UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

EXPERIÊNCIAS EM GEOMETRIA

SAMANTA MARAGNO

FLORIANÓPOLIS – 2003

SAMANTA MARAGNO

EXPERIÊNCIAS EM GEOMETRIA

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Matemática, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito à obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Professora Carmem Suzane Comitre Gimenez

FLORIANÓPOLIS – SC

Julho de 2003

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n° 31/SCG/03

Prof. Nereu Estanislau Burin

Professor da disciplina

Banca Examinadora:

CARMEM SUZANE COMITRE GIMENEZ

Orientador

MÉRICLES THADEU MORETTI

ANTONIO VLADIMIR MARTINS

AGRADECIMENTOS:

A minha mãe Beatris, por todo sacrifício , amor e apoio nestes anos.

A toda minha família, sem exceção, pela confiança e ajuda em todos os sentidos e momentos.

Ao Werther, por não ter me deixado desistir, me incentivado sempre, ficando ao meu lado nos bons e maus momentos.

Enfim, a todas essas pessoas, por mais que eu quisesse, com palavras não sei dizer, como é grande o meu amor por vocês.

A todos meus amigos, me levantando o astral, sendo meus companheiros quando eu estava longe da família.

Agradeço também a minha orientadora, Carmem, por me dar o maior exemplo de profissionalismo, que irei me espelhar durante minha vida.

E finalmente, a força divina que sempre me acompanhou e me fortaleceu.

INTRODUÇÃO

Na realidade, pode parecer, a princípio, que a matemática não tem uma aplicação clara e imediata nos problemas do mundo em que vivemos; isso, muitas vezes, pode criar no aluno, um certo desapontamento.

Porém, a Matemática está presente em nossas vidas desde uma simples contagem ou um simples troco até seu uso em complexos computadores.

Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.(GIOVANNI & CASTRUCCI, 1985)

Sempre existe algum aluno que faz a seguinte pergunta para o professor após a explicação de um novo conteúdo: Para que serve isso?

É aí que surge a necessidade de buscar estabelecer nas aulas, uma relação entre o conteúdo e o mundo fora da escola.

Neste trabalho vamos estar sugerindo algumas aplicações práticas para os professores trabalharem com os alunos, ou mesmo despertar o interesse dos professores para este tipo de abordagem.

O trabalho foi dividido em dois capítulos.

O primeiro capítulo fala do problema da construção de um túnel que é muito interessante por ter sido feito na antiguidade, alguns resultados simples de geometria e instrumentos rudimentares de medição possibilitaram sua execução há 2500 anos.

No segundo capítulo, trabalhamos com volumes dos sólidos geométricos, prisma e cilindros, através da medição de embalagens encontradas no nosso dia-a-dia. Fizemos também uma experimentação, propondo aos alunos o cálculo de volumes de algumas embalagens.

O bom professor é aquele que ajuda o aluno a descobrir, construir e pensar. E encontrar aplicações significativas para a matéria que está expondo, é um desafio e deveria ser sua constante preocupação, tornando assim as aulas mais produtivas e atraentes para ambas as partes.

APRESENTAÇÃO

A missão dos educadores é preparar as novas gerações para o mundo em que terão que viver. Isto quer dizer proporcionar-lhes o ensino necessário para que adquiram as destrezas e habilidades que vão necessitar para seu desempenho, com boa eficiência.

Por isso, como o mundo atual é rapidamente mutável, também a escola deve estar em contínuo estado de alerta para adaptar seu ensino. Em caso contrário, se a escola descuida-se e se mantém estática ou com movimento vagaroso em comparação com a velocidade externa, origina-se um afastamento entre a escola e a realidade ambiental, que faz com que os alunos se sintam pouco atraídos pelas atividades de aula e busquem adquirir por outros meios os conhecimentos que consideram necessários para compreender à sua maneira o mundo externo, que percebem diretamente ou através dos meios massivos de comunicação.

Aos professores de matemática compete selecionar entre toda a matemática existente, a clássica e a moderna, aquela que possa ser útil aos alunos em cada um dos diferentes níveis da educação. Para a seleção temos de levar em conta que a matemática tem um valor formativo, que ajuda a estruturar todo o pensamento e a agilizar o raciocínio dedutivo, porém que também é uma ferramenta que serve para a atuação diária e para muitas tarefas específicas de quase todas as atividades laborais. Quer dizer, o sentido da matemática deve ser um constante equilíbrio entre a matemática formativa e a matemática informativa. A primeira, mais estável, e a segunda , muito variável segundo tempo, o lugar e a finalidade perseguida pelos alunos.

No que diz respeito à didática, seja no nível que for, o ensino da Matemática deve estimular a criatividade, mostrando que a matemática é como um edifício em construção, sempre necessitando de modificações e adaptações.

Um dos objetivos essenciais (e ao mesmo tempo uma das dificuldades principais) do ensino da matemática é precisamente que o que se ensine esteja carregado de significado, tenha sentido para o aluno.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1999):

> Numa outra direção, as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.

> Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências, em especial a Física.

Segundo Tahan (1961), as conclusões dos experimentadores em relação aos problemas matemáticos foram as seguintes:

> 1. Os dados do problema devem ser familiares, próprios da experiência da criança, isto é, devem constituir uma situação em que a criança possa facilmente imaginar encontrar-se nela;
> 2. O caráter principal do problema deve consistir em haver uma razão para resolvê-lo, isto é, se a criança estiver na situação descrita no problema, sentirá uma necessidade real de encontrar a solução que o problema reclama;
> 3. O vocabulário e a estrutura da redação do problema devem encontrar-se dentro da capacidade de leitura da criança; (p.94)

É sempre importante apresentar um novo conceito matemático através de atividades apropriadas, pois a redescoberta do mesmo ajuda o aluno a construí-lo e adequá-lo à sua rede de conhecimentos, combatendo o desânimo dos que se vêem como fracassados na Matemática.

Torna-se, então, importante, a introdução de novas metodologias de ensino onde o aluno seja sujeito da aprendizagem, respeitando-se o seu contexto e levando em consideração os aspectos recreativos e lúdicos das motivações próprias de sua idade, sua imensa curiosidade e desejo de realizar atividades em grupo.

Já dizia Tahan (1961):

> A matemática, para ser usada no currículo da educação geral, deve ser submetida a um rigoroso processo de seleção e adaptação. Certas características dessa matéria devem ser rigorosamente excluídas. Para ser apresentada aos jovens alunos, essa ciência deve perder seu aspecto de esoterismo. Ela deve tratar direta e simplesmente de umas poucas idéias gerais mas que sejam de uma importância de longo alcance. Nossos programas de ensino deveriam ser planejados com o fito de ilustrar, com simplicidade, uma sucessão de idéias de óbvia importância. Para fins de Educação, a Matemática consiste no estudo das relações de quantidade e das relações de espaço.
>
> Isto não é uma definição geral da Matemática, a qual, na minha opinião, é uma ciência muito mais geral. O objetivo a ser visado, no seu ensino, é fazer o aluno familiarizar-se

> com o pensamento abstrato, saber como este se aplica a circunstâncias concretas e particulares, e saber como aplicar métodos gerais à sua investigação lógica.
> Com este ideal educativo em vista, nada pode ser pior do que a acumulação, sem qualquer objetivo, de teoremas nos nossos livros didáticos, que derivam sua importância do simples fato de que os alunos podem ser obrigados a prendê-los, e os examinadores poder armar sobre eles questões complicadas.(p.106)

Os didatas, depois de longos estudos psicológicos, afirmam que o aprendizado está diretamente ligado ao ato de descobrir.

Por isso, que alguns pedagogos defendem o método da redescoberta, o qual consiste em levar o aluno a passar, sucessivamente, pelas diversas fases que conduzem à descoberta. Obviamente, não é possível fazer a recapitulação do processo primitivo das descobertas, já que as condições da vida social são diferentes, e o próprio professor se encarrega de fornecer noções subsidiárias que esclarecem o assunto. Por outro lado a escolha dos assuntos precisa se adaptar às possibilidades da escola e, também, ao tempo escolar.

Esse método desenvolve o gosto pelas investigações experimentais e desenvolve as qualidades de ordem e a iniciativa pessoal.

"Os alunos precisam ser conduzidos de forma a terem a oportunidade de "descobrirem", por si próprios, algo de "novo". Pode haver maior alegria para a inteligência do que a de um descobrimento ? Pitágoras sacrificou um hecatombe às Musas por lhe haverem concedido o privilégio do descobrimento do teorema que traz ainda hoje seu nome. Arquimedes exclamou de júbilo: "Eureka!" (Achei!) quando em meio do banho, descobriu o famoso princípio hidrostático, a que seu nome ficou também para sempre ligado. Por que privar os alunos, na escola, da estupenda alegria do Eureka?!

