

**GUSTAVO ULISSES COMERLATTO**

**RESILIÊNCIA APLICADA AO  
CONTROLE DE VÔO**

**FLORIANÓPOLIS**

**2011**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

**RESILIÊNCIA APLICADA AO CONTROLE DE VÔO**

Dissertação submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas

**GUSTAVO ULISSES COMERLATTO**

Florianópolis, Setembro de 2011



# **RESILIÊNCIA APLICADA AO CONTROLE DE VÔO**

**GUSTAVO ULISSES COMERLATTO**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas, Área de concentração Controle, Automação e Sistemas, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina.

---

Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.  
Orientador

---

Dimitri Peaucelle, Dr.  
Co-orientador

---

José Eduardo Ribeiro Cury, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas

Banca Examinadora:

---

Pedro Luis Dias Peres, Dr.

---

Guilherme Vianna Raffo, Dr.

---

Hector Bessa Silveira, Dr.



Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas.

## **RESILIÊNCIA APLICADA AO CONTROLE DE VÔO**

**Gustavo Ulisses Comerlatto**

Setembro / 2011

Orientador: Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr..

Co-orientador: Dimitri Peaucelle, Dr..

Área de Concentração: Controle, Automação e Sistemas.

Palavras-chave: Resiliência, robustez, quadrirotores, controle de vôo.

Número de Páginas: 106

A implementação de controladores, se não for exata, pode levar a problemas de fragilidade, isto é, à perda de propriedades esperadas de um sistema de controle. Esta questão é abordada, neste trabalho, através da síntese de controladores resilientes para sistemas incertos.

A estrutura utilizada para tratar os problemas de síntese de controladores é conhecida como Separação Integral Quadrática e baseia-se nos princípios da teoria conhecida como Separação Topológica. A questão da resiliência dos controladores é desenvolvida através da síntese de conjuntos elipsoidais. A robustez, por sua vez, é garantida efetuando a síntese sobre sistemas incertos, representados nas formas politópica e LFT com norma limitada.

A modelagem do problema de resiliência resulta em condições de desigualdades matriciais na forma de LMI's, porém, com uma restrição na forma de desigualdade matricial não-linear, relacionada à necessidade de encontrar elipsóides não vazios. A metodologia utilizada para a resolução desta questão central utiliza uma reformulação do problema, conhecida como "complementaridade cônica" e o método de programação não-linear Frank-Wolfe.

A resiliência discutida neste trabalho é aplicada a dois sistemas principais, do domínio Aeronáutico. O primeiro consiste no controle de posicionamento e atitude de um helicóptero composto por 4 rotores, conhecido como Quadrirotor. E o outro, trata do controle de vôo longitudinal de uma aeronave civil.





Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Automation and Systems Engineering.

## **RESILIENCE APPLIED TO FLIGHT CONTROL**

**Gustavo Ulisses Comerlatto**

Set / 2011

Advisor: Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr..

Co-advisor: Dimitri Peaucelle, Dr..

Area of Concentration: Control, Automation and Systems.

Keywords: Resilience, robustness, quadrotors, flight control.

Number of pages: 106

The implementation of controllers, if not exact, may lead to fragility problems, i. e. the loss of the expected properties of the control system. This issue is discussed, in this work, through the synthesis of resilient controllers for uncertain systems.

The structure used to model the synthesis of the controllers is known as Integral Quadratic Separation, and is based on the principles of the theory known as Topological Separation. The resilience of the controllers is developed through the synthesis of ellipsoidal sets. The robustness, on the other hand, is assured by using the synthesis for uncertain systems, represented in polytopic form or LFT with bounded uncertainties.

The modeling of the resilience problem results in matrix inequalities conditions in the form of LMI's, with an additional restriction in the form of a non-linear matrix inequality, related to the necessity of finding non-empty ellipsoids. The methodology used to solve this central problem uses a reformulation of the nonlinear problem known as "Cone Complementarity" and the method of non-linear programming known as Frank-Wolfe.

The resilience discussed in this work is applied to two main systems of the Aeronautic domain. The first application consists on the position and attitude control of a helicopter composed of 4 rotors, known as Quadrotor. The other one is the longitudinal control of a civilian aircraft.



## SUMÁRIO

Introdução .....	1
1.1 Controle resiliente e robusto de quadrirotores .....	4
1.2 Organização do trabalho .....	5
Separação Topológica .....	9
2.1 Introdução .....	9
2.2 Princípios básicos .....	9
2.2.1 Interpretação de Lyapunov .....	12
2.3 Aplicação ao controle robusto e extensões .....	13
2.4 Sistemas bem-colocados .....	14
2.5 Separação Integral Quadrática .....	15
2.6 Conclusão .....	16
Síntese de conjuntos elipsoidais para controle .....	17
3.1 Introdução .....	17
3.2 Aspectos gerais .....	17
3.2.1 Representação de sistemas para a síntese de controladores dinâmicos .....	18
3.2.2 Conjuntos de controladores .....	19
3.2.3 Condições de resiliência .....	21
3.2.4 Inclusão de controladores pré-definidos .....	22
3.3 Síntese robusta e resiliente .....	22
3.3.1 Síntese estabilizante .....	22
3.3.2 Síntese estabilizante para sistemas politópicos .....	26
3.3.3 Síntese robusta estabilizante via sistemas LFT .....	27
3.3.4 Síntese $H_\infty$ .....	29
3.3.5 Síntese $H_\infty$ com robustez via sistemas LFT .....	31
3.3.6 Síntese $H_\infty$ com robustez via sistemas politópicos .....	32
3.4 Síntese de controladores resilientes variantes no tempo .....	34
3.4.1 Síntese estabilizante com controladores variantes no tempo .....	35
3.5 Aspectos numéricos .....	38
3.5.1 Resolução numérica .....	38
3.5.2 Aplicação do método Frank-Wolfe ao problema de aproximação cônica de segunda ordem .....	40
3.5.3 Maximização dos conjuntos .....	42

3.6	Conclusão . . . . .	44
Aplicação a quadrirotores . . . . . 47		
4.1	Introdução . . . . .	47
4.2	Modelagem do quadrirotor . . . . .	48
4.2.1	Modelo não-linear . . . . .	48
4.2.2	Modelo LPV para o sistema de rotação . . . . .	50
4.2.3	Modelo LPV para o posicionamento no plano $x-y$ . . . . .	51
4.2.4	Linearização do modelo de altitude . . . . .	53
4.2.5	Plataforma de simulação . . . . .	53
4.3	Controlador resiliente e robusto aplicado ao quadrirotor . . . . .	54
4.3.1	Estrutura de controle . . . . .	54
4.3.2	Controle de rotação . . . . .	56
4.3.3	Controle de posição no plano $x - y$ . . . . .	57
4.3.4	Controle de altitude . . . . .	65
4.4	Controlador Backstepping . . . . .	65
4.4.1	Controle de rotação . . . . .	66
4.4.2	Controle de posicionamento . . . . .	68
4.5	Estudo comparativo . . . . .	70
4.5.1	Robustez . . . . .	70
4.5.2	Resiliência . . . . .	74
4.5.3	Robustez e resiliência . . . . .	77
4.6	Conclusão . . . . .	82
Conclusão . . . . . 83		
5.1	Perspectivas . . . . .	84
Apêndice A – Aplicação ao controle longitudinal de aeronaves . . . . . 87		
A.1	Introdução . . . . .	87
A.2	Definição do problema de controle . . . . .	88
A.2.1	Pontos de voo . . . . .	89
A.3	Síntese de controladores com norma $H_\infty$ minimizada . . . . .	91
A.4	Resultados numéricos . . . . .	92
A.5	Conclusão . . . . .	94
Apêndice B – Resultados numéricos adicionais . . . . . 97		
B.1	Sistema de posicionamento $x - y$ do quadrirotor . . . . .	97
B.2	Matrizes do controlador de posicionamento do quadrirotor . . . . .	97

## LISTA DE FIGURAS

1	Resiliência aditiva e sistema politópico. . . . .	3
2	Modelo de interconexão para separação topológica. . . . .	10
3	Exemplo de interconexão . . . . .	10
4	Modelo de interconexão para controle . . . . .	14
5	Sistema simplificado em malha fechada . . . . .	24
6	Sistema simplificado em malha fechada. . . . .	29
7	Divisão em sistemas de rotação e posicionamento. . . . .	50
8	Estrutura de controle. . . . .	55
9	Mapeamento espaço de parâmetros - Espaço de sistemas. . .	59
10	Interconexão de conjuntos elipsoidais de controladores. . . .	60
11	Relação entre o conjunto de controladores e o conjunto de sistemas. . . . .	60
12	Mudança de variáveis - Mapeamento. . . . .	62
13	Seguimento de referência - Robustez. . . . .	71
14	Posições $(x, y, z)$ - Robustez. . . . .	72
15	Erro de posição $(x, y, z)$ - Robustez. . . . .	72
16	Sinal de controle - Controlador LPV - Robustez. . . . .	73
17	Sinal de controle - Controlador Backstepping - Robustez. . .	74
18	Seguimento de referência - Resiliência. . . . .	75
19	Posições $(x, y, z)$ - Resiliência. . . . .	75
20	Erro de posição $(x, y, z)$ - Resiliência. . . . .	76
21	Sinal de controle - Controlador LPV - Resiliência. . . . .	77
22	Sinal de controle - Controlador Backstepping - Resiliência. .	77
23	Seguimento de referência - Robustez e resiliência. . . . .	79
24	Posições $(x, y, z)$ - Robustez e resiliência. . . . .	79
25	Erro de posição $(x, y, z)$ - Robustez e resiliência. . . . .	80
26	Sinal de controle - Controlador LPV - Robustez e resiliência.	81
27	Sinal de controle - Controlador Backstepping - Robustez e resiliência. . . . .	81
28	Eixos de rotação de um avião. . . . .	87
29	Localização dos elevadores. . . . .	88
30	Diagrama de controle. . . . .	89
31	Relação entre velocidade corrigida e número mach . . . . .	91
32	Norma $H_\infty$ média dos pontos com êxito. . . . .	92
33	Norma $H_\infty$ em malha aberta. . . . .	93
34	Controlador de ordem 0 - Norma $H_\infty$ , . . . . .	93
35	Controlador de ordem 1 - Norma $H_\infty$ . . . . .	93

36	Controlador de ordem 2 - Norma $H_\infty$ . . . . .	93
37	Controlador de ordem 3 - Norma $H_\infty$ . . . . .	94
38	Controlador de ordem 4 - Norma $H_\infty$ . . . . .	94
39	Controlador de ordem 5 - Norma $H_\infty$ . . . . .	94
40	Controlador de ordem 6 - Norma $H_\infty$ . . . . .	94

## LISTA DE TABELAS

1	Resultado de síntese de controladores variantes no tempo na biblioteca COMPLib. . . . .	43
2	Parâmetros utilizados no modelo do quadricóptero. . . . .	54
3	Escolha dos parâmetros $\alpha$ e $\beta$ para o sistema de rotação. . .	68
4	Escolha dos parâmetros $\alpha$ e $\beta$ para o sistema de posicionamento. . . . .	69
5	Intervalos de incerteza dos parâmetros do quadricóptero - análise de robustez . . . . .	71
6	Incertezas nos sinais de controle e ângulos de controle - análise de resiliência. . . . .	74
7	Intervalos de incerteza dos parâmetros do quadricóptero - análise de robustez e resiliência. . . . .	78
8	Incertezas nos sinais de controle e ângulos de controle - análise de robustez e resiliência. . . . .	78
9	Características dos 633 pontos de voo . . . . .	90
10	Resultados numéricos síntese $H_\infty$ . . . . .	93





## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathcal{G}(\bullet)$	Grafo do operador $\bullet$ , definido como o conjunto de todas possíveis entradas-saídas
$\mathcal{G}^{-1}(\bullet)$	Grafo inverso
$\ f\ ^2$	$\int_0^{\infty} f^*(t)f(t)dt$
$\langle f, g \rangle$	$\int_0^{\infty} f^*(t)g(t)dt$
$\langle f, g \rangle_t$	$\int_0^t f^*(t)g(t)dt$
$L_2$	Conjunto de sinais mensuráveis de norma limitada ( $\ f\  \leq \infty$ )
$\mathbb{1}$	Matriz identidade com dimensões apropriadas
$\mathbb{0}$	Matriz formada por zeros com dimensões apropriadas
$ones_{n_x \times n_y}$	Matriz com $n_x$ linhas e $n_y$ colunas composta por 1's
$\ G\ _{\infty}$	Norma infinita do sistema G
$G_1 \star G_2$	Realimentação do sistema $G_1$ através do sistema $G_2$
$Co(X)$	Envelope convexo do conjunto X
$A \geq \mathbb{0}$	A matriz A é semidefinida positiva
$A > \mathbb{0}$	A matriz A é positiva



## 1 INTRODUÇÃO

A teoria de controle robusto tem se desenvolvido muito nas últimas décadas, motivada pela gama de aplicações industriais e recentes avanços teóricos, como na utilização de Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês, LMIs – Linear Matrix Inequalities) para a modelagem dos problemas e na teoria de otimização, mais especificamente na área de Programação Semi-Definida (em inglês, SDP – Semidefinite Programming), que permite o tratamento numérico das LMIs encontradas. Estas técnicas, LMI/SDP, apareceram no início da década de 90, foram popularizadas pelos livros (BOYD et al., 1994) e (EL GHAOUI; NICULESCU, 2000) e modificaram fortemente a maneira de abordar o tema de análise e síntese de sistemas lineares, em particular no contexto de controle robusto. Através desta recente teoria é possível projetar controladores que garantam características desejadas, tais como estabilidade ou desempenho, à um conjunto de sistemas, geralmente representado por um sistema nominal e um conjunto de incertezas. Entre algumas das principais aplicações tem-se o controle de sistemas não-lineares com técnicas de controle linear, o controle de sistemas Lineares Variantes no Tempo (LTV) e também o seu uso em algumas técnicas avançadas de controle ganho-escalonado (GS).

Entre as classes de sistemas incertos existentes pode-se citar duas principais, e que serão utilizadas neste trabalho: sistemas politópicos e modelos baseados em Transformações Fracionais Lineares (LFT). Os primeiros resultados relacionados com os modelos politópicos têm suas raízes em (BARMISH, 1985), em que foi introduzido o conceito conhecido como estabilidade quadrática, com o qual é possível provar a estabilidade robusta através da procura de uma função de Lyapunov única para todas as incertezas. Utilizando o mesmo tipo de funções de Lyapunov, os resultados relativos aos modelos LFT apareceram simultaneamente com o surgimento de técnicas LMI, sendo possível citar (DOYLE; PACKARD; ZHOU, 1991), (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996) e (APKARIAN; GAHINET, 1995).

Pesquisas mais recentes permitem o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, propiciando resultados menos conservadores do que resultados prévios, que utilizam uma única função de Lyapunov. No campo dos sistemas politópicos, pode-se citar a abordagem utilizando variáveis adicionais (*slack variables*), como em (DE OLIVEIRA; BERNUSSOU; GEROMEL, 1999) e (PEAUCELLE et al., 2000), também conhecida como “abordagem LMI dilatada” (EBIHARA; HAGIWARA, 2004). Estas técnicas permitem a procura de funções de Lyapunov politópicas, mas também se estendem à

procura de funções de Lyapunov polinomiais, como em (PEAUCELLE et al., 2006). Ainda no campo de sistemas politópicos, existem também outras abordagens, entre elas é possível citar os trabalhos baseados no teorema de Polya, como o descrito em (SCHERER, 2005) e utilizado abundantemente em trabalhos como (OLIVEIRA; PERES, 2005). Também pode-se citar a abordagem baseada em Soma de Quadrados (SOS) com resultados como (CHESI et al., 2005), para o qual existe uma comparação com a abordagem baseada em Slack Variables (PEAUCELLE; SATO, 2009). No campo de modelos LFT existe uma evolução similar na direção de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. Um primeiro resultado é encontrado em (IWASAKI; SHIBATA, 2001), com extensões encontradas em (PEAUCELLE et al., 2007). Uma outra metodologia é encontrada em (SCHERER, 2006).

Estudos recentes mostram, entretanto, que mesmo quando um controlador é projetado para ser robusto em relação às incertezas do sistema, podem existir casos nos quais uma pequena variação dos parâmetros do controlador pode levar o sistema de controle à instabilidade, ou a assumir outras características indesejadas. Esta questão é conhecida como fragilidade e foi primeiramente investigada em trabalhos como (KEEL; BHATTACHARYYA, 1997) e (JADBABAIE et al., 1998). O inverso deste conceito, um sistema de controle capaz de aceitar algum grau de variação nos parâmetros do controlador e ainda assim garantir as características desejadas ao sistema como um todo, é chamado de resiliência.

Diversas propostas para o problema da síntese de controladores resiliente têm sido apresentadas nos últimos anos. Estas propostas, em geral, assumem incertezas especificadas antes de efetuar a síntese do controlador, como em (YEE; YANG; WANG, 2001); entretanto, pode-se mostrar que estas metodologias podem ser reduzidas a problemas de controle robusto clássico. A metodologia utilizada neste trabalho para tratar a questão da resiliência utiliza o conceito de síntese de conjuntos elipsoidais de controladores estáticos, com base em (PEAUCELLE; ARZELIER, 2005), em que todos os controladores pertencentes ao conjunto resultante da síntese apresentada são capazes de garantir a estabilidade robusta de um sistema incerto. Neste caso, a única especificação determinada a-priori é alguma medida do tamanho do conjunto a ser encontrado.

No caso da Figura 1, a questão da síntese de conjuntos resilientes de controladores pode ser explicada da seguinte maneira: para cada controlador  $c \in \mathcal{C}$ , as características desejadas com a realimentação serão garantidas para todo sistema  $s \in \mathcal{S}$ , o que em outras palavras quer dizer que serão projetados controladores que, além de oferecer a robustez clássica, também oferecem a

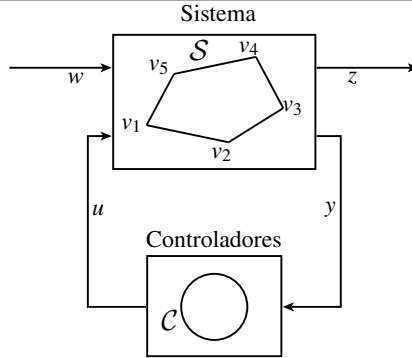


Figura 1: Resiliência aditiva e sistema politópico.

qualidade extra de resiliência. Deve-se notar que a resiliência de um controlador pertencente ao conjunto  $\mathcal{C}$  é garantida quando as perturbações nos parâmetros do controlador não forem suficientes para fazer com que o controlador saia deste conjunto. O grau de resiliência é especificado através de medidas do tamanho do conjunto, representado nas formas de erro aditivo ou multiplicativo. Uma extensão do resultado de estabilidade resiliente à síntese com desempenho  $H_\infty$  é proposta em (PEAUCELLE; ARZELIER, 2003) e será utilizada neste trabalho.

Neste trabalho, será utilizada como ferramenta básica para a modelagem dos problemas de síntese robusta e resiliente a teoria conhecida como separação topológica. Primeiramente apresentada em (SOFANOV, 1980), este conceito tem sido utilizado em diversos trabalhos para tratar as questões de análise e síntese robustas. Utilizando como base o conceito de sistemas bem-colocados, esta teoria é suficientemente generalista para abranger os principais conceitos de estabilidade, como Lyapunov e estabilidade entrada-saída, e os principais resultados de estabilidade, como teorema de Lyapunov, Popov e critério do círculo. Outras ferramentas, alternativas à separação topológica, têm sido muito utilizadas para a síntese e análise robustas, como a teoria- $\mu$  (BALAS et al., 1992) e Restrições Integrais Quadráticas (IQC) (MEGRETSKI; RANTZER, 1997). Por outro lado, pode-se mostrar que estas teorias se relacionam e podem ser tratadas como um subcaso da separação quadrática, que por sua vez é um subcaso da separação topológica.

## 1.1 Controle resiliente e robusto de quadrirotores

O controle resiliente e robusto será aplicado ao controle de Quadrirotores, uma classe especial de helicópteros com quatro rotores e que se apresenta como um interessante desafio de controle por tratar-se de um sistema não-linear e com um certo grau de incertezas devido à sua alta interação com o ambiente. Na literatura, é possível encontrar algumas propostas de técnicas de controle, em geral, tratando-se de técnicas modernas não-lineares como em (BOUABDALLAH; SIEGWART, 2007), em que é abordada a questão do controle Backstepping e Modos Deslizantes. Em (CASTILLO; DZUL; LOZANO, 2004) tem-se uma solução baseada em saturações aninhadas, incluindo uma versão discreta para ser utilizada em sistemas embarcados. Em (RAFFO; ORTEGA; RUBIO, 2010) é apresentada uma solução baseada em MPC (Model Predictive Control) junto com um controlador  $H_\infty$  não linear. Entre as metodologias lineares, destacam-se: o controlador LQR para o seguimento de trajetória apresentado em (COWLING, 2008) e técnicas aplicadas apenas ao problema de atitude como em (BOUABDALLAH; NOTH; SIEGWART, 2004).

Por se tratar de um sistema não linear, optou-se para o controle de posição no plano  $x - y$  do quadrirotor por uma técnica de controle baseada na metodologia de ganho-escalonado, conhecida como uma abordagem “Divide-and-Conquer”, que utiliza uma família de controladores lineares para efetuar uma tarefa de controle não-linear (LEITH; LEITHEAD, 2000).

A metodologia de ganho-escalonado tem sido utilizada com sucesso em problemas da indústria aeronáutica desde meados de 1960 e é aplicável ao problema do quadrirotor, como será mostrado no Capítulo 4. Este tipo de controlador foi por muito tempo utilizado com uma família de controladores projetados para pontos de operação linearizados, técnica que ficou classicamente conhecida como *baseada em linearização* e tem sido uma das mais utilizadas na indústria (LEITH; LEITHEAD, 2000; RUGH; SHAMMA, 2000). Uma alternativa mais recente e que apresenta melhores resultados é conhecida como ganho-escalonado Linear a Parâmetros Variantes (LPV) (BECKER; PACKARD; BALAS, 1993; APKARIAN; ADAMS, 1998). Esta metodologia utiliza uma representação do sistema na forma LPV (SHAMMA; ATHANS, 1992) e não exige necessariamente pontos de operação em equilíbrio. Esta opção será utilizada na modelagem do quadrirotor através de um modelo *quasi-LPV*, uma reformulação do sistema não-linear capaz de considerar as não linearidades do sistema como parâmetros variantes.

As formas mais modernas de ganho-escalonado utilizam conceitos da teoria de controle robusto. Pode-se citar primeiramente a metodologia conhe-

cida como *abordagem politópica* (BIANNIC, 2000), que busca dividir o espaço de parâmetros em politopos e em seguida faz a síntese de um conjunto de controladores para cada sistema politópico, sendo projetado um controlador para cada vértice do sistema politópico e utilizando uma interpolação destes controladores através do mesmo parâmetro do sistema. A segunda forma muito utilizada é conhecida como abordagem de ganho-escalonado LFT, uma metodologia que procura transformar um sistema dependente de parâmetros em um sistema incerto, o qual pode ser resolvido com metodologias clássicas de controle robusto (APKARIAN; GAHINET, 1995).

Entretanto, nenhuma das metodologias de ganho-escalonado citadas possuem garantias quanto a incertezas no controlador, e qualquer variação paramétrica ocorrida na implementação dos controladores anula as garantias projetadas de robustez. No caso de sistemas de controle frágeis, estas mudanças podem resultar em um comportamento em malha fechada completamente diferente do comportamento projetado. Tendo em vista esta problemática, uma nova metodologia de ganho-escalonado, que será chamada neste trabalho de ganho-escalonado resiliente, foi desenvolvida para o controle do posicionamento do quadrirotor. Esta metodologia utiliza os princípios da síntese de conjuntos elipsoidais e permite a garantia de resiliência que outras metodologias não oferecem. A idéia básica utilizada nesta metodologia é de dividir o espaço de parâmetros em politopos e para cada sistema politópico encontrado efetuar uma síntese robusta de um conjunto elipsoidal de controladores que se interligue com os conjuntos projetados para os politopos vizinhos. A etapa final é então encontrar uma regra de interpolação dos controladores que esteja sempre dentro do conjunto de elipsóides interconectados. Esta metodologia será formalizada no Capítulo 4.

## 1.2 Organização do trabalho

Uma revisão sobre os conceitos teóricos que formam a base deste trabalho se encontra no Capítulo 2, intitulado “Separação Topológica”. Neste capítulo será inicialmente feita a apresentação formal desta ferramenta através da definição de separação de sistemas genéricos interconectados. Em seguida, será definido o conceito de sistemas bem-colocados e apresentada uma forma de representar sistemas dinâmicos através da interconexão de um operador (possivelmente incerto) e uma transformação linear. Após, será apresentado um teorema que garante que um sistema seja bem colocado, utilizando a condição de Separação Topológica. Por fim, será mostrado um subcaso da Separação Topológica, conhecido como Separação Integral

Quadrática (IQS), que permite resolver os problemas de separação de forma metodológica utilizando princípios de programação semi-definida.

O Capítulo 3 aborda a questão fundamental deste trabalho, a síntese de conjuntos elipsoidais de controladores e o controle robusto, apresentando uma revisão de diversos estudos feitos nesta área e também alguns resultados novos. O capítulo inicia mostrando uma forma de representação de conjuntos elipsoidais, conhecida como elipsóides matriciais. Então, medidas para o controle do tamanho destes elipsóides são discutidas, na forma de erros aditivos e multiplicativos. Após, é tratada a questão das condições para que um controlador pré-especificado (e necessariamente possuindo as condições desejadas) esteja dentro do conjunto a ser encontrado, o que permitirá a síntese de conjuntos elipsoidais possuindo regiões em comum. Além disso, são discutidas as condições de estabilidade e desempenho  $H_\infty$ , em conjunto com as condições para robustez politópica e na forma LFT com matriz de incertezas com norma limitada. Em seguida, são expostos os aspectos numéricos da resolução dos problemas encontrados, além de ser apresentado o algoritmo numérico de otimização utilizado para resolver os problemas. Finalmente, é relatado um novo estudo que estende a capacidade de levar em conta variações em  $K$  à síntese de conjuntos elipsoidais, permitindo resultados menos conservadores. Este trabalho foi feito durante um estágio no *Laboratório de Análise e Arquitetura de Sistemas* (LAAS, Toulouse, França), com duração de 5 meses, realizado sob a orientação de Dimitri Peaucelle, onde foi abordada a implementação e testes destes resultados teóricos. A validação destes foi feita em sistemas da indústria aeroespacial contidos na base de dados COMPlib.

O Capítulo 4 trata da aplicação do controle resiliente e robusto ao quadricóptero. Este contém, inicialmente, a modelagem utilizada para descrever o sistema do Quadricóptero, sendo explicadas as suposições feitas e apresentando o modelo dinâmico não-linear completo. Em seguida, é discutida a metodologia de divisão do sistema completo em subsistemas, o que permite o controle em cascata. Discutem-se, também, modelos simplificados baseados em linearização, sendo que para os subsistemas de atitude e de posicionamento no plano  $x - y$  são propostos modelos do tipo LPV. Em seguida, mostra-se as metodologias de controle escolhidas para cada um dos subsistemas, sendo que para o sistema de controle de atitude é proposto um controlador resiliente e robusto via sistemas LFT e para o sistema de posicionamento no plano  $x - y$ , uma metodologia de ganho-escalonado LPV utilizando os princípios de conjuntos elipsoidais de controladores. Finalizando o Capítulo 4, segue um estudo comparativo entre a metodologia Resiliente proposta e um controlador não-linear do tipo Backstepping.



