

# Aplicações Elementares da Matemática à Biologia

Universidade Federal de Santa Catarina  
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
Departamento de Matemática  
Disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso  
Orientador: Antônio Vladimir Martins

## Aplicações Elementares da Matemática à Biologia

*Dedico este trabalho a meus pais  
que sempre confiaram em mim e  
deram-me a oportunidade de in-  
gressar neste curso. E também à  
Irene, por sua infinita paciência.*

Florianópolis, 3 de fevereiro de 2004  
Acadêmico: Adriano Luiz dos Santos Né.

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovado em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela portaria nº 06\SCG\04.

---

Professora Carmem Suzane Comitre Gimenez  
Professora da disciplina

Banca examinadora:

*Antonio Vladimir Martins*  

---

Antônio Vladimir Martins  
Orientador

---

Inder Jeet Taneja

*Lício Hernanes Bezerra*  

---

Lício Hernanes Bezerra

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>1 Ecologia e Zoologia</b>	<b>6</b>
1.1 Crescimento de um potro. . . . .	6
1.2 O oxigênio que constitui nossa atmosfera. . . . .	8
1.3 Crescimento populacional. . . . .	10
1.4 Ninhada de camundongos. . . . .	11
1.5 Idade de cobaias . . . . .	12
1.6 Impacto da alimentação de mariposas. . . . .	13
<b>2 Botânica e Microbiologia</b>	<b>15</b>
2.1 Esporos de samambaia. . . . .	15
2.2 Contadores de bactérias. . . . .	16
2.3 Equação de Diferença Linear de 2ª Ordem - Sementes. . . . .	18
2.4 Organismos microscópicos. . . . .	23
2.5 Genética. . . . .	24
<b>3 Biologia Humana</b>	<b>27</b>
3.1 Grupo sanguíneo. . . . .	27
3.2 Músculos pinados. . . . .	29
3.3 Sistema sanguíneo vascular. . . . .	30
3.4 Epidemia. . . . .	33
3.5 Complexos vitamínicos. . . . .	37
<b>A Um pouco sobre o oxigênio</b>	<b>41</b>
<b>B Nosso crescimento populacional</b>	<b>42</b>
<b>C A respeito da Genética</b>	<b>43</b>
<b>Conclusão</b>	<b>45</b>
<b>Referência bibliográficas</b>	<b>46</b>

# Introdução

É impressionante a diversidade de temas da Biologia que um estudante de matemática pode abordar em seus estudos ou aulas. A matemática utilizada neste trabalho de conclusão de curso é elementar, aborda-se assuntos como regra de três simples e ao mesmo tempo um pouco de derivadas, autovalores e autovetores.

A idéia surgiu devido ao interesse de conhecer até onde a "bagagem" que adquirimos durante o curso de Licenciatura em Matemática pode nos ajudar, como é aplicada nas Ciências, em particular, neste trabalho na Biologia.

Durante o período de pesquisa, houve um autor que se destacou com sua obra *Introdução à Matemática para Biocientistas*, que aborda diferentes tópicos da Matemática relacionados com a Biologia. Seu nome é Edward Batschelet. Tal obra serviu de base para o início do trabalho. A partir daí, outros autores surgiram mas não com obras voltadas a Biologia, apesar de conterem exercícios muito bons ligados ao assunto.

Os problemas contidos neste trabalho foram retirados dos livros que constam nas referências bibliográficas. A grande maioria encontra-se no livro de Batschelet. Alguns já haviam sido desenvolvidos e receberam aqui uma resolução mais completa, outros fazem partes de problemas propostos.

No capítulo 1 trabalharemos um pouco sobre Ecologia e Zoologia, já no capítulo 2 serão abordados os temas Botânica e Microbiologia. E finalmente, no capítulo 3 a Biologia Humana será trabalhada com alguns conceitos matemáticos mais avançados. Constam ainda no trabalho três apêndices para complementar um pouco mais os estudos feitos nestes capítulos.

Acredito que o que chamará muita atenção é o leque de aplicações de matemática elementar em problemas importantes, como a propagação de uma epidemia, impacto de uma mariposa no meio em que esta vive, crescimento populacional e germinação de sementes, além de alguns mais simples, mas que podem vir a servir como exemplos no Ensino Fundamental e Médio.

Com isso, o objetivo central das páginas que se seguirão será relacionar conteúdos matemáticos elementares com o estudo da Biologia. Mas antes de começar o desenvolvimento, acho importante citar algumas palavras do professor Geraldo Ávila, profundo conhecedor do Ensino de Matemática:

"... para atingir plenamente seus objetivos, o ensino de Matemática deve tratar os diferentes tópicos da Matemática de uma forma bem articulada com o ensino de outras ciências..."

# Capítulo 1

## Ecologia e Zoologia

Ao iniciar um estudo das aplicações da Matemática à Biologia, foram encontradas infinitas de aplicações, que vão de problemas mais simples a outros um pouco mais complexos, que exigem algum conhecimento mais avançado. A idéia é começarmos dos mais simples e aos poucos aumentar o grau de dificuldade.

Cada seção tratará de um problema. Os problemas das seções 1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 1.6, 2.1, 2.2, 2.4, 3.1, 3.2 e 3.3 foram retirados do livro de Batschelet<sup>1</sup>, sendo que os da seções 1.1, 1.5, 3.2 e 3.3 se encontravam desenvolvidos e os demais propostos. Já o problema da seção 1.2 recebeu uma pequena adaptação.

Nas seções 1.3 e 2.3 temos problemas retirados do livro de Augusto Morgado<sup>2</sup>, na seção 2.5 do livro de João Pitombeira<sup>3</sup>, na seção 3.4 do livro de Gilbert Strang<sup>4</sup> e, finalmente, na seção 3.5 do livro de Elon Lages Lima<sup>5</sup>. Todos estes propostos.

### 1.1 Crescimento de um potro.

Vamos então trabalhar o crescimento. Na Biologia, a palavra crescimento tem o significado de desenvolver-se, tornar-se capaz de gerar outros descendentes para a preservação da espécie. O problema a seguir tem o intuito de trabalhar um pouco do conteúdo de porcentagem e taxa de crescimento.

Um biólogo estuda o crescimento de um potro. Quando ele inicia sua pesquisa o potro pesa 50kg. No final do 1º mês o peso aumenta de 20% e chega a 60kg. Se no fim do 2º mês o peso do potro aumenta 20%, qual é o aumento total do peso do potro?

*Solução:*

---

<sup>1</sup>Ver referência bibliográfica [1].

<sup>2</sup>Ver referência bibliográfica [3].

<sup>3</sup>Ver referência bibliográfica [6].

<sup>4</sup>Ver referência bibliográfica [9].

<sup>5</sup>Ver referência bibliográfica [4].

Inicialmente o potro tem 50kg. Um mês depois aumenta 20% e passa para 60kg; no mês seguinte aumenta outros 20% e passa para 72kg, um aumento de 22kg em 2 meses. A primeira idéia que pode vir à mente de um estudante é de que como foram dois aumentos sucessivos de 20%, teríamos então  $20\% + 20\% = 40\%$ . Se analisarmos esta afirmação com uma simples regra de três obtemos:

$$\begin{array}{l} 50kg \rightarrow 100 \\ 22kg \rightarrow x \end{array}$$

O que nos dá  $x = \frac{2200}{50} = 44\%$ , e, neste caso, encontramos  $20\% + 20\% \neq 44\%$ , diferente da idéia inicial.

**NOTA:** Para termos um tratamento correto desse problema devemos trabalhar com uma multiplicação e não uma adição. Em problemas como este, onde temos uma taxa de crescimento (ou decrescimento) constante, vamos fazer da seguinte forma:

Sejam  $p$  o peso inicial do potro;  
 $i$  o percentual de aumento.

A taxa de crescimento será:

$$\frac{i}{100} \cdot p$$

Então no primeiro aumento teremos:

$$p + \frac{i}{100} \cdot p = p \left( 1 + \frac{i}{100} \right)$$

Em que pode-se perceber que para chegarmos na quantidade seguinte é preciso multiplicar o peso inicial por  $\left( 1 + \frac{i}{100} \right)$ .

Já no segundo aumento teremos:

$$\left[ p \left( 1 + \frac{i}{100} \right) \right] \cdot \left( 1 + \frac{i}{100} \right) = p \left( 1 + \frac{i}{100} \right)^2$$

A mesma operação pode ser aplicada quantas vezes forem necessárias. Para  $n$  aumentos podemos generalizar como:

$$p \left( 1 + \frac{i}{100} \right)^n$$

Posteriormente, voltaremos a tocar no assunto de crescimento populacional, mas enquanto isso, vamos a algo um pouco maior, a Atmosfera.

## 1.2 O oxigênio que constitui nossa atmosfera.

A Biologia também trabalha com medidas, ela tenta muitas vezes conhecer quantidades e como é a produção de um determinado elemento no planeta. Isso faz com que a Geometria Elementar seja uma ferramenta muito importante.

Vejamos então no que a Matemática pode contribuir quanto a investigações na Atmosfera:

Cada  $cm^2$  de superfície da Terra está carregado com uma massa de  $1,0\text{ kg}$  de ar.

(a) Calcular a massa da atmosfera.

(b) Qual é a massa de  $O_2$ ?

(c) Qual a massa de  $O_2$  sobre uma pessoa que ocupa  $0,5\text{ m}^2$  de chão?

(d) Um  $km^2$  de uma floresta jovem produz cerca de  $2,5 \cdot 10^5\text{ kg}$  de oxigênio, anualmente.

Que proporção isto significa em relação à massa total de oxigênio atmosférico sobre  $1\text{ km}^2$  da superfície da Terra?

*Solução:*

(a) Vamos inicialmente encontrar a medida da superfície da Terra. Na Geometria Elementar temos  $S = 4\pi R^2$ , a área da superfície da esfera de raio  $R$ . Admitindo a Terra esférica. de raio  $6374\text{ km}$ :

$$S_{Terra} = 4\pi(6374)^2 \cong 5,1 \cdot 10^8\text{ km}^2$$

Como o problema fala em  $cm^2$ , vamos então transformar para esta unidade a superfície da Terra.

$$S_{Terra} = 5,1 \cdot 10^8\text{ km}^2 = 5,1 \cdot 10^8 \cdot (10^5\text{cm})^2 = 5,1 \cdot 10^8 \cdot 10^{10}\text{ cm}^2 = \mathbf{5,1 \cdot 10^{18}\text{ cm}^2}$$

Daí, para cada  $cm^2$  temos  $1,0\text{ kg}$  de ar, então em cada  $5,1 \cdot 10^{18}\text{ cm}^2$  teremos  $5,1 \cdot 10^{18}\text{ kg}$  de ar.

