

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

FERNANDO TOPPAN RABELLO

ANÁLISE COMPARATIVA DE NORMAS PARA A  
PUNÇÃO EM LAJES DE CONCRETO ARMADO

FLORIANÓPOLIS/SC  
2010

---

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária  
da  
Universidade Federal de Santa Catarina

R114a Rabello, Fernando Toppan

Análise comparativa de normas para a punção em  
lajes de concreto armado [dissertação] / Fernando  
Toppan Rabello ; orientador, Narbal Ataliba  
Marcellino. -  
Florianópolis, SC, 2010.  
248 p.: il., grafs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de  
Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Inclui referências

1. Engenharia civil. 2. Concreto armado. 3. Punção.  
4. Normalização. 5. Lajes lisas. I. Marcellino, Narbal  
Ataliba. II. Universidade Federal de Santa Catarina.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III.  
Título.

CDU 624

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

ANÁLISE COMPARATIVA DE NORMAS PARA A  
PUNÇÃO EM LAJES DE CONCRETO ARMADO

Dissertação submetida à Universidade  
Federal de Santa Catarina exigida  
pelo Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil - PPGEC, como  
parte dos requisitos para obtenção do  
Titulo de Mestre em Engenharia Civil.

FERNANDO TOPPAN RABELLO

Florianópolis, março de 2010.



# ANÁLISE COMPARATIVA DE NORMAS PARA A PUNÇÃO EM LAJES DE CONCRETO ARMADO

FERNANDO TOPPAN RABELLO

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina exigida pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil.

---

Prof.<sup>a</sup> Janaíde Cavalcante Rocha – Coordenadora do PPGEC

---

Prof.<sup>a</sup> Narbal Ataliba Marcellino – Orientador / Moderador

COMISSÃO EXAMINADORA:

---

Prof. Daniel Domingues Loriggio – ECV/UFSC

---

Prof. Roberto Caldas Andrade Pinto – ECV/UFSC

---

Prof. Roberto Chust Carvalho – UFSCAR



## **AGRADECIMENTOS**

**A Deus, pelas oportunidades e pela possibilidade de aproveitá-las o melhor possível.**

**Aos meus pais e meus irmãos pela alegria, apoio e incentivo infundáveis.**

**Ao meu professor orientador Narbal Ataliba Marcellino, pela oportunidade de morar em Florianópolis, pelos ensinamentos, pela ajuda e confiança.**

**A minha namorada Cristina Djusca e sua família (incluindo o Marley), pela ajuda e carinho.**

**Ao meu tutor, Engº Adriano Etcheverry da empresa Flexcon Engenharia, pelos conhecimentos e ensinamentos impagáveis e por sua amizade.**

**Aos professores Roberto Pinto e Henriette La Rovere por colaborarem com o aprimoramento deste trabalho.**

**Aos professores Daniel Loriggio e Roberto Chust Carvalho e pelo tempo despendido e contribuição nas correções da dissertação.**

**Meus avós, pelas rezas brabas e pelo carinho.**

**Meu irmão postigo Gustavo Henequim, meu broder Lauro Fruet e meu tio Rodrigo Rabello pela diversão, amizade e apoio.**

**A toda a equipe da FAPEU e Labtrans da UFSC, pela oportunidade de aprender e crescer como pessoa e profissional.**

**Ao professor Carlos Butze, ao Robertinho do Departamento de Engenharia Civil, à Mari e à Shayene da pós graduação e a todos que influenciaram de maneira positiva esse processo.**





---

**SUMÁRIO**

<b>RESUMO .....</b>	<b>13</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>15</b>
<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>17</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>21</b>
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>23</b>
<b>1.1 Justificativa.....</b>	<b>26</b>
<b>1.2 Objetivos .....</b>	<b>28</b>
<b>1.3 Planejamento .....</b>	<b>30</b>
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>31</b>
<b>2.1 Histórico.....</b>	<b>31</b>
<i>2.1.1 Pesquisas Internacionais.....</i>	<i>31</i>
<i>2.1.2 Pesquisas Feitas no Brasil .....</i>	<i>38</i>
<b>2.2 Fatores que influenciam na resistência à punção .....</b>	<b>41</b>
<i>2.2.1 Espessura da laje.....</i>	<i>42</i>
<i>2.2.2 Dimensões, formato e dimensão do pilar .....</i>	<i>43</i>
<i>2.2.3 Armadura de punção .....</i>	<i>43</i>
<i>2.2.4 Resistência do concreto.....</i>	<i>44</i>
<i>2.2.5 Relação momento fletor / esforço cortante.....</i>	<i>44</i>
<i>2.2.6 Taxa de armadura de flexão.....</i>	<i>44</i>
<i>2.2.7 Efeito escala (Size effect).....</i>	<i>45</i>
<i>2.2.8 Influência do tipo de carregamento.....</i>	<i>46</i>
<i>2.2.9 Armadura contra colapso progressivo .....</i>	<i>46</i>
<i>2.2.10 Tipos de armadura de punção .....</i>	<i>47</i>
<b>2.3 Modelos de cálculo .....</b>	<b>58</b>
<i>2.3.1 Método da superfície de controle .....</i>	<i>58</i>
<i>2.3.2 Método de bielas e tirantes.....</i>	<i>59</i>
<i>2.3.3 Modelos mecânicos .....</i>	<i>61</i>
<b>2.4 Normas e Especificações .....</b>	<b>64</b>
<i>2.4.1 ACI 318/08 .....</i>	<i>64</i>
<i>2.4.2 NBR 6118/03 .....</i>	<i>70</i>
<i>2.4.3 EUROCODE 2/04 .....</i>	<i>77</i>

---

2.4.4 BS 8110/97.....	86
<b>2.5 Modelos de cálculo das Normas para a punção: considerações .....</b>	<b>94</b>
2.5.1 Modelo adotado.....	94
2.5.2 Perímetros de controle .....	94
2.5.3 Elaboração do dimensionamento para a punção nas Normas .....	95
<b>2.6 Critérios de compatibilização entre as Normas para validação da comparação dos resultados.....</b>	<b>101</b>
2.6.1 Método de avaliação da resistência do concreto à compressão..	101
2.6.2 Métodos dos pórticos equivalentes.....	103
2.6.3 Coeficientes de ponderação.....	113
<b>3 EXEMPLO DE VERIFICAÇÃO .....</b>	<b>115</b>
<b>3.1 Apresentação da laje .....</b>	<b>116</b>
<b>3.2 Cargas e solicitações da laje.....</b>	<b>118</b>
3.2.1 Cargas permanentes.....	118
3.2.2 Cargas acidentais.....	119
<b>3.3 Momentos transferidos ao pilar .....</b>	<b>120</b>
3.3.1 Carregamentos .....	120
3.3.2 Definição dos momentos transferidos ao pilar.....	120
<b>3.4 Reação nos pilares .....</b>	<b>127</b>
3.4.1 NBR 6118/03 – Reação concentrada de cálculo .....	128
3.4.2 BS 8110/97 – Reação concentrada de cálculo .....	129
3.4.3 EUROCODE 2/04 – Reação concentrada de cálculo.....	131
3.4.4 ACI 318/08 – Reação concentrada de cálculo .....	132
<b>3.5 Armadura longitudinal de flexão .....</b>	<b>134</b>
3.5.1 Norma Brasileira.....	134
3.5.2 Norma Inglesa.....	135
3.5.3 Norma Européia.....	136
<b>4 VERIFICAÇÕES À PUNÇÃO .....</b>	<b>138</b>
<b>4.1 Verificação sem armadura de punção .....</b>	<b>138</b>
4.1.1 NBR 6118/03.....	138
4.1.2 BS 8110/97.....	144
4.1.3 ACI 318/08.....	149
4.1.4 EUROCODE 2/04.....	153
<b>4.2 Verificação com armadura de punção.....</b>	<b>158</b>
4.2.1 NBR 6118/03.....	158

4.2.2 BS 8110/97 .....	164
4.2.3 ACI 318/08 .....	171
4.2.4 EUROCODE 2/04 .....	175
<b>5 ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>	<b>180</b>
<b>5.1 Análise sem o uso de armadura de punção .....</b>	<b>180</b>
5.1.1 Diagramas das relações entre as tensões resistentes e tensões solicitantes em função da altura ( $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$ ) .....	180
5.1.2 Diagramas dos valores de cargas concentradas máximas resistidas pelas lajes em função da altura ( $F_{MÁX} \times h$ ) .....	190
5.1.3 Diagramas das relações entre as tensões solicitantes referentes aos efeitos da carga de reação mais o efeito dos momentos e as tensões solicitantes referentes apenas aos efeitos da carga de reação em função das espessuras das lajes ( $\frac{\sigma_{Solicitante(F+M)}}{\sigma_{Solicitante(F)}} \times h$ ) .....	200
5.1.4 Excentricidades e coeficiente de majoração das cargas concentradas para equivalência do efeito dos momentos .....	204
<b>5.2 Análise com uso de armadura de punção .....</b>	<b>207</b>
5.2.1 Diagramas das relações entre as tensões resistentes e tensões solicitantes em função da espessura das lajes ( $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$ ) .....	207
5.2.2 Diagramas das áreas de armadura transversal de punção calculadas em função da espessura das lajes ( $A_{sw} \times h$ ) .....	211
<b>6 ANÁLISE DAS NORMAS .....</b>	<b>217</b>
<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>219</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>221</b>
<b>ANEXO A .....</b>	<b>229</b>
<b>ANEXO B .....</b>	<b>241</b>



## RESUMO

Os sistemas estruturais usados em pavimentos de concreto armado, em que as lajes se apóiam diretamente sobre os pilares, sem o uso de vigas, têm, entre suas características, a existência de tensões concentradas elevadas nas ligações laje-pilar, tensões estas que podem até levar à ruína. A esse efeito dá-se o nome de punção. Como a ruptura das ligações por punção é do tipo frágil, sem aviso, é extremamente importante que seja feita a verificação da resistência da ligação. As crescentes inovações técnicas e a análise dos critérios normativos propostos pelo ACI 318/08, BS 8110/97, NBR 6118/03 e EUROCODE 2/04 para o dimensionamento ao esforço de punção em lajes lisas de concreto armado são as diretrizes da elaboração do presente estudo. Dentro deste cenário, o objetivo desta dissertação é avaliar a acessibilidade, aplicabilidade, limitações e economia destes critérios por meio da comparação de resultados obtidos na análise de pilares internos em três configurações diferentes de lajes, variando suas espessuras. Foram analisados os seguintes parâmetros: a) para laje sem armadura de punção, compararam-se as relações entre tensões resistentes e solicitantes; as máximas reações que podem ser aplicadas à laje; a proporcionalidade do efeito dos momentos em relação a uma carga simétrica; excentricidades médias em relação às reações máximas suportadas pela Norma Britânica e um coeficiente estipulado para simular o efeito dos momentos fletores supondo-se uma carga de reação simétrica. B) para lajes com armadura de punção, compararam-se as relações entre tensões resistentes e solicitantes e o consumo de armadura de punção necessária segundo as recomendações de cada norma.

***Palavras-Chave: Concreto armado, lajes lisas, punção, normalização.***



**ABSTRACT**

The structural systems in reinforced concrete, where the slab is directly supported by the columns, without the use of beams, has, among its aspects, the existence of great tensions distributed in small areas, which can lead the structure to collapse. This effect is called punching shear. As the punching shear collapse occurs without warning, it is of extreme importance that the slab-column resistance verification is made. The increasing technical innovations and analysis of normative criteria proposed by ACI 318/08, BS 8110/97, NBR 6118/03 and EUROCODE 2 / 04 for punching analysis in flat slabs of reinforced concrete are the guidelines of this study. In this scenario, the main objective of this work is to evaluate these punching shear design procedures in terms of accessibility, applicability, limitations and economy, comparing the results obtained on analysis of a internal column in three different slabs configurations, varying their thicknesses. The following parameters had been analyzed and compared, as the recommendations of each code: a) for slabs without links, the relation between the resisted and applied tension, the maximum actions that can be applied, the representativeness of the unbalanced moment to the load reaction, and a increase coefficient to consider the effects of unbalanced moments; b) for slabs with links, the relation between resisted and applied tension and the armor consumption necessary to resist the loads for each case had been compared, according the recommendations of each code.

***Keywords: Reinforced concrete, flat slabs, punching shear, codes.***





## LISTA DE FIGURAS

<i>Figura 1.1 – Laje-cogumelo e laje lisa, respectivamente.</i>	24
<i>Figura 1.2 – Exemplos de capitel e engrossamento da laje, respectivamente.</i>	24
<i>Figura 1.3 – Colapso de uma garagem</i>	25
<i>Figura 2.1 – Exemplo do uso de studs.</i>	32
<i>Figura 2.2 – Perfil “I” utilizado como armadura de cisalhamento</i>	33
<i>Figura 2.3 – Detalhe da armadura de flexão Riss Star</i>	34
<i>Figura 2.4 – Distribuição da armadura de flexão Riss Star</i>	35
<i>Figura 2.5 – Exemplo de uma Shearband</i>	36
<i>Figura 2.6 – Armadura de cisalhamento UFO</i>	37
<i>Figura 2.7 – Surgimento de fissuras radiais e tangenciais em ensaios</i>	41
<i>Figura 2.8 – Surgimento de fissuras radiais e tangenciais em ensaios de punção</i>	42
<i>Figura 2.9 – Fase pós puncionamento sem e com armadura contra colapso progressivo, respectivamente.</i>	46
<i>Figura 2.10 – Tipos de estribos</i>	47
<i>Figura 2.11 – Ancoragem correta dos estribos</i>	48
<i>Figura 2.12 – Ancoragem dos ganchos e posicionamento dos estribos</i>	49
<i>Figura 2.13 – Esquema dos estribos inclinados</i>	49
<i>Figura 2.14 – Barras dobradas</i>	50
<i>Figura 2.15 – Shearheads</i>	50
<i>Figura 2.16 – Exemplos de shearheads</i>	51
<i>Figura 2.17 – Exemplo de fibras de aço</i>	52
<i>Figura 2.18 – Ouriço formado por fibras de aço mal misturadas ao concreto</i>	53
<i>Figura 2.19 – Detalhe de conectores tipo pino</i>	55
<i>Figura 2.20 – Ancoragem correta dos conectores tipo pino</i>	55
<i>Figura 2.21 – Detalhe de conectores tipo pino</i>	57
<i>Figura 2.22 – Definição da superfície de controle da NBR 6118/03</i>	59
<i>Figura 2.23 – Modelo de bielas e tirantes para a punção sem transferência de momentos</i>	60
<i>Figura 2.24 – Modelo de bielas e tirantes para a punção com transferência de momentos</i>	61
<i>Figura 2.25 – Hipótese de ruptura e elemento rígido do modelo mecânico de Kinnunen e Nylander</i>	62
<i>Figura 2.26 – Rotação do elemento rígido</i>	63
<i>Figura 2.27 – Perímetros de controle do ACI 318/05</i>	65

<i>Figura 2.28 – Distribuição do esforço cortante pelo ACI 318/05</i>	67
<i>Figura 2.29 – Distribuição das armaduras de punção</i>	70
<i>Figura 2.30 – Perímetro crítico em pilares internos</i>	71
<i>Figura 2.31 – Relação dos lados <math>c_1</math> e <math>c_2</math> dos pilares com os momentos fletores</i>	74
<i>Figura 2.32 – Disposição da armadura de punção e perímetro da superfície crítica <math>C''</math></i>	76
<i>Figura 2.33 – Disposição da armadura de punção e da armadura de colapso progressivo</i>	77
<i>Figura 2.34 – Modelo para a verificação da punção no EUROCODE 2/04</i>	78
<i>Figura 2.35 – Exemplos de perímetros de controle</i>	79
<i>Figura 2.36 – Perímetros de controle a <math>1,5d</math> da região armada (<math>u_2</math>)</i>	84
<i>Figura 2.37 – Distanciamento dos perímetros de armaduras de punção e perímetro <math>u_2</math></i>	86
<i>Figura 2.38 – Coeficientes de majoração do esforço cortante para cada tipo de pilar e flexão</i>	87
<i>Figura 2.39 – Perímetro de cisalhamento em lajes com aberturas</i>	89
<i>Figura 2.40 – Perímetro crítico para pilares próximos de bordas livres</i>	90
<i>Figura 2.41 – Definição dos perímetros para casos comuns</i>	90
<i>Figura 2.42 – Zonas de cálculo para reforço da resistência à punção</i>	93
<i>Figura 2.43 – Comparação de resultados de ensaios com a equação de MOE (1961)</i>	97
<i>Figura 2.44 – Comparação das equações com resultados obtidos em ensaios</i>	98
<i>Figura 2.45 – Comparação dos resultados obtidos em ensaios com a NBR 6118</i>	99
<i>Figura 2.46 – Distribuição normal de resistências à compressão do concreto</i>	102
<i>Figura 2.47 – Definição dos pórticos segundo a Norma Brasileira</i>	104
<i>Figura 2.48 – Faixas para a distribuição dos momentos segundo a Norma Brasileira</i>	105
<i>Figura 2.49 – Divisão dos pórticos</i>	106
<i>Figura 2.50 – Faixas para a distribuição dos momentos</i>	107
<i>Figura 2.51 – Coeficientes para a distribuição dos momentos de acordo com o ACI</i>	109
<i>Figura 2.52 – Valores de <math>x</math> e <math>y</math> para a seção transversal laje-pilar</i>	111
<i>Figura 2.53 – Pilar equivalente</i>	111

<i>Figura 2.54 – Momentos transferidos ao pilar pelo método de cada norma</i>	112
<i>Figura 2.55 – Diagrama momento x carregamento pelos métodos dos pórticos equivalentes do ACI, dos elementos finitos e ensaio em laje em tamanho real</i>	113
<i>Figura 3.1 – Planta da laje L1 – unidades em cm</i>	116
<i>Figura 3.2 – Detalhe da região maciça da laje sobre os pilares centrais e distribuição de armaduras negativas de flexão</i>	117
<i>Figura 3.3 – Corte da laje na região dos pilares centrais</i>	117
<i>Figura 3.4 – Divisão das faixas no sentido x</i>	121
<i>Figura 3.5 – Divisão das faixas no sentido y</i>	121
<i>Figura 3.6 – Faixa 1 da laje L1 – unidades em cm</i>	122
<i>Figura 3.7 – Faixa 2 da laje L1 – unidades em cm</i>	122
<i>Figura 3.8 – Área de influência das cargas no pilar P2</i>	127
<i>Figura 4.1 – Altura útil (d) da laje e seção para o cálculo da armadura (<math>\rho</math>)</i>	140
<i>Figura 4.2 – Arranjo da armadura de punção para o pilar P2, segundo a NBR 6118/03</i>	162
<i>Figura 4.3 – Arranjo de conectores tipo pino para o pilar P2, segundo a BS 8110/97</i>	169
<i>Figura 4.4 – Arranjo da armadura de punção para o pilar P2, segundo ACI 318/08</i>	173
<i>Figura 4.5 – Arranjo da armadura de punção para o pilar P2</i>	178
<i>Figura 5.1 – Diagrama <math>\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h</math> da laje L1</i>	181
<i>Figura 5.2 – Diagrama dos valores médios de <math>\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h</math> da laje L1</i>	183
<i>Figura 5.3 – Diagrama <math>\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h</math> da laje L2</i>	184
<i>Figura 5.4 – Diagrama dos valores médios de <math>\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h</math> da laje L2</i>	186
<i>Figura 5.5 – Diagrama <math>\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h</math> da laje L3</i>	187
<i>Figura 5.6 – Diagrama dos valores médios de <math>\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h</math> da laje L3</i>	189
<i>Figura 5.7 – Diagrama <math>F_{MÁX} \times h</math> da laje L1</i>	191

Figura 5.8 – Diagrama de valores médios de  $F_{MÁX} \times h$  da laje L1 \_\_\_\_\_ 193

Figura 5.9 – Diagrama  $F_{MÁX} \times h$  da laje L2 \_\_\_\_\_ 194

Figura 5.10 – Diagrama dos valores médios de  $F_{MÁX} \times h$  da laje L2\_\_ 196

Figura 5.11 – Diagrama  $F_{MÁX} \times h$  da laje L3 \_\_\_\_\_ 197

Figura 5.12 – Diagrama dos valores médios de  $F_{MÁX} \times h$  da laje L3\_\_ 199

Figura 5.13 – Diagrama  $\frac{\sigma_{Solicitante(F+M)}}{\sigma_{Solicitante(F)}} \times h$  da laje L1 \_\_\_\_\_ 201

Figura 5.14 – Diagrama  $\frac{\sigma_{Solicitante(F+M)}}{\sigma_{Solicitante(F)}} \times h$  da laje L2 \_\_\_\_\_ 202

Figura 5.15 – Diagrama  $\frac{\sigma_{Solicitante(F+M)}}{\sigma_{Solicitante(F)}} \times h$  da laje L3 \_\_\_\_\_ 203

Figura 5.16 – Diagrama  $e_{MÁX} \times h$  \_\_\_\_\_ 204

Figura 5.17 – Diagrama coef. maj.  $\times h$  \_\_\_\_\_ 205

Figura 5.18 – Diagrama  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L1 \_\_\_\_\_ 208

Figura 5.19 – Diagrama  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L2 \_\_\_\_\_ 209

Figura 5.20 – Diagrama  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L3 \_\_\_\_\_ 210

## LISTA DE TABELAS

<i>Tabela 2.1 – Valores de <math>k</math> .....</i>	<i>73</i>
<i>Tabela 2.2 – Valores de <math>k</math> .....</i>	<i>81</i>
<i>Tabela 2.3 – Valores de <math>v_c</math> para a tensão resistente na punção .....</i>	<i>92</i>
<i>Tabela 2.4 – Conversão entre resistências de corpos de prova cilíndricos e cúbicos.....</i>	<i>103</i>
<i>Tabela 2.5 – Distribuição dos momentos nas faixas pela Norma Inglesa .</i>	<i>108</i>
<i>Tabela 2.6 – Distribuição dos momentos nas faixas pela Norma Européia .....</i>	<i>108</i>
<i>Tabela 2.7 – Símbolos e coeficientes de ponderação .....</i>	<i>114</i>
<i>Tabela 3.1 – Momentos fletores para cálculo da punção segundo a NBR 6118/03.....</i>	<i>123</i>
<i>Tabela 3.2 – Momentos fletores para cálculo da punção no EUROCODE .</i>	<i>125</i>
<i>Tabela 3.3 – Momentos fletores para cálculo da punção no ACI 318.....</i>	<i>126</i>
<i>Tabela 3.4 – Reações concentradas de cálculo do pilar P2 pela NBR 6118 .....</i>	<i>129</i>
<i>Tabela 3.5 – Reações concentradas de cálculo do pilar P2 pela BS 8110..</i>	<i>130</i>
<i>Tabela 3.6 – Reações concentradas de cálculo do pilar P2 pelo EUROCODE 2/04.....</i>	<i>132</i>
<i>Tabela 3.7 – Reações concentradas de cálculo do pilar P2 pelo ACI 318 ..</i>	<i>133</i>
<i>Tabela 3.8 – Reações entre as resistências características do concreto .....</i>	<i>134</i>
<i>Tabela 3.9 – Armaduras negativas por pilar (NBR).....</i>	<i>135</i>
<i>Tabela 3.10 – Armaduras negativas por pilar (BS).....</i>	<i>136</i>
<i>Tabela 3.11 – Armaduras negativas por pilar (EUROCODE).....</i>	<i>137</i>
<i>Tabela 4.1 – Tensões nas ligações laje-pilar segundo NBR 6118/03.....</i>	<i>143</i>
<i>Tabela 4.2 – Tensões nas ligações laje-pilar segundo BS 8110/97.....</i>	<i>148</i>
<i>Tabela 4.3 – Tensões nas ligações laje-pilar segundo ACI 318/08 .....</i>	<i>152</i>
<i>Tabela 4.4 – Tensões nas ligações laje-pilar segundo EUROCODE 2/08 ...</i>	<i>157</i>
<i>Tabela 4.5 – Tensões e armadura transversal nas ligações laje-pilar segundo NBR 6118/03.....</i>	<i>163</i>
<i>Tabela 4.6 – Tensões e armadura transversal nas ligações laje-pilar.....</i>	<i>170</i>
<i>Tabela 4.7 – Tensões e armadura transversal nas ligações laje-pilar.....</i>	<i>174</i>
<i>Tabela 4.8 – Tensões e armadura transversal nas ligações laje-pilar.....</i>	<i>179</i>
<i>Tabela 5.1 – Excentricidades das cargas concentradas na laje L1 .....</i>	<i>182</i>
<i>Tabela 5.2 – Excentricidades das cargas concentradas na laje L2 .....</i>	<i>185</i>
<i>Tabela 5.3 – Excentricidades das cargas concentradas na laje L3 .....</i>	<i>188</i>
<i>Tabela 5.4 – Excentricidades das cargas máximas concentradas em L1 ..</i>	<i>192</i>

*Tabela 5.5 – Excentricidades das cargas máximas concentradas em L2...195*

*Tabela 5.6 – Excentricidades das cargas máximas concentradas em L3...198*

## 1 INTRODUÇÃO

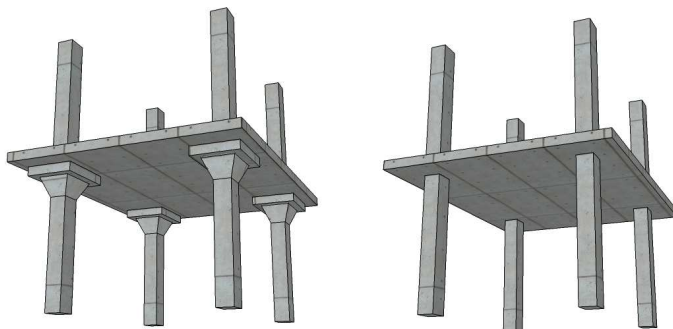
As estruturas de concreto de edifícios podem ser concebidas de diversas maneiras, sendo o sistema reticulado de lajes, vigas e pilares, chamado de estrutura convencional, a mais usada até hoje no Brasil. Atualmente tem sido adotada uma solução onde se suprimem as vigas e, nessa concepção, têm-se as lajes apoiadas diretamente nos pilares.

A opção de lajes sem vigas pode ser vantajosa por diversos fatores. Os principais são a economia de formas e rapidez na execução. Neste caso, eventuais modificações na arquitetura são possíveis pela flexibilidade que a inexistência das vigas proporciona.

O uso de lajes sem vigas implica em prevenir a ruptura por punção. Como a laje está diretamente apoiada nos pilares, as forças de reação atuam em pequenas áreas e geram tensões elevadas na região da laje ao redor da periferia dos pilares, podendo chegar ao rompimento nesta região. Este tipo de ruína também pode ocorrer em outros elementos estruturais, tais como: lajes de piso ou pavimentos apoiados sobre estacas, lajes de fundação que suportam diretamente os pilares, caixas d'água apoiadas sobre pilares ou estacas, sapatas, blocos flexíveis e cortinas atirantadas.

Segundo Pinto (1993), a ruptura por punção é geralmente caracterizada pela ausência de escoamento generalizado da armadura, sendo basicamente ocasionada pela destruição local do concreto da zona comprimida em torno do pilar ou da área carregada. A ruptura, portanto, é súbita, o que não acontece numa ruptura dúctil. Como a ruptura por punção acontece sem aviso, ou seja, é do tipo frágil, deve-se, como diretriz de projeto, garantir que, caso a ruína ocorra, ela não se dê por punção, mas sim por flexão.

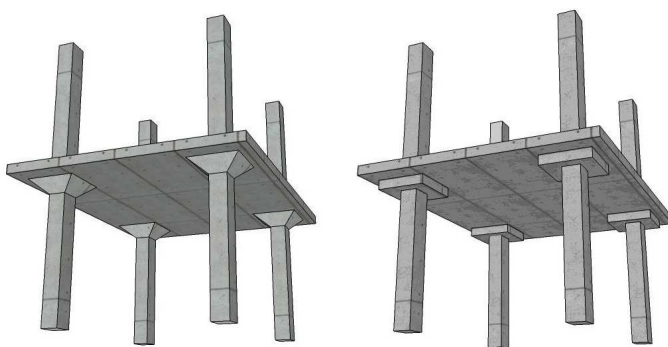
A diferença entre lajes lisas e lajes-cogumelo, segundo a atual Norma Brasileira, é que lajes-cogumelo são definidas como sendo as que estão diretamente apoiadas em pilares com capitéis, enquanto que lajes lisas são aquelas apoiadas em pilares sem capitéis (figura 1.1).



**Figura 1.1 – Laje-cogumelo e laje lisa, respectivamente.**

Para garantir a segurança e diminuir as tensões de punção, surgiu em 1905, com a iniciativa pioneira de C. A. P. Turner, o sistema estrutural tradicionalmente conhecido como laje-cogumelo, sobre o qual Gasparini (2002) apresenta um histórico bastante completo.

As lajes cogumelos são lajes lisas com aumentos de seção na região da ligação laje-pilar, que podem ser na forma de capitéis ou engrossamentos da laje. Embora tenham a mesma função, Ghosh *apud* Melges (2001) menciona que, no projeto, considera-se o capitel como sendo um aumento da seção transversal do pilar, próximo à sua ligação com a laje e, o engrossamento da laje, como o próprio nome diz, um aumento da espessura da laje nessa região (figura 1.2).



**Figura 1.2 – Exemplos de capitel e engrossamento da laje, respectivamente.**



O uso de capitéis fez com que os conjuntos constituídos pelas lajes, capitéis e pilares se assemelhassem a cogumelos. Dessa semelhança nasceu a denominação laje-cogumelo, que também é largamente usada nos idiomas europeus, como, por exemplo, o francês (plancher champignon), o espanhol (losas fungiforme), o italiano (solai a fungo) e o alemão (pilzdecke).

O uso de capitéis ou engrossamentos da laje pode ser indesejável do ponto de vista arquitetônico ou construtivo. Sendo assim, o uso de armaduras transversais para prevenir a punção, ou, simplesmente, armadura de punção, é uma alternativa vantajosa do ponto de vista estrutural, uma vez que este tipo de armadura aumenta também a ductilidade da ligação, contribuindo para a mudança do tipo de ruína frágil (figura 1.3) para dúctil, além de contribuir para a estabilidade global da estrutura.



**Figura 1.3 – Colapso de uma garagem**

Fonte: (CAPRANI, 2008)

## 1.1 Justificativa

As normas sempre tiveram um papel importante no dimensionamento das estruturas. Elas são necessárias para garantir a segurança pública e criar uma base igualitária para competição, além de servir como material de ajuda para calculistas e projetistas. As autoridades públicas já consideram necessário o controle de construções a mais de 3000 anos e, uma das principais funções da maioria das normas é atuar como parte do sistema de controle das obras. No Brasil, com a entrada em vigor do Código de Defesa do Consumidor em 1990, as normas que eram apenas uma diretriz a ser seguida, não obrigatórias, passaram a valer como um padrão mínimo de referência, tornando-se obrigatórias.

Há muitas opiniões divergentes quando se fala em quão detalhada ou complexa uma norma deve ser (WALRAVEN, 2004). Da mesma maneira que a complexidade das construções pode variar, a capacidade e as ferramentas disponíveis para cada engenheiro também variam, sendo obviamente impossível uma norma atender especificamente a todas as necessidades.

Ainda no que diz respeito à complexidade das normas, deve-se entender também que, embora novos estudos e teorias nos dêem a possibilidade de chegar a resultados com uma precisão cada vez maior no cálculo de carregamentos, esforços e resistências, deve-se ter em mente que tais teorias podem chegar a tal ponto de sofisticação que a precisão esperada pode ser obscurecida por incertezas de natureza prática. Portanto, a complexidade das fórmulas deve ser compatível com a precisão com a qual os dados mais importantes podem ser acessados.

Segundo Walraven (2004), uma norma ideal deveria ser: simples e transparente; coerente e compatível com outras normas; contemplar o máximo possível de novos desenvolvimentos, mas não ao custo de formulações teóricas complexas (métodos muito sofisticados não são apropriados se os dados de entrada não são igualmente precisos); formulações simples, mas que não levem a limitações.

No caso da verificação da punção em lajes de concreto armado, as atuais abordagens das normas são baseadas em uma tensão nominal de cisalhamento, onde a tensão nominal é definida como uma força de reação do pilar das cargas da laje sobre ele, dividido pela área de uma superfície de controle normal ao plano da laje, situada ao redor da área carregada.

Nas normas mais conhecidas, percebe-se uma grande disparidade na definição desses perímetros segundo cada norma. Deve-se entender que a superfície de controle é considerada como uma grandeza de referência, o que não significa que a ruptura ocorra nessa superfície (CORDOVIL, 1997).

Como os códigos vigentes fazem diferentes considerações a respeito da escolha do perímetro de controle, fazem também do parâmetro de resistência do concreto. Naturalmente, em função das diferentes definições dos perímetros, o tratamento do parâmetro de resistência do concreto é feito de maneira adequada ao traçado de cada perímetro de controle.

Além da diferença nos perímetros de controle, algumas normas, no caso de punção com transmissão de momentos, permitem que o efeito do momento seja substituído por um fator de majoração da carga centrada no pilar. Essa consideração pode ser observada na Norma Britânica BS 8110 e no EUROCODE 2/92.

Como há uma grande diferença entre os critérios normativos para o cálculo da punção, faz-se necessário um estudo em que seja possível apresentar e comparar as características apresentados nas diversas normas existentes, para que o engenheiro estrutural possa escolher qual modelo se adapta melhor às suas necessidades e limitações, sejam elas técnicas ou econômicas.

### 1.2 Objetivos

Apresentar os métodos de cálculo da punção em lajes de concreto armado propostos pelas Normas Brasileira (NBR 6118/03), Americana (ACI 318/08), Britânica (BS 8110/97) e Européia (EUROCODE 2/04), mostrando as diferenças de resultados calculados sobre uma série de configurações de lajes variando espessura e vãos, fazendo comparações e analisando as características de cada norma.