O aluno, que descobriu algo de "novo", fica ansioso e motivado para novas descobertas, dedicando-se ao trabalho com redobrado interesse e esforço. Se, na verdade, nada descobre de realmente novo, que importa? O melhor professor é o que, mais cedo, consegue tornar-se... dispensável."(TAHAN,1961: 241)

"As aplicações constituem para muitos alunos de nossas escolas, a parte mais atraente da matemática que estudam. Se forem formuladas adequadamente, em termos realísticos, ligados a questões e fatos da vida atual , elas podem justificar o estudo, despertando o interesse da classe. Encontrar aplicações significativas para a matéria que está ensinando é um desafio e deveria ser uma preocupação constante do professor. Elas devem fazer parte das aulas, ocorrer em muitos exercícios e ser objeto de trabalhos de grupo”(LIMA, 2001: 156).

Mas para isso, as definições precisam ser bem valorizadas pelo professor e bem entendidas pelos alunos. Como problemas da vida real não aparecem acompanhados de fórmulas, a conceituação dos conteúdos precisam ser adequadas, afim do aluno poder decidir diante de um problema o que deverá ser usado.

Um dos defeitos importantes do ensino é a falta de aplicações para os temas estudados em classe. Diante disso, o professor deverá organizar seu curso para conseguir o equilíbrio entre a aplicação prática e os conceitos; ao conseguir isso, terá dado um passo importantíssimo na missão de educar.

CAPITULO I

O TÚNEL

Por dois pontos distintos passa uma, e somente uma linha reta. Na prática, no problema a seguir, há uma montanha entre os pontos A e B; temos uma régua cujo comprimento é menor do que a distância entre esses pontos e além disso, não conseguimos avistar B, estando em A. Mas, mesmo assim, o problema foi resolvido.

1. A História:

Ocorreu em Samos, no ano de 530 antes de Cristo. Há 2500 anos, toda aquela região era habitada por gregos. A ilha de Samos ainda pertence à Grécia, e fica a menos de 2 quilômetros da Costa da Turquia. Samos também pertence à história por ser a terra natal de Pitágoras.

Por volta de 540 antes de Cristo, subiu ao trono um tirano de nome Polícrates. Era um grande defensor das artes e das ciências, mas oprimia o povo, e as relações com os povos vizinhos também não eram fáceis. Para garantir a proteção do seu reino, iniciou a construção de uma muralha de cerca de 6 km em torno da cidade. E para resistir a um cerco prolongado, teria que garantir que a água das fontes, que ficavam do outro lado do monte Castro, não faltaria.. Então colocou em ação os seus engenheiros, que viram a possibilidade de conduzir a água de uma nascente pelo interior da montanha até a cidade.

Decidiu-se assim, abrir um túnel.

Surgem então, dois grandes nomes dessa nossa história, Eupalinos e Teodoro. O primeiro por ter sabido usar, com muito sucesso, um fato elementar de Geometria Plana para resolver um problema de Engenharia. E o segundo, por ter o mérito, segundo os Gregos, de ter inventado a chave, o esquadro de carpinteiro, o torno, a fundição do bronze, e até o aquecimento central.

A melhor entrada e a mais conveniente saída do túnel foram escolhidas pelos assessores de Polícrates. Eram dois pontos, um de entrada e outro de saída.

Cavar a montanha não seria árduo, pois foram capturados muitos escravos pelos navios piratas de Polícrates, a rocha era calcárea e haviam também operários experientes. Eles trabalharam durante quinze anos.

Eupalinos, para reduzir o tempo de realização da obra, propôs que se iniciasse a obra em duas frentes, começando a cavar simultaneamente nos pontos de entrada e saída, encontrando-se as duas turmas no meio do túnel.

Na realidade, no local onde os túneis se encontram existe um desnível, o que mostra que os túneis não estavam exatamente no mesmo alinhamento. Mas este erro, de uns 9 metros na horizontal e 3 metros na vertical, não pode ser visto com grande importância, já que as equipes souberam o momento e o ponto certo em que deviam fazer a ligação entre os túneis. E esse desnível foi feito da melhor forma para o escoamento das águas, uma vez que o túnel vindo da nascente estava mais acima do que o outro vindo da entrada, provando que o túnel foi realmente cavado em duas frentes. E se os erros envolvidos na medição foram os arredondamentos, eles foram feitos de modo inteligente, de forma a facilitar a descida da água.

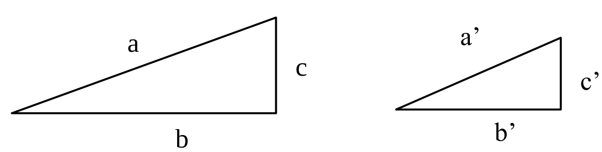
Eupalinos não deixou obras escritas. Mas Heron de Alexandria publicou muitos livros, em um deles, a “Dioptra”, Heron descreve o dioptro, um instrumento usado para medição de ângulos.

Este túnel, construído há 25 séculos, também é mencionado pelo historiador grego Heródoto. E em 1882, arqueólogos alemães, escavando a ilha de Samos, o encontraram. O túnel era um pouco mais alto que um homem comum, e também um pouco mais largo que seus ombros, havia uma vala funda para os canos d’água e aberturas no teto para renovação do ar e limpeza de detritos. E seu comprimento real é cerca de 1Km. Como foi resolvido o problema na época é o que veremos a seguir.

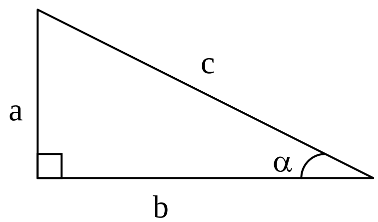
1.1 Primeira Resolução:

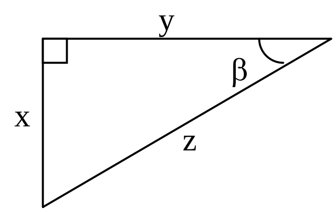
A princípio, Eupalinos usou um teorema de Geometria, que foi o seguinte: *Se dois triângulos retângulos têm catetos proporcionais, seus ângulos agudos são iguais.*

Na figura a seguir, se $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$ então $\angle ab = \angle a'b'$ e $\angle ac = \angle a'c'$.



Demonstração:





$$0^0 \leq \alpha \leq 90^0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} = r$$

$$x = ry$$

$$a = rb$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$r^2 y^2 + y^2 = z^2$$

$$z = \sqrt{r^2 y^2 + y^2}$$

$$z = y\sqrt{r^2 + 1}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$r^2 b^2 + b^2 = c^2$$

$$c = \sqrt{r^2 b^2 + b^2}$$

$$c = b\sqrt{r^2 + 1}$$

$$bx = ay$$

$$b = \frac{ay}{x}$$

$$sen\beta = \frac{x}{z}$$

$$sen\beta = \frac{x}{y\sqrt{r^2 + 1}}$$

$$sen\alpha = \frac{a}{c}$$

$$sen\alpha = \frac{a}{b\sqrt{r^2 + 1}}$$

$$sen\alpha = \frac{a}{\frac{ay}{x}\sqrt{r^2 + 1}}$$

$$sen\alpha = \frac{x}{y\sqrt{r^2 + 1}}$$

$$sen\alpha = sen\beta$$

Ângulos agudos com mesmo seno são iguais.

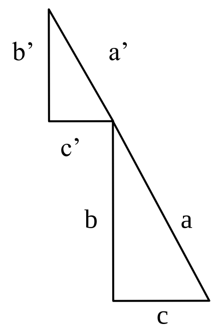
Portanto,

$$\alpha = \beta$$

Sabe-se que este é um caso particular de semelhança de triângulos. (Os triângulos dados têm um ângulo (reto) igual, compreendido entre lados proporcionais).

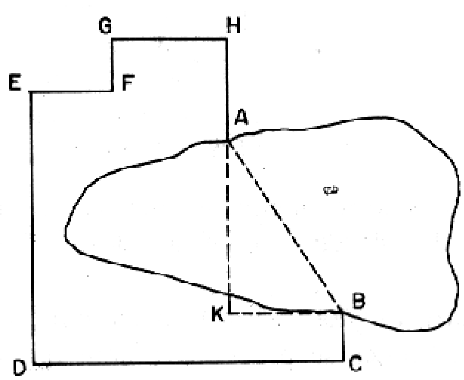
Mas Eupalinos não usou precisamente o teorema acima e sim sua consequência imediata, que enunciaremos agora:

Sejam abc e *a'b'c' triângulos retângulos com um vértice comum. Se os catetos b e c' são perpendiculares e, além disso, tem-se* $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$, *então as hipotenusas a e a' estão em linha reta.*



A afirmação acima decorre imediatamente da anterior pois a soma dos ângulos em torno do vértice comum aos dois triângulos é igual a dois ângulos retos.

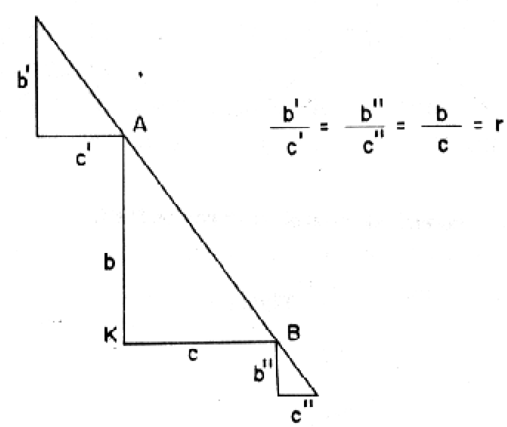
Na figura a seguir, o contorno curvilíneo representa o monte, A é o ponto de entrada e B é a saída do túnel.