Portanto, a massa da atmosfera é  $\boxed{5,1 \cdot 10^{18} \frac{\text{kg de ar}}{\text{cm}^2}}$ .

(b) A massa de  $O_2$  é 22% da massa total de ar da Terra. Resolvendo-se uma regra de três temos:

$$\begin{array}{l} 100\% \rightarrow 51 \cdot 10^{17}\text{kg} \\ 22\% \rightarrow x \end{array}$$



Daí temos que  $x = \frac{22 \cdot 51 \cdot 10^{17}}{100} = 1122 \cdot 10^{15} = 1,122 \cdot 10^{18} \text{ kg}$  de  $O_2$ .

Portanto, a massa de  $O_2$  é  $\boxed{1,122 \cdot 10^{15} \text{ toneladas}}$ .

(c) Uma pessoa ocupa  $0,5 \text{ m}^2$  de chão, o que equivale a  $2500 \text{ cm}^2$ . Sabemos que cada  $\text{cm}^2$  possui  $1,0 \text{ kg}$  de ar, em que deste  $22\%$  é de  $O_2$ , então cada  $\text{cm}^2$  possui  $0,22 \text{ kg}$  de  $O_2$ .

Portanto, uma pessoa que ocupa  $2500 \text{ cm}^2$  tem sobre si  $\boxed{550 \text{ kg de } O_2}$ .

(d) Um  $\text{km}^2$  de uma floresta jovem produz  $2,5 \cdot 10^5 \text{ kg}$  de  $O_2$ , o que equivale a  $2,5 \cdot 10^2$  toneladas de  $O_2$ .

Sabemos que  $1,122 \cdot 10^5$  toneladas é toda a massa de  $O_2$  da superfície da Terra, então, novamente utilizando uma regra de três, obtemos:

$$\begin{array}{rcl} 1,122 \cdot 10^{15} \text{ t} & \rightarrow & 100\% \text{ de oxigênio da terra} \\ 2,5 \cdot 10^2 \text{ t} & \rightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{2,5 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \text{ t}}{1,122 \cdot 10^{11} \cdot 10^2 \cdot 10^2 \text{ t}} = \frac{2,5}{11,22} \cdot 10^{-11} \cong 22 \cdot 10^{-12} \%$$

Portanto,  $1 \text{ km}^2$  de floresta jovem, equivale a  $\boxed{22 \cdot 10^{-12} \%}$  do oxigênio da superfície da Terra.

Problemas como este parecem um tanto fora da realidade com porcentagens deste tipo, mas se alguém desejar iniciar um estudo a respeito da Atmosfera da Terra, ou exatamente a respeito do oxigênio que esta possui, pode-se iniciar por este caminho.

Para se ter uma idéia melhor, apenas a Floresta Amazônica possui cerca de 7 milhões de  $\text{km}^2$  de área, o que refrescando os cálculos feitos, obtemos  $1,57 \cdot 10^{-3} \%$  do oxigênio da superfície da Terra. Percebe-se com isso que a Floresta Amazônica não é o "pulmão" do Mundo, ela seria no máximo seu próprio pulmão, pois quase todo  $O_2$  produzido por lá é consumido pelo próprio local, claro que ela não perde nem um pouco sua importância com isso.

Precisamos também levar em conta outros fatores para melhorar o estudo, como por exemplo, a quantidade de poluentes que são soltos na atmosfera, quais reagem com o  $O_2$ , quanto de  $O_2$  é consumido no mesmo período de produção, entre outros. Para um pouco mais de esclarecimento a respeito do oxigênio, veja o Apêndice A.

### 1.3 Crescimento populacional.

Mais uma vez vamos entrar no assunto de crescimento, só que desta vez vamos trabalhar um tema hoje em dia muito discutido, o crescimento populacional.

A Matemática há muito tempo é utilizada como uma ferramenta para se fazer previsões. Ao olharmos alguns trabalhos feitos na área de Biomatemática, percebe-se que tais previsões são realmente eficazes. A ONU é uma das organizações que mais trabalha com previsões. Vamos então para uma pequena previsão:

A população de certa cidade era, em 1985, de 50 000 habitantes e, em 1990, passou a ser 80 000 habitantes. Supondo que a população tenha crescido com taxa constante, determine a população em 1987 e em 2003.

*Solução:*

Sejam  $P_0$  a população em 1985;  
 $P_1$  a população um ano depois de 1985;  
.....  
 $P_n$  a população n anos depois de 1985;  
 $k$  a taxa de crescimento da população.

Temos então:

Em 1985  $\rightarrow P_0 = 50000$  e em 1990  $\rightarrow P_5 = 80000$ .

Daí,

$$\begin{aligned} 1986 &\rightarrow P_1 = P_0 + kP_0 = (1 + k)P_0 \\ 1987 &\rightarrow P_2 = P_1 + kP_1 = (1 + k)(1 + k)P_0 = (1 + k)^2P_0 \\ &\dots\dots\dots \\ P^n &= (1 + k)^n P_0 \end{aligned}$$

Perceba que  $\frac{P_n}{P_{n-1}} = 1 + k$  que é constante, então temos  $(P_0, P_1, P_2, \dots)$  é uma Progressão Geométrica.

Para encontrarmos a população em 1987 e 2003, precisamos encontrar o valor de k. Sabemos que em 1990 temos 80 000 habitantes, então utilizando a generalização acima:

$$1990 \rightarrow P_5 = (1 + k)^5 \cdot 10^4$$

$$\begin{aligned} 8 \cdot 10^4 &= (1 + k)^5 \cdot 10^4 \\ \frac{8}{5} &= (1 + k)^5 \\ \sqrt[5]{\frac{8}{5}} &= 1 + k \end{aligned}$$

Então com o valor de  $k+1$  encontrado teremos:  $P_n = \left(\sqrt[5]{\frac{8}{5}}\right)^n P_0$ .

Daí,

$$1987 \rightarrow P_2 = \left(\sqrt[5]{\frac{8}{5}}\right)^2 50000 \cong 60342 \text{ habitantes.}$$

$$2003 \rightarrow P_{18} = \left(\sqrt[5]{\frac{8}{5}}\right)^{18} 50000 \cong 271520 \text{ habitantes.}$$

Portanto a população em 1987 equivale a 60342 habitantes e em 2003 a 271520 habitantes.

Um pouco de informações a respeito do crescimento populacional mundial encontra-se no Apêndice B.

## 1.4 Ninhada de camundongos.

Muitas vezes se é trabalhado o conceito de conjuntos de uma maneira muito simples. Quando o aluno ainda está iniciando sua educação, os professores tentam apenas dar uma idéia do que seria conjunto, dando exemplo como frutas, animais e, às vezes, números. Quando os alunos já têm uma melhor formação matemática, os exemplos mudam para alunos de uma determinada sala, torcidas de times de futebol, ou até mesmo capitais de algumas regiões do Brasil. Não quero aqui discutir se estes são ou não bons exemplos, só acredito que poderia existir alguma inovação.

O problema a seguir foi encontrado durante algumas pesquisas no livro de Batschelet, é um problema simples que teria uma boa aplicação em uma turma do 1º ano do Ensino Médio, durante uma aula sobre Conjuntos. O exemplo também trabalha um pouco da nomenclatura de conjuntos na Matemática.

Uma ninhada de cinco camundongos pode conter 0, 1, 2, ..., 5 machos e, o resto, fêmeas. Representando as seis probabilidades por  $a_0, a_1, \dots, a_5$  e reunindo-as em um conjunto  $U$ , escreva abaixo os dois conjuntos:

A: no mínimo quatro camundongos são machos;

B: no máximo três camundongos são fêmeas. E encontre os complementares de A e B.

*Solução:*

$$A: \{x | x \geq a_4\} = \{a_4, a_5\}$$

B tem no máximo 3 fêmeas, então B tem no mínimo 2 machos, ou seja,  $B: \{x | x \geq a_2\} = \{a_2, a_3, a_4, a_5\}$ .

Com isso, teremos os seguintes complementares:

$$A^C = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$$

$$B^C = \{a_0, a_1\}$$

Mais a frente, no capítulo 3, iremos abordar uma aplicação da Teoria de Conjuntos em grupos sanguíneos, mas enquanto isso vamos continuar mais um pouco trabalhando com os animais.

## 1.5 Idade de cobaias

O problema seguinte se encaixa muito bem para o trabalho das funções exponenciais e logarítmicas, além de utilizar o fato de que uma é o inverso da outra.

Calloway (1965) sugeriu que as idades de cobaias devem ser conhecidas o mais exatamente possível, pois as formas biológicas variam rapidamente com a idade, especialmente nos primeiros períodos de vida. Tanto quanto possível, as experiências devem ser feitas em grupos de animais com diferentes idades.

Quando as cobaias são escolhidas, de tal forma que formem uma seqüência geométrica ou exponencial, o seguinte problema pode surgir:

Sendo dados o número de grupos de idades, a menor e a maior idades, quais são os termos daquela?

*Solução:*

Seja  $A$  a idade do grupo mais novo,  $B$  a idade do grupo mais velho e  $n$  o número de grupos. Os termos da seqüência são:

$$A, Aq, Aq^2, \dots, Aq^{n-1} \quad \text{onde } q \text{ é a taxa de crescimento.}$$

Sabemos que  $B$  é a idade do Grupo mais velho, daí:

$$B = Aq^{n-1}$$

Resolvendo a equação, teremos:

$$\log B = \log A + (n - 1)\log q$$

$$\log q = \frac{\log B - \log A}{n - 1}$$

Daí,

$$q = 10^{\left(\frac{\log B - \log A}{n-1}\right)}$$

Para ilustrar o procedimento vamos utilizar um exemplo numérico com  $A = 4$  semanas,  $B = 10$  semanas e  $n = 5$ , então:

$$\log q = \frac{\log 10 - \log 4}{4} \Rightarrow \log q = \frac{1 - \log 4}{4} \Rightarrow q = 10^{\left(\frac{1 - \log 4}{4}\right)}$$

Onde chegamos que  $q \cong 1,2574$ . Voltando a seqüência e arredondando um pouco o resultado encontrado teríamos:

4            5,02            6,32            7,92            10 semanas.

## 1.6 Impacto da alimentação de mariposas.

A utilização de função exponencial aqui é muito boa. O mais atraente é que ao iniciar-se a leitura do problema, não se tem a idéia da utilização da função exponencial para resolvê-lo, esta aparece ao iniciar-se os cálculos.