Dentro deste objetivo geral, podem-se destacar os seguintes objetivos específicos:

- Fazer uma breve consideração a respeito da importância e finalidade da normalização;
- Apresentar um histórico de algumas pesquisas já feitas referentes ao cálculo da punção, no Brasil e no exterior;
- Fazer uma introdução aos principais fatores que influenciam o efeito da punção, bem como os principais tipos de armadura de combate à mesma;
- Apresentar métodos de cálculos e a proveniência da formulação de algumas normas;
- Apresentar resultados máximos de resistência sem o uso de armadura de punção dado pelas normas estudadas e comparar resultados e aplicação das fórmulas;
- Apresentar resultados da quantidade de armadura de punção necessária para um mesmo carregamento segundo cada norma estudada e comparar resultados e aplicação das fórmulas;

- Obter conclusões referentes à aplicação e diferença de resultados obtidos em cada norma no que diz respeito ao cálculo da punção.

### 1.3 Planejamento

Este trabalho está dividido em quatro tópicos:

- a) **Introdução:** Apresentação do assunto, mostrando a importância da consideração da punção no projeto de lajes sem vigas; apresentação dos objetivos e do planejamento da dissertação; considerações sobre normalização.
- b) **Revisão bibliográfica:** Apresentação de um histórico envolvendo o estágio atual do conhecimento relativo a pesquisas sobre punção no mundo e no Brasil. Apresentação de conceitos relativos à punção e modelos de cálculo usados para verificar a punção; apresentação das normas abordadas nesse trabalho.
- c) **Desenvolvimento da dissertação:** Apresentação dos casos estudados e dos resultados obtidos. Estas análises visam à elaboração de conclusões referentes ao emprego dos diferentes métodos no cálculo da punção.
- d) **Conclusões:** Apresentação das conclusões relativas aos objetivos do trabalho e proposição de novos estudos.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Histórico

A seguir são apresentados alguns estudos de lajes lisas de concreto armado relacionados ao fenômeno da punção. Serão apresentadas em primeiro lugar algumas pesquisas realizadas no exterior e em seguida as realizadas no Brasil, feitas em ordem cronológica.

#### 2.1.1 Pesquisas Internacionais

- TALBOT (1913)

É responsável pelo primeiro estudo sobre punção que se tem conhecimento. Observou a ruína por punção em vinte das 197 sapatas que ensaiou sem o uso de armadura de cisalhamento.

- RICHART (1948)

Realizando testes em sapatas, concluiu que com o aumento da taxa de armadura de flexão, aumentava-se também a resistência à punção das mesmas. A primeira tentativa de quantificar a influência da resistência à flexão na resistência à força cortante foi feita por Hognestad (1953).

- ELSTNER & HOGNESTAD (1956)

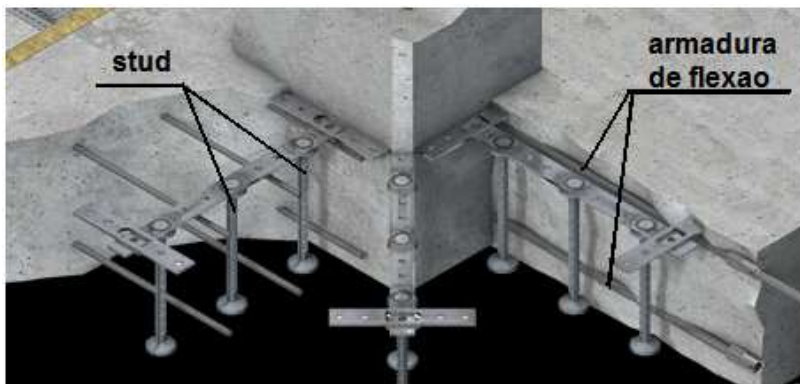
Fizeram a primeira proposta para o cálculo da contribuição da armadura de punção na resistência da ligação.

- KINNUNEN e NYLANDER (1960, 1963 e 1964)

Realizaram ensaios de diversas lajes circulares com pilar central e, com base nos resultados, eles propuseram um modelo mecânico cujo cálculo considera a influência da flexão e da força cortante concomitantemente. Neste modelo, que é base do regulamento sueco com respeito à punção, a carga de ruína é determinada pelo do equilíbrio entre esforços internos e carregamentos externos.

- GHALI & MEGALLY (1980)

Ghali & Megally (1980) realizaram ensaios em quinze lajes quadradas com lado igual 1900 mm, armadas com armadura de punção tipo *stud*, conforme figura 2.1 (armaduras transversais do tipo pino).



**Figura 2.1 – Exemplo do uso de studs.**

Fonte: [www.halfen.co.uk](http://www.halfen.co.uk) (2009)

Ghali et all (1980) verificou em seus ensaios que nas lajes com armadura de cisalhamento a ruptura não foi frágil e estas ainda apresentaram uma ductilidade maior do que nas lajes sem armadura de cisalhamento.

- REGAN (1985)

Tem-se a menção da existência de três possibilidades de ruptura da ligação laje-pilar reforçada com armadura de punção: a primeira refere-se a uma superfície de ruptura junto à face do pilar, a segunda na região transversalmente armada, e a terceira além da região armada.

Regan, (1985) afirma que para uma laje sem armadura de cisalhamento a superfície de ruptura forma um ângulo de aproximadamente 25° com o plano da laje, com origem na face do pilar, para a situação de carregamento simétrico. A partir dessa conclusão, Regan, (1985) sugeriu que ao se adicionar um elemento de armadura de cisalhamento, posicionado a uma distância que force a mudança da inclinação da superfície de ruptura, haverá um acréscimo para a



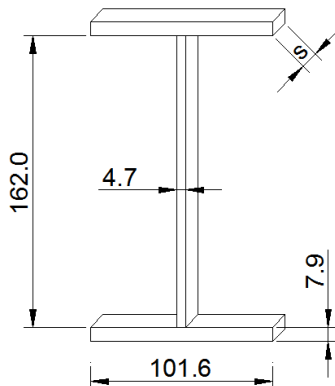
contribuição do concreto na carga de ruptura. Este acréscimo é moderado até que a inclinação se aproxime de  $45^\circ$  e, a partir desta inclinação, o aumento vai sendo bastante significativo.

- SHEHATA (1985 e 1990)

Em Shehata (1985) é apresentado um modelo racional para o cálculo da punção em pilares internos com carregamento simétrico e sem armadura de punção. Em Shehata (1990), é apresentado um modelo simplificado composto de bielas comprimidas e tirantes radiais. Pinto (1993) menciona que este modelo é de fácil aplicação e em geral fornece bons resultados. Porém, para ensaios onde a resistência do concreto à compressão é elevada, o modelo superestimou os valores das cargas de ruína.

- GOMES (1991)

Realizou diversos ensaios estudando o efeito da armadura de cisalhamento em lajes de concreto armado submetidas a carregamento simétrico. Para servir como armadura de cisalhamento, foram usados perfis metálicos de seção “I”, cortados com uma espessura “s” de acordo com a área de armadura transversal necessária (Figura 2.2).



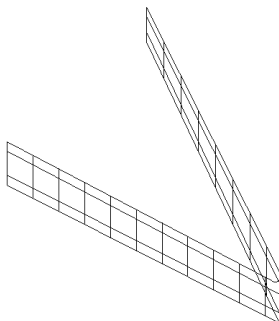
**Figura 2.2 – Perfil “I” utilizado como armadura de cisalhamento**

Fonte: (TRAUTWEIN, 2006)

Gomes, (1991) conclui em seus ensaios que, usando armadura de punção, pode-se obter um aumento na resistência à punção por vezes maior que 100% em lajes de concreto armado. A forma de distribuição da armadura de cisalhamento é um importante parâmetro e pode limitar a resistência à punção de uma laje, como foi verificado nos ensaios realizados, em que a disposição radial da armadura de cisalhamento proporcionou melhores resultados que a do tipo dupla cruz. Gomes (1991) recomenda ainda que a distância entre os elementos da armadura de cisalhamento não deve exceder  $0,5d$ .

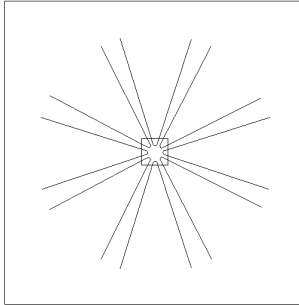
- REGAN (1993)

Realizou um ensaio em que se inseria uma armadura de cisalhamento distribuída em forma de estrela (figuras 2.3 e 2.4), chamada de Riss Star, entre as armaduras de flexão.



**Figura 2.3 – Detalhe da armadura de flexão Riss Star**

Fonte: (TRAUTWEIN, 2006)



**Figura 2.4 – Distribuição da armadura de flexão Riss Star**

A resistência à punção sofreu um acréscimo entre 65% e 69% em relação a uma laje sem armadura de cisalhamento com características similares. Regan, (1993) detectou a formação de dois planos horizontais de fissuras entre a armadura de cisalhamento e as armaduras de flexão, entretanto foram detectadas também fissuras diagonais ao se fazer um corte na laje.

- MELO (1994)

Apresentou um estudo sobre a importância do uso de uma armadura junto à armadura de flexão inferior na laje, de modo a evitar o colapso progressivo, caso ocorra a ruptura da ligação laje-pilar.

- ELGABRY & GHALI (1996)

Realizaram dois estudos relacionados à punção. No primeiro deles são apresentados resultados experimentais sobre o uso de conectores tipo pino em ligações laje-pilar, submetidas a um momento fletor desbalanceado. Em seu outro estudo, apresentam algumas propostas sobre o assunto para a revisão do ACI.

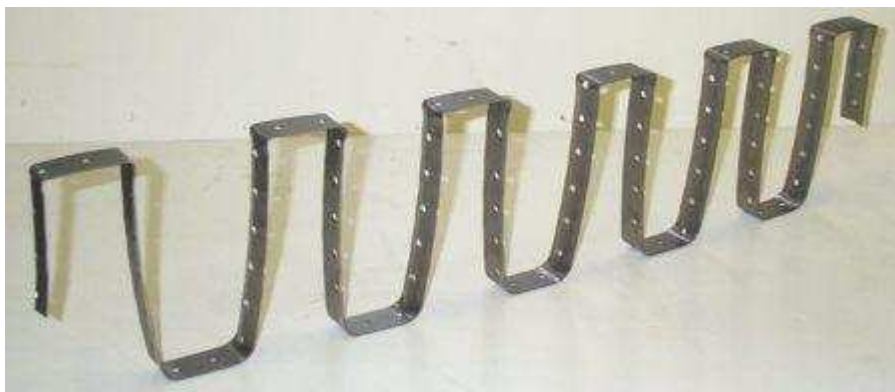
- HALLGREN (1996)

Realizou ensaios utilizando concreto de alto desempenho e armadura de cisalhamento com barras dobradas, formando um ângulo aproximado de 33° com a horizontal. Hallgren observou que todas as lajes com baixas taxas de armadura de flexão e com armadura de cisalhamento tiveram um comportamento mais dúctil antes de alcançar a ruptura. O acréscimo de resistência com a utilização de barras dobradas

chegou a 69%. Verificou também a influência das barras dobradas no comportamento pós punção das lajes, que introduziu nas lajes com armadura de cisalhamento uma carga residual em torno de 50% da carga última.

- PILAKOUTAS (2000)

Realizou ensaios a fim de analisar a eficiência de uma armadura de cisalhamento em forma de faixas maleáveis de aço tipo “fitas”, o qual chamava de “Shearband System”. Suas vantagens eram de ser mais prático de instalar, mais econômico e mais eficiente quanto à ancoragem e ductilidade, em relação à armadura de cisalhamento convencional. As “Shearbands” (figura 2.5) têm a possibilidade de serem ancoradas na armadura de flexão superior, graças à sua espessura reduzida a ainda usando o mínimo de recobrimento necessário, possibilitando assim o uso em lajes finas. As fitas de aço utilizadas eram perfuradas por furos de 5 mm de diâmetro e distantes a cada 50 mm.



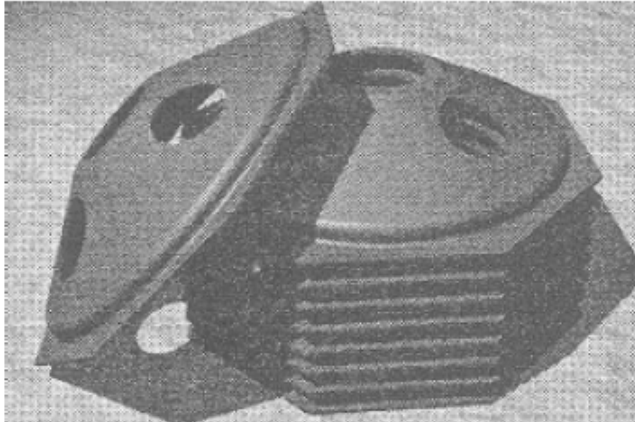
**Figura 2.5 – Exemplo de uma *Shearband***

Fonte: [www.shef.ac.uk](http://www.shef.ac.uk) (2010)

- ALANDER (2000)

Realizou ensaios utilizando um tipo diferente de armadura de cisalhamento, denominada UFO. Essa armadura com formato tronco-cônico (figura 2.6) era posicionada sobre o pilar, trabalhando também como um suporte vertical para a armadura de flexão superior não ceder.

Os ensaios tinham por objetivo verificar a capacidade de prevenir a ruptura por punção em lajes de concreto armado utilizando-se essa nova armadura. Os principais parâmetros deste modelo de armadura são os diâmetros, determinados em função do pilar e da espessura do “UFO”.



**Figura 2.6 – Armadura de cisalhamento UFO**

Fonte: (ALANDER, 2000)

Alander ensaiou 18 lajes de concreto armado utilizando esse tipo de armadura, divididos em 3 séries. Na série 1 a armadura de cisalhamento UFO tinha o diâmetro de 550 mm e as lajes quadradas ensaiadas tinham 1800 mm de lado. Na série 2 tinha a armadura de cisalhamento tinha diâmetro de 900 mm e as lajes 2500 mm de lado. Na série 3 a armadura de cisalhamento tinha novamente diâmetro de 550 mm em as lajes com lado igual a 2300 mm. Todas as lajes romperam por punção e as cargas de ruptura obtidas experimentalmente foram, em média, 30% maiores do que os resultados estimados pelo Eurocode2/92

### 2.1.2 Pesquisas Feitas no Brasil

- MARTINELLI (1974)

Em São Carlos, em 1972, o Prof. Dante Martinelli iniciou um amplo projeto de pesquisa sugerido pelo Prof. Telemaco van Langendonck, que visava o estudo experimental da resistência de ligações laje-pilar em cantos e em bordas de lajes cogumelo.

Sendo assim, vários ensaios foram realizados no Laboratório de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos (LE-EESC), cujos resultados forneceram material para a sua tese de livre docência (MARTINELLI, 1974). É importante destacar a grande contribuição ao estudo da punção feita pelo Prof. Martinelli, tanto por sua tese, como também em sua orientação nas dissertações de mestrado dos engenheiros FIGUEIREDO FILHO (1981), TAKEYA (1981), LIBÓRIO (1985), GONÇALVES (1986) e MODOTTE (1986).

- FUSCO (1985)

Fusco verificou em ensaios experimentais de lajes armadas com conectores tipo pino, que o entrosamento dos agregados ao longo da superfície de ruptura e o efeito de pino da armadura de flexão são elementos essenciais na resistência das lajes ao cisalhamento. Ele menciona ainda que o esquema resistente tipo treliça existe somente na vizinhança da força concentrada.

- MELGES (1995)

Realizou estudos e ensaios onde propôs que se adicionasse ao critério do CEB CM90 o efeito do momento, atuando perpendicularmente à borda, ao da força nos pilares de borda e canto, com a intenção de evitar erro de equilíbrio.

- CORDOVIL & FUSCO (1995)

Foram feitos ensaios com a finalidade de estudar o comportamento de lajes lisas com armadura de cisalhamento, constituídas por elementos tipo pino com chapas de ancoragem soldadas na extremidade.

Comparando-se as lajes com armadura de cisalhamento com as lajes sem armadura de cisalhamento, ocorreu um aumento da resistência à punção de, aproximadamente, 17% para as lajes submetidas a

carregamento simétrico e para o caso das lajes com carregamento excêntrico o ganho foi de 54%.

- ZAMBRANA VARGAS (1997)

Comparou o desempenho de ligações laje-pilar interno em função dos seguintes parâmetros: presença e ausência de fibras de aço incorporadas ao concreto; presença e ausência de armadura de cisalhamento e variação da resistência do concreto à compressão, usando, em parte dos modelos, concreto com resistência convencional e, em outra parte, concreto de alta resistência.

Segundo ele, a combinação de uma determinada taxa de fibras, juntamente com o uso da armadura transversal tipo pino, pode elevar de modo significativo a resistência da ligação com relação à punção. Foi observado que, com a adição de fibras, aparentemente o modo de ruptura tornou-se mais dúctil, sendo esta ductilidade mais significativa para os concretos de resistência convencional.

- OLIVEIRA (1998)

Realizou vários ensaios de punção em lajes de concreto armado de elevado desempenho (resistências variando entre 60 MPa e 69 MPa), com o objetivo de comparar a eficácia de estribos retangulares convencionais com estribos inclinados, que podem ser posicionados após a colocação da armadura de flexão. Como principal conclusão, verificou-se que os estribos inclinados tiveram um desempenho significativamente melhor do que os estribos convencionais.

- MUSSE (2004)

Seu estudo foi baseado em estudar a adição de fibras de aço no concreto somado à armadura de cisalhamento no combate à punção. As lajes foram divididas em dois grupos, com e sem adição de fibras de aço no concreto e a armadura de punção utilizada era do tipo pino (*stud*).

Musse observou pelos seus estudos que a presença das fibras modificou o modo de ruptura da laje. A adição das fibras fez com que a ruptura ocorresse na região armada transversalmente, sendo que sem a adição das fibras a ruptura ocorria na região externa à armação. Com a combinação da armadura de cisalhamento e das fibras de aço foi possível aumentar a carga de ruptura da laje em até 75% em relação a uma laje sem fibras e sem armadura de cisalhamento.

- CARVALHO (2004)

Realizou um estudo a fim de verificar o efeito da utilização de armadura de cisalhamento na região de pilares interiores de lajes lisas protendidas com cabos não-aderentes. As investigações foram feitas a partir de resultados experimentais obtidos dos ensaios de 09 lajes e os resultados foram comparados com recomendações da NB1.

Carvalho pode concluir com as análises feitas a partir da comparação entre os resultados experimentais e as estimativas de norma que, para verificação, as recomendações da NBR 6118 levaram à estimativas a favor da segurança do valor da resistência ao puncionamento em todas as lajes avaliadas, mas apenas uma das lajes apresentou modo de ruptura próximo ao estimado

- SOUZA, MELO E GOMES (2009)

Realizaram estudos investigando o comportamento estrutural e a resistência última à punção de ligações laje-pilar de regiões internas das lajes lisas, com um ou dois furos adjacentes ao pilar, e com ou sem transferência de momento fletor da laje ao pilar, onde analisaram os resultados de cargas últimas, fissuração, deslocamento vertical, deformações das armaduras de flexão, de cisalhamento e do concreto.

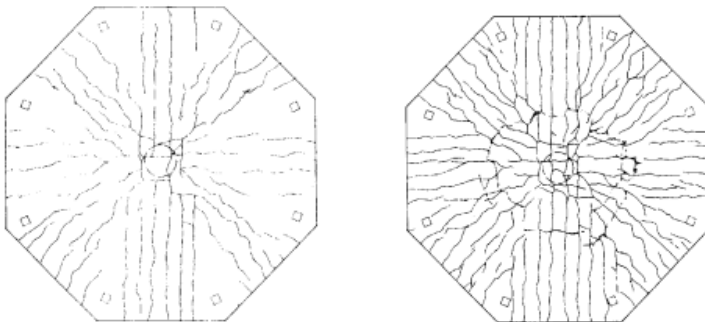
Souza et all (2009) verificaram que o posicionamento dos furos em relação ao pilar, adjacente ao maior ou menor lado, as dimensões dos furos, a taxa e a distribuição da armadura de flexão, a armadura de cisalhamento, a variação da relação  $\mu/V_u$  em função do carregamento, e, por conseguinte, da excentricidade, influenciaram o comportamento e a carga de ruptura das lajes.



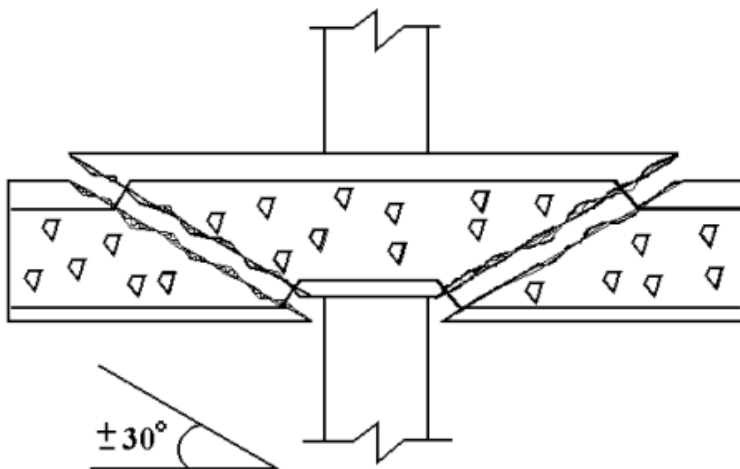
## 2.2 Fatores que influenciam na resistência à punção

O efeito da punção em lajes lisas de concreto armado sofre influência de diversos fatores. Além do grande problema da ligação laje-pilar estar situada em uma região de nós, a variação na forma, textura, tamanho do agregado, com os fenômenos de microfissuração (microfissuras que ocorrem na zona de transição entre os agregados e a pasta de cimento endurecida, antes mesmo da peça ou modelo ser submetido a carregamento externo), determinantes do comportamento não-linear do concreto, aliada à presença das barras das armaduras de aço estrutural conduzem o material concreto armado a uma heterogeneidade de materiais e comportamentos que agravam a indefinição do sistema.

Segundo Shehata (1993), observa-se em ensaios de lajes lisas sob efeito de carregamentos concentrados simétricos o aparecimento de fissurações radiais nas lajes, as quais começam quase no centro das lajes e se estendem na direção do perímetro das mesmas, dividindo assim as lajes em segmentos radiais. Shehata (1993) observou também que momentos antes da ruptura, algumas fissuras tangenciais na região da punção apareceram, indicando a formação de uma fissuração inclinada interna causada pela tração diagonal (figura 2.7), a partir das quais se desenvolvem as superfícies de ruptura por cisalhamento do cone de punção com inclinação média da ordem de  $30^\circ$  (figura 2.8).



**Figura 2.7 – Surgimento de fissuras radiais e tangenciais em ensaios**



**Figura 2.8 – Surgimento de fissuras radiais e tangenciais em ensaios de punção**

Fonte: Melges (1995)

A ocorrência de fissuras na massa de concreto, juntamente com a microfissuração do concreto endurecido da zona de transição, configuram um quadro muito complexo. Isso torna muito difícil o estabelecimento de uma teoria geral aceitável para o problema da punção em lajes de concreto armado

### 2.2.1 Espessura da laje

Quando se aumenta a espessura da laje com a finalidade de combater o efeito da punção, pode-se optar por duas soluções: aumentar a espessura de toda a laje ou simplesmente na região da sua ligação com o pilar, o que é chamado de capitel ou engrossamento da laje. Ao se modificar a altura útil para toda a laje, as ações permanentes também aumentam, portanto aumenta-se a tensão resistente mas também as tensões solicitantes, de tal forma que o processo não se torna vantajoso tanto economicamente quanto tecnicamente. Já o uso de capitéis, embora aumente a resistência à punção da ligação, pode também apresentar alguns inconvenientes, como perder as vantagens oferecidas pelo teto

liso e até mesmo prejudicar alguns aspectos arquitetônicos, além de aumentar a distância entre pisos.

### 2.2.2 *Dimensões, formato e dimensão do pilar*

Além da influência direta da área do pilar em contato com a laje, a proporção entre as dimensões também pode ter influência no caso da punção. Segundo Braestrup & Regan (1985) *apud* Melges (2001), quando comparados a pilares quadrados, os pilares retangulares com relação entre lado maior e lado menor maior que 2 têm uma ruína mais abrupta, o tamanho do cone de punção é menor e a resistência da ligação também é menor pelo fato de terem as tensões concentradas nos lados de menor dimensão. Os autores afirmam ainda que quanto ao formato, pilares retangulares têm resistência em torno de 15% menor em relação a pilares circulares de mesma área, e isto se deve ao fato de existir uma concentração de tensões nos cantos nos pilares retangulares.

Com relação à sua posição na laje, tem-se que para uma mesma dimensão de pilar, por influência da área resistente da laje, pilares internos resistem mais que pilares de borda, sendo os pilares de canto menos resistentes em relação à punção.

### 2.2.3 *Armadura de punção*

As armaduras de punção proporcionam um aumento na resistência da ligação laje-pilar. Esse tipo de armadura pode ser de vários tipos e formatos, e seu uso permite que se adotem espessuras mais delgadas da laje sem haver necessidade do uso de capitéis e engrossamentos da laje, mantendo, portanto, as principais vantagens do uso de lajes sem vigas.

Os principais benefícios do uso da armadura de punção são o aumento da resistência e da ductilidade da ligação laje-pilar. Isso significa que sua ruptura não ocorrerá mais de maneira frágil e sem aviso, permitindo que a estrutura se deforme antes de romper-se.

Além de ser usada com a finalidade de aumentar a resistência e a ductilidade das ligações laje-pilar, a Norma Brasileira recomenda que, no caso de a estabilidade global da estrutura depender da resistência da laje à punção, deve-se prever uma armadura de punção, mesmo que os esforços solicitantes da ligação sejam menores que os resistentes. Essa

armadura deve equilibrar no mínimo 50% da força de reação proveniente da laje no pilar.

Apesar das vantagens, é necessário que haja cuidados especiais no uso da armadura de punção. Folgas na ancoragem e má disposição das armaduras podem provocar escorregamentos e fazer com que elas percam sua função estrutural.

#### *2.2.4 Resistência do concreto*

A resistência à punção da ligação laje-pilar está relacionada à resistência do concreto à tração. Algumas normas admitem que essa resistência seja proporcional ao valor da raiz quadrada da resistência à compressão. No entanto, o aumento da resistência da ligação, em função do aumento da resistência do concreto, não confere à laje uma melhor ductilidade com relação à ruína.

#### *2.2.5 Relação momento fletor / esforço cortante*

Com relação ao efeito do momento fletor na resistência à punção, ensaios experimentais têm mostrado que, quanto maior a excentricidade do carregamento, menor a resistência da ligação.

#### *2.2.6 Taxa de armadura de flexão*

A importância da taxa de armadura decorre de sua influência sobre o efeito de pino da armadura longitudinal de tração, após a fissuração da borda tracionada da peça, e de sua influência sobre a manutenção do engrenamento dos agregados.

Uma Maior taxa de armadura causa menor incidência de fissuras. Uma menor taxa, ao contrário, eleva a fissuração. Um nível maior de fissuração, na presença da microfissuração, diminui a resistência ao cisalhamento do concreto. Conforme resultados experimentais mostrados por Fusco (1984) *apud* Melges (2001) observam-se que taxas acima de 2% não aumentam a resistência da laje à punção.

### 2.2.7 Efeito escala (*Size effect*)

A influência do efeito de escala geralmente é dada em função da altura útil da laje. Este efeito refere-se ao fato de que, em igualdade de outras condições, as lajes de menor altura útil são mais resistentes que as lajes mais espessas.

Este fato é em princípio justificável pela possibilidade de maior heterogeneidade do concreto das lajes mais espessas. Além disso, mesmo com uma mesma taxa de armadura longitudinal, nas lajes de maior espessura, a armadura de tração perde sua capacidade de controlar a abertura das fissuras ao longo de toda a altura da seção fissurada. Deste modo, a espessura da peça condiciona o engrenamento dos agregados, fazendo com que a altura útil também seja um fator que controla a resistência das lajes à punção. O engrenamento dos agregados permite o cruzamento das bielas de compressão pela região de concentração de fissuras. A falta de consideração desse fato pode levar a critérios que superdimensionam as peças estruturais em função da significativa subestimação da resistência ao cisalhamento do concreto (CORDOVIL, 1997).

Resultados experimentais mostram, no entanto, que a partir de uma determinada espessura a influência da variação da altura útil deixa de ser significativa. Essa limitação da influência da espessura a um determinado valor decorre de um efeito de escala entre a altura útil da peça e o diâmetro máximo dos agregados empregados na fabricação do concreto.

O engrenamento dos agregados depende de maneira significativa da porcentagem de grãos de maior diâmetro empregados no concreto e, até certo limite, da relação entre a altura útil da peça e o diâmetro máximo dos agregados empregados. Deste modo, nas peças usuais de concreto estrutural, com diâmetros máximos do agregado da ordem de 30 mm, o engrenamento dos agregados é mais eficiente em lajes delgadas do que em peças de grande espessura.

Todavia, conforme resultados experimentais, a diminuição do efeito do engrenamento dos agregados fica estabilizada ao redor de um determinado valor da altura útil.

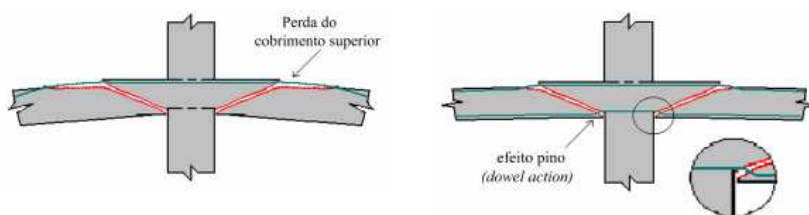
### 2.2.8 Influência do tipo de carregamento

No caso das cargas concentradas aplicadas nas lajes, afastadas dos apoios, a resistência média à punção não é mais influenciada por um eventual arqueamento dos esforços, sendo assim, a resistência passa a depender apenas do engrenamento dos agregados, do efeito de pino da armadura de flexão e da própria resistência do concreto à tração. Esta situação também pode ser relacionada à reação de um pilar sobre uma laje diretamente apoiada nele.

### 2.2.9 Armadura contra colapso progressivo

Num edifício, a ruína localizada de uma ligação aumenta a força e a excentricidade nos pilares próximos, podendo desencadear a ruína generalizada de um pavimento e até de uma estrutura, se os painéis de laje caírem uns por cima dos outros. Essa sucessão de ruínas dos painéis é chamada de colapso progressivo (LIMA, 2001).

A armadura contra o colapso progressivo deve ser localizada na parte inferior da laje na região da ligação laje-pilar. Essa armadura aumenta a ductilidade da ligação na fase pós-puncionamento, redistribuindo os esforços de modo a evitar a ocorrência do colapso progressivo (figura 2.9).



**Figura 2.9 – Fase pós puncionamento sem e com armadura contra colapso progressivo, respectivamente.**

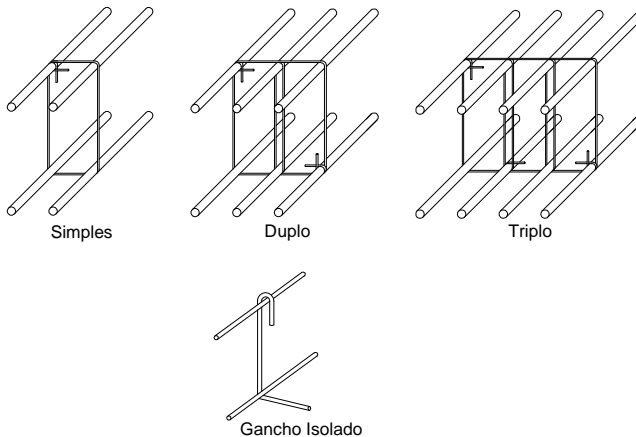
Fonte: Lima (2001)

### 2.2.10 Tipos de armadura de punção

As Além de aumentar a resistência da ligação, alguns tipos de armadura de punção fornecem uma maior ductilidade à ligação, ou seja, uma maior capacidade da ligação em se deformar. Deve-se, no entanto, estudar cuidadosamente o detalhamento da ancoragem dessa armadura de punção, principalmente para lajes mais esbeltas.

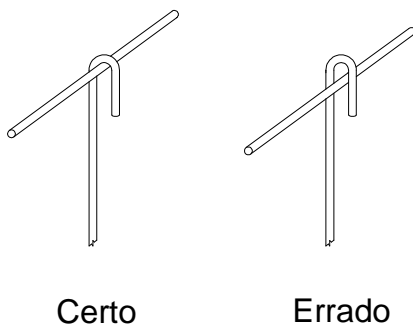
- **ESTRIBOS**

Os estribos podem ser abertos em forma de ganchos ou fechados em forma de retângulos. Os estribos retangulares podem estar associados entre si, como mostra a figura 2.10. Eles podem ainda estar inclinados ou não. Os estribos são apenas parcialmente efetivos nas lajes delgadas, por causa do “escorregamento” da ancoragem do estribo. Este escorregamento ocorre nas dobras de todos os estribos e proporcionam grandes aberturas às fissuras de cisalhamento, a menos que barras longitudinais de grande bitola sejam usadas. Sendo assim, a ruína por punção se dá antes que a tensão de escoamento dos estribos seja atingida.



**Figura 2.10 – Tipos de estribos**

O desempenho dos ganchos foi considerado satisfatório em ensaios realizados por Takeya (1981) (figura 2.11). Os ganchos possuem a vantagem de não interferir nas armaduras de flexão da laje e nem na dos pilares, sendo de fácil montagem e execução. No entanto, os ensaios confirmaram que, para este tipo de armadura de punção, deve-se garantir que não haja folga entre o gancho e as faces superiores da armadura de flexão. A importância desse contato deve-se ao fato da armadura de flexão servir de apoio para ancoragem do gancho. Caso esta situação não ocorra, toda a contribuição dos ganchos na resistência da ligação estará comprometida, bem como a sua segurança.

