de suas componentes:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \quad (12.4)$$

O produto escalar de vetores tem as seguintes propriedades:

a) É comutativo

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (12.5)$$

b) Distributivo em relação à adição de vetores:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad (12.6)$$

c) Compatível com a multiplicação escalar, tal que

$$(n_1 \mathbf{a}) \cdot (n_2 \mathbf{b}) = (n_1 n_2) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (12.7)$$

4.2) Produto vetorial

A notação do produto vetorial entre dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} é $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, e defini-se como:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \hat{\mathbf{n}} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \text{sen} \theta \quad (12.8)$$

onde θ é o ângulo formado entre \mathbf{a} e \mathbf{b} ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) no plano definido pelos dois vetores, e $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário perpendicular a ambos os vetores.

O problema com esta definição é que existem dois vetores unitários que são perpendiculares à \mathbf{a} e \mathbf{b} simultaneamente: se $\hat{\mathbf{n}}$ é perpendicular, então $-\hat{\mathbf{n}}$ também o é.

O resultado correto depende da orientação do espaço vetorial, isto é, da quiralidade do sistema de coordenadas $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. O produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é definido de tal forma que $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ se torna destro se $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ é destro ou canhoto se $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ é canhoto.

Uma forma fácil de calcular a direção do vetor resultante é a "regra da mão direita". Se um sistema de coordenadas é destro, basta apontar o indicador na direção do primeiro operando e o dedo médio na direção do segundo operando. Desta forma, o vetor resultante é dado pela direção do polegar.

O produto vetorial pode ser representado graficamente, com respeito a um sistema de coordenadas destro, como se observa na Figura 205.

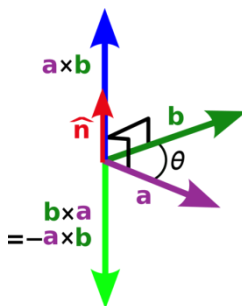


Figura 205 – Representação gráfica do produto vetorial.

O vetor unitário, \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} para um determinado sistema ortogonal de coordenadas deve satisfazer as igualdades apresentadas na Equação (12.9).

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad (12.9)$$

Desta forma as coordenadas do resultado do produto vetorial de dois vetores podem ser calculadas facilmente, sem a necessidade de determinar-se qualquer ângulo. Seja:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \quad e \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \quad (12.10)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1] \quad (12.11)$$

A notação acima também pode ser escrita formalmente como o determinante de uma matriz:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad (12.12)$$

Dentre as propriedades algébricas destacam-se:

a) O produto vetorial é anticomutativo:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (12.13)$$

b) Distributivo em relação à adição de vetores:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (12.14)$$

c) Compatível com a multiplicação escalar, tal que

$$(r\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (r\mathbf{b}) = r(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (12.15)$$

d) Não é associativo, mas satisfaz a identidade de Jacobi:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0 \quad (12.16)$$

4.3) Operador gradiente

Suponha que f é uma função que fornece valores escalares, mas que depende do vetor posição $\mathbf{x} = (x, y, z)$ de um ponto do corpo sólido. Denotando esta função por $f(\mathbf{x})$ o seu vetor gradiente é dado por:

$$\{\nabla f(\mathbf{x})\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial z} \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \{\nabla f(\mathbf{x})\} = \left\{ \begin{array}{c} f(\mathbf{x})_{,x} \\ f(\mathbf{x})_{,y} \\ f(\mathbf{x})_{,z} \end{array} \right\} \quad (12.17)$$

Nesta notação recorre-se ao uso do operador nabla, denotado pelo símbolo ∇ e definido por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (12.18)$$

Segundo Fancelló e Mendonça [64], o gradiente de uma função escalar $f(\mathbf{x})$ ainda pode ser definido como uma função vetorial tal que:

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial n} \quad (12.19)$$

onde, \mathbf{n} é um vetor unitário e $\partial f(\mathbf{x}) / \partial n$ é a derivada direcional da função escalar $f(\mathbf{x})$ na direção \mathbf{n} .