A partir do ponto B fixa-se uma direção arbitrária BC e, caminhando ao longo de uma poligonal BCDEFGHA, formada por segmentos tais que cada um deles forma um ângulo reto com o seguinte, atinge-se o ponto A, tendo evitado assim as áreas mais escarpadas da montanha. (Não é difícil imaginar um instrumento ótico rudimentar que permita dar com precisão esses giros de 90 graus).

Anotando-se o comprimento de cada um dos lados da poligonal, determinam-se facilmente os comprimentos dos catetos AK e KB do triângulo retângulo AKB no qual AB é a hipotenusa e os catetos têm as direções dos lados da poligonal considerada.

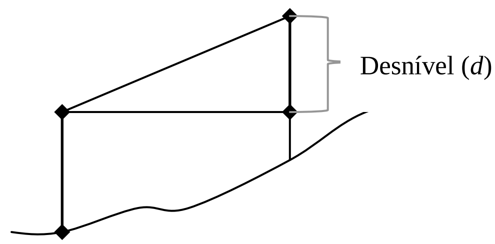
Calcula-se então a razão r = AK/KB. A partir dos pontos A e B, constróem-se dois pequenos triângulos retângulos cujos catetos ainda tenham as direções dos lados da poligonal e, além disso, em cada um desses triângulos, a razão entre os catetos seja igual à razão r entre os catetos do triângulo retângulo AKB:



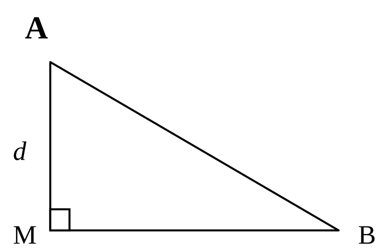
Agora é só cavar o morro, a partir dos pontos A e B, na direção das hipotenusas dos triângulos pequenos.

Isto resolve o problema se os pontos A e B estiverem no mesmo nível: cava-se sempre na horizontal e o plano horizontal é fácil de determinar, por meio de vasos comunicantes ou por outros processos.

No caso em questão, A e B não estão no mesmo nível, já que é preciso que B seja mais baixo, para possibilitar o escoamento da água, e é por isso que ele foi escolhido como ponto de saída. Mas não é difícil calcular a diferença de nível *d* entre A e B. Basta ir registrando à medida que se percorre a poligonal BCDEFGHA, a diferença de nível entre cada vértice e o seguinte. Na prática, isso pode ser feito utilizando-se estacas de mesmo tamanho em cada vértice da poligonal e medindo seus desníveis com uma corda, por exemplo.

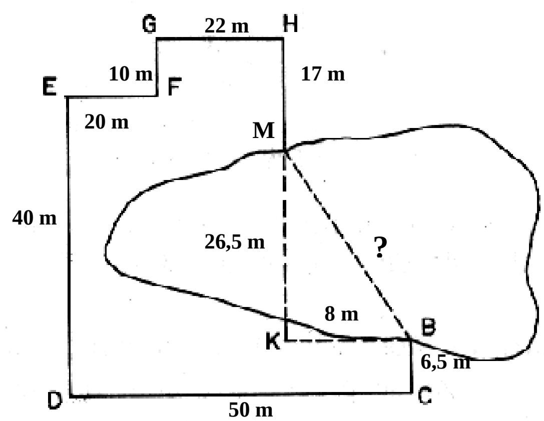


Tendo *d*, consideramos o triângulo retângulo AMB, no qual o cateto AM é vertical e tem comprimento *d*. O comprimento da hipotenusa AB se determina pelo teorema de Pitágoras, através dos catetos do triângulo AKB. O desenho abaixo mostra um corte na montanha, mostrando os pontos A, M e B.



A razão $\frac{AM}{AB} = s$ nos informa como controlar a inclinação da escavação: a partir do ponto A, cada vez que andarmos 1 unidade de comprimento ao longo do túnel, devemos "descer" s unidades, como uma escada.

Uma simulação com medidas é feita a seguir:



Anotando-se o comprimento de cada um dos lados da poligonal, determinou-se os comprimentos dos catetos MK = 26,5m e KB = 8m do triângulo retângulo MKB no qual MB é a hipotenusa e os catetos têm as direções dos lados da poligonal considerada.

Pelo teorema de Pitágoras calculamos MB:

$(MB)^2 = (MK)^2 + (KB)^2$

$(MB)^2 = (26,5)^2 + 8^2$

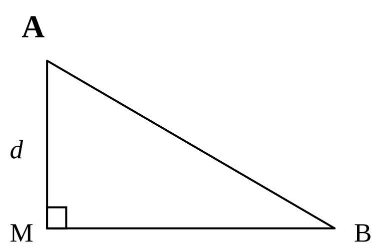
$(MB)^2 = 702,25 + 64$

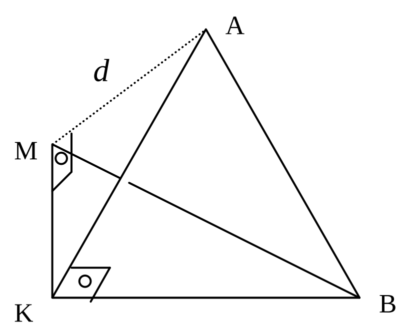
$(MB)^2 = 766,55$

MB = 27,68m

Como M e B não estão no mesmo nível, é preciso calcular d , a diferença de nível entre o ponto real A e B; suponhamos que o desnível seja d = 10m.

Então:





$(d)^2 + (MK)^2 = (AK)^2$

$10^2 + (26,5)^2 = (AK)^2$

AK = 28,32m

$(d)^2 + (MB)^2 = (AB)^2$

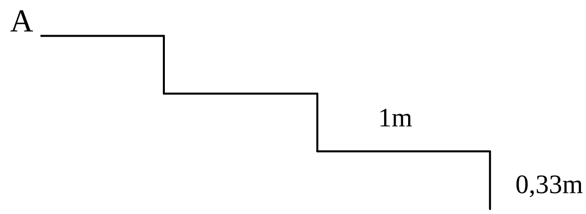
$10^2 + (27,68)^2 = (AB)^2$

AB = 29,43m

Calculamos agora a razão $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{d}{AB}$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{10}{29,43} = 0,33m = s$$

O valor s = 0,33m nos indica quanto “descer” na escavação:

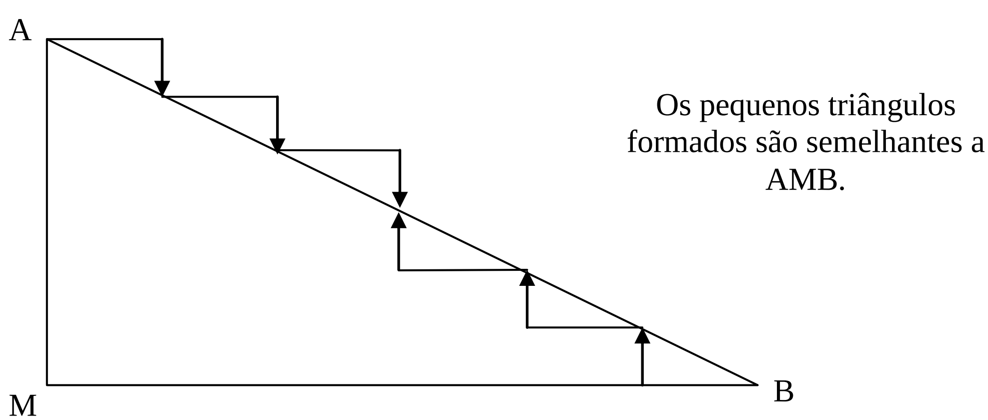


Partindo do ponto A, cada vez que percorrermos 1 unidade na horizontal, descemos 0,33m na vertical.

Para os trabalhadores que começam em B, cada metro escavado na horizontal deve ser seguido de 0,33m escavados na vertical, para cima.

E o ângulo de entrada KBM no plano, será dado pelos pequenos triângulos retângulos construídos através do teorema usado por Eupalinos, considerados no plano AKB.

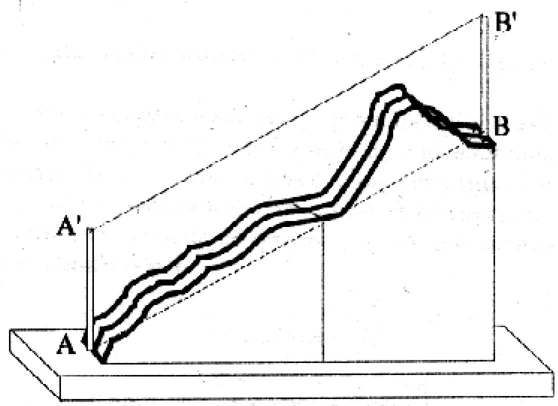
Observe que a razão $\frac{d}{AB}$ é o seno do ângulo que AB faz com o plano horizontal.