A questão da aplicação do controle resiliente e robusto ao problema de controle longitudinal de aeronave é discutida no Apêndice A. O problema foi proposto pela empresa *Airbus-France*, contextualizado num programa de cooperação entre a empresa e o LAAS e tratado durante o estágio. Neste apêndice, é feita, inicialmente, uma descrição do sistema e dos seus componentes envolvidos, além de ser apresentado o problema de controle. Em seguida, é discutida a questão de vôo em diferentes condições paramétricas, o que leva a uma discussão sobre as incertezas envolvidas na modelagem do sistema e também sobre a necessidade de se utilizarem pontos de operação de vôo, chamados de pontos de vôo, para a descrição deste sistema. Expõe-se, então, a metodologia utilizada para a síntese de controladores  $H_\infty$  para os pontos de vôo fornecidos e, em seguida, são discutidos os resultados obtidos.

Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas algumas considerações finais relacionadas à realização deste trabalho, bem como perspectivas para trabalhos futuros.



## 2 SEPARAÇÃO TOPOLÓGICA

### 2.1 Introdução

Na teoria de sistemas dinâmicos são encontradas diversas estruturas teóricas nas quais podem ser obtidos resultados relativos à análise e síntese de controladores. Entre as ferramentas clássicas, por exemplo, é possível citar abordagens gráficas como Nyquist e lugar das raízes, a lei de estabilidade de Lyapunov, passividade, entre outras.

À medida que a complexidade dos problemas de controle aumentam, são necessárias novas estruturas teóricas. Na literatura, encontram-se algumas opções de ferramentas para o controle robusto, além da adaptação de alguns conceitos clássicos à robustez. O conceito de bem-colocado (*well-posedness*) é uma ferramenta muito utilizado para a análise de estabilidade de sistemas não lineares e sistemas incertos. Muitas das ferramentas usadas para o controle robusto tomam como base este conceito. Associado a ele tem-se, por exemplo, o surgimento da ferramenta conhecida como análise- $\mu$  (DOYLE, 1982), que consiste de uma ferramenta com expressiva utilização na indústria. Como outro exemplo de ferramenta, é possível citar ainda a plataforma conhecida como Restrições Integrais Quadráticas (IQC), do inglês *Integral Quadratic Constraints* (MEGRETSKI; RANTZER, 1997), a qual pode ser vista como uma generalização da abordagem clássica via multiplicadores. Uma outra estrutura que tem sido bastante utilizada é conhecida como Separadores Quadráticos (QS), como em (IWASAKI; HARA, 1998).

A ferramenta utilizada neste trabalho é inspirada no conceito de Separação Topológica e consiste de uma extensão aos resultados de QS, conhecidos como Separação Integral Quadrática (IQS). Esta ferramenta tem sido utilizada em trabalhos como (PEAUCELLE; BAUDOIN; GOUAISBAUT, 2009) e utiliza tanto conceitos de QS como conceitos de IQC, oferecendo algumas extensões a estas ferramentas, como a possibilidade de reformular facilmente vários critérios de desempenho no domínio do tempo.

### 2.2 Princípios básicos

Diversos problemas de controle, incluindo problemas como análise robusta ou síntese de controladores estáticos, podem ser representados pela estrutura de sistemas interconectados na Figura 2. Nesta figura temos dois operadores matriciais representados por  $G_1$  e  $G_2$ , definidos nos domínios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , e sinais exógenos  $w$  e  $z$  de dimensões  $m$  e  $r$ , respectivamente.

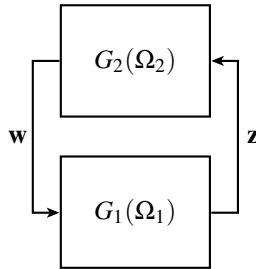


Figura 2: Modelo de interconexão para separação topológica.

Para ilustrar a abrangência do modelo de interconexão da Figura 2, pode ser tomado o exemplo de um sistema de controle representado por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad u(t) = Ky(t) \quad (2.1)$$

Este sistema de controle pode ser adaptado ao modelo de interconexão da Figura 2 da seguinte forma:

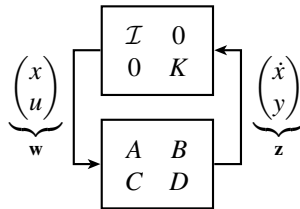


Figura 3: Exemplo de interconexão

neste caso, tem-se os sinais  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{z}$  representados por:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix}$$

além disso, os operadores  $G_1$  e  $G_2$  são representados por:

$$G_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & K \end{bmatrix}$$

sendo que  $\mathcal{I}$  representa o operador integral com condições iniciais nulas. Outros exemplos podem ser encontrados ao longo deste trabalho, como na interconexão mostrada na Figura 6.

Como será visto adiante, os resultados que serão apresentados baseados em separação topológica utilizam condições impostas sobre o grafo e o grafo inverso dos operadores lineares encontrados na Figura 2. Desta maneira, definimos inicialmente o grafo  $\mathcal{G}(\bullet)$  do operador linear  $G_1(\Omega_1)$  como o conjunto de possíveis entradas-saídas:

$$\mathcal{G}(G_1(\Omega_1)) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \in C^{m+r} : \mathbf{z} = G_1(\Omega_1)\mathbf{w} \right\} \quad (2.2)$$

De maneira similar, podemos definir o grafo inverso  $\mathcal{G}^{-1}(\bullet)$  do operador linear  $G_2(\Omega_2)$  da seguinte maneira:

$$\mathcal{G}^{-1}(G_2(\Omega_2)) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \in C^{r+m} : \mathbf{w} = G_2(\Omega_2)\mathbf{z} \right\} \quad (2.3)$$

Outro conceito dentro da Separação Topológica que necessita ser compreendido é como identificar se dois grafos são topologicamente separados. Os resultados principais de separação topológica utilizam a condição de que os grafos  $\mathcal{G}(G_1(\Omega_1))$  e  $\mathcal{G}^{-1}(G_2(\Omega_2))$  são topologicamente separados, o que nos leva à seguinte definição.

**Definição 2.1.** *O grafo de  $\mathcal{G}(G_1(\Omega_1))$  e o grafo inverso  $\mathcal{G}^{-1}(G_2(\Omega_2))$  são denominados como topologicamente separados se:*

$$\mathcal{G}(G_1(\Omega_1)) \cap \mathcal{G}^{-1}(G_2(\Omega_2)) = \{\emptyset\}, \quad \forall \Omega_1 \in \mathbf{\Omega}_1, \Omega_2 \in \mathbf{\Omega}_2 \quad (2.4)$$

Podemos garantir que os dois grafos são separados topologicamente através da procura de um funcional  $\theta_{\Omega_1, \Omega_2}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) : C^m \times C^r \rightarrow \mathbb{R}$  chamado separador topológico, com as seguintes propriedades:

$$\theta_{\Omega_1, \Omega_2}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) < 0 \text{ se } \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}(G_1(\Omega_1)) \quad (2.5)$$

$$\theta_{\Omega_1, \Omega_2}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \geq 0 \text{ se } \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}^{-1}(G_2(\Omega_2)) \quad (2.6)$$

Este separador será responsável por provar a separação entre os grafos relacionados.

### 2.2.1 Interpretação de Lyapunov

Para demonstrar a poderosa generalização do teorema de Separação Topológica e para esclarecer a questão de como selecionar separadores apropriados, será apresentada uma ligação entre o teste clássico de estabilidade para sistemas representados por variáveis de estado, no sentido de Lyapunov, e a existência de um separador topológico específico.

Para tal, é considerado o seguinte sistema não linear:

$$\dot{x}(t) = f[x(t)], \quad x(0) = x_0 \quad (2.7)$$

com  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x(t) \in X \forall t \in \mathbb{R}_+$  e  $f$  diferenciável. Este sistema pode ser interpretado em termos da Figura 2 como:

$$\mathbf{w} \equiv x(t), \quad \mathbf{z} \equiv \dot{x}(t)$$

com a seguinte definição para os operadores  $G_2$  e  $G_1$ :

$$\mathbf{w} = G_2 \mathbf{z} : x(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{z} = G_1 \mathbf{w} : \dot{x}(t) = f(x(t))$$

Definindo o operador  $\nabla$  como o operador gradiente e a função  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida no espaço de estados  $X \subset \mathbb{R}^n$ , então é possível estabelecer o seguinte teorema:

**Teorema 2.1.** *Se existir um separador topológico  $\theta(\mathbf{w}, \mathbf{z})$  para os grafos de  $G_1$  e  $G_2$ , definido por  $\theta(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \langle \nabla V(\mathbf{w}), \mathbf{z} \rangle$ , então o sistema (2.7) é estável no sentido de Lyapunov, ou seja, existe uma função de Lyapunov  $V(x)$ , positiva tal que  $V : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , e além disso a derivada  $\dot{V}(x)$  é não-positiva para todo  $x$  em  $X$ , ou seja:  $[\nabla V(x)]f(x) \leq 0$ .*

*Prova:* Devido à existência do separador  $\theta(\mathbf{w}, \mathbf{z})$  para os grafos de  $G_1$  e  $G_2$ , é possível afirmar que:

$$\theta(\mathbf{w}, \mathbf{z}) < 0 \text{ se } \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}(G_1) \quad (2.8)$$

$$\theta(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \geq 0 \text{ se } \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \in \mathcal{G}^{-1}(G_2) \quad (2.9)$$

então, se  $\begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$  pertence ao grafo de  $\mathcal{G}^{-1}(G_2)$ , a relação  $\theta(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \geq 0$  é válida e, além disso, é possível afirmar que:

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{w}, \mathbf{z}) &= \langle \nabla V(\mathbf{w}), \mathbf{z} \rangle_t = \left\langle \nabla V(x), \frac{dx}{dt} \right\rangle_t \\ &= \int_0^t (\nabla V(x) \frac{dx}{dt}) dt = \int_0^t \nabla V(x) dx = V(x) \end{aligned}$$

ou seja,  $V(x) \geq 0$ , que é primeira condição do teorema de Lyapunov.

Além disso, se  $\begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$  pertence ao grafo  $\mathcal{G}(G_1)$ , a relação  $\theta(\mathbf{w}, \mathbf{z}) < 0$  é válida e:

$$\theta(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle_t = \int_0^t \nabla V(x) f(x) dt \leq 0$$

e portanto é deduzida a expressão  $\nabla V(x) f(x) \leq 0$ , que consiste na segunda condição exigida no teorema de Lyapunov.  $\square$

### 2.3 Aplicação ao controle robusto e extensões

O objetivo da síntese robusta de controladores é projetar um controlador que garanta certas propriedades desejadas a um sistema incerto, incluindo todas as incertezas possíveis. Para tratar a síntese de controladores para sistemas incertos é necessário adaptar o problema de sistemas com incerteza ao diagrama da Figura 2. A metodologia utilizada para tal consiste em dividir o diagrama em uma interconexão de um bloco com informações sobre o sistema e um bloco com outras informações, como as incertezas do sistema.

Neste trabalho é considerada a seguinte interconexão:

$$\mathcal{E}z(t) = \mathcal{A}w(t), \quad w(t) = [\nabla z](t) \quad (2.10)$$

sendo que  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{A}$  são matrizes constantes, eventualmente não-quadradas e também não possuindo rank completo;  $\nabla$  é um operador, não necessariamente causal e possivelmente incerto, e que não deve ser confundido com o símbolo  $\nabla$  usado neste trabalho para representar o conceito de gradiente. Esta interconexão pode ser representada pelo diagrama na Figura 4.

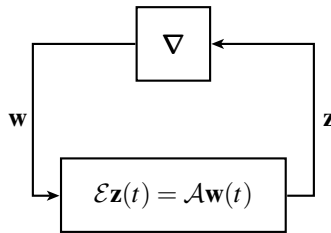


Figura 4: Modelo de interconexão para controle

O bloco com a representação do sistema, contendo as matrizes  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{A}$ , representa um sistema descritor, que consiste numa generalização aos sistemas lineares permitindo modelar vários sistemas físicos como circuitos elétricos, sistemas de potência e outros sistemas interconectados, sistemas robóticos e sistemas econômicos (DAI, 1989). Quanto ao operador  $\nabla$ , sua estrutura é utilizada para incluir elementos ligados à realimentação de sistemas em geral, como o conjunto de integradores referentes à dinâmica do sistema, a estrutura matricial do controlador estático utilizado e as incertezas modeladas junto ao sistema.

## 2.4 Sistemas bem-colocados

Um conceito muito utilizado na área de controle robusto é o de sistemas bem-colocados, que diz respeito à interconexão de sistemas em geral, não necessariamente dinâmicos. Este conceito tem sido utilizado em muitas áreas de conhecimento e, geralmente, está associado a fenômenos que possuem um sentido físico e que são realizáveis.

**Definição 2.2.** *O esquema da interconexão da Figura 4 é dita ser bem-colocada se, para todos sinais externos limitados  $(\bar{z}, \bar{w})$  perturbando as equações do sistema:*

$$\mathcal{E}z(t) = \mathcal{A}w(t) + \bar{z}(t), \quad w(t) = [\nabla z](t) + \bar{w}(t) \quad (2.11)$$

*e para todos os valores possíveis do operador  $\nabla$ , os sinais internos  $(\mathcal{E}z, w)$*



são únicos e limitados em  $L_2$ :

$$\exists \bar{\gamma} > 0 : \left\| \frac{\mathcal{E}z}{\mathbf{w}} \right\| \leq \bar{\gamma} \left\| \frac{\bar{z}}{\bar{\mathbf{w}}} \right\|, \forall \left( \frac{\bar{z}}{\bar{\mathbf{w}}} \right) \in L_2, \forall \nabla \quad (2.12)$$

No campo de sistemas dinâmicos pode-se, de uma maneira geral, associar a propriedade de estabilidade às interconexões bem-colocadas. Às interconexões que não possuem a característica de bem-colocadas, denominadas de mal-colocadas, associa-se a propriedade de instabilidade.

## 2.5 Separação Integral Quadrática

Esta seção apresenta os conceitos básicos relacionados à teoria IQS utilizada neste trabalho para a síntese de controladores. Esta ferramenta tem sido utilizada para controle robusto em trabalhos como (PEAUCELLE, 2009) e (PEAUCELLE; BAUDOIN; GOUAISBAUT, 2009), nos quais é demonstrada sua utilização na análise de desempenho com robustez. Além da questão de desempenho, ela tem capacidade de tratar outros problemas de controle, como por exemplo o de controladores variantes no tempo, como será visto no capítulo seguinte.

Como será visto nesta seção, a natureza desta ferramenta baseia-se em um teorema que propõe a Separação Topológica do diagrama apresentado na Figura 4, utilizando duas condições, uma sendo do tipo restrição quadrática e outra sendo do tipo IQC. A ferramenta conhecida como Separação Quadrática propõe a separação dos espaços de funções utilizando apenas condições quadráticas (IWASAKI; HARA, 1998), (PEAUCELLE et al., 2007), enquanto que a ferramenta conhecida como IQC propõe a separação dos espaços utilizando apenas restrições integrais quadráticas (MEGRETSKI; RANTZER, 1997). Em ambos os casos, os resultados aplicados ao controle robusto geralmente estão limitados ao estudo de estabilidade robusta. No caso do IQC, os resultados ligados à desempenho na maioria das vezes resumem-se a propriedades dissipativas do sistema, enquanto que para a QS, poucos resultados são encontrados na literatura.

A ferramenta IQS, por utilizar restrições das duas ferramentas citadas, permite tratar uma variedade maior de problemas de controle, incluindo uma abrangência maior na questão de desempenhos. Assim como no caso de outras ferramentas discutidas, o teorema principal desta ferramenta relaciona o fato de uma interconexão de sistemas ser bem-colocada com algumas restrições matriciais. Este resultado pode ser encontrado no teorema apresentado a seguir.

**Teorema 2.2.** *Dada a fatorização  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2$ , sendo  $\mathcal{E}_1$  uma matriz com rank completo, a interconexão na Figura 4 é bem colocada se existe uma matriz simétrica  $\Theta = \Theta'$  satisfazendo simultaneamente:*

$$[\mathcal{E}_1 \quad -\mathcal{A}]^{\perp*} \Theta [\mathcal{E}_1 \quad -\mathcal{A}]^{\perp} > 0 \quad (2.13)$$

e a restrição integral quadrática:

$$\left\langle \left( \begin{array}{c} \mathcal{E}_2 \mathbf{z} \\ \nabla \mathbf{z} \end{array} \right) \middle| \Theta \left( \begin{array}{c} \mathcal{E}_2 \mathbf{z} \\ \nabla \mathbf{z} \end{array} \right) \right\rangle \leq 0, \quad \forall \mathbf{z} \in L_2, \quad \forall \nabla \quad (2.14)$$

A prova deste teorema é dada em (PEAUCELLE; BAUDOUIN; GOUAIS-BAUT, 2009), e é suprimida por motivo de brevidade.

O Teorema 2.2 apresentado acima é responsável pela maior parte dos resultados teóricos abordados nesta dissertação. O separador  $\Theta$ , quando encontrado, funciona em geral como um certificado de que a interconexão do diagrama 4 é bem colocada. A forma do separador  $\Theta$ , em geral, pode ser escolhida a priori. É possível, por exemplo, fixar a forma do separador para encontrar um certificado na forma de uma função de Lyapunov, ou ainda, um separador que se assemelhe aos resultados do teorema do pequeno ganho (PEAUCELLE, 2000).

## 2.6 Conclusão

Neste capítulo, foram apresentados os princípios básicos da Separação Topológica, um conceito que permite o estudo de sinais interligados por conjuntos de sistemas. Mostrou-se que através deste conceito é possível obter resultados aplicáveis à teoria de controle de sistemas robustos; alguns destes métodos serão tratados em discussão seguinte.

A ferramenta principal apresentada neste capítulo é o Teorema 2.2, que se trata de uma especialização da Separação Topológica conhecida como Separação Integral Quadrática e que será utilizada durante o restante deste trabalho para derivar as condições para a síntese de controladores resilientes e robustos.

Para elucidar as diversas aplicações do conceito de Separação Topológica, foi mostrado como os critérios de estabilidade de Lyapunov podem ser relacionados com a escolha de separadores topológicos.

### 3 SÍNTESE DE CONJUNTOS ELIPSOIDAIIS PARA CONTROLE

#### 3.1 Introdução

Este capítulo trata da formulação dos problemas de controle resiliente e robusto, e aborda a questão de como resolvê-los. Neste trabalho serão abordados tanto controladores estáticos quanto dinâmicos, sendo que a síntese de controladores dinâmicos é feita utilizando uma transformação clássica do problema de síntese dinâmica para um problema de síntese estática, baseada no aumento da ordem do sistema em malha aberta, como apresentado na Seção 3.2.1.

A questão de resiliência é tratada através da síntese de um conjunto de controladores ao invés de apenas um controlador. Neste caso, um controlador pertencente ao conjunto projetado é capaz de manter as características projetadas ao sistema de controle mesmo na presença de variações paramétricas na sua estrutura, desde que estas variações não sejam suficientemente grandes a ponto de fazer com que o controlador saia do conjunto de controladores projetado. Na Seção 3.2.3 será mostrado que através da especificação de medidas do tamanho destes conjuntos de controladores é possível obter uma medida da resiliência de uma determinada síntese; neste trabalho serão tratadas as resiliências aditiva e multiplicativa.

A síntese de controladores para sistemas incertos é tratada para sistemas incertos representados na forma politópica ou LFT com matriz de incertezas com norma limitada, como apresentado nas seções 3.3.2 e 3.3.3 respectivamente. Além da síntese de controladores estabilizantes, também será estudada, na Seção 3.3.4, a síntese de controladores para desempenho  $H_\infty$ . Na Seção 3.4.1 é discutido um estudo sobre a síntese estabilizante com controladores variantes no tempo.

A resolução numérica dos algoritmos de síntese apresentados neste capítulo é tratada através de metodologias de programação não-linear e de resolução de LMI's. Na Seção 3.5.1 é apresentada a metodologia utilizada, além de um exemplo e alguns resultados numéricos.

#### 3.2 Aspectos gerais

Nesta seção são apresentados alguns conceitos que serão utilizados no desenvolvimento dos resultados teóricos relacionados à síntese de controladores resilientes e robustos. O primeiro deles consiste em uma metodologia para aumentar a ordem do sistema antes de se efetuar a síntese do controlador,

permitindo assim a síntese de controladores dinâmicos através de metodologias para a síntese de controladores estáticos. Em seguida são apresentados tópicos referentes à síntese de conjuntos elipsoidais de controladores, como uma representação de conjuntos de controladores na forma de elipsóides matriciais, e maneiras de especificar o tamanho destes elipsóides matriciais, representados como erros aditivos e multiplicativos. Além disso, também é discutida uma condição na forma de LMI para que um controlador pré-definido esteja dentro de um conjunto de controladores na forma de elipsóide matricial; como veremos adiante, esta condição será útil no processo de síntese de conjuntos de controladores que devam estar interconectados.

### 3.2.1 Representação de sistemas para a síntese de controladores dinâmicos

Neste trabalho, em muitos casos é utilizada a síntese de controladores dinâmicos, entretanto a metodologia utilizada para tal é através da utilização de metodologias de síntese de controladores estáticos. Este fato é possível através da introdução de variáveis de estado artificiais no sistema a ser controlado que serão agregadas ao controlador projetado (SYRMOS et al., 1995), formando assim um controlador dinâmico.

Para ilustrar a metodologia, será tomado inicialmente o sistema a ser controlado, representado pela seguinte notação:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

será considerado também um controlador dinâmico a ser projetado, representado de acordo com a seguinte relação:

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = A_K\eta(t) + B_Ky(t) \\ u(t) = C_K\eta(t) + D_Ky(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

Para efetuar a síntese do controlador dinâmico é necessário efetuar uma transformação no sistema (3.1), agregando as variáveis de estado do controlador dinâmico em (3.2), representadas por  $\eta$ . A representação do novo sistema aumentado utiliza a notação apresentada na seguinte equação:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}\tilde{u}(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

no qual as novas matrizes da dinâmica do sistema são representadas por:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & A \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & B \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & C \end{bmatrix}, \tilde{D} = \begin{bmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & D \end{bmatrix},$$

neste caso, os vetores  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}$  do sistema aumentado passam a representar as informações do sistema de controle realimentado pelo controlador dinâmico. A relação entre os vetores do sistema aumentado e do sistema de controle é dada por:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \eta \\ x \end{bmatrix}, \tilde{y} = \begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix}, \tilde{u} = \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ u \end{bmatrix},$$

além disso, o controlador estático projetado para o sistema aumentado é representado pela seguinte equação:

$$\tilde{u}(t) = \tilde{K}\tilde{y}(t) \quad (3.4)$$

Tendo em mãos o controlador estático  $\tilde{K}$  projetado para o sistema aumentado, é possível obter o controlador dinâmico equivalente. A relação entre as matrizes da dinâmica do controlador dinâmico e o controlador estático para o sistema aumentado é dada pela seguinte estrutura:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Desta maneira, o problema de síntese de controladores dinâmicos foi transformado em um problema de realimentação estática de saída, o qual será tratado pelas metodologias apresentadas neste trabalho.

### 3.2.2 Conjuntos de controladores

Como explicado anteriormente, a questão da resiliência é tratada através da síntese de conjuntos de controladores estáticos, e portanto é necessária uma representação para tais conjuntos.

Uma maneira tradicional de representar conjuntos de vetores definidos no espaço  $\mathbb{R}^n$  é através do conceito de elipsóides e por meio de relações matemáticas é possível dizer se um dado vetor pertence ou não ao conjunto elipsoidal. Entretanto, controladores estáticos são representados em geral através de matrizes definidas no espaço  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , sendo em apenas alguns casos tratados como vetores, como no caso de sistemas com apenas uma saída. Para contornar esta dificuldade, os conjuntos de controladores estáticos serão re-

presentados por meio de elipsóides matriciais, uma extensão do conceito de elipsóides tradicionais ao espaço de matrizes  $\mathbb{R}^{m \times n}$ .

Define-se um elipsóide matricial utilizando matrizes auxiliares definidas por  $K_0$ ,  $Z$  e  $R$ , com  $K_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , com  $Z > \mathbb{0}$  e  $R > \mathbb{0}$ . Desta maneira, o elipsóide matricial é formado pelas matrizes  $K_0, Z, R$  como o conjunto formado por todas matrizes  $K$  tal que a seguinte relação é satisfeita:

$$(K - K_0)'Z(K - K_0) < R \quad (3.6)$$

É possível fazer uma analogia da relação acima com a representação clássica de elipsóides, tendo a matriz  $K_0$  representando o centro do elipsóide. Uma das principais diferenças para com os elipsóides regulares reside no fato que  $R$  não é necessariamente um escalar.

Os elipsóides matriciais podem ser expressos através de uma representação mais generalista, conhecida como forma H-dissipativa. Podemos definir o conjunto de controladores  $\mathbf{K}$  como o conjunto de todos  $K$ 's tal que a seguinte relação é satisfeita:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & K' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ K \end{bmatrix} \leq \mathbb{0} \quad (3.7)$$

Este conjunto também pode ser chamado de  $\{X, Y, Z\}$ -dissipativo. É possível estabelecer uma relação entre a representação na forma H-dissipativa e a forma apresentada na equação (3.6), visto que ambas são capazes de representar elipsóides matriciais (apesar de a representação H-dissipativa ser mais ampla). A relação é feita através das equações  $K_0 \triangleq -Z^{-1}Y'$  e  $R \triangleq K_0'ZK_0 - X = YZ^{-1}Y' - X$ .

Após a síntese de um conjunto elipsoidal de controladores, é possível escolher qualquer um dos controladores deste conjunto, caso uma implementação seja desejada. A escolha natural de um controlador consiste no centro do conjunto encontrado, representado por  $K_0$ . Este controlador possui a maior característica de resiliência desejada, por se localizar no centro do conjunto  $\{X, Y, Z\}$ -dissipativo.

Quando efetuando uma procura por conjuntos elipsoidais utilizando a representação na forma H-dissipativa, é necessário incluir uma condição para que o conjunto a ser encontrado seja não nulo. Esta condição deve ser incluída em algoritmos de síntese de controladores que façam esta procura, ou o resultado pode conter uma solução vazia. A condição é baseada no fato que a matriz  $R$  deve ser positiva definida, uma condição similar ao fato de

que o raio de um elipsóide convencional deve ser positivo. Esta condição é derivada da condição  $R > 0$ , e é dada por:

$$X < YZ^{-1}Y' \quad (3.8)$$

condição a qual deve ser incluída no caso da procura por um conjunto  $\{X, Y, Z\}$ -dissipativo, e que apresenta algumas dificuldades numéricas para a sua resolução, pois se trata de uma restrição não-linear e não convexa.

### 3.2.3 Condições de resiliência

Em se tratando de conjuntos elipsoidais, é necessário de alguma maneira controlar o tamanho do conjunto a ser encontrado. Essas medidas do tamanho do conjunto podem indicar, de certa forma, o grau de resiliência de um controlador, ou seja, o quanto um controlador pode se afastar do seu valor original sem que o sistema de controle perca as características desejadas. Por esta causa, chamaremos estas medidas de *erros*.

Neste trabalho utilizaremos duas especificações para estes erros, e que serão expressas modificando de alguma forma a condição (3.8) de não nulidade do conjunto. A primeira delas é definida como erro multiplicativo  $\delta \in \mathbb{R}$ , e é expressa para um controlador  $K_0$  da seguinte forma:

$$K = K_0 + \delta K_0 = (1 + \delta)K_0 \quad (3.9)$$

Após manipulações matemáticas, é possível chegar à seguinte condição para que o conjunto tratado aceite um dado erro multiplicativo  $\delta$  em torno de um controlador  $K_0$ , ou seja,  $(1 + \delta)K_0$  pertença ao conjunto a ser procurado:

$$X < (1 - \delta^2)YZ^{-1}Y' \quad (3.10)$$

A segunda forma de erro utilizada neste trabalho é chamada de erro aditivo, representada através de um erro  $\Delta_K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , e é expressa para um controlador  $K_0$  como na seguinte expressão:

$$K = K_0 + \Delta_K \quad (3.11)$$

Em geral, é especificado um limite  $\rho$  para a norma de  $\Delta_K$ , com  $\|\Delta_K\|^2 = \Delta_K' \Delta_K \leq \rho \mathbf{1}$ . A condição que garante que o conjunto aceite um erro aditivo  $\rho$  em torno de um controlador  $K_0$ , ou seja,  $K_0 + \Delta_K$  esteja dentro do

conjunto a ser procurado, é dada pela condição 3.12.

$$\begin{cases} Z = \mathbb{1} \\ \mathbb{0} \leq \rho \leq YY' - X \end{cases} \quad (3.12)$$

A interpretação para o erro aditivo é a de que o conjunto a ser encontrado assemelha-se a uma circunferência, no caso do espaço  $R^n$ , e o erro aditivo  $\rho$  pode ser associado a uma medida do raio desta circunferência.