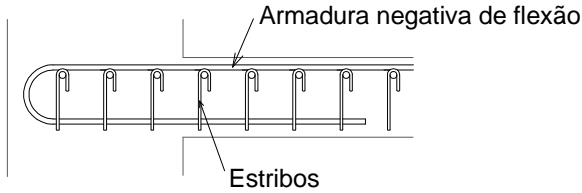


**Figura 2.11 – Ancoragem correta dos estribos**

Fonte: (IBRACON, 2003)

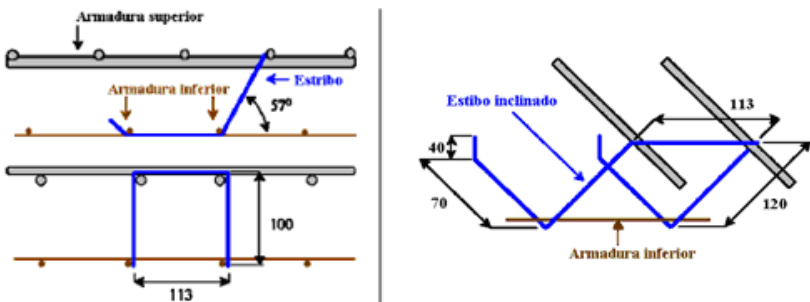
Nos modelos ensaiados por Takeya (1981), como não existia uma armadura inferior, os estribos foram ancorados no prolongamento da armadura negativa, como mostra a figura 2.12. Oliveira (1998) *apud* Trautwein (2006), por meio de ensaios experimentais, comprovou uma grande eficiência de estribos inclinados (figura 2.13), em ligações do tipo laje-pilar interno, usando concreto com resistência de 60 MPa.





**Figura 2.12 – Ancoragem dos ganchos e posicionamento dos estribos**

Fonte: (TAKEYA, 1981)



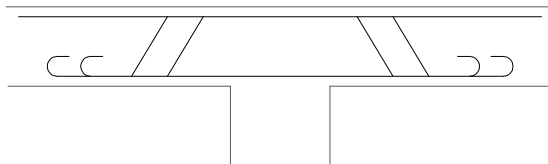
**Figura 2.13 – Esquema dos estribos inclinados**

Fonte: (TRAUTWEIN, 2006)

- BARRAS DOBRADAS

Park & Islam (1976) apud Melges (2001), analisando de lajes carregadas simetricamente, com e sem armadura de punção, chegaram às seguintes conclusões: o uso de barras dobradas (figura 2.14) aumenta a resistência da laje, não aumentando, no entanto, a sua ductilidade; já o uso de estribos fechados ancorados nas barras de flexão proporciona, além de um aumento na resistência da ligação, um considerável aumento na sua ductilidade.

Takeya (1981) menciona que, além da ancoragem dessas barras ser problemática em lajes com pouca espessura, o seu uso é inadequado para ligações da laje com pilares de borda e de canto. Estudos realizados por eles mencionam que a disposição das barras dobradas é paralela à superfície de ruína junto às bordas da laje. Sendo assim, esta armadura não apresenta um efeito de “costura” entre as superfícies separadas pela fissuração diagonal.



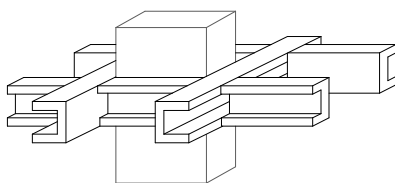
**Figura 2.14 – Barras dobradas**

Fonte: (TAKEYA, 1981)

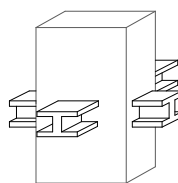
- **SHEARHEADS**

*Shearheads* são perfis metálicos embutidos na laje e posicionados na região da ligação da laje com o pilar, como mostra a figura 2.15. Geralmente os perfis metálicos tipo U são posicionados na região adjacente ao pilar, enquanto os perfis tipo I atravessam cabeça do pilar. Park & Islam (1976) apud Melges (2001) ressaltam que o uso deste tipo de reforço aumenta a resistência da ligação laje-pilar e também, dentro de certos limites, a sua ductilidade.

Ensaio feitos por Corley & Hawkins (1968) constataram que modelos com *shearhead* tiveram um aumento na resistência da ligação da ordem de 75% em relação a corpos-de-prova sem este tipo de reforço. A situação por eles analisada foi a de ligações da laje com pilares internos, com carregamento simétrico.



Perfis metálicos tipo U



Perfis metálicos tipo I

**Figura 2.15 – Shearheads**

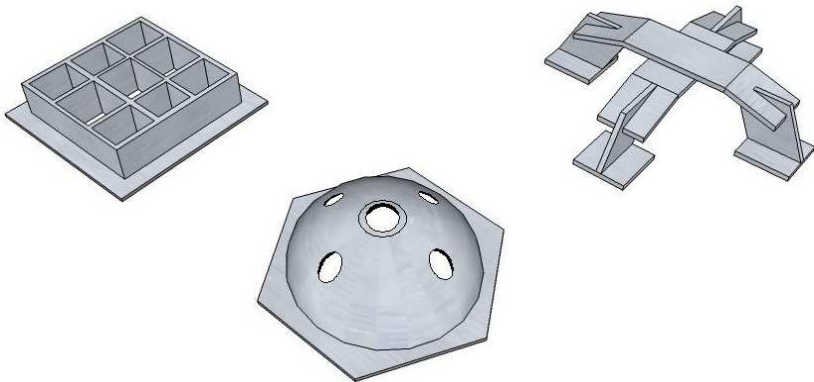
Godycki & Kozicki *apud* Libório (1985) observaram que houve um acréscimo de 40% a 70% na capacidade resistente das ligações laje-

pilar interno, excêntrica e carregadas, em função da presença de *shearheads*.

No entanto, Gonçalves *apud* Figueiredo Filho (1989), constatou em seus ensaios, que a carga de ruína observada para pilares de borda com *shearheads* foi menor que a dos modelos sem qualquer tipo de armadura transversal. Pilakoutas & Li (1997) *apud* Melges (2001) mencionam que os sistemas que usam perfis metálicos como armadura de punção tendem a ser pesados, caros, necessitando de operações de soldagem para unir os perfis e geralmente obstruem a passagem da armadura longitudinal do pilar, na região da ligação. Entretanto, este tipo de armadura é particularmente útil como reforço para lajes com grandes aberturas próximas ao pilar.

Os *shearheads* também proporcionam um aumento da resistência da ligação com relação à flexão. Este aumento, no entanto, pode ser indesejável, uma vez que ele pode modificar o tipo de ruína, que pode então se dar de maneira frágil. Convém destacar que o uso de *shearheads* é muito comum nos Estados Unidos.

Há várias formas e concepções de *shearheads*, como o de formato de grelha, o “UFO” estudado por Alander (2000) e soldado em cruz (figura 2.16).



**Figura 2.16 – Exemplos de shearheads**

- FIBRAS

A introdução de fibras no concreto não visa diretamente o aumento da resistência, mas sim o melhor controle da fissuração e o aumento da ductilidade na etapa posterior à fissuração.

Por ser descontínua, a fibra (figura 2.17) é menos eficiente que a armadura contínua de fios e barras para resistir aos esforços de tração. No entanto, em função do espaçamento reduzido entre as fibras, a sua atuação como obstáculo ao desenvolvimento das fissuras é superior. Quando combinadas com uma armadura contínua, ambas se tornam mais eficientes, pois, além de “costurar” as fissuras, as fibras melhoram a aderência do concreto com a armadura, inibindo a fissuração na região de transferência de esforços.

O aumento de tenacidade proporcionado pelas fibras é significativo, uma vez que a energia para a ruptura é dissipada pela deformação da fibra, pela separação da interface fibra-matriz e pelo atrito provocado pelo escorregamento da fibra. Portanto, o aumento de ductilidade está associado à fissuração múltipla da matriz, à ruptura da interface fibra–matriz e ao seu posterior arrancamento.



**Figura 2.17 – Exemplo de fibras de aço**

Fonte: [www.portaldoconcreto.com.br](http://www.portaldoconcreto.com.br) (2009)

Existem algumas dificuldades para uniformizar a distribuição de fibras na matriz em consequência do embolamento e do agrupamento das fibras, formando os “ouriços”, conforme mostra a figura 2.18.

Outro problema comum do uso de fibras é a sua tendência de inibir a fluidez do concreto. O uso de aditivos superplastificantes e a substituição de parte do cimento por pozolanas são as alternativas usuais para melhorar a trabalhabilidade. O aumento da relação água/cimento também pode ajudar, embora, neste caso, ocorra uma diminuição da resistência do concreto.

Como exemplos de fibras têm-se as fibras de aço, de polipropileno, de vidro, de fibras vegetais e de cimento amianto. Essas fibras podem ser vendidas em feixes ou soltas.



**Figura 2.18 – Ouriço formado por fibras de aço mal misturadas ao concreto**

Fonte: (FIGUEIREDO, 2000)

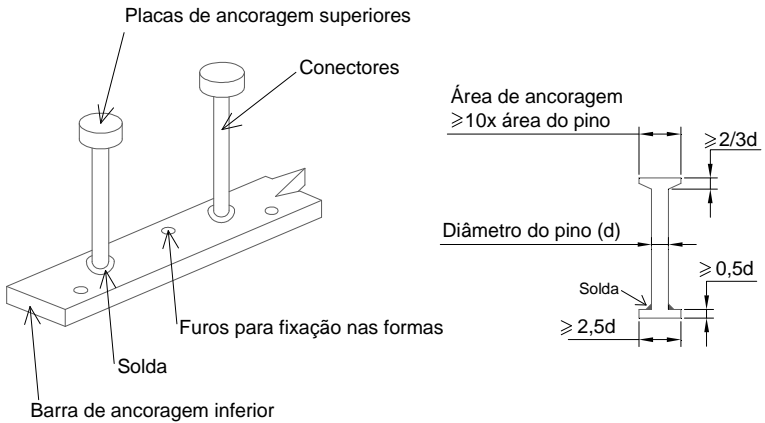
As fibras de aço podem ser retas, em forma de gancho ou ainda plissadas, sendo que suas dimensões variam em torno de 50 mm de comprimento e de 0,5 mm de espessura.

Swamy & Ali (1982) *apud* Trautwein (2006) mencionam que, apesar do uso de armadura da punção convencional ser mais eficiente que o uso de fibras, o tempo para realizar a montagem e a execução da armadura na laje é significativamente maior que o tempo para preparar o concreto com fibras, além das fibras proporcionarem uma maior ductilidade à ligação. Com base em ensaios experimentais, Swamy e Ali, (ano) observaram que o aumento da resistência de ligações com fibras em relação a ligações sem armadura de punção e sem fibras pode chegar até a ordem de 40%. É importante frisar que os ensaios realizados foram feitos apenas para a situação de pilares internos, submetidos a carregamentos simétricos.

- CONECTORES TIPO PINO

O uso de conectores tipo pino com extremidades alargadas (figura 2.19) é recomendado pela Norma Brasileira, e apresenta as seguintes vantagens, mencionadas em Figueiredo Filho (1989) e aqui transcritas:

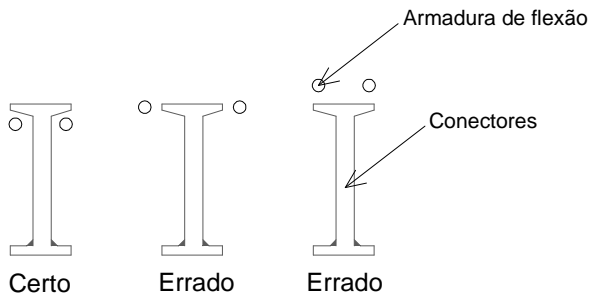
- são fáceis de instalar, mesmo em lajes esbeltas;
- não interferem na colocação e no posicionamento das armaduras dos pilares e de flexão das lajes;
- possibilitam ancoragem mecânica satisfatória nas duas extremidades do pino, possibilitando que a armadura atinja toda a sua capacidade resistente antes da ruptura;
- aumentam a resistência e a ductilidade da ligação.



**Figura 2.19 – Detalhe de conectores tipo pino**

Fonte: (IBRACON, 2003)

Os conectores devem possuir as extremidades alargadas, sendo que cada uma dessas extremidades deve estar ancorada além do plano definido pelas barras tracionadas da armadura de flexão e além do centro de gravidade da região comprimida, provocada pela flexão da laje (figura 2.20).



**Figura 2.20 – Ancoragem correta dos conectores tipo pino**

Fonte: (IBRACON, 2003)

Segundo a empresa Decon, a chapa metálica inferior apresenta a vantagem de posicionar corretamente os conectores na obra, além de servir de ancoragem para os pinos. Esta chapa é encaixada a um suporte plástico que, por sua vez, é pregado à fôrma, garantindo o cobrimento adequado. Esta firma comercializa os suportes plásticos e os conectores tipo pino da marca Studrails, que é protegida por patentes americana e canadense.

- **SEGMENTOS DE PERFIS METÁLICOS**

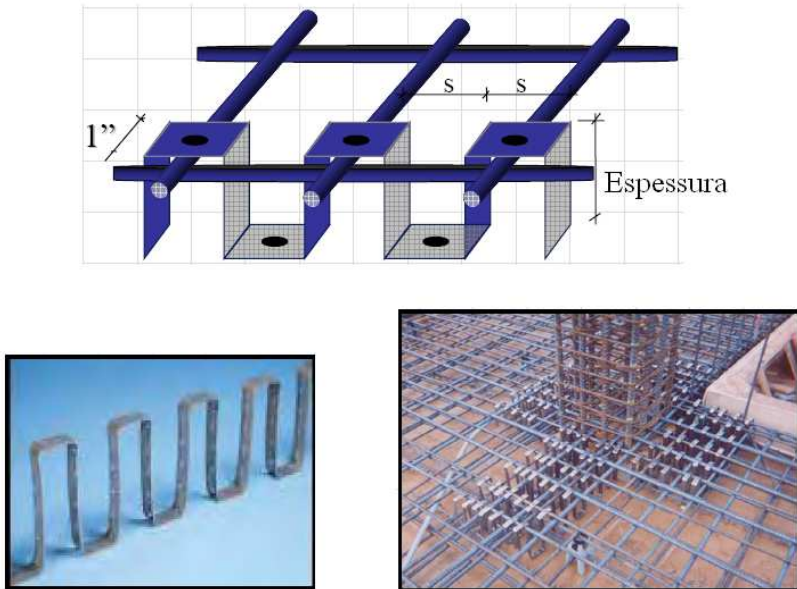
Podem ser utilizados, ao invés de conectores tipo pino, pequenos segmentos de perfis metálicos de seção transversal tipo "I", conforme mostrado em Figueiredo Filho (1989). Este tipo de armadura, apesar de ser adequado segundo o ponto de vista da ancoragem do elemento na laje, não é recomendado segundo o ponto de vista de produção e de economia.

- **SISTEMA *SHEARBAND***

Este sistema, testado por Pilakoutas & Li (1997), compõe-se de uma fina faixa metálica, de alta resistência e ductilidade, que pode ser dobrada em uma grande variedade de formas. Essas faixas apresentam furos, que visam melhorar as suas características de ancoragem. Em função de sua pequena espessura, esta chapa pode ser colocada por cima da armadura tracionada de flexão, com perdas mínimas de cobrimento (figura 2.21).

Segundo os autores, este sistema apresenta a vantagem de simplificar o seu posicionamento na ligação, podendo também ser detalhado com base nos códigos existentes.





**Figura 2.21 – Detalhe de conectores tipo pino**

Fonte: Pilakoutas e Li (1997)

## 2.3 Modelos de cálculo

Os métodos mais conhecidos desenvolvidos para verificar a resistência de uma ligação laje-pilar com relação à punção são apresentados a seguir.

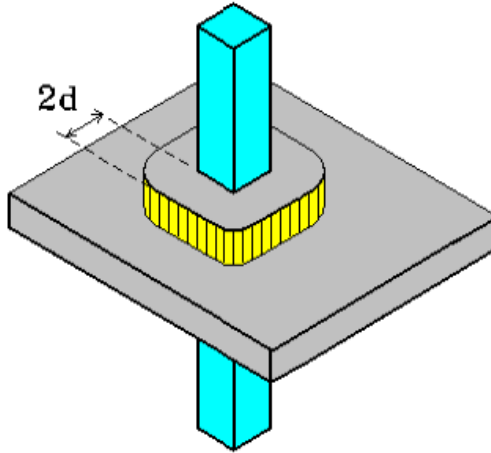
### 2.3.1 Método da superfície de controle

O Método da Superfície de Controle consiste em se calcular uma tensão uniforme solicitante de punção em uma determinada superfície de controle, perpendicular ao plano médio da laje, localizada a uma determinada distância da face do pilar ou da área carregada e comparar o valor do esforço solicitante com um determinado parâmetro de resistência do concreto para aquele perímetro. Se naquele perímetro o esforço resistente for maior que o solicitante não é necessário o uso de armadura de punção.

A área desta superfície é dada pela multiplicação do perímetro pela altura da superfície de controle. Essa altura pode ser dada pela espessura da laje ( $h$ ), altura útil ( $d$ ) (figura 2.22) ou braço de alavanca dos momentos internos ( $z$ ), dependendo de qual o regulamento a ser adotado.

Esta tensão atuante, geralmente calculada em função da posição do pilar, da força concentrada e da presença ou não de momentos fletores, é então comparada com uma tensão resistente, geralmente calculada em função da resistência do concreto, da taxa de armadura de flexão e da presença ou não de armadura de punção.

A abordagem baseada na superfície de controle não significa o entendimento de que a ruptura ocorra nessa superfície, como afirma Cordovil (1997). A superfície real de ruptura é mais parecida com a de um tronco de cone. Cordovil ainda diz que a superfície de controle deve ser considerada como uma grandeza de referência, ou um método que visa calibrar, de maneira prática, a segurança da estrutura. Por isso, a escolha dessa superfície de controle sempre deve estar ajustada com a definição do parâmetro de resistência do concreto. Portanto pode-se concluir que o modelo adotado atualmente pelas normas para o cálculo da punção não representa o fenômeno físico da punção, mas sim uma adaptação de ordem prática para o entendimento e solução do problema.



**Figura 2.22 – Definição da superfície de controle da NBR 6118/03**

Fonte: (IBRACON, 2003)

Esse método é a base de vários códigos e normas, tais como, por exemplo, a NBR 6118/78 e NBR 6118/03, o CEB/FIB 90, o EUROCODE 2/92 e EUROCODE 2/04, a BS 8110/97 e o ACI 318-05.

### *2.3.2 Método de bielas e tirantes*

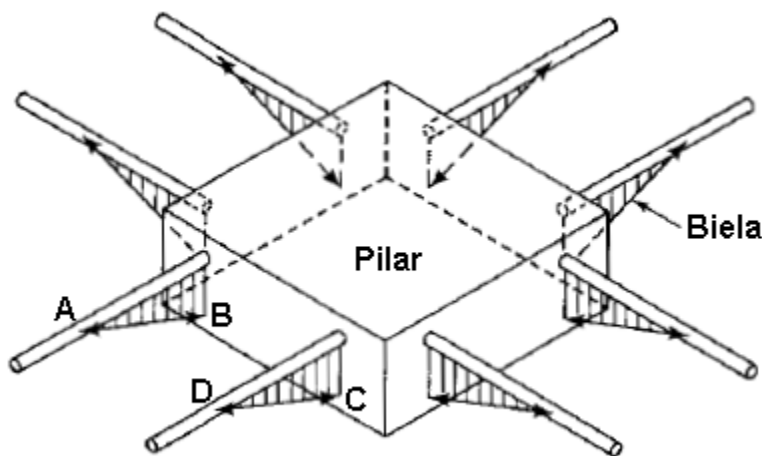
Os primeiros a usarem o modelo de bielas e tirantes para explicarem a punção sem efeitos de momentos foram Alexander e Simmonds, como menciona McGregor (1997).

Segundo Leonhardt e Mönnig (1979), ensaios demonstram que as deformações tangenciais são, inicialmente, maiores que as deformações radiais. Por isso, surgem primeiro as fissuras radiais. Somente para elevados estágios de carga aparecem algumas fissuras circulares, a partir das quais se desenvolvem as superfícies de ruptura por cisalhamento do cone de punção com inclinação média da ordem de 30°.

Antes da formação das fissuras inclinadas na região da laje próxima ao pilar, os esforços de punção são resistidos também pela tração no concreto. Uma vez que se formam estas fissuras, os esforços de punção não podem mais ser resistidos por tração. Após a formação

das fissuras, os esforços são resistidos pelas bielas *A-B* e *D-C* (figura 2.23), se estendendo da face inferior da laje no pilar até a armadura de flexão negativa, nos pontos *A* e *D*. As bielas são consideradas nos quatro lados do pilar, no caso de pilares retangulares.

A componente horizontal dos esforços nas bielas causa mudanças nos esforços da armadura de flexão, nos tirantes *A* e *D*. A componente vertical “empurra” a armadura de flexão para cima, e é resistida pela tensão de tração no concreto entre as barras. Eventualmente, esse concreto rompe no plano das armaduras de flexão, o que resulta em falha por punção, como afirma McGregor.

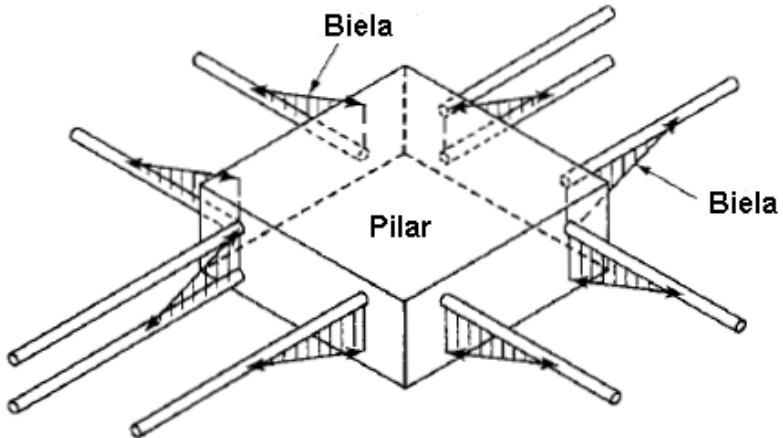


**Figura 2.23 – Modelo de bielas e tirantes para a punção sem transferência de momentos**

Quando cargas laterais ou cargas verticais desbalanceadas causam transferência de momentos entre a laje e o pilar, o comportamento da ligação se torna mais complexo, envolvendo flexão, tração e torção na região de ligação da laje com o pilar. Dependendo da amplitude destes três fatores, a falha pode se dar de diversas maneiras.

O modelo proposto por Alexander e Simmonds pode ser adaptado para o caso de pilares internos com transferência de momentos.

A figura 2.24 mostra um modelo de bielas e tirantes de um pilar interno sujeito a um momento grande.

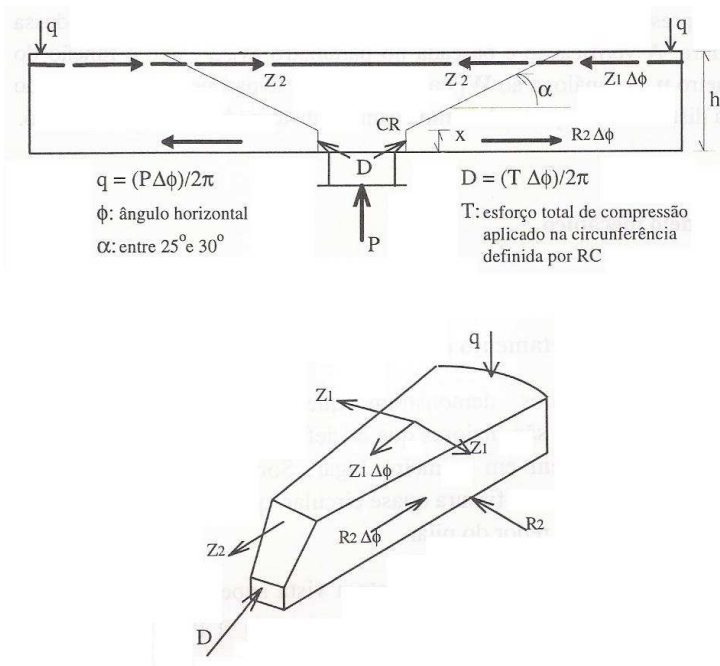


**Figura 2.24 – Modelo de bielas e tirantes para a punção com transferência de momentos**

### 2.3.3 Modelos mecânicos

Os modelos mecânicos, também ditos “racionais”, são fundamentados pelos modelos constitutivos do concreto e do aço e se baseiam no comportamento da ligação, observado em ensaios. A resistência da ligação, nesse caso, é obtida pelo equilíbrio entre as ações aplicadas e os esforços internos.

Tem-se o modelo desenvolvido por Kinnunen e Nylander em 1960 que, embora complexo, apresentam a grande vantagem de se poder visualizar o comportamento real da ligação laje-pilar. Esse modelo apresenta uma hipótese para o equacionamento do problema de laje circular, solicitada por um pilar central também com seção circular. Trata-se do modelo em que a ruptura da laje ocorre a partir do pilar, com o deslocamento de um sólido interno (figura 2.25). Esse sólido teria a forma aproximada de um tronco de cone, com a superfície inclinada entre 25° e 30° graus em relação ao plano da laje.



**Figura 2.25 – Hipótese de ruptura e elemento rígido do modelo mecânico de Kinnunen e Nylander**

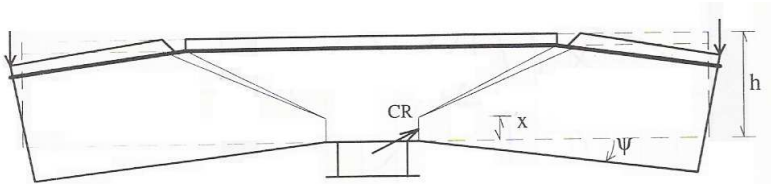
Fonte: Cordovil (1997)

Na zona contígua ao tronco do cone, a laje seria dividida em elementos rígidos iguais, limitados pela superfície inclinada e por fissuras radiais. Cada elemento rígido produziria um trabalho decorrente da rotação em torno de um ponto chamado “centro de rotação” **CR**. Esse centro de rotação seria o limite entre dois estágios ideais de fissuração: as fissuras que limitam a superfície inclinada, bem como as fissuras radiais, seriam formadas antes da ruptura da laje, e a fissura localizada entre a periferia do pilar e o **CR** somente seria formada no instante da ruptura da laje.

A partir dessas hipóteses de funcionamento, é possível estabelecer as condições de equilíbrio entre os esforços externos e internos, mostradas na figura 2.25.

Nessas circunstâncias, há condições de se estabelecer uma teoria próxima da realidade, bastando para isso, aplicar o princípio dos

trabalhos virtuais, supondo a rotação do elemento (figura 2.26). Porém, quando se tenta estender essa teoria para formas quadradas ou retangulares, Cordovil (1997) afirma que não há como definir uma formulação confiável.



**Figura 2.26 – Rotação do elemento rígido**

Fonte: Cordovil (1997)

## 2.4 Normas e Especificações

Com exceção do ACI (American Concrete Institute), que já trazia recomendações relativas à punção em lajes de concreto armado desde 1913, até antes da década de 70, as normas existentes continham poucas ou raras abordagens a respeito do problema.

A partir de 1972, o CEB (Comité Européen du Béton) incluiu o assunto entre as recomendações de projeto.

A NB1-60 (Norma Brasileira) simplesmente não abordava a questão. Somente em 1978, com o advento da NB1-78, incorporaram-se nas recomendações brasileiras procedimentos para o projeto de lajes submetidas a esforço de punção. A Norma de 78 fornecia resultados muito conservadores, normalmente de 2 a 3 vezes maiores que os resultados obtidos em ensaios. Com a revisão da NB1-78, a NBR 6118/03 trouxe um novo método de cálculo para o caso da punção que fornecia resultados muito mais próximos dos obtidos em ensaios, e por consequência também mais econômicos.

A seguir são apresentados os critérios e recomendações das Normas Americana (ACI 318/05), Brasileira (NBR 6118/03), Européia (EUROCODE 2/04) e Inglesa (BS 8110/97).

### 2.4.1 ACI 318/08

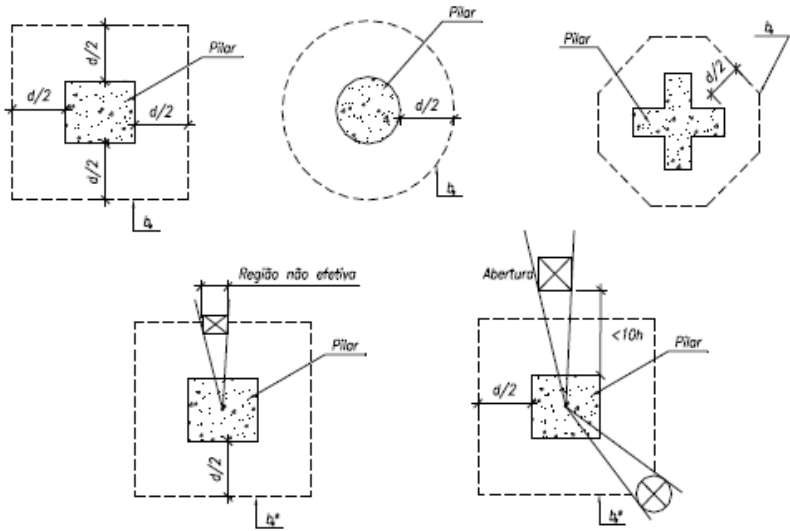
Os critérios de análise consistem na verificação de seções críticas localizadas a uma distância  $d/2$  ( $d$  é a altura útil da laje) das extremidades ou dos cantos dos pilares, de cargas concentradas, de áreas de reação, ou até mesmo de variações na espessura das lajes, tais como bordas de capitéis ou de engrossamento de lajes de um modo geral. O perímetro desses contornos é denominado perímetro efetivo  $b_0$ .

Depois de determinado o perímetro efetivo, compara-se a tensão solicitante com a tensão resistente, determinando-se a necessidade ou não de aumento dessa tensão resistente, com o incremento da área da seção resistente ou da armadura de punção.

#### *Contornos Críticos de Controle – Perímetros efetivos ( $b_0$ )*

As formas dos perímetros efetivos para verificação da punção em diversos casos de ligação laje/pilar são dispostas conforme mostra a figura 2.27.





**Figura 2.27 – Perímetros de controle do ACI 318/05**

Onde:

- $d$  = altura útil média da laje.

Os perímetros efetivos ( $b_0$ ) possuem lados retos ou não, paralelos ao contorno dos pilares, se forem localizados no interior das lajes. Quando existirem aberturas em lajes, situadas a uma distância menor que  $10h$  (onde  $h$  é a espessura da laje) em relação à face do pilar, de uma carga concentrada ou de uma reação, ou quando essas aberturas estiverem situadas dentro das seções críticas da laje, o perímetro crítico efetivo com relação à punção, também deverá ser tomado como reduzido ( $b_0^*$ ), conforme ilustra também a figura 2.27.

*Cálculo da tensão solicitante  $\tau_u$  no perímetro efetivo  $b_0$*

A tensão de cisalhamento atuante nos contornos críticos de controle num pilar interno resulta do esforço cortante, acrescida da parcela de momento fletor transferida ao pilar por cisalhamento, cuja

tensão é suposta variando linearmente ao redor do centróide (c-c) das seções críticas, como mostra a figura 2.28, e pode ser calculada por:

$$\tau_{u(AB)} = \frac{F_u}{A_c} + \frac{\gamma_v M_u c_{AB}}{J_c} \quad \text{e} \quad \tau_{u(CD)} = \frac{F_u}{A_c} - \frac{\gamma_v M_u c_{CD}}{J_c}$$

Onde:

- $F_u$  é o esforço cortante majorado atuante na seção em Newtons;
- $A_c$  é área de concreto da seção crítica dada por  

$$A_c = 2d \cdot (c_1 + c_2 + 2d) \text{ em mm}^2;$$
- $c_1$  e  $c_2$  são as dimensões do pilar em mm;
- $M_u$  é o momento majorado atuante na seção em N.mm;
- $\gamma_v$  é a parcela do momento fletor da ligação laje-pilar transferida ao pilar por cisalhamento. Essa parcela é dada por:

$$\gamma_v = \left[ 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right) \sqrt{\frac{(c_1 + d)}{(c_2 + d)}}} \right]$$

- $J_c$  é uma propriedade da seção crítica, análoga ao momento polar de inércia, dada por:

$$J_c = \frac{d(c_1 + d)^3}{6} + \frac{(c_2 + d)d^3}{6} + \frac{d(c_2 + d)(c_1 + d)^2}{2}$$

- $c_{AB}$  é a distância do centróide c-c ao lado AB em mm;

- $c_{CD}$  é a distância do centróide c-c ao lado CD em mm.

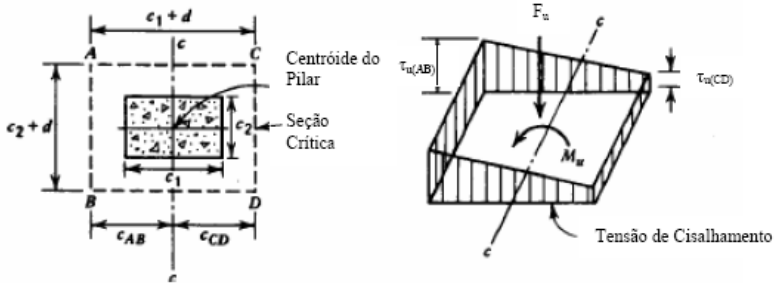


Figura 2.28 – Distribuição do esforço cortante pelo ACI 318/05

*Cálculo da tensão resistente  $\tau_n$  no perímetro efetivo  $b_0$*

- A tensão resistente em lajes sem armadura de punção é dada por:

$$\tau_u \leq \tau_n = \tau_c$$

Onde:

- $\tau_c$  (MPa) é a tensão resistente relativa ao concreto, tomada como o menor valor entre:

$$\tau_c = 0,17 \cdot \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \cdot \sqrt{f'_c} \leq 0,33 \cdot \sqrt{f'_c}$$

$$\tau_c = 0,083 \cdot \left(\frac{\alpha_s \cdot d}{b_0} + 2\right) \cdot \sqrt{f'_c} \leq 0,33 \cdot \sqrt{f'_c}$$

Onde:

- $f'_c$  é a resistência específica à compressão cilíndrica do concreto, em MPa;
- $b_0$  é o valor numérico do perímetro efetivo em mm;
- $\beta$  é a razão entre o maior e o menor lado do pilar;
- $d$  é a altura útil da laje em mm;
- $\alpha_s$  é igual a 40 para pilares internos, 30 para pilares de borda e 20 para pilares de canto.