Deste modo, partindo uma equipe do ponto A e outra do ponto B , haverá o encontro das duas turmas no meio do túnel.

1.2 Segunda Resolução:

Colocam-se verticalmente duas estacas suficientemente altas, uma em A e outra em B, de modo que tenham a mesma altura acima do solo.

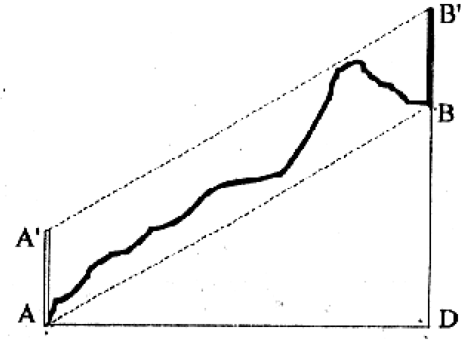


Então, quando os postes estão na vertical e AA'=BB', a reta A'B'é paralela à reta AB.

Os postes devem ser suficientemente altos para permitirem fazer alinhamento de A'com B'.

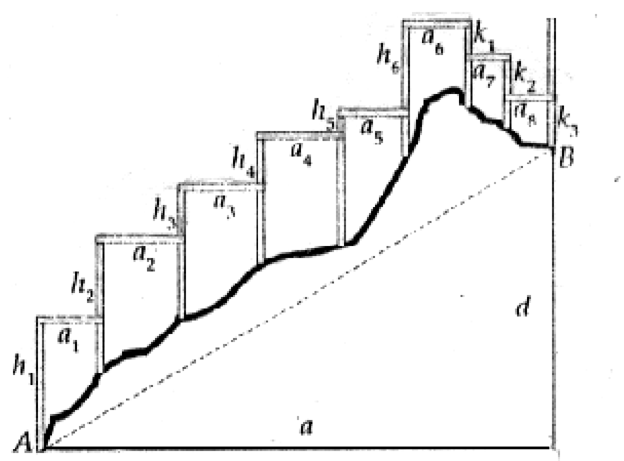
Deste modo, os pontos A, A', B e B' definem um plano. Assim, a equipe que começa em A deve trabalhar no plano AA'B'(estes pontos são todos visualmente acessíveis na zona A) e a equipe que começa em B deve trabalhar no plano BB'A'.

Como AA'=BB'e AA'//BB', o quadrilátero [AA'BB'] é um paralelogramo e a reta AB é paralela à reta A'B'. Com um instrumento muito rudimentar é possível obter a amplitude do ângulo correspondente à inclinação que A'B'faz com a horizontal. Por outro lado, os ângulos BÂD e ABD são complementares, o que permite obter igualmente a amplitude do ângulo ABD.



Deste modo, cada equipe saberia qual a inclinação a produzir na sua parte do túnel.

Este processo não permitia prever nem o custo nem o tempo de duração da obra e tornava impossível localizar, no interior da montanha, a posição de um grupo em relação ao outro. Assim, poderiam estar a trabalhar a poucos metros um do outro sem saberem. Tudo isto porque ainda não se sabe a distância entre A e B. Para obter esta distância, começamos calculando o desnível *d* e o afastamento *a*. A colocação de postes verticais do mesmo tamanho e a utilização de traves horizontais para unir esses postes permitem obter estes dois valores. Não vamos esquecer que os geômetras do Egito eram considerados “esticadores de cordas” e construíram pirâmides gigantes que chegaram aos nossos dias.

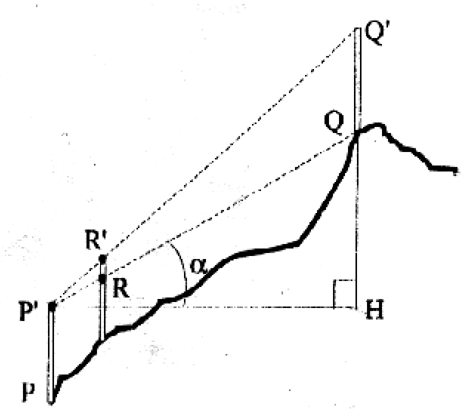


Baseando-nos na figura, temos:

$$a = \sum a_i \,, \qquad d = \sum h_i - \sum k_i \,, \qquad \text{e} \qquad AB = \sqrt{a^2 + d^2}$$

Podemos também obter o desnível e o afastamento utilizando conhecimentos trigonométricos mais profundos, da seguinte maneira:

Consideremos dois pontos P e Q quaisquer numa montanha, mas de modo que seja possível avistar um a partir do outro.



Suponhamos que [QQ’] é vertical e com quatro unidades de medida de comprimento. Por estarem próximos, é ainda possível obter, por medição direta, P’R e RR’ que vamos supor iguais a 6 e 1, respectivamente.

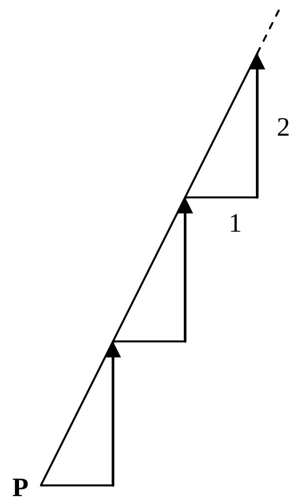
Se [R’R] for vertical, os triângulos [P’RR’] e [P’QQ’] são semelhantes. Assim, chamando de x a distância de R a Q, tem-se $\frac{6}{1} = \frac{x+6}{4}$, o que permite concluir que x = 18. Deste modo, a distância de P’a Q é 24.

O afastamento horizontal de P e Q é dado por *a* = P’H = 24cos(α), e o desnível vertical entre os mesmos dois pontos é dado por d = PP’+ QH , resultando a expressão *d* = PP’+ 24sen(α), sendo [PP’] vertical. Supondo α = 60°, teremos *a* = 12 e *d* = 24,4.

Quando escrevemos a equação reduzida de uma reta no plano, estamos acostumados a destacar o papel igualmente importante desempenhado pela declividade e pela ordenada na origem.

Mas a declividade de uma reta é, com certeza, a característica mais importante da reta, uma vez que a importância da ordenada na origem só é evidente quando a representação da reta está associada a um referencial. Por outro lado, a declividade da reta está diretamente relacionada com a inclinação da reta em relação à direção horizontal. A declividade da reta AB é $\frac{d}{a}$, e como *a* = 12 e *d* = 24,4 a declividade da reta AB será igual a $\frac{24,4}{12} = 2,0333...$, ou aproximadamente, 2. Na prática, isto significa que, partindo de um ponto P da reta, é possível obter mais pontos da reta procedendo da seguinte forma: partir de P, avançar 1 unidade para a frente e, em seguida, avançar

2 unidades na vertical. Assim, a equipe A teria de escavar 1 unidade na horizontal e 2 na vertical e a equipe B, 1 unidade na horizontal e 2 na vertical.



Desta forma, independente de quem trabalhar mais rapidamente, as equipes vão encontrar-se no interior da montanha.

1.3 Sugestão Para Sala de Aula:

Objetivo:

Ao trabalhar esse problema prático e real, espera-se que o aluno resolva a situação-problema fixando ainda mais os conteúdos utilizados. Mostra-se também que com conteúdos relativamente simples o problema foi resolvido.

Conteúdos:

- Razão e Proporção;
- Relações métricas no triângulo retângulo(Teorema de Pitágoras);
- Semelhança de triângulos;
- Perpendicularidade;
- Polígonos;

Desenvolvimento da atividade:

1. Organizar a classe em grupos de 4 a 5 alunos;
2. Entregar a situação-problema descrita com tudo o que foi usado, mas sem as medidas;
3. Cada grupo deverá ler e entender como foi feito, havendo discussões na sala de aula entre os grupos;
4. Sugerir que façam simulação com medidas, incentivando-os a usar números racionais e irracionais, chamando a atenção que na natureza a maioria das medidas não são dadas em números inteiros;
5. Propor a construção da maquete de uma montanha, com materiais simples, como massa de modelar, palitos, barbante, para observar ainda melhor o que acontece realmente;
6. Observar se os alunos realmente compreenderam que até mesmo sem fazer a mira de um ponto ao outro da montanha, ou até mesmo esticar um fio, o problema, através de teoremas simples, foi resolvido;
7. Sistematizar os conceitos envolvidos;

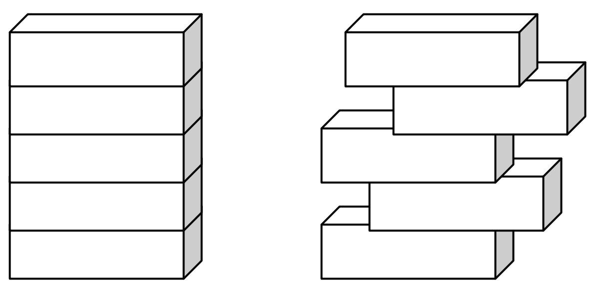
CAPITULO II

TRABALHANDO COM VOLUMES

Neste capítulo iremos trabalhar com o volume dos sólidos geométricos comumente encontrados em nosso cotidiano: Prismas e Cilindros. Após uma breve exposição do volume do prisma e do cilindro, apresentaremos uma atividade desenvolvida com alunos da 5ª fase (3° ano) do Ensino Médio da Escola de Educação Básica Doutor Paulo Fontes situada em Florianópolis, Santa Catarina.