### 3.2.4 Inclusão de controladores pré-definidos

Outra maneira de assegurar que o elipsóide a ser encontrado seja não vazio, é determinar que algum controlador pré-determinado esteja dentro do elipsóide. Como será visto no capítulo a seguir, esta condição pode ser utilizada para auxiliar na síntese de elipsóides que precisem estar interconectados.

Para apresentar a condição de inclusão de controladores pré-definidos, é suposto inicialmente um conjunto  $\mathcal{K}$  de controladores a serem incluídos, com um número  $n$  de controladores a serem incluídos, de acordo com a expressão a seguir:

$$K_i \in \mathcal{K}, \forall i = 1 \dots n$$

É desejado que todos os controladores pertencentes ao conjunto  $\mathcal{K}$  sejam incluídos no elipsóide a ser encontrado, e para que isto ocorra, é necessário que para cada  $K_i$ , seja adicionada uma restrição da forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & K_i' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ K_i \end{bmatrix} \leq \mathbb{0} \quad (3.13)$$

## 3.3 Síntese robusta e resiliente

Esta seção apresenta condições básicas para se efetuar a síntese de conjuntos elipsoidais de controladores utilizando como base os conceitos de IQS apresentados no capítulo anterior. Entre as condições apresentadas, serão discutidas a síntese elipsoidal de controladores visando a estabilidade, desempenho  $H_\infty$ , robustez politópica e na forma de LFT com incerteza com norma limitada.

### 3.3.1 Síntese estabilizante

A síntese estabilizante (PEAUCELLE; ARZELIER, 2005) consiste em encontrar um conjunto elipsoidal de controladores no qual cada controlador per-



tendente ao conjunto é capaz de estabilizar o sistema em malha fechada. Para esta síntese será tomado um sistema de controle representado de acordo com a seguinte notação:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad u(t) = Ky(t) \quad (3.14)$$

O Teorema 3.1 estabelece condições para a síntese de um conjunto elipsoidal de controladores estabilizantes para o sistema (3.14).

**Teorema 3.1.** *Se existirem matrizes simétricas  $P = P'$  e  $R = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix}$  tais que a seguinte LMI é satisfeita:*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 \\ \Theta_2^T & \Theta_3 \end{bmatrix}}_{\Theta} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix} \geq \mathbb{0} \quad (3.15)$$

com  $\Theta$  estruturado da seguinte maneira:

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & X \end{bmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{bmatrix} -P & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & Y \end{bmatrix}, \quad \Theta_3 = \begin{bmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & Z \end{bmatrix}$$

então o seguinte conjunto de controladores, formado pelo conjunto  $\{X, Y, Z\}$ -dissipativo, estabiliza o sistema:

$$\mathcal{K} = \left\{ K : \begin{bmatrix} \mathbb{1} & K' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ K \end{bmatrix} \leq \mathbb{0} \right\}$$

Outra maneira de escrever a condição (3.15) é encontrada reagrupando os termos da restrição em (3.15), e é representada através da seguinte condição:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbb{0} & P \\ P & \mathbb{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ A & B \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} C & D \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

*Prova:* O resultado do teorema é baseado no Teorema 2.2. O primeiro passo é colocar o sistema na forma de uma interconexão como no diagrama da Figura 4. A metodologia para tal é incluir as matrizes da dinâmica do sistema no lugar da transformação linear  $\mathcal{A}$ , e no lugar do operador incerto  $\nabla$ , incluir os integradores relativos à dinâmica do sistema e às matrizes do controlador

estático a ser encontrado. Este procedimento é representado na Figura 5:

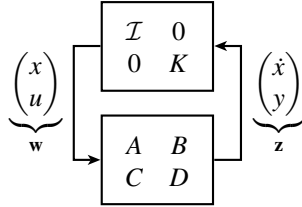


Figura 5: Sistema simplificado em malha fechada

Matematicamente, a interconexão da transformação linear e o operador linear  $\nabla$  é representada pelas relações a seguir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix}}_{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}}_{w}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}}_{w} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{I} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & K \end{bmatrix}}_{\nabla} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix}}_{z} \quad (3.17)$$

nas quais  $\mathcal{I}$  representa o operador integral com condições iniciais nulas.

Em seguida, é necessário provar que ambas as restrições (2.13) e (2.14), referentes ao Teorema 2.2 sejam satisfeitas, provando assim que o sistema da Figura 3.17 é bem-colocado e portanto o sistema de controle é estável.

A condição (2.13) do teorema é claramente satisfeita se a condição (3.15) da síntese estabilizante for satisfeita. Para notar este fato basta tomar  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathbb{1}$ , e neste caso é obtida a seguinte relação:

$$[\mathcal{E}_1 - \mathcal{A}]^{\perp*} \Theta [\mathcal{E}_1 - \mathcal{A}]^{\perp} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix}' \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} & -P & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & X & \mathbb{0} & Y \\ -P & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & Y' & \mathbb{0} & Z \end{bmatrix}}_{\Theta} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix} > \mathbb{0}$$

O passo seguinte é provar que a segunda parte do teorema de IQS é satisfeita. Para tal, basta reescrever a condição (2.14) para o sistema em (3.17) e então provar que o lado direito da igualdade (3.18) é não-positivo.

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \begin{array}{c} \mathcal{E}_2 \mathbf{z} \\ \nabla \mathbf{z} \end{array} \right) \middle| \Theta \left( \begin{array}{c} \mathcal{E}_2 \mathbf{z} \\ \nabla \mathbf{z} \end{array} \right) \right\rangle &= \left\langle \left( \begin{array}{c} \dot{x} \\ \mathcal{I} \dot{x} \end{array} \right) \middle| \begin{bmatrix} \mathbb{0} & -P \\ -P & \mathbb{0} \end{bmatrix} \left( \begin{array}{c} \dot{x} \\ \mathcal{I} \dot{x} \end{array} \right) \right\rangle \\ &+ \left\langle \left( \begin{array}{c} y \\ Ky \end{array} \right) \middle| R \left( \begin{array}{c} y \\ Ky \end{array} \right) \right\rangle \leq 0 \quad (3.18) \end{aligned}$$

É possível notar que o lado direito da igualdade é não-positivo pois ambos os termos presentes nesta expressão são não-positivos. Para o primeiro termo, é obtido:

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \begin{array}{c} \dot{x} \\ \mathcal{I} \dot{x} \end{array} \right) \middle| \begin{bmatrix} \mathbb{0} & -P \\ -P & \mathbb{0} \end{bmatrix} \left( \begin{array}{c} \dot{x} \\ \mathcal{I} \dot{x} \end{array} \right) \right\rangle \\ = \int_0^{\infty} -\dot{x}'(t)Px(t) - x(t)P\dot{x}(t)dt = -x'(t)Px(t) \leq 0 \end{aligned}$$

O segundo termo é não-positivo pois é assumido que um conjunto elipsoidal não vazio foi encontrado, e segue pela definição de conjuntos elipsoidais em (3.7).

$$\left\langle \left( \begin{array}{c} y \\ Ky \end{array} \right) \middle| R \left( \begin{array}{c} y \\ Ky \end{array} \right) \right\rangle = \int_0^{\infty} \left( \begin{array}{c} y(t) \\ K(t)y(t) \end{array} \right)' R \left( \begin{array}{c} y(t) \\ K(t)y(t) \end{array} \right) dt \leq 0 \quad (3.19)$$

o que encerra a prova.  $\square$

Deve-se notar que a única exigência feita sobre  $K$  é que a restrição do tipo IQC em 3.19 seja não-positiva, o que implica que o controlador  $K$  pode ser variante no tempo, assumindo uma forma  $K(t)$ , desde que  $K(t)$  assumam valores pertencentes ao conjunto  $\{X, Y, Z\}$ -dissipativo. Por tratar-se de uma restrição envolvendo o operador integral em (3.19), é permitido que o valor do controlador saia do conjunto, mas apenas por instantes, o que não altera o valor da integral. Além destes fatos, nenhuma suposição é feita sobre a taxa de variação do controlador, o que implica que esta variação pode ser, inclusive, instantânea.

### 3.3.2 Síntese estabilizante para sistemas politópicos

A síntese estabilizante para sistemas politópicos consiste em encontrar um conjunto elipsoidal de controladores capaz de estabilizar um sistema incerto representado através de um sistema politópico composto por  $n$  vértices. Para esta síntese será tomado inicialmente um sistema de controle incerto politópico, com incertezas limitadas apenas às matrizes  $A$  e  $B$ . Este sistema incerto pode ser expresso pela equação a seguir:

$$\Sigma_{poly} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\Delta)x(t) + B_u(\Delta)u(t) \\ y(t) = C_yx(t) + D_{yu}u(t) \end{cases} \quad u(t) = Ky(t) \quad (3.20)$$

na qual a incerteza  $\Delta$  é normalizada na forma de um vetor  $\Delta = \xi$ , pertencente ao simplex representado pela equação a seguir:

$$\Xi = \left\{ \xi = (\xi_1 \dots \xi_n) : \sum_{i=1}^n \xi_i = 1, \xi_i \geq 0 \right\} \quad (3.21)$$

Desta maneira, o conjunto de matrizes da dinâmica do sistema politópico, representado por  $M(\xi)$ , é então definido por meio de um conjunto de vértices  $M^{[1]}, M^{[2]}, \dots, M^{[n]}$ , através da seguinte relação:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A(\xi) & B_u(\xi) \\ C_y & D_{yu} \end{bmatrix}}_{M(\xi)} = \sum_{i=1}^n \xi_i \underbrace{\begin{bmatrix} A^{[i]} & B_u^{[i]} \\ C_y & D_{yu} \end{bmatrix}}_{M^{[i]}}, \quad \xi \in \Xi \quad (3.22)$$

**Teorema 3.2.** *Se existirem matrizes simétricas  $P = P'$  e  $R = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix}$  tais que o seguinte conjunto de LMIs é satisfeito:*

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ A^{[i]} & B_u^{[i]} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P \\ P & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ A^{[i]} & B_u^{[i]} \end{bmatrix} \\ & \leq \begin{bmatrix} C_y & D_{yu} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y & D_{yu} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \forall i = 1 \dots n \end{aligned} \quad (3.23)$$

então o seguinte conjunto de controladores, formado pelo conjunto  $\{X, Y, Z\}$ -dissipativo, estabiliza o sistema:

$$\mathcal{K}_{poly} = \left\{ K : \begin{bmatrix} \mathbb{1} & K' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ K \end{bmatrix} \leq \mathbb{0} \right\}$$

*Prova:* a prova é similar para um sistema sem incerteza. A diferença principal é que a condição (3.16) deve ser satisfeita para todo o conjunto de matrizes  $\{A(\Delta), B(\Delta)\}$  possíveis. Se a condição (3.23) é satisfeita, então é possível notar que:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \sum_{i=1}^n \xi_i A^{[i]} & \sum_{i=1}^n \xi_i B_u^{[i]} \end{array} \right]' \begin{bmatrix} \mathbb{0} & P \\ P & \mathbb{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \sum_{i=1}^n \xi_i A^{[i]} & \sum_{i=1}^n \xi_i B_u^{[i]} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ A^{[i]} & B_u^{[i]} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbb{0} & P \\ P & \mathbb{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ A^{[i]} & B_u^{[i]} \end{bmatrix} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \xi_i \begin{bmatrix} C_y & D_{yu} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y & D_{yu} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_y & D_{yu} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y & D_{yu} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e portanto têm-se que a condição (3.16) é satisfeita para todas matrizes  $\{A(\Delta), B(\Delta)\}$  possíveis.  $\square$

### 3.3.3 Síntese robusta estabilizante via sistemas LFT

A síntese robusta estabilizante via sistemas LFT significa encontrar um conjunto elipsoidal de controladores, no qual todos controladores deste conjunto são capazes de estabilizar o sistema incerto, representado via LFT com matriz de incertezas com norma limitada.

O sistema de controle incerto LFT com matriz de incertezas com norma limitada tem a seguinte representação:

$$\Sigma_{lft} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases} \quad w(t) = \Delta z(t) \quad (3.24)$$

na qual  $u(t) = Ky(t)$  e  $\Delta$  é uma matriz incerta que reúne os parâmetros

incertos do sistema e os sinais  $w$  e  $z$  sendo sinais exógenos inerentes à representação LFT, que não devem ser confundidos com os sinais  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{z}$  inerentes ao modelo de interconexão da Figura 4. Assim, como no caso da representação de conjuntos de controladores, também podemos utilizar incertezas H-dissipativas, como em (3.7), para representar a matriz incerta  $\Delta$ . Tanto no caso do conjunto de controladores como no de incertezas assumidas por  $\Delta$ , utiliza-se a incerteza H-dissipativa para representar um conjunto de matrizes. Além disso, também limitar-se-á a matriz incerta  $\Delta$  a um elipsóide matricial, representado pelo conjunto  $\{X_{lft}, Y_{lft}, Z_{lft}\}$ -dissipativo.

Para declarar o teorema de estabilidade para o sistema 3.24, é necessário definir inicialmente as matrizes:

$$N_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ A & B_w & B_u \end{bmatrix} N_2 = \begin{bmatrix} C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \end{bmatrix} N_3 = \begin{bmatrix} C_y & D_{yw} & D_{yu} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix}$$

**Teorema 3.3.** *Se existirem matrizes simétricas  $P = P'$  e  $R = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix}$  tais que a seguinte LMI é satisfeita:*

$$N_1' \begin{bmatrix} \mathbb{0} & P \\ P & \mathbb{0} \end{bmatrix} N_1 < \tau_{lft} N_2' \begin{bmatrix} X_{lft} & Y_{lft} \\ Y_{lft}' & Z_{lft} \end{bmatrix} N_2 + N_3' \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} N_3 \quad (3.25)$$

então o seguinte conjunto de controladores, formado pelo conjunto  $\{X, Y, Z\}$ -dissipativo, estabiliza o sistema em 3.24:

$$\mathcal{K}_{lft} = \left\{ K : \begin{bmatrix} \mathbb{1} & K' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ K \end{bmatrix} \leq \mathbb{0} \right\}$$

*Prova:* a prova deste teorema segue a linha da prova do Teorema 3.1. Inicialmente, o sistema de controle é representado na forma (2.10), incluindo os sinais relativos à realimentação através de uma matriz incerta  $\Delta$ . A interconexão é mostrada na Figura 6:

Com a interconexão escrita nos moldes da Figura 4, têm-se as seguin-

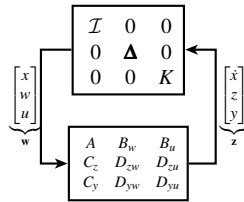


Figura 6: Sistema simplificado em malha fechada.

tes relações:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{pmatrix}}_z = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix}}_w, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix}}_w = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}}_{\nabla} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{pmatrix}}_z \quad (3.26)$$

nas quais  $\mathcal{I}$  é o operador integral com condições iniciais nulas. Neste caso, pode-se tomar  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathbb{1}$ .

Os passos seguintes desta prova são similares aos passos da prova do Teorema 3.1. A primeira restrição do Teorema 2.2 é satisfeita através da condição (3.25). A segunda, por sua vez, é satisfeita por motivos similares aos do Teorema 3.1, com a adição do termo (3.27) no lado direito da relação (3.18). Este novo termo é, por definição, não-positivo, pois a incerteza  $\nabla$  é da forma H-dissipativa.

$$\left\langle \left( \begin{array}{c} z \\ \nabla z \end{array} \right) \middle| \begin{bmatrix} X_{lft} & Y_{lft} \\ Y_{lft}^j & Z_{lft} \end{bmatrix} \left( \begin{array}{c} z \\ \nabla z \end{array} \right) \right\rangle \leq 0 \quad (3.27)$$

□

### 3.3.4 Síntese $H_\infty$

A síntese  $H_\infty$  (PEAUCELLE; ARZELIER, 2003) consiste em encontrar um conjunto elipsoidal de controladores no qual cada controlador é capaz de garantir um certo desempenho  $H_\infty$  para o sistema de controle.

Para este tipo de síntese, entradas e saídas exógenas referentes à norma  $H_\infty$  do sistema de controle devem ser incluídas, o que resulta na se-

guinte representação do sistema:

$$\Sigma_{\infty} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_v v(t) + B_u u(t) \\ g(t) = C_g x(t) + D_{gv} v(t) + D_{gu} u(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yv} v(t) + D_{yu} u(t) \end{cases} \quad u(t) = Ky(t) \quad (3.28)$$

O desempenho  $H_{\infty}$  estabelece, assumindo condições iniciais nulas, que a norma da saída exógena  $g$  é limitada se a norma de  $v$  for limitada. É possível ler esta condição matematicamente como: os únicos sinais  $g$  e  $v$  admissíveis são os sinais tais que:

$$\|g\| \leq \gamma \alpha \quad \text{se} \quad \|v\| \leq \alpha$$

É possível expressar esta condição na forma de um operador incerto  $\nabla_{\infty}$ , definido da seguinte maneira:

$$v = \nabla_{\infty} g : \|v\| < \frac{1}{\gamma} \|g\| \quad (3.29)$$

Para declarar o teorema de desempenho para o sistema (3.28), é necessário definir inicialmente as matrizes:

$$N_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 \\ A & B_v & B_u \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} C_g & D_{gv} & D_{gu} \\ 0 & \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}, \quad N_3 = \begin{bmatrix} C_y & D_{yv} & D_{yu} \\ 0 & 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$$

**Teorema 3.4.** *Se existirem matrizes simétricas  $P = P'$  e  $R = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix}$  tais que a seguinte LMI é satisfeita:*

$$N_1' \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} N_1 \leq \tau_{\infty} N_2' \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \gamma^2 \mathbb{1} \end{bmatrix} N_2 + N_3' \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} N_3 \quad (3.30)$$

então o seguinte conjunto de controladores, formado pelo conjunto  $\{X, Y, Z\}$ -dissipativo, é capaz de garantir desempenho  $H_{\infty}$  de valor  $\gamma$  ao sistema em (3.28):

$$\mathcal{K}_{\infty} = \left\{ K : \begin{bmatrix} \mathbb{1} & K' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ K \end{bmatrix} \leq 0 \right\}$$

*Prova:* A prova deste teorema segue a linha da prova dos teoremas 3.1 e 3.3.



Inicialmente, é necessário representar o sistema de controle de acordo com a seguinte interconexão:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ g \\ y \end{pmatrix}}_z = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B_v & B_u \\ C_g & D_{gv} & D_{gu} \\ C_y & D_{yv} & D_{yu} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ v \\ u \end{pmatrix}}_w, \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ v \\ u \end{pmatrix}}_w = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{I} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \nabla_\infty & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & K \end{bmatrix}}_{\nabla} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ g \\ y \end{pmatrix}}_z \quad (3.31)$$

A prova de que o sistema é bem colocado segue a linha das já apresentadas. A primeira condição do teorema de IQS, satisfeita através da condição (3.30), e a segunda condição são provadas da mesma forma que nos outros teoremas, com a adição do termo integral relativo aos sinais exógenos  $g$  e  $v$ , que é negativo, devido à propriedades do operador incerto  $\nabla_\infty$ , como na relação a seguir:

$$\left\langle \begin{pmatrix} g \\ v \end{pmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \gamma^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} g \\ v \end{pmatrix} \right\rangle = -\|g\|^2 + \gamma^2 \|v\|^2 \leq 0 \quad (3.32)$$

□

### 3.3.5 Síntese $H_\infty$ com robustez via sistemas LFT

A síntese  $H_\infty$  com robustez via sistemas LFT consiste em encontrar um conjunto elipsoidal de controladores, no qual cada controlador pertencente ao conjunto é capaz de garantir um certo desempenho  $H_\infty$  para um sistema incerto, representado através de um sistema LFT com matriz de incerteza com norma limitada.

Para este tipo de síntese, entradas e saídas exógenas,  $w$  e  $z$ , respectivamente, referentes à norma  $H_\infty$  do sistema de controle, devem ser incluídas; além das entradas e saídas,  $v$  e  $g$ , referentes à realimentação do sistema LFT, o que resulta na seguinte representação do sistema:

$$\Sigma_{lft-\infty} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_v v(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zv} v(t) + D_{zu} u(t) \\ g(t) = C_g x(t) + D_{gw} w(t) + D_{gv} v(t) + D_{gu} u(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yv} v(t) + D_{yu} u(t) \end{cases} \quad w(t) = \Delta z(t) \quad (3.33)$$

com  $u(t) = Ky(t)$  e  $\Delta$  definido da mesma maneira que em (3.24).

Para declarar o teorema de desempenho para o sistema (3.33) é ne-

cessário definir inicialmente as matrizes:

$$N_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ A & B_w & B_v & B_u \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} C_z & D_{zw} & D_{zv} & D_{zu} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \end{bmatrix}$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} C_g & D_{gw} & D_{gv} & D_{gu} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \end{bmatrix}, N_4 = \begin{bmatrix} C_y & D_{yw} & D_{yv} & D_{yu} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix}$$

**Teorema 3.5.** *Se existirem matrizes simétricas  $P = P'$  e  $R = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix}$  tais que a seguinte LMI é satisfeita:*

$$N_1' \begin{bmatrix} \mathbb{0} & P \\ P & \mathbb{0} \end{bmatrix} N_1 \leq \tau_{lft} N_2' \begin{bmatrix} X_{lft} & Y_{lft} \\ Y'_{lft} & Z_{lft} \end{bmatrix} N_2 + \tau_\infty N_3' \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \gamma^2 \mathbb{1} \end{bmatrix} N_3 + N_4' \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} N_4 \quad (3.34)$$

então o seguinte conjunto de controladores  $\{X, Y, Z\}$ -dissipativo é capaz de garantir desempenho  $H_\infty$  de valor  $\gamma$  ao sistema em (3.28):

$$\mathcal{K}_{lft-\infty} = \left\{ K : \begin{bmatrix} \mathbb{1} & K' \\ X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ K \end{bmatrix} \leq \mathbb{0} \right\}$$

*Prova:* A prova para este teorema é baseada nos teoremas já apresentados e será suprimida por motivo de brevidade. □

### 3.3.6 Síntese $H_\infty$ com robustez via sistemas politópicos

A síntese  $H_\infty$  com robustez via sistemas politópicos traduz-se em encontrar um conjunto elipsoidal de controladores, no qual cada controlador pertencente ao conjunto é capaz de garantir um certo desempenho  $H_\infty$  para um sistema incerto, representado através de um sistema politópico composto por  $n$  vértices.

Para esta síntese será tomado, inicialmente, um sistema de controle incerto politópico, com incertezas limitadas apenas às matrizes  $A$ ,  $B_v$  e  $B_u$ . Além disso, devem ser incluídas entradas e saídas exógenas  $v$  e  $g$ , referentes à norma  $H_\infty$  do sistema. Este sistema incerto pode ser expresso pela equação

a seguir:

$$\Sigma_{poly-\infty} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\Delta)x(t) + B_v(\Delta)v(t) + B_u(\Delta)u(t) \\ g(t) = C_g x(t) + D_{gv}v(t) + D_{gu}u(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yv}v(t) + D_{yu}u(t) \end{cases} \quad u(t) = Ky(t) \quad (3.35)$$

na qual a incerteza  $\Delta$  é normalizada na forma de um vetor  $\Delta = \xi$  pertencente ao simplex representado pela equação a seguir:

$$\Xi = \left\{ \xi = (\xi_1 \dots \xi_n) : \sum_{i=1}^n \xi_i = 1, \xi_i \geq 0 \right\} \quad (3.36)$$

sendo que  $\Delta$  é definido da mesma maneira que em (3.24). Desta maneira, o conjunto de matrizes da dinâmica do sistema politópico, representado por  $M(\xi)$ , é então definido por meio de um conjunto de vértices  $M^{[1]}, M^{[2]}, \dots, M^{[n]}$  através da seguinte relação:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A(\xi) & B_v(\xi) & B_u(\xi) \\ C_g & D_{gv} & D_{gu} \\ C_y & D_{yv} & D_{yu} \end{bmatrix}}_{M(\xi)} = \sum_{i=1}^n \xi_i \underbrace{\begin{bmatrix} A^{[i]} & B_v^{[i]} & B_u^{[i]} \\ C_g & D_{gv} & D_{gu} \\ C_y & D_{yv} & D_{yu} \end{bmatrix}}_{M^{[i]}}, \quad \xi \in \Xi \quad (3.37)$$

**Teorema 3.6.** *Se existirem matrizes simétricas  $P = P'$  e  $R = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix}$  tais que a seguinte LMI é satisfeita:*

$$N_1^{[i]'} \begin{bmatrix} \mathbb{0} & P \\ P & \mathbb{0} \end{bmatrix} N_1^{[i]} \leq \tau_\infty N_2' \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \gamma^2 \mathbb{1} \end{bmatrix} N_2 + N_3' \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} N_3, \quad \forall i = 1 \dots n \quad (3.38)$$

com:

$$N_1^{[i]} = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ A^{[i]} & B_v^{[i]} & B_u^{[i]} \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} C_g & D_{gv} & D_{gu} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \end{bmatrix}, \quad N_3 = \begin{bmatrix} C_y & D_{yv} & D_{yu} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix}$$

então o seguinte conjunto de controladores, formado pelo conjunto  $\{X, Y, Z\}$ -

dissipativo, é capaz de garantir desempenho  $H_\infty$  de valor  $\gamma$  ao sistema em (3.28):

$$\mathcal{K}_{poly-\infty} = \left\{ K : \begin{bmatrix} \mathbb{1} & K' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ K \end{bmatrix} \leq \mathbb{0} \right\}$$

*Prova:* A prova para este teorema é baseada nos já apresentados, e será suprimida por motivo de brevidade. □

### 3.4 Síntese de controladores resilientes variantes no tempo

Esta seção tem por objetivo discutir sistemas de controle com controladores variantes no tempo, com a forma  $K(t)$ . Estes tipos de sistemas de controle possuem diversas aplicações, entre elas, o controle baseado em ganho-escalonado, no qual os ganhos de um controlador variam de acordo com a evolução de parâmetros do sistema. Num exemplo aeronáutico, os ganhos de um controlador para o sistema de controle de vôo de um avião são, em geral, variantes de acordo com parâmetros como altitude e velocidade do avião.

Como apresentado pela relação (3.19), as sínteses de conjuntos elipsoidais discutidas até este ponto admitem controladores com a forma  $K(t)$ , desde que o valor de  $K(t)$  não saia do elipsóide projetado ou que saia apenas por instantes de tempo, de forma que a integral em (3.19) continue negativa. Outro ponto importante nas sínteses discutidas é que nenhum limite é assumido para a taxa de variação do controlador, representada por  $\dot{K}(t)$ , o que permite que o controlador varie com taxas infinitas, representando assim um resultado conservador. Este valor  $\dot{K}(t)$  é definido para um controlador estático de dimensões  $m \times n$  de acordo com a relação 3.39.

$$\dot{K} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} K_{11}(t) & \frac{d}{dt} K_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} K_{1n}(t) \\ \frac{d}{dt} K_{21}(t) & \frac{d}{dt} K_{22}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} K_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dt} K_{m1}(t) & \frac{d}{dt} K_{m2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} K_{mn}(t) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Em muitas aplicações práticas é possível estimar limites para as taxas de variação do controlador  $\dot{K}(t)$ . Estas estimativas podem ser feitas, por exemplo, tendo informações como taxas aceitáveis de variações paramétricas do sistema, perturbações aceitáveis às quais o sistema será sujeito e referências que serão passadas ao sistema de controle. Tendo em mãos os

limites aceitos para  $\dot{K}(t)$  e uma metodologia de síntese que leve em conta estas variações, é de se esperar que os resultados sejam menos conservadores, o que implica em encontrar conjuntos elipsoidais de controladores com tamanho maior do que aqueles encontrados com sínteses que não levem em conta  $\dot{K}(t)$ .