Uma fêmea de mariposa (*Tinea pellionella*) deposita aproximadamente 150 ovos. Em um ano pode chegar a cinco gerações. Cada larva come cerca de 20mg de lã. Suponhamos que 2/3 dos ovos morram e que 50% das mariposas remanescentes sejam fêmeas. Estimar a quantidade de lã que pode ser destruída pelos descendentes de uma fêmea no prazo de um ano. (A primeira fêmea pertence à primeira geração).

*Solução:*

Como se está supondo que  $\frac{2}{3}$  dos ovos morrem, então uma mariposa deposita 50 ovos remanescentes e destes 25 são fêmeas.

Sabemos também que o número de ovos remanescentes equivale à quantidade de larvas da geração, as quais, cada uma, consomem 20 mg de lã.

Seja então  $f_n$  a quantidade de fêmeas no n-ésimo mês,  $c_1$  o consumo de lã também no n-ésimo mês e  $f_0$  a situação inicial com apenas uma mariposa fêmea.

Vamos então iniciar nossos cálculos procurando a quantidade de fêmeas em cada geração.

Na **1ª geração**, teremos:

São 50 ovos da fêmea progenitora, com isso  $f_1 = \frac{50 \cdot 1}{2} = 25 \cdot 1 = 25$  fêmeas.

Já da **2ª geração** em diante, teremos a quantidade de fêmeas da geração anterior mais metade das larvas da atual geração, ou seja,

$f_1 + \frac{50 \cdot (f_1)}{2} = (1 + 25) + 25(1 + 25) = (1 + 25) \cdot (1 + 25) = (1 + 25)^2$  fêmeas. Vamos por enquanto deixar desta forma.

Na **3ª geração**, teremos:

$f_2 + \frac{50 \cdot (f_2)}{2} = (1 + 25)^2 + 25(1 + 25)^2 = (1 + 25) \cdot (1 + 25)^2 = (1 + 25)^3$  fêmeas.

Generalizando, obtemos  $f_n = (1 + 25)^n$  fêmeas na n-ésima geração.

É importante perceber agora que o consumo na 1ª geração equivale a 20 vezes a quantidade de ovos da geração anterior, e esta equivale a 50 vezes a quantidade de fêmeas de sua geração, ou seja,

$$c_1 = 20 \cdot (50 \cdot f_0) = \boxed{1000 \cdot f_0} .$$

E isso vai valer para todas as gerações. Como o problema diz que em um ano pode-se chegar a cinco gerações, o consumo total será:

$$C_{total} = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5$$

$$C_{total} = [1000 \cdot f_0] + [1000 \cdot f_1] + [1000 \cdot f_2] + [1000 \cdot f_3] + [1000 \cdot f_4]$$

$$C_{total} = [1000 \cdot 25] + [1000 \cdot (1 + 25)] + [1000 \cdot (1 + 25)^2] + [1000 \cdot (1 + 25)^3] + [1000 \cdot (1 + 25)^4]$$

$$C_{total} = 1000[25 + (1 + 25) + (1 + 25)^2 + (1 + 25)^3 + (1 + 25)^4]$$

O que nos dá  $C_{total} = 475279000 \text{ mg}$  de lã =  $\boxed{475,279 \text{ kg}}$  de lã .

# Capítulo 2

## Botânica e Microbiologia

### 2.1 Esporos de samambaia.

Nesta seção aborda-se apenas um pouco de Geometria Elementar para resolver o seguinte problema a respeito dos esporos de samambaias:

Os esporos das samambaias flutuam na atmosfera e são distribuídos por toda a terra por meio dos ventos. Eles retornam à terra somente pela ação da chuva. Que massa terá um esporo esférico de  $30\mu m$  de diâmetro, se a densidade for de  $1,0 g/cm^3$ ?

*Solução:*

$30\mu m$  de diâmetro nos dá  $15\mu m$  de raio.

Daí teremos o volume  $V = \frac{4}{3}\pi(15)^3 = 4500\pi\mu m^3$

Mudando algumas unidades, obtém-se:

$$1\mu m = 10^{-6}m = 10^{-6} \cdot 10^2cm = 10^{-4}cm$$
$$\text{Ou seja, } 1\mu m^3 = (10^{-4})^3cm^3 = 10^{-12}cm^3$$

Com isso, podemos escrever o volume como  $V = 4500\pi \cdot (10^{-4})^3cm^3 = 0,45 \cdot 10^{-8}\pi cm^3$

Densidade pode ser definida como  $\frac{massa}{volume}$ , então:

$$1,0g/cm^3 = \frac{massa}{0,45 \cdot 10^{-8}\pi cm^3} \Leftrightarrow massa = 0,45 \cdot 10^{-8}\pi g \cong 1,414 \cdot 10^{-8}g.$$

Portanto a massa do esporo será de aproximadamente  $1,414 \cdot 10^{-5}mg$ .

Perceba que este é um problema simples e de rápida resolução, além de ter um contexto muito atrativo, ótimo para as séries iniciais.

## 2.2 Contadores de bactérias.

Vejam, agora, um problema que exigirá de um pouco mais de matemática para resolvê-lo, em relação aos anteriores.

Em um laboratório existem dois contadores de bactérias. O contador  $C_1$  pode ser operado por estudante de pós-graduação que ganhe \$ 2,00 por hora. Em média ele é capaz de contar seis amostras por hora. O contador  $C_2$  é mais rápido e também mais sofisticado. Somente uma pessoa bem treinada, ganhando \$ 3,00 por hora, pode operá-lo. Com a mesma precisão de  $C_1$  o contador  $C_2$  permite dez contagens por hora. São dadas 1000 amostras para serem contadas em um período que não exceda 80 horas. Quanto tempo cada um dos dois contadores deve ser utilizado de forma a desenvolver a tarefa com um mínimo de custo?

*Solução:*

Vamos iniciar colocando os dados em uma tabela para facilitar a consulta.

Contador	Preço	Amostras contadas por hora	Número de horas em operação
$C_1$	\$ 2,00	6	$x$
$C_2$	\$ 3,00	10	$y$

Primeiramente devemos lembrar que a tarefa não pode exceder 80 horas, devemos ter então:

$$0 \leq x \leq 80 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 80$$

Agora precisamos de uma lei para a quantidade de amostras, que no problema são 1000. Como vamos utilizar os contadores  $C_1$ , que é capaz de contar 6 amostras por hora, e o contador  $C_2$ , capaz de contar 10, em  $x$  e  $y$  horas teremos:

$$6x + 10y = 1000 \Rightarrow 3x + 5y = 500$$

Como procuramos um custo mínimo, ainda nos falta uma função para representá-lo. Esta função é que vamos tentar minimizá-la dentro das necessidades de tempo já expostas.

Com o mesmo raciocínio utilizado para a lei da quantidade, e lembrando que  $C_1$  custa \$2,00 por hora e  $C_2$  custa \$3,00, obtemos a seguinte função  $\varphi$  para o custo:

$$\varphi = 2x + 3y$$



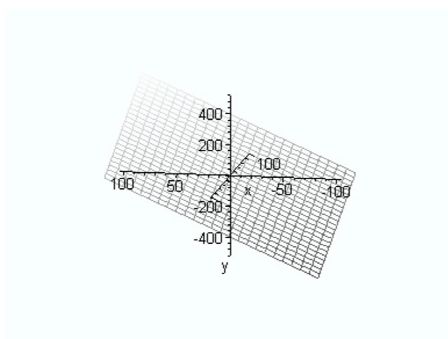


Figura 2.1: Gráfico de  $\varphi(x, y) = 2x + 3y$  em  $\mathbb{R}^3$

Perceba que a função do custo é de duas variáveis, ou seja,  $\varphi(x, y) = 2x + 3y$ . Veja a figura 2.1, onde o gráfico de  $\varphi$  se encontra em  $\mathbb{R}^3$ .

Já tínhamos a idéia de que a superfície de  $\varphi$  seria um plano pela sua equação, com isso, podemos conhecer um pouco mais de  $\varphi$  traçando algumas Curvas de Níveis. A figura 2.2 mostra o desenho das curvas de níveis zero, quando  $\varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ , 40, 80 e 140, além da reta que representa a quantidade de amostras a serem contadas por  $C_1$  e  $C_2$

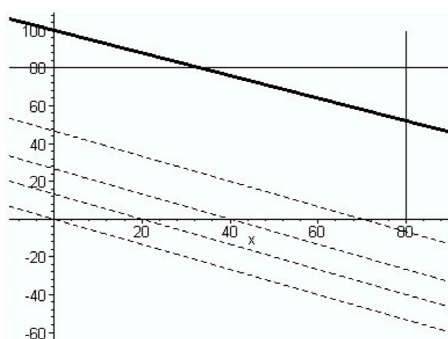


Figura 2.2: Curvas de Níveis de  $\varphi$

Vamos adotar o nível zero de  $\varphi$  como a origem de suas curvas de níveis. Com isso, ao analisar o gráfico da figura 2.2, podemos perceber que quanto mais as curvas de níveis se afastam, paralelamente, da curva de nível zero, maior será o custo e obviamente quanto menos acontecer este afastamento menor será o custo.

Precisamos agora encontrar os valores de  $x$  e  $y$  que satisfaçam no máximo 80 horas e a equação  $3x + 5y = 500$ . Isso nos leva a concluir que tais valores estão nas seguintes intersecções:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 80 \\ 0 \leq y \leq 80 \\ 3x + 5y = 500 \end{cases}$$

Onde sua solução está representada no segmento  $AB$  na figura 2.3.

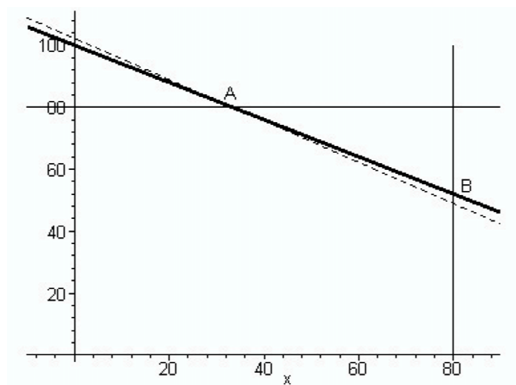


Figura 2.3: As soluções possíveis estão em  $AB$

Logo, a solução que procuramos é a curva de nível que menos se afasta da de nível zero, no caso será a curva que passa pelo ponto  $A$ , representada na figura 2.3 tracejada.

Como  $A = (\frac{100}{3}, 80)$ , teremos  $\varphi(\frac{100}{3}, 80) = 2 \cdot (\frac{100}{3}) + 3 \cdot (80) \cong \$306,67$  o menor custo.