2. Princípio de Cavalieri:

O Princípio de Cavalieri pode ser entendido usando, por exemplo, pilhas de caixas idênticas, isto é, de mesmas dimensões. E imaginemos ainda a formação de dois sólidos de formato diferente formados com essas caixas, como mostram as figuras abaixo:



Ambos os sólidos possuem a mesma base, a mesma altura e ocupam o mesmo lugar no espaço, ou seja, têm o mesmo volume. E se têm o mesmo volume, dizemos que eles são <u>sólidos equivalentes.</u>

O Princípio de Cavalieri diz:

Dois sólidos, S1 e S2, de mesma altura e bases com mesma área contidas no mesmo plano α *têm o mesmo volume se qualquer plano* β *paralelo a* α *determinar em S1 e S2 secções transversais com áreas iguais.*

2.1 Volume do Prisma:

Consideremos um prisma qualquer e um paralelepípedo reto-retângulo ambos com a mesma altura e bases de mesma área apoiados num mesmo plano horizontal.

Qualquer outro plano horizontal que cortar os dois sólidos determinará figuras iguais às suas bases. Logo, pelo princípio de Cavalieri, eles têm o mesmo volume:

$V_{prisma} = V_{paralelepípedo}$

Como $V_{paralelepípedo} = A_b.h$, então,

$\mathbf{V_{prisma} = A_b.h}$

O volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela altura.

2.2 Volume do Cilindro:

Consideremos um cilindro e um prisma, ambos com mesma altura e bases de mesma área, apoiados num mesmo plano horizontal

Qualquer outro plano horizontal que cortar os dois sólidos determinará figuras iguais às suas bases.

Logo, o princípio de Cavalieri assegura que o cilindro e o prisma têm o mesmo volume, ou seja:

$V_{cilindro} = V_{prisma}$

Como $V_{prisma} = Ab.h$, então, $V_{cilindro} = A_b.h$

Sendo a base do cilindro uma circunferência cuja área é πR^2, temos:

$\mathbf{V_{cilindro} = \pi R^2.h}$

O volume do cilindro é igual ao produto da área da base pela altura.

2.3 Experimentação:

Esta atividade foi desenvolvida na Escola de Educação Básica Doutor Paulo Fontes, situada em Santo Antônio de Lisboa, Florianópolis. Trabalho este, aplicado na 5ª fase (3° ano) do período noturno, composta por vinte e seis alunos com faixa de idade entre dezesseis e dezessete anos.

Comecei a lecionar nesta escola este ano, fazendo mais ou menos quatro meses que estou com a turma. Tendo observado que é uma classe muito criativa e dedicada, me impulsionei ainda mais na aplicação desta atividade.

Foi trabalhado com a turma até agora o conteúdo de Geometria Espacial. Poliedros, Prismas, Pirâmides e Cilindros. Já tendo esta bagagem de conteúdos, observando a boa participação da turma, e juntando as idéias da minha monografia, decidi desenvolver uma atividade prática com os alunos.

Após a criação da situação-problema, dividi a sala em cinco grupos de quatro alunos, e dois grupos de três alunos, e entreguei a atividade para cada grupo fazer em casa, com o prazo de uma semana para ser entregue, exigindo que relatassem passo-a-passo o raciocínio de cada questão.

E a atividade foi entregue sem nenhuma sugestão de como se fazia qualquer uma das questões.

Objetivo:

Espera-se com estas aplicações práticas que o aluno seja capaz de resolver situações-problema sobre sólidos geométricos. Especificamente, objetiva-se que o aluno seja capaz de calcular área e volume, converter medidas de massa e volume e, principalmente, estabelecer uma conexão do conteúdo escolar com situações que se apresentam no dia-a-dia, através da idéia das aproximações.

Uma atividade ligada à realidade do aluno, torna o conteúdo mais atraente, e a aprendizagem mais eficaz.

Conteúdos envolvidos na atividade:

- Área das figuras geométricas planas;
- Medida da circunferência;
- Construções geométricas;
- Conversão de unidades de medidas;
- Porcentagem;
- Volume de sólidos;

2.4 Atividade:

Várias embalagens têm formato de cilindros e prismas: latas de leite condensado, caixas de suco, latas de ervilha, de sardinha, etc.

Vemos também que algumas embalagens trazem a massa do produto e não o seu volume. É o caso do leite condensado, das ervilhas e da sardinha. Já outros, como suco e leite, trazem o volume do produto.

1) Considerando-se a lata de leite condensado (marca Nestlé), explique:

a) Por que o produto é dado em gramas e não em litros?

b) Qual o volume da lata?

c) Qual o volume do produto?

d) Qual a porcentagem do volume da lata que não é ocupado pelo produto?

2) Considerando-se uma lata de sardinhas, vê-se que o formato de sua base não é um polígono, nem uma circunferência, nem uma elipse. Desenvolva um método para calcular o volume aproximado de uma lata de sardinhas.

3) Considerando uma caixa de suco, calcule o volume da caixa e a massa do suco.

Qual a porcentagem do volume da caixa que não é ocupada pelo produto?

Antes de aplicar o exercício, foi feita uma análise *a priori* :

1) a) Porque sendo um produto denso, ele se assemelha mais a produtos com medidas de massa, do que com medidas de volume.

1) b) A princípio desenha-se no papel a base da lata de leite condensado, resultando uma circunferência com raio desconhecido.

Como fazemos para encontrar o raio de uma circunferência dada?

Traçamos duas cordas quaisquer e achamos a mediatriz de cada uma delas; onde elas se encontrarem será o centro da circunferência. Com isso, traçamos o diâmetro e consequentemente achamos o raio.

Após fazer isso encontramos:

Diâmetro (D) $\cong$ 7 cm

Raio (R) $\cong \frac{7}{2} = 3{,}5$ cm

Altura (H) $\cong$ 7,5 cm

Vem:

Área da base (S_b) = πR^2

$S_b = \pi\,(3{,}5)^2$

$S_b = 12{,}25\pi$ cm²

Tendo a altura e a superfície da base, achamos o volume:

$V = S_b .\ H$

$V = 12{,}25\pi \times 7{,}5$

$V = 91{,}875\pi$

$V \cong 91{,}875 \times 3{,}141$

$V_1 \cong 288{,}62$ cm³

1) c) Temos a quantidade do produto dado em medidas de massa na embalagem, mas agora queremos o volume. Para isso colocamos o produto num recipiente graduado com medidas de volume. Com isso achamos $V_2 \cong 280$ ml.

1) d) Para achar a porcentagem entre os volumes, precisamos primeiramente que os dois estejam com as mesmas unidades, então trabalharemos com os dois em mililitros (ml).

Temos:

1 m³ = 1000 L

Mas,
1 m³ = 10^6 cm³
1000 L = 10^6 ml

Então, 10^6 cm³ = 10^6 ml

Logo, 1 cm³ = 1 ml

Portanto, o volume da lata, que é igual a aproximadamente 288,62 cm³, corresponderá a aproximadamente 288,62 ml.

Ou, o volume do produto que é igual aproximadamente 280 ml, corresponderá a aproximadamente 288,62 cm³.

Então, calculando a diferença entre o volume da lata (V_1) e o volume do produto (V_2) (vácuo), temos:

$V_1 - V_2 = 288{,}62 - 280 \cong 8{,}62$ ml ou 8,62 cm³

Em porcentagem:

$288{,}62 \rightarrow 100\%$

$8{,}62 \quad \rightarrow \; x$

$$x = \frac{8{,}62}{288{,}62}$$

$x \cong 0{,}0298$

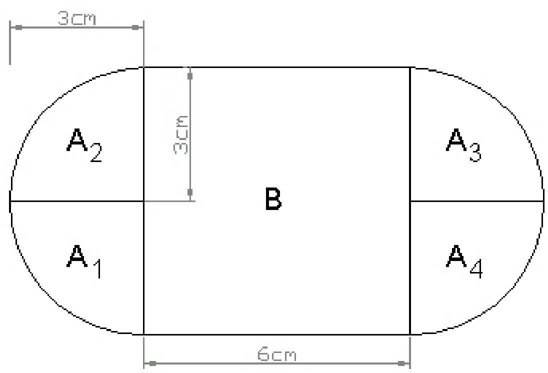
$x \cong 2{,}98\ \%$

A porcentagem do volume da lata que não é ocupado (vácuo) é de 2,98%.