As condições apresentadas nesta seção são testadas em uma série de sistemas de controle de vôo fornecidos pela biblioteca COMPLib (LEIBFRITZ, 2003), uma biblioteca de sistemas LTI coletados da literatura da engenharia, consistindo, em sua maioria, sistemas que foram encontrados em aplicações industriais. Estes resultados são discutidos na seção de resultados numéricos 3.5.3.1.

### 3.4.1 Síntese estabilizante com controladores variantes no tempo

A síntese estabilizante com controladores variantes no tempo consiste em encontrar um conjunto elipsoidal de controladores no qual cada controlador pertencente ao conjunto é capaz de estabilizar o sistema em malha fechada. Além disso, estes controladores podem ser variantes no tempo, entretanto, a taxa de variação  $\dot{K}(t)$  deve estar confinada dentro de um conjunto especificado a-priori.

Para esta síntese, é considerado um sistema de controle representado como em 3.40.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad u(t) = K(t)y(t) \quad (3.40)$$

O conjunto de valores permitidos à taxa de variação do controlador  $\dot{K}(t)$  é definido utilizando novamente os conceitos de incertezas H-dissipativas, como apresentado na Seção 3.2.2. Desta maneira, tem-se o conjunto  $\dot{\mathcal{K}}$  de todos os valores de  $\dot{K}(t)$ , tais que a condição 3.41 é satisfeita.

$$\dot{\mathcal{K}} = \left\{ \dot{K} : \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \dot{K}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2' & V_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \dot{K} \end{bmatrix} \leq 0 \right\} \quad (3.41)$$

O Teorema 3.7 estabelece condições para a síntese de um conjunto elipsoidal de controladores variantes no tempo e estabilizantes para o sistema (3.40).

**Teorema 3.7.** *Se existirem matrizes simétricas  $P = P'$  e  $R = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix}$  tais*

que a seguinte LMI é satisfeita:

$$\begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ C & D & 0 & 0 \\ CA & CB & D & D \\ C & D & 0 & 0 \\ \hline \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 \\ \Theta_2^T & \Theta_3 \end{bmatrix}}_{\Theta} \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ C & D & 0 & 0 \\ CA & CB & D & D \\ C & D & 0 & 0 \\ \hline \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.42)$$

e com  $\Theta$  estruturado da seguinte forma:

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V_1 \end{bmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V_2 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V_3 \end{bmatrix}$$

então qualquer controlador variante no tempo pertencente ao conjunto de controladores  $\mathcal{K}_v$ , definido em (3.43), estabiliza o sistema (3.40), sendo que a taxa de variação  $\dot{K}$  deve estar limitada ao conjunto  $\dot{\mathcal{K}}$ , definido em (3.41).

$$\mathcal{K}_v = \left\{ K : \begin{bmatrix} \mathbb{1} & K' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ K \end{bmatrix} \leq 0 \right\} \quad (3.43)$$

*Prova:* Assim como os demais teoremas apresentados neste capítulo, a prova deste também é baseada no Teorema 2.2. Para resolver este problema é necessário reescrever o sistema de uma maneira redundante, tal que o termo

$\dot{K}$  apareça.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \quad u(t) = K(t)y(t) \\ \dot{y}(t) &= C\dot{x}(t) + D\dot{u}(t), \quad \dot{u}(t) = K(t)\dot{y}(t) + \dot{K}(t)y(t) \end{aligned} \quad (3.44)$$

A estabilidade deste sistema é equivalente ao bem-colocado da seguinte interconexão:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \\ -C & -D & 0 & \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbb{1} & 0 & \mathbb{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \\ y \\ \dot{y} \\ y \end{pmatrix}}_{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ C & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & -\mathbb{1} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ u \\ u \\ K\dot{y} \\ \dot{K}y \end{pmatrix}}_{w} \quad (3.45)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ u \\ u \\ K\dot{y} \\ \dot{K}y \end{pmatrix}}_{w} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{K} \end{bmatrix}}_{\nabla} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \\ y \\ \dot{y} \\ y \end{pmatrix}}_{z} \quad (3.46)$$

A primeira condição do Teorema 2.2 é satisfeita através da condição (3.42). A segunda, é satisfeita através da não-positividade da expressão a seguir:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} z \\ \nabla z \end{pmatrix} \middle| \theta \begin{pmatrix} z \\ \nabla z \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & -P \\ -P & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} y \\ K\dot{y} \end{pmatrix} \middle| \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ K\dot{y} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \left\langle \begin{pmatrix} \dot{y} \\ K\dot{y} \end{pmatrix} \middle| \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ K\dot{y} \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} y \\ K\dot{y} \end{pmatrix} \middle| \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2^T & V_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ K\dot{y} \end{pmatrix} \right\rangle \leq 0 \end{aligned}$$

O primeiro, segundo e terceiro termos do lado direito desta desigualdade são não-positivos pelos motivos já comentados. O quarto termo também é não-positivo, visto que o valor de  $\dot{K}$  pertence ao elipsóide formado pelo conjunto  $\{V_1, V_2, V_3\}$ -dissipativo.



### 3.5 Aspectos numéricos

Esta seção apresenta algumas questões relativas aos aspectos numéricos envolvidos na síntese de conjuntos elipsoidais de controladores relatados neste capítulo. Inicialmente será mostrado um exemplo de construção de um problema de síntese de um conjunto elipsoidal estabilizante, com especificação de erro multiplicativo. Em seguida, é discutido um método para a resolução do problema anterior, utilizando técnicas de otimização não-linear conhecido como Frank-Wolfe. Após, é apresentada uma metodologia para a maximização dos conjuntos elipsoidais a serem encontrados e, finalmente, alguns resultados numéricos relativos ao problema de síntese estabilizante com controladores variantes no tempo.

#### 3.5.1 Resolução numérica

Esta seção desenvolve um exemplo de síntese estabilizante utilizando uma especificação de erro multiplicativo. Nenhum valor numérico é atribuído aos parâmetros do sistema, entretanto, todo o método de resolução numérica é descrito e este é o mesmo aplicado às outras sínteses apresentadas neste trabalho.

Um conjunto de ferramentas auxiliares foi utilizado. Inicialmente, para a modelagem dos sistemas incertos utilizou-se uma *toolbox* para Matlab conhecida como RoMulOC (PEAUCELLE, 2005), voltada à análise robusta de sistemas incertos e síntese robusta de controladores. Para a modelagem de problemas de programação de LMIs, foi utilizada a ferramenta YALMIP (LÖFBERG, 2004) e a resolução destes problemas foi feita utilizando o solver SDPT3 (TOH; TODD; TÛTÛNCÛ, 1999).

##### 3.5.1.1 Exemplo de síntese estabilizante com erro multiplicativo

Para ilustrar a metodologia usada para resolver os problemas numéricos listados acima, um simples exemplo de síntese estabilizante com erro multiplicativo é exposto.

**Problema 3.1.** *Encontrar um conjunto elipsoidal, definido pelo elipsóide formado pelo conjunto  $\{X, Y, Z\}$ -dissipativo, de controladores estabilizantes para o sistema (3.14), considerando resiliência multiplicativa de valor  $\delta$ .*



A solução deste problema pode ser encontrada através da resolução da factibilidade do conjunto de desigualdades matriciais, definida em (3.47). Estas restrições foram construídas através da condição de resiliência (3.10) e da síntese estabilizante em (3.15).

$$\begin{cases} X \leq (1 - \delta^2)YZ^{-1}Y' \\ \mathcal{L}(X, Y, Z) \leq 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

sendo que a restrição  $\mathcal{L}(X, Y, Z) \leq 0$  representa o seguinte conjunto de condições:

$$\begin{cases} P \geq 0, Z \geq 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A & B_u \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A & B_u \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} C_y & D_{yu} \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y & D_{yu} \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.48)$$

Como pode ser visto, o problema de factibilidade (3.47) é uma desigualdade matricial não-linear, cuja resolução numérica, em geral, encontra dificuldades. A metodologia utilizada para resolvê-la baseia-se em transformar a desigualdade matricial não-linear em um problema de programação não-linear com restrições de forma LMI e função objetivo não-linear. Para tal, é utilizado um algoritmo de complementaridade cônica, apresentado em (EL GHAOUI; OUSTRY; AITRAMI, 1997). Esta transformação é especificada através da Proposição 3.1.

**Proposição 3.1.** *O problema 3.1 é factível se 0 é o mínimo do problema de otimização (3.49).*

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr}(TS) \text{ t.q. :} \\ & \begin{cases} \mathcal{L}(X, Y, Z) \leq 0, & S = \begin{bmatrix} \hat{X} & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \geq 0 \\ X \leq (1 - \delta^2)\hat{X}, & T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2' & T_3 \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3.49) \end{aligned}$$

*Prova:* com  $T \geq 0$  e  $S \geq 0$ ,  $\text{tr}(TS) = 0$  implica em  $TS = 0$ . Como  $TS = \begin{bmatrix} T_1\hat{X} + T_2Y' & T_1Y + T_2Z \\ T_2'\hat{X} + T_3Y' & T_2'Y + T_3Z \end{bmatrix} = 0$ , tem-se  $\hat{X} = -T_1^{-1}T_2Y' = -T_1^{-1}(-T_1YZ^{-1})Y' = YZ^{-1}Y'$ . Dessa forma, a condição não-linear  $X \leq (1 - \delta^2)YZ^{-1}Y'$  também será satisfeita. □

Deve ser notado que mesmo após a sua transformação, tem-se um problema de otimização não-linear, devido à função objetivo não-linear  $tr(TS)$ . Entretanto, este pode ser resolvido através de um algoritmo Frank-Wolfe, como explicado na Seção 3.5.2.

### 3.5.2 Aplicação do método Frank-Wolfe ao problema de aproximação cônica de segunda ordem

Nesta seção, procura-se explicar o algoritmo utilizado para a resolução numérica do problema de otimização em (3.49). O algoritmo utilizado consiste no método de Frank-Wolfe (BERTSEKAS, 1995), também conhecido como método do gradiente reduzido.

Este método iterativo de programação não-linear utiliza minimizações sucessivas do gradiente da função objetivo. Na primeira fase deste algoritmo é necessário inicializar o algoritmo com uma solução inicial factível às restrições LMI, se tal solução existir. Em seguida, a cada iteração, o método utiliza um passo de descida na direção do gradiente negativo, reduzindo, assim, a função objetivo. O passo de descida é “reduzido” por meio de uma largura de passo  $\alpha$ , de forma que este permaneça na região factível das restrições lineares. A largura do passo pode ser utilizada como critério de parada do algoritmo.

A aplicação deste algoritmo ao problema (3.49) pode ser resumida através da seguinte sequência:

1. A condição inicial  $T_0$  e  $S_0$  é calculada utilizando, por exemplo, o seguinte controlador inicial (valores encontrados empiricamente sendo desejável um controlador inicial estável para que os controladores do conjunto tenham maior probabilidade de serem estáveis também):

$$K_0 = \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & ones_{n_x \times n_y} \\ ones_{n_u \times n_x} & ones_{n_u \times n_y} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

sendo que  $ones_{n_x, n_y}$  representa uma matriz com  $n_x$  linhas e  $n_y$  colunas composta por 1's. Os valores utilizados para  $n_u$  e  $n_y$  devem ser o número de entradas e saídas do sistema, respectivamente. A  $n_x$  é associado o número de variáveis do controlador dinâmico (e 0 no caso de controladores estáticos).

2. A direção  $(\Delta T, \Delta S)$ , com  $\Delta T = T - T_k$ , e  $\Delta S = S - S_k$  calculada resolvendo o problema (3.54). Este fato é percebido através da seguinte

aproximação de Taylor da função objetivo no entorno de  $T_k, S_k$ :

$$f(T, S) = tr(T_k S_k) + \frac{\partial f(T, S)}{\partial T} \Big|_{(T_k, S_k)} \cdot (T - T_k) + \frac{\partial f(T, S)}{\partial S} \Big|_{(T_k, S_k)} \cdot (S - S_k) \quad (3.51)$$

onde  $\cdot$  é definido como o produto interno convencional de matrizes. Sabendo que  $\frac{\partial f(T, S)}{\partial T} \Big|_{(T_k, S_k)} = S_k^T$ ,  $\frac{\partial f(T, S)}{\partial S} \Big|_{(T_k, S_k)} = T_k^T$  e utilizando o produto interno usual de matrizes, é obtida a seguinte função objetivo:

$$f(T, S) = tr(T_k S_k) + tr(S_k^T (T - T_k)) + tr(T_k^T (S - S_k)) \quad (3.52)$$

eliminando os termos constantes da função objetivo, tem-se:

$$f(T, S) = tr(S_k T + T_k S) \quad (3.53)$$

portanto, a direção do passo em cada iteração é calculada através do seguinte problema:

$$\begin{cases} \min & tr(S_k T + T_k S) \text{ t.q. :} \\ & \mathcal{L}(X, Y, Z) \leq 0, \quad S = \begin{bmatrix} \hat{X} & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \geq \mathbb{0} \\ & X \leq (1 - \delta^2) \hat{X}, \quad T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2' & T_3 \end{bmatrix} \geq \mathbb{0} \end{cases} \quad (3.54)$$

3. O cálculo de uma largura de passo  $\alpha_k$  tal que:

$$f(T_k + \alpha_k \Delta T, S_k + \alpha_k \Delta S) < f(T_k, S_k) \quad (3.55)$$

é escolhida de maneira constante por motivo de simplificação. Nota-se que para qualquer valor de  $\alpha_k$  no intervalo  $0 < \alpha_k < 1$  obtém-se um passo de descida que continua na região factível das restrições lineares.

O sucesso ou falha do algoritmo dependerá dos critérios de parada escolhidos, sendo que, caso o problema não tenha uma solução, não é possível determinar este fato, o qual ser interpretado como um numero excessivo de iterações. Os critérios de parada utilizada neste trabalho são:

- Uma possível representação de sucesso é dada quando  $tr(T_k S_k)$  é zero, aproximada por  $tr(T_k S_k) \leq \delta$ . Entretanto, a condição

$X \leq (1 - \delta^2)YZ^{-1}Y'$  é a verdadeira prova que o algoritmo obteve sucesso e esta condição pode ser alcançada antes que  $tr(T_k S_k)$  aproxime 0 (e em alguns casos, devido a erros numéricos, o traço pode ser zero e a condição não ser satisfeita).

- O critério  $tr(T_{k+1}S_{k+1}) - tr(T_k S_k) \leq \delta$  significa que o algoritmo converge lentamente e, provavelmente, para um valor diferente de zero.
- O número de iterações é também um critério importante de falha. Se o algoritmo executar mais passos que um número pré-definido, isto pode ser interpretado como uma falha em convergir.

Deve ser lembrado que um resultado de falha não necessariamente significa que não existe solução.

### 3.5.3 Maximização dos conjuntos

Em alguns casos, pode ser interessante maximizar o conjunto de controladores, desejando-se encontrar o maior raio possível. Isso pode ser feito fixando a forma do elipsóide a uma circunferência, através da condição de erro aditivo apresentada pela condição (3.12), e modificando a função objetivo do problema de otimização, através da inclusão de um termo negativo  $k$  multiplicando o erro aditivo, o que faz com que o algoritmo tente maximizá-lo.

O problema final, na forma transformada pelo algoritmo de complementaridade cônica, será:

$$\begin{aligned} \min \quad & tr(TS_k + ST_k) - k\rho \text{ t.q. :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(X, Y, Z) \leq 0, \quad S = \begin{bmatrix} \hat{X} & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \geq 0 \\ Z = \mathbb{1} \\ 0 \leq \rho \mathbb{1} \leq YY' - X \end{array} \right. , \quad T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2' & T_3 \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

#### 3.5.3.1 Resultados numéricos para síntese de controladores variantes no tempo

Esta seção contém alguns resultados numéricos para a metodologia de síntese de controladores variantes no tempo, como apresentado na Seção 3.4.1. A síntese foi testada em exemplos relacionados a problemas de controle de vôo, propostos como parte da biblioteca COMLib (LEIBFRITZ, 2003).

Esta é uma biblioteca de exemplos de sistemas LTI coletados da literatura da engenharia, consistindo, em sua maioria, sistemas que foram encontrados em aplicações industriais. Este fato evidencia que a teoria apresentada neste trabalho encontra aplicação em problemas industriais.

Os resultados vistos na Tabela 1 foram testados utilizando um erro multiplicativo de 0.5 e um elipsóide matricial limitador da taxa de variação  $\dot{K}$ , representado na forma da incerteza  $\{-\mathbb{1}, \mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ -dissipativa.

Tabela 1: Resultado de síntese de controladores variantes no tempo na biblioteca COMPLib.

Ex.	$n_x$	$n_u$	$n_y$	#var	#lin	#it	tempo	falha?
AC1	5	3	3	58	32	30	45.5s	sim
AC2	5	3	3	58	40	30	49s	não
AC3	5	2	4	68	47	5	6.9s	não
AC5	4	2	2	32	26	30	5.3s	sim
AC6	7	2	4	81	55	6	22.7s	não
AC11	5	2	4	68	33	30	82s	sim
AC12	4	3	4	77	37	30	109.7s	sim
AC15	4	2	3	47	22	5	2s	não
AC16	4	2	4	63	44	5	4s	não
AC17	4	1	2	26	16	3	0.3s	não

### 3.5.3.2 Descrição dos sistemas testados

- AC1 - Dinâmica no plano vertical de um avião
- AC2 - Como AC1, com mudanças nas matrizes  $C_1$ ,  $D_{11}$  e  $D_{12}$
- AC3 - Modelo do eixo lateral de um avião L-1011
- AC5 - Boeing B-747 voando a 20.000 pés com velocidade Mach 0.8
- AC6 - Avião modelo L-1011
- AC11 - Modelo linearizado de uma aeronave do tipo CCV
- AC12 - Equações linearizadas de movimento da dinâmica longitudinal de um ASTOVL (Advanced Short Take Off and Vertical Landing)
- AC15 - Condições de voo de um transportador supersônico com Mach 2.7
- AC16 - Uma versão para realimentação de estados de AC15

- AC17 - Modelo do eixo dinâmico lateral de um avião L-1011

Na Tabela 1 são apresentados alguns elementos referentes à computação numérica das soluções como o número de variáveis de decisão do problema de otimização, o número de linhas, o número de iterações e o tempo de computações. Como pode ser notado, o algoritmo de síntese obteve êxito em 6 dos 11 exemplos testados, sendo que em todos casos foram obtidos baixos tempos de computação.

Deve ser lembrado que a escolha do controlador  $K(t)$  é arbitrária, desde que a sua taxa de variação  $\dot{K}$  seja limitada pelo conjunto  $\{-\mathbb{1}, \mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ -dissipativo, e quanto mais próximo do centro do conjunto de controladores encontrado, mais resiliente será o controlador escolhido.

### 3.6 Conclusão

O principal tópico abordado neste capítulo foram as condições para a síntese de conjuntos elipsoidais de controladores. O fato de ser utilizado um conjunto de controladores, ao invés de apenas um, é o principal responsável pela característica de resiliência. Este fato é justificado pois um controlador pertencente ao conjunto é capaz de aceitar incertezas em sua estrutura como erros de implementação, arredondamentos numéricos, incertezas de componentes, desde que estes erros não sejam grandes o suficiente para fazer com que o valor real do controlador saia do elipsóide projetado.

Como visto, as condições para a síntese de conjuntos elipsoidais de controladores consistiram, na maior parte, em condições do tipo LMIs. Entretanto, a restrição de procura de um conjunto elipsoidal não vazio mostrou ser na forma de desigualdades matriciais não-lineares. Então, para resolver o problema principal de factibilidade envolvendo condições do tipo LMI e uma condição não linear, foi optado por uma transformação das restrições, utilizando uma metodologia conhecida como complementaridade cônica, resultando em um problema de otimização com função objetivo não linear e restrições do tipo LMI. A resolução desta foi feita utilizando o método iterativo conhecido como Frank-Wolfe, o qual foi adaptado ao problema em questão.

Tendo em vista que os conjuntos elipsoidais de controladores projetados permitem controladores variantes no tempo com taxas de variação instantâneas ( $\dot{K}$  pode assumir valores infinitos) e sabendo que este fato pode ser muito conservador se comparado com aplicações práticas, foi apresentado um estudo de sínteses de conjuntos elipsoidais de controladores variantes no

---

tempo. A síntese de controladores utilizando esta técnica pode permitir, por exemplo, encontrar conjuntos de controladores maiores dos que os encontrados utilizando as outras. Esta metodologia foi testada em exemplos de problemas de controle de vôo reais, relatados na biblioteca de sistemas LTI, conhecida como COMPlib. Tais resultados apresentados são uma primeira mostra de que as condições discutidas neste trabalho podem ser utilizadas em problemas reais encontrados pela indústria.





## 4 APLICAÇÃO A QUADRIROTORES

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, será abordado o tema de controle resiliente e robusto aplicado à síntese de controladores para quadrirotores, uma classe especial de helicópteros, dotados de quatro rotores e que se caracterizam por sua facilidade de construção, boa relação entre a capacidade de carga e volume do veículo, assim como qualidade de voo estacionário e em baixas velocidades. Estes tipos de sistemas têm sido bastante estudados nos últimos anos, devido às suas possíveis aplicações práticas, como operações de monitoramento, por exemplo.

Na literatura relacionada ao controle de quadrirotores, encontram-se algumas propostas de técnicas de controle. Entre as principais, não-lineares, destacam-se por exemplo: (BOUABDALLAH; SIEGWART, 2007), que aborda a questão do controle Backstepping e Modos Deslizantes, (CASTILLO; DZUL; LOZANO, 2004) que apresenta uma solução baseada em saturações aninhadas incluindo uma versão discreta para ser utilizada em um sistema embarcado e (RAFFO; ORTEGA; RUBIO, 2010), com uma solução baseada em MPC (Model Predictive Control), juntamente com um controlador  $H_\infty$  não linear. No campo das técnicas lineares têm-se em geral trabalhos que tratam do problema de controle de atitude como em (BOUABDALLAH; NOTH; SIEGWART, 2004). Em (COWLING, 2008) tem-se um exemplo de técnica linear aplicada ao problema de controle de posição, sendo utilizado um controlador LQR para o seguimento de referência para o Quadrirotor, trabalhando em conjunto com um controlador do tipo MBPC.

A estratégia utilizada neste trabalho para o controle de voo do quadrirotor consiste em tratar o sistema de controle como uma estrutura de controle em cascata, permitindo separar este em um sistema de controle para a rotação do quadrirotor e para o seu posicionamento.

A técnica de síntese de controle escolhida para o subsistema de rotação utiliza um controlador dinâmico linear resiliente e robusto. O projeto é feito utilizando um modelo LPV e levando em conta o desempenho  $H_\infty$  para o seguimento de referência dos ângulos desejados. Além disso, são levadas em conta variações nos parâmetros inerciais  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  do Quadrirotor. Para o sistema de controle de posição no plano  $x - y$ , é utilizado um controlador do tipo ganho-escalonado, tomando o ângulo *yaw*  $\psi$  como parâmetro variante. A metodologia proposta para o controle baseado em ganho-escalonado procura manter garantias de resiliência e utiliza conceitos da síntese elipsoidal

de conjuntos de controladores.

## 4.2 Modelagem do quadrirotor

Um quadrirotor constitui-se de um veículo composto por 4 propulsores construídos em uma configuração em cruz, cada propulsor consistindo um eixo acionado por motores elétricos com hélices fixas em sua extremidade. Os dois pares de propulsores contrários giram em direções opostas, fazendo, assim, com que as forças de arrasto tendam a se anular. Se a velocidade de cada rotor for variada, é possível moldar um conjunto de 4 forças que serão aplicadas no quadrirotor, permitindo a sua sustentação, o controle do ângulos de *roll*, *pitch* e *yaw* ( $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ ) e também das suas posições  $x$ ,  $y$  e  $z$  no espaço.

O sistema é restrito a seis graus de liberdade, relativos à posição e rotação e que geralmente são relacionados com um eixo de coordenadas inercial fixo na terra. A posição absoluta do centro de massa do quadrirotor é descrita por  $\xi = [x, y, z]^T$  e sua rotação, pelos três ângulos de Euler  $\eta = [\phi, \theta, \psi]^T$  sendo que o ângulo *roll* se limita a  $(-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2})$ , o ângulo *pitch*  $(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$  e o *yaw*  $(-\pi \leq \psi \leq \pi)$ .

### 4.2.1 Modelo não-linear

Na modelagem do quadrirotor discutida neste trabalho, são assumidas algumas premissas:

- Os braços e o corpo são rígidos;
- Simetria rotacional quanto ao eixo  $Z$ , portanto  $I_x = I_y$ ;
- As forças giroscópicas dos rotores são consideradas desprezíveis;
- A inércia do motor é pequena, portanto, a dinâmica desta é desconsiderada;
- Pequenos ângulos para  $\phi$  e  $\theta$ .

Diferentes modelagens dinâmicas foram encontradas na literatura. A modelagem utilizada neste trabalho é encontrada em trabalhos mais recentes como em (RAFFO; ORTEGA; RUBIO, 2010) e (COWLING, 2008), e é representada

por:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right)\dot{\theta}\dot{\psi} - \frac{J_r}{I_x}\dot{\theta}\dot{\Omega} + \frac{L}{I_x}U_2 \\ \ddot{\theta} = \left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right)\dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{J_r}{I_y}\dot{\phi}\dot{\Omega} + \frac{L}{I_y}U_3 \\ \ddot{\psi} = \left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right)\dot{\phi}\dot{\theta} + \frac{1}{I_z}U_4 \\ \ddot{x} = (\cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi)\frac{U_1}{m} \\ \ddot{y} = (\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi)\frac{U_1}{m} \\ \ddot{z} = g - (\cos\phi\cos\theta)\frac{U_1}{m} \end{cases} \quad (4.1)$$

sendo que  $m$  representa a massa do quadrirotor,  $g$  a gravidade e  $\Omega$  a velocidade resultante do giro dos propulsores. As forças  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  e  $U_4$  relacionam-se com as velocidades  $\Omega$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  e  $\Omega_4$  de acordo com:

$$\begin{cases} U_1 = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ U_2 = b(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ U_3 = b(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ U_4 = d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\ \Omega = \Omega_2 + \Omega_4 - \Omega_1 - \Omega_3 \end{cases} \quad (4.2)$$

No modelo para as forças resultantes em cada rotor, é utilizada uma constante  $b$ , chamada de fator de propulsão, que exprime uma relação linear entre a força e o quadrado da velocidade angular da hélice de um rotor. No caso de  $U_4$ , é utilizada uma constante  $d$ , chamada de fator de arrasto. O sistema completo pode ser visto como uma interconexão de 2 subsistemas não-lineares, representados pela Figura 7.

Nesta representação,  $\Sigma_{\text{rot}}$  significa o sistema de rotação, constituindo as dinâmicas dos graus de liberdade relativos aos 3 ângulos de Euler, dados por:

$$\Sigma_{\text{rot}} \begin{cases} \ddot{\phi} = \left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right)\dot{\theta}\dot{\psi} - \frac{J_r}{I_x}\dot{\theta}\dot{\Omega} + \frac{L}{I_x}U_2 \\ \ddot{\theta} = \left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right)\dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{J_r}{I_y}\dot{\phi}\dot{\Omega} + \frac{L}{I_y}U_3 \\ \ddot{\psi} = \left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right)\dot{\phi}\dot{\theta} + \frac{1}{I_z}U_4 \end{cases} \quad (4.3)$$

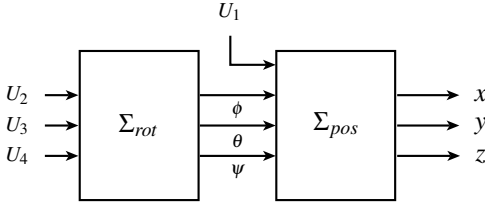


Figura 7: Divisão em sistemas de rotação e posicionamento.

e  $\Sigma_{pos}$ , as dinâmicas do posicionamento do quadricóptero, com:

$$\Sigma_{pos} \begin{cases} \ddot{x} = (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{y} = (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{z} = g - (\cos \phi \cos \theta) \frac{U_1}{m} \end{cases} \quad (4.4)$$

#### 4.2.2 Modelo LPV para o sistema de rotação

Para o sistema de rotação, foi utilizada uma representação na forma de um sistema a parâmetros variantes, cuja definição em (POUSSOT-VASSAL, 2008) é dada a seguir.