Portanto, para minimizarmos o custo, no intervalo de tempo que não exceda 80 horas, o contador  $C_1$  deve ser operado 33,7 horas e o contador  $C_2$  80 horas.

Mais adiante nos depararemos com outro problema que necessitará um método de resolução parecido, aí então entraremos um pouco mais a fundo neste tipo de resolução.

## 2.3 Equação de Diferença Linear de 2ª Ordem - Sementes.

O problema seguinte é muito interessante, foi resolvido de duas maneiras. Aqui, a Álgebra Linear se torna uma ferramenta muito poderosa.

Uma planta é tal que cada uma de suas sementes produz, um ano após ter sido plantada, 21 novas sementes e, a partir daí, 44 novas sementes a cada ano. Se plantarmos hoje uma semente e se, toda vez que uma semente for produzida ela for imediatamente plantada, quantas serão

as sementes produzidas daqui a  $n$  anos?

*Solução:*

Inicialmente é plantada uma semente, um ano depois esta produzirá 21 novas. No segundo ano a história muda um pouco, pois cada uma destas últimas produzirão outras 21, o que nos dará  $(21)^2$  sementes, porém não podemos esquecer que a planta da primeira semente já tem 2 anos e então produzirá mais 44 novas, com isso, temos 21 vezes as sementes do ano passado mais 44 vezes as sementes do retrasado.

Com este raciocínio, no 3ºano temos 21 vezes as sementes do 2ºano mais 44 vezes as sementes do 1ºano. No 4ºano, 21 vezes as do 3ºano mais 44 vezes as sementes do 2ºano somado com as do 1ºano. Isso nos permite uma generalização, vejamos:

Sejam  $a_0$  o número inicial de sementes;  
 $a_1$  o número de sementes depois de um ano;  
 .....  
 $a_n$  o número de sementes depois de  $n$  anos.

Daí,

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 21 \\ a_2 &= 21(a_1) + 44(a_0) \\ a_3 &= 21(a_2) + 44(a_0 + a_1) \\ a_4 &= 21(a_3) + 44(a_0 + a_1 + a_2) \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n+2} &= 21(a_{n+1}) + 44(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Pronto, acabamos de escrever o problema em linguagem matemática, basta agora utilizarmos um pouco de nosso conhecimento para reduzirmos esta equação ao mínimo de variáveis possíveis. Temos então:

$$a_{n+2} = 21(a_{n+1}) + 44(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (i)$$

Como vale para todo  $\mathbb{N}$ , temos então:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 21(a_n) + 44(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \\ a_{n+1} - 21(a_n) &= 44(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \end{aligned} \quad (ii)$$

Vamos escrever a equação (i) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 21(a_{n+1}) + 44(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_{n-1}) + 44(a_n) \\ a_{n+2} &\stackrel{(ii)}{=} 21(a_{n+1}) + \mathbf{a}_{n+1} - 21(\mathbf{a}_n) + 44(a_n) \\ a_{n+2} &= 22a_{n+1} + 23a_n \end{aligned}$$

Onde obtemos:  $a_{n+2} - 22a_{n+1} - 23a_n = 0$

Esta equação que acabamos de encontrar é chamada de Equação de Diferença Linear de 2ª Ordem, que será resolvida de duas maneiras: a primeira a partir da equação característica, e a segunda maneira, a partir dos autovalores e autovetores (Álgebra Linear).

### 1ª Maneira:

$$a_{n+2} - 22a_{n+1} - 23a_n = 0$$

A equação característica associada a equação de diferença é:

$$r^2 - 22r - 23 = 0 \Rightarrow r = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 + 92}}{2} = \frac{22 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{22 \pm 24}{2}$$

Logo,  $r_1 = 23$  e  $r_2 = -1$

Ou seja,  $a_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n$ , em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes e  $n \in \mathbb{N}$ .

Vamos agora encontrar a solução geral:

Como sabemos a quantidade de sementes inicial e a de sementes após um ano, temos que  $a_0 = 1$  e  $a_1 = 21$ , então:

$$\begin{aligned} \text{Para } n = 0 \text{ temos } 1 &= c_1(r_1)^0 + c_2(r_2)^0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \\ n = 1 \text{ temos } 21 &= c_1(r_1)^1 + c_2(r_2)^1 \Rightarrow c_1 r_1 + c_2 r_2 = 21 \end{aligned}$$

O que nos dá

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 & \Rightarrow \mathbf{c_1 = 1 - c_2} \quad (i) \\ c_1 r_1 + c_2 r_2 = 21 & \Rightarrow 23c_1 - c_2 = 21 \stackrel{(i)}{\Rightarrow} \mathbf{23 - 23c_2 - c_2 = 21} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{12} \end{cases}$$

então  $c_1 = 1 - \frac{1}{12} \Rightarrow c_1 = \frac{11}{12}$

Portanto,  $a_n = (23)^n \frac{11}{12} + (-1)^n \frac{1}{12}$

### 2ª Maneira:

Como já havia sido comentado, vamos agora resolver a equação via Álgebra Linear, utilizando os conceitos de bases e espaços gerados, autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes.

A equação  $a_{n+2} = 22a_{n+1} + 23a_n$

Escrita da forma matricial fica

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 23 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 22 & 23 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir deste ponto, procuramos encontrar uma matriz P inversível que diagonaliza A, e para tal tarefa vamos começar encontrando os autovalores associados à matriz A.

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 22 - \lambda & 23 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 22\lambda - 23 = 0$$

$$\lambda = \frac{22 \pm \sqrt{(-22)^2 - 4(1)(-23)}}{2} = \frac{22 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{22 \pm 24}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \mathbf{23} \text{ e } \lambda_2 = \mathbf{-1}$$

Para encontrarmos os autovetores associados aos autovalores encontrados, precisamos antes encontrar os núcleos de  $(A - 23I)$  e  $(A + I)$ .

$$\mathbf{N}(A - 23I)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 23 \\ 1 & -23 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 23y = 0 \\ x - 23y = 0 \end{cases}$$

Donde obtemos  $x = 23y$ . Isso nos dá autovetores da forma

$$\begin{bmatrix} 23y \\ y \end{bmatrix} \text{ que pertencem ao subespaço gerado pelo vetor } \begin{bmatrix} 23 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{N}(A + I)$$

$$\begin{bmatrix} 23 & 23 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 23x + 23y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Donde obtemos  $x = -y$ . Isso nos dá autovetores da forma

$$\begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix} \text{ que pertencem ao subespaço gerado pelo vetor } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz P é a matriz cujas colunas são autovetores de A e nossos estudos de Álgebra Linear nos garante que tal matriz é inversível.

Então  $P = \begin{bmatrix} 23 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , que tem como inversa  $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{24} & \frac{23}{24} \end{bmatrix}$

Com isso podemos fatorar A como  $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ , onde D é a matriz diagonal cujos elementos diagonais são os autovalores de A.

Voltando um pouco à equação matricial teríamos:

Para  $n=0$ :

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

Para  $n=1$ :

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = A \cdot \left( A \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \right) = A^2 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

Para  $n=2$ :

$$\begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = A \cdot \left( A^2 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \right) = A^3 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

...

Generalizando:

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = A^{n+1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \quad (i)$$

Perceba que  $D^2 = (P^{-1} \cdot A \cdot P)^2 = (P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot A \cdot P) = P^{-1} \cdot A \cdot (P \cdot P^{-1}) \cdot A \cdot P = P^{-1} \cdot A^2 \cdot P$ . O mesmo acontece para  $D^3 = (P^{-1} \cdot A \cdot P)^3 = P^{-1} \cdot A^3 \cdot P$ . Em geral,  $D^{n+1} = P^{-1} \cdot A^{n+1} \cdot P$ , ou seja,  $A^{n+1} = P \cdot D^{n+1} \cdot P^{-1}$ .

Observe também que  $D^2 = D \cdot D = \begin{bmatrix} 23 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 23 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (23)^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{bmatrix}$

Em geral,  $D^{n+1} = \begin{bmatrix} (23)^{n+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} \end{bmatrix}$ .

Usando (i) tem-se:

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 23 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_P \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 23^{n+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} \end{bmatrix}}_{D^{n+1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{24} & \frac{23}{24} \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

O que nos dá,

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23^{n+2} + (-1)^{n+1}}{24} & \frac{23^{n+2} - (-1)^{n+1}}{24} \\ \frac{23^{n+1} - (-1)^{n+1}}{24} & \frac{23^{n+1} + (-1)^{n+1}}{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 21 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Daí, } a_{n+1} = \frac{21}{24} \left( 23^{n+1} - (-1)^{n+1} \right) + \frac{1}{24} \left( 23^{n+1} - (-1)^{n+1} \cdot 23 \right)$$

$$a_{n+1} = \frac{11}{12} \cdot (23)^{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{12}.$$

$$\text{Ou seja, } \boxed{a_n = \frac{11}{12} \cdot (23)^n + \frac{(-1)^n}{12}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

## 2.4 Organismos microscópicos.

O problema a seguir tem, praticamente, como objetivo colocar uma espécie de "roupa" num problema que envolve trigonometria, ou melhor, razões trigonométricas:

Durante períodos úmidos, uma fina camada de água está presente na superfície de folhas e outros detritos depositados no solo. Esta película é o habitat de numerosas bactérias, protozoários, fungos, esporos e outros organismos microscópicos. Podem-se visualizar tais organismos se os detritos úmidos forem imersos em água contida num prato de vidro e a extremidade de uma lâmina fina de vidro for mergulhada nesse prato. Se a lâmina forma um ângulo  $x$  com a superfície horizontal e da sua outra extremidade deixar-se escoar água limpa, observa-se que os microorganismos movem-se ao longo da lâmina, em direção contrária à do fluxo da água. Se o ângulo de inclinação for de  $10^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $50^\circ$ , e a distância  $d$  percorrida pelos microorganismos ao longo da superfície inclinada da lâmina for de  $5\text{cm}$ , pede-se para calcular a altura vertical  $h$ , que é atingida pelos microorganismos.