2) Para calcularmos o volume da lata de sardinhas, precisaremos primeiro desenvolver um método para calcular a área da base. Abaixo listaremos alguns métodos:

<u>1° Método:</u>

Com a medição da embalagem através de algum instrumento bom e com a área da base desenhada em papel milimetrado para facilitar os cálculos, temos o seguinte desenho:



Altura (H) $\cong$ 2,2 cm

Raio (R) $\cong$ 3 cm

Sabendo-se que A_1 , A_2 , A_3 , A_4 representam um quarto de circunferência, então:

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 4 \times \frac{1}{4}\pi R^2 = \pi R^2$, isto é, a área da circunferência.

Tomando $\pi = 3{,}141$, temos:

$A = (3)^2\pi = 9\pi$

$A = 9 \times 3{,}141$

$A \cong 28{,}269\ cm^2$

Sendo B, a área de um quadrado de 6 cm de lado, temos:

$B = 6^2 \cong 36\ cm^2$

Logo, a área da base (S_b), será:

$S_b = A + B$

$S_b = 28{,}269 + 36$

$S_b \cong 64{,}269\ cm^2$

Calculando agora o volume, teremos:

$V = S_b .H$

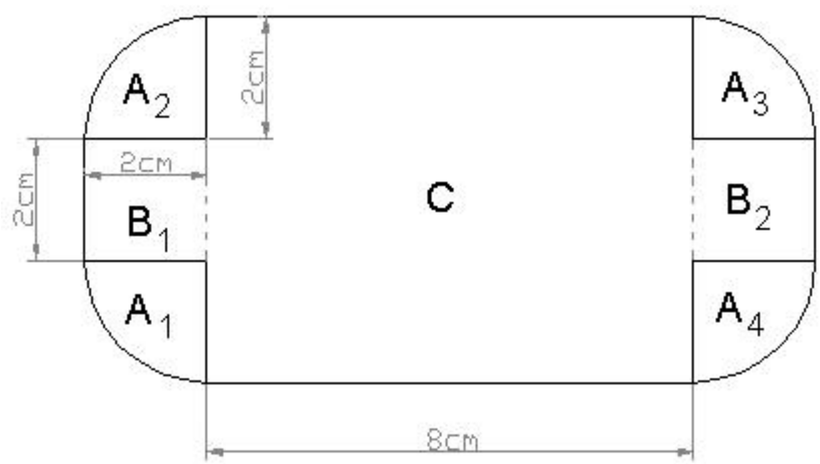
$V = 64{,}268 \times 2{,}2$

$V \cong 141{,}3918\ cm^3$

<u>2° Método:</u>

Fazendo da mesma forma que o primeiro método encontramos desta vez:

Como mostra a figura abaixo:



Altura (H) $\cong$ 2,2 cm

Raio (R) $\cong$ 2 cm

Sabendo-se que A_1 , A_2 , A_3 , A_4 representam um quarto de circunferência, então:

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 4 \times \frac{1}{4} \pi R^2 = \pi R^2$, isto é, a área da circunferência.

Tomando $\pi = 3{,}141$, temos:

$A = (2)^2 \pi = 4\pi$

$A = 4 \times 3{,}141$

$A \cong 12{,}564\ cm^2$

Sendo B_1 e B_2 áreas de um quadrado de 2 cm de lado, temos:

$B = B_1 + B_2$

$B = 2 \times 2^2 = 2 \times 4$

$B \cong 8\ cm^2$

Como C é área de um retângulo de base (b) igual a 8 cm e altura (h) igual a 6 cm, temos:

$C = b \times h$

$C = 8 \times 6$

$C \cong 48\ cm^2$

Logo, a área da base (S_b) será:

$S_b = A + B + C$

$S_b = 12{,}564 + 8 + 48$

$S_b \cong 68{,}564\ cm^2$

Calculando agora o volume, teremos:

$V = S_b\ .H$

$V = 68{,}564 \times 2{,}2$

$\boldsymbol{V \cong 150{,}8408\ cm^3}$

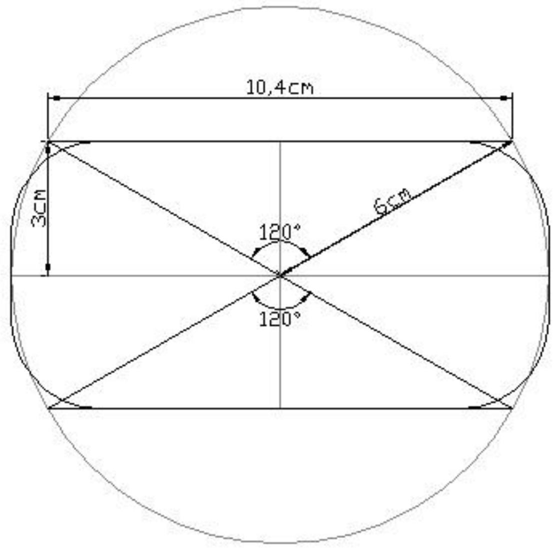
3° Método:

Neste método, desenhando a área da base da lata em papel milimetrado, traçamos uma circunferência ao seu redor, e medimos como de costume.

O raciocínio neste caso consiste em calcular os dois pedaços de circunferência que sobram, e subtrair o resultado do valor total da área desta circunferência, encontrando assim a área da base da lata.

Para isso, calcularemos a área do triângulo, e em seguida diminuiremos da área do setor circular resultando a parte de circunferência que queremos, daí é só multiplicar por dois, pois são simétricas, e teremos as duas partes para diminuirmos da área total da circunferência achando assim a área da base da lata.

Em seguida, teremos o desenho esboçado, e a resolução passo-a-passo:



Raio (R) $\cong$ 6 cm

Altura da lata (H) $\cong$ 2,2 cm

Ângulo do setor $\cong$ 120°

Base do triângulo (b) $\cong$ 10,4 cm

Altura do triângulo (h) $\cong$ 3 cm

Essas medidas podem ser encontradas tanto por medição, como também por Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo (seno, cosseno, tangente).

$$A_{setor} = \frac{R^2\alpha}{360°}\pi = \frac{36\times 120}{360}\pi = 12\pi$$

Tomando $\pi = 3{,}141$, temos:

$A_{setor} = 12 \times 3{,}141$

$A_{setor} \cong 37{,}692$ cm²

Calculando agora a área do triângulo:

$$A_{triangulo} = \frac{b\times h}{2} = \frac{10{,}4\times 3}{2}$$

$A_{triangulo} \cong 15{,}60\ cm^2$

Para achar o pedaço da circunferência que queremos, fazemos:

$A_{setor} - A_{triangulo} = 37{,}692 - 15{,}60 \cong 22{,}092$ cm²

Como são dois pedaços, e são simétricos, e chamando-os de P,temos:

$P = 2 \times 22{,}092$

$P \cong 44{,}184$ cm²

Calculando a área da circunferência, e tomando $\pi = 3{,}141$, obtemos:

$A_{circ.} = \pi R^2$

$A_{circ.} = \pi(6)^2 = 36\pi$

$A_{circ.} = 36 \times 3{,}141$

$A_{circ.} \cong 113{,}076$ cm²

Calculando a área da base, teremos:

$S_b = A_{circ.} - P = 113{,}076 - 44{,}184$

$S_b \cong 68{,}892$ cm^2

Finalmente vamos calcular o volume:

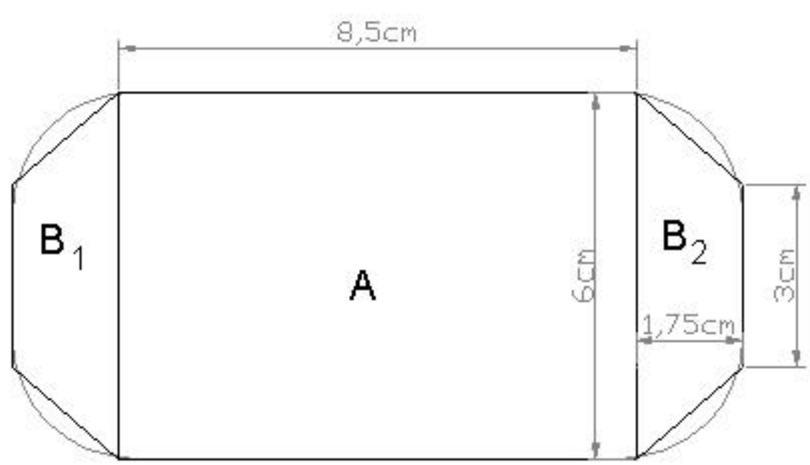
$V = S_b.H$

$V = 68{,}892 \times 2{,}2$

$V \cong 151{,}5624$ cm^3

<u>4° Método:</u>

Neste método interpretamos a área da base como sendo a junção de um retângulo com dois trapézios laterais, esboçado na figura abaixo:



Calculando primeiramente a área dos trapézios:

Por medição constata-se que os trapézios B_1 e B_2 são iguais, então precisamos apenas calcular um deles e multiplicar por dois, obtendo C :