**- A tensão resistente em lajes com armadura de punção é dada por:**

$$\tau_u \leq \tau_n = \tau_c + \tau_s \leq 0,5\sqrt{f'_c}$$
$$\tau_c \leq 0,17\sqrt{f'_c}$$

Onde:

- $\tau_c$  é a tensão resistente relativa ao concreto;
- $\tau_s$  é a tensão resistente relativa ao aço, dada por:

$$\tau_s = \frac{A_v f_{yt} (\text{sen} \alpha + \cos \alpha)}{s \cdot b_0}$$

Onde:

- $A_v$  é a área da armadura transversal da laje;

- $f_{vr}$  é a tensão de escoamento do aço da armadura transversal, em MPa, nunca maior que 400 MPa;
- $b_0$  é o perímetro de controle;
- $\alpha$  é o ângulo de inclinação da armadura de punção em relação ao plano da laje;
- $s$  é o espaçamento da armadura de punção em mm.

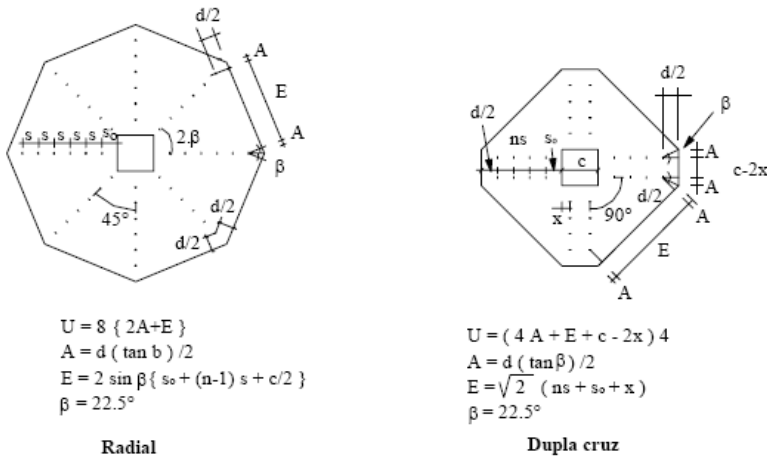
A armadura de punção deve ser estendida em contornos paralelos ao pilar até que, em um perímetro afastado  $d/2$  da última linha de armadura, a tensão de cisalhamento atuante  $\tau_u$  não exceda  $0,17\sqrt{f'_c}$ .

#### *Detalhamento da armadura de punção*

O ACI 318/05 apresenta as seguintes prescrições quando do detalhamento da armadura de punção, como mostra a figura 2.29:

- A armadura de cisalhamento pode ser composta por barras, fios ou estribos de uma ou várias pernas, em lajes com  $d$  maior ou igual a 15 cm, mas não inferior a 16 vezes o diâmetro da barra da armadura de punção;
- A distância entre a face do pilar e a primeira linha das pernas dos estribos não deve ser maior do que  $d/2$ ;
- O espaçamento entre as pernas dos estribos adjacentes na primeira linha de armação de cisalhamento não deve exceder  $2.d$ , medidos na direção paralela à face do pilar;

- O espaçamento entre as linhas sucessivas da armação de punção que circundam o pilar não deve exceder  $d / 2$  em uma direção perpendicular à face do mesmo;
- A armadura de punção das lajes deve satisfazer os requisitos de ancoragem e deve estar amarrada à armadura de flexão longitudinal, na direção em que esta armadura está sendo considerada.



**Figura 2.29 – Distribuição das armaduras de punção**

#### 2.4.2 NBR 6118/03

O modelo de cálculo proposto pela NBR 6118/03 corresponde à verificação de dois ou mais perímetros de controle.

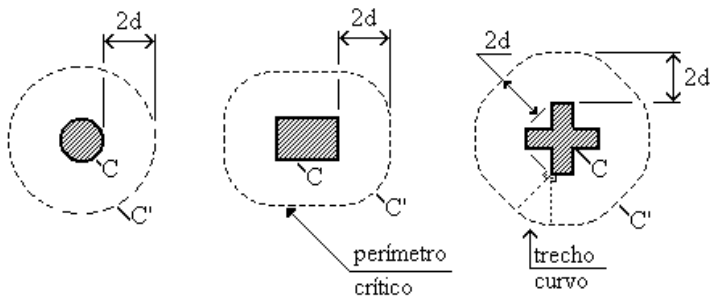
No primeiro perímetro, na face do pilar, denominado de contorno *C*, verifica-se a tensão de compressão diagonal do concreto, por meio de uma tensão de cisalhamento.

No segundo perímetro, localizado a uma distância  $2d$  da face do pilar, denominada de contorno  $C'$ , verifica-se a resistência da ligação à punção, associada à ruína por tração diagonal, por meio também de uma tensão de cisalhamento. Caso haja necessidade, essa ligação deve ser reforçada por uma armadura transversal.

O terceiro perímetro de controle, denominado de contorno  $C''$ , apenas deve ser verificado quando for necessário o uso de armadura transversal, e é verificado à distância de  $2d$  do último perímetro de armadura de punção.

### *Perímetros de controle*

O modelo de cálculo corresponde à verificação do cisalhamento em duas ou mais superfícies críticas definidas no entorno de forças concentradas. A figura 2.30 apresenta as formas possíveis de perímetros de controle  $C$  e  $C'$  para verificação da punção de pilares internos em lajes lisas.



**Figura 2.30 – Perímetro crítico em pilares internos**

Fonte: NBR 6118/03

*Cálculo da tensão solicitante nas superfícies críticas de contorno  $C$  e  $C'$*

- A tensão solicitante em pilares com carregamento simétrico é dada por:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u.d}$$

Onde:

- $F_{sd}$  é a força ou reação concentrada de cálculo;
- $u$  é o valor numérico do perímetro de controle;
- $d$  é a altura útil média da laje.

**- A tensão solicitante em pilares com efeito de momento é dada por:**

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u.d} + \frac{k.M_{sd}}{W_p.d}$$

Onde:

- $M_{sd}$  é o momento de cálculo transmitido da laje ao pilar;
- $k$  é o coeficiente que fornece a parcela de  $M_{sd}$  transmitida ao pilar por cisalhamento, que depende da relação  $c_1/c_2$ ;
- $W_p$  é o módulo de resistência plástica do concreto do perímetro de controle.



O coeficiente  $k$  assume os valores indicados na tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Valores de  $k$

C1/C2	0,5	1,0	2,0	3,0
K	0,45	0,60	0,70	0,80
onde: C1 é a dimensão do pilar paralela à excentricidade da força; C2 é a dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força.				

O módulo de resistência plástica pode ser avaliado pela seguinte expressão:

$$W_p = \int_0^u e \cdot dl$$

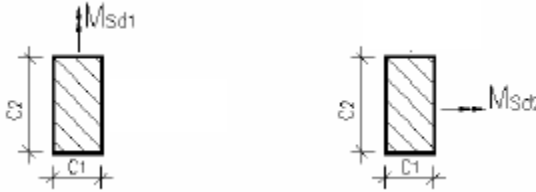
onde:

- $dl$  é o comprimento infinitesimal no perímetro crítico  $u$  ;
- $e$  é a distância de  $dl$  ao eixo que passa pelo centro do pilar e sobre o qual atua o momento  $M_{sd}$  .

Quando existirem momentos em duas direções ortogonais, a expressão de  $\tau_{sd}$  é dada por:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u \cdot d} + k_1 \cdot \frac{M_{sd1}}{W_{p1} \cdot d} + k_2 \cdot \frac{M_{sd2}}{W_{p2} \cdot d}$$

Nesse caso, devem-se fazer as adaptações necessárias para  $k_1$  e  $k_2$ , bem como para  $W_{p1}$  e  $W_{p2}$ . A figura 2.31 apresenta a relação dos lados dos pilares  $c_1$  e  $c_2$  com os momentos fletores.



**Figura 2.31 – Relação dos lados  $c_1$  e  $c_2$  dos pilares com os momentos fletores**

*Cálculo da tensão resistente nos perímetros de controle C, C' e C''.*

**- A tensão resistente de compressão diagonal do concreto no contorno C é dada por:**

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd2} = 0,27 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd}$$

Onde:

- $f_{cd}$  é a resistência de cálculo do concreto à compressão cilíndrica (MPa);
- $\alpha_v$  é o fator de correção da resistência do concreto, dado por:

$$\alpha_v = \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right), \text{ com } f_{ck} \text{ em MPa.}$$

**- A tensão resistente em elementos estruturais sem armadura de punção no contorno C' é dada por:**

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd1} = 0,13 \cdot \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3}$$

onde:

- $\rho^2 = \rho_x \cdot \rho_y$  é a taxa de armadura nas duas direções ortogonais, calculadas com a largura igual à dimensão do pilar, ou área carregada, mais “3d” para cada um dos lados (ou até a borda da laje, se esta estiver mais próxima);
- $d$  é a altura útil da laje ao longo do contorno crítico C’ em cm.
- $f_{ck}$  é a resistência característica à compressão cilíndrica do concreto, em MPa;

**- A tensão resistente em elementos estruturais com armadura de punção no contorno C’ é dada por:**

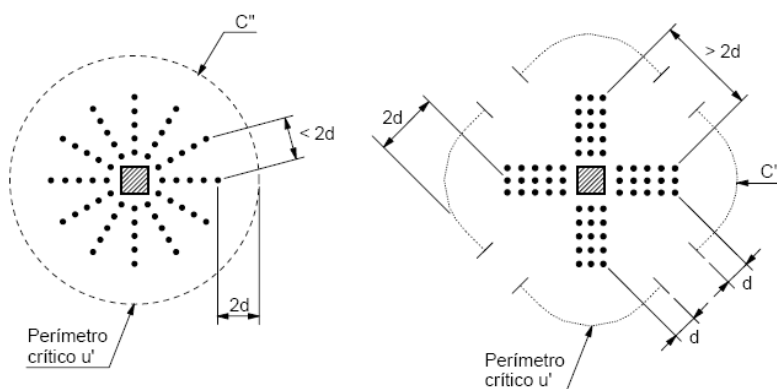
$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd3} = 0,10 \cdot \left( 1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} + \left( 1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen} \alpha \frac{1}{u \cdot d} \right)$$

onde:

- $s_r$  é o espaçamento radial entre a armadura de punção, não deve ser maior que  $0,75d$ , com  $d$  em cm;
- $A_{sw}$  é a área da armadura de punção por camada;
- $f_{ywd}$  é a resistência de cálculo da armadura de punção. Deve ser menor que 300 MPa para conectores do tipo pino e 250 MPa para estribos (CA-50 ou CA- 60); Em lajes com altura superior a 35 cm a resistência dos estribos pode ser considerada no máximo igual a 435 MPa.

- $\alpha$  é o ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje;
- $u$  é o valor numérico do perímetro de controle  $C'$ , distante  $2d$  da face do pilar.
- $f_{ck}$  é a resistência característica à compressão cilíndrica do concreto, em MPa;

Para o cálculo da tensão resistente externa à região com armadura de cisalhamento, deve-se adotar o perímetro crítico distante “ $2d$ ” do último elemento da armadura de cisalhamento, como mostra a figura 2.32.

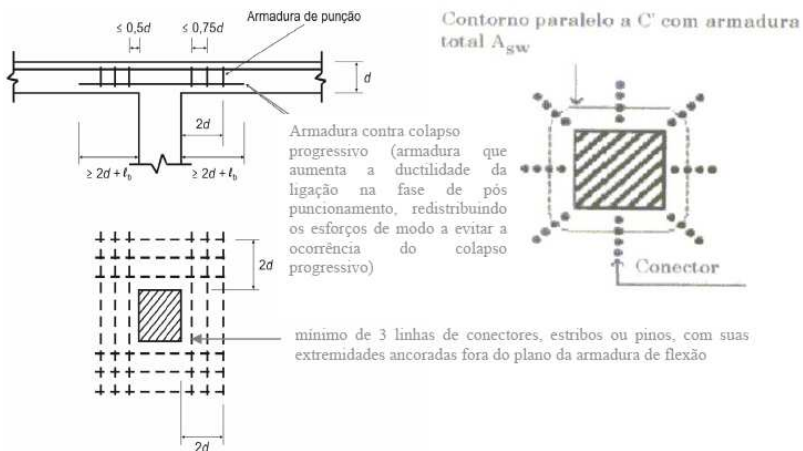


**Figura 2.32 – Disposição da armadura de punção e perímetro da superfície crítica  $C''$**

Fonte: NBR 6118/03

### Detalhamento das armaduras de punção

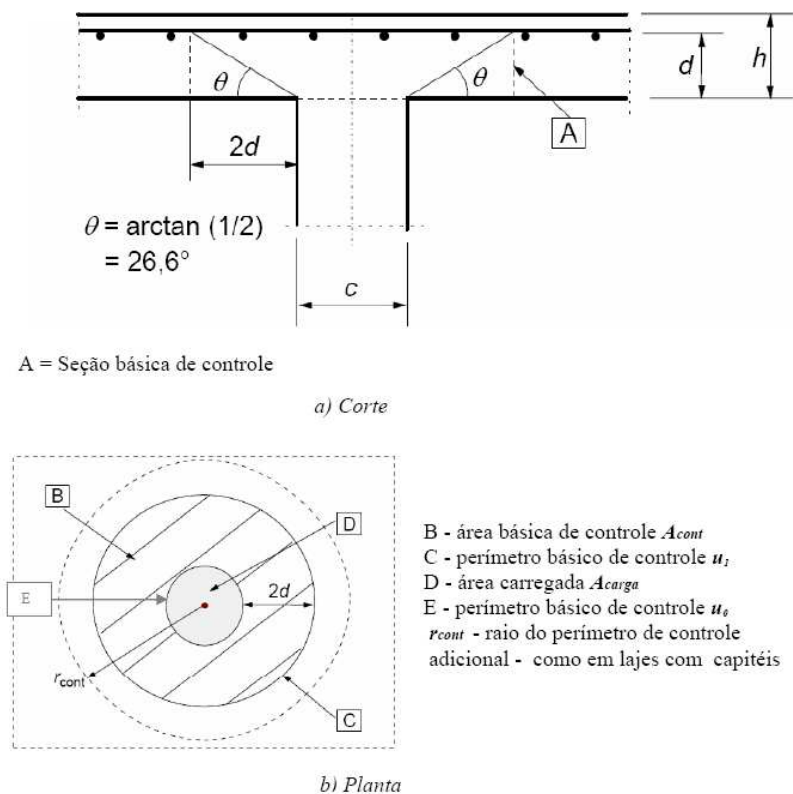
As regiões mínimas em que devem ser dispostas as armaduras de punção, bem como as distâncias regulamentares a serem obedecidas são apresentadas na figura 2.33.



**Figura 2.33 – Disposição da armadura de punção e da armadura de colapso progressivo**

#### 2.4.3 EUROCODE 2/04

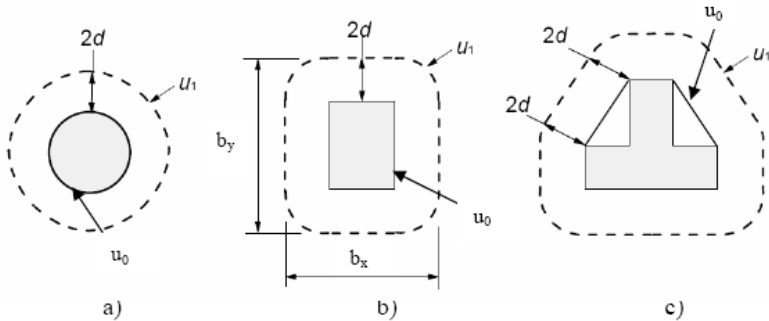
No modelo de verificação para a punção segundo o EUROCODE 2/04 (figura 2.34), deve-se verificar a resistência à punção na face do pilar (contorno  $u_0$ ) e no perímetro de controle  $u_1$ . Se houver necessidade do uso de armadura de punção, uma verificação adicional deve ser feita em um contorno  $u_2$ , onde não exista a necessidade desta armadura.



**Figura 2.34 – Modelo para a verificação da punção no EUROCODE 2/04**

### *Perímetros de controle*

O perímetro de controle  $u_1$  deve estar disposto a uma distância  $2d$  da área carregada. As possíveis configurações do perímetro são apresentadas na figura 2.35.



**Figura 2.35 – Exemplos de perímetros de controle**

### *Cálculo das tensões solicitantes nos perímetros de controle*

O cálculo das tensões solicitantes deve ser feito nos seguintes perímetros:

1. Perímetro  $u_0$  da área carregada;
2. Perímetro de controle  $u_1$ ;
3. Perímetro  $u_2$ , após o último perímetro de armadura de punção.

#### **- Pilar com efeito de momento**

Neste caso a tensão solicitante é igual a:

$$\tau_{Ed} = \beta \frac{F_{Ed}}{u_i \cdot d}$$

Onde:

- $F_{Ed}$  é a força ou reação de cálculo;
- $d$  é a espessura média efetiva da laje;
- $u_i$  é o comprimento do perímetro de controle considerado;

- $\beta$  é um fator dado por:

$$\beta = 1 + k \frac{M_{Ed}}{F_{Ed}} \cdot \frac{u_1}{W_1}$$

Onde:

- $u_1$  é o comprimento do perímetro de controle;
- $k$  é um coeficiente que depende da relação ( $c_1/c_2$ ) entre as dimensões do pilar. Seu valor numérico fornece a parcela do momento  $M_{Ed}$  transmitido ao pilar por cisalhamento;
- $W_1$  é o módulo de resistência plástica do perímetro correspondente ao perímetro de controle considerado, e é dado por:

$$W_p = \int_0^u e \cdot dl$$

Onde:

- $dl$  é um incremento do comprimento do perímetro;
- $e$  é a distância de  $dl$  ao eixo sobre o qual o momento  $M_{Ed}$  atua.



O coeficiente  $k$  assume os valores indicados na tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Valores de  $k$

C1/C2	0,5	1,0	2,0	3,0
K	0,45	0,60	0,70	0,80
onde: C1 é a dimensão do pilar paralela à excentricidade da força; C2 é a dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força.				

No caso de pilares circulares,  $\beta$  é dado por:

$$\beta = 1 + 0,6\pi \frac{e}{D + 4d}$$

Onde:

- $e$  é o quociente entre  $\left( \frac{M_{Ed}}{F_{Ed}} \right)$ ;
- $D$  é o diâmetro do pilar.

Para pilares retangulares com momentos nas duas direções,  $\beta$  é dado por:

$$\beta = 1 + 1,8 \sqrt{\left[ \left( \frac{e_x}{b_y} \right)^2 + \left( \frac{e_y}{b_x} \right)^2 \right]}$$

Onde:

- $e_x$  e  $e_y$  são excentricidades  $\left( \frac{M_{Ed}}{F_{Ed}} \right)$ , segundo os eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente;

- $b_x$  e  $b_y$  são as dimensões do perímetro de controle.

*Cálculo das tensões resistentes nos perímetros de controle*

- **A tensão resistente no perímetro da área carregada  $u_0$  é dada por:**

$$\tau_{Ed} \leq \tau_{Rd,max} = 0,5v \cdot f_{cd}$$

Onde:

- $v = 0,6 \left[ 1 - \left( \frac{f_{ck}}{250} \right) \right]$ ;
- $f_{cd}$  é a resistência de cálculo à compressão cilíndrica do concreto.

- **A tensão resistente sem uso de armadura de punção no perímetro de controle  $u_1$  é dada por:**

$$\tau_{Ed} \leq \tau_{Rd,c} = 0,12 \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_1 \cdot f_{ck})^{1/3} \geq 0,035 \cdot (k)^{3/2} \cdot (f_{ck})^{1/2}$$

Onde:

- $f_{ck}$  é a resistência característica à compressão cilíndrica do concreto, em MPa;
- $k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0$ , com  $d$  em mm;
- $\rho_1 = \sqrt{\rho_{1x} \cdot \rho_{1y}} \leq 0,02$ , sendo  $\rho_{1x}$  e  $\rho_{1y}$  as taxas de armadura utilizadas nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente. Os valores de  $\rho_{1x}$  e  $\rho_{1y}$  devem ser calculados por meio do valor médio, levando

em conta uma largura de laje igual à largura do pilar, acrescida de  $3d$  para cada lado.

- A tensão resistente com uso de armadura de punção no perímetro de controle  $u_1$  é dada por:

$$\tau_{Ed} \leq \tau_{Rd,cs} = 0,75 \cdot \tau_{Rd,c} + 1,5 \left( \frac{d}{s_f} \right) \cdot A_{sw} \cdot f_{ywd,ef} \left[ \frac{1}{(u_2 d)} \right] \cdot \text{sen } \alpha$$

Onde:

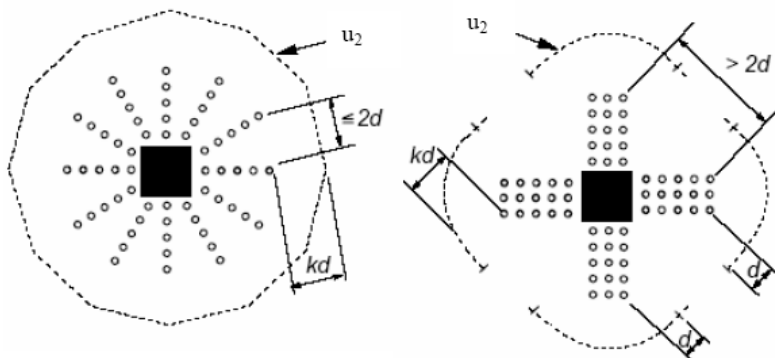
- $A_{sw}$  é a área da armadura de punção em um contorno considerado ( $\text{mm}^2$ );
- $s_f$  é o espaçamento radial das linhas de armadura de punção (mm);
- $d$  é a espessura média efetiva da laje nas duas direções (mm);
- $\alpha$  é o ângulo entre a armadura de punção e o plano médio da laje;
- $f_{ywd,ef}$  é a resistência efetiva de projeto da armadura de punção, dada por:

$$f_{ywd,ef} = 250 + 0,25 \cdot d \leq f_{ywd} \text{ em MPa.}$$

A armadura de punção deve ser distribuída em perímetros paralelos  $u_1$  até que, em um perímetro  $u_2$ , afastado  $1,5d$  da última linha de armadura (figura 2.36), a tensão  $\tau_{Ed}$  seja menor ou igual a  $\tau_{Rd,c}$ .

O perímetro de controle  $u_2$  pode ser calculado por:

$$u_2 = \frac{\beta \cdot F_{Ed}}{(\tau_{Rd,c} \cdot d)}$$



**Figura 2.36 –** Perímetros de controle a  $1,5d$  da região armada ( $u_2$ )

#### *Detalhamento da armadura de punção*

O EUROCODE 2/04 apresenta as seguintes prescrições para o detalhamento da armadura de punção:

- A armadura de punção deve ser colocada entre a face da área carregada ou do pilar, até que em um perímetro distante  $1,5d$  da última linha de armadura ( $u_2$ ) a armadura não seja mais necessária;
- Devem existir, pelo menos, duas linhas de conectores;
- A primeira linha de conectores deve ser posicionada a uma distância não maior que  $0,3d$  da face do pilar. O espaçamento

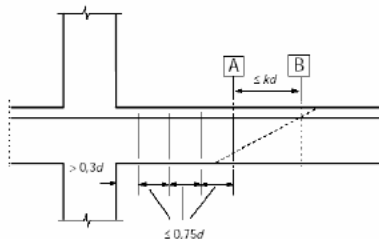
entre as linhas subseqüentes de conectores não deve exceder  $0,75d$ , conforme mostra a figura 2.37;

- O espaçamento dos conectores em uma mesma linha não deve ser superior a  $1,5d$  nas linhas dentro do perímetro de controle (até  $2d$  da área carregada), e não deve ser superior a  $2d$  nas outras linhas de conectores externas a este perímetro.
- Quando a armadura de punção é requerida, a área mínima da seção transversal de um conector (ou equivalente) deve satisfazer a seguinte expressão:

$$A_{sw, \min} \cdot \frac{(1,5 \cdot \text{sen} \alpha + \cos \alpha)}{(s_r \cdot s_t)} \geq 0,08 \cdot \sqrt{\frac{f_{ck}}{f_{yk}}}$$

Onde:

- $\alpha$  é o ângulo entre a armadura de punção e a armadura de flexão;
- $s_r$  é o espaçamento radial entre linhas de conectores;
- $s_t$  é o espaçamento entre os conectores em uma mesma linha;
- $f_{ck}$  é a resistência característica à compressão cilíndrica do concreto (MPa);
- $f_{yk}$  é a resistência característica do aço da armadura de punção (MPa).



*A - perímetro externo de controle onde a armadura de punção é necessária*

*B - perímetro de controle onde a armadura de punção não é mais necessária*

**Figura 2.37 – Distanciamento dos perímetros de armaduras de punção e perímetro  $u_2$**

#### 2.4.4 BS 8110/97

É Como são levadas em conta apenas as cargas concentradas ou reações no cálculo da punção pela BS 8110/97, estes são multiplicados por um coeficiente de majoração para cada posição do pilar na laje e sentido da flexão, como mostra a figura 2.38, não sendo levado em consideração a transferência de momentos.

Segundo a BS 8110/97, será satisfatório tomar um valor 15% maior para colunas internas em estruturas apoiadas, com vãos aproximadamente iguais. O valor da reação ou carga concentrada efetiva é dado por:

$$V_{eff} = 1,15.V_t$$

Onde:

- $V_{eff}$  é a reação ou carga concentrada efetiva de cálculo, incluindo a parcela de transferência do momento;
- $V_t$  é a carga concentrada ou reação de cálculo transferida da laje para a coluna.

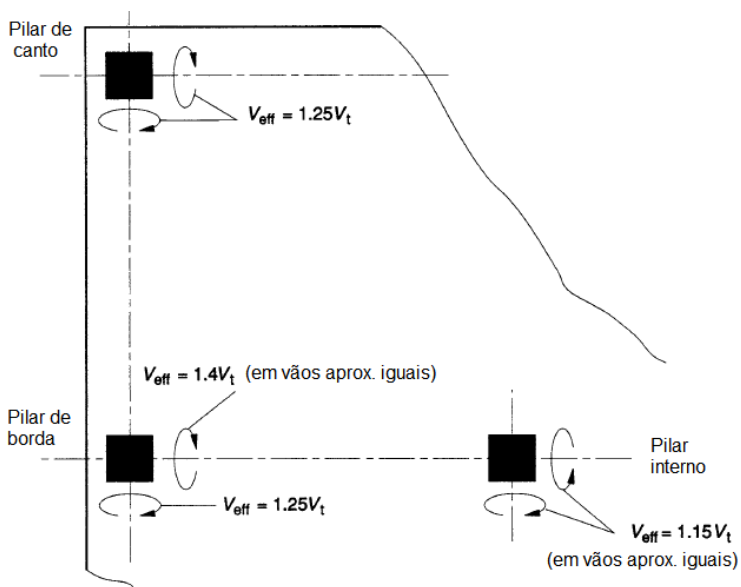
$V_t$  é calculado na suposição que a carga de projeto máxima é aplicada a todos os painéis junto ao pilar considerado.

Nos pilares de canto e nos pilares da borda, quando a flexão ocorrer sobre uma linha central paralela à borda livre considerada, o esforço cortante efetivo de cálculo é dado por:

$$V_{eff} = 1,25.V_t$$

Para os pilares de borda onde a flexão ocorrer sobre uma linha central, perpendicular à borda considerada e com vãos aproximadamente iguais, o esforço cortante efetivo de cálculo deve ser calculado usando:

$$V_{eff} = 1,40.V_t$$



**Figura 2.38 – Coeficientes de majoração do esforço cortante para cada tipo de pilar e flexão**

Fonte: BS 8110/97

**A tensão solicitante máxima na face do pilar não deve exceder o menor dos valores:**

$$v_{\max} \leq \begin{cases} 0,8\sqrt{f_{cu}} \\ 5.MPa \end{cases} \text{ com } v_{\max} = \frac{V_{eff}}{u_0 \cdot d}$$

Onde:

- $f_{cu}$  é a resistência característica à compressão cúbica do concreto (MPa);
- $v_{\max}$  é a tensão solicitante de cálculo na face do pilar ou área carregada;
- $u_0$  é o perímetro de controle na face do pilar ou área carregada;
- $d$  é a altura útil média da laje.

**Os perímetros de controle para cálculo da punção são definidos como:**

- 1º Perímetro de controle:

O menor retângulo em volta de uma área carregada a uma distância  $l_p$  (múltiplo de  $0,75d$ ) das bordas do pilar, como mostra a figura 2.39;

- Zona de falha:

Uma área da laje limitada por dois perímetros distantes de  $1,5d$ . Para casos onde o pilar está próximo a bordas livres e para pilares próximos a aberturas, calcula-se o perímetro conforme mostram as figuras 2.40 e 2.41, usando-se o menor dos valores;

- Comprimento efetivo do perímetro:

O comprimento do perímetro deve ser reduzido, onde apropriado, para os efeitos dos furos ou das bordas externas.



- Altura útil da laje ( $d$ ):

Medida a partir da altura útil média de todas as armaduras de flexão efetivas passando por um perímetro de cálculo.

- Área útil de armadura de flexão:

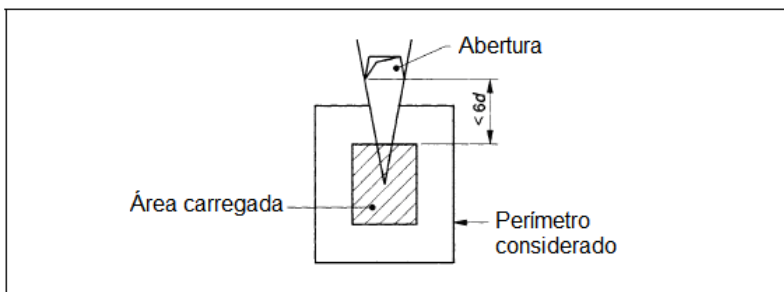
Área total da armadura de flexão que passa pela zona de falha e que se estende além dela no mínimo a “ $d$ ” ou a 12 vezes o diâmetro da barra para cada lado.

A porcentagem de armadura de flexão usada no cálculo da punção é dada por:

$$v_c = \frac{100.A_{sw}}{u.d}$$

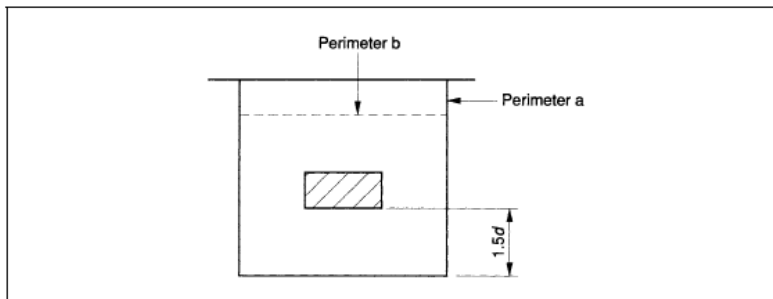
$v_c = (100 \times \text{área útil da armadura de flexão}) / ud$   
Onde:

- $A_{sw}$  é a área útil da armadura de flexão
- $u$  é o perímetro exterior da zona considerada;
- $d$  é a altura útil da laje.



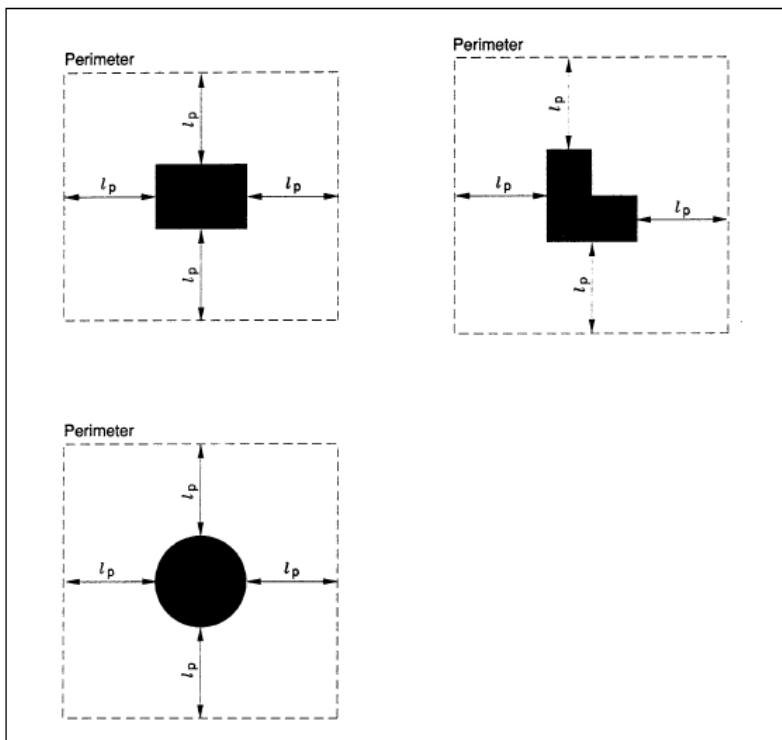
**Figura 2.39 – Perímetro de cisalhamento em lajes com aberturas**

Fonte: BS 8110/97



**Figura 2.40 – Perímetro crítico para pilares próximos de bordas livres**

Fonte: BS 8110/97



**Figura 2.41 – Definição dos perímetros para casos comuns**

Fonte: BS 8110/97

### Cálculo da punção:

As falhas por punção ocorrem em faces inclinadas de cones truncados ou “pirâmides” na laje, dependendo da forma da área carregada. Entretanto, para finalidades práticas, é satisfatório considerar perímetros retangulares de falha. Os métodos empíricos de cálculo contra a punção são apresentados nos itens abaixo:

#### - Resistência à punção sem armadura de cisalhamento:

Desde que a tensão solicitante de punção  $v$  seja menor que a tensão resistente  $v_c$  (obtido na tabela 2.3), não é necessário o uso de armadura de transversal.