*Solução:*

Vamos desenhar o que o problema diz:

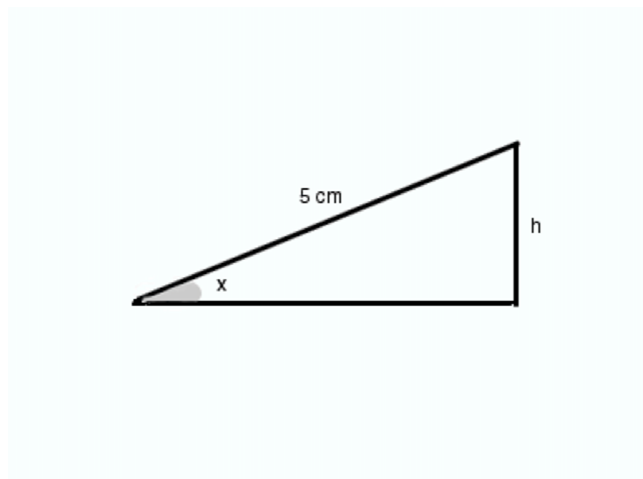


Figura 2.4: Representação gráfica do problema.

Donde tiramos a razão:

$$\text{sen}\theta = \frac{h}{d} \Rightarrow h = d \cdot \text{sen}\theta$$

Daí, basta aplicarmos as inclinações mencionadas no problema que obteremos:

$$\text{Para } \theta = 10^\circ \Rightarrow 5 \cdot \text{sen}10^\circ \cong 0,87 \text{ cm}$$

$$\text{Para } \theta = 30^\circ \Rightarrow 5 \cdot \text{sen}30^\circ \cong 2,5 \text{ cm}$$

$$\text{Para } \theta = 50^\circ \Rightarrow 5 \cdot \text{sen}50^\circ \cong 3,83 \text{ cm}$$

## 2.5 Genética.

A genética é uma área da Biologia, em que atualmente muitas inovações vem sendo alcançadas. Vejamos então como a matemática pode trabalhar algum de seus conteúdos nesta área.

Suponha que uma característica (como a cor dos olhos, por exemplo) depende de um par de genes. Representemos por  $A$  um gene dominante e por  $a$  um gene recessivo. Assim, um



indivíduo com genes  $AA$  é dominante puro, um com genes  $aa$  é um recessivo puro e um gene  $Aa$  é um híbrido. Dominantes puros e híbridos são semelhantes em relação a características. Filhos recebem um gen do pai e um da mãe. Suponha que pai e mãe sejam híbridos e tenham 4 filhos.

- Qual é a probabilidade do primeiro filho ser um recessivo puro?
- Qual é a probabilidade de exatamente um dos 4 filhos ser um recessivo puro?

*Solução:*

a) Sejam  $\Omega$  o conjunto dos resultados possíveis, chamado Espaço Amostral, e  $B$  o conjunto dos resultados que nos interessa, chamado Eventos.

O problema supõe que os pais têm 4 filhos, então  $\#\Omega = 4$ , e como queremos o primeiro filho híbrido, teremos  $\#B = 1$ .

Então a probabilidade que procuramos,  $p(B)$ , é dada por  $p(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \boxed{\frac{1}{4} = 0,25}$ .

b) Para tratarmos este item, vamos chamar de  $p$  a probabilidade do filho ser recessivo, e  $q$  a probabilidade do filho ser híbrido ou dominante. Temos então que  $q = 1 - p$ .

Agora, a probabilidade do casal ter um filho recessivo é dada por  $p = \frac{1}{4}$ , o que nos dá  $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ .

Suponhamos que destes 4 filhos apenas o primeiro seja recessivo e os demais não. Nesta ordem a probabilidade é

$$pqqq = pq^3$$

Perceba que independente da ordem em que ocorre o nascimento do filho recessivo, a probabilidade é a mesma. Contudo não podemos descartar as demais ordens de nosso cálculo: são elas  $qpqq$ ,  $qqpq$  e  $qqqp$ .

Portanto, a probabilidade de nascer apenas um filho recessivo em qualquer ordem de nascimento é:

$$4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \boxed{\frac{27}{64} \cong 0,41}$$

**NOTA:** Neste problema estamos utilizando o conceito de probabilidade condicional (vejamos a seguir).

Suponhamos que em um determinado experimento que desejamos fazer temos apenas dois resultados: *sucesso* e *fracasso*, os quais vamos representar pelas letras  $p$  e  $q$  respectivamente.

Procuramos, agora, saber qual a probabilidade de que, em  $n$  provas, possamos obter  $k$  sucessos, e conseqüentemente,  $n - k$  fracassos. Supondo que tenhamos sucessos nas  $k$  primeiras provas, ficamos com,

$$\underbrace{ppp \cdots p}_{k \text{ fatores}} \cdot \underbrace{(1-p) \cdots (1-p)}_{(n-k) \text{ fatores}} = p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

É importante perceber que este resultado é o mesmo para qualquer ordem de acontecimento do evento, pois uma outra ordem só alteraria a posição dos fatores.

Portanto, para obtermos a probabilidade de acontecer  $k$  sucessos e  $(n - k)$  fracassos em qualquer ordem, basta multiplicarmos  $p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$  por  $C_n^k$ . Esta expressão encontrada nada mais é do que o Teorema Binomial.

**Teorema Binomial:** A probabilidade de ocorrer exatamente  $k$  sucessos em uma seqüência de  $n$  provas independentes, na qual a probabilidade de sucesso em cada prova é  $p$ , é igual a

$$C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

Mais detalhes a respeito de Genética e do Projeto Genoma Humano encontram-se no Apêndice C.

# Capítulo 3

## Biologia Humana

### 3.1 Grupo sangüíneo.

Na seção 1.4, quando comentamos a respeito da ninhada de camundongos, foi abordado bem rapidamente a idéia de conjuntos, vamos agora utilizar a Teoria de Conjuntos para trabalhar um problema envolvendo grupos sangüíneos.

Em um estudo sobre grupos sangüíneos *ABO*, 6000 chineses foram testados: 2527 tinham antígeno *A*, 2234 o antígeno *B* e 1846 nenhum antígeno<sup>1</sup>. Quantos Indivíduos tinham ambos os antígenos?

*Solução:*

Uma maneira de resolver este problema seria por uma simples diagrama que envolve intersecção de conjuntos.

Temos os seguinte:

Total de indivíduos: 6000 chineses

Agora seja  $\mathbb{A}$  o conjunto dos indivíduo que possuem o antígeno *A*.

$\mathbb{B}$  o conjunto dos indivíduo que possuem o antígeno *B*.

$\mathbb{O}$  o conjunto dos indivíduo que não possuem o antígeno.

Vejamos agora a figura 3.1:

---

<sup>1</sup>Quando dizemos que um indivíduo não possui antígeno, queremos se referir a um indivíduo que pertence ao grupo de sangue do tipo *O*

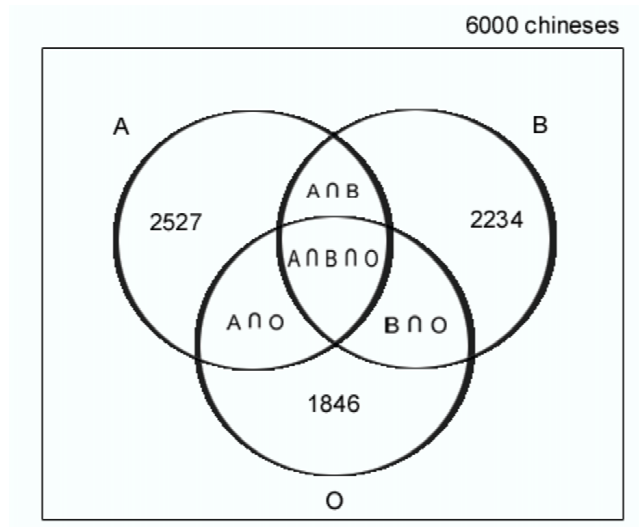


Figura 3.1: Diagrama dos conjuntos  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$  e  $\mathbb{O}$ .

Temos que ter

$$\begin{aligned}
 6000 &= 2527 - x + 2234 - x + x + 1846 \\
 6000 - 2527 - 2234 - 1846 &= -x \\
 \boxed{x = 607 \text{ chineses.}}
 \end{aligned}$$

Esta é uma maneira simples de resolução utilizando diagrama de Venn, geralmente ensinada no Ensino Médio. Vamos agora utilizar a Teoria de Conjuntos para resolução do mesmo problema

A mesma nomenclatura acima mencionada continuará a ser usada para tratarmos de indivíduos de antígenos  $A$ ,  $B$  e indivíduos sem antígenos. Com isso, teremos que:

$$n(\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{O}) = 6000$$

$$n(\mathbb{A}) = 2527; n(\mathbb{B}) = 2234; n(\mathbb{O}) = 1846$$

Observando novamente a figura acima, podemos tirar a seguinte relação:

$$n(\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{O}) = n(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) + n(\mathbb{O}) - n(\mathbb{A} \cap \mathbb{O}) - n(\mathbb{B} \cap \mathbb{O}) + n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \cap \mathbb{O})$$

Ou ainda,

$$n(\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{O}) = n(\mathbb{A}) + n(\mathbb{B}) - n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) + n(\mathbb{O}) - n(\mathbb{A} \cap \mathbb{O}) - n(\mathbb{B} \cap \mathbb{O}) + n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \cap \mathbb{O})$$

Podemos agora substituir os dados que temos levando em conta que não existe indivíduo que possui sangue do tipo  $AO$ ,  $BO$  ou  $ABO$ .

$$\begin{aligned}
 6000 &= 2527 + 2234 - n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) + 1846 - 0 - 0 + 0 \\
 n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) &= 2527 + 2234 + 1846 - 6000
 \end{aligned}$$

$$n(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = 607$$

Aí está uma bela aplicação da Teoria de Conjuntos, é realmente atraente a simbologia nela utilizada.

### 3.2 Músculos pinados.

O exercício acima dá um resultado trigonométrico muito interessante, vejamos como ele acontece.

Alguns músculos não consistem simplesmente em fibras paralelas. Há os que têm fibras curtas e inclinadas relativamente a um tendão no seu centro. Tais músculos são chamados pinados (significando em forma de pena). A seção transversal de um músculo pinado é mostrada na figura 3.2.

Quanto se move o tendão, o comprimento de cada fibra muscular,  $\lambda$ , é reduzido a  $\lambda'$ .

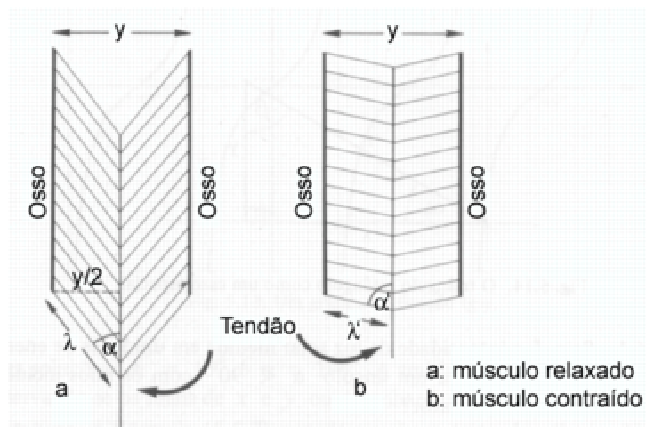


Figura 3.2: Músculos Pinados.