**Definição 4.1.** *A classe de sistemas lineares de dimensão finita cujos elementos das matrizes do espaço de estados dependem continuamente de um vetor de parâmetros variantes no tempo  $\rho(t)$ , é chamada de linear a parâmetros variantes (LPV). Um sistema generalizado desta classe, de ordem  $n$ , pode ser descrito por:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) \\ y(t) = C(\rho(t))x(t) + D(\rho(t))u(t) \end{cases} \quad (4.5)$$

com  $\rho \in \mathbb{R}^s$ , a saída  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ , e a entrada  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ . Todas as matrizes do espaço de estados são funções contínuas do parâmetro  $\rho$ , isto é,  $A : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n_u}$ ,  $C : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n}$  e  $D : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ . No caso em que algumas das variáveis do vetor  $\rho$  são também estados do sistema, é possível então chamar o sistema de quasi-LPV.

Observa-se que a equação (4.3) do sistema  $\Sigma_{rot}$  pode ser reescrita na

forma de um sistema linear a parâmetros variantes, com a matriz  $A$ , relativa à dinâmica do sistema, como função das derivadas dos ângulos, com:  $A(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ . O sistema pode, então, ser descrito como um sistema quasi-LPV, cuja forma é apresentada na equação (4.6). Nota-se que para a construção deste modelo, os termos contendo  $\Omega$  são desprezados.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) \dot{\psi} & 0 & \left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) \dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) \dot{\psi} & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) \dot{\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) \dot{\theta} & 0 & \left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) \dot{\phi} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}}_B + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

### 4.2.3 Modelo LPV para o posicionamento no plano $x$ - $y$

Uma possível interpretação para o sistema de posicionamento do quadrirotor é dada da seguinte maneira: para avançar o quadrirotor em uma direção desejada, é necessário incliná-lo de forma que a projeção da força normal do quadrirotor no plano  $x - y$  esteja alinhada com a direção desejada. Esta projeção é interpretada como a aceleração do quadrirotor neste plano. Portanto, para se obter uma maior aceleração, é necessário inclinar mais o quadrirotor ou aumentar a força normal  $U_1$ . Como será visto mais adiante, a abordagem de controle escolhida reserva a variação do controle  $U_1$  para o controle de altura, portanto, o controle de posicionamento é feito apenas através da inclinação deste, assumindo  $U_1$  como um parâmetro que varia pouco no entorno da força de equilíbrio  $U_1 = mg$ .

A inclinação do quadrirotor é feita a partir da mudança dos ângulos  $\phi$  e  $\theta$ , entretanto, o ângulo  $\psi$  também possui um papel importante pois define a direção do eixo de referência do quadrirotor. Em resumo, para movimentar o

quadrirotor no plano  $x - y$ , deve-se incliná-lo, mudando os ângulos  $\phi$  e  $\theta$ , mas essas inclinações dependerão do estado atual do ângulo  $\psi$ . Deve-se lembrar que para inclinar o quadrirotor, apenas pequenas variações nos ângulos  $\phi$  e  $\theta$  são necessárias, entretanto, o ângulo  $\psi$  pode assumir qualquer valor no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Estas considerações mostram que é possível representar o sistema de posicionamento através de um sistema linear com um parâmetro variável, através da linearização do sistema em torno dos ângulos  $\phi$  e  $\theta$  e utilizando o ângulo  $\psi$  como o parâmetro variável.

Levando em consideração as afirmações acima, é possível aproximar as dinâmicas das posições  $x$ , e  $y$  representadas por:

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{y} = (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \frac{U_1}{m} \end{cases} \quad (4.7)$$

através de um sistema no qual os ângulos  $\phi$  e  $\theta$  são considerados entradas e o ângulo  $\psi$  é considerado um parâmetro variante. Este sistema é deduzido através da seguinte relação:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \phi} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \theta} \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \phi} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

em que as derivadas parciais são tomadas em  $\phi = 0$ ,  $\theta = 0$  e  $U_1$  em torno do ponto de operação  $U_1 = mg$ . Deste modo, as variáveis parciais assumem os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \phi} &= (-\sin \phi \sin \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi) \frac{U_1}{m} = g \sin \psi \\ \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \theta} &= (\cos \phi \cos \theta \cos \psi) \frac{U_1}{m} = g \cos \psi \\ \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \phi} &= (-\sin \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \phi \cos \psi) \frac{U_1}{m} = -g \cos \psi \\ \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \theta} &= (\cos \phi \cos \theta \sin \psi) \frac{U_1}{m} = g \sin \psi \end{aligned}$$

Desta maneira, tomando a linearização em torno de  $\phi, \theta \approx 0$  e tratando  $\psi$  como um parâmetro variável, é possível obter a seguinte representação do

sistema na forma LPV:

$$\Sigma_{xy}(\psi) \left\{ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g \operatorname{sen} \psi & g \cos \psi \\ 0 & 0 \\ -g \cos \psi & g \operatorname{sen} \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} \right. \quad (4.9)$$

#### 4.2.4 Linearização do modelo de altitude

O tratamento do sistema de altitude é feito considerando  $U_1$  como variável de controle e utilizando linearizações no entorno de  $\phi, \theta = 0$ . A variável de controle é considerada perto do ponto de operação  $U_1 = mg$ , portanto, assumem-se apenas pequenas variações de aceleração no eixo  $z$ . A representação básica do sistema é dada pela seguinte equação não linear:

$$\ddot{z} = g - (\cos \phi \cos \theta) \frac{U_1}{m} \quad (4.10)$$

que, após as considerações do parágrafo anterior, assume a seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \ddot{z}}{\partial U_1} \end{bmatrix} \Delta U_1 \quad (4.11)$$

com:  $\frac{\partial \ddot{z}}{\partial U_1} = -(\cos \phi \cos \theta) \frac{1}{m} \approx -\frac{1}{m}$ , e  $\Delta U_1$  a variação de  $U_1$  em torno do ponto de operação  $U_1 = mg$ . Substituindo estes valores é obtido, então, o seguinte sistema linear:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m} \end{bmatrix} \Delta U_1 \quad (4.12)$$

#### 4.2.5 Plataforma de simulação

O modelo escolhido para testes de simulação é um pequeno quadricóptero com 72 centímetros de diâmetro e 20 centímetros de altura conhecido como OS4. Os parâmetros desta plataforma são descritos em (BOUABDALAH, 2007) e representados na Tabela 2.

Tabela 2: Parâmetros utilizados no modelo do quadricóptero.

nome	parâmetro	valor	unidade [mks]
massa	m	0.65	kg
inércia eixo x	$I_x$	7.5e-3	kg.m <sup>2</sup>
inércia eixo y	$I_y$	7.5e-3	kg.m <sup>2</sup>
inércia eixo z	$I_z$	1.3e-2	kg.m <sup>2</sup>
coeficiente de empuxo	b	3e-5	N.s <sup>2</sup>
coeficiente de arrasto	d	7.5e-7	Nm.s <sup>2</sup>
inércia rotor	$J_r$	6e-5	kg.m <sup>2</sup>
tamanho braço	l	0.23	m

### 4.3 Controlador resiliente e robusto aplicado ao quadricóptero

Esta seção apresenta as metodologias de síntese de controladores utilizada para cada um dos subsistemas, além de apresentar a estrutura de controle utilizada para controlar o sistema como um todo. Neste trabalho, é considerado que o quadricóptero possui sensores capazes de medir todos os estados do sistema, ou seja, os ângulos, as velocidades angulares, as posições e as velocidades translacionais.

#### 4.3.1 Estrutura de controle

A estrutura de controle escolhida para o quadricóptero baseia-se em uma estrutura em cascata, que é implementada utilizando uma malha interna, funcionando como um controlador escravo e uma malha externa como um controlador mestre. A relação entre as duas malhas é tal que o sinal de controle gerado pelo mestre é utilizado como referência para o escravo. Para que o sistema de controle funcione de forma satisfatória, é desejável que a malha interior tenha uma dinâmica mais rápida que a exterior.

Uma das principais vantagens obtidas com esta estrutura de controle, neste trabalho, é a possibilidade de separar a síntese dos controladores para cada subsistema, o que facilita a síntese, pois reduz o sistema total a 3 subsistemas, sendo um de rotação (ordem 6), um de posicionamento no plano  $x - y$  (ordem 4) e um de altura (ordem 2), reduzindo a complexidade numérica, além de contornar o problema do sistema completo ser do tipo sub-atuado. O preço a ser pago é que não é obtido um cálculo exato das propriedades do sistema como um todo, como estabilidade ou desempenho, devido às propri-



idades da estrutura em cascata.

A tarefa de controle, neste trabalho, consiste em fazer com que o Quadrirotor seja capaz de seguir uma trajetória no espaço cartesiano, representada pelos sinais de referência  $x_r$ ,  $y_r$  e  $z_r$  e obedecendo a uma referência para o ângulo  $\psi$ , representada por  $\psi_r$ . A estrutura de controle utilizada traduz-se em, primeiramente, separar o controle de posição no plano  $x - y$  do controle da altura  $z$ . Para a altura, o sinal de controle  $U_1$  é tratado como a entrada, e os ângulos  $\phi$  e  $\theta$  são considerados pequenos, de modo que  $\cos \phi \cos \theta \approx 1$ . Em seguida, para o posicionamento no plano  $x - y$ , o sinal de controle  $U_1$  é considerado constante (sujeito a pequenas variações advindas do controlador de altura) e os ângulos  $\phi$  e  $\theta$  são tratados como os sinais de controle (gerados pelo controlador de posição). Além disso, é feita novamente a suposição de pequenos ângulos para  $\phi$  e  $\theta$ , e o ângulo  $\psi$  é tratado como um parâmetro variante do sistema. Tendo, finalmente, os ângulos  $\phi$  e  $\theta$  referenciados pelo controlador de posição, e o ângulo  $\psi$  referenciado externamente pelo elemento responsável pela escolha das trajetórias, então o controlador de rotação pode regular a rotação do quadrirotor para os valores desejados, utilizando as entradas  $U_2$ ,  $U_3$  e  $U_4$  como sinais de controle.

Esta estrutura de controle em cascata é ilustrada na Figura 8, na qual podem ser notados os sinais de referência  $x_r$ ,  $y_r$  e  $z_r$  sendo passados ao controlador de posição e o sinal de referência  $\psi_r$  sendo incorporado aos sinais  $\phi_r$  e  $\theta_r$  para então serem passados ao sistema de controle de atitude.

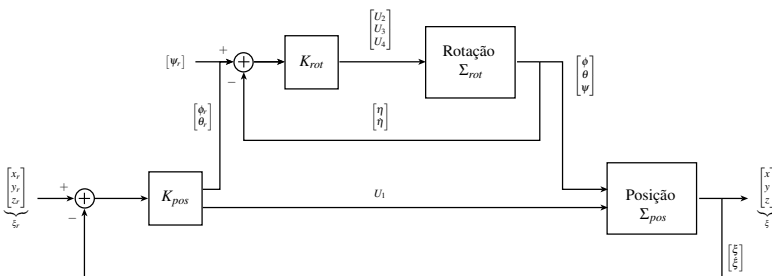


Figura 8: Estrutura de controle.

### 4.3.2 Controle de rotação

Como visto na Seção 4.2.2, é possível representar o modelo não-linear do sistema de rotação através de um modelo LPV, no qual as derivadas  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\psi}$  aparecem na matriz da dinâmica do sistema. Uma síntese resiliente deste controlador é feita de modo que seja capaz de garantir desempenho  $H_\infty$  ao sistema de controle e também robustez em relação a variações dos parâmetros  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$ .

Com base em (3.33), a representação do sistema utilizada para efetuar essa síntese é dada por:

$$\Sigma_{rot} : \begin{cases} \dot{x}_r(t) = A^r x_r(t) + B_w^r w_r(t) + B_v^r v_r(t) + B_u^r u_r(t) \\ z_r(t) = C_z^r x_r(t) + D_{zw}^r w_r(t) + D_{zv}^r v_r(t) + D_{zu}^r u_r(t) \\ g_r(t) = C_g^r x_r(t) + D_{gw}^r w_r(t) + D_{gv}^r v_r(t) + D_{gu}^r u_r(t) \\ y_r(t) = C_y^r x_r(t) + D_{yw}^r w_r(t) + D_{yv}^r v_r(t) + D_{yu}^r u_r(t) \end{cases} \quad w_r(t) = \Delta z_r(t) \quad (4.13)$$

A influência das variações paramétricas nas constantes inerciais do quadrirotor são muito maiores na matriz B do sistema (4.6) do que na matriz A, portanto, a robustez do controlador é garantida incluindo incertezas nos parâmetros encontrados na matriz B do sistema (4.6). Assim, o sistema passa a ser representado pelos valores a seguir.

$$A^r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_w^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_u^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 30.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 76.9 \end{bmatrix}$$

$$D_{yw}^r = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{zu}^r = \begin{bmatrix} 30.9 & 0 & 0 \\ 0 & 30.9 & 0 \\ 0 & 0 & 76.9 \end{bmatrix}, C_g^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_y^r = \mathbb{1}_{6 \times 6}, B_v^r = \mathbb{0}_{6,3}, D_{zw}^r = \mathbb{0}_{3,3}, D_{zv}^r = \mathbb{0}_{3,3}, D_{zu}^r = \mathbb{0}_{3,6}$$

$$D_{gw}^r = \mathbb{0}_{3,3}, D_{gv}^r = \mathbb{0}_{3,3}, D_{gu}^r = \mathbb{0}_{3,3}, D_{yw}^r = \mathbb{0}_{6,3}, D_{yu}^r = \mathbb{0}_{6,3} \quad (4.14)$$

e as incertezas foram consideradas sobre os termos encontrados na ma-

triz  $B$  do sistema (4.6):  $\frac{L}{I_x}$ ,  $\frac{L}{I_y}$  e  $\frac{1}{I_z}$ , reunidas em uma matriz diagonal  $\Delta = \text{diag}(\Delta_{\frac{L}{I_x}}, \Delta_{\frac{L}{I_y}}, \Delta_{\frac{1}{I_z}})$ , com:

$$\left| \Delta_{\frac{L}{I_x}} \right| \leq 0.05, \quad \left| \Delta_{\frac{L}{I_y}} \right| \leq 0.05, \quad \left| \Delta_{\frac{1}{I_z}} \right| \leq 0.05$$

A metodologia de síntese do controlador utilizado para a rotação consiste na síntese  $H_\infty$  para sistemas LFT com incertezas de norma limitada, apresentada na Seção 3.3.5.

#### 4.3.2.1 Resultados de síntese

Para esta síntese, foi possível obter um conjunto elipsoidal de controladores com erro multiplicativo de 0.3, além de uma norma  $H_\infty$  de valor menor que 1.3. O controlador utilizado, tomado como o centro do conjunto encontrado, é representado por:

$$K_{\text{rot}} : \begin{cases} \dot{\eta}(t) = A_K^r \eta(t) + B_K^r y(t) \\ u(t) = C_K^r \eta(t) + D_K^r y(t) \end{cases} \quad (4.15)$$

com:

$$\begin{aligned} A_K^r &= \begin{bmatrix} -0.0589 & -0.0006 & -0.0002 & 0.0069 & 0.0001 & 0.0027 \\ -0.0006 & -0.0594 & -0.0003 & 0.0099 & -0.0001 & 0.0051 \\ -0.0002 & -0.0003 & -0.0587 & 0.0038 & 0.0001 & 0.004 \end{bmatrix} \\ B_K^r &= \begin{bmatrix} -0.0001 & 0 & 0 \\ -0.0002 & 0 & 0 \\ -0.0001 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_K^r = \begin{bmatrix} 0.0017 & 0 & 0 \\ -0.284 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6959 & -0.3009 \end{bmatrix} \\ C_K^r &= \begin{bmatrix} -0.0001 & -0.0001 & 0 & -0.7189 & -0.2537 & 0.0464 \\ 0 & -0.0001 & 0 & 0.0999 & 0.0184 & -0.8884 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.16)$$

#### 4.3.3 Controle de posição no plano $x-y$

Como pode ser notado na equação (4.4), o sistema de posição consiste de um sistema não linear. A metodologia proposta neste trabalho para tratar essa não-linearidade é chamada de ganho-escalonado LPV robusto e resiliente (GS-LPV) e consiste em uma alternativa às metodologias clássicas de ganho-escalonado. A principal vantagem desta nova proposta é a de uti-

lizar os conceitos de resiliência no método de síntese do controlador do tipo ganho-escalonado, o que pode torná-lo mais preparado a aceitar incertezas no controlador do que as metodologias clássicas de controle do tipo ganho-escalonado. A idéia principal consiste em dividir um problema de controle não-linear em problemas menores que possam ser tratados com a teoria de controle linear resiliente e robusto, apresentada até o momento.

Para ilustrar esta metodologia de uma forma genérica, é considerado um sistema  $\Sigma$  dependente de um parâmetro  $\psi$ , na forma  $\Sigma(\psi)$ . O problema a ser resolvido, então, é encontrar um controlador parametrizado  $K(\psi)$  tal que a seguinte relação seja satisfeita:

$$\|\Sigma(\psi) \star K(\psi)\|_{\infty} < \gamma, \forall \psi \quad (4.17)$$

sendo que o operador  $\|\bullet\|_{\infty}$  representa a norma infinita de um sistema, e  $\Sigma \star K$ , a realimentação do sistema  $\Sigma$  através do sistema  $K$ . Para dividir o problema, é necessário considerar o espaço de  $\psi$ , e dividir este espaço em intervalos denominados  $I_i$ , formados pelo intervalo entre os ângulos  $\psi_i$  e  $\psi_{i+1}$ .

$$I_i = [\psi_i, \psi_{i+1}] \quad (4.18)$$

Como o parâmetro  $\psi$ , no caso do quadrirotor, é limitado ao intervalo  $[-\pi, \pi]$ , optou-se, empiricamente, por dividir em 24 partes  $I_i$  de 15 graus cada.

#### 4.3.3.1 Metodologia para Controle baseado em ganho-escalonado LPV

Visto que o sistema é parametrizado por  $\psi$ , tem-se que para cada valor de  $\psi$ , o sistema  $\Sigma(\psi)$  assume uma dinâmica diferente. A Figura 9 ilustra a divisão do espaço paramétrico  $\psi$  e a sua relação com o espaço de sistemas  $\Sigma$ .

A metodologia de controle utilizada procura dividir o problema de síntese de  $K(\psi)$  em pequenos intervalos  $K(\psi)$  com  $\psi$  em  $I_i$ , como na equação (4.19).

$$\|\Sigma(\psi) \star K(\psi)\|_{\infty} < \gamma, \forall \psi \in I_i \quad (4.19)$$

Deve ser notado que a diferença da equação (4.19) para a equação (4.17) é que na equação 4.19 o domínio de  $\psi$  é limitado a  $I_i$ . A solução para o problema reduzido é feita utilizando o conceito de elipsóides de controladores, como explicado no Capítulo 3, e o algoritmo de síntese apresentado a seguir. Cada iteração do algoritmo procura fazer a síntese de um elipsóide  $E_i$  de controladores, com centro  $K_i$ , e que inclua o controlador obtido na síntese

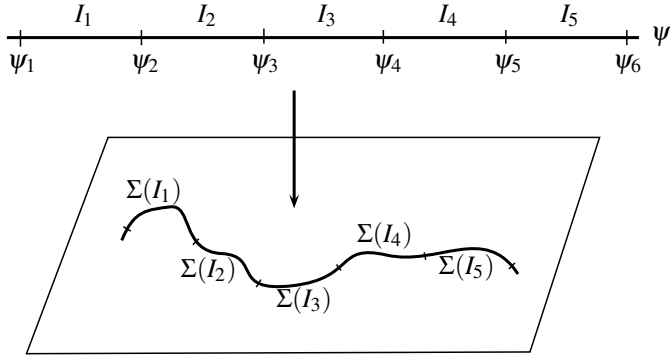


Figura 9: Mapeamento espaço de parâmetros - Espaço de sistemas.

anterior. O algoritmo a seguir explicita esta idéia, sendo que  $P$  pode ser considerada uma propriedade qualquer como estabilidade, mas que no problema do Quadrirotor, consiste na norma  $H_\infty$  do sistema de controle:

1. Iniciar o algoritmo com  $i = 2$  e fazer a síntese de um controlador  $K_1$  capaz de garantir a propriedade  $P$  para o sistema  $\Sigma(\psi_1)$ .
2. Em seguida, fazer a síntese de um conjunto elipsoidal  $E_i$ , no qual todos controladores de  $E_i$  são capazes de garantir a propriedade  $P$  para todo o conjunto de sistemas representado por  $\Sigma(\psi)$ ,  $\forall \psi \in I_i$ , incluindo a condição para que o controlador  $K_{i-1}$  esteja incluído em  $E_i$  (Seção 3.2.4).
3. Se obtiver sucesso na síntese do passo anterior, tomar  $K_i$  como o centro de  $E_i$ , atualizar  $i = i + 1$  e voltar ao passo 2. Se obtiver falha, terminar o algoritmo com falha. Se não houver mais intervalos  $I_i$  no espaço de parâmetros, terminar o algoritmo com sucesso.

O resultado da metodologia de síntese apresentada acima é um conjunto de elipsóides de controladores interconectados, como na Figura 10.

Após a obtenção dos controladores  $K_i$ , com  $i = 1 \dots n$ , é possível elaborar uma lei de controle linear por partes no parâmetro  $\psi$ . Para cada intervalo  $I_i$ , é realizada a seguinte interpolação:

$$K(\psi) = \theta K_{i-1} + (1 - \theta) K_i, \quad \forall \psi \in I_i \quad (4.20)$$

sendo que  $\theta \in [0, 1]$  é uma normalização da posição de  $\psi$  no intervalo  $I_i$ .

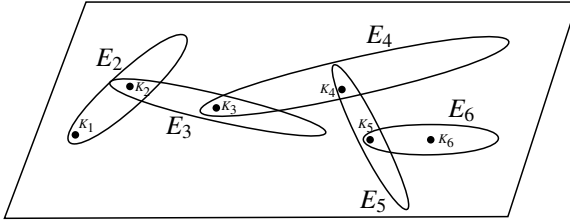


Figura 10: Interconexão de conjuntos elipsoidais de controladores.

Devido às propriedades dos conjuntos elipsoidais de controladores robustos, é possível garantir que, para um intervalo  $I_i$ , a lei de controle em (4.20) assegura que a propriedade em (4.19) é satisfeita. O resultado desta metodologia de síntese é, então, um conjunto de elipsóides de controladores interconectados e uma parametrização  $K(\psi)$  capaz de resolver o problema completo (4.17). Esta conclusão é ilustrada na Figura 11. Deve ser notado que outras interpolações alternativas à proposta em (4.20) também são possíveis.

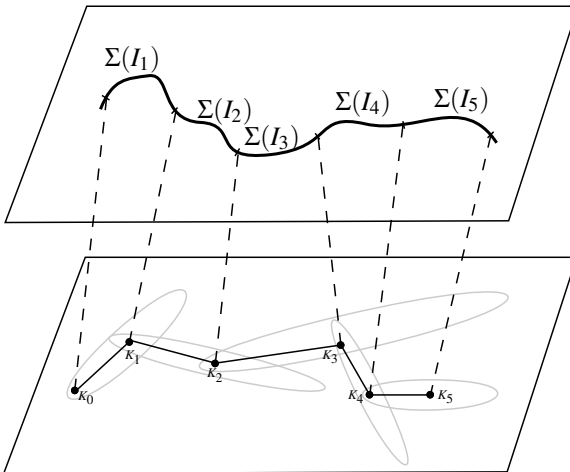


Figura 11: Relação entre o conjunto de controladores e o conjunto de sistemas.

### 4.3.3.2 Mudança de variável para obtenção de um modelo afim

No caso do quadricóptero, para executar a síntese exigida no passo 2 do algoritmo apresentado, será utilizada a metodologia de síntese  $H_\infty$  de controladores elipsoidais aplicados a sistemas politópicos, como na Seção 3.3.6. Para isto, em cada iteração do algoritmo, é preciso escolher os vértices de um sistema politópico que englobe todos os conjunto de sistemas  $\Sigma(\psi)$ ,  $\forall \psi \in I_i$ , representado também por  $\Sigma(I_i)$ , para simplificação de notação.

A escolha do sistema politópico formado pelos vértices  $\Sigma(\psi_i)$  e  $\Sigma(\psi_{i+1})$  parece ser, à primeira vista, a escolha natural. Entretanto este politopo não agrega todos os possíveis valores de  $\Sigma(\psi)$ ,  $\forall \psi \in I_i$ , pois a relação de  $\psi$  com o sistema  $\Sigma(\psi)$  não é afim, como é possível notar na equação (4.9) devido aos termos *sen* e *cos*.

Dada uma transformação afim  $T : A \rightarrow B$ , é possível mostrar que se o conjunto A possui a forma de um politopo com vértices  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , então B é o politopo formado pelos vértices  $T(a_1), T(a_2), \dots, T(a_n)$ . No caso de um sistema  $\Sigma(\bullet)$  afim em seus parâmetros, é possível mostrar que um politopo de parâmetros representado por  $Co(p_1, p_2, \dots, p_n)$  é mapeado pela transformação  $\Sigma(Co(p_1, p_2, \dots, p_n))$  no politopo representado por  $Co(\Sigma(p_1), \Sigma(p_2), \dots, \Sigma(p_n))$ , sendo que  $Co(\bullet)$  representa o envelope convexo de um conjunto.

Como o sistema (4.9) não está na forma afim, é necessário realizar uma mudança da variável utilizada para o ganho-escalonado, de modo que o sistema fique na forma afim nesta nova variável. É possível notar através da equação (4.9) que o sistema é afim se forem tomados como parâmetros de ganho-escalonado os valores  $\cos\psi$  e  $\sin\psi$ . A representação deste mesmo sistema  $\Sigma$ , mas dependente de  $\cos\psi$  e  $\sin\psi$ , será representada por  $\Sigma'$  e esta transformação de variáveis será definida por um mapeamento  $H$ , através da relação:

$$H(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

De posse de uma representação de variáveis que se relacione de forma afim com o modelo LPV, é necessário encontrar um politopo de parâmetros  $A_i$  tal que o politopo de sistemas  $\Sigma'(A_i)$  contenha todo o conjunto de sistemas representado por  $\Sigma(I_i)$ . Como pode ser visto na Figura 12, a imagem  $H(I_i)$  não possui forma politópica, e portanto é necessário encontrar um politopo  $A_i$  capaz de cobrir toda imagem  $H(I_i)$ . Um exemplo de método de escolha de  $A_i$  é ilustrado na Figura 12.

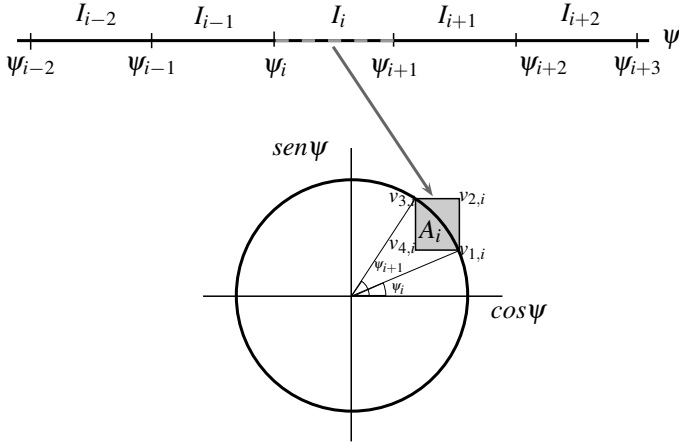


Figura 12: Mudança de variáveis - Mapeamento.