#### - Resistência à punção com armadura de punção:

Se  $v_c < v < 2.v_c$ , deve-se usar armadura de punção.

Para os casos onde  $v < 1,6.v_c$ , a área total de armadura transversal necessária é dada por:

$$\sum A_{sv} \operatorname{sen} \alpha \geq \frac{(v - v_c) u.d}{0,95.f_{yv}}$$

Onde:

- $f_{yv}$  é a resistência do aço da armadura de punção (em MPa);
- $\sum A_{sv}$  é a área da armadura de punção;
- $\alpha$  é o ângulo entre a armadura de punção e o plano da laje.

Para casos em que  $1,6.v_c < v < 2.v_c$ , a área total de armadura transversal necessária é dada por:

$$\sum A_{sv} \operatorname{sen} \alpha \geq \frac{5(0,7v - v_c) u.d}{0,95.f_{yv}}$$

Quando  $v > 2.v_c$  as equações apresentadas acima não são mais válidas, devendo-se mudar o modelo estrutural.

Tabela 2.3 – Valores de  $v_c$  para a tensão resistente na punção

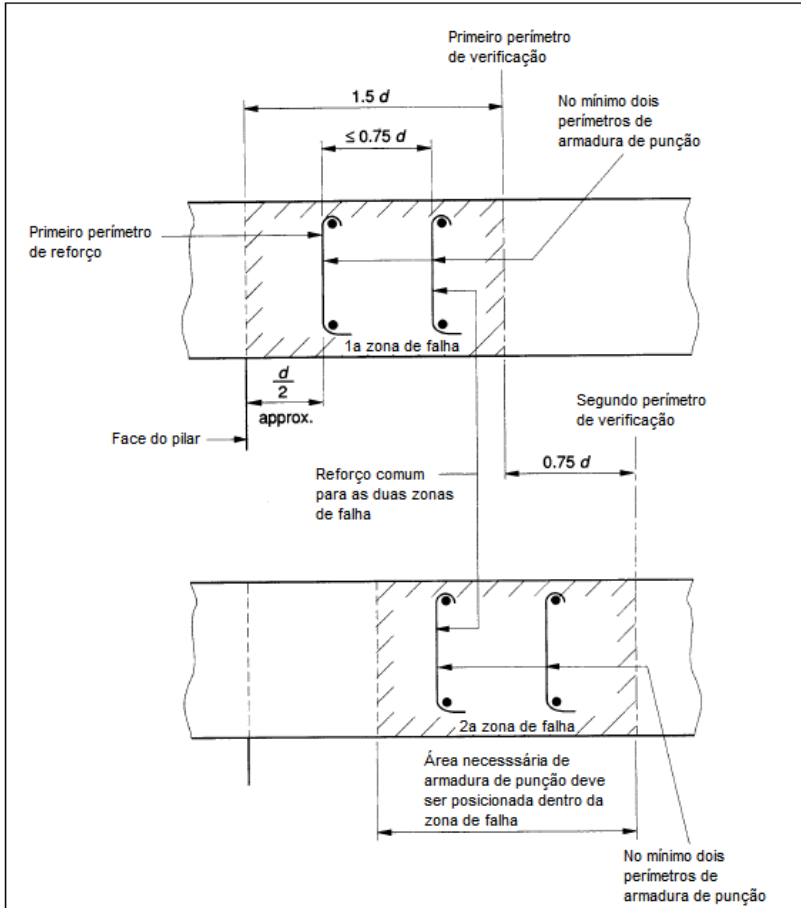
100A <sub>v</sub> b <sub>v</sub> d	Altura útil da laje mm							
	125	150	175	200	225	250	300	400
	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>
≤ 0.15	0.45	0.43	0.41	0.40	0.39	0.38	0.36	0.34
0.25	0.53	0.51	0.49	0.47	0.46	0.45	0.43	0.40
0.50	0.67	0.64	0.62	0.60	0.58	0.56	0.54	0.50
0.75	0.77	0.73	0.71	0.68	0.66	0.65	0.62	0.57
1.00	0.84	0.81	0.78	0.75	0.73	0.71	0.68	0.63
1.50	0.97	0.92	0.89	0.86	0.83	0.81	0.78	0.72
2.00	1.06	1.02	0.98	0.95	0.92	0.89	0.86	0.80
≥ 3.00	1.22	1.16	1.12	1.08	1.05	1.02	0.98	0.91

- Procedimento de cálculo

A resistência à punção deve ser inicialmente verificada no perímetro a  $1,5d$  da face do pilar. Se a tensão solicitante de punção  $v$  for menor que a tensão resistente  $v_c$ , então não será necessário fazer outra verificação.

Se for necessário o uso de armadura de punção, deve-se fazer a distribuição em pelo menos dois perímetros dentro da zona indicada na figura 2.42. O primeiro perímetro da armadura transversal deve estar a aproximadamente  $0,5d$  da face do pilar e deve conter não menos de 40% da área calculada do reforço.

O afastamento dos perímetros das armaduras de punção não deve exceder  $0,75d$  e a distância das armaduras de punção ao longo de qualquer perímetro não deve exceder  $1,5d$ . A tensão solicitante deve então ser verificada em perímetros sucessivos em intervalos de  $0,75d$  até que se chegue a um perímetro que não seja necessário o uso da armadura de punção.



**Figura 2.42 – Zonas de cálculo para reforço da resistência à punção**

Fonte: BS 8110/97

## 2.5 Modelos de cálculo das Normas para a punção: considerações

### 2.5.1 *Modelo adotado*

Atualmente as normas usam o método da superfície de controle nas verificações para a punção em lajes de concreto armado. Nesse método, calcula-se uma tensão uniforme solicitante de punção em uma determinada superfície de controle, perpendicular ao plano médio da laje, localizada a uma determinada distância da face do pilar ou da área carregada, e compara-se o valor do esforço solicitante com um determinado parâmetro de resistência do concreto para aquele perímetro. Se naquele perímetro o esforço resistente for maior que o solicitante não é necessário o uso de armadura de punção.

A abordagem baseada na superfície de controle não significa o entendimento de que a ruptura ocorra nessa superfície, como afirma Cordovil (1997). A superfície real de ruptura é mais parecida com a de um tronco de cone. Cordovil ainda diz que a superfície de controle deve ser considerada como uma grandeza de referência, ou um método que visa calibrar, de maneira prática, a segurança da estrutura. Por isso, a escolha dessa superfície de controle sempre deve estar ajustada com a definição do parâmetro de resistência do concreto. Portanto pode-se concluir que o modelo adotado atualmente pelas normas para o cálculo da punção não representa o fenômeno físico da punção, mas sim uma adaptação de ordem prática para o entendimento e solução do problema.

### 2.5.2 *Perímetros de controle*

Os perímetros de controle das normas estudadas neste trabalho se diferenciam uns dos outros no formato (retangular nas Normas Americana e Inglesa e com bordas circulares na brasileira e Européia) e na distância do pilar ( $0,5d$  na Americana,  $1,5d$  na Inglesa e  $2d$  na brasileira e Européia). Quanto ao formato, Beeby e Narayanan (1995) afirmam que o uso do perímetro retangular pode ser vantajoso em relação ao perímetro com bordas circulares no que diz respeito à simplificação do cálculo e quando é necessário o uso de armadura de punção. Como esta armadura deve ser distribuída dentro do perímetro, fica muito mais fácil de fazer a distribuição quando se tem um perímetro retangular, principalmente com o uso de estribos, que normalmente são

dispostos retangularmente. Quanto à distância do perímetro ao pilar, Regan (2000) defende o uso dos perímetros distantes a  $1,5d$  e  $2d$  ao uso de perímetros distantes a  $0,5d$  do pilar porque um perímetro de controle a uma distância maior do pilar proporciona uma maior uniformidade da tensão de cisalhamento para pilares com dimensões diferentes. Cordovil (1997) afirma que a distância ideal do perímetro de controle seria a  $1,25d$  da face do pilar, pois nessa posição as tensões são mais intensas, podendo chegar até ao escoamento da armadura; portanto a mobilização da armadura, uma vez constituída por pinos, ocorreria desde o início do carregamento.

### *2.5.3 Elaboração do dimensionamento para a punção nas Normas*

As diferentes formulações para a solução do problema da punção apresentadas nas normas mostram que ainda não há um consenso sobre um modelo definitivo, que seja econômico, seguro e adaptável às variações de dimensões de pilares, laje, taxa de armadura, tipo de carregamento, entre outras.

Desde os primeiros estudos feitos sobre a punção, com Talbot em 1913, até os que estão sendo feitos atualmente, usou-se a análise baseada em ensaios laboratoriais, resultando em fórmulas e modelos de cálculo tratados por diversos autores (Beeby e Narayanan, Regan, Carvalho e Pinheiro, ACI-ASCE Committee 326) como empíricos, ou seja, usando modelos que não representam a realidade, mas que foram elaborados se baseando em resultados obtidos por extensos ensaios em laboratórios.

Abaixo são apresentadas algumas justificativas sobre a elaboração da formulação para cálculo da punção adotada para algumas normas.

#### *Norma Inglesa*

A metodologia de cálculo da punção adotado pela Norma Britânica foi de que a resistência à punção em lajes lisas deveria ser dada pela mesma fórmula que se calcula a resistência ao cisalhamento em vigas, como afirmam Beeby e Narayanan (1995). Após ter a forma do perímetro de controle (retangular na Norma Inglesa) adotado, a distância do perímetro de controle da face do pilar foi estabelecida por resultados obtidos em ensaios, que levou a um valor de  $1,5$  da altura útil da laje.

No caso de punção com carregamento assimétrico, onde há transferência de momentos entre o pilar e a laje, sabe-se que a distribuição dos esforços solicitantes de tração e cisalhamento varia bastante ao redor do perímetro e está acompanhado de momentos torçores, o que reduz significativamente a resistência da ligação. No caso da Norma Inglesa, a maneira de lidar com esse problema no dimensionamento foi multiplicar o valor da carga concentrada ou de reação do pilar por um fator que é dado em função da geometria do perímetro de controle e do momento. Segundo Beeby e Narayanan (1995), a BS 8110/97 apresenta os fatores que contemplam tais casos, que são basicamente empíricos, propondo um aumento da carga de reação dos pilares em 15% para pilares internos, 40% para pilares de borda e 25% para pilares de canto.

### *Norma Americana*

Os critérios de cálculo da Norma Americana são baseados praticamente no estudo de Johannes Moe, feito em 1961. Em seu trabalho, Moe ensaiou quarenta e três lajes quadradas de 1,80m de lado e ainda incluiu um estudo estatístico de outras 260 lajes e sapatas ensaiadas por outros pesquisadores. As principais variáveis eram o efeito da aberturas na laje na face de pilares, o efeito da concentração da armadura de tração em faixas estreitas sobre os pilares, os efeitos das dimensões dos pilares, efeito de cargas excêntricas e a funcionalidade de tipos especiais de armaduras de punção. O trabalho de Moe representou o mais completo trabalho sobre punção em lajes lisas da época e até hoje serve como referência para a Norma Americana.

Em seu trabalho, Moe concluiu que três variáveis influíam na resistência à punção: a resistência do concreto, a relação entre a área carregada e a espessura da laje e a relação entre a reação do pilar e o momento transferido entre a laje e o pilar. Moe apresentou também no seu trabalho uma equação empírica para o cálculo da resistência da ligação laje-pilar à punção, onde a seção crítica para o cálculo da punção estava localizada na face do pilar, que apresentou resultados bons comparados com ensaios em laboratório, como mostra a figura 2.43.



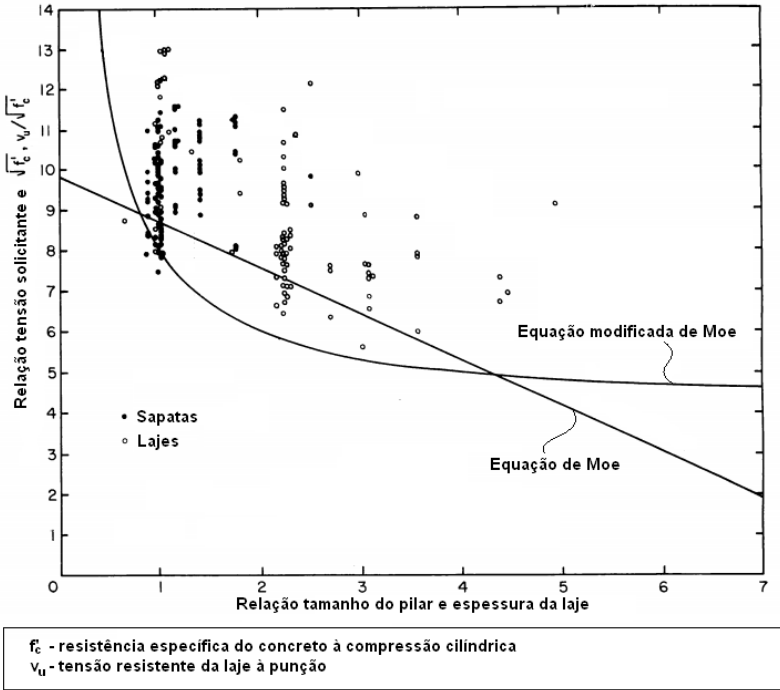
TABELA 8-1 (cont.)—  
COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS DE ENSAIOS E EQ. DE MOE

Laje No.	r, in.	d, in.	b <sub>o</sub> , in.	$\sqrt{f'_c}$	$\phi_u$	V <sub>calc</sub> , kips	V <sub>teste</sub> , kips	$\frac{V_{teste}}{V_{calc}}$
Lajes do Moe								
H1	10.00	4.50	40.00	61.5	1.000	80.2	83.5	1.041
H2	10.00	4.50	34.75	60.2	0.909	72.6	74.0	1.018
H3	10.00	4.50	29.75	58.6	0.813	64.5	73.0	1.130
H4	10.00	4.50	29.75	61.1	0.830	66.5	65.1	0.978
H5	10.00	4.50	24.60	60.2	0.724	57.9	56.1	0.968
H6	10.00	4.50	20.00	64.2	0.549	52.5	55.2	1.050
H7	10.00	4.50	36.14	60.4	0.931	74.4	70.1	0.941
H8	10.00	4.50	32.28	63.8	0.890	71.8	70.1	0.976
H9	10.00	4.50	36.40	59.1	0.924	73.6	70.3	0.955
H10	10.00	4.50	39.44	60.1	0.989	79.0	75.1	0.949
H11	10.00	4.50	40.00	61.5	1.000	80.2	76.1	0.948
H12	10.00	4.50	40.00	66.1	—	—	60.4	—
H13	10.00	4.50	40.00	59.7	—	—	45.1	—
H14	10.00	4.50	35.00	61.6	Falha por flexão	—	56.8	—
H15	10.00	4.50	35.00	58.2	0.902	71.6	74.6	1.042
						Média = 0.992		
						Coeficiente de variação = 0.057		

**Figura 2.43 – Comparação de resultados de ensaios com a equação de MOE (1961)**

Fonte: ACI-ASCE Committee 326

O ACI-ASCE Committee 326 (atualmente 445) aceitou as conclusões de Moe, mas mostrou que uma equação muito mais simples poderia ser derivada da de Moe considerando um perímetro de controle localizado a uma distância igual à metade da altura útil da laje (0,5d). Essa simplificação foi incorporada nas recomendações de cálculo do ACI e a comparação dos resultados obtidos com as equações e com os ensaios pode ser vista na figura 2.44.



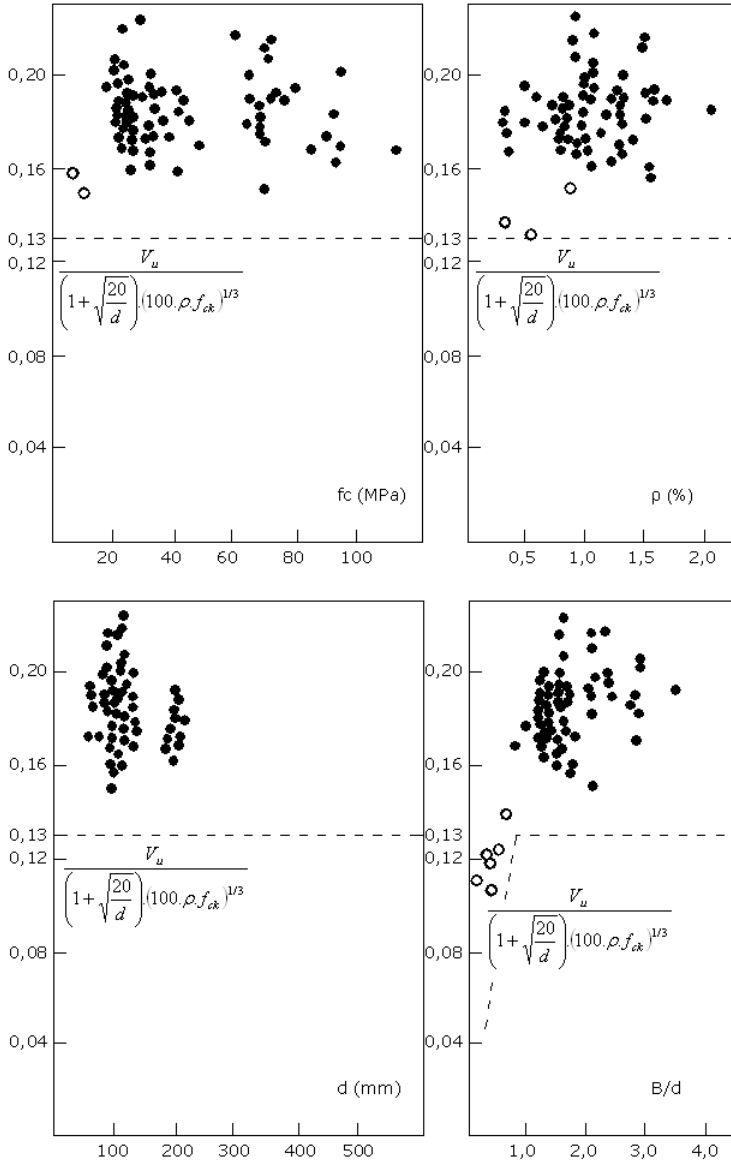
**Figura 2.44 – Comparação das equações com resultados obtidos em ensaios**

Fonte: ACI-ASCE Committee 326

*Norma Brasileira*

O modelo de cálculo à punção proposto pela Norma Brasileira é essencialmente empírico e é baseado no Código Modelo CEB-FIP/90, como afirmam Carvalho e Pinheiro (2009).

A fórmula para a verificação da resistência à punção é baseada em ensaios feitos em lajes com carregamento simétrico sem armadura de punção, feitos por diversos pesquisadores, entre eles Hallgren (1996), Kinnunen e Nylander (1960), Kinnunen, Nylander e Tolf (1980), Marzouk e Hussein (1991), Moe (1961), Ramdane (1996), Regan (1986) e Regan (1997), que podem ser observados na figura 2.45.



**Figura 2.45 – Comparação dos resultados obtidos em ensaios com a NBR 6118**

Fonte: Regan (2000)

Os símbolos apresentados na figura 2.45 são idênticos aos da NBR 6118/03, com exceção de Vu, que é a tensão de ruptura das lajes ensaiadas e de B, que é o diâmetro equivalente de um pilar retangular.

Os círculos vazados na figura 2.45 representam lajes com concreto de resistências muito baixas ou com baixa taxa de armadura de flexão.

A expressão para cálculo resistente de lajes sem armadura de punção pela NBR 6118/03 possui um fator de segurança de 1,23, uma vez que o valor máximo da expressão estaria mais próximo de

$0,16 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3}$ . Portanto mesmo não havendo um fator de segurança de 1,4 aplicado na expressão propriamente dita, há um fator maior que 1,4 aplicado no  $f_{ck}$ .

Os três primeiros gráficos da figura 2.45 não apresentam tendências a erros variando a resistência do concreto, a taxa de armadura de flexão ou a altura útil da laje. Já no último gráfico é possível perceber que a expressão não deve ser usada onde a área carregada é muito pequena, ou seja, onde o diâmetro equivalente B é menos que 0,75d, onde d é a altura útil da laje

## 2.6 Critérios de compatibilização entre as Normas para validação da comparação dos resultados

As normas se diferem em diversos fatores e, para que uma comparação possa ser validada, é necessário que se faça uma compatibilização dos resultados.

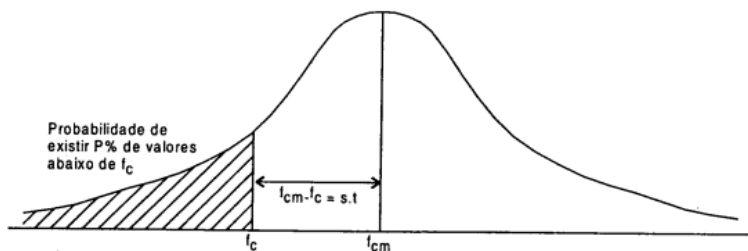
No caso do cálculo da punção pelas normas analisadas, há quatro fatores principais que influem nos resultados: o tipo de processo para avaliar a resistência à compressão do concreto, o tipo de análise para se obter os momentos, as taxas de armadura de flexão e os coeficientes de segurança de cada norma que influem diretamente na carga concentrada ou de reação dos pilares na laje.

A seguir são apresentados os métodos recomendados pelas normas e alguns critérios de compatibilização dos dados.

### 2.6.1 Método de avaliação da resistência do concreto à compressão

A distribuição estatística da resistência característica à compressão cilíndrica do concreto adotada pela NBR 6118/03 e pelo EUROCODE 2/04 ( $f_{ck}$ ) é diferente da distribuição estatística adotada pela Norma Americana ACI-318/97 ( $f'_c$ ). Já a Norma Inglesa BS 8110/97 adota a compressão cúbica do concreto ( $f_{cu}$ ), que pode apresentar variações de resultados de resistências em relação à compressão cilíndrica de até 25%. Dessa maneira, podem surgir algumas dúvidas e dificuldades em projetos estruturais ou em comparações de resultados experimentais que considerem estas normas.

Apesar de as resistências do concreto usado pelas Normas Brasileira, Européia e Americana serem medidas com corpos de prova cilíndricos, a resistência considerada destes se diferencia pelo quantil da curva de Gauss. Através da experiência tem-se observado que a produção de concreto sob condições uniformes apresenta uma distribuição normal (distribuição de Gauss), conforme ilustra a figura 2.46.



**Figura 2.46 – Distribuição normal de resistências à compressão do concreto**

Fonte: (SOUZA e BITTENCOURT, 2006)

O quantil pode ser entendido como a probabilidade de existir P% de valores abaixo de uma resistência à compressão do concreto  $f_c$  qualquer.

A NBR 6118/03 e o EUROCODE 2/04 consideram o parâmetro  $f_{ck}$  como sendo o valor da resistência à compressão do concreto, abaixo da qual só exista a probabilidade de ocorrência de 5% de valores inferiores a este valor. Já a Norma Americana ACI 318/97 garante uma probabilidade de 1% de que a média de três testes consecutivos será inferior a resistência especificada à compressão do concreto  $f'_c$ .

Em um trabalho sobre diferença de resistências características do concreto em função da diferença de quantis da curva de Gauss, Souza e Bittencourt (2006) realizaram um estudo que permitiu a compatibilização do  $f_{ck}$  com o  $f'_c$ . Essa compatibilização é dada por:

$$f'_c = f_{ck} - 2,04$$

Onde:

- $f'_c$  é a resistência específica cilíndrica do concreto, em MPa;
- $f_{ck}$  é a resistência característica cilíndrica do concreto, em MPa.

Souza e Bittencourt (2006) afirmam que a equação pode ser aplicada para relacionar  $f_{ck}$  com  $f'_c$  sempre que não existir um valor de desvio padrão obtido de ensaios experimentais e sempre que a produção do concreto for em massa, com controle rigoroso da umidade dos agregados e com equipe bem treinada.

Para a conversão de valores obtidos em ensaios de compressão de corpos de prova cilíndricos com corpos de prova cúbicos de concreto, a Norma Inglesa DD ENV 206:1992 (British Standards Institution Draft for Development) disponibiliza uma tabela (tabela 4) que fornece a relação média de resistências obtidas em ensaios.

Geralmente ensaios com corpos de prova cilíndricos têm uma resistência de 5% a 25% menor em relação a ensaios feitos com corpos de prova cúbicos para uma mesma betonada. A diferença percentual tende a ser menor conforme se aumenta a resistência do concreto.

A conversão de valores da tabela 2.4 deve ser feita empregando interpolação linear para valores intermediários e extrapolação linear para valores fora da tabela.

Tabela 2.4 – Conversão entre resistências de corpos de prova cilíndricos e cúbicos

Resistência Cilíndrica		Resistência Cúbica	
MPa	psi	MPa	psi
12	1740	15	2175
16	2320	20	2900
20	2900	25	3625
25	3625	30	4350
30	4350	37	5365
35	5075	45	6525
50	7250	60	8700

### 2.6.2 Métodos dos pórticos equivalentes

O cálculo de lajes sem vigas pelo processo dos pórticos equivalentes é bastante usado e fornece resultados satisfatórios, como afirma Emerick (2005). No entanto, o uso desse método deve ser limitado a casos em que os pilares estiverem dispostos em filas

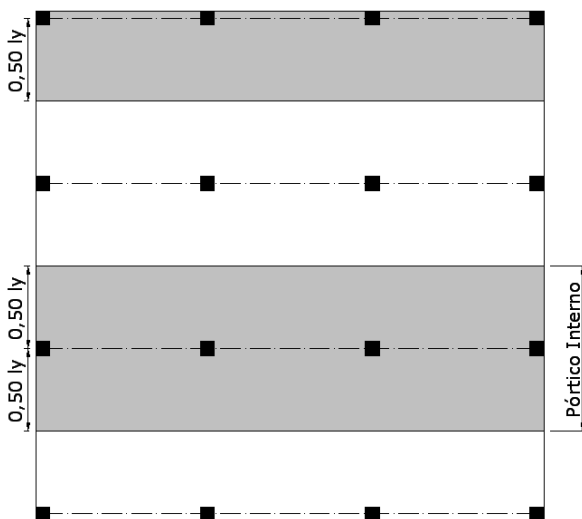
ortogonais, de maneira regular e com vãos pouco diferentes. Para casos em que não se têm essa configuração, a análise estrutural de lajes sem vigas deve ser realizada mediante emprego de procedimento numérico adequado, por exemplo, diferenças finitas, elementos finitos e elementos de contorno.

Dos métodos existentes de pórticos equivalentes, existem três de interesse: o da Norma Brasileira, o da Norma Americana e o da Norma Européia (o mesmo adotado pela Norma Inglesa).

A seguir são apresentados os métodos dos pórticos equivalentes propostos em cada norma.

#### *Método dos pórticos equivalentes – Norma Brasileira*

O método do pórtico equivalente proposto pela Norma Brasileira consiste em dividir a estrutura em cada direção em uma série de pórticos constituídos por colunas e barras horizontais, cujas inércias serão iguais às da laje delimitada pela metade da distância entre duas linhas de pilares, como mostra a figura 2.47.



**Figura 2.47 – Definição dos pórticos segundo a Norma Brasileira**

Fonte: Emerick (2005)

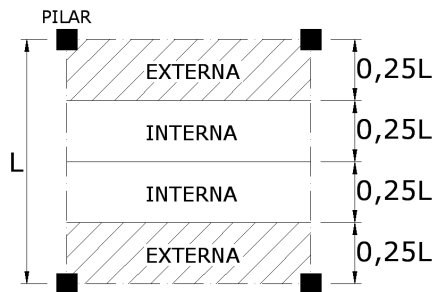


Para o cálculo dos pórticos, os pilares acima e abaixo da laje devem ser considerados engastados em suas extremidades se for considerada sua altura total, ou simplesmente apoiados se for considerada metade da sua altura (CARVALHO e PINHEIRO, 2009).

Para cada pórtico deve ser considerada a carga total. A distribuição dos momentos, obtida em cada direção deve ser feita da seguinte maneira:

- 45% dos momentos positivos para as duas faixas internas;
- 27,5% dos momentos positivos para cada uma das faixas externas;
- 25% dos momentos negativos para as duas faixas internas;
- 37,5% dos momentos negativos para cada uma das faixas externas.

A distribuição dos momentos proposta pela Norma Brasileira requer o entendimento de que são as faixas internas e externas do painel. Essas faixas são consideradas conforme a figura 2.48.



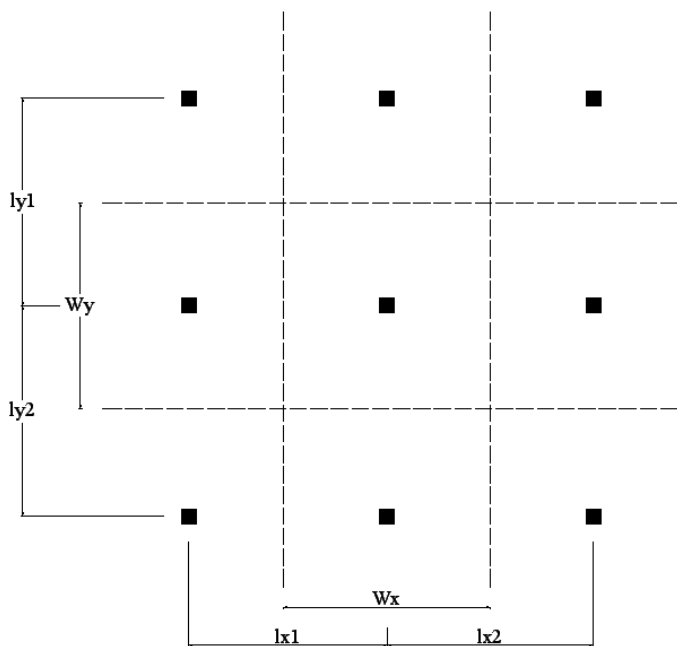
**Figura 2.48 – Faixas para a distribuição dos momentos segundo a Norma Brasileira**

*Método dos pórticos equivalentes – Normas Inglesa e Européia*

O método dos pórticos equivalentes proposto pela Norma Inglesa e Européia é bastante parecido com o proposto pela Norma Brasileira, com exceção de alguns detalhes apresentados abaixo.

A estrutura deve ser dividida em uma série de pórticos nas duas direções ortogonais constituídos por colunas e barras horizontais, cujas inércias serão iguais às da seção bruta de cada elemento.

A largura da laje a ser considerada na divisão dos pórticos depende da relação entre os vãos em cada sentido ortogonal da laje. A divisão é feita conforme a figura 2.49.



**Figura 2.49 – Divisão dos pórticos**

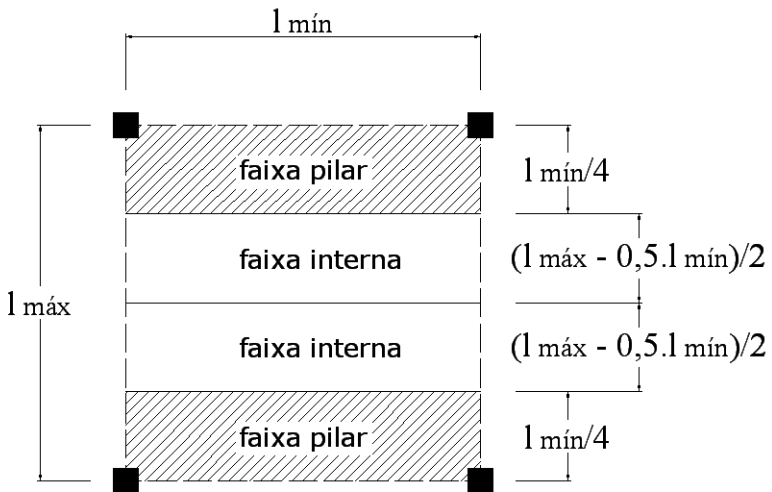
Portanto, ainda em relação à figura 2.49, a divisão dos pórticos deve ser feita por:

$$\text{Quando } l_y < 2.l_x \rightarrow \begin{aligned} W_x &= (l_{x1} + l_{x2})/2 \\ W_y &= (l_{y1} + l_{y2})/2 \end{aligned}$$

$$\text{Quando } l_y > 2.l_x \rightarrow \begin{aligned} W_x &= (l_{x1} + l_{x2})/2 \\ W_y &= 2.W_x \end{aligned}$$

Para o cálculo dos pórticos, os pilares acima e abaixo da laje devem ser considerados engastados em suas extremidades e deve ser considerada sua altura total.

A distribuição dos momentos nas faixas proposta pelas Normas Inglesa e Européia é considerada conforme a figura 2.50.



**Figura 2.50 – Faixas para a distribuição dos momentos**

A diferença nos métodos da Norma Inglesa e Européia está na distribuição dos momentos obtidos em cada direção. A distribuição dos momentos é apresentada nas tabelas 2.5 e 2.6.

Tabela 2.5 – Distribuição dos momentos nas faixas pela Norma Inglesa

Momentos	Faixa pilar (%)	Faixa interna (%)
Negativos	75	25
Positivos	55	45

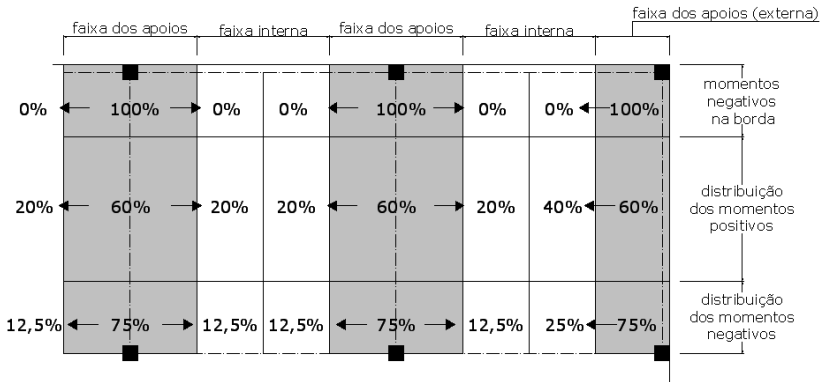
Tabela 2.6 – Distribuição dos momentos nas faixas pela Norma Européia

Momentos	Faixa pilar (%)	Faixa interna (%)
Negativos	60-80	40-20
Positivos	50-70	50-30

*Método dos pórticos equivalentes – Norma Americana*

O método dos pórticos equivalentes proposto pela Norma Americana apresenta a mesma definição da largura dos pórticos apresentada pela Norma Brasileira (figura 2.47). Quanto à definição das faixas para a distribuição dos momentos, o ACI considera a largura das faixas definidas por 25% do menor vão da laje, assim como as Normas Inglesa e Européia (figura 2.50).