Base maior (B) $\cong$ 6cm

Base menor (b) $\cong$ 3cm

Altura (h) $\cong$ 1,75 cm

Então:

$$B_1 = \frac{(B+b)\times h}{2} = \frac{(6+3)\times 1{,}75}{2} = 4{,}5 \times 1{,}5 \cong 7{,}875 \text{ cm}^2$$

Os dois trapézios juntos será:

$C = 2 \times 6{,}75 \cong 15{,}75 \text{ cm}^2$

Calculando agora a área do retângulo A:

Base (b) = 8,5 cm

Altura (h) = 6 cm

$A = b \times h = 8{,}5 \times 6 \cong 51 \text{ cm}^2$

A área total da base da embalagem será:

$C + A = 15{,}75 + 51 \cong 66{,}75 \text{ cm}^2$

Calculando o volume da lata:

Altura da lata (H) $\cong$ 2,2 cm

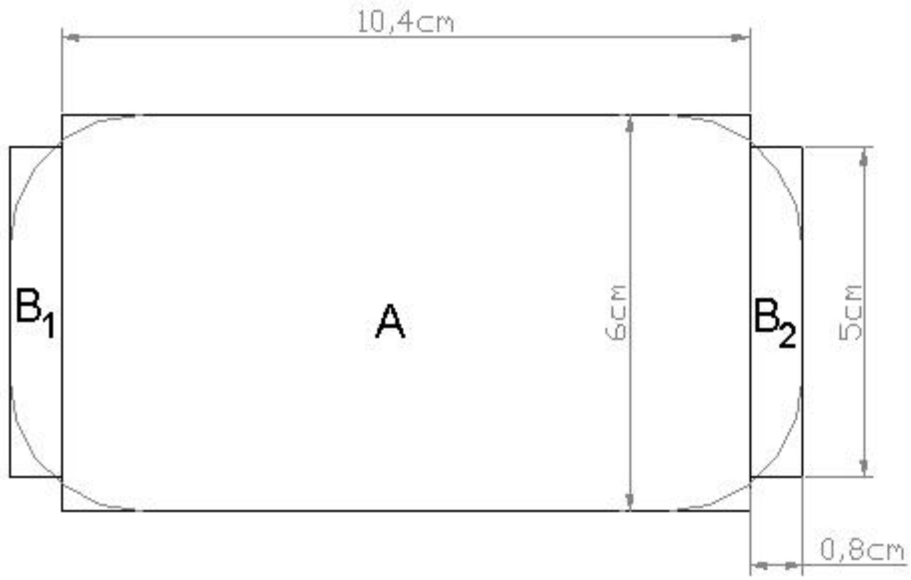
Superfície da base (S_b) $\cong$ 66,75 cm²

$V = S_b \times H = 66{,}75 \times 2{,}2$

$V \cong 146{,}85 \text{ cm}^3$

5° Método:

Esse método consiste em calcular a área da base da lata, através da área aproximada do retângulo mostrado na figura abaixo, juntamente com a área dos dois pequenos retângulos formados na lateral:



Calculando a área do retângulo lateral B_1:

Base (b) ≅ 0,8 cm

Altura (h) ≅ 5 cm

$B_1 = b \times h = 0{,}8 \times 5$

$B_1 \cong 4$ cm²

Como B_1 e B_2 por medição são iguais temos:

$B_1 = B_2 \cong 4$ cm²

E chamando de B a área dos dois juntos obtemos:

$B = B_1 + B_2 = 2 \times 4$

$B \cong 8$ cm²

Calculando agora a área do retângulo A:

Base (b) ≅ 10,4 cm

Altura (h) ≅ 6 cm

$A = b \times h = 10{,}4 \times 6$

$A \cong 62{,}4$ cm²

A superfície da base (Sb) será:

$S_b = A + B = 8 + 62{,}4$

$S_b \cong 70{,}4$ cm²

Calculando então o volume:

Altura da lata (H) ≅ 2,2 cm

Superfície da base (S_b) ≅ 70,4 cm²

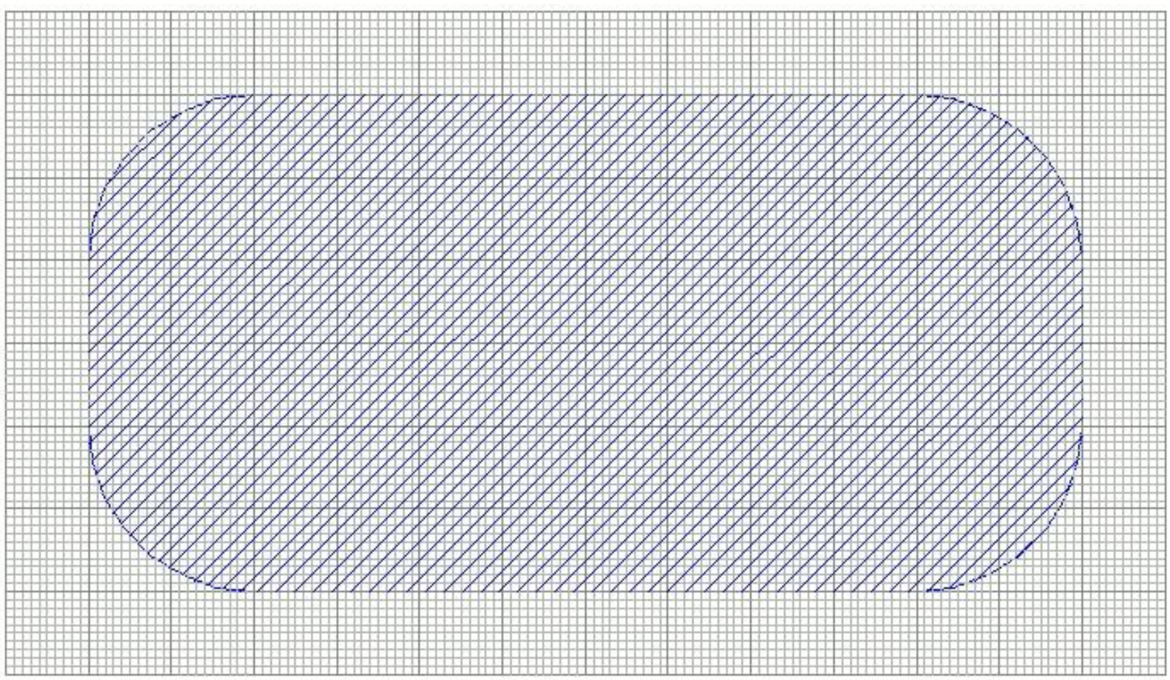
$V = S_b \times H = 70,4 \times 2,2$

V = 154,88 cm³

<u>6° Método:</u>

Um outro método quando se quer determinar a área de uma figura irregular curvilínea, é sobrepor o desenho desta base, numa folha de papel milimetrado, como havíamos feito até agora para determinarmos mais facilmente as medidas.

Observe a figura abaixo:



Se contarmos o número de quadrados inteiramente contidos na figura, e supondo que eles meçam 1 cm² , poderemos dizer que a área da base será de 60 cm² . Essa medida é uma aproximação por falta da área da base da embalagem.

Mas, se contarmos o número de quadrados que têm alguma parte contida na figura, diremos que a área será de aproximadamente 72 cm² . Nesse caso, essa medida é uma aproximação por excesso da área da base da embalagem.

Calculo do volume por falta:

Sabendo -se que a altura da lata (H) é de 2,2 cm, temos:

$V = S_b.H$

$V = 60 \times 2,2$

$V \cong 132\ cm^3$

Calculando o volume por excesso:

$V = S_b.H$

$V = 72 \times 2,2$

$V \cong 158,40\ cm^3$

Observação: Se quisermos obter uma área mais aproximada da medida real, basta utilizar quadrinhos de tamanhos cada vez menores.

3) Ao medir a embalagem de suco escolhida, notamos que é um prisma quadrangular regular, com as seguintes medidas:

Altura (H) $\cong$ 19,7 cm

Aresta da base (a) $\cong$ 7,2 cm

Calculando o volume da caixa de suco:

$S_b = a^2 = (7,2)^2 = 51,84\ cm^2$

$V = S_b.H = 51,84 \times 19,7$

$V \cong 1021,25\ cm^3$

Calculando agora a massa do suco:

Como o suco se assemelha à água temos:

1 Kg água = 1 L

1000 g = 1000 ml

A quantidade(volume) de suco informado na embalagem é de 1 L.

Portanto, a massa de suco será 1 Kg ou 1000 g.

Calculando a porcentagem do volume da caixa que não é ocupado pelo produto (vácuo):

Volume do suco (V_2) → 1 L = 1000 ml

Como já vimos, 1 cm³ = 1 ml, então:

Volume da caixa (V_1)→ 1021,25 cm³ = 1021,25 ml

$V_1 - V_2 = 1021{,}25 - 1000 = 21{,}25$ ml

1021,25 ml → 100%

21,25 ml → x

$$x = \frac{21{,}25}{1021{,}25}$$

x = 0,0208

x = 2,08%

A porcentagem do volume da caixa que não é ocupado pelo produto será de 2,08%.

2.5 Análise da Experiência:

Foram entregues 7 trabalhos.