Pela Figura 12, é possível notar que o polítopo  $A_i = Co(v_{1,i}, v_{2,i}, v_{3,i}, v_{4,i})$  é capaz de cobrir toda a imagem  $H(I_i)$ . Define-se, então,  $A_i$  por:

$$A_i = Co(v_{1,i}, v_{2,i}, v_{3,i}, v_{4,i}) \quad (4.22)$$

com:

$$\begin{aligned} v_{1,i} &= (\cos \psi_i, \sin \psi_i), \quad v_{2,i} = (\cos \psi_i, \sin \psi_{i+1}) \\ v_{3,i} &= (\cos \psi_{i+1}, \sin \psi_{i+1}), \quad v_{4,i} = (\cos \psi_{i+1}, \sin \psi_i) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nota-se que o polítopo formado pelos parâmetros  $v_{1,i}$ ,  $v_{2,i}$ ,  $v_{3,i}$  e  $v_{4,i}$  é capaz de englobar todos os valores de  $[\cos \psi, \sin \psi]^T$  com  $\psi \in I_i$ . Portanto, se for encontrado um controlador, ou um conjunto de controladores, capaz de garantir uma propriedade para o sistema politópico formado por  $Co(\Sigma'(v_{1,i}), \Sigma'(v_{2,i}), \Sigma'(v_{3,i}), \Sigma'(v_{4,i}))$ , então o controlador também será capaz de garantir a propriedade para o conjunto de sistemas  $\Sigma(I_i)$ . Este fato é válido pois a seguinte relação é válida:

$$\Sigma(I_i) \subset \Sigma'(Co(v_{1,i}, v_{2,i}, v_{3,i}, v_{4,i})) \equiv Co(\Sigma'(v_{1,i}), \Sigma'(v_{2,i}), \Sigma'(v_{3,i}), \Sigma'(v_{4,i})) \quad (4.24)$$



### 4.3.3.3 Síntese do controlador

Inicialmente, seguindo a metodologia de síntese ganho-escalonado apresentada em 4.3.3.1, os possíveis valores do parâmetro variante  $\psi$ , limitado ao intervalo  $[-180, 180]$ , são divididos em 24 subintervalos de 15 graus cada, representados por  $I_i$ .

Para a síntese de cada elipsóide matricial  $E_i$  é necessário, primeiramente, construir um sistema politópico envolvendo o conjunto de sistemas representado por  $\Sigma_{xy}(I_i)$ . Este politopo, representado por  $\Sigma'_{xy,i}(\xi)$  e satisfazendo  $\Sigma'_{xy,i}(\xi) \supset \Sigma_{xy}(I_i)$  é dado por:

$$\Sigma'_{xy,i}(\xi) : \begin{cases} \dot{x}_{xy}(t) = A^{xy}x_{xy}(t) + B_v^{xy}v_{xy}(t) + B_{u,i}^{xy}(\xi)u_{xy}(t) \\ g_{xy}(t) = C_g^{xy}x_{xy}(t) + D_{gv}^{xy}v_{xy}(t) + D_{gu}^{xy}u_{xy}(t) \\ y_{xy}(t) = C_y^{xy}x_{xy}(t) + D_{yv}^{xy}v_{xy}(t) + D_{yu}^{xy}u_{xy}(t) \end{cases} \quad (4.25)$$

Nota-se que as incertezas estão todas concentradas nos conjuntos de matrizes  $B_{u,i}^{xy}(\xi)$ . O sistema incerto acima é escrito na forma politópica, através da seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} A^{xy} & B_v^{xy} & B_{u,i}^{xy}(\xi) \\ C_g^{xy} & D_{gv}^{xy} & D_{gu}^{xy} \\ C_y^{xy} & D_{yv}^{xy} & D_{yu}^{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{xy} & B_v^{xy} & \sum_{j=1}^4 \xi_j B_{u,i}^{xy,j} \\ C_g^{xy} & D_{gv}^{xy} & D_{gu}^{xy} \\ C_y^{xy} & D_{yv}^{xy} & D_{yu}^{xy} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

no qual o índice 4 do somatório é referente à mudança de variável proposta em 4.3.3.2 e com  $\xi$  pertencendo ao seguinte simplex:

$$\Xi = \left\{ \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) : \sum_{i=1}^4 \xi_i = 1, \xi_i \geq 0 \right\} \quad (4.27)$$

As matrizes da dinâmica do sistema utilizadas para a síntese de cada elipsóide matricial  $E_i$  são:

$$A^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{yv}^{xy} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_g^{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$C_y^{xy} = \mathbb{1}_{4 \times 4}, B_v^{xy} = \mathbb{0}_{4,2}, D_{gv}^{xy} = \mathbb{0}_{2,2}, D_{gu}^{xy} = \mathbb{0}_{2,2}, D_{yu}^{xy} = \mathbb{0}_{4,2}$$

Os vértices do polítopo que formam o conjunto de matrizes  $B_{u,i}^{xy}(\xi) = \sum_{j=1}^4 \xi_j B_{u,i}^{xy,j}$  são construídos de acordo com a mudança de variável proposta em 4.3.3.2, da seguinte maneira:

$$B_{u,i}^{xy,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \text{sen}\psi_{i-1} & \text{cos}\psi_{i-1} \\ 0 & 0 \\ -\text{cos}\psi_{i-1} & \text{sen}\psi_{i-1} \end{bmatrix}, B_{u,i}^{xy,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \text{sen}\psi_{i-1} & \text{cos}\psi_{i+1} \\ 0 & 0 \\ -\text{cos}\psi_{i+1} & \text{sen}\psi_{i-1} \end{bmatrix}$$

$$B_{u,i}^{xy,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \text{sen}\psi_{i+1} & \text{cos}\psi_{i-1} \\ 0 & 0 \\ -\text{cos}\psi_{i-1} & \text{sen}\psi_{i+1} \end{bmatrix}, B_{u,i}^{xy,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \text{sen}\psi_{i+1} & \text{cos}\psi_{i+1} \\ 0 & 0 \\ -\text{cos}\psi_{i+1} & \text{sen}\psi_{i+1} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Os valores numéricos  $B_{u,i}^{xy,j}$  são fornecidos através das matrizes B dos sistemas  $\Sigma_{xy}(\psi_i)$ , representadas pela notação  $B_{u,i}^{xy}$ . Estes valores são fornecidos no apêndice B deste documento.

#### 4.3.3.4 Resultados de síntese

Como mencionado na condição (4.20), a lei de controle consiste em uma interpolação de controladores extraídos dos centros dos elipsóides  $E_i$  projetados. Cada elipsóide foi projetado para garantir um valor de norma  $H_\infty$  de 1,4, além de ser utilizada uma estrutura dinâmica de segunda ordem.

Cada controlador  $K_i^{xy}$  projetado possui a seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{xy}(t) = A_{K,i}^{xy}\eta_{xy}(t) + B_{K,i}^{xy}y_{xy}(t) \\ u_{xy}(t) = C_{K,i}^{xy}\eta_{xy}(t) + D_{K,i}^{xy}y_{xy}(t) \end{cases} \quad (4.30)$$

podendo ser representado através de apenas uma matriz, por motivo de simplicidade, como:

$$K_i^{xy} = \begin{bmatrix} A_{K,i}^{xy} & B_{K,i}^{xy} \\ C_{K,i}^{xy} & D_{K,i}^{xy} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Os controladores  $K_i^{xy}$  resultantes desta síntese são apresentados no apêndice B deste documento.

#### 4.3.4 Controle de altitude

Como visto na Seção 4.2.4, o modelo utilizado para o sistema de altura consiste em uma linearização do sistema não linear (4.10) em torno de  $\phi, \theta = 0$  e  $U_1 = mg$ . Para o controle de altitude foi optado um controlador  $H_\infty$  resiliente, como apresentado na Seção 3.3.4. A representação utilizada para efetuar essa síntese é dada por:

$$\Sigma_h : \begin{cases} \dot{x}_h(t) = A^h x_h(t) + B_v^h v_h(t) + B_u^h u_h(t) \\ g_h(t) = C_g^h x_h(t) + D_{gv}^h v_h(t) + D_{gu}^h u_h(t) \\ y_h(t) = C_y^h x_h(t) + D_{yv}^h v_h(t) + D_{yu}^h u_h(t) \end{cases} \quad (4.32)$$

Numericamente, as matrizes da dinâmica do sistema assumem o seguinte valor:

$$A^h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_u^h = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, D_{yv}^h = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_g^h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$C_y^h = \mathbb{1}_{2 \times 2}, B_v^h = \mathbb{0}_{2,1}, D_{gv}^h = \mathbb{0}_{1,1}, D_{gu}^h = \mathbb{0}_{1,1}, D_{yu}^h = \mathbb{0}_{2,1}$$

##### 4.3.4.1 Resultados de síntese

Através desta síntese foi possível projetar um conjunto elipsoidal de controladores com erro multiplicativo de 0.3, além de norma  $H_\infty$  de 1.3. O controlador utilizado, tomado como o centro do conjunto encontrado, é representado por:

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = A_K^h \eta(t) + B_K^h y(t) \\ u(t) = C_K^h \eta(t) + D_K^h y(t) \end{cases} \quad (4.34)$$

sendo que as matrizes da dinâmica do controlador assumem os seguintes valores:

$$A_K^h = [-0.1624], B_K^h = \begin{bmatrix} 0.1955 & -0.0247 \end{bmatrix}, C_K^h = [-0.0208] \quad (4.35)$$

$$D_K^h = \begin{bmatrix} 0.0948 & 0.3061 \end{bmatrix}$$

#### 4.4 Controlador Backstepping

Para efeitos comparativos, um controlador Backstepping é projetado e simulado no sistema Quadrirotor em questão. Esta técnica de controle não linear é aplicada com sucesso ao caso do quadrirotor em diversas referências,

como em (BOUABDALLAH; SIEGWART, 2005). A estrutura de controle para o controlador Backstepping continua sendo a estrutura em cascata, e a metodologia utilizada para efetuar a síntese do controlador Backstepping é similar à metodologia encontrada na referência citada. Portanto, esta metodologia será apresentada de forma sucinta.

As calibrações do controlador Backstepping foram feitas levando em conta inicialmente que a malha interna relativa ao sistema de rotação deva ser mais rápida que a malha do sistema de posicionamento, e em segundo lugar que o sinal de controle não atinja valores excessivos, o que em aspectos práticos implica na saturação dos sinais de controle. Os parâmetros foram escolhidos empiricamente de forma que os valores do sinal de controle não fossem desproporcionais aos valores dos sinais de controle obtidos no controle utilizando metodologia de controle resiliente e robusta.

#### 4.4.1 Controle de rotação

A síntese de um controlador de rotação, utilizando a metodologia Backstepping é feita em passos, sendo que estes passos devem ser aplicados a cada uma das equações não-lineares em (4.3). Inicialmente, para estabilizar a dinâmica do ângulo  $\phi$ , toma-se sua equação:

$$\ddot{\phi} = \left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right)\dot{\theta}\psi - \frac{Jr}{I_x}\dot{\theta}\Omega + \frac{L}{I_x}U_2 \quad (4.36)$$

É definido, então, um erro  $e_\phi$  entre o valor desejado de  $\phi$ , representado por  $\phi_d$  e o seu valor atual, como na seguinte equação:

$$e_\phi = \phi_d - \phi \quad (4.37)$$

As dinâmicas deste erro são, então, definidas, o que permitirá a manipulação do comportamento do sistema de controle. Estas dinâmicas são representadas por:

$$\begin{aligned} \dot{e}_\phi &= \dot{\phi}_d - \dot{\phi} \\ \ddot{e}_\phi &= \ddot{\phi}_d - \ddot{\phi} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Uma variável virtual, que procura imitar o comportamento de  $\dot{\phi}$ , também é definida da seguinte forma:

$$\dot{\phi}_v = \dot{\phi}_d + \alpha_\phi e_\phi \quad (4.39)$$

A qual possui um erro virtual dado por:

$$e_{\phi v} = \dot{\phi}_v - \dot{\phi} \quad (4.40)$$

Desta maneira, pode-se escrever a dinâmica do erro  $e_\phi$  em função, apenas, do erro virtual:

$$\dot{e}_\phi = -\alpha_\phi e_\phi + e_{\phi v} \quad (4.41)$$

Em seguida, é escrita a dinâmica do erro virtual:

$$\dot{e}_{\phi v} = \ddot{\phi}_d + \alpha_\phi \dot{e}_\phi - \ddot{\phi} \quad (4.42)$$

Expandindo esta expressão do erro, chega-se ao seguinte resultado:

$$\dot{e}_{\phi v} = \ddot{\phi}_d - \alpha_\phi^2 e_\phi + \alpha_\phi e_{\phi v} - \left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{Jr}{I_x} \dot{\theta} \dot{\Omega} - \frac{L}{I_x} U_2 \quad (4.43)$$

Deseja-se para a dinâmica do erro virtual uma expressão dependente apenas do próprio erro virtual e do erro  $e_\phi$  tal como:

$$\dot{e}_{\phi v} = -\beta_\phi e_{\phi v} - e_\phi \quad (4.44)$$

Verifica-se que as expressões das dinâmicas de  $e_\phi$  e  $e_{\phi v}$ , dadas em (4.41) e (4.44) respectivamente, são interdependentes. Este fato permite reescrever as dinâmicas dos erros de forma a regular o comportamento dinâmico destes. Esta forma é representada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_\phi \\ \dot{e}_{\phi v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_\phi & 1 \\ -1 & -\beta_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\phi \\ e_{\phi v} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

A lei de controle que resulta na expressão acima para o erro virtual é:

$$U_2 = \frac{I_x}{L} \left( \ddot{\phi}_d + (1 - \alpha_\phi^2) e_\phi + (\alpha_\phi + \beta_\phi) e_{\phi v} - \left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{Jr}{I_x} \dot{\theta} \dot{\Omega} \right) \quad (4.46)$$

Deve ser notado que a lei de controle é função dos parâmetros do modelo do sistema  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$ , além dos parâmetros  $\alpha_\phi$  e  $\beta_\phi$ . Estes valores são tomados como os valores nominais do modelo utilizado para a síntese do controlador, e não são atualizados caso estes valores mudem com o tempo.

Em resumo, é possível ajustar as velocidades desejadas para as taxas

de erros  $\dot{e}_\phi$  e  $\dot{e}_{\phi_v}$  via a regulação dos parâmetros  $\alpha_\phi$  e  $\beta_\phi$ . Estes parâmetros são, então, incorporados pela lei de controle, que por sua vez imprime este comportamento desejado ao sistema de controle.

Da mesma maneira, finalizando as leis de controle para o sistema de rotação, são obtidas as seguintes expressões:

$$U_3 = \frac{I_y}{L} \left( \ddot{\theta}_d + (1 - \alpha_\theta^2)e_\theta + (\alpha_\theta + \beta_\theta)e_{\theta_v} - \left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right)\dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{Jr}{I_y}\dot{\phi}\dot{\Omega} \right) \quad (4.47)$$

$$U_4 = I_z \left( \ddot{\psi}_d + (1 - \alpha_\psi^2)e_\psi + (\alpha_\psi + \beta_\psi)e_{\psi_v} - \left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right)\dot{\phi}\dot{\theta} \right) \quad (4.48)$$

A Tabela 3 expõe as escolhas dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  utilizados para simulação, e os pólos obtidos para a dinâmica dos erros das variáveis em questão, como na expressão (4.45):

Tabela 3: Escolha dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  para o sistema de rotação.

Parâmetros	Valores	Pólos
$\alpha_\phi$ e $\beta_\phi$	1.4 e 3.6	-2 e -3
$\alpha_\theta$ e $\beta_\theta$	1.4 e 3.6	-2 e -3
$\alpha_\psi$ e $\beta_\psi$	1.4 e 3.6	-2 e -3

#### 4.4.2 Controle de posicionamento

Assim como no caso da estrutura de controle representada pela Figura 8, para o sistema de posicionamento do quadrirotor com o controlador do tipo Backstepping o sinal de controle  $U_1$  será reservado para controlar a altitude do quadrirotor, e os ângulos  $\phi$  e  $\theta$  serão os responsáveis por controlar o posicionamento no plano  $x - y$ .

A lei de controle para o sistema de controle de altura é projetada utilizando a mesma metodologia de síntese de controle do ângulo  $\phi$ . A expressão para  $U_1$ , portanto, torna-se:

$$U_1 = -\frac{m}{\cos \phi \cos \theta} \left( \ddot{z}_d + (1 - \alpha_z^2)e_z + (\alpha_z + \beta_z)e_{z_v} - g \right) \quad (4.49)$$

Como não sobraram variáveis de controle para controlar o posicionamento do Quadrirotor no plano  $x - y$ , os ângulos  $\phi$  e  $\theta$  são utilizados para esta tarefa pelo controlador de posição. Após calculados os valores desejados de  $\phi_r$  e  $\theta_r$ , estes valores são passados ao sistema de controle de atitude, e espera-se que este seja rápido o suficiente para reproduzir fielmente os valores desejados nos ângulos  $\phi$  e  $\theta$ , que por sua vez, servem de entrada de controle para o sistema de posicionamento.

A metodologia utilizada para este sistema de controle consiste em utilizar variáveis auxiliares de controle  $u_x$  e  $u_y$ , tais como:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{U_1}{m} u_x \\ \ddot{y} = \frac{U_1}{m} u_y \end{cases} \quad (4.50)$$

com  $u_x = (\cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi)$  e  $u_y = (\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi)$ . Tendo em mãos os valores desejáveis para  $u_x$  e  $u_y$ , e o valor desejado para o ângulo  $\psi$ , é possível calcular, então, os valores que serão desejados para os ângulos  $\phi$  e  $\theta$ .

As leis de controle para  $u_x$  e  $u_y$  são calculadas de acordo com a mesma metodologia Backstepping utilizada para as outras variáveis de controle, e são expressas por:

$$u_x = -\frac{m}{U_1} (\ddot{x}_d + (1 - \alpha_x^2)e_x + (\alpha_x + \beta_x)e_{xv}) \quad (4.51)$$

e

$$u_y = -\frac{m}{U_1} (\ddot{y}_d + (1 - \alpha_y^2)e_y + (\alpha_y + \beta_y)e_{yv}) \quad (4.52)$$

A Tabela 4 expõe as escolhas dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  e os pólos obtidos para a dinâmica dos erros.

Tabela 4: Escolha dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  para o sistema de posicionamento.

Parâmetros	Valores	Pólos
$\alpha_z$ e $\beta_z$	0.38 e 2.6	-1 e -2
$\alpha_x$ e $\beta_x$	0.38 e 2.6	-1 e -2
$\alpha_y$ e $\beta_y$	0.38 e 2.6	-1 e -2

## 4.5 Estudo comparativo

Nesta seção é feito um estudo comparativo entre a proposta de controle resiliente e robusta abordada na Seção 4.3, e o controlador Backstepping, encontrado na Seção 4.4.

Inicialmente, na Seção 4.5.1, será avaliada a robustez de ambos controladores, o que quer dizer que serão utilizados os controladores projetados para controlar o sistema quadrirotor, com algumas incertezas incluídas nos parâmetros do sistema. Os parâmetros incertos considerados são as inércias nos eixos,  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$ . Tais variações podem estar relacionadas com erros na estimação dos parâmetros, mudanças estruturais no quadrirotor como inclusão de alguma carga, entre outras incertezas.

Em seguida, na Seção 4.5.2, será analisada a resiliência de ambos controladores. Estas incertezas geralmente estão associadas com incertezas ligadas à implementação dos controladores, como arredondamentos numéricos devidos a limitações de processadores ou incertezas de elementos analógicos como capacitores, resistores, etc. Estas mudanças na estrutura do controlador resultam em um sinal de controle fornecido pelo controlador diferente do valor oferecido se a lei de controle fosse implementada de forma exata. Devido a diferenças nas estruturas dos controladores Resiliente e Robusto, e Backstepping (uma estrutura é linear e a outra não-linear) e por objetivos comparativos, foi decidido incluir erros diretamente nos sinais de controle gerados por cada controlador.

A comparação final é feita na Seção 4.5.3, e inclui tanto erros paramétricos nas inércias como nos sinais de controle.

### 4.5.1 Robustez

A primeira comparação feita leva em conta apenas incertezas nos parâmetros do quadrirotor. Para isto foram tomadas incertezas nos parâmetros  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$ . Para a simulação do comportamento do quadrirotor, foram tomados 10 valores aleatórios para cada parâmetro incerto. Os valores utilizados para simulação foram extraídos de forma aleatória, utilizando uma distribuição probabilística uniforme, dos intervalos encontrados na Tabela 5.

A Figura 13 mostra as trajetórias no espaço  $\mathbb{R}^3$ , obtidas via simulação.



Tabela 5: Intervalos de incerteza dos parâmetros do quadricóptero - análise de robustez

Parâmetro	Intervalo de erro
$I_x$	$I_x + [-0.4, 0.4]I_x$
$I_y$	$I_y + [-0.4, 0.4]I_y$
$I_z$	$I_z + [-0.4, 0.4]I_z$

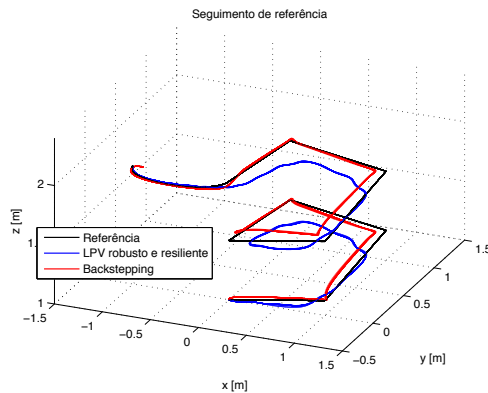


Figura 13: Seguimento de referência - Robustez.

Como é possível ver na Figura 13, ambas trajetórias dos controladores resiliente e robusto e do Backstepping conseguiram seguir a trajetória referenciada, mesmo na presença dos erros. É possível notar que a trajetória do controlador resiliente é mais suave se comparada com a do Backstepping, que possui mudanças bruscas da direção. Além disso, podemos notar uma baixa dispersão de ambos os controladores em relação às incertezas do modelo. O posicionamento do quadricóptero com ambos controladores ao longo do tempo pode ser observado na Figura 14.

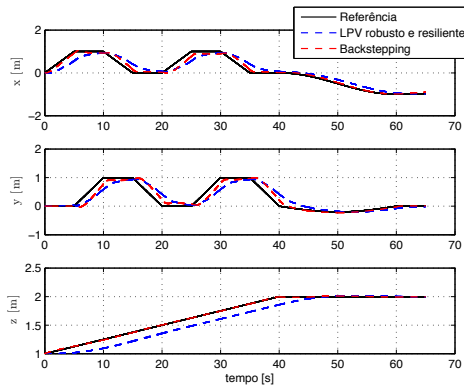


Figura 14: Posições  $(x, y, z)$  - Robustez.

Na Figura 14, pode-se ver que ambos os controladores conseguiram aproximar o comportamento das posições do quadricóptero ao longo do tempo às posições de referência. Verifica-se uma baixa dispersão de ambas as trajetórias dos controladores quanto às variações paramétricas propostas. No caso do posicionamento da altura, tem-se que o controlador backstepping projetado se aproxima com mais precisão à referência de altura, e portanto, segue de maneira mais eficiente à rampa referenciada para a altura. O comportamento do erro ao longo do tempo é evidenciado na Figura 15, a seguir.

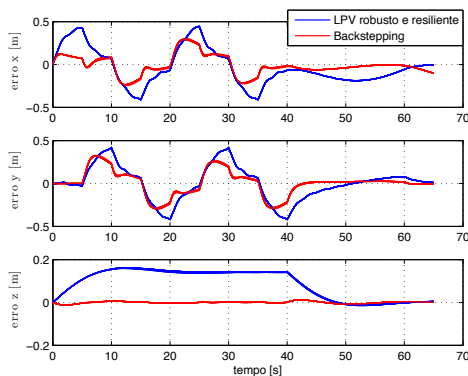


Figura 15: Erro de posição  $(x, y, z)$  - Robustez.

Com a medida do erro na Figura 15 percebe-se que em muitos momentos os erros da posição  $x$  e  $y$  se assemelham, entretanto o controlador Backstepping projetado possui erro, na maior parte do tempo, pouco inferior ao erro do controlador resiliente. O erro no eixo  $z$ , entretanto, é superior, mostrando que o Backstepping teve um desempenho melhor no seguimento da rampa na altura. É possível notar que a variabilidade (dispersão) do controlador Backstepping é levemente maior do que a do resiliente.

As figuras a seguir representam os sinais de controles de ambos controladores, linear e Backstepping.

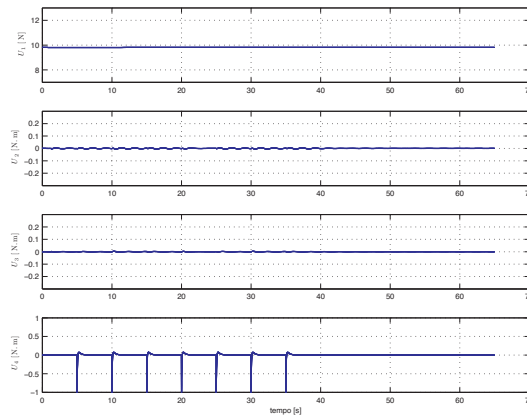


Figura 16: Sinal de controle - Controlador LPV - Robustez.

Como é possível ver na Figura 16, os sinais de controle do controlador linear possuem variações suaves, enquanto que os sinais de controle do Backstepping apresentam variações bruscas, como na Figura 17. Em ambos casos nota-se a pequena variabilidade nos sinais de controle de ambos, devido às incertezas paramétricas.

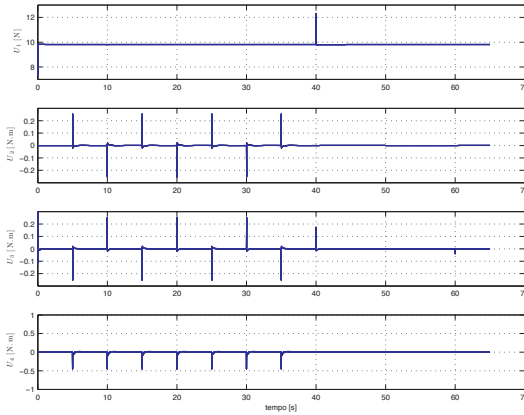


Figura 17: Sinal de controle - Controlador Backstepping - Robustez.

#### 4.5.2 Resiliência

Para a segunda análise serão consideradas incertezas inerentes ao controlador e serão desconsideradas as variações paramétricas no sistema, assumindo seu valor nominal. A incerteza utilizada para esta análise consiste em variações na saída dos sinais de cada controlador. Os valores utilizados para simulação encontram-se nos intervalos dados na Tabela 6.

Tabela 6: Incertezas nos sinais de controle e ângulos de controle - análise de resiliência.

Var. Controle	Intervalo de erro
$U_1$	$U_1 + [-0.05, 0.05]U_1$
$U_2$	$U_2 + [-0.1, 0.1]U_2$
$U_3$	$U_3 + [-0.1, 0.1]U_3$
$U_4$	$U_4 + [-0.1, 0.1]U_4$
$\phi_r$	$\phi_r + [-0.25, 0.25]\phi_r$
$\theta_r$	$\theta_r + [-0.25, 0.25]\theta_r$

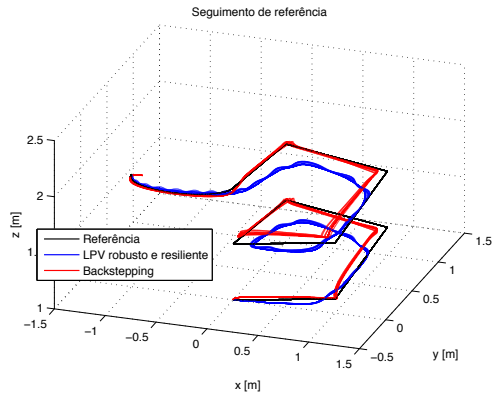


Figura 18: Seguimento de referência - Resiliência.