A distribuição dos momentos obtidos em cada direção deve ser feita conforme a figura 2.51.



**Figura 2.51 – Coeficientes para a distribuição dos momentos de acordo com o ACI**

O ACI permite aumentar a rigidez na região dos pilares em razão da existência de capitéis, engrossamentos e até mesmo pela própria existência do pilar. Nesses casos, o momento de inércia da “laje-viga” na região que vai do eixo do pilar até sua face externa é tomado como o valor do seu momento de inércia na face do pilar (considerando a existência ou não de engrossamento) dividido por:

$$\left(1 - \frac{c_2}{l_2}\right)^2$$

Onde:

- $c_2$  é a dimensão do apoio na direção transversal ao pórtico;
- $l_2$  é o vão na direção transversal ao pórtico.

O ACI leva em consideração o fato de existir uma grande diferença de largura entre a laje do pórtico e o pilar no cálculo do pórtico equivalente. Essa consideração é feita atribuindo-se uma rigidez à torção no encontro do pilar com a laje do pórtico. A partir da combinação da rigidez do elemento de torção com a do pilar, calcula-se uma rigidez equivalente  $k_{ec}$ , dada por:

$$\frac{1}{k_{ec}} = \frac{1}{\sum k_c} + \frac{1}{k_T}$$

Onde:

- $1/k_{ec}$  é a flexibilidade do pilar equivalente;
- $\sum k_c$  é a soma da rigidez dos pilares acima e abaixo da laje do pórtico;

- $k_T$  é a rigidez do elemento torcional.

A rigidez de uma barra bi-engastada pode ser calculada por:

$$k_c = \frac{4E_c I_c}{L_c}$$

Onde:

- $E_c$  é o módulo de elasticidade do pilar;
- $I_c$  é o momento de inércia do pilar;
- $L_c$  é o comprimento do pilar.

Segundo o ACI, a rigidez do elemento torcional pode ser calculada por:

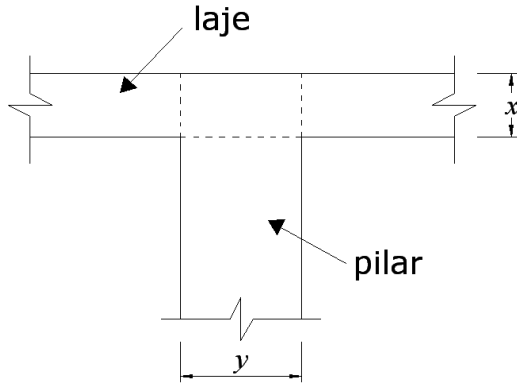
$$k_T = \sum \frac{9E_c C}{l_2 \cdot (1 - c_2 / l_2)^3}$$

Sendo:

$$C = \sum \left[ \left( 1 - 0,63 \frac{x}{y} \right) \cdot \frac{x^3 y}{3} \right]$$

Onde:

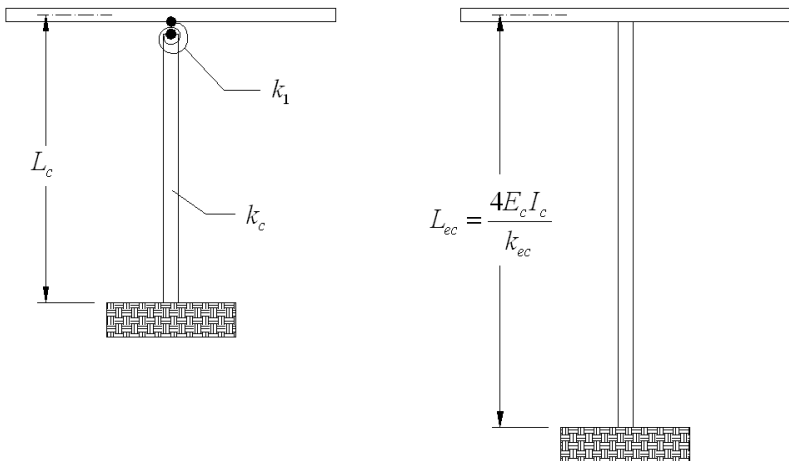
- $x$  e  $y$  são o menor e o maior lado do retângulo que compõe a seção transversal laje-pilar, como mostra a figura 2.52.



**Figura 2.52 – Valores de  $x$  e  $y$  para a seção transversal laje-pilar**

Fonte: Emerick, 2005

Uma possibilidade para considerar a rigidez equivalente do pilar com uso de programas computacionais é por meio do cálculo de um comprimento equivalente para o pilar, de tal forma que a rigidez do pilar passe a ser a rigidez equivalente do conjunto, como mostra a figura 2.53.

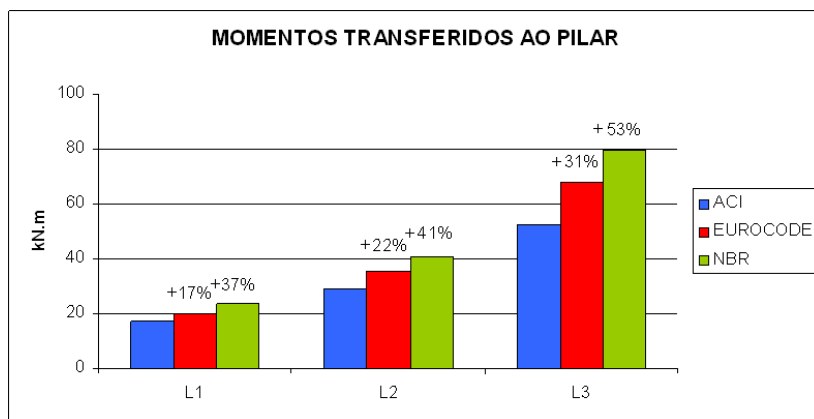


**Figura 2.53 – Pilar equivalente**

Fonte: Emerick, 2005

*Método dos pórticos equivalentes - Comentários*

Apesar de partirem do mesmo princípio de análise, os métodos fornecem resultados muito diferentes uns dos outros. Para ilustrar a diferença, foi calculado o valor médio de momentos transferidos ao pilares, para espessuras entre 24 cm e 14 cm, nas configurações de lajes apresentadas no item 3, pelos três métodos. Os resultados podem ser visualizados no gráfico da figura 2.54. As porcentagens são dadas em relação aos resultados do método do ACI.



**Figura 2.54 – Momentos transferidos ao pilar pelo método de cada norma**

Valores em kN.m

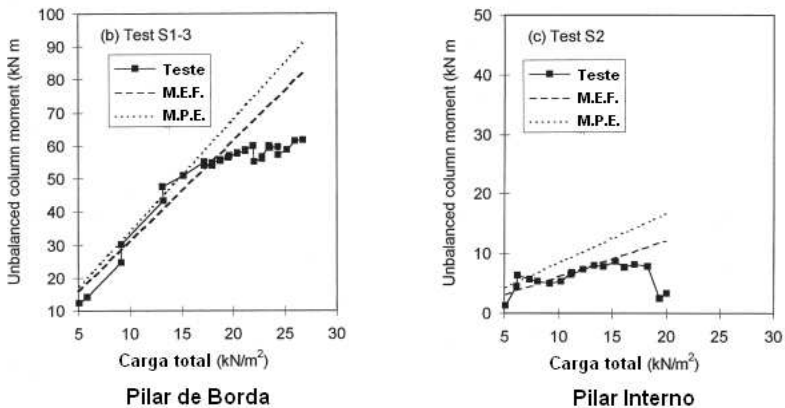
Por se tratar de um método de obtenção de esforços, e não de um processo de dimensionamento para a punção propriamente dita, optou-se por usar apenas um dos três métodos expostos, com a finalidade de uniformizar os valores dos momentos calculados e enfatizar a diferença no dimensionamento à punção das normas usadas.

Com base no estudo feito por Sherif e Dilger (2000), em que foi feita a comparação dos resultados dos momentos fletores pelo método dos pórticos equivalentes do ACI, o método dos elementos finitos e



ensaios em lajes em tamanho real, optou-se por adotar o método dos pórticos equivalentes proposto pelo ACI para a determinação dos momentos fletores no cálculo da punção.

Em seus ensaios, Sherif e Dilger (2000) constataram que o método dos pórticos equivalentes proposto pelo ACI e o método dos elementos finitos dão resultados próximos aos obtidos em ensaios para carregamentos pequenos, ao passo que o método dos pórticos equivalentes tende a superestimar os momentos quando o carregamento começa a aumentar, como mostra a figura 2.55.



**Figura 2.55 – Diagrama momento x carregamento pelos métodos dos pórticos equivalentes do ACI, dos elementos finitos e ensaio em laje em tamanho real**

Fonte: (SHERIF & DILGER, 2000)

### 2.6.3 Coeficientes de ponderação

Os valores adotados para cada análise ou dimensionamento devem estar sempre dentro de padrões de segurança, representados na forma de coeficientes de redução ou majoração das cargas, estipulados por cada norma que se opta por seguir. Esses coeficientes de segurança são introduzidos para que sejam levados em conta no cálculo efeitos não considerados, como aumento de carga, avaliação incorreta dos efeitos de

carga, redistribuição de tensões não previstas, variação na dimensão dos elementos e é importante para considerar o estado limite último.

O cálculo dos esforços e o dimensionamento das lajes dependem das cargas aplicadas nela, bem como dos materiais que serão usados. No cálculo da punção, dependemos geralmente das reações e momentos na laje, taxa e resistência da armadura de flexão e espessura e resistência do concreto, e todos sofrem influência dos coeficientes de ponderação.

Os coeficientes de segurança, juntamente com os símbolos adotados para cada caso em cada norma são apresentados na tabela 2.5.

Tabela 2.7 – Símbolos e coeficientes de ponderação

Coeficiente de ponderação:	ACI 318/08	BS 8110/97	EUROCODE 2/04	NBR 6118/03
da resistência do concreto	$\phi = 0,70$ (aprox. 1,40)	$\gamma_m = 1,50$	$\gamma_C = 1,50$	$\gamma_c = 1,40$
da resistência do aço	$\phi = 0,90$ (aprox. 1,10)	$\gamma_m = 1,05$	$\gamma_S = 1,15$	$\gamma_s = 1,15$
de cargas permanentes	1,40	$\gamma_D = 1,40$	$\gamma_G = 1,35$	$\gamma_g = 1,40$
de cargas variáveis	1,70	$\gamma_I = 1,60$	$\gamma_Q = 1,50$	$\gamma_q = 1,40$

Por se tratarem de coeficientes de ponderação, os esforços devem ser majorados por estes, enquanto que as resistências devem ser diminuídas, no sentido de superestimar as cargas e subestimar a resistência, em favor da segurança.

No caso da Norma Americana, esta permite que se opte entre dois valores diferentes de coeficientes de ponderação. Os valores apresentados na tabela 2.5 referem-se aos do apêndice C do ACI 318/08.

### 3 EXEMPLO DE VERIFICAÇÃO

Para se fazer o estudo dos modelos de cálculo de punção proposto em cada norma, adotou-se um projeto real de uma laje nervurada em que há ligações diretas entre a laje e os pilares. Para efeito de comparação dos resultados, o estudo foi feito variando as medidas dos vãos no projeto original, sendo analisadas três configurações de laje:

- Laje com as medidas dos vãos originais do projeto (laje L1);
- Laje com as medidas dos vãos com dimensões 1,25 vezes maior que as medidas originais do projeto (laje L2);
- Laje com as medidas dos vãos 1,50 vezes maior em relação às dimensões do projeto original (laje L3).

Analisou-se também a variação das espessuras da laje entre 14 cm e 24 cm e sua influência na resistência à punção. É importante destacar que a Norma Brasileira limita as espessuras das lajes apoiadas diretamente em pilares em 16 cm e com uso de capitéis a 14 cm. Os dados e resultados são apresentados nos itens abaixo.

### 3.1 Apresentação da laje

Para esse estudo adotou-se o projeto de uma laje do prédio de Engenharia Civil, em Florianópolis, na Universidade Federal de Santa Catarina. A laje tem um  $f_{ck}$  de projeto de 30 MPa e capa com espessura de 4 cm nos vãos e 24 cm na região maciça sobre os pilares, como mostra a figura 3.3. A distância entre pisos é de 3 metros.

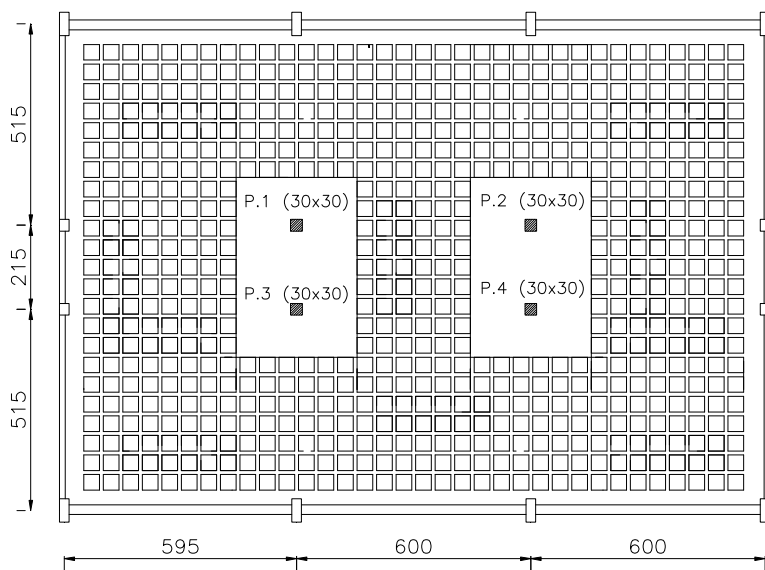
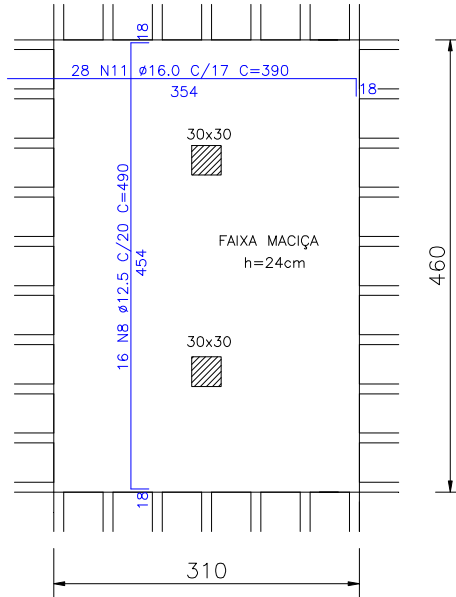


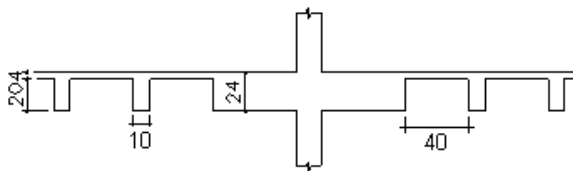
Figura 3.1 – Planta da laje L1 – unidades em cm



**Figura 3.2 – Detalhe da região maciça da laje sobre os pilares centrais e distribuição de armaduras negativas de flexão**

Dimensões em cm

A laje nervurada tem formato retangular, conforme a figura 3.1. As dimensões da laje na região “vazada” entre as nervuras são de 40 cm x 40 cm. As armaduras de flexão do projeto real, assim como as dimensões da parte maciça da laje sobre os pilares são apresentadas na figura 3.2. Estas armaduras são de aço CA-50 e todos os pilares das regiões sujeitas ao efeito da punção são quadrados, com lado igual a 30 cm.



**Figura 3.3 – Corte da laje na região dos pilares centrais**

Dimensões em cm

## 3.2 Cargas e solicitações da laje

A definição das cargas utilizadas para o cálculo da laje foi feita levando-se em conta a sua utilização final. Por se tratar de um piso onde serão construídas salas de aula e salas de professores, chegou-se a seguinte definição de materiais e valores de carga:

### 3.2.1 Cargas permanentes

Nas lajes nervuradas, as regiões onde existem as nervuras, normalmente ocupando os vãos da laje, possuem peso próprio diferente das regiões de laje maciça, normalmente localizadas próximas às bordas da laje e na região sobre os pilares. Essa diferença influencia no carregamento do peso próprio para cada faixa quando se utiliza o método dos pórticos equivalentes.

Portanto, para haver uma maior conformidade com os valores reais de distribuição de cargas, os carregamentos relativos ao peso próprio foram divididos em duas regiões distintas: uma relativa ao peso próprio da laje maciça, nas regiões das bordas da laje (Região 1) e outra relativa ao peso próprio das nervuras no centro dos vãos de cada faixa (Região 2).

**Peso Próprio:** o peso específico do concreto armado é 25 kN/m<sup>3</sup>.

$$g_{pp} = 25 \text{ kN/m}^3$$

**Revestimento:** argamassa de regularização ou nivelamento do piso, de espessura variável com um valor médio de 3 cm, onde é usada uma argamassa de cimento (21 kN/m<sup>3</sup>).

$$g_{rev} = 0,6 \text{ kN/m}^2$$

**Acabamento:** granito ou mármore;  $\delta_{acab} = 28 \text{ kN/m}^3$  com espessura de 2 cm.:

$$g_{acab} = 0,6 \text{ kN/m}^2$$

**Carga permanente total (laje com espessura = 24 cm):**

Região 1 - laje maciça:  $g_l = g_{pp,l} + g_{rev} + g_{acab} = 7,2 \text{ kN/m}^2$

Região 2 - treliças:  $g_t = g_{pp,t} + g_{rev} + g_{acab} = 5,5 \text{ kN/m}^2$ .

**3.2.2 Cargas acidentais**

**Carga Acidental:** Cargas verticais variáveis e de divisórias:

$$q = 3 \text{ kN/m}^2$$

### 3.3 Momentos transferidos ao pilar

#### 3.3.1 Carregamentos

*Cargas permanentes nas faixas (laje com espessura = 24 cm):*

- Região 1 (região de laje maciça próxima aos pilares de borda):  
7,2 kN/m<sup>2</sup>

- Região 2 (região de laje treliçada no meio dos vãos): 5,5  
kN/m<sup>2</sup>

*Carga acidental nas faixas:*

- 3 kN/m<sup>2</sup> nas três regiões.

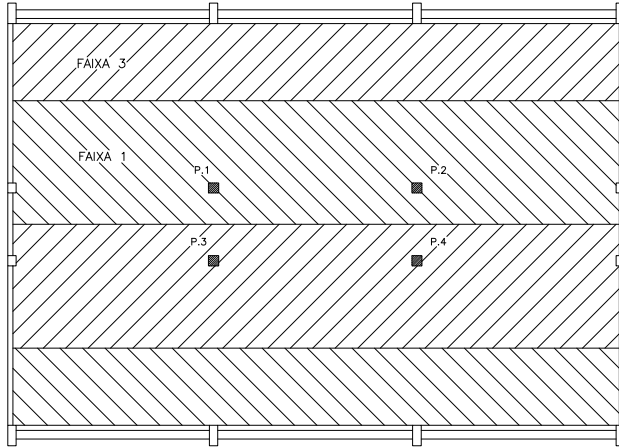
#### 3.3.2 Definição dos momentos transferidos ao pilar

Para a definição dos momentos transferidos ao pilar no cálculo da punção foi adotado o método dos pórticos equivalentes do ACI 318, usando a divisão da laje em faixas e a altura equivalente dos pilares para considerar a rigidez destes. A rigidez da laje no cálculo dos momentos foi feita considerando a laje maciça em toda sua extensão (mesmo na região das treliças) e desconsiderou-se as vigas de borda.

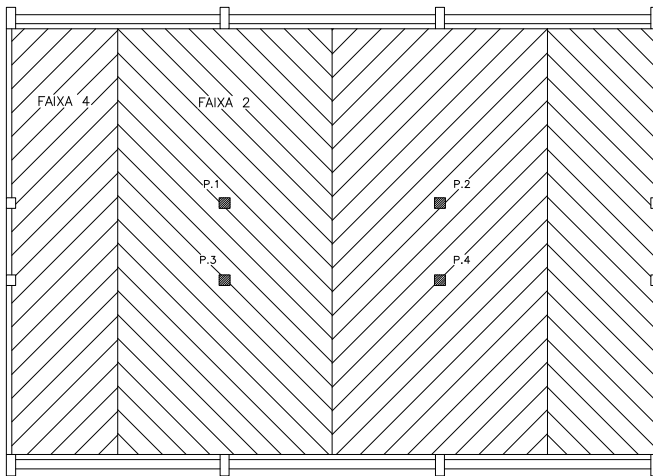
Fazendo a divisão da laje em faixas nos sentidos ortogonais do plano x,y para a configuração dos pórticos, têm-se quatro configurações diferentes, duas no sentido x e duas no sentido y, como mostram as figuras 3.4 e 3.5.

As larguras das faixas 1 e 2 na laje L1 são 3,65 m e 6,00 m, na laje L2 4,56 m e 7,50 m e na laje L3 5,47 m e 9,00 m respectivamente.





**Figura 3.4 – Divisão das faixas no sentido x**



**Figura 3.5 – Divisão das faixas no sentido y**

As faixas 1 e 2, que contêm o pilar central onde serão feitas as verificações à punção, são apresentadas com suas devidas dimensões, nas figuras 3.6 e 3.7:

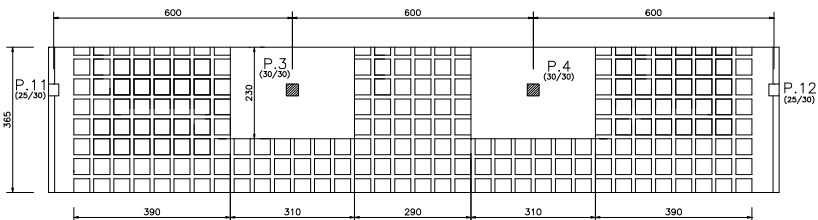


Figura 3.6 – Faixa 1 da laje L1 – unidades em cm

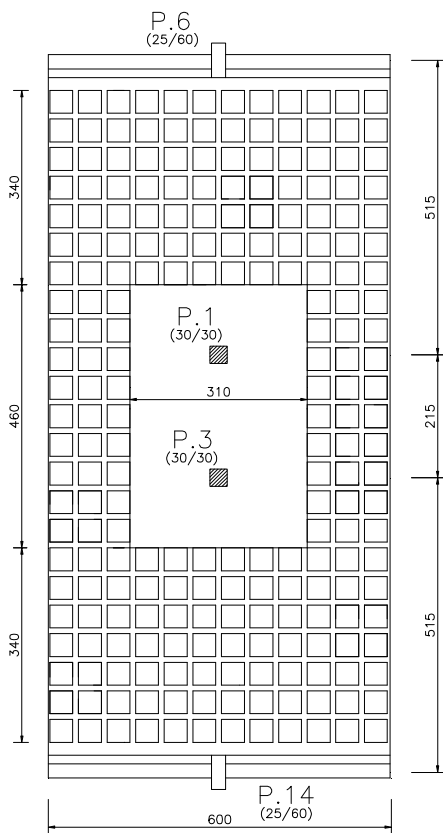


Figura 3.7 – Faixa 2 da laje L1 – unidades em cm

*Norma Brasileira*

O cálculo dos momentos transferidos ao pilar é feito usando os coeficientes de ponderação da atual Norma Brasileira que são:

- $\gamma_g = 1,4$  - coeficiente de ponderação para cargas permanentes;
- $\gamma_q = 1,4$  - coeficiente de ponderação para cargas variáveis.

Os momentos de cálculo transferidos ao pilar nos pórticos das lajes na direção  $x$  ( $M_x$ , faixa 1) e na direção  $y$  ( $M_y$ , faixa 2) para o cálculo da punção, podem ser observados na tabela 3.1, onde são apresentados os valores segundo cada espessura de laje e configurações de lajes (lajes L1, L2 e L3).

Tabela 3.1 – Momentos fletores para cálculo da punção segundo a NBR 6118/03

Espessura da laje (cm)	Laje L1		Laje L2		Laje L3	
	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)
24	9,5	17,0	18,2	31,4	31,5	50,5
23	9,6	18,0	18,5	33,2	31,8	53,6
22	9,7	19,0	18,7	35,0	32,0	56,6
21	9,7	20,1	18,7	36,9	32,0	59,5
20	9,6	21,2	18,7	38,7	31,9	62,4
19	9,5	22,3	18,5	40,6	31,6	65,3
18	9,2	23,4	18,2	42,5	31,2	68,1
17	9,0	24,6	17,8	44,4	30,6	70,9
16	8,7	25,8	17,2	46,3	29,9	73,6
15	8,3	27,0	16,6	48,2	29,0	76,3
14	7,8	28,3	15,8	50,2	28,0	78,9

*Norma Européia*

O cálculo dos momentos transferidos ao pilar é feito usando os coeficientes de ponderação da atual Norma Européia, que são:

- $\gamma_G = 1,35$  - coeficiente de ponderação para cargas permanentes;
- $\gamma_Q = 1,50$  - coeficiente de ponderação para cargas variáveis.

Pela Norma Européia tem-se, para a laje L1 nas faixas 1 e 2:

- Carga/área na região 1:

$$P_{sd,1} = \gamma_G \cdot P_{kg,1} + \gamma_Q \cdot P_{kq} = 1,35 \cdot 7,2 + 1,50 \cdot 3,0 = 14,22 \text{ kN} / \text{m}^2$$

-Carga/área na região 2:

$$P_{sd,2} = \gamma_G \cdot P_{kg,2} + \gamma_Q \cdot P_{kq} = 1,35 \cdot 5,5 + 1,50 \cdot 3,0 = 11,90 \text{ kN} / \text{m}^2$$

Os momentos de cálculo transferidos ao pilar nos pórticos das lajes na direção  $x$  ( $M_x$ , faixa 1) e na direção  $y$  ( $M_y$ , faixa 2) para o cálculo da punção pela Norma Européia podem ser observados na tabela 3.2, onde são apresentados os valores segundo cada espessura de laje e configurações de lajes (lajes L1, L2 e L3).

Tabela 3.2 – Momentos fletores para cálculo da punção no EUROCODE

Espessura da laje (cm)	Laje L1		Laje L2		Laje L3	
	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)
24	9,5	17,1	18,2	31,4	31,5	50,6
23	9,6	18,2	18,5	33,2	32,0	53,6
22	9,7	19,4	18,7	35,0	32,4	56,5
21	9,7	20,5	18,7	36,9	32,5	59,4
20	9,6	21,6	18,7	38,7	32,5	62,4
19	9,5	22,8	18,5	40,6	32,2	65,3
18	9,2	24,0	18,2	42,5	31,8	68,2
17	9,0	25,1	17,8	44,4	31,1	71,1
16	8,7	26,3	17,2	46,3	30,3	74,0
15	8,3	27,5	16,6	48,2	29,2	76,9
14	7,8	28,7	15,8	50,2	28,0	79,8

### *Norma Americana*

Os coeficientes de ponderação da Norma Americana são:

- 1,40 - coeficiente de ponderação para cargas permanentes;
- 1,70 - coeficiente de ponderação para cargas variáveis.

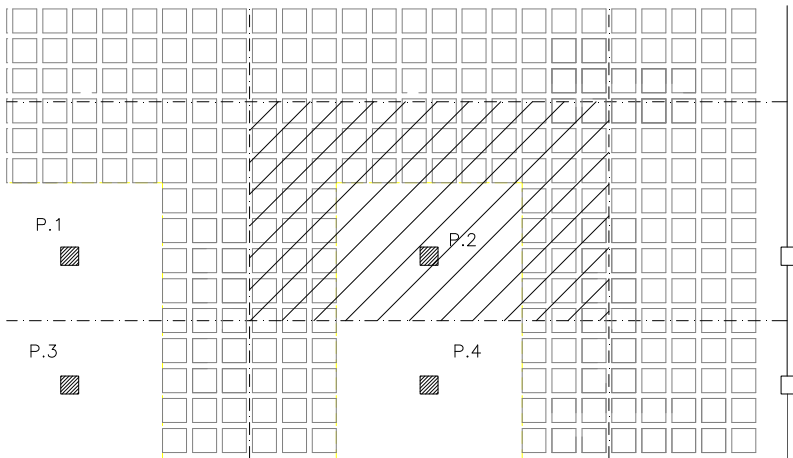
Os momentos de cálculo transferidos ao pilar nos pórticos das lajes na direção  $x$  ( $M_x$ , faixa 1) e na direção  $y$  ( $M_y$ , faixa 2) para o cálculo da punção pela Norma Americana podem ser observados na tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Momentos fletores para cálculo da punção no ACI 318

Espessura da laje (cm)	Laje L1		Laje L2		Laje L3	
	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)	$M_x$ (kN.m)	$M_y$ (kN.m)
24	10,1	18,2	19,9	28,7	33,7	54,8
23	10,2	19,5	20,1	30,6	34,2	58,0
22	10,3	20,7	20,2	32,4	34,5	61,1
21	10,3	22,0	20,2	34,4	34,6	64,3
20	10,2	23,2	20,1	36,3	34,5	67,5
19	10,1	24,5	19,9	38,3	34,3	70,6
18	9,9	25,7	19,6	40,3	33,9	73,7
17	9,7	27,0	19,1	42,4	33,3	76,9
16	9,3	28,2	18,6	44,4	32,5	80,0
15	8,9	29,5	18,0	46,6	31,6	83,1
14	8,5	30,7	17,2	48,7	30,5	86,2

### 3.4 Reação nos pilares

A carga atuante característica é idêntica em todos os pilares onde pode ocorrer a punção, então foi selecionado o pilar P2 para ser feito o estudo. A reação no pilar P2 é calculada pela área de influência, conforme mostra a figura 3.8.



**Figura 3.8 – Área de influência das cargas no pilar P2**

Considerando a laje L1, com espessura de 24 cm, tem-se os seguintes dados:

- Área de laje maciça:

$$A_{\text{inf},m} = 7,13 \text{ m}^2$$

- Área de laje nervurada:

$$A_{\text{inf},n} = 14,77 \text{ m}^2$$

- Área de total:

$$A_{\text{inf}} = A_{\text{inf},m} + A_{\text{inf},n} = 21,90 \text{ m}^2$$

- Reação no pilar P2 devido às cargas permanentes:

$$F_{kg} = G_k = A_{\text{inf},m} \cdot 7,2 + A_{\text{inf},n} \cdot 5,5 = 7,13 \cdot 7,2 + 14,77 \cdot 5,5 = 132,60 \text{ kN}$$

- Reação no pilar P2 devido às cargas variáveis:

$$F_{kq} = Q_k = A_{\text{inf},t} \cdot 3,0 \text{ kN/m}^2 = 21,90 \cdot 3,0 = 65,7 \text{ kN}$$

Como já mencionado, cada norma prevê um valor diferente para os coeficientes de ponderação. Por esse motivo o cálculo das reações de cálculo é feito separadamente.

### 3.4.1 NBR 6118/03 – Reação concentrada de cálculo

- Para Combinação última de cálculo:

$$F_{Sd} = \gamma_g \cdot F_{kg} + \gamma_q \cdot (F_{kq} + \psi_0 \cdot F_{kQ})$$

Onde:

- $\gamma_g = 1,4$  é o coeficiente de ponderação para cargas permanentes;
- $\gamma_q = 1,4$  é o coeficiente de ponderação para cargas variáveis;
- $F_{Sd}$  é a reação concentrada de cálculo;
- $F_{kg}$  é a ação permanente característica;
- $F_{kq}$  é a ação variável característica;
- $F_{kQ}$  é a ação característica do vento;
- $\psi_0$  é o fator de redução de combinação para o ELU.



Considerando ações variáveis para uma edificação tipo 2, ou seja, edificação na qual as cargas acidentais são inferiores a 5 kN/m<sup>2</sup>.

$$F_{Sd} = 1,4.132,60 + 1,4.(65,7 + 0,7.0) = 275,70 \text{ kN}$$

A tabela 3.4 apresenta os valores das reações concentradas de cálculo do pilar P2 obtidas pela Norma Brasileira pelo carregamento das lajes L1, L2 e L3.

Tabela 3.4 – Reações concentradas de cálculo do pilar P2 pela NBR 6118

Espessura da laje (cm)	Laje L1	Laje L2	Laje L3
	$F_{Sd}$ (kN)	$F_{Sd}$ (kN)	$F_{Sd}$ (kN)
24	275,70	430,50	620,10
23	269,80	421,40	607,00
22	264,00	412,40	593,90
21	258,20	403,30	580,90
20	252,40	394,20	567,80
19	246,60	385,20	554,80
18	240,80	376,10	541,70
17	235,00	367,00	528,60
16	229,20	357,90	515,60
15	223,40	348,90	502,50
14	217,60	339,80	489,50

### 3.4.2 BS 8110/97 – Reação concentrada de cálculo

- Combinação última de cálculo:

$$V = \gamma_D \cdot G_k + \gamma_I \cdot Q_k$$

Onde:

- $\gamma_D = 1,4$  é o coeficiente de ponderação para cargas permanentes;
- $\gamma_I = 1,6$  é o coeficiente de ponderação para cargas variáveis;
- $V$  é a reação concentrada de cálculo;
- $G_k$  é a ação permanente característica;
- $Q_k$  é a ação variável característica.

Considerando os coeficientes de ponderação, para uma laje L1 com 24 cm de espessura:

$$V = 1,4 \cdot 132,60 + 1,6 \cdot 65,7 = 288,80 \text{ kN}$$

A tabela 3.5 apresenta os valores das reações concentradas de cálculo do pilar P2 obtidas para a Norma Inglesa para o carregamento das lajes L1, L2 e L3.