*Solução:*

Sejam  $y$  a distância entre os dois ossos aos quais o músculo está ligado,  $\alpha$  o ângulo compreendido entre as fibras e o tendão relaxado, e  $\alpha'$  o ângulo compreendido entre as fibras e o tendão contraído.

Então,

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{\lambda} \quad (i) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \alpha' = \frac{y}{\lambda'} \quad (ii)$$

Agora, a distância  $d$  em que o tendão se move é dada por:

$$d = \lambda \cos \alpha - \lambda' \cos \alpha'$$

Isolando  $\lambda$  e  $\lambda'$  nas equações (i) e (ii), e substituindo em (iii), teremos:

$$d = \frac{y}{\operatorname{sen} \alpha} \cos \alpha - \frac{y}{\operatorname{sen} \alpha'} \cos \alpha' = \frac{y}{2} \cdot \left( \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{\cos \alpha'}{\operatorname{sen} \alpha'} \right)$$

Portanto, 
$$d = \frac{y}{2} (\cotg \alpha - \cotg \alpha')$$

É algo impressionante perceber que ao utilizar nossos conceitos de geometria e trigonometria consiga-se obter tal relação para o movimento deste tipo de tendão. Isso faz com que se possa perceber ainda mais a variedade de coisas que a Matemática pode atingir, afinal de contas, quem esperaria uma relação de cotangentes para tal fim?

### 3.3 Sistema sanguíneo vascular.

O sistema sanguíneo vascular consiste de artérias, arteríolas, capilares e veias. O transporte de sangue do coração, através de todos os órgãos do corpo e a volta ao coração, deve ser o mais efetivo possível. Com uma energia mínima dispendida, o corpo deve ser alimentado rapidamente pelos constituintes do sangue. O ótimo deve ser alcançado de várias formas. Por exemplo, cada vaso deve ser largo o suficiente para evitar turbulência e os eritrócitos devem ser mantidos em um tamanho que minimize a viscosidade. Vamos nos restringir agora a um problema especial de otimização, o da ramificação vascular.

Admitimos que o vaso principal de raio  $r_1$  corre ao longo da reta horizontal de  $A$  a  $B$ , veja na figura abaixo. Um ponto  $C$  deve ser alcançado por um ramo de um dado raio  $r_2$ . Para simplificar, escolhemos  $B$  tal que  $CB$  seja perpendicular a  $AB$ . Seja  $CB = s$  e seja  $D$  o ponto onde o eixo do vaso ramificado intercepta o eixo do vaso principal. Representamos o ângulo  $BDC$  por  $\theta$ . O problema que consideramos é: *encontrar o ângulo particular  $\theta = \theta_0$  que minimiza a resistência total do sangue ao longo do caminho  $ACD$ .*

*Solução:*

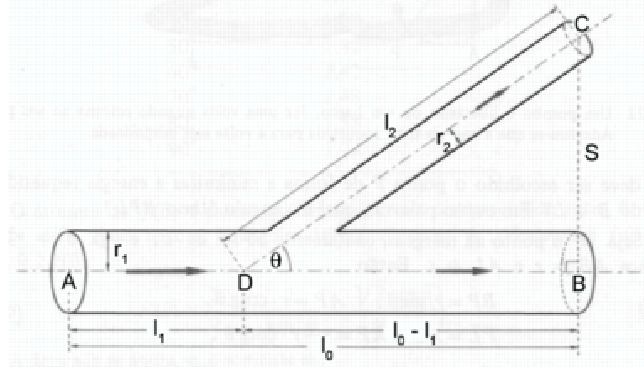


Figura 3.3: Sistema Vascular Sanguíneo.

Para resolução deste problema precisaremos utilizar a lei de Poiseuille para resistência de fluxo sanguíneo.

No Fluxo laminar, a resistência  $R$  é proporcional ao comprimento  $l$  do vaso e inversamente proporcional à quarta potência de seu raio  $r$ , isto é,  $R = k \frac{l}{r^4}$ , onde  $k$  é um fator constante determinado pela viscosidade do sangue.

Veja na figura que  $AB = l_0$ ,  $AD = l_1$ ,  $CD = l_2$  e  $CB = s$ , então temos que:

$$l_2 = \frac{s}{\text{sen } \theta} \quad (i)$$

$$\text{tg } \theta = \frac{s}{l_0 - l_1} \Rightarrow \text{cotg } \theta = \frac{l_0 - l_1}{s} \Rightarrow l_0 - l_1 = s \cdot \text{cotg } \theta \quad (ii)$$

A resistência  $R$  é a soma das resistências  $R_1$  de  $A$  até  $D$ , mais a resistência  $R_2$  de  $C$  até  $D$ . Então:

$$R = R_1 + R_2 = k \frac{l_1}{r_1^4} + k \frac{l_2}{r_2^4}$$

Ou seja,  $R = k \left( \frac{l_1}{r_1^4} + \frac{l_2}{r_2^4} \right) = k \left( \frac{l_0 - s \cdot \text{cotg } \theta}{r_1^4} + \frac{s}{r_2^4 \cdot \text{sen } \theta} \right)$ , que é uma função de  $\theta$ , com  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ .

$$R(\theta) = k \left( \frac{l_0 - s \cdot \text{cotg } \theta}{r_1^4} + \frac{s}{r_2^4 \cdot \text{sen } \theta} \right)$$

Então,

$$\frac{dR}{d\theta} = k \left( \frac{s \cdot \text{cosec}^2 \theta \cdot r_1^4}{r_1^8} - \frac{s \cdot r_2^4 \cdot \cos \theta}{r_2^8 \cdot \text{sen}^2 \theta} \right)$$

$$\frac{dR}{d\theta} = k \left( \frac{s}{r_1^4 \cdot \text{sen}^2 \theta} - \frac{s \cdot \cos \theta}{r_2^4 \cdot \text{sen}^2 \theta} \right)$$

$$\frac{dR}{d\theta} = k \left( \frac{s}{\text{sen}^2 \theta} \right) \left( \frac{1}{r_1^4} - \frac{\cos \theta}{r_2^4} \right)$$

$$\frac{dR}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r_1^4} - \frac{\cos \theta}{r_2^4} = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4$$

o que nos dá o ponto crítico  $\theta_0 = \arccos \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4$ .

Perceba agora que:

$$\frac{dR}{d\theta} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r_1^4} - \cos \theta < 0 \Leftrightarrow \cos \theta > \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4, \text{ o que nos dá } \theta > \arccos \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4.$$

Da mesma maneira encontraremos  $\theta < \arccos \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4$ .

Observe o gráfico abaixo.

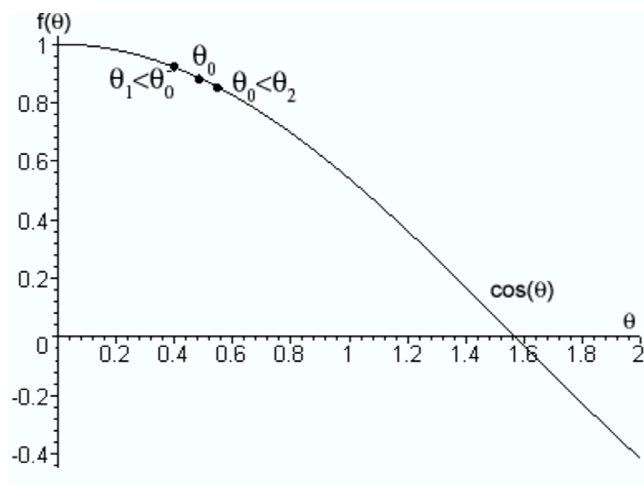


Figura 3.4: Gráfico de  $\cos(x)$ .

Assim, para  $\theta_1 < \theta_0$  e  $\theta_1$  próximo de  $\theta_0$ ,  $\cos \theta < \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4$ , ou seja,  $\frac{dR}{d\theta} |_{\theta=\theta_1}$ . E analogamente obtemos o mesmo resultado para  $\theta_0 < \theta_2$ .



Veja que o teste da derivada primeira do Calculo diferencial nos ajudou a concluir que  $\theta_0 = \arccos\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4$  é ponto de mínimo para  $R(\theta)$ .

Problemas em que procuramos soluções ótimas utilizando derivada já estão um tanto comum, mas, de todos os problemas que tive oportunidade de trabalhar durante a graduação, este foi o que mais me pareceu atraente.

### 3.4 Epidemia.

Vejamos o que acontece ao tentarmos uma previsão no problema que se segue.

Uma epidemia é tal que, todo mês, a metade dos indivíduos saudáveis tornam-se doentes, e um quarto daqueles que estão doentes vêm a falecer.

- Achar o processo de Markov associado.
- Determine o número de doentes do trigésimo mês.
- Determine o estado estacionário correspondente ao processo.

*Solução:*

Sejam  $m_{k+1}$  a quantidade de indivíduos mortos até o final do  $(k+1)$ -ésimo mês;  
 $d_{k+1}$  a quantidade de indivíduos doentes até o final do  $(k+1)$ -ésimo mês;  
 $s_{k+1}$  a quantidade de indivíduos saudáveis até o final do  $(k+1)$ -ésimo mês.

Temos então as seguintes equações:

$$\begin{aligned} m_{k+1} &= m_k + \frac{1}{4}d_k \\ d_{k+1} &= \frac{3}{4}d_k + \frac{1}{2}s_k \\ s_{k+1} &= \frac{1}{2}s_k \end{aligned}$$

Que podemos escrever como:

$$\begin{bmatrix} m_{k+1} \\ d_{k+1} \\ s_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_k \\ d_k \\ s_k \end{bmatrix}$$

(a) A matriz 3x3 acima fornece as probabilidades fixas de mudanças de um estado para outro, ou seja, de se estar saudável e se tornar doente, ou de estar doente e morrer, além de um

estado depender apenas do anterior para se chegar onde está. Este tipo de matriz é chamada Matriz de Markov. Note que a soma dos elementos de uma determinada coluna é sempre 1.

Portanto, a matriz abaixo representa um processo de Markov.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(b) Para resolver este problema, vamos achar a matriz  $P$  que diagonaliza a matriz  $A$  definida por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Vamos agora encontrar os autovalores relacionados a  $A$ .