Seja \mathbf{f} agora uma função vetorial dependente das variáveis x, y e z , ou seja, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Desta forma, \mathbf{f} tem componentes nas direções x, y e z . Logo

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x})\} = \left\{ \begin{array}{l} f_x(\mathbf{x}) \\ f_y(\mathbf{x}) \\ f_z(\mathbf{x}) \end{array} \right\} \quad (12.20)$$

Nesse caso, o gradiente de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é dado por

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial z} \end{array} \right] \quad (12.21)$$

Por sua vez como \mathbf{f} é uma função vetorial, cada um dos componentes do lado direito da equação (12.21) é um vetor análogo ao da Equação (12.17). Expandindo cada um dos componentes do tensor tem-se que:

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_x(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial f_x(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial f_x(\mathbf{x})}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial z} \end{array} \right] \quad (12.22)$$

ou ainda,

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_x(\mathbf{x}),_x & f_x(\mathbf{x}),_y & f_x(\mathbf{x}),_z \\ f_y(\mathbf{x}),_x & f_y(\mathbf{x}),_y & f_y(\mathbf{x}),_z \\ f_z(\mathbf{x}),_x & f_z(\mathbf{x}),_y & f_z(\mathbf{x}),_z \end{bmatrix} \quad (12.23)$$

Assim, conclui-se que o gradiente de uma função vetorial f é uma matriz de ordem 3. Na verdade a equação (12.22) é a representação matricial do tensor $\nabla f(\mathbf{x})$ segundo o sistema cartesiano.

As principais propriedades algébricas do vetor gradiente são:

a) Multiplicação por uma constante k real

$$\nabla kf = k\nabla f \quad (12.24)$$

b) Adição

$$\nabla(g + f) = \nabla f + \nabla g \quad (12.25)$$

c) Subtração

$$\nabla(g - f) = \nabla f - \nabla g \quad (12.26)$$

d) Produto

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (12.27)$$

e) Quociente (sendo $g \neq 0$)

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2} \quad (12.28)$$

4.4) Tensores

Note que ao se multiplicar a representação matricial do tensor $\nabla f(\mathbf{x})$ dada na Equação (12.22) por um vetor \mathbf{v} com componentes cartesianas (v_x, v_y, v_z) , obtém-se como resultado outro vetor, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial y} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial f_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial f_x}{\partial z} v_z \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial f_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial f_y}{\partial z} v_z \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial f_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial f_z}{\partial z} v_z \end{Bmatrix} \quad (12.29)$$

Assim, de acordo com Bittencourt e Neto [70], define-se um tensor T como uma transformação linear do espaço vetorial \mathcal{G} em \mathcal{G} . Logo, pode-se dizer que um tensor T é uma transformação linear que associa a cada vetor u , outro vetor v através da operação:

$$Tu = v \quad (12.30)$$

Assim, para quaisquer $u, v \in \mathcal{G}$, tem-se:

$$\begin{cases} T(u + v) = Tu + Tv & \forall u, v \in \mathcal{G} \\ T(\alpha v) = \alpha Tv & \forall v \in \mathcal{G}, \forall \alpha \in \mathfrak{R} \end{cases} \quad (12.31)$$

De forma geral, dados os vetores u_1, u_2, \dots, u_n e escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ as relações anteriores podem ser resumidas como:

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 Tu_1 + \dots + \alpha_n Tu_n = T(\alpha_i u_i) = \alpha_i Tu_i \quad (12.32)$$

O conjunto de todos os tensores forma o espaço vetorial L_{im} se a adição e a multiplicação por escalar forem definidas ponto a ponto, ou seja, $S+T$ e αS ($\alpha \in \mathfrak{R}$) são os tensores definidos por:

$$(S + T)v = Sv + Tv \quad (12.33)$$

$$(\alpha S)v = \alpha(Sv) \quad (12.34)$$

A forma com a qual se definiu o conceito de tensor, acima, permite que se faça uma associação biunívoca entre tensores e matrizes. Dessa maneira, as operações matriciais equivalentes às duas últimas operações tensoriais são, respectivamente, a soma e o produto por escalar usualmente conhecidos do estudo de matrizes.