Tabela 3.5 – Reações concentradas de cálculo do pilar P2 pela BS 8110

Espessura da laje (cm)	Laje L1	Laje L2	Laje L3
	$V$ (kN)	$V$ (kN)	$V$ (kN)
24	288,80	451,20	649,60
23	283,00	429,70	636,60
22	277,20	421,30	623,50
21	271,40	412,90	610,50
20	265,60	404,50	597,40
19	259,80	396,00	584,30
18	254,00	387,60	571,30
17	248,10	379,20	558,20
16	242,30	370,80	545,20
15	236,50	362,30	532,10
14	230,70	353,90	519,00

### 3.4.3 EUROCODE 2/04 – Reação concentrada de cálculo

- Combinação última de cálculo:

$$F = \gamma_Q \cdot Q_K + \gamma_G \cdot G_K$$

Onde:

- $\gamma_G = 1,35$  é o coeficiente de ponderação para cargas permanentes;
- $\gamma_Q = 1,50$  é o coeficiente de ponderação para cargas variáveis;
- $F$  é a reação concentrada de cálculo;
- $G_K$  é a ação permanente característica;
- $Q_K$  é a ação variável característica.

Considerando os coeficientes de ponderação, para uma laje L1 com 24 cm de espessura:

$$V = 1,35 \cdot 132,60 + 1,50 \cdot 65,7 = 267,60 \text{ kN}$$

A tabela 3.6 apresenta os valores das reações concentradas de cálculo do pilar P2 obtidas para a Norma Européia para o carregamento das lajes L1, L2 e L3.

Tabela 3.6 – Reações concentradas de cálculo do pilar P2 pelo EUROCODE 2/04

Espessura da laje (cm)	Laje L1	Laje L2	Laje L3
	$F$ (kN)	$F$ (kN)	$F$ (kN)
24	267,60	430,50	620,10
23	262,40	421,80	607,50
22	257,20	413,00	594,90
21	252,00	404,30	582,30
20	246,80	395,50	569,70
19	241,60	386,80	557,10
18	236,40	378,00	544,50
17	231,20	369,30	531,90
16	226,00	360,50	519,30
15	220,80	351,80	506,80
14	215,60	343,00	494,20

#### 3.4.4 ACI 318/08 – Reação concentrada de cálculo

- Combinação última de cálculo:

$$U = 1,4.D + 1,7.L$$

Onde:

- $U$  é a reação concentrada de cálculo;
- $D$  é a ação permanente característica;
- $L$  é a ação variável característica;

Considerando os coeficientes de ponderação, para uma laje L1 com 24 cm de espessura:

$$U = 1,4.132,60 + 1,7.65,7 = 295,30 \text{ kN}$$

A tabela 3.7 apresenta os valores das reações concentradas de cálculo do pilar P2 obtidas para a Norma Européia para o carregamento das lajes L1, L2 e L3.

Tabela 3.7 – Reações concentradas de cálculo do pilar P2 pelo ACI 318

Espessura da laje (cm)	Laje L1	Laje L2	Laje L3
	$U$ (kN)	$U$ (kN)	$U$ (kN)
24	295,30	461,30	664,40
23	289,50	452,20	651,40
22	283,70	443,20	638,30
21	277,90	434,10	625,20
20	272,10	425,00	612,20
19	266,30	415,90	599,10
18	260,50	406,90	586,10
17	254,70	397,80	573,00
16	248,90	388,70	559,90
15	243,10	379,60	546,90
14	237,20	370,60	533,80

### 3.5 Armadura longitudinal de flexão

Calculou-se as áreas da armadura negativa de flexão dos pilares centrais nos dois sentidos (faixas 1 e 2) pelo processo estipulado pela NBR 6118 usando os momentos obtidos pelo método dos pórticos equivalentes do ACI.

Como o valor da resistência cilíndrica característica do concreto ( $f_{ck}$ ) usado é 30 MPa, faz-se a transformação para as resistências características do concreto da Norma Americana ( $f'_c$ ) e da Norma Britânica ( $f_{cu}$ ), como mostra a tabela 3.8.

Tabela 3.8 – Reações entre as resistências características do concreto

RESISTÊNCIAS CARACTERÍSTICAS DO CONCRETO		
$f_{ck}$	$f'_c$	$f_{cu}$
30,0 MPa	28,0 MPa	34,1 MPa

A tabela referente às áreas de armadura negativa longitudinal da Norma Americana não é apresentada pelo fato desta não contemplar o uso dessas taxas no seu método de cálculo de verificação à punção.

#### 3.5.1 Norma Brasileira

Na tabela 3.9 são apresentadas as áreas de armadura negativa calculada nas duas faixas externas dos pórticos centrais (faixas 1 e 2), ou seja, na região dos pilares, segundo as espessuras das lajes L1, L2 e L3.

Tabela 3.9 – Armaduras negativas por pilar (NBR)

Espessura da laje (cm)	Laje L1		Laje L2		Laje L3	
	$A_{s,x}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$A_{s,y}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$A_{s,x}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$A_{s,y}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$A_{s,x}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$A_{s,y}$ (cm <sup>2</sup> /m)
24	7,61	4,52	12,15	7,21	18,41	10,56
23	7,64	4,53	12,18	7,22	18,18	10,61
22	7,74	4,57	12,34	7,30	18,31	10,76
21	7,89	4,66	12,64	7,45	18,78	11,02
20	8,11	4,78	13,06	7,66	19,60	11,39
19	8,38	4,94	13,62	7,94	20,78	11,86
18	8,72	5,14	14,31	8,29	22,30	12,44
17	9,11	5,38	15,13	8,70	24,17	13,12
16	9,57	5,65	16,09	9,18	26,39	13,90
15	10,08	5,97	17,17	9,73	28,96	14,79
14	10,66	6,32	18,39	10,35	31,88	15,79

### 3.5.2 Norma Inglesa

Na tabela 3.10 são apresentadas as áreas de armadura negativa calculadas nas duas faixas externas, ou seja, na região dos pilares dos pórticos centrais (faixas 1 e 2), segundo as espessuras das lajes L1, L2 e L3 pela Norma Inglesa.

Tabela 3.10 – Armaduras negativas por pilar (BS)

Espessura da laje (cm)	Laje L1		Laje L2		Laje L3	
	$A_{s,x}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$A_{s,y}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$A_{s,x}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$A_{s,y}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$A_{s,x}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$A_{s,y}$ (cm <sup>2</sup> /m)
24	7,29	4,30	11,80	6,02	17,43	10,10
23	7,33	4,34	11,76	6,06	16,96	10,12
22	7,42	4,41	11,87	6,16	16,98	10,26
21	7,59	4,51	12,14	6,32	17,51	10,51
20	7,82	4,64	12,57	6,54	18,53	10,89
19	8,11	4,81	13,15	6,82	20,05	11,38
18	8,47	5,01	13,89	7,16	22,07	11,99
17	8,89	5,24	14,78	7,56	24,59	12,72
16	9,37	5,51	15,83	8,02	27,61	13,57
15	9,93	5,81	17,03	8,53	31,12	14,54
14	10,54	6,14	18,39	9,11	35,13	15,62

### 3.5.3 Norma Européia

Na tabela 3.11 são apresentadas as áreas de armadura negativa calculadas nas duas faixas externas, ou seja, na região dos pilares dos pórticos centrais (faixas 1 e 2), segundo as espessuras das lajes L1, L2 e L3 pela Norma Européia. Como o EUROCODE 2/04, sugere o uso de 60% a 80% do momento negativo para as faixas externas, foi adotada a mesma porcentagem dos momentos negativos usada na Norma Brasileira e Inglesa, que é 75% para as faixas externas.



Tabela 3.11 – Armaduras negativas por pilar (EUROCODE)

Espessura da laje (cm)	Laje L1		Laje L2		Laje L3	
	$A_{s,x}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$A_{s,y}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$A_{s,x}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$A_{s,y}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$A_{s,x}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$A_{s,y}$ (cm <sup>2</sup> /m)
24	7,63	4,53	12,22	7,23	18,59	10,60
23	7,66	4,57	12,24	7,24	18,39	10,63
22	7,76	4,64	12,41	7,32	18,59	10,77
21	7,92	4,74	12,71	7,47	19,18	11,04
20	8,14	4,87	13,15	7,68	20,16	11,43
19	8,42	5,04	13,74	7,97	21,53	11,94
18	8,77	5,24	14,47	8,33	23,31	12,57
17	9,17	5,47	15,33	8,75	25,47	13,32
16	9,64	5,73	16,34	9,25	28,03	14,19
15	10,18	6,02	17,49	9,82	30,99	15,18
14	10,77	6,35	18,78	10,45	34,33	16,29

## 4 VERIFICAÇÕES À PUNÇÃO

### 4.1 Verificação sem armadura de punção

Nessa primeira verificação, é feita a análise das normas quanto à resistência da ligação laje-pilar sem o uso de armaduras de punção, considerando a altura da região maciça da laje variando de 24 cm a 14 cm, bem como as três variações de vãos da laje.

Pelo efeito de simetria dos pilares centrais, onde pode ocorrer o efeito da punção, as cargas e esforços são idênticos nos quatro pilares, o que permite que a verificação seja feita em apenas um. No estudo foi considerado o pilar P2.

A altura útil  $d$  é determinada segundo as recomendações de cada norma. Segundo a Norma Brasileira, a obra pode ser classificada como agressividade ambiental III (ambiente marinho). Portanto considerando uma tolerância de execução em obras correntes ( $\Delta c$ ) igual a 10 mm, é adotado um cobrimento da armadura igual a 30 mm.

A resistência característica à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ) adotada no projeto foi de 30 MPa. As resistências à compressão características do concreto são dadas conforme a tabela 15.

Na seqüência são apresentadas as verificações da resistência à punção segundo as Normas Brasileira, Inglesa, Européia e Americana para lajes com configuração L1 e espessura de 24 cm.

#### 4.1.1 NBR 6118/03

Na tabela A 6118/03 sugere que sejam feitas duas verificações quando não for prevista armadura de punção:

- verificação da compressão do concreto, no contorno C ( $\tau_{Rd2} \geq \tau_{Sd}$ );
- verificação da punção, no contorno C', distante a 2d da face do pilar ( $\tau_{Rd1} \geq \tau_{Sd}$ ).

*Verificação do contorno C:*

- Cálculo da tensão resistente:

$$\tau_{Rd2} = 0,27 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd}$$

O coeficiente de resistência do concreto é dado por:

$$\alpha_v = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$$

A tensão resistente na face do pilar será então igual a:

$$\tau_{Rd2} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{30}{250}\right) \cdot \frac{30}{1,4} = 5,09 \text{ MPa}$$

- Cálculo da tensão solicitante:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{Sd}}{u \cdot d}$$

O perímetro de controle na face do pilar é dado por:

$$u = 2 \cdot (c1 + c2)$$

A tensão solicitante será igual a:

$$\tau_{sd} = \frac{275,70}{[2 \cdot (30 + 30)] \cdot 20} = 1,15 \text{ MPa}$$

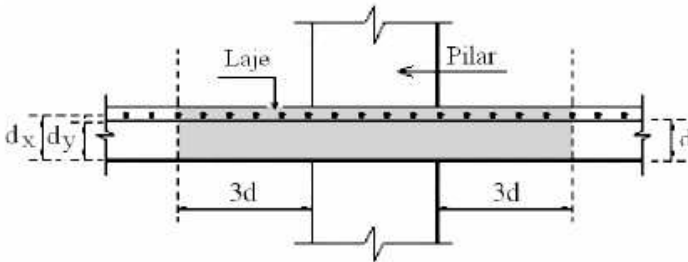
Como  $\tau_{Rd2} \geq \tau_{sd}$ , não há rompimento por punção na face do pilar.

*Verificação do contorno C':*

- Cálculo da tensão resistente:

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \cdot \left( 1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3}$$

Para o cálculo de  $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y}$ , que representam as taxas de armaduras ortogonais, nas direções x e y, respectivamente, deverá ser considerada uma faixa de largura igual à dimensão do pilar, mais 3d para cada lado, ou até a borda, se for mais próxima (figura 4.1).



**Figura 4.1 – Altura útil (d) da laje e seção para o cálculo da armadura ( $\rho$ )**

A taxa de armadura em cada direção é igual a:

$$\rho_x = \frac{7,61.cm^2}{20,5.cm} / 100.cm = 0,00373$$

$$\rho_y = \frac{4,52.cm^2}{19,5.cm} / 100.cm = 0,00236$$

Portanto a taxa de armadura geométrica longitudinal será:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} = 0,00297$$

Com a taxa  $\rho$ , conseguimos obter a tensão resistente  $\tau_{Rd1}$ :

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \cdot \left( 1 + \sqrt{\frac{20}{20}} \right) \cdot (100 \cdot 0,00297 \cdot 30)^{1/3} = 0,54 \text{ MPa}$$

- Cálculo da tensão solicitante:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u \cdot d} + \frac{K_1 \cdot M_{Sd1}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 \cdot M_{Sd2}}{W_{p2} \cdot d}$$

O perímetro de controle à distância de 2d da face do pilar é igual a:

$$u = 2 \cdot (c_1 + c_2) + 4 \cdot \pi \cdot d$$

$$u = 2 \cdot (30 + 30) + 4 \cdot \pi \cdot 20 = 371,33 \text{ cm}$$

O coeficiente K obtido pela norma terá o seguinte valor:

$$K_1 = K_2 = 0,6$$

O módulo de resistência plástica do perímetro crítico é calculado conforme:

$$W_p = \frac{c_1^2}{2} + c_1 c_2 + 4c_2 d + 16d^2 + 2\pi d c_1$$

$$W_{p1} = W_{p2} = 3920 \text{ cm}^2$$

A tensão solicitante é igual a:

$$\tau_{Sd} = \frac{275,70}{371,33 \cdot 20} + \frac{0,6 \cdot 950}{13920 \cdot 20} + \frac{0,6 \cdot 1700}{13920 \cdot 20} = 0,43 \text{ MPa}$$

Como  $\tau_{Rd1} = 0,55 \text{ MPa} > \tau_{Sd} = 0,43 \text{ MPa}$ , não haveria rompimento por punção no pilar P2 na distância de  $2d$  da face do pilar, considerando a laje L1 com espessura de 24 cm.

A tabela 4.1 apresenta os valores das tensões solicitantes e resistentes de punção para as três configurações de laje e suas espessuras variadas.

Tabela 4.1 – Tensões nas ligações laje-pilar segundo NBR 6118/03

Espessura da Laje	Pilar P2 – Laje L1				Espessura da laje				Pilar P2 – Laje L2				Espessura da laje				Pilar P2 – Laje L3			
	0d (MPa)		2d (MPa)		h (cm)		2d (MPa)		0d (MPa)		2d (MPa)		h (cm)		0d (MPa)		2d (MPa)			
	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente		
24	1,15	5,09	0,43	0,54	24	1,79	5,09	0,69	0,63	24	2,58	5,09	1,01	0,72						
23	1,18	5,09	0,46	0,56	23	1,85	5,09	0,74	0,65	23	2,66	5,09	1,10	0,74						
22	1,22	5,09	0,50	0,58	22	1,91	5,09	0,81	0,67	22	2,75	5,09	1,20	0,77						
21	1,27	5,09	0,55	0,60	21	1,98	5,09	0,89	0,70	21	2,85	5,09	1,31	0,80						
20	1,31	5,09	0,60	0,63	20	2,05	5,09	0,97	0,74	20	2,96	5,09	1,45	0,84						
19	1,37	5,09	0,66	0,66	19	2,14	5,09	1,08	0,77	19	3,08	5,09	1,60	0,89						
18	1,43	5,09	0,74	0,70	18	2,24	5,09	1,20	0,82	18	3,22	5,09	1,79	0,95						
17	1,51	5,09	0,83	0,74	17	2,35	5,09	1,35	0,87	17	3,39	5,09	2,02	1,01						
16	1,59	5,09	0,94	0,79	16	2,49	5,09	1,53	0,94	16	3,58	5,09	2,29	1,09						
15	1,69	5,09	1,07	0,85	15	2,64	5,09	1,76	1,01	15	3,81	5,09	2,63	1,18						
14	1,81	5,09	1,24	0,92	14	2,83	5,09	2,04	1,09	14	4,08	5,09	3,06	1,29						

- - Espessuras de laje em que não é necessário o uso de armadura de punção;  
- - Espessuras de laje em que é necessário o uso de armadura de punção.

4.1.2 BS 8110/97

A Norma Inglesa sugere que seja feita a verificação no perímetro crítico a  $1,5d$  da face do pilar, quando não forem previstas armaduras de punção.

Como são levadas em conta apenas as reações no cálculo da punção pela Norma Inglesa, estes são multiplicados por um coeficiente de majoração para cada posição do pilar na laje e sentido da flexão.

No caso de pilares internos, esse coeficiente tem valor igual a 1,15.

- Reação efetiva de cálculo:

A reação efetiva de cálculo para o pilar P2 é igual a:

$$V_{eff} = 1,15.V = 1,15.288,80 = 332,10 \text{ kN}$$

Deve ser levada em conta a área total de armadura de flexão que passa pela zona de falha e que se estende além dela no mínimo a “ $d$ ” ou a 12 vezes o diâmetro da barra para cada lado.

- Taxa de armadura de flexão:

A porcentagem de armadura de flexão usada no cálculo da punção é dada por:

$$\frac{(100.A_s)}{b_v.d} = \frac{0,1 \left[ \left( \frac{A_{s,x}}{d_x} \right) + \left( \frac{A_{s,y}}{d_y} \right) \right]}{2}$$

onde:

$d_{x,y}$  é a altura útil da laje em milímetros em cada uma das direções;

$A_{s,x,y}$  é a taxa de armadura de flexão em milímetros quadrados por metro em cada uma das direções.



Para cálculo da tensão resistente deve ser levada em conta a armadura de flexão na região  $1,5d + d$ .

A área útil da armadura de flexão já calculada é dada por:

$$A_{s,x} = 7,29.cm^2 / m = 729 \text{ mm}^2 / m$$

$$A_{s,y} = 4,30.cm^2 / m = 430 \text{ mm}^2 / m$$

A armadura útil de flexão média será igual a:

$$\frac{100.A_s}{b_v.d} = 0,1 \frac{\left[ \left( \frac{729}{204} \right) + \left( \frac{430}{191} \right) \right]}{2} = 0,291 \text{ mm} / m$$

*Verificação na face do pilar:*

- Cálculo da resistência máxima às tensões de punção na face do pilar:

A resistência máxima a tenção de cisalhamento de punção na face do pilar  $v_{\max}$  não deve ser maior que:

$$\begin{cases} 0,8 \cdot \sqrt{f_{cu}} \text{ ou} \\ 5.MPa \end{cases}$$

onde:

$f_{cu}$  é a resistência característica cúbica do concreto à compressão em MPa.

Neste exemplo o valor calculado de  $f_{cu}$  é 34,2 MPa, portanto a tensão máxima resistente na face do pilar é:

$$v_{c,face} = 0,8 \cdot \sqrt{34,2} = 4,68 \text{ MPa}$$

O cálculo da tensão resistente na face do pilar  $v_{c,face}$  nunca deve ser inferior a tensão solicitante  $v_{max}$ , caso contrário deve-se modificar o projeto.

$$v_{max} = \frac{V_{eff}}{u_0 \cdot d} = \frac{322100}{4.300.200} = 1,384 \text{ MPa} < v_{c,face} = 4,68 \text{ MPa}$$

*Verificação a 1,5d da face do pilar:*

- Cálculo da tensão resistente:

É possível calcular a tensão resistente à punção pela tabela 2, ou por:

$$v_c = 0,79 \cdot \{100 \cdot A_s / (b_v \cdot d)\}^{1/3} \cdot (400/d)^{1/4} / \gamma_m$$

Onde:

$\gamma_m = 1,25$  - Coeficiente de ponderação do concreto à tração;

$$\frac{100 \cdot A_s}{b_v \cdot d} \leq 3;$$

$$\left(\frac{400}{d}\right)^{1/4} \geq 0,67 \text{ para ligações sem armadura de punção}$$

$$\left(\frac{400}{d}\right)^{1/4} \geq 1 \text{ para ligações com armadura de punção que}$$

forneça resistências  $\geq 0,4$  MPa;

Para concretos com resistências maiores que 25 MPa, o valor de  $v_c$  pode ser multiplicado por  $\left(\frac{f_{cu}}{25}\right)^{1/3}$ , sendo que  $f_{cu}$  deve ser  $\leq 40$  MPa.

O valor de  $v_c$  é igual a:

$$v_c = 0,79 \cdot \{0,291\}^{1/3} \cdot \frac{(400/200)^{1/4}}{1,25} \cdot \left(\frac{34,2}{25}\right)^{1/3} = 0,550 \text{ MPa}$$

- Cálculo da tensão solicitante:

A tensão de cisalhamento nominal  $v$  do projeto apropriado a um perímetro particular é calculado da seguinte equação:

$$v = \frac{V}{u \cdot d}$$

Portanto tem-se que a tensão solicitante a 1,5d da face do pilar é igual a:

$$v = \frac{332100}{4 \cdot (3 \cdot 200 + 300) \cdot 200} = 0,463 \text{ MPa}$$

Desde que a tensão solicitante  $v$  seja menor que a tensão resistente  $v_c$ , nenhum reforço de armadura de punção é exigido.

Como a tensão solicitante é menor que a resistente, não são necessárias mais verificações.

$$0,463 < 0,550 \rightarrow v < v_c \therefore OK$$

A tabela 4.2 apresenta os valores das tensões solicitantes e resistentes de punção para as três configurações de laje e suas espessuras variadas.

Tabela 4.2 – Tensões nas ligações laje-pilar segundo BS 8110/97

Espessura da Laje	Pilar P2 – Laje L1				Pilar P2 – Laje L2				Pilar P2 – Laje L3			
	0d (MPa)		1.5d (MPa)		0d (MPa)		1.5d (MPa)		0d (MPa)		1.5d (MPa)	
	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente
h (cm)	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	
Espe <span>ssura da laje</span> h (cm)	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	
	1,38	1,43	1,48	1,53	1,59	1,66	1,74	1,83	1,93	2,06	2,21	
	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	
	0,46	0,49	0,53	0,57	0,61	0,66	0,72	0,79	0,88	0,98	1,11	
	0,55	0,57	0,59	0,62	0,65	0,68	0,71	0,76	0,81	0,87	0,94	
	2,16	2,17	2,24	2,33	2,42	2,53	2,65	2,80	2,96	3,16	3,39	
	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	
	0,72	0,75	0,80	0,86	0,93	1,01	1,10	1,21	1,35	1,50	1,70	
	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	4,68	
	3,11	3,21	3,32	3,44	3,58	3,73	3,91	4,11	4,35	4,64	4,97	
	1,04	1,11	1,19	1,27	1,38	1,49	1,63	1,79	1,98	2,21	2,49	
	0,74	0,76	0,78	0,82	0,86	0,92	0,98	1,05	1,14	1,24	1,36	

■ - Espessuras de laje em que não é necessário o uso de armadura de punção;  
■ - Espessuras de laje em que é necessário o uso de armadura de punção.

## 4.1.3 ACI 318/08

A Norma Americana sugere que seja feita a verificação no perímetro crítico a  $0,5d$  da face do pilar, onde  $d$  é a altura útil da laje.

*Verificação do contorno a  $0,5d$  da face do pilar:*

- Cálculo da tensão resistente:

Considerando a laje L1, com espessura de 24 cm, a altura útil  $d$  da laje será:

$$d = 20 \text{ cm}$$

O perímetro crítico  $b_0$  é igual a:

$$b_0 = 4.(30 + 20) = 200 \text{ cm}$$

A relação entre o maior e o menor lado  $\beta_c$  do pilar P2 é dado por:

$$\beta_c = \frac{c_1}{c_2} = \frac{30}{30} = 1$$

A tensão resistente no perímetro crítico  $v_c$  é dada pelo menor dos três valores multiplicado pelo coeficiente de ponderação  $\phi = 0,85$ :

$$v_c = \left( 0,167 + \frac{0,335}{\beta_c} \right) \sqrt{f'_c} = 2,56 \text{ MPa}$$

$$v_c = \left( \frac{\alpha.d}{b_0} + 0,167 \right) \sqrt{f'_c} = \left( \frac{3,35.20}{200} + 0,167 \right) \sqrt{28}$$

$$v_c = 2,62 \text{ MPa}$$

$$v_c = 0,335\sqrt{f'_c} = 1,77 \text{ MPa}$$

Portanto a tensão resistente  $v_u$  é de:

$$v_c = 0,85.v_{c,\min} = 0,85.1,77 = 1,51 \text{ MPa}$$

- Cálculo da tensão solicitante  $v_u$  :

$$v_u = \frac{V_u}{A_c} + \frac{\gamma_v.M_{u,x}.c_{AB}}{J_{c,x}} + \frac{\gamma_v.M_{u,y}.c_{CD}}{J_{c,y}}$$

Onde a área do concreto  $A_c$  é:

$$A_c = b_0.d = 200.20 = 4000 \text{ cm}^2$$

No caso de pilar interno com seção quadrada, o coeficiente  $\gamma_v$  tem valor igual a 0,4. Isto significa uma parcela de 40% do momento transmitida pela excentricidade da força cortante.

$J_c$  é o momento de inércia da seção crítica em relação ao eixo em torno do qual o momento atua. Como o pilar P2 é quadrado,  $J_c$  é igual nos dois sentidos e é calculado por:

$$J_c = \frac{d(c1 + d^3)}{6} + \frac{(c2 + d)d^3}{6} + \frac{d(c2 + d)(c1 + d)^2}{2} = 1.685.125$$

$$J_c = 1.685.125 \text{ cm}^4$$

A tensão solicitante é igual a:

$$v_u = \frac{267,60}{4000} + \frac{0,4.950.25}{1685125} + \frac{0,4.1710.25}{1685125} = 0,084 \frac{kN}{cm^2}$$

Como  $v_c = 1,51 \text{ MPa} > v_u = 0,84 \text{ MPa}$ , não há necessidade do uso de armadura de punção no pilar P2, considerando a laje L1 com espessura de 24 cm.

A tabela 4.3 apresenta os valores das tensões solicitantes e resistentes de punção para as três configurações de laje e suas espessuras variadas.

Tabela 4.3 – Tensões nas ligações laje-pilar segundo ACI 318/08

Espessura da Laje		Pilar P2 – Laje L1		Espessura da laje		Pilar P2 – Laje L2		Espessura da laje		Pilar P2 – Laje L3	
h (cm)		0,5d (MPa)		h (cm)		0,5d (MPa)		h (cm)		0,5d (MPa)	
Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente
24	1,51	0,92	1,51	24	1,51	1,46	1,51	24	2,21	2,21	1,51
23	1,51	0,98	1,51	23	1,51	1,57	1,51	23	2,38	2,38	1,51
22	1,51	1,06	1,51	22	1,51	1,68	1,51	22	2,57	2,57	1,51
21	1,51	1,14	1,51	21	1,51	1,82	1,51	21	2,78	2,78	1,51
20	1,51	1,24	1,51	20	1,51	1,97	1,51	20	3,03	3,03	1,51
19	1,51	1,35	1,51	19	1,51	2,15	1,51	19	3,31	3,31	1,51
18	1,51	1,48	1,51	18	1,51	2,36	1,51	18	3,63	3,63	1,51
17	1,51	1,63	1,51	17	1,51	2,60	1,51	17	4,02	4,02	1,51
16	1,51	1,81	1,51	16	1,51	2,89	1,51	16	4,47	4,47	1,51
15	1,51	2,02	1,51	15	1,51	3,23	1,51	15	5,02	5,02	1,51
14	1,51	2,28	1,51	14	1,51	3,65	1,51	14	5,68	5,68	1,51

- ■ - Espessuras de laje em que não é necessário o uso de armadura de punção;  
- ■ - Espessuras de laje em que é necessário o uso de armadura de punção.



#### 4.1.4 EUROCODE 2/04

O EUROCODE 2/04 sugere que sejam feitas duas verificações quando não for prevista armadura de punção:

- verificação da compressão do concreto, no perímetro  $u_0$  ( $v_{Rd,max} \geq v_{Ed}$ );
- verificação da punção, no perímetro  $u_1$ , distante a 2d da face do pilar ( $v_{Rd,c} \geq v_{Ed}$ ).

A primeira verificação é feita considerando a laje com espessura igual a 24 cm na região maciça e vãos com configuração da laje L1.

*Verificação do perímetro  $u_0$ :*

- Cálculo da tensão resistente:

$$V_{Rd,max} = 0,5 \cdot v \cdot f_{cd}$$

O coeficiente de efetividade do concreto é dado por:

$$v = 0,6 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) = 0,6 \cdot \left(1 - \frac{30}{250}\right) = 0,53$$

A tensão resistente na face do pilar será então igual a:

$$v_{Rd,max} = 0,5 \cdot 0,53 \cdot \frac{30}{1,5} = 5,28 \text{ MPa}$$

- Cálculo da tensão solicitante:

$$v_{Ed} = \beta \frac{F_{Ed}}{u_0 \cdot d}$$

O perímetro de controle na face do pilar é dado por:

$$u = 2.(c1 + c2)$$

Para pilares retangulares com momentos nas duas direções,  $\beta$  é dado por:

$$\beta = 1 + 1,8 \sqrt{\left[ \left( \frac{\frac{M_x}{F_{Ed}}}{b_y} \right)^2 + \left( \frac{\frac{M_y}{F_{Ed}}}{b_x} \right)^2 \right]}$$

$$\beta = 1 + 1,8 \sqrt{\left[ \left( \frac{\frac{950}{267,60}}{110} \right)^2 + \left( \frac{\frac{1710}{267,60}}{110} \right)^2 \right]} = 1,12$$

A tensão solicitante será igual a:

$$v_{Ed} = 1,12 \frac{267,60}{2.(30 + 30).20} = 1,25 \text{ MPa}$$

Como  $v_{Rd,max} \geq v_{Ed}$ , não há rompimento por punção na face do pilar.

*Verificação do perímetro  $u_1$ :*

- Cálculo da tensão resistente:

$$v_{Rd,c} = 0,12 \cdot \left( 1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} \geq 0,035 \cdot \left( 1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right)^{3/2} \cdot f_{ck}^{1/2}$$

A taxa de armadura  $\rho$  em cada direção é igual a:

$$\rho_x = \frac{7,63.cm^2}{20,5.cm} / 100.cm = 0,00373$$

$$\rho_y = \frac{4,53.cm^2}{19,5.cm} / 100.cm = 0,00236$$

Portanto a taxa de armadura geométrica longitudinal será:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} = 0,00297$$

Com a taxa  $\rho$ , conseguimos obter a tensão resistente  $\tau_{Rd1}$ :

$$v_{Rd.c} = 0,12 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{20}}\right) \cdot (100 \cdot 0,00297 \cdot 30)^{1/3} \geq 0,035 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{20}}\right) \cdot 30^{1/2}$$

$$v_{Rd.c} = 0,54 \text{ MPa}$$

- Cálculo da tensão solicitante:

$$v_{Ed} = \beta \frac{F_{Ed}}{u_1 \cdot d}$$

O perímetro de controle à distância de  $2d$  da face do pilar é igual a:

$$u_1 = 2 \cdot (c1 + c2) + 4 \cdot \pi \cdot d$$

$$u_1 = 2 \cdot (30 + 30) + 4 \cdot \pi \cdot 20 = 371,33 \text{ cm}$$

A tensão solicitante é igual a:

$$v_{Ed} = 1,12 \frac{267,60}{371,33.20} = 0,40 \text{ MPa}$$

Como  $v_{Rd,c} = 0,54 \text{ MPa} > v_{Ed} = 0,40 \text{ MPa}$ , não há rompimento por punção no pilar P2 na distância de  $2d$  da face do pilar, considerando a laje L1 com espessura de 24 cm.

A tabela 4.4 apresenta os valores das tensões solicitantes e resistentes de punção para as três configurações de laje e suas espessuras variadas.

Tabela 4.4 – Tensões nas ligações laje-pilar segundo EUROCODE 2/08

Espessura da Laje	Pilar P2 – Laje L1				Pilar P2 – Laje L2				Pilar P2 – Laje L3							
	0 <sub>0d</sub> (MPa)		2 <sub>d</sub> (MPa)		0 <sub>0d</sub> (MPa)		2 <sub>d</sub> (MPa)		0 <sub>0d</sub> (MPa)		2 <sub>d</sub> (MPa)					
	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente	Solicitante	Resistente				
h (cm)	1,25	5,28	0,40	0,54	2,04	5,28	0,66	0,58	2,04	5,28	0,66	0,58	3,00	5,28	0,97	0,67
24	1,30	5,28	0,44	0,55	2,13	5,28	0,71	0,60	2,13	5,28	0,71	0,60	3,06	5,28	1,02	0,68
23	1,37	5,28	0,47	0,56	2,24	5,28	0,78	0,62	2,24	5,28	0,78	0,62	3,29	5,28	1,14	0,71
22	1,44	5,28	0,52	0,58	2,35	5,28	0,85	0,65	2,35	5,28	0,85	0,65	3,46	5,28	1,25	0,74
21	1,52	5,28	0,57	0,59	2,49	5,28	0,93	0,68	2,49	5,28	0,93	0,68	3,67	5,28	1,37	0,78
20	1,62	5,28	0,63	0,61	2,64	5,28	1,03	0,72	2,64	5,28	1,03	0,72	3,90	5,28	1,52	0,83
19	1,73	5,28	0,70	0,65	2,83	5,28	1,15	0,76	2,83	5,28	1,15	0,76	4,18	5,28	1,69	0,88
18	1,86	5,28	0,79	0,69	3,04	5,28	1,29	0,81	3,04	5,28	1,29	0,81	4,50	5,28	1,91	0,94
17	2,01	5,28	0,89	0,73	3,30	5,28	1,46	0,87	3,30	5,28	1,46	0,87	4,89	5,28	2,17	1,02
16	2,20	5,28	1,02	0,79	3,60	5,28	1,68	0,94	3,60	5,28	1,68	0,94	5,36	5,28	2,49	1,11
15	2,43	5,28	1,19	0,85	4,00	5,28	1,95	1,02	4,00	5,28	1,95	1,02	5,93	5,28	2,90	1,21
14																

■ - Espessuras de laje em que não é necessário o uso de armadura de punção;

■ - Espessuras de laje em que é necessário o uso de armadura de punção.