É possível notar pela Figura 18 que ambos controladores foram capazes de seguir a trajetória referenciada, mesmo possuindo erros na lei de controle. O posicionamento do quadrirotor com ambos controladores ao longo do tempo pode ser observado na Figura 19, na qual nota-se uma pequena variabilidade nas respostas do sistema com ambos controladores.

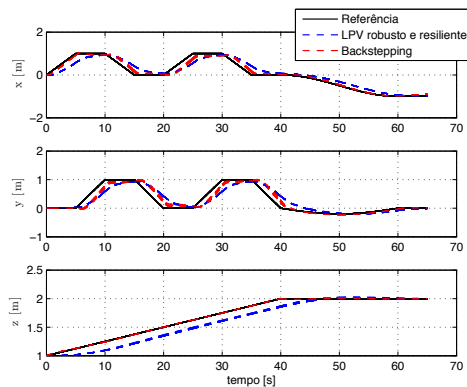


Figura 19: Posições (x,y,z) - Resiliência.

Pela Figura 19, nota-se que ambos os controladores aproximaram o comportamento das posições do quadrirotor ao longo do tempo às posições

de referência, independente dos erros introduzidos nos sinais de controle. O comportamento do erro ao longo do tempo é evidenciado na Figura 20.

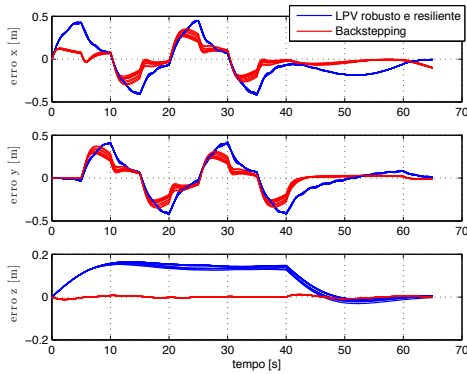


Figura 20: Erro de posição (x,y,z) - Resiliência.

Com a medida do erro mostrada na Figura 20, nota-se que em muitos momentos o erro do controlador Backstepping projetado é menor do que o do controlador resiliente. Entretanto, a variabilidade do sistema de controle com o controlador Backstepping é maior, mostrando que incertezas na lei de controle podem afastar o sistema de controle do comportamento inicialmente projetado.

As figuras a seguir representam os sinais de controles de ambos controladores.

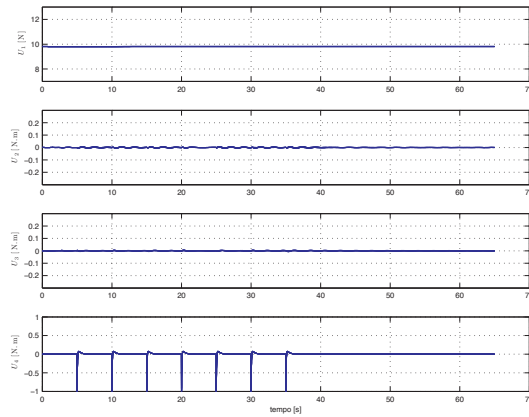


Figura 21: Sinal de controle - Controlador LPV - Resiliência.

Nota-se na Figura 21 que os sinais de controle do controlador Resiliente possuem maior variação, se comparados com os sinais de controle do controlador Backstepping da Figura 22.

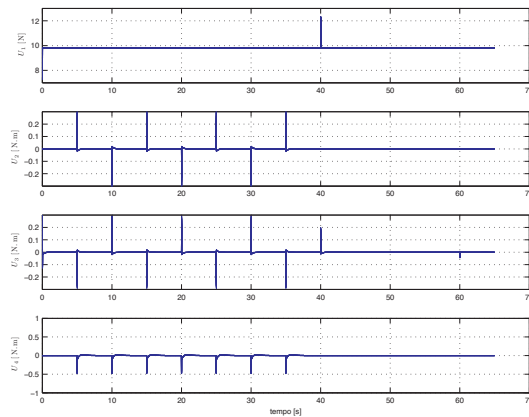


Figura 22: Sinal de controle - Controlador Backstepping - Resiliência.

### 4.5.3 Robustez e resiliência

A terceira análise engloba tanto o teste de robustez quanto o teste de resiliência. Ou seja, levam-se em conta as variações paramétricas do sistema

e também são assumidas incertezas no sinal de controle. Os valores utilizados para simulação se encontram nos intervalos encontrados nas tabelas a seguir.

Tabela 7: Intervalos de incerteza dos parâmetros do quadricóptero - análise de robustez e resiliência.

Parâmetro	Intervalo de erro
$I_x$	$I_x + [-0.2, 0.2]I_x$
$I_y$	$I_y + [-0.2, 0.2]I_y$
$I_z$	$I_z + [-0.2, 0.2]I_z$

Tabela 8: Incertezas nos sinais de controle e ângulos de controle - análise de robustez e resiliência.

Var. Controle	Intervalo de erro
$U_1$	$U_1 + [-0.05, 0.05]U_1$
$U_2$	$U_2 + [-0.1, 0.1]U_2$
$U_3$	$U_3 + [-0.1, 0.1]U_3$
$U_4$	$U_4 + [-0.1, 0.1]U_4$
$\phi_r$	$\phi_r + [-0.25, 0.25]\phi_r$
$\theta_r$	$\theta_r + [-0.25, 0.25]\theta_r$

A Figura 23 apresenta as trajetórias no espaço  $\mathbb{R}^3$ , obtidas via simulação.



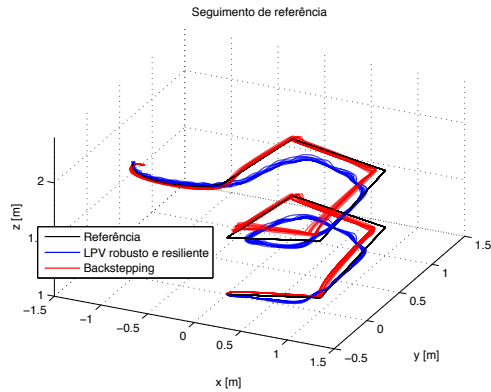


Figura 23: Seguimento de referência - Robustez e resiliência.

Como pode ser visto na Figura 23, ambos controladores foram capazes de seguir a trajetória referenciada, mesmo possuindo erros na lei de controle e nos parâmetros do sistema. O posicionamento do quadrirotor com ambos controladores ao longo do tempo pode ser observado na Figura 24.

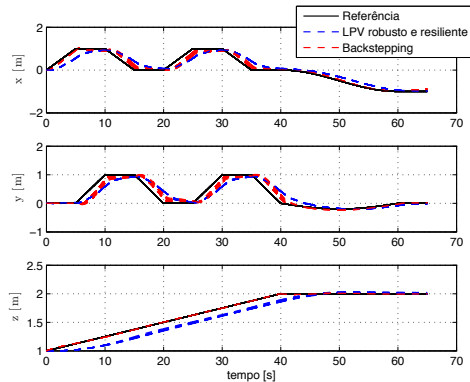


Figura 24: Posições (x,y,z) - Robustez e resiliência.

Pela Figura 24, nota-se que ambos os controladores conseguiram aproximar o comportamento das posições do quadrirotor ao longo do tempo às posições de referência, independente dos erros introduzidos nos sinais de

controle e nos parâmetros do sistema. O comportamento do erro ao longo do tempo é evidenciado na Figura 25.

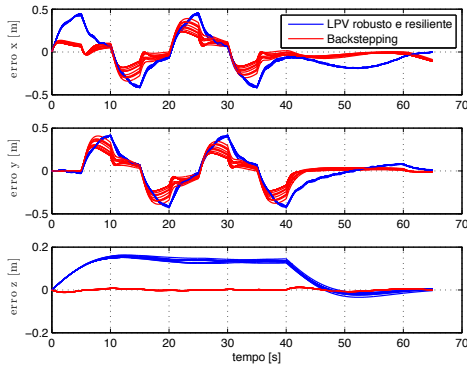


Figura 25: Erro de posição (x,y,z) - Robustez e resiliência.

Com a medida do erro dada na Figura 25, percebe-se que a variabilidade do controlador Backstepping é maior do que a do controlador Resiliente, mostrando que variações na lei de controle afastam o controlador do comportamento projetado para o sistema nominal.

As figuras a seguir representam os sinais de controles de ambos controladores, Resiliente e Backstepping.

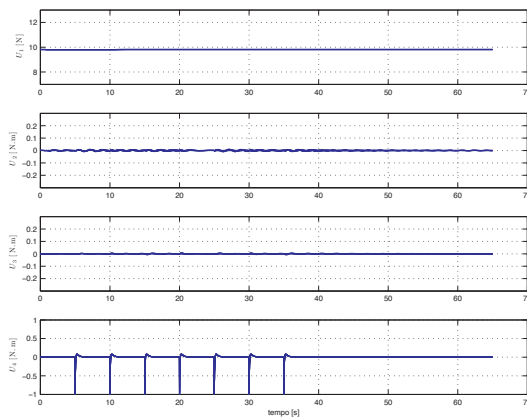


Figura 26: Sinal de controle - Controlador LPV - Robustez e resiliência.

Nota-se na Figura 26 que os sinais de controle do controlador Resiliente possui variações suaves, se comparados com o sinal de controle para o controlador Backstepping da Figura 27.

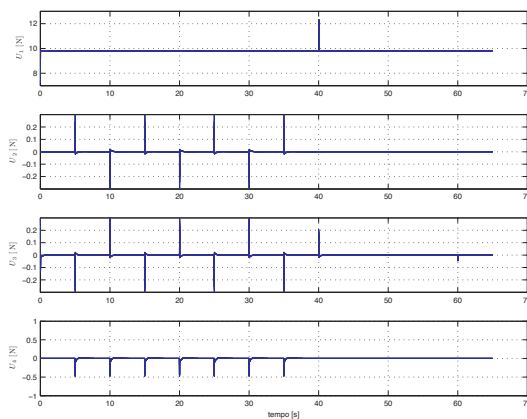


Figura 27: Sinal de controle - Controlador Backstepping - Robustez e resiliência.

## 4.6 Conclusão

Neste capítulo foi apresentada uma metodologia de controle para quadrirotores, baseada em uma estrutura de controle em cascata e com algumas garantias de resiliência e robustez. Para o sistema de controle de rotação do quadrirotor optou-se por um controlador  $H_\infty$  resiliente e com robustez via um sistema LFT. Para o sistema de controle de posicionamento no plano  $x - y$  foi proposta uma nova metodologia de controle baseado em ganho-escalonado LPV, baseada nos conceitos de síntese de conjuntos elipsoidais, o que resulta na maior resiliência deste controlador em relação a métodos clássicos de controle baseado em ganho-escalonado. Para o sistema de controle de altura optou-se por um controlador  $H_\infty$  resiliente.

Os resultados comparativos entre a metodologia de controle desenvolvida e a metodologia de controle Backstepping, muito utilizada atualmente no domínio de Quadrirotores, demonstraram que a metodologia desenvolvida garante que o comportamento do sistema em malha fechada frente a incertezas, tanto do controlador quanto do sistema, assemelha-se mais ao comportamento nominal desejado do que o da metodologia Backstepping. Em outras palavras, a metodologia de controle desenvolvida está mais preparada para tratar incertezas no controlador e no sistema.

A metodologia de controle Resiliente proposta mostra-se ideal para o controle embarcado, por trabalhar com controladores lineares e não precisar utilizar funções não-lineares com elevado tempo de processamento, geralmente encontradas em técnicas não-lineares de controle. Além disso, a resiliência utilizada no projeto dos controladores auxilia no quesito de garantir desempenho frente a incertezas inerentes ao controlador como incertezas devido a implementações eletrônicas, variações paramétricas em componentes elétricos e também nas transições devidas à interpolação dos controladores, enquanto que a robustez auxilia no quesito de garantir o desempenho projetado frente a erros de modelagem assim como variações paramétricas do sistema.

## 5 CONCLUSÃO

Este trabalho abordou as metodologias de síntese de controladores resilientes e robustos, bem sua aplicabilidade a problemas de controle de vôo. Pode ser visto, de maneira geral, que é possível tratar a questão da resiliência dos controladores projetados através do conceito de síntese de conjuntos elipsoidais de controladores. Além disso, nota-se, através das problemáticas tratadas, que sistemas incertos do tipo politópico e LFT possuem grande aplicabilidade prática.

A base deste trabalho, que segue o conceito de Separação Topológica, foi apresentada no Capítulo 2, no qual foi vista que uma grande variedade de resultados teóricos, relativos ao controle robusto, pode ser derivada deste conceito. Nesse capítulo, também foi apresentado o Teorema 2.2, o qual provou ser uma ferramenta com várias aplicações ao controle robusto, como evidenciado ao longo de todo o documento.

No Capítulo 3, foi discutida a síntese de conjuntos elipsoidais de controladores. Entre elas, foram apresentadas metodologias para a síntese estabilizante, robusta com sistemas politópicos, robusta com sistemas LFT,  $H_\infty$ , além de combinações destes resultados. As condições derivadas para estas sínteses tiveram sucesso nas aplicações práticas deste trabalho, provando serem tratáveis numericamente em aplicações encontradas pela indústria.

Ainda no Capítulo 3, foi apresentado um estudo feito sobre controladores variantes no tempo e discutidas maneiras de diminuir o conservadorismo dos conjuntos elipsoidais. As condições para esta síntese levam em conta as taxas de variação esperadas para controladores variantes no tempo e, portanto, podem ser importantes para a síntese de controladores para sistemas com ordens grandes ou complexos. Esta metodologia de síntese apresentou sucesso em muitos sistemas relacionados a problemas de controle de vôo contidos na biblioteca COMPlib de sistemas LTI (LEIBFRITZ, 2003).

A síntese de controladores resilientes e robustos foi aplicada ao controle do Quadrirotor, sendo relatada no Capítulo 4. O projeto do controlador foi feito utilizando um controle do tipo Cascata, no qual foram utilizados: um controlador resiliente e robusto via sistemas LFT para o sistema de rotação, um controle do tipo ganho-escalonado LPV para o sistema de posicionamento no plano  $x - y$  e um controlador resiliente para o sistema de controle de altura. Um estudo comparativo foi feito entre a metodologia resiliente e robusta apresentada e um controlador do tipo Backstepping. Através deste estudo, notou-se que o controlador resiliente apresentou menor variabilidade, tanto na presença de incertezas nos parâmetros inerciais do sistema, quanto

na presença de incertezas nos sinais de controle. Estes resultados obtidos via simulação, relativos ao comportamento dinâmico em malha fechada, são encorajadores e suportam a utilização do método apresentado em uma possível implementação do Quadrirotor em um sistema embarcado.

Outra aplicação abordada ao comando de vôo é tratada no apêndice A, no qual é observada a síntese de controladores resilientes e robustos para o controle de vôo longitudinal de uma aeronave civil. Neste problema, proposto pela empresa *Airbus-France*, foi executada a síntese de controladores para 633 pontos de vôo para o avião A-340. A metodologia utilizada consiste na síntese de conjuntos elipsoidais de controladores  $H_\infty$ , utilizando sistemas incertos na forma de sistemas politópicos. A grande taxa de sucesso obtida nos testes feitos com os pontos de vôo mostrou que é possível tratar numericamente a resiliência, no caso deste tipo de sistemas.

As condições necessárias para resolver os problemas de síntese de conjuntos elipsoidais neste trabalho consistiram em restrições do tipo LMI, juntamente com uma desigualdade matricial não-linear. A metodologia utilizada para encontrar soluções factíveis às restrições, foi baseada na transformação destas, em um problema de otimização não-linear. O algoritmo utilizado para tal é conhecido como complementaridade cônica e a subsequente resolução deste problema é feita através de um método iterativo de programação não-linear denominado Frank-Wolfe. Os resultados obtidos neste trabalho mostraram que a metodologia de resolução numérica proposta foi capaz de resolver as condições de resiliência para sistemas de controle de vôo.

## 5.1 Perspectivas

O assunto resiliência é recente e ainda carece de maiores estudos. Procurou-se mostrar, neste trabalho, que já existem soluções para o problema da resiliência. Estas são capazes de resolver algumas das dificuldades encontradas pela indústria e este fato pode encorajar a continuação de trabalhos nesta direção.

Algumas melhorias, a curto prazo, podem ser feitas em relação às questões apresentadas, como a utilização de métodos de programação não-linear mais adaptados ao problema em questão, ou capazes de resolver sistemas de ordens maiores, ou ainda encontrar condições que transformem o problema não-linear em um problema de programação linear, com um mínimo de conservadorismo possível. A escolha de uma condição inicial factível para inicialização do algoritmo Frank-Wolfe é ainda outro tópico a ser trabalhado.

Entre outras melhorias propostas, têm-se a utilização do princípio da

Separação Topológica utilizando separadores relacionados a outras condições de estabilidade, além das baseadas em Lyapunov, como as do Pequeno Ganho. A questão da robustez politópica pode ser resolvida de forma mais efetiva utilizando Variáveis Slack para relaxar o conjunto de restrições. Além disso, a utilização de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros também pode levar a melhores resultados. Em adição, é possível transportar a teoria apresentada para sistemas de tempo discreto.

A utilização da metodologia de síntese de controladores resilientes pode ser futuramente integrada a outras de controle robusto com desempenho e outras técnicas avançadas de controle como o controle com saturação. Essa combinação de técnicas pode resultar em interessantes contribuições ao problema de controle multiobjetivo, uma linha de pesquisa muito visada pela indústria e que carece de estudos.





## APÊNDICE A – APLICAÇÃO AO CONTROLE LONGITUDINAL DE AERONAVES

### A.1 Introdução

Neste apêndice, será abordada a aplicação do controle resiliente e robusto ao controle longitudinal de um avião comercial. O problema foi proposto pela empresa *Airbus-France*, contextualizado num programa de cooperação entre a empresa e o *Laboratório de Análise e Arquitetura de Sistemas* (LAAS) e tratado durante um estágio, com duração de 5 meses, realizado sob a orientação de Dimitri Peaucelle. Neste mesmo projeto, uma etapa anterior já havia sido realizada, relativa à análise robusta e documentada em (ARZELIER; CHEVARRIA; PEAUCELLE, 2010) e (CHEVARRIA et al., 2010).

O controle longitudinal de aeronaves consiste em controlar o movimento entre o eixo de rotação longitudinal da aeronave e o plano horizontal, relativo à terra. Este movimento é conhecido como *pitch* e o ângulo representando este deslocamento angular é chamado de ângulo *pitch*, que não deve ser confundido com o ângulo de ataque da aeronave, definido como o ângulo entre o eixo central do avião e o vento relativo. Os eixos e ângulos citados neste parágrafo podem ser vistos na Figura 28.

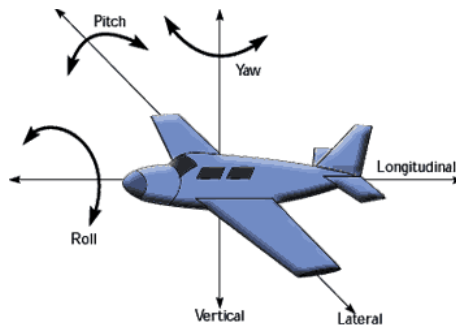


Figura 28: Eixos de rotação de um avião.

O controle longitudinal é comandado pelo piloto através de um *sides-tick controller*, o qual permite controlar a aceleração vertical da aeronave. Este dispositivo, quando deslocado, gera um sinal de referência correspon-

dente ao fator de carga, que por sua vez, é descrito pela relação a seguir.

$$n_z = F_z/P \quad (\text{A.1})$$

na qual  $F_z$  representa a força de sustentação do avião e  $P$ , o seu peso.

A estrutura do avião responsável por mudar o ângulo pitch da aeronave é o profundor, salientado em vermelho na Figura 29. O movimento do profundor muda a forma do estabilizador horizontal, que, por sua vez, muda a sustentação do estabilizador. Uma força  $F$ , então, é aplicada ao centro de pressão do estabilizador horizontal, que encontra-se a uma distância  $L$  do centro de gravidade do avião e ocasiona um torque  $T$  (equação (A.2)) na aeronave, sendo responsável por mudar o ângulo pitch da mesma.

$$T = FL \quad (\text{A.2})$$

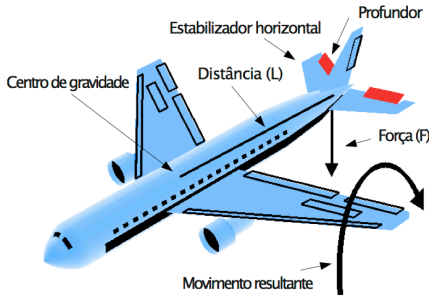


Figura 29: Localização dos elevadores.

## A.2 Definição do problema de controle

O problema de controle consiste de um seguimento de trajetória, no qual o fator de carga  $n_z$  da aeronave é referenciada pelo piloto através de um sinal  $n_{z,ref}$ . Os demais sinais envolvidos no sistema de controle são apresentados na Figura 30. Nesse diagrama, tem-se um sinal de controle  $d_q$  referente à deflexão do profundor e calculada pelo Controlador, a deflexão  $d_{qr}$  pelos atuadores, o ângulo pitch  $\theta$  e e sua taxa de variação  $\dot{\theta}$ , e o ângulo de ataque  $\alpha$ .

Neste esquema, o atuador modela as dinâmicas dos elevadores, sendo

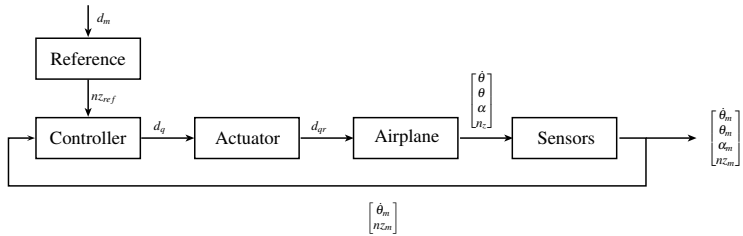


Figura 30: Diagrama de controle.

representado por um filtro de primeira ordem com um ganho unitário e uma constante de tempo rápida de 0.07s. Os sensores, por sua vez, também são tratados como filtros unitários de primeira ordem. Para representar os 4 sensores, a mesma constante de tempo de 0.1s é utilizada.

Classicamente, o problema do controle longitudinal de aeronaves é dividido em partes, devido à não-linearidade deste sistema. Têm-se uma grande dependência, por parte da dinâmica do sistema, de condições de voo como, por exemplo, o *número mach* e a velocidade, o que leva à necessidade de divisão do problema em pontos de voo, como discutido na Seção A.2.1. As metodologias de controle para este tipo de sistema, em geral, utilizam princípios de robustez. Neste trabalho é incluída a questão da resiliência à síntese dos controladores.

A síntese resiliente e robusta para o controle longitudinal foi feita tomando como base um modelo Simulink não-linear do sistema, fornecido pela empresa Airbus, em conjunto das condições de voo discutidas na Seção A.2.1. Após o tratamento das informações fornecidas, feito na etapa anterior deste projeto e explicada em (ARZELIER; CHEVARRIA; PEAUCELLE, 2010), foram obtidos 633 sistemas lineares de ordem 6, com 2 saídas e 1 entrada, sendo cada um destes o comportamento dinâmico da aeronave em uma dada condição de voo.

### A.2.1 Pontos de voo

Um ponto de voo é constituído por certas características do voo de uma aeronave do tipo A-340, em um certo momento. No caso do modelo fornecido pela empresa, cada ponto de voo é composto por 10 parâmetros, sendo que alguns destes parâmetros não mudam de valor, e outros mudam pouco e, na prática, podem ser considerados fixos. A lista de parâmetros é

formada por:

1. Peso do avião (*weight*).
2. Posição do centro de gravidade (*cg*).
3. Altitude do avião (*alt*).
4. Velocidade corrigida (*vc*).
5. Número mach (*mach*), que relaciona velocidade da aeronave em relação ao ar, com a velocidade do som, nas mesmas condições. É formulado como  $mach = v_s/u$ , sendo que  $v_s$  é a velocidade da fonte e  $u$  é a velocidade do ar.
6. Configuração dos flaps (*conf*).
7. Configuração do trem de aterrissagem (*gear*).
8. Fator de carga (*nz*).
9. Tração (*tra*).
10. Etapa do vôo (*phase*).

A Tabela 9 fornece algumas informações adicionais sobre cada parâmetro:

Tabela 9: Características dos 633 pontos de vôo

	weight	cg	alt	vc	mach	conf	gear	nz	tra	phase
unidade	T	%	fts	kts	-	-	-	-	tra	-
valor min	125	17	150	130	0.20	0	0	0.99	20.26	2
valor max	230	41	41250	340	0.86	0	0	1.00	43.60	2
nr. de valores diferentes	3	2	114	32	27	1	1	2	527	1
valor mais comum	125	41	28650	260	0.50	0	0	0.99	20.26	2

Entre as variáveis que representam mudanças significativas no sistema, apenas 4 foram consideradas para a geração dos pontos de vôo, a saber: peso do avião, posição do centro de gravidade, velocidade corrigida e número mach. Para gerar os 633 pontos de vôo, foram considerados 3 valores para o peso do avião, 2 valores para o centro de gravidade. Para os valores de velocidade corrigida e número mach, sua relação é dada na Figura 31.

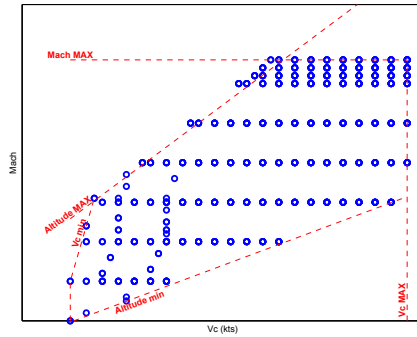


Figura 31: Relação entre velocidade corrigida e número mach

### A.3 Síntese de controladores com norma $H_\infty$ minimizada

Uma síntese resiliente e robusta foi feita para cada um dos 633 pontos de vôo obtidos. A metodologia utilizada consiste na síntese de conjuntos elipsoidais de controladores  $H_\infty$  para sistemas incertos de forma politópica, como apresentado na Seção 3.3.6. Para cada ponto de vôo, foi construído um sistema incerto de forma politópica, tomando-se os pontos vizinhos como vértices do politopo. A metodologia para a escolha dos vizinhos de um ponto de vôo é baseada em uma distância Euclidiana  $\mathbf{d}$  destes pontos no espaço de parâmetros, proposta em uma etapa anterior deste projeto e discutida em (ARZELIER; CHEVARRIA; PEAUCELLE, 2010).

A construção do problema de síntese é feita fixando um erro multiplicativo de 0.5 e adaptando o problema para minimizar a norma  $H_\infty$ , de maneira similar à utilizada na Seção 3.5.3. A formulação deste problema, incluindo a transformação utilizando o algoritmo de complementaridade cônica, discutido na Seção 3.5.1, e adaptando o problema ao método iterativo de Frank-Wolfe, apresentado na Seção 3.5.2, é dado pela seguinte relação:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{trace}(S_k \mathbf{T} + T_k \mathbf{S}) + \beta \gamma^2 \quad \text{s.t. :} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \leq 0, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}' & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \geq \mathbb{O} \\ \mathbf{X} \leq (1 - \delta^2) \hat{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_2' & \mathbf{T}_3 \end{bmatrix} \geq \mathbb{O} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

que é o problema usual de otimização  $H_\infty$  adaptado a minimizar a norma do

sistema em malha fechada. Deve ser notado que  $\gamma^2$  é uma variável de decisão, sendo o quadrado da norma  $H_\infty$ , que é a variável a ser minimizada.

#### A.4 Resultados numéricos

Os testes de síntese foram feitos utilizando controladores tanto estáticos quanto dinâmicos (ordens 1 a 6) e procurou-se analisar os resultados obtidos para cada ordem. O primeiro resultado é apresentado no gráfico de barras horizontais da Figura 32. Neste, é apresentado o valor médio da norma  $H_\infty$  que foi obtido para o sistema de controle através da síntese. Esta foi feita nos 633 pontos pontos de vôo e em cada uma das ordens dos controladores dinâmicos testados. Deve ser observado que o gráfico de barras leva em conta apenas os casos nos quais a síntese obteve êxito.