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Então,

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} - \lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda) \left(\frac{3}{4} - \lambda\right) \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) = 0$$

Logo, os autovalores procurados são  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \frac{3}{4}$  e  $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ . Vamos então encontrar os autovetores relacionados a estes autovalores, e para isso precisamos determinar o núcleo de  $(A - I)$ ,  $(A - \frac{3}{4}I)$  e  $(A - \frac{1}{2}I)$ .

$\mathbf{N}(A - I)$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ onde obtemos } x \text{ variável livre, } y = 0 \text{ e } z = 0$$

O que nos dá os autovetores da forma  $\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  que pertence ao subespaço gerado pelo vetor  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

$\mathbf{N}(A - \frac{3}{4}I)$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ onde obtemos } x = -y, y \text{ variável livre e } z = 0$$

O que nos dá os autovetores da forma  $\begin{bmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$  que pertence ao subespaço gerado pelo vetor  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

$\mathbf{N}\left(A - \frac{1}{2}I\right)$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ onde obtemos } x = -\frac{1}{2}y, y \text{ variável livre e } z = -\frac{1}{2}y$$

O que nos dá os autovetores da forma  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}y \\ y \\ -\frac{1}{2}y \end{bmatrix}$  que pertence ao subespaço gerado pelo vetor  $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

Então, a matriz  $P$  que procuramos é uma matriz onde suas colunas são compostas pelos autovetores encontrados, veja:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ que tem como inversa } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Temos que,  $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$  onde  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ , cujos elementos da diagonal principal são os autovalores de  $A$ .

Voltando ao problema, temos que,

No primeiro mês:

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ d_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} m_0 \\ d_0 \\ s_0 \end{bmatrix}$$

No segundo mês:

$$\begin{bmatrix} m_2 \\ d_2 \\ s_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} m_1 \\ d_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = A \cdot A \begin{bmatrix} m_0 \\ d_0 \\ s_0 \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} m_0 \\ d_0 \\ s_0 \end{bmatrix}$$

No terceiro mês:

$$\begin{bmatrix} m_3 \\ d_3 \\ s_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} m_2 \\ d_2 \\ s_2 \end{bmatrix} = A \cdot A \cdot A \begin{bmatrix} m_0 \\ d_0 \\ s_0 \end{bmatrix} = A^3 \begin{bmatrix} m_0 \\ d_0 \\ s_0 \end{bmatrix}$$

...

No k-ésimo mês:

$$\begin{bmatrix} m_k \\ d_k \\ s_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} m_0 \\ d_0 \\ s_0 \end{bmatrix} \quad (i)$$

Já vimos anteriormente que  $D^k = P^{-1} \cdot A^k \cdot P$ , ou seja,  $A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$ , e também que

$$D^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix}.$$

Usando estes resultados em (i) tem-se:

$$\begin{bmatrix} m_k \\ d_k \\ s_k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_P \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix}}_{D^k} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \begin{bmatrix} m_0 \\ d_0 \\ s_0 \end{bmatrix}$$

o que nos dá

$$\begin{bmatrix} m_k \\ d_k \\ s_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k & 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^k & 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_0 \\ d_0 \\ s_0 \end{bmatrix}$$

Agora veja que quando  $k = 30$  teremos aproximadamente:

$$\begin{bmatrix} m_{30} \\ d_{30} \\ s_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9998 & 0.9996 \\ 0 & 0.0001 & 0.0003 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ou seja, as pessoas estão praticamente todas mortas.

(c) Agora veja que quando  $k \rightarrow \infty$  teremos que:

$$\begin{bmatrix} m_\infty \\ d_\infty \\ s_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_0 \\ d_0 \\ s_0 \end{bmatrix}$$

Daí,

$$\begin{cases} m_k = m_0 + d_0 + s_0 \\ d_k = 0 \\ s_k = 0 \end{cases}$$

Com isso, a epidemia encontrará um estado estacionário quando  $k$  aumentar arbitrariamente. E seu estado estacionário fará com que todos indivíduos morram.

### 3.5 Complexos vitamínicos.

Uma pessoa entusiasta por complexos multivitamínicos resolveu preparar seu próprio complexo, a partir de dois produtos (VITAMEX e VITAMIL) disponíveis no mercado (ambos sob a forma de pó).

A tabela abaixo fornece a quantidade de cada tipo de vitamina presente em cada grama de cada produto, bem como a dosagem mínima diária reconhecida pelos nutricionistas.

	VITAMIL	VITAMEX	Dosagem mínima
Vitamina A	250 UI	500 UI	2500 UI
Vitamina D	100 UI	80 UI	400 UI
Vitamina E	4 UI	5 UI	30 UI
Vitamina C	6 mg	20 mg	60 mg
Vitamina B6	1 mg	-	2 mg
Vitamina B12	3 mg	-	5 mg

Cada grama de VITAMIL custa CR\$ 30,00, enquanto cada grama de VITAMEX custa CR\$ 20,00. Determine a quantidade de cada produto a ser ingerido diariamente, de modo a atender as necessidades nutricionais ao menor custo possível.

*Solução:*

A primeira coisa que devemos ter cuidado é com a dosagem mínima. Então sejam  $x$  a dosagem em gramas do VITAMIL e  $y$  a dosagem em gramas do VITAMEX. Vamos representar a tabela acima em linguagem matemática:

**Vitamina A:**  $250x + 500y \geq 2500 \Leftrightarrow x + 2y \geq 10$

**Vitamina D:**  $100x + 80y \geq 400 \Leftrightarrow 5x + 4y \geq 20$

**Vitamina E:**  $4x + 5y \geq 30$

**Vitamina C:**  $6x + 20y \geq 60 \Leftrightarrow 3x + 10y \geq 30$

**Vitamina B6:**  $x \geq 2$

**Vitamina B12:**  $3x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$

Já o custo  $\beta$ , será dado por  $\beta(x, y) = 30x + 20y$  e é esta função, de duas variáveis, que vamos procurar minimizar dentro das necessidades do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 10 \\ 5x + 4y \geq 20 \\ 4x + 5y \geq 30 \\ 3x + 10y \geq 30 \\ x \geq 2 \\ x \geq \frac{5}{3} \end{cases}$$

Ao representa o sistema de inequações acima na figura 3.5 obtemos o conjunto de soluções que é uma figura com vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

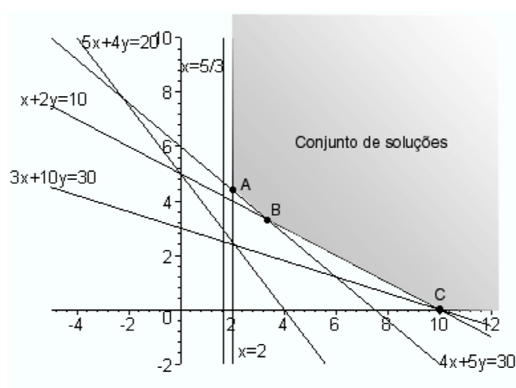


Figura 3.5: Soluções do sistema de inequações.

Precisamos agora encontrar o par  $(x, y)$  deste conjunto solução que nos dê o menor valor de  $\beta(x, y)$ .

Como podemos ver na figura 3.6,  $\beta(x, y) = 30x + 20y$  representa um plano em  $\mathbb{R}^3$ .

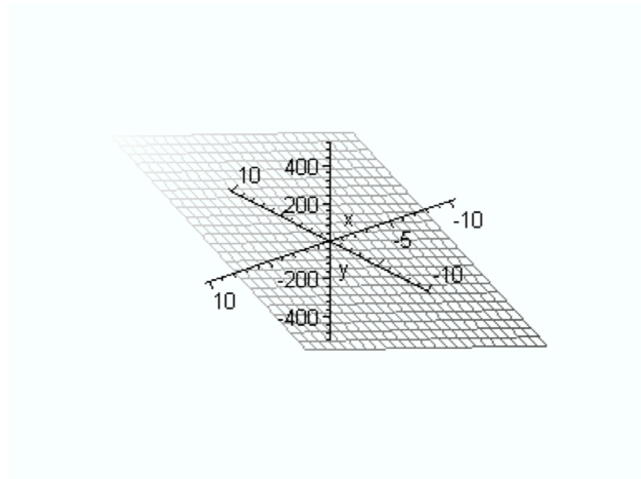


Figura 3.6: Gráfico de  $\beta(x, y) = 30x + 20y$  em  $\mathbb{R}^3$ .

Assim como na seção 2.2, vamos trabalhar com Curvas de Níveis. Aqui também ao tomarmos como origem a curva de nível zero, temos  $\beta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ . A medida que outras curvas de níveis se afastam paralelamente desta no sentido do vetor normal a ela, o custo aumentará.

Então o par  $(x, y)$  procurado deve ser tal que  $\beta$  se afaste o mínimo possível da curva de nível zero.

Problemas deste tipo são tidos como problemas de Programação Linear envolvendo duas variáveis primárias, estes são resolvidos escrevendo geometricamente as restrições de desigualdade como igualdades e determinando então um polígono de solução viáveis. Costuma-se dizer que uma solução é viável quando ela satisfaz todas as restrições de um problema de Programação Linear.

Ao encontrar tal polígono o próximo passo será determinar as soluções viáveis que otimiza (minimiza ou maximiza) a função objetivo, que será a solução do problema. O teorema diz:

*Se existir uma única solução que otimiza uma função objetivo linear, então esta solução deve corresponder a um vértice (ou ponto externo) do polígono de solução viáveis. Se existir mais de uma solução, pelo menos uma das soluções devem corresponder a vértices adjacentes do polígono de soluções viáveis.*

Neste caso nossa função objetivo é a função custo  $\beta(x, y) = 20x + 30y$ .

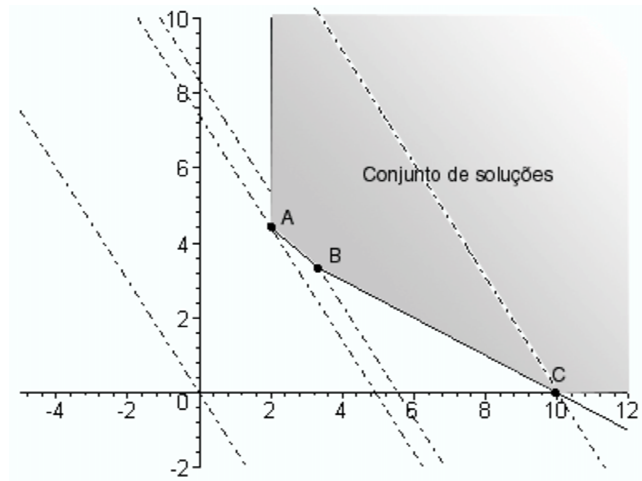


Figura 3.7: Curvas de Níveis nos vértices do conjunto solução.