4.4.1) Soma de tensores

A soma de dois tensores S e T em forma matricial é dada por:

$$\mathbf{S} + \mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{T} \quad (12.35)$$

4.4.2) Produto de tensores

O produto \mathbf{ST} de dois tensores S e T é o tensor que define a transformação composta,

$$\mathbf{ST} = \mathbf{S} \circ \mathbf{T} \quad (12.36)$$

ou seja,

$$(\mathbf{ST})\mathbf{v} = \mathbf{S}(\mathbf{T}\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{G} \quad (12.37)$$

As componentes de \mathbf{ST} são dadas por

$$\mathbf{ST} = \mathbf{S} \mathbf{T} \quad \mathbf{TS} = \mathbf{T} \mathbf{S} \quad (12.38)$$

e portanto, de forma geral, o produto de tensores não é comutativo, isto é:

$$\mathbf{ST} \neq \mathbf{TS} \quad (12.39)$$

Tomando os tensores S , T e V verifica-se, com base na associatividade do produto entre matrizes que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}(\mathbf{T}\mathbf{V}))\mathbf{v} &= \mathbf{S}((\mathbf{T}\mathbf{V})\mathbf{v}) = \mathbf{S}(\mathbf{T}(\mathbf{V}\mathbf{v})) = (\mathbf{ST})(\mathbf{V}\mathbf{v}) \\ &\Rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{T}\mathbf{V}) = (\mathbf{ST})\mathbf{V} \end{aligned} \quad (12.40)$$

Portanto o produto entre tensores também é associativo.

4.4.3) Tensor transposto

O tensor transposto de \mathbf{S} , denotado por \mathbf{S}^T , é definido como o único tensor satisfazendo a propriedade:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{S}\mathbf{v}) = (\mathbf{S}^T \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{G} \quad (12.41)$$

Portanto, as seguintes propriedades são válidas

$$\begin{aligned}(\mathbf{S} + \mathbf{T})^T &= \mathbf{S}^T + \mathbf{T}^T \\ (\mathbf{ST})^T &= \mathbf{T}^T \mathbf{S}^T \\ (\mathbf{S}^T)^T &= \mathbf{S}\end{aligned}\tag{12.42}$$

4.4.4) Tensores simétrico e antissimétrico

Um tensor é chamado simétrico se:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T\tag{12.43}$$

Por sua vez, \mathbf{T} é dito antissimétrico se:

$$\mathbf{T} = -\mathbf{T}^T\tag{12.44}$$

Todo tensor \mathbf{T} pode ser expresso, de forma única, como a soma de um tensor simétrico \mathbf{S} e um tensor antissimétrico \mathbf{W} , ou seja:

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{W}\tag{12.45}$$

onde:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{T} + \mathbf{T}^T\tag{12.46}$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \mathbf{T} - \mathbf{T}^T\tag{12.47}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^T &= \frac{1}{2} \mathbf{T}^T + \mathbf{T} = \frac{1}{2} \mathbf{T} + \mathbf{T}^T = \mathbf{S} \\ \mathbf{W}^T &= \frac{1}{2} \mathbf{T}^T - \mathbf{T} = -\frac{1}{2} \mathbf{T} - \mathbf{T}^T = -\mathbf{W}\end{aligned}\tag{12.48}$$

4.4.5) Produto tensorial de dois vetores

O produto tensorial $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ de dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} é definido como uma transformação que associa a cada vetor \mathbf{v} o vetor $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}$, ou seja:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} \tag{12.49}$$

Para qualquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{G}$ e $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$, verifica-se a partir da definição (12.49) que:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \quad \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} &= \mathbf{b} \cdot (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \quad \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} &= [\alpha \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} + \beta (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})] \mathbf{a} \end{aligned} \tag{12.50}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \quad \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} &= \alpha (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{a} + \beta (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \quad \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} &= \alpha \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \mathbf{u} + \beta \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \mathbf{v} \end{aligned} \tag{12.51}$$

Dessa forma, observa-se que $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ satisfaz as propriedades básicas de uma transformação linear sendo, portanto, um tensor. Logo, em notação matricial

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T \tag{12.52}$$

Além disso, o produto tensorial de dois vetores possui as seguintes propriedades:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) \tag{12.53}$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \otimes \mathbf{d} \tag{12.54}$$

4.4.6) Traço

O traço de um produto tensorial de dois vetores $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$ é definido como um escalar dado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, ou seja:

$$tr(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \tag{12.55}$$

Como consequência direta dessa definição, tem-se a propriedade de linearidade do traço

$$\begin{aligned} tr[(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}] &= (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \\ tr[(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}] &= \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \beta(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \\ tr[(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}] &= \alpha tr[\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}] + \beta tr \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \end{aligned} \quad (12.56)$$