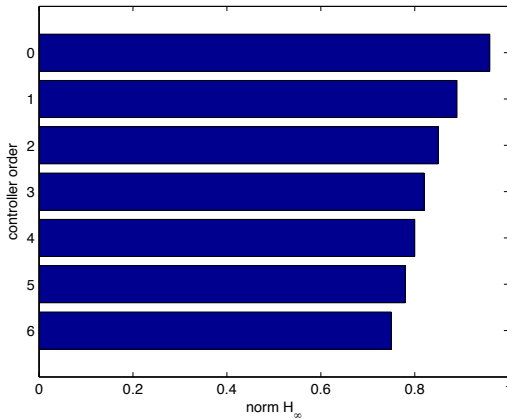


Figura 32: Norma  $H_\infty$  média dos pontos com êxito.

No gráfico de barras horizontais da Figura 32, é possível observar que são encontrados menores valores para a norma  $H_\infty$  do sistema de controle à medida que é aumentada a ordem do controlador procurado.

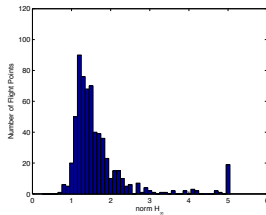
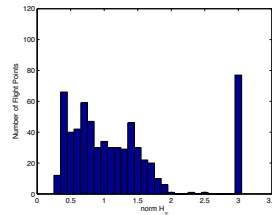
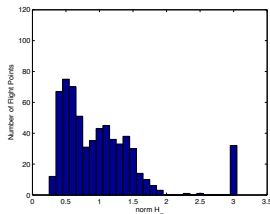
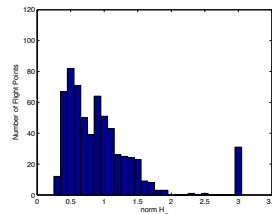
A Tabela 10, a seguir, mostra algumas informações numéricas adicionais obtidas para cada ordem de controlador.

Finalizando esta seção de resultados, os histogramas a seguir mostram, de uma maneira direta, os resultados obtidos para os 633 pontos de vôo. O último valor de cada histograma representa o número de pontos de vôo que

Tabela 10: Resultados numéricos síntese  $H_\infty$ .

Ordem	média	pontos instáveis	tempo
Open loop	1.62	10	-
0	0.96	77	8m 40s
1	0.89	32	23m 17s
2	0.85	31	42m 16s
3	0.82	31	1h 8m 9s
4	0.80	29	1h 42m 10s
5	0.78	27	1h 59m 1s
6	0.75	26	2h 20m 51s

obtiveram norma  $H_\infty$  maior ou igual a este valor limite. Além de incluir também o número de sínteses que não obtiveram sucesso.

Figura 33: Norma  $H_\infty$  em malha aberta.Figura 34: Controlador de ordem 0 - Norma  $H_\infty$ .Figura 35: Controlador de ordem 1 - Norma  $H_\infty$ .Figura 36: Controlador de ordem 2 - Norma  $H_\infty$ .

Através dos histogramas apresentados, foi possível acompanhar a evolução da síntese  $H_\infty$ , de acordo com a ordem do controlador procurado.

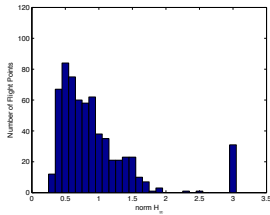


Figura 37: Controlador de ordem 3 - Norma  $H_\infty$ .

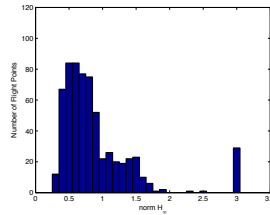


Figura 38: Controlador de ordem 4 - Norma  $H_\infty$ .

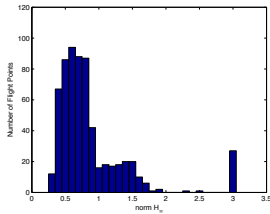


Figura 39: Controlador de ordem 5 - Norma  $H_\infty$ .

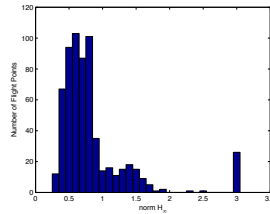


Figura 40: Controlador de ordem 6 - Norma  $H_\infty$ .

Nota-se que, à medida que a ordem do controlador aumenta, o valor da norma  $H_\infty$  dos pontos de vôo diminui. Além disso, diminui também o número de pontos de síntese norma  $H_\infty$  maior ou igual a 3.

## A.5 Conclusão

Neste apêndice foram abordadas questões sobre a aplicação da metodologia de síntese de controladores resilientes e robustos ao problema de controle de vôo longitudinal. As incertezas inerentes ao sistema foram modeladas como incertezas politópicas, e cada vértice foi representado como um ponto de vôo vizinho ao ponto de vôo em questão. A metodologia utilizada para a escolha dos pontos vizinhos foi apresentada em uma etapa anterior do projeto relativa à análise robusta, documentada em (ARZELIER; CHEVARRIA; PEAUCELLE, 2010). Os principais parâmetros utilizados para a modelagem politópica foram o número mach e a velocidade, e a metodologia utilizada para escolher os pontos vizinhos baseou-se em uma distância Euclidiana no



espaço de parâmetros.

Os resultados numéricos obtidos foram encorajantes, mostrando que para muitos pontos de vôo foram obtido valores para a norma  $H_\infty$  menores que 1, mesmo com a inclusão da condição de resiliência na síntese de controladores. É esperado que outras metodologias, como a utilização de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros e variáveis de folga possam oferecer resultados menos conservadores.



## APÊNDICE B – RESULTADOS NUMÉRICOS ADICIONAIS

### B.1 Sistema de posicionamento $x - y$ do quadrirotor

As informações numéricas das matrizes  $B_u$  discutidas na Seção 4.3.3.3 são apresentadas nesta seção.

$$\begin{aligned}
 B_{u,1}^{xy} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2.53 & 9.47 \\ 0 & 0 \\ -9.47 & 2.53 \end{bmatrix}, B_{u,2}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4.90 & 8.49 \\ 0 & 0 \\ -8.49 & 4.90 \end{bmatrix}, B_{u,3}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6.93 & 6.93 \\ 0 & 0 \\ -6.93 & 6.93 \end{bmatrix} \\
 B_{u,4}^{xy} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8.49 & 4.90 \\ 0 & 0 \\ -4.90 & 8.49 \end{bmatrix}, B_{u,5}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9.47 & 2.53 \\ 0 & 0 \\ -2.53 & 9.47 \end{bmatrix}, B_{u,6}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9.81 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 9.81 \end{bmatrix} \\
 B_{u,7}^{xy} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9.47 & -2.53 \\ 0 & 0 \\ 2.53 & 9.47 \end{bmatrix}, B_{u,8}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8.49 & -4.90 \\ 0 & 0 \\ 4.90 & 8.49 \end{bmatrix}, B_{u,9}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6.93 & -6.93 \\ 0 & 0 \\ 6.93 & 6.93 \end{bmatrix} \\
 B_{u,10}^{xy} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4.90 & -8.49 \\ 0 & 0 \\ 8.49 & 4.90 \end{bmatrix}, B_{u,11}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2.53 & -9.47 \\ 0 & 0 \\ 9.47 & 2.53 \end{bmatrix}, B_{u,12}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -9.81 \\ 0 & 0 \\ 9.81 & 0 \end{bmatrix} \\
 B_{u,13}^{xy} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2.53 & -9.47 \\ 0 & 0 \\ 9.47 & -2.53 \end{bmatrix}, B_{u,14}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4.90 & -8.49 \\ 0 & 0 \\ 8.49 & -4.90 \end{bmatrix}, B_{u,15}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6.93 & -6.93 \\ 0 & 0 \\ 6.93 & -6.93 \end{bmatrix} \\
 B_{u,16}^{xy} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8.49 & -4.90 \\ 0 & 0 \\ 4.90 & -8.49 \end{bmatrix}, B_{u,17}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -9.47 & -2.53 \\ 0 & 0 \\ 2.53 & -9.47 \end{bmatrix}, B_{u,18}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -9.81 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -9.81 \end{bmatrix} \\
 B_{u,19}^{xy} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -9.47 & 2.53 \\ 0 & 0 \\ -2.53 & -9.47 \end{bmatrix}, B_{u,20}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8.49 & 4.90 \\ 0 & 0 \\ -4.90 & -8.49 \end{bmatrix}, B_{u,21}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6.93 & 6.93 \\ 0 & 0 \\ -6.93 & -6.93 \end{bmatrix} \\
 B_{u,22}^{xy} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4.90 & 8.49 \\ 0 & 0 \\ -8.49 & -4.90 \end{bmatrix}, B_{u,23}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2.53 & 9.47 \\ 0 & 0 \\ -9.47 & -2.53 \end{bmatrix}, B_{u,24}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9.81 \\ 0 & 0 \\ -9.81 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

### B.2 Matrizes do controlador de posicionamento do quadrirotor

Os controladores  $K_i^{xy}$  utilizados no controlador do tipo ganho-escalonado discutido na Seção 4.3.3.4 são apresentados nesta seção.

$$K_1^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1057 & 0.0001 & -0.0009 & -0.0009 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0001 & -0.1057 & -0.0005 & -0.0005 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0291 & -0.0774 & 0.0930 & 0.2414 \\ 0.0001 & 0.0001 & -0.0930 & -0.2414 & -0.0292 & -0.0774 \end{bmatrix}$$

$$K_2^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1237 & 0.0002 & -0.0002 & 0.0011 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0002 & -0.1240 & -0.0001 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0522 & -0.1429 & 0.1278 & 0.3159 \\ 0.0001 & 0.0000 & -0.1278 & -0.3155 & -0.0522 & -0.1432 \end{bmatrix}$$

$$K_3^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1227 & 0.0004 & -0.0001 & 0.0009 & -0.0000 & 0.0002 \\ 0.0004 & -0.1226 & -0.0000 & 0.0010 & -0.0001 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0878 & -0.2436 & 0.1381 & 0.3340 \\ 0.0001 & 0.0000 & -0.1381 & -0.3335 & -0.0878 & -0.2439 \end{bmatrix}$$

$$K_4^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1228 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0009 & -0.0001 & 0.0001 \\ 0.0001 & -0.1227 & -0.0001 & 0.0012 & -0.0001 & 0.0002 \\ 0.0000 & 0.0001 & -0.1220 & -0.3332 & 0.1211 & 0.2857 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.1211 & -0.2852 & -0.1222 & -0.3338 \end{bmatrix}$$

$$K_5^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1225 & 0.0002 & -0.0001 & 0.0005 & -0.0000 & 0.0003 \\ 0.0002 & -0.1227 & -0.0001 & 0.0004 & -0.0000 & 0.0003 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.1498 & -0.3956 & 0.0888 & 0.1944 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0888 & -0.1940 & -0.1499 & -0.3964 \end{bmatrix}$$

$$K_6^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1226 & 0.0002 & -0.0001 & 0.0012 & -0.0001 & 0.0003 \\ 0.0002 & -0.1225 & -0.0001 & 0.0002 & 0.0000 & 0.0003 \\ 0.0001 & 0.0000 & -0.1679 & -0.4297 & 0.0485 & 0.0868 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0486 & -0.0865 & -0.1680 & -0.4306 \end{bmatrix}$$

$$K_7^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1228 & 0.0002 & -0.0001 & 0.0013 & -0.0001 & 0.0001 \\ 0.0002 & -0.1227 & -0.0000 & 0.0007 & -0.0001 & 0.0002 \\ 0.0001 & 0.0000 & -0.1762 & -0.4385 & 0.0047 & -0.0252 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0047 & 0.0253 & -0.1762 & -0.4390 \end{bmatrix}$$

$$K_8^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1226 & 0.0003 & -0.0001 & 0.0010 & -0.0001 & 0.0002 \\ 0.0003 & -0.1229 & -0.0001 & 0.0007 & -0.0001 & 0.0002 \\ 0.0001 & 0.0000 & -0.1725 & -0.4166 & -0.0407 & -0.1367 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0405 & 0.1364 & -0.1726 & -0.4175 \end{bmatrix}$$

$$K_9^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1228 & 0.0002 & -0.0001 & 0.0010 & -0.0001 & 0.0002 \\ 0.0002 & -0.1225 & -0.0001 & 0.0003 & -0.0000 & 0.0003 \\ 0.0001 & 0.0000 & -0.1571 & -0.3674 & -0.0840 & -0.2392 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0838 & 0.2388 & -0.1572 & -0.3682 \end{bmatrix}$$

$$K_{10}^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1229 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0010 & -0.0001 & 0.0002 \\ 0.0001 & -0.1227 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0002 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.1309 & -0.2936 & -0.1221 & -0.3260 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.1219 & 0.3254 & -0.1309 & -0.2940 \end{bmatrix}$$

$$K_{11}^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1226 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0004 & -0.0000 & 0.0002 \\ 0.0001 & -0.1229 & -0.0000 & 0.0006 & -0.0000 & 0.0003 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0955 & -0.1997 & -0.1522 & -0.3907 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.1521 & 0.3900 & -0.0954 & -0.2000 \end{bmatrix}$$

$$K_{12}^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1226 & 0.0002 & -0.0000 & 0.0010 & -0.0001 & 0.0002 \\ 0.0002 & -0.1227 & -0.0001 & 0.0014 & -0.0001 & 0.0002 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0528 & -0.0914 & -0.1716 & -0.4277 \\ -0.0001 & -0.0001 & 0.1716 & 0.4274 & -0.0528 & -0.0916 \end{bmatrix}$$

$$K_{13}^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1229 & 0.0002 & -0.0001 & 0.0003 & -0.0000 & 0.0003 \\ 0.0002 & -0.1229 & -0.0001 & 0.0013 & -0.0002 & 0.0001 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0070 & 0.0216 & -0.1802 & -0.4382 \\ -0.0000 & -0.0001 & 0.1802 & 0.4382 & -0.0070 & 0.0215 \end{bmatrix}$$

$$K_{14}^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1227 & 0.0002 & -0.0001 & -0.0000 & 0.0001 & 0.0005 \\ 0.0002 & -0.1225 & -0.0001 & 0.0011 & -0.0001 & 0.0002 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0399 & 0.1338 & -0.1763 & -0.4176 \\ -0.0000 & -0.0001 & 0.1762 & 0.4167 & 0.0401 & 0.1342 \end{bmatrix}$$

$$K_{15}^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1228 & 0.0002 & -0.0001 & 0.0006 & -0.0000 & 0.0003 \\ 0.0002 & -0.1227 & -0.0001 & 0.0006 & -0.0000 & 0.0003 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.1231 & 0.3241 & -0.1332 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.1332 & 0.2940 & 0.1233 & 0.3250 \end{bmatrix}$$

$$K_{16}^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1226 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0010 & -0.0001 & 0.0002 \\ 0.0001 & -0.1225 & -0.0001 & 0.0007 & -0.0001 & 0.0003 \\ -0.0001 & -0.0000 & -0.0000 & 0.1537 & 0.3894 & -0.0969 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0970 & 0.2002 & 0.1539 & 0.3902 \end{bmatrix}$$

$$K_{17}^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1228 & 0.0002 & -0.0001 & 0.0006 & -0.0000 & 0.0004 \\ 0.0002 & -0.1228 & -0.0001 & 0.0009 & -0.0001 & 0.0003 \\ -0.0001 & -0.0001 & 0.1732 & 0.4261 & -0.0535 & -0.0919 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0536 & 0.0915 & 0.1733 & 0.4273 \end{bmatrix}$$

$$K_{18}^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1226 & 0.0002 & -0.0001 & 0.0007 & -0.0001 & 0.0002 \\ 0.0002 & -0.1229 & -0.0001 & 0.0009 & -0.0001 & 0.0004 \\ -0.0001 & -0.0001 & 0.1818 & 0.4373 & -0.0071 & 0.0214 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0072 & -0.0213 & 0.1818 & 0.4379 \end{bmatrix}$$

$$K_{19}^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1229 & 0.0003 & -0.0001 & 0.0011 & -0.0001 & 0.0004 \\ 0.0003 & -0.1226 & -0.0001 & 0.0007 & -0.0001 & 0.0001 \\ -0.0001 & -0.0000 & 0.1776 & 0.4171 & 0.0403 & 0.1340 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0401 & -0.1338 & 0.1777 & 0.4178 \end{bmatrix}$$

$$K_{20}^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1226 & 0.0002 & -0.0001 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0005 \\ 0.0002 & -0.1228 & -0.0001 & 0.0006 & -0.0001 & 0.0002 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.1615 & 0.3688 & 0.0849 & 0.2376 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0849 & -0.2376 & 0.1615 & 0.3691 \end{bmatrix}$$

$$K_{21}^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1226 & 0.0003 & -0.0001 & 0.0008 & -0.0001 & 0.0003 \\ 0.0003 & -0.1228 & -0.0000 & 0.0009 & -0.0001 & 0.0001 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.1340 & 0.2943 & 0.1240 & 0.3251 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.1238 & -0.3244 & 0.1340 & 0.2948 \end{bmatrix}$$

$$K_{22}^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1228 & 0.0003 & -0.0001 & 0.0002 & 0.0000 & 0.0004 \\ 0.0003 & -0.1225 & -0.0001 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0003 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0975 & 0.2002 & 0.1546 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.1544 & -0.3894 & 0.0974 & 0.2005 \end{bmatrix}$$

$$K_{23}^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1226 & 0.0003 & -0.0001 & -0.0001 & 0.0001 & 0.0005 \\ 0.0003 & -0.1226 & -0.0001 & 0.0007 & -0.0001 & 0.0003 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0539 & 0.0916 & 0.1741 & 0.4275 \\ 0.0000 & 0.0001 & -0.1740 & -0.4267 & 0.0539 & 0.0919 \end{bmatrix}$$

$$K_{24}^{xy} = \begin{bmatrix} -0.1227 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0006 & -0.0001 & 0.0002 \\ 0.0000 & -0.1227 & -0.0001 & 0.0007 & -0.0001 & 0.0002 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0073 & -0.0213 & 0.1825 & 0.4381 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.1824 & -0.4375 & 0.0072 & -0.0213 \end{bmatrix}$$



## REFERÊNCIAS

- APKARIAN, P.; ADAMS, R. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control System Technology*, v. 6, p. 21–32, 1998.
- APKARIAN, P.; GAHINET, P. A convex characterization of gain scheduling  $H_\infty$ . *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 40, p. 853–864, 1995.
- ARZELIER, D.; COMERLATTO, G.; PEAUCELLE, D. *Correcteurs Robustes et Résilients pour la Synthèse LPV - Technical Report*. Toulouse: [s.n.], 2010.
- ARZELIER, D.; CHEVARRIA, G. de C.; PEAUCELLE, D. *Analyse et synthèse de systèmes de commande robustes et résilients : Analyse robuste. Technical Report 09496, LAAS-CNRS, Toulouse, Agosto 2009. Convention ONERA F/20 334/DA PPUJ*. 2010.
- BALAS, G. J.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; PACKARD, A.; SMITH, R.  *$\mu$ -Analysis and synthesis toolbox: User's Guide*. 1992.
- BARMISH, B. R. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *J. Optimization Theory and Applications*, v. 46, n. 4, 1985.
- BECKER, G.; PACKARD, A.; BALAS, G. Control of parametrically-dependent linear systems: A single quadratic lyapunov approach. In: *Proceedings of the American Control Conference*. San Francisco: IEEE, 1993. p. 2795–2799.
- BERTSEKAS, D. P. *Nonlinear Programming*. 1. ed. Massachusetts: Athenas Scientific, 1995.
- BIANNIC, J.-M. *Commande Robuste des Systèmes a Paramètres Variables. Phd Thesis, Centre d'Etudes et de Recherches de Toulouse*. 2000.
- BOUABDALLAH, S. *Design and Control of Quadrotors with Application to Autonomous Flying. Phd Thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne*. 2007.

- BOUABDALLAH, S.; SIEGWART, R. Backstepping and Sliding-mode Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor. In: *International Conference on Robotics Automation*. IEEE, 2005. p. 2247–2252.
- BOUABDALLAH, S.; SIEGWART, R. Full control of a quadrotor. In: *RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. [S.l.]: IEEE, 2007. p. 153–158.
- BOUABDALLAH, S.; NOTH, A.; SIEGWART, R. PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor. In: *RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. [S.l.]: IEEE, 2004. p. 2451–2456.
- BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- CASTILLO, P.; DZUL, A.; LOZANO, R. Real-time stabilization and tracking of four-rotor mini rotorcraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 12, n. 4, p. 510–516, 2004.
- CHEVARRIA, G. de C.; PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D.; PUYOU, G. Robust analysis of the longitudinal control of a civil aircraft using romuloc. In: *IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design*. Yokohama: [s.n.], 2010. p. 737–742.
- CHESI, G.; GARULLI, A.; TESI, A.; VICINO, A. Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of polytopic systems: An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 3, p. 365–370, mar 2005.
- COWLING, I. Towards Autonomy of a Quadrotor UAV. Phd Thesis. Cranfield University, 2008.
- DAI, L. *Singular Control Systems*. New York: Springer-Verlag, 1989.
- DE OLIVEIRA, M. C.; BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. C. A new discrete-time stability condition. *System and Control Letters*, v. 37, n. 4, p. 261–265, jul 1999.
- DOYLE, J. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, v. 129, n. 6, p. 242–250, 1982.



- DOYLE, J.; PACKARD, A.; ZHOU, K. Review of LFTs, LMIs and  $\mu$ . In: . Brighton, England: [s.n.], 1991. p. 1227–1232.
- EBIHARA, Y.; HAGIWARA, T. New dilated LMI characterizations for continuous-time multiobjective controller synthesis.
- EL GHAOU, L.; OUSTRY, F.; AITRAMI, M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, p. 1171–1176, 1997. *Automatica*, v. 40, n. 11, p. 2003–2009, 2004.
- EL GHAOU, L.; NICULESCU, S.-I. (Ed.). *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Philadelphia: SIAM, 2000. (Advances in Design and Control).
- FRIDMAN, E.; SHAKED, U. A descriptor system approach to  $H_\infty$  control of time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, p. 253–270, 2002.
- IWASAKI, T.; HARA, S. Well-posedness of feedback systems: Insights into exact robustness analysis and approximate computations. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 43, n. 5, p. 619–630, 1998.
- IWASAKI, T.; SHIBATA, G. LPV system analysis via quadratic separator for uncertain implicit systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 8, p. 1195–1207, aug 2001.
- JADBABAIE, A.; ABDALLAH, C.T.; FAMULARO, D.; DORATO, P. Robust, non-fragile and optimal controller design via linear matrix inequalities. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Philadelphia, Pennsylvania: [s.n.], 1998. p. 2842–2846.
- KEEL, L. H.; BHATTACHARYYA, S. P. Robust, fragile, or optimal? *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 42, n. 8, p. 1098–1105, 1997.
- LEIBFRITZ, F. COMLeIB, CONstraint Matrix-optimization Problem Library-a collection of test examples for nonlinear semidefinite programs, control system design and related problems. Technical report, Universität Trier, 2003.
- LEITH, D. J.; LEITHEAD, W. E. Survey of gain-scheduling analysis and design. *International Journal of Control*, v. 73, n. 11, p. 1001–1025, 2000.

- LÖFBERG, J. Manual, *YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB*. 2004.
- LÖFBERG, J. *YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB*. [S.l.], 2004. Disponível em: <<http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>>.
- MEGRETSKI, A.; RANTZER, A. System analysis via integral quadratic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, p. 819–830, 1997.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions: Asymptotically exact LMI conditions. *Linear Algebra and Its Applications*, v. 405, p. 209–228, 2005.
- PEAUCELLE, D. Manual, *RoMulOC a YALMIP-MATLAB based Robust Multi Objective Control Toolbox*. 2005.
- PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. Ellipsoidal Sets for Resilient and Robust Static Output-Feedback. *IEEE Transactions On Automatic Control*, v. 50, n. 6, p. 899–904, 2005.
- PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D.; HENRION, D.; GOUAISBAUT, F. Quadratic separation for feedback connection of an uncertain matrix and an implicit linear transformation. *Automatica*, Elsevier, v. 43, n. 5, p. 795–804, 2007.
- PEAUCELLE, D. *Formulation Générique de Problèmes en Analyse et Commande Robuste par des Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres*. Phd Thesis, LAAS-CNRS. 2000.
- PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D.; BACHELIER, O.; BERNUSSOU, J. A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems and Control Letters*, v. 40, n. 1, p. 21–30, 2000.
- PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. Ellipsoidal output-feedback sets for robust multi-performance synthesis. In: *European Control Conference, Cambridge, UK*. [S.l.: s.n.], 2003.
- PEAUCELLE, D.; BAUDOUIN, L.; GOUAISBAUT, F. Integral quadratic separators for performance analysis. In: *European Control Conference*. Budapest: [s.n.], 2009.

- PEAUCELLE, D.; SATO, M. LMI tests for positive definite polynomials: Slack variable approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 54, n. 4, p. 886 – 891, apr 2009.
- PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D.; HENRION, D.; GOUAISBAUT, F. Quadratic separation for feedback connection of an uncertain matrix and an implicit linear transformation. *Automatica*, v. 43, p. 795–804, 2007. Doi: 10.1016/j.automatica.2006.11.005.
- PEAUCELLE, D. Integral quadratic separation applied to polytopic systems. In: *IFAC-ROCOND*. Haifa: [s.n.], 2009.
- PEAUCELLE, D. *RoMulOC a YALMIP-MATLAB based Robust Multi Objective Control Toolbox*. [S.l.], 2005. Disponível em: <<http://www.laas.fr/OLOCEP/fromuloc>>.
- PEAUCELLE, D.; EBIHARA, Y.; ARZELIER, D.; HAGIWARA, T. General polynomial parameter-dependent Lyapunov functions for polytopic uncertain systems. In: *Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*. Kyoto: [s.n.], 2006.
- POUSSOT-VASSAL, C. *Commande Robuste LPV Multivariable de Châssis Automobile*. Phd Thesis, Grenoble Institut Polytechnique. 2008.
- RAFFO, G.; ORTEGA, M.; RUBIO, F. An integral predictive nonlinear H8 control structure for a quadrotor helicopter. *Automatica*, n. 46, p. 29–39, 2010.
- RUGH, W. J.; SHAMMA, J. S. Research on gain scheduling. *Automatica*, v. 36, p. 1401–1423, 2000.
- SHAMMA, J. S.; ATHANS, M. Gain scheduling: potential hazards and possible remedies. *Control Systems Magazine*, v. 12, n. 3, p. 101–107, 1992.
- SCHERER, C. LMI relaxations in robust control. *European Journal of Control*, v. 12, p. 3–29, 2006.
- SCHERER, C. Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness. *SIAM Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 27, n. 2, p. 365–395, 2005.

- SOFANOV, M. G. *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems*. 1. ed. Massachusetts: The MIT Press, 1980.
- SYRMOS, V. L.; ABDALLAH, C.; DORATO, P.; GRIGORIADIS, K. *Static Output Feedback : A Survey*. UNM Technical Report: EECE95-008, DECE-University of New Mexico, Setembro 1995.
- TOH, K. C.; TODD, M. J.; TÛTÛNCÛ, R. H. Manual, *SDPT3 : A MATLAB software package for semidefinite programming, version 2.1*. 1999.
- TOH, K. C.; TODD, M. J.; TÛTÛNCÛ, R. H. *SDPT3 : A MATLAB software package for semidefinite programming, version 2.1*. [S.l.], 1999. Disponível em: <<http://www.math.cmu.edu/reha/sdpt3.html>>.
- YEE, J. S.; YANG, G. H.; WANG, J. L. Non-fragile guaranteed cost control for discrete-time uncertain linear systems. *International Journal of Systems Science*, v. 32, n. 7, p. 845–853, 2001.
- ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. *Robust and Optimal Control*. 1. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996.