1ª Questão:

Considerando-se a lata de leite condensado(marca Nestlé), explique:

a) Por que o produto é dado em gramas e não em litros?

Respostas:

- Três grupos responderam:
  "Porque é dado todo o peso e não só o peso do produto em si; 395g tudo e 392 o produto".
- Dois grupos responderam:
  "Pela diferença de densidade".
- Um grupo respondeu:
  "Porque é dado o peso do produto e não do conteúdo".
- Um grupo substituiu a lata de leite condensado por uma lata de fermento em pó, justificando que fermento é sólido e não líquido.

b) Qual o volume da lata?

Respostas:

GRUPO	RAIO(cm)	ALTURA(cm)	VOLUME(cm³)
G1	8,75	8,1	357,66
G2	3,75	8,1	357,66
G3	3,74	9	395,04
G4	3,75	8,1	357,66
G5	3,74	9	395,64
G6	3,75	9	395,04
G7 lata de fermento	2,5	7	137,41

Observação: Nenhum grupo justificou o cálculo do diâmetro da lata utilizada.

c) Qual o volume do produto?

Respostas:

GRUPO	VOLUME DO PRODUTO
G1	373,66g
G2	350 ml
G3	373,66 g
G4	350 ml
G5	373,66 g
G6	373,66g
G7 lata de fermento	37,5 cm³

d) Qual a porcentagem do volume da lata que não é ocupada pelo produto?

Respostas:

GRUPO	PORCENTAGEM (%)
G1	2,14
G2	2,14
G3	4,7
G4	2,14
G5	4,7
G6	4,7
G7 lata de fermento	14

2ª Questão:

Considerando-se uma lata de sardinhas, vê-se que o formato de sua base não é um polígono, nem uma circunferência, nem uma elipse. Desenvolva um método para calcular o volume aproximado de uma lata de sardinhas.

Respostas:

GRUPO	MÉTODO	VOLUME APROXIMADO
G1	2	135,175 cm^3
G2	2	142,05 cm^3
G3	2	113,4 π cm^3
G4	2	135,175 cm^3
G5	2	135,17 cm^3
G6	2	113,49 cm^3
G7	*	$9(8 + 3\pi)$ cm^3

* Não usou nenhum dos métodos analisados *a priori* . Observou a figura como a união de um cilindro com um paralelepípedo, calculou o volume de cada um deles e somou os resultados, achando o volume total da embalagem.

3ª Questão:

Considerando uma caixa de suco, calcule o volume da caixa e a massa do suco.
Qual a porcentagem do volume da caixa que não é ocupada pelo produto?
Respostas:

GRUPOS	DIMENSÕES (cm)	VOLUME DA CAIXA(cm^3)	MASSA DO SUCO	PORCENTAGEM (%)
G1	11,5; 4,7; 3,9	210,795	—	5,12
G2	11,5; 4,7; 3,9	210,795	—	5,12
G3	16,5; 9,5; 6,5	1040,3	—	3,87
G4	11,5; 4,7; 3,9	210, 795	—	5,12
G5	11,5; 4,7; 3,9	210,795	—	5,12
G6	16,5; 9,5; 6,5	1040,3	—	3,87
G7	18, 16, 7	1260	1 Kg	20

Observação: Como não estava especificado no problema, os grupos usaram embalagens de suco diferentes, por isso a indicação das dimensões na tabela.

Observações:

1. Nenhum grupo resolveu corretamente a questão 1c). Além disso, quatro grupos responderam a questão 1c) usando medida de massa (gramas). Também na questão 3, somente um grupo calculou a massa do suco. Observou-se assim que os alunos desconhecem as relações entre medidas de massa e volume.

2. Ainda na questão 1c) e 1d), verificou-se que os alunos desconhecem o conceito de densidade e sua influência nas embalagens.

3. Verificou-se que todos os grupos cometeram erros de cálculo, devido à falta de atenção.

4. Verificou-se que seis grupos tiveram dificuldade em explicar os procedimentos utilizados nas resoluções.

5. Todos os grupos utilizaram corretamente a fórmula para o cálculo de volume.

O que fazer após a análise da atividade?
Sugestões.

- Elogiar os acertos;

- Falar sobre densidade, talvez até propor ao professor de física que faça isso, fazendo uma ponte entre as duas disciplinas. Daí então retomar o problema e fazer outros exercícios para fixação do conceito;

- Relembrar notação científica, para auxiliar nas transformações que envolvem números grandes;

- Falar sobre interpretação das medidas de massa e volume e propor mais problemas para fixar as idéias;

CONCLUSÃO

Houve uma grande satisfação em fazer este trabalho, já que se trata de um conteúdo que está sendo muito discutido nas escolas em geral.

Esta nova forma de abordagem não só da matemática, mas de outras disciplinas também, está sendo praticamente uma exigência de diretores de escolas perante a insatisfação dos alunos em relação a simples aplicações de fórmulas, sem saberem aonde querem chegar.

Tal situação deixa os alunos num estado de comodidade, desinteressados pela matéria, chegando a dizer que a matemática não serve para nada. Os alunos sentem necessidade de enxergar o porque das aplicações de um conteúdo, e demonstram grande satisfação quando são sugeridas atividades nesse sentido.

Na apresentação do trabalho, foi mostrado que pensadores há muitos anos atrás já falavam isso e que só hoje, alguma coisa realmente está sendo feita para mudar esse quadro.

Na experiência que fiz com meus alunos, observei suas dificuldades em interpretar, através dos conceitos matemáticos já estudados um problema rotineiro em nossas vidas; não há o costume de olhar as coisas ao nosso redor cientificamente, quebrando o tabu de que a matemática só é utilizada em cálculos complexos de engenharia, computação, entre outros. Ela também é aplicada em coisas relativamente simples com as quais nos deparamos diariamente.

Esse trabalho que foi feito com os alunos deixou claro que o modo de abordagem dos conteúdos, não se relacionam com o mundo fora da escola. Causando então os problemas citados acima.

No trabalho, sugerimos algumas idéias, afim de ao menos despertar no leitor o interesse para essa nova abordagem do ensino. No entanto, não é tão simples trabalhar com este tipo de atividade. Uma dificuldade é escolher atividades práticas que não sejam só atraentes, mas que também envolvam conteúdos pertinentes, para assegurar a aprendizagem e fixação dos conteúdos envolvidos.

É preciso relacionar mais o saber escolar com o saber praticado fora da escola, de modo que os alunos aprendam a gostar da matemática e percebam o quanto esta é importante para suas vidas.

BIBLIOGRAFIA

ASIMOV, Esaac. **No Mundo dos Números**.5.ed.Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1995.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio: Ministério da Educação**:. – Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**: geometria espacial posição e métrica.5.ed.São Paulo: Atual, 1993.

D'AUGUSTINE, Charles H. **Métodos Modernos para o Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ao livro Técnico S.A.,1970.

FACCHINI, Walter. **Matemática**: volume único.2.ed.São Paulo: Saraiva, 2001.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JR., José Ruy. **A Conquista da Matemática**: **Teoria e aplicação** - 6ª série.ed.ren. São Paulo: Ed.FTD, 1992.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito. **A Conquista da Matemática: Teoria Aplicação** - 8ª série. São Paulo: Ed. FTD, 1985.

HOBOLD, E.S.F. **Números**.2000.64f. Monografia (Trabalho de especialização em Matemática)- Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, UFSC, Florianópolis.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. **A Matemática do Ensino Médio**- volume2. Rio de Janeiro: Ed. SBM, 1999.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. Rio de Janeiro: Ed. SBM, 2001.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: Ed. SBM, 1991.

MOTTA, J.M. **Abordagem da Equação do 2° grau através da Resolução de Problemas: uma aplicação no ensino fundamental**.200.64f.Monografia (Trabalho de conclusão de curso)- Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, UFSC, Florianópolis.

PAPPAS, Theoni. **Fascínios da Matemática: A Descoberta da Matemática que nos Rodeia**.1.ed.Lisboa: Ed.Replicação, 1998.

PARRA, Cecília (Org.) et al. **Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PIRES, Célia Carolina; CURI, Edda; PIETROPAOLO, Ruy. **Educação Matemática** - 8ª série. São Paulo: Atual, 2002.

RÊGO, Rogéria Gaudêncio; RÊGO, Rômulo Marinho do. **Matematicativa**. João Pessoa: Ed. Universitária, INEP, 2002.

ROQUE, Carlos; CRUZ, Luísa. **Matemática ao virar da esquina**.1.ed.Lisboa: Gradiva, 2001.

TAHAN, Malba. **Didática da Matemática**. São Paulo: Saraiva, 1961.

TORRES, Maria Júlia. **Geometria das Formas**.2000.57f.Monografia (Trabalho de especialização em matemática)- Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, UFSC, Florianópolis.

VANCLEAVE, Janice. **Matemática para Jovens**.1.ed.Lisboa.Dom Quixote, 1994.

Olimpíadas Brasileiras de Matemática. Disponível em:
<http://www.obm.org.br>. Acesso em: 24 jul.2002