Como qualquer tensor \mathbf{T} pode ser escrito na forma $\mathbf{T} = T_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$, o traço de \mathbf{T} é obtido como:

$$\begin{aligned} tr\mathbf{T} &= tr(T_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = T_{ij}tr(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\ tr\mathbf{T} &= T_{ij}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} \end{aligned} \quad (12.57)$$

Logo, o traço de um tensor é definido através da relação

$$tr\mathbf{T} = T_{ii} \quad (12.58)$$

O traço de um tensor possui também as seguintes propriedades:

$$tr\mathbf{T}^T = tr\mathbf{T} \quad (12.59)$$

$$tr(\mathbf{S}\mathbf{T}) = tr(\mathbf{T}\mathbf{S}) \quad (12.60)$$

Observa-se também que o espaço de tensores L_{in} possui um produto interno natural definido por:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = tr \mathbf{S}^T \mathbf{T} \quad (12.61)$$

Outra importante conclusão a respeito de tensores é que o produto interno de um tensor simétrico \mathbf{S} por um vetor antissimétrico \mathbf{W} é sempre nulo.

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{W} = 0 \quad (12.62)$$

4.5) Operador divergente

O divergente de um vetor \mathbf{v} é definido como:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{tr} \nabla \mathbf{v} \quad (12.63)$$

Expandindo a expressão anterior em termos das componentes cartesianas de $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$, tem-se que:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (12.64)$$

ou ainda, usando o conceito do operador gradiente,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (12.65)$$

Então, pode-se afirmar que o divergente de uma função vetorial corresponde a uma função escalar.

Por outro lado, o divergente de uma função tensorial \mathbf{T} é uma função vetorial, dada por:

$$(\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{T}^T \mathbf{v} \quad (12.66)$$

Expandindo os termos da equação, obtém-se:

$$(\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div} \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}^T \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} \quad (12.67)$$

Aplicando o conceito de divergência de um vetor apresentado no Item 4.5), tem-se que:

$$(\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_{xx}v_x + T_{yx}v_y + T_{zx}v_z \\ T_{xy}v_x + T_{yy}v_y + T_{zy}v_z \\ T_{xz}v_x + T_{yz}v_y + T_{zz}v_z \end{Bmatrix} \quad (12.68)$$

Realizando o produto escalar e colocando v_x , v_y e v_z em evidência, obtém-se:

$$(\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) \\ \left(\frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \right) \\ \left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} \quad (12.69)$$

Portanto, pode se concluir que:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) \\ \left(\frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \right) \\ \left(\frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \end{Bmatrix} \quad (12.70)$$

Vale lembrar que o operador Laplaciano no espaço euclidiano n -dimensional é definido como o divergente do gradiente $\Delta = \nabla^2 = \operatorname{div} \nabla$.

4.6) Teorema da Divergência

O teorema da divergência, também conhecido como Teorema de Gauss, é o resultado de ligações entre divergência de um campo vetorial com o valor da integral de superfície do fluxo definido pelo campo. Então se pode dizer que este teorema postula que a integral da divergência das funções é igual ao fluxo destas quantidades através da fronteira S , permitindo transformar integrais definidas ao longo do volume V numa integral ao longo da superfície S do corpo, ou vice-versa. Sendo \mathbf{v} um campo vetorial, este teorema implica que:

$$\int_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = \int_S v_x n_x + v_y n_y + v_z n_z dS \quad (12.71)$$

Usando o conceito de divergente, o teorema pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\int_V \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) dV = \int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \quad (12.72)$$

onde \mathbf{n} corresponde ao campo vetorial das normais à superfície S .

4.7) Derivadas do produto de funções

A derivada do produto de duas funções $a(x)$ e $b(x)$ é dada pela seguinte equação:

$$\frac{d}{dx} a(x)b(x) = a'(x)b(x) + b'(x)a(x) \quad (12.73)$$

Particularmente, no presente trabalho tem-se o interesse em fazer a operação de divergência do produto entre o tensor de tensões de Cauchy \mathbf{T} e o vetor deslocamentos \mathbf{u} . A expressão final decorrente desta operação é:

$$(\text{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{u} = \text{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{u}) - \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (12.74)$$

As etapas algébricas que permitem chegar a esta expressão final serão apresentadas a seguir.