Assim fica fácil perceber que a solução que minimiza o custo se encontra no vértice  $A$  do polígono.

Portanto, a quantidade a ser ingerida de VITAMIL e de VITAMEX, de modo a atender as necessidades nutricionais a menor custo, será respectivamente 2 gramas e 4,4 gramas.



# Apêndice A

## Um pouco sobre o oxigênio

O oxigênio como uma substância importante para a manutenção da vida, é muito estudado atualmente. Hoje já é possível encontra-lo inclusive em estado líquido, que é muito utilizado em hospitais e como combustível de ônibus espaciais quando misturado com hidrogênio líquido.

O oxigênio foi descoberto por Priestley em 1722, por calcinação do nitrato de potássio. A partir de 1775, Lavoisier estabeleceu suas propriedades, mostrou que existia no ar e na água, e indicou seu papel fundamental nas combustões e na respiração. Coube ao químico francês Antoine Lavoisier mostrar que a combustão, a calcinação dos metais e a respiração são fenômenos relacionados entre si, pois são todos processos de combinação com o oxigênio.

### *Crise do oxigênio*

Por mais que seja de grande importância a preservação das florestas em nosso mundo, é interessante ressaltar que 70% (setenta por cento) de todo oxigênio no mundo provém das Diatomáceas, algas que flutuam livremente e constituem a alimentação básica da maioria dos peixes. O perigo está nos praguicidas produzidos pelo homem, estes podem vir a reduzir ou até acabar com as Diatomáceas e, com isso, podemos nos ver um dia sem oxigênio. Corremos este risco devido a alguns navios tanques transitarem pelos mares carregando tais praguicidas. - há sempre a possibilidade de uma catástrofe acontecer.

Mas não há apenas este risco. Hoje em dia o consumo de oxigênio está elevado como jamais visto. Todos veículos a motor gastam oxigênio, os aviões tem um consumo ainda mais elevado. Para se ter uma idéia, o antigo Boing 707 a jato queimava 32 toneladas a cada vez que atravessara o Atlântico. Imagine hoje em dia com a quantidade de jatos que voam todas as horas.

Os ciclos naturais da ecosfera suportam as necessidades das plantas e dos animais, não estas "necessidades" mencionadas acima.

# Apêndice B

## Nosso crescimento populacional

Atualmente, o crescimento desgovernado da população mundial é mais um problema que nosso planeta enfrenta. Isso faz com que cada vez mais aumente o consumo de alimento, a necessidade de espaço para se viver e a poluição. Para se ter uma idéia deste último, se a população fosse de dez a quinze milhões de habitantes, poderíamos fazer tudo que quiséssemos que o meio ambiente absorveria perfeitamente. Até mesmo a radiação solar, que sempre faz mal, teria a probabilidade de fazer com que algum ser vivo sofresse menos ao se expor a ela.

Mas atualmente a realidade é outra, temos cerca de 6 bilhões de habitantes em nosso planeta e a estimativa é de que no ano de 2015 a população esteja entre 7,10 e 7,83 bilhões de habitantes. Ou seja, quanto mais gente no mundo, mais cuidado devemos ter com as novas tecnologias e com seus subprodutos.

### *O que vem sendo feito para se conter este crescimento?*

Cada vez mais os governos tentam adotar programas de planejamento familiar mais eficazes para controlar este crescimento. A ONU tem traçado um programa de ação para diminuir o crescimento populacional, este aponta os seguintes objetivos: crescimento econômico baseado no desenvolvimento sustentável, educação, sobretudo nas mulheres, igualdade entre os sexos, redução de mortalidade neonatal, infantil e materna e acesso universal a serviços de planejamento familiar, saúde reprodutiva e sexual. A urbanização dos países em desenvolvimento, também é apontada como alternativa para conter o crescimento populacional. Isso porque a natalidade nas cidades é, em geral, mais baixa que na zona rural.

# Apêndice C

## A respeito da Genética

Hoje em dia Genética é um tema muito abordado, está constantemente nos jornais, que anunciam descobertas de genes capazes de combater doenças hereditárias, estes descobertos pelo Projeto Genoma Humano, vemos novela e filmes que abordam o tema de uma maneira tão comum, além de programas de televisão que fornecem testes de DNA e revistas que cada vez mais abordam o tema por perceber que este já está inserido em nosso dia-a-dia.

Mas o que procura a Genética ou a Engenharia Genética? De forma geral, tenta-se explicar os mecanismos da hereditariedade e variação dos seres vivos. Porém, isto vai um pouco mais além, veja a reportagem a seguir retirada da revista Super Interessante:

### *Berçário Metálico - Superligas: Ativar*

*O físico Jens Norskov e sua equipe da Universidade Técnica da Dinamarca, em Lyngby, inspira-se na genética para criar um novo método de combinar metais capaz de testar mais de 200 mil novas ligas metálicas. "Os resultado são tão bons que deram origem a materiais de alta performance que levariam anos para serem descobertos pelos meios convencionais", afirma Norskov. Ele utiliza um software que considera cada metal um gene e cada grupo de quatro, um cromossomo. O método simula a troca de genes até encontrar uma fórmula mais adequada. O programa inicia com 60 cromossomos contendo uma variedade de 32 genes escolhidos ao acaso. A seguir começam processos análogos aos crossover - em que os genes são recombinados em outro cromossomo - e mutação. As misturas com as melhores propriedades são relacionadas e servirão de base para uma nova mutação. Mas como saber se a liga resultante será boa? O programa avalia a forma dos cromossomos usando o que eles chamam de teoria da função da densidade (DFT), que prevê as propriedades dos materiais com base no conhecimento de como interagem os elétrons de átomos distintos. Aqueles com feixes de elétrons mais densos são mais fortes e têm ponto de fusão mais alto.*

Edward Pimenta Jr.

Veja que a pesquisa na área de genética é extremamente abundante. Nos últimos anos, esta foi à área da Biologia que mais se expandiu.

E quanto ao Projeto Genoma Humano, o que é? No livro de Vivian Leysler da Rosa, *Genética e Evolução*, encontra-se o seguinte histórico:

*Dia 26 de junho de 2000, data histórica para a ciência da hereditariedade. Através de um comunicado conjunto à imprensa internacional, feito pelo então presidente do Estados Unidos, Bill Clinton e pelo primeiro ministro inglês, Tony Blair, acompanhados pelo cinetista Craig Venter, presidente da empresa Celera Genomics, o mundo ficou sabendo que estava concluída a fase inicial de um dos maiores empreendimentos científicos do século XX - o Projeto Genoma Humano. No seu início, em 1990, este projeto foi comparado ao Projeto Apolo, que levou o homem à Lua nas décadas de 1960, tamanho o alcance que se pretendia com os resultados da decifração do patrimônio genético humano.*

# Conclusão

Os problemas contidos neste trabalho poderão, de alguma forma, servir aos que estão terminando sua graduação em Matemática, sejam como exemplos para tornar os conteúdos de suas aulas mais atrativos, ou como algo que desperte o interesse para um estudo mais detalhado das Ciências Biológicas, ou, ainda, uma maneira de acabar com alguma frustração, se assim pode-se chamar, que tenha se acumulado durante o curso quanto a real aplicabilidade da Matemática.

Para quem escreveu, e ao mesmo tempo teve o grande apoio do Professor Vladimir, fica principalmente a certeza de que a Matemática é uma Ciência que, quanto mais se pesquisa, mais rico se tornam as linhas de pensamento que tal pesquisa assume, e outros horizontes são descobertos dentro da mesma.

Um trabalho deste tipo também influencia no desenvolver de um acadêmico quanto à percepção de como é importante a utilização de tecnologias nos cálculos matemáticos. Em muitas partes do trabalho foi utilizado o auxílio do software matemático Maple 6 , assim como o próprio editor de texto Latex. O emprego destes softwares trazem uma agilidade e uma clareza muito boa, sem que o estudante esqueça dos conhecimentos matemáticos necessários para determinados problemas, até porque para operá-los é indispensável estes conhecimentos.

A cada ano que passa, mais as Ciências se relacionam, mais se torna necessário o conhecimento em diferentes áreas. Precisamos, ao mesmo tempo em que esta relação acontece, trabalhar também o caminho da educação brasileira nesse sentido, sem perder é claro, a necessidade de formar cidadãos críticos.

É com o agrado de quem acredita ter tomado a escolha correta, e com a tranqüilidade de quem agora pode aproveitar um pouco as belezas da Ilha de Santa Catarina, que termino o presente trabalho.

Adriano Luiz dos Santos Né.

# Referências Bibliográficas

- [1] BATSCHELET, Edward, *Introdução à Matemática para o Biocientista*, São Paulo: EDUSP, 1984.
- [2] BOLDRINI, José Luiz, COSTA, Sueli Rodrigues, RIBEIRO, Vera Lúcia, WETZLER, Enry, *Álgebra Linear*, Campinas: Harper & Row do Brasil LTDA, 1978.
- [3] MORGADO, Augusto Cesar, WAGNER, Eduardo, ZANI, Sheila Cristina, *Progressões e Matemática Financeira*, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.
- [4] LIMA, Elon Lages, *Coordenadas no plano*, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.
- [5] TANEJA, Inder Jeet, *Maple V - Uma Abordagem Computacional no Estudo de Cálculo*, Florianópolis: Editora da Univesidade Federal de Santa Catarina, 1997.
- [6] MORGADO, Augusto Cesar, PITOMBEIRA, João, CARVALHO, Paulo FERNANDEZ, Pedro, *Análise Combinatória e Probabilidade*, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.
- [7] TAYLOR, Gordon Rattray, *A Ameaça Ecológica*, São Paulo: EDUSP, 1978.
- [8] ROSA, Vivian Leysler da, VENTURIERI, Giorgini Augusto, *Genética e Evolução*, Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, Secretaria de Educação da Bahia, Laboratório de Ensino a Distância, 2001.
- [9] STRANG, Gilbert, *Linear Algebra and Its Applications*, 3ª edição, San Diego: Hancourt Jovanovich, 1988.
- [10] *Almanaque Abril*, Editora Abril, 1997.
- [11] *Revista Super Interessante*, edição 185, Editora Abril, Fevereiro, 2003.
- [12] *Revista do Professor de Matemática*, Número 27, São Paulo, 1994.