Conforme se observa na Equação (12.29) o produto entre um tensor e um vetor resulta em um novo vetor, portanto pode-se escrever que:

$$T^T \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{xx}u + \tau_{yx}v + \tau_{zx}\zeta \\ \tau_{xy}u + \tau_{yy}v + \tau_{zy}\zeta \\ \tau_{xz}u + \tau_{yz}v + \tau_{zz}\zeta \end{Bmatrix} \quad (12.75)$$

Uma vez que $T^T \mathbf{u}$ é um vetor, o divergente deste produto é obtido a partir da aplicação do divergente sobre o vetor resultante \mathbf{v} . Em analogia a Equação (12.64) que define o divergente de um vetor, pode escrever que:

$$\begin{aligned} \text{div}(T^T \mathbf{u}) &= \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx}u + \tau_{yx}v + \tau_{zx}\zeta + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy}u + \tau_{yy}v + \tau_{zy}\zeta \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz}u + \tau_{yz}v + \tau_{zz}\zeta \end{aligned} \quad (12.76)$$

Desenvolvendo as derivadas parciais, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{div}(T^T \mathbf{u}) &= (\tau_{xx,x}u + u_{,x}\tau_{xx}) + (\tau_{yx,x}v + v_{,x}\tau_{yx}) \\ &\quad + (\tau_{zx,x}\zeta + \zeta_{,x}\tau_{zx}) + (\tau_{xy,y}u + u_{,y}\tau_{xy}) \\ &\quad + (\tau_{yy,y}v + v_{,y}\tau_{yy}) + (\tau_{zy,y}\zeta + \zeta_{,y}\tau_{zy}) \\ &\quad + (\tau_{xz,z}u + u_{,z}\tau_{xz}) + (\tau_{yz,z}v + v_{,z}\tau_{yz}) + (\tau_{zz,z}\zeta + \zeta_{,z}\tau_{zz}) \end{aligned} \quad (12.77)$$

organizando separadamente as derivadas de T^T e de \mathbf{u} , obtém-se:

$$\begin{aligned} \text{div}(T^T \mathbf{u}) &= (\tau_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z})u + (\tau_{yx,x} + \tau_{yy,y} + \tau_{yz,z})v \\ &\quad + (\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} + \tau_{zz,z})\zeta + (u_{,x}\tau_{xx} + u_{,y}\tau_{xy} + u_{,z}\tau_{xz}) \\ &\quad + (v_{,x}\tau_{yx} + v_{,y}\tau_{yy} + v_{,z}\tau_{yz}) + (\zeta_{,x}\tau_{zx} + \zeta_{,y}\tau_{zy} + \zeta_{,z}\tau_{zz}) \end{aligned} \quad (12.78)$$

Comparando a primeira a primeira linha da Equação (12.78) à Equação (12.69) que mostra o resultado do produto interno entre o

divergente de um tensor e um dado vetor, conclui-se que a mesma pode ser reescrita simplificadamente como $(divT) \cdot \mathbf{u}$.

Similarmente a Equação (12.22), o tensor resultante da aplicação do operador gradiente sobre o vetor deslocamentos é:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{,x} & u_{,y} & u_{,z} \\ v_{,x} & v_{,y} & v_{,z} \\ \zeta_{,x} & \zeta_{,y} & \zeta_{,z} \end{bmatrix} \quad (12.79)$$

Ao recorrer à operação de produto interno entre tensores apresentado na Equação (12.61), conclui-se que:

$$T \cdot \nabla \mathbf{u} = tr \left(\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_{,x} & u_{,y} & u_{,z} \\ v_{,x} & v_{,y} & v_{,z} \\ \zeta_{,x} & \zeta_{,y} & \zeta_{,z} \end{bmatrix} \right)$$

$$T \cdot \nabla \mathbf{u} = (\tau_{xx}u_{,x} + \tau_{yx}v_{,x} + \tau_{zx}\zeta_{,x}) + (\tau_{xy}u_{,y} + \tau_{yy}v_{,y} + \tau_{zy}\zeta_{,y}) \quad (12.80)$$

$$+ (\tau_{xz}u_{,z} + \tau_{yz}v_{,z} + \tau_{zz}\zeta_{,z})$$

Note que o resultado desta operação é idêntico a segunda linha da Equação (12.78), de modo que a mesma pode ser reescrita simplificadamente como $T \cdot \nabla \mathbf{u}$. Então, a Equação (12.78) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$div(T^T \mathbf{u}) = (divT) \cdot \mathbf{u} + T \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (12.81)$$