## 4.2 Verificação com armadura de punção

Para a análise da ligação com o uso da armadura de punção, foram calculadas as áreas totais de armadura de punção necessárias para resistir aos esforços nas lajes estudadas.

Nessa verificação, as normas apresentam alguns limitantes que influenciam diretamente na área total e no número de perímetros da armadura de punção, que são:

- O número mínimo de perímetros de armadura de punção recomendado pela Norma Brasileira é três, enquanto que as outras normas permitem um mínimo de dois perímetros de armadura transversal;
- A distância máxima entre o primeiro perímetro de armadura transversal e a face do pilar é  $0,5d$  em todas as normas, com exceção da Norma Européia, que é de  $0,3d$ ;
- A distância máxima entre os perímetros de armadura transversal adotada por todas as normas é de  $0,75d$ , com exceção da Norma Americana, que adota a distância de  $0,5d$  entre os perímetros;
- A Norma Brasileira, Européia e Americana limitam a distância máxima entre pinos num mesmo perímetro em  $2d$ , enquanto que na Norma Inglesa esse valor é limitado a  $1,5d$ .

Nesse item verificou-se o número de perímetros e a área de armadura transversal necessária para resistir aos esforços segundo cada norma. Todos os cálculos foram feitos usando aço CA-50.

Na seqüência são apresentadas as verificações da resistência à punção segundo as Normas Brasileira, Inglesa, Européia e Americana para lajes com configuração L1.

### 4.2.1 NBR 6118/03

Para calcular a armadura necessária para resistir à punção em uma laje com espessura igual 18 cm, supôs-se a armadura radial, respeitando o espaçamento máximo entre pinos de  $2d$  no terceiro perímetro.

Para a laje de 18 cm, a altura útil é igual a:

$$d = 14 \text{ cm}$$

Portanto o espaçamento máximo entre pinos será:

$$2d = 2.14 = 28 \text{ cm}$$

O número mínimo de pinos necessário no terceiro perímetro é dado pela expressão:

$$\frac{2\pi \cdot \left( \left( \frac{c_1 + c_2}{4} \right) + 0,5d + (n_p - 1) \cdot 0,75d \right)}{n_b} \leq 2d$$

onde:

$n_p$  é o número de perímetros de armadura de punção;

$n_b$  é o número de pinos por perímetro.

O número mínimo de pinos é igual a:

$$\frac{2\pi \cdot \left( \left( \frac{30 + 30}{4} \right) + 0,5 \cdot 14 + (3 - 1) \cdot 0,75 \cdot 14 \right)}{30} = 9,2 \rightarrow 10$$

pinos por perímetro.

Para lajes com mais de 15 cm, a NBR 6118/03 permite que se faça uma interpolação linear para se obter o valor de  $f_{ywd}$ , que varia de 300 MPa a 435 MPa, para lajes de 15 cm a 35 cm, respectivamente.

Portanto, para uma laje de 18 cm, por interpolação linear, chegamos ao seguinte valor de  $f_{ywd}$ :

$$\frac{435 - 300}{35 - 15} = \frac{435 - f_{ywd}}{35 - 18} \rightarrow f_{ywd} = 320 \text{ MPa}$$

Adotando diâmetro de 5 mm nas barras transversais, a área de aço em cada linha é dada por:

$$A_{sw,n} = 10 \cdot 0,19 = 1,96 \text{ cm}^2$$

Portanto nos três perímetros, a área total é igual a:

$$A_{sw} = 3 \cdot 1,96 = 5,89 \text{ cm}^2$$

*Verificação na região armada:*

A nova tensão resistente, agora na região armada, é dada por:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd3} = 0,10 \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} + \left( 1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot \sin \alpha \frac{1}{u \cdot d} \right)$$

Então tem-se que:

$$\tau_{Rd3} = 0,10 \left( 1 + \sqrt{\frac{20}{14}} \right) \cdot (100 \cdot 0,00486 \cdot 30)^{1/3} + \left( 1,5 \cdot \frac{14}{10} \cdot 1,96 \cdot 320 \cdot \frac{1}{490,7 \cdot 14} \right)$$

$$\tau_{Rd3} = 0,86 \text{ MPa}$$

Portanto, na região armada tem-se que:

$$0,74 < 0,86 \rightarrow \tau_{sd} < \tau_{Rd3} \therefore \text{OK}$$

*Verificação no contorno C'' (2d da região armada):*

A tensão resistente é igual a:



$$\tau_{Rd1} = 0,13 \cdot \left( 1 + \sqrt{\frac{20}{14}} \right) \cdot (100 \cdot 0,00486 \cdot 30)^{1/3} = 0,70 \text{ MPa}$$

A tensão solicitante é dada por:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u \cdot d} + K_1 \cdot \frac{M_{Sd1}}{W_{p1} \cdot d} + K_2 \cdot \frac{M_{Sd2}}{W_{p2} \cdot d}$$

A distância do terceiro perímetro de armadura de punção à face do pilar é:

$$p = 0,5d + 0,75d + 0,75d = 27 \text{ cm}$$

O perímetro  $u$  a  $2d$  da região armada é dado por:

$$u = 2(c_1 + c_2) + 4\pi d + 2\pi p = 2(30 + 30) + 4 \cdot \pi \cdot 14 + 2 \cdot \pi \cdot 27$$

$$u = 465,6 \text{ cm}$$

O módulo de resistência plástica do perímetro localizado a  $2d$  da região armada é dado por:

$$W_p = \frac{c_1^2}{2} + c_1 c_2 + 4c_2 d + 16d^2 + 2\pi d c_1 + 2c_2 p + 16dp + 4p^2 + \pi c_1 p$$

∴

$$W_p = 21934 \text{ cm}^2$$

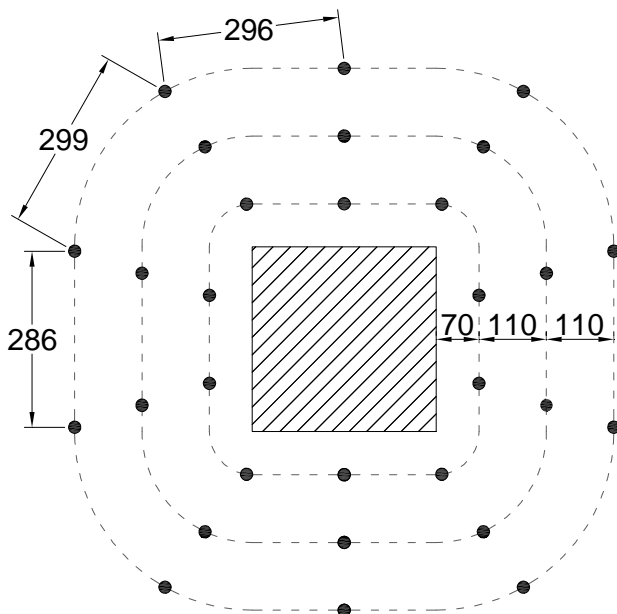
A tensão solicitante igual a:

$$\tau_{Sd} = \frac{240,8}{465,6 \cdot 14} + 0,60 \cdot \frac{920}{21934 \cdot 14} + 0,60 \cdot \frac{2340}{21934 \cdot 14} = 0,43 \text{ MPa}$$

Portanto, no perímetro a  $2d$  da região armada, tem-se que:

$$0,70 > 0,43 \rightarrow \tau_{Rd1} > \tau_{Sd} \therefore OK$$

*Disposição da armadura de punção:*



**Figura 4.2 – Arranjo da armadura de punção para o pilar P2, segundo a NBR 6118/03**

Dimensões em mm

Tabela 4.5 – Tensões e armadura transversal nas ligações laje-pilar segundo NBR 6118/03

Espessura da Laje	Pilar P2 – Laje L1			Espessura da laje	Pilar P2 – Laje L2			Espessura da laje	Pilar P2 – Laje L3								
	Armadura punção	2d (MPa)			Armadura punção	2d (MPa)			Armadura punção	2d (MPa)							
		n°camadas	Área (cm²)			Solicitante	Resistente			n°camadas	Área (cm²)	Solicitante	Resistente	n°camadas	Área (cm²)	Solicitante	Resistente
h (cm)				h (cm)				h (cm)									
24	-	-	0,43	0,54	24	3	6,48	0,69	0,69	0,69	24	3	14,73	1,01	1,03		
23	-	-	0,46	0,56	23	3	7,07	0,74	0,75	0,75	23	3	15,32	1,10	1,11		
22	-	-	0,55	0,58	22	3	7,66	0,81	0,81	0,81	22	3	15,90	1,20	1,20		
21	-	-	0,55	0,60	21	3	8,25	0,89	0,89	0,89	21	3	16,50	1,31	1,32		
20	-	-	0,60	0,63	20	3	10,01	0,97	1,00	1,00	20	3	18,70	1,45	1,46		
19	-	-	0,66	0,66	19	3	10,60	1,08	1,11	1,11	19	4	26,18	1,60	1,63		
18	3	5,89	0,74	0,86	18	3	10,60	1,20	1,20	1,20	18	4	27,43	1,79	1,84		
17	3	5,89	0,83	0,93	17	3	11,20	1,35	1,36	1,36	17	5	32,29	2,02	2,04		
16	3	6,48	0,94	1,02	16	3	12,96	1,53	1,54	1,54	16	5	38,97	2,29	2,31		
15	3	6,48	1,07	1,12	15	4	18,06	1,76	1,76	1,76	15	5	40,52	2,63	2,67		
14	3	6,48	1,24	1,26	14	4	18,85	2,04	2,05	2,05	14	6	48,63	3,06	3,06		

■ - Espessuras de laje em que não é necessário o uso de armadura de punção;  
■ - Espessuras de laje em que é necessário o uso de armadura de punção.

4.2.2 BS 8110/97

Segundo a Norma Inglesa, quando o valor solicitante  $v$  estiver compreendido entre:

$$v_c < v < 2.v_c,$$

o modelo estrutural é válido, porém deve-se usar armadura transversal de punção.

Nos casos onde  $v < 1,6.v_c$ , a área total de armadura de punção  $\sum A_{sv}$  necessária é dada pelo maior dos valores:

$$\sum A_{sv} \sin \alpha \geq \begin{cases} \frac{(v - v_c).u.d}{0,95.f_{yv}} \\ \text{ou} \\ \frac{0,4.u.d}{0,95.f_{yv}} \end{cases}$$

onde:

$\sum A_{sv}$  é a área de armadura de punção necessária;

$\alpha$  é o ângulo entre a armadura de punção e o plano da laje.

$f_{yv}$  é a tensão de escoamento do aço da armadura de punção (não deve ser maior que 460 MPa);

Nos casos onde  $1,6.v_c < v < 2.v_c$ , a área total de armadura de punção  $\sum A_{sv}$  necessária é dada pelo maior dos valores:

$$\sum A_{sv} \sin \alpha \geq \begin{cases} \frac{5(0,7.v - v_c).u.d}{0,95.f_{yv}} \\ ou \\ \frac{0,4.u.d}{0,95.f_{yv}} \end{cases}$$

Quando  $v > 2.v_c$  deve-se adotar um outro modelo estrutural.

Para calcular a armadura necessária para resistir à punção em uma laje com espessura igual 18cm, supôs-se a armadura de punção disposta em formato retangular ao longo dos perímetros distantes 0,5d e 1,25d da face do pilar, respeitando o espaçamento máximo de 1,5d entre pinos nos dois perímetros.

Para a laje de 18 cm, a altura útil é igual a:

$$d = 14 \text{ cm}$$

Portanto o espaçamento máximo entre pinos deverá ser:

$$1,5d = 1,5.14 = 21 \text{ cm}$$

O número mínimo de barras transversais necessário no primeiro perímetro (0,5d) é dado pela expressão:

$$n_{b,0,5d} = \frac{u_{0,5d}}{1,5.d} + 2$$

O número de pinos  $n_b$  será igual a:

$$n_{b,0,5d} = \frac{4.(30 + 14)}{21} + 2 \cong 11 \text{ pinos}$$

O número mínimo de barras transversais necessário no segundo perímetro (1,25d) é dado pela expressão:

$$n_{b,1.25d} = \frac{u_{1,25d}}{1,5.d} + 2$$

Portanto o número de pinos  $n_b$  será igual a:

$$n_{b,1.25d} = \frac{4.(30 + 2,5.14)}{21} + 2 \cong 15 \text{ pinos}$$

O número total de pinos é:

$$n_b = n_{b,0.5d} + n_{b,1.25d} = 11 + 15 = 26 \text{ pinos}$$

A BS 8110/97, ao contrário da Norma Brasileira, não faz considerações a respeito da resistência da armadura de punção relacionada à altura da laje. A Norma Inglesa apenas limita o valor resistente de escoamento em 460 MPa. Portanto, para a laje de 18 cm, o valor de  $f_{yv}$  adotado será :

$$f_{yv} = 460 \text{ MPa}$$

A área por pino (5 mm) é:

$$A_{sv} = \frac{0,5^2 \cdot \pi}{4} = 0,196 \text{ cm}^2$$

A área de aço total é dada por:

$$\sum A_{sv} = 26 \cdot 0,196 = 5,11 \text{ cm}^2$$

*Verificação da área de armadura de punção necessária:*

Para a laje de 18 cm, a tensão solicitante  $v$  é:

$$v = 0,72 \text{ MPa}$$

A tensão resistente  $v_c$  é:

$$v_c = 0,71 \text{ MPa}$$

Verificação para  $v < 1,6.v_c$ :

$$0,72 < 1,6.0,71 \rightarrow \text{OK}$$

Então deve-se usar o maior dos valores:

$$\sum A_{sv,\min} \sin 90 \geq \begin{cases} \frac{(0,72 - 0,71).254.14}{0,95.460} = 0,082.cm^2 \\ \text{ou} \\ \frac{0,4.254.14}{0,95.460} = 3,25.cm^2 \end{cases}$$

Como a área total de aço estipulada é superior à mínima necessária, o número de pinos adotados é válido para resistir aos esforços.

$$\sum A_{sv} > \sum A_{sv,\min} \rightarrow 5,11.cm^2 > 3,25.cm^2 \therefore \text{OK}$$

O número de pinos no primeiro perímetro de armadura de punção não deve ser menor que 40% que o mínimo calculado. Portanto:

$$\sum A_{sv,0.5d} > \frac{40}{100} \sum A_{sv,\min} \rightarrow$$

$$11,0,196.cm^2 > 0,40.3,25.cm^2$$

$$2,16.cm^2 > 1,30.cm^2 \therefore \text{OK}$$

Verificação no perímetro  $2,25d$  (distante  $0,75d$  da última verificação):

A tensão resistente é igual a:

$$v_c = 0,79 \cdot \{0,485\}^{1/3} \cdot \frac{(400/140)^{1/4}}{1,25} \cdot \left(\frac{34}{25}\right)^{1/3}$$

$$v_c = 0,715 \text{ MPa}$$

A tensão solicitante é dada por:

$$v = \frac{V}{u_{2,25d} \cdot d} = \frac{254000}{4 \cdot (2 \cdot 2,25 \cdot 140 + 300) \cdot 140}$$

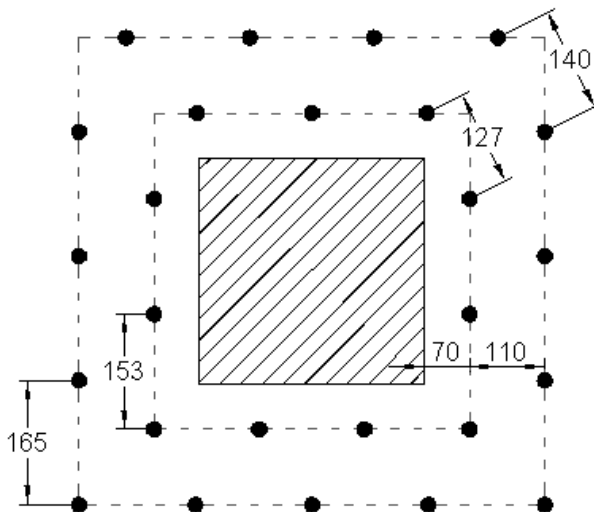
$$v_c = 0,561 \text{ MPa}$$

Portanto, no perímetro a  $2,25d$  da face do pilar (a  $0,75d$  da última verificação), tem-se que:

$$0,72 > 0,56 \rightarrow v_c > v \therefore OK$$



*Disposição da armadura de punção:*



**Figura 4.3 – Arranjo de conectores tipo pino para o pilar P2, segundo a BS 8110/97**

Dimensões em mm

Tabela 4.6 – Tensões e armadura transversal nas ligações laje-pilar

Espessura da Laje	Pilar P2 – Laje L1		Espessura da laje	Pilar P2 – Laje L2		Espessura da laje	Pilar P2 – Laje L3							
	Armadura punção	1,5 $\sigma$ (MPa)		Armadura punção	1,5 $\sigma$ (MPa)		Armadura punção	1,5 $\sigma$ (MPa)						
h (cm)	n <sup>o</sup> camadas	Área (cm <sup>2</sup> )	Solicitante Resistente	h (cm)	n <sup>o</sup> camadas	Área (cm <sup>2</sup> )	Solicitante Resistente	h (cm)	n <sup>o</sup> camadas	Área (cm <sup>2</sup> )	Solicitante Resistente			
24	-	-	0,46	0,55	24	2	6,68	0,72	1,04	24	3	11,58	1,04	1,14
23	-	-	0,49	0,57	23	2	6,09	0,75	1,06	23	3	10,60	1,11	1,15
22	-	-	0,53	0,59	22	2	5,50	0,80	1,07	22	3	9,62	1,19	1,18
21	-	-	0,57	0,62	21	2	5,11	0,86	1,11	21	3	9,23	1,27	1,27
20	-	-	0,61	0,65	20	2	4,71	0,93	1,15	20	3	9,42	1,38	1,38
19	-	-	0,66	0,68	19	2	4,71	1,01	1,24	19	4	14,53	1,49	1,56
18	2	5,11	0,72	1,27	18	3	8,84	1,10	1,38	18	4	15,71	1,63	1,78
17	2	5,11	0,79	1,38	17	3	8,84	1,21	1,50	17	4	16,30	1,79	2,03
16	2	5,50	0,88	1,57	16	3	9,42	1,35	1,70	16	4	17,48	1,98	2,35
15	2	5,50	0,98	1,74	15	3	9,42	1,50	1,89	15	4	18,06	2,21	2,72
14	2	5,89	1,11	2,01	14	4	14,92	1,70	2,18	14	n/d	n/d	2,49	n/d

- ■ Espessuras de laje em que não é necessário o uso de armadura de punção;  
- ■ Espessuras de laje em que é necessário o uso de armadura de punção.

4.2.3 ACI 318/08

No dimensionamento à punção pela Norma Americana serão adotados pinos transversais com resistência característica máxima do aço igual a 400 MPa, conforme recomendações da norma.

Será adotada uma alternativa com 30 barras de 5 mm diâmetro em duas camadas, sendo:

$$A_v = 15.19,6 = 295 \text{ mm}^2$$

E a área de armadura transversal total igual a:

$$A_{v,total} = n.A_v = 2.2.95 = 5,89 \text{ cm}^2$$

A laje considerada para o dimensionamento é a L1 com espessura de 17 cm e altura útil  $d$  igual a 13 cm.

*Verificação na região armada:*

A tensão solicitante na laje L1 com espessura de 17 cm é dada por:

$$v_u = \frac{V_u}{A_c} + \frac{\gamma_v \cdot M_{u,x} \cdot c_{AB}}{J_c} + \frac{\gamma_v \cdot M_{u,y} \cdot c_{CD}}{J_c} = 1,63 \text{ MPa}$$

A nova tensão resistente é dada por  $v_u$  :

$$\phi \cdot v_n \leq 0,85 \cdot (v_c + v_s) = 0,85 \cdot \frac{\left( 0,167 \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_0 \cdot d + \frac{A_v \cdot f_y \cdot d}{s} \right)}{b_0 \cdot d}$$

Onde  $s$  é o espaçamento radial,

$$s = d / 2 = 65 \text{ mm}$$

A tensão resistente  $v_u$  é igual a:

$$\phi.v_n = 1,67 \text{ MPa}$$

Portanto, na região armada tem-se que:

$$1,63 < 1,67 \rightarrow v_u < \phi.v_n \therefore OK$$

*Verificação a 0,5d da região armada:*

A tensão resistente é igual a:

$$\phi.v_n = 0,85 \cdot \frac{(0,335 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_{0,ext} \cdot d)}{b_0 \cdot d} = 2,04 \text{ MPa}$$

Portanto, no perímetro a 0,5d da região armada, tem-se que:

$$2,04 > 1,63 \rightarrow \phi.v_n > v_u \therefore OK$$

*Verificação da resistência máxima do concreto:*

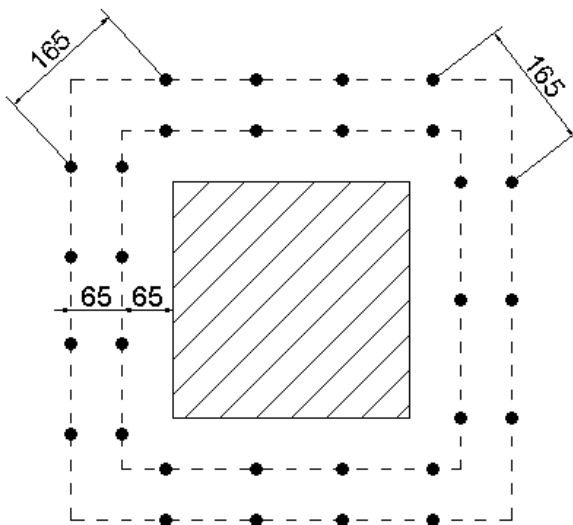
A tensão resistente máxima do concreto é igual a:

$$\phi.v_n = 0,85 \cdot (0,5 \cdot \sqrt{f'_c}) = 2,25 \text{ MPa}$$

Então tem-se que a tensão máxima resistente do concreto supera a solicitante:

$$2,25 > 1,63 \rightarrow \phi.v_n > v_u \therefore OK$$

*Disposição da armadura de punção:*



**Figura 4.4 – Arranjo da armadura de punção para o pilar P2, segundo ACI 318/08**

Dimensões em mm

Tabela 4.7 – Tensões e armadura transversal nas ligações laje-pilar

Espessura da Laje	Pilar P2 – Laje L1		Espessura da laje		Pilar P2 – Laje L2		Espessura da laje		Pilar P2 – Laje L3			
	Armadura punção	0,5d (MPa)	h (cm)	Resistente	Armadura punção	0,5d (MPa)	h (cm)	Resistente	Armadura punção	0,5d (MPa)		
24	-	0,92	24	1,51	-	1,46	24	1,51	2	17,46	2,21	2,25
23	-	0,98	23	1,51	2	1,57	23	1,59	N/D	N/D	2,38	N/D
22	-	1,06	22	1,51	2	1,68	22	1,70	N/D	N/D	2,57	N/D
21	-	1,14	21	1,51	2	1,82	21	1,86	N/D	N/D	2,78	N/D
20	-	1,24	20	1,51	2	1,97	20	2,00	N/D	N/D	3,03	N/D
19	-	1,35	19	1,51	3	2,15	19	2,17	N/D	N/D	3,31	N/D
18	-	1,48	18	1,51	N/D	2,36	18	N/D	N/D	N/D	3,63	N/D
17	2	5,89	17	1,67	N/D	2,60	17	N/D	N/D	N/D	4,02	N/D
16	2	6,28	16	1,84	N/D	2,89	16	N/D	N/D	N/D	4,47	N/D
15	3	10,01	15	2,05	N/D	3,23	15	N/D	N/D	N/D	5,02	N/D
14	N/D	2,28	14	N/D	N/D	3,65	14	N/D	N/D	N/D	5,68	N/D

■ - Espessuras de laje em que não é necessário o uso de armadura de punção;  
■ - Espessuras de laje em que é necessário o uso de armadura de punção.

#### 4.2.4 EUROCODE 2/04

Para calcular a armadura necessária para resistir à punção em uma laje com espessura igual 19 cm, supôs-se a armadura radial, respeitando o espaçamento máximo entre pinos de  $2d$  no terceiro perímetro.

Para a laje de 19 cm, a altura útil é igual a:

$$d = 15 \text{ cm}$$

Portanto o espaçamento máximo entre pinos será:

$$2d = 2.15 = 30 \text{ cm}$$

O número mínimo de pinos necessário no terceiro perímetro é dado pela expressão:

$$\frac{2\pi \cdot \left( \left( \frac{c_1 + c_2}{4} \right) + 0,3d + (n_p - 1)0,75d \right)}{n_b} \leq 2d$$

onde:

$n_p$  é o número de perímetros de armadura de punção;

$n_b$  é o número de pinos por perímetro.

O número mínimo de pinos é igual a:

$$\frac{2\pi \cdot \left( \left( \frac{30 + 30}{4} \right) + 0,3.15 + (2 - 1)0,75.15 \right)}{30} \cong 7 \text{ pinos}$$

por perímetro.

Para lajes com mais de 15 cm, o EUROCODE 2/04 permite que se faça uma interpolação linear para se obter o valor de  $f_{ywd}$ , que varia

de 300 MPa a 435 MPa, para lajes de 15 cm a 35 cm, respectivamente, limitado ao valor de  $250+2,5.d$  (MPa).

Portanto, para uma laje de 19 cm, por interpolação linear, chegamos ao seguinte valor de  $f_{ywd}$  :

$$\frac{435 - 300}{35 - 15} = \frac{435 - f_{ywd}}{35 - 19} \rightarrow f_{ywd} = 322 \text{ MPa}$$

$$f_{ywd} = 250 + 2,5.15 \rightarrow f_{ywd} = 287,5 \text{ MPa}$$

Deve-se adotar o menor valor resistente do aço.

Adotando diâmetro de 5 mm nas barras transversais, a área de aço em cada linha é dada por:

$$A_{sw,n} = 7.0,196 = 1,37 \text{ cm}^2$$

Portanto nos dois perímetros, a área total é igual a:

$$A_{sw} = 2.1,37 = 2,75 \text{ cm}^2$$

*Verificação na região armada:*

A nova tensão resistente, agora na região armada, é dada por:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd3} = 0,75 \cdot \tau_{Rd2} + \left( 1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen} \alpha \frac{1}{u.d} \right)$$

A tensão resistente na laje L1 para uma espessura de 19 cm é igual a:

$$\tau_{Rd2} = 0,61 \text{ MPa}$$

Então tem-se que:



$$\tau_{Rd3} = 0,75 \cdot 0,61 + \left( 1,5 \cdot \frac{15}{0,75 \cdot 15} \cdot 1,37 \cdot 287,5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{308,5 \cdot 15} \right)$$

$$\tau_{Rd3} = 0,63 \text{ MPa}$$

Portanto, na região armada tem-se que:

$$0,63 \leq 0,63 \rightarrow \tau_{Sd} = \tau_{Rd3} \therefore OK$$

*Verificação a distância de 2d da região armada:*

A tensão resistente é igual a:

$$\tau_{Rd1} = 0,61 \text{ MPa}$$

A tensão solicitante é dada por:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u \cdot d} + K_1 \cdot \frac{M_{Sd1}}{W_{p1} \cdot d} + K_2 \cdot \frac{M_{Sd2}}{W_{p2} \cdot d}$$

A distância do terceiro perímetro de armadura de punção à face do pilar é:

$$p = 0,3d + 0,75d = 16 \text{ cm}$$

O perímetro u a 2d da região armada é dado por:

$$u = 2(c_1 + c_2) + 4\pi d + 2\pi p = 2(30 + 30) + 4 \cdot \pi \cdot 14 + 2 \cdot \pi \cdot 27$$

$$u = 358,8 \text{ cm}$$

O módulo de resistência plástica do perímetro localizado a 2d da região armada é dado por:

$$W_p = \frac{c_1^2}{2} + c_1c_2 + 4c_2d + 16d^2 + 2\pi dc_1 + 2c_2p + 16dp + 4p^2 + \pi c_1p$$

∴

$$W_p = 16649 \text{ cm}^2$$

A tensão solicitante igual a:

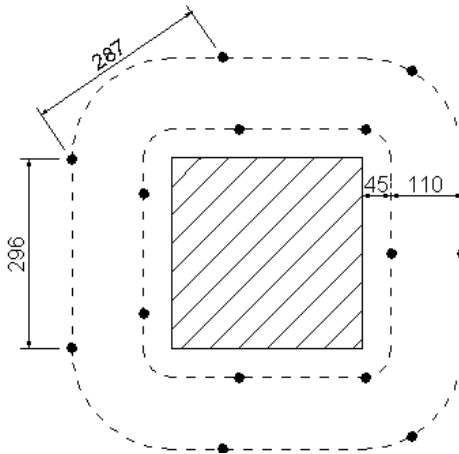
$$\tau_{sd} = \frac{241,6}{358,8.15} + 0,60 \cdot \frac{950}{16649.15} + 0,60 \cdot \frac{2280}{16649.15}$$

$$\tau_{sd} = 0,54 \text{ MPa}$$

Portanto, no perímetro a 2d da região armada, tem-se que:

$$0,61 > 0,54 \rightarrow \tau_{Rd1} > \tau_{sd} \therefore OK$$

Disposição da armadura de punção:



**Figura 4.5 – Arranjo da armadura de punção para o pilar P2**

Dimensões em mm

Tabela 4.8 – Tensões e armadura transversal nas ligações laje-pilar

Espessura da Laje	Pilar P2 – Laje L1			Pilar P2 – Laje L2			Pilar P2 – Laje L3		
	h (cm)	Espessura da laje		Armadura punção	Espessura da laje		Armadura punção	Espessura da laje	
		Armadura punção	2d (MPa)		h (cm)	2d (MPa)		h (cm)	2d (MPa)
		n°camadas	Área (cm²)	Solicitante	Resistente	n°camadas	Área (cm²)	Solicitante	Resistente
24	-	-	0,40	0,54	0,67	2	5,89	0,66	0,87
23	-	-	0,44	0,55	0,73	3	9,42	0,71	0,73
22	-	-	0,47	0,56	0,78	3	9,42	0,78	0,78
21	-	-	0,52	0,58	0,86	3	10,29	0,85	0,86
20	-	-	0,57	0,59	0,93	3	11,22	0,93	0,93
19	2	2,75	0,63	0,63	1,05	4	16,21	1,03	1,05
18	2	3,14	0,70	0,71	1,15	4	16,21	1,15	1,15
17	3	5,30	0,79	0,81	1,33	5	21,82	1,29	1,33
16	3	6,48	0,89	0,92	1,51	5	24,94	1,46	1,51
15	3	6,48	1,02	1,03	1,68	6	29,45	1,68	1,68
14	4	10,21	1,19	1,25	1,99	7	35,74	1,95	1,99

- Espessuras de laje em que não é necessário o uso de armadura de punção;

- Espessuras de laje em que é necessário o uso de armadura de punção.

## 5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A análise dos resultados é baseada no comparativo de alguns parâmetros e valores obtidos na verificação da punção das lajes L1, L2 e L3 pelas quatro normas estudadas. É dividida em comparativos com e sem o uso da armadura de punção.

### 5.1 Análise sem o uso de armadura de punção

Nessa análise são apresentados resultados desconsiderando a armadura transversal - mesmo onde esta se torna necessária pelo efeito dos esforços - com a finalidade de nivelar a comparação apenas pela tensão resistente do concreto e armadura de flexão.

Para a análise dos resultados estipularam-se quatro objetos principais apresentados no formato de diagramas, todos em função da espessura da laje, que são:

1. relação entre a tensão resistente e a tensão solicitante no perímetro crítico de cada norma;
2. carga concentrada de reação máxima do pilar sem uso de armadura transversal;
3. relação entre as tensões solicitantes referentes aos efeitos da carga de reação mais o efeito dos momentos e às tensões solicitantes referentes apenas aos efeitos da carga de reação;

relação entre as excentricidades e coeficientes de majoração das cargas concentradas para equivalência do efeito dos momentos.

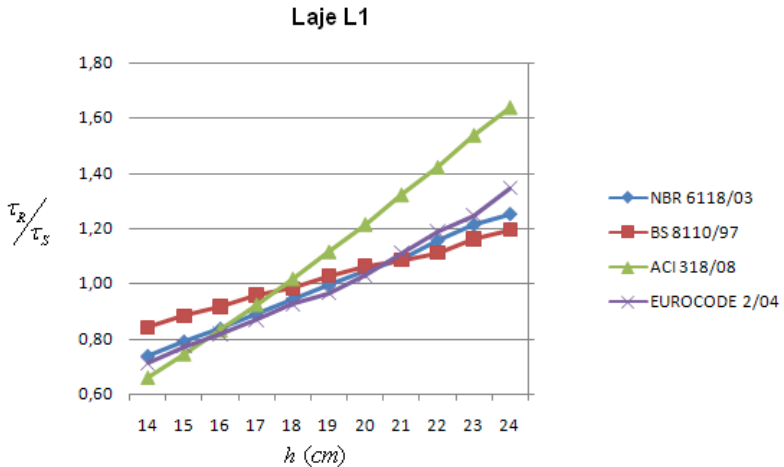
#### 5.1.1 Diagramas das relações entre as tensões resistentes e tensões solicitantes em função da altura ( $\tau_R / \tau_S \times h$ )

Nos diagramas entre as relações entre as tensões resistentes e tensões solicitantes nos perímetros críticos de cada norma e as

espessuras da laje, entende-se que valores de  $\frac{\tau_R}{\tau_S}$  acima de 1,00 representam espessuras cujos esforços dispensam o uso da armadura de punção; valores abaixo de 1,00, espessuras em que se deve usar armadura de punção ou encontrar outra solução estrutural.

### Laje L1

A laje L1 é a que apresenta as menores excentricidades dentre as três lajes estudadas, o que faz com que a relação das tensões em cada espessura de laje seja bastante parecida nas Normas Brasileira, Européia e Inglesa. A figura 5.1 apresenta o diagrama  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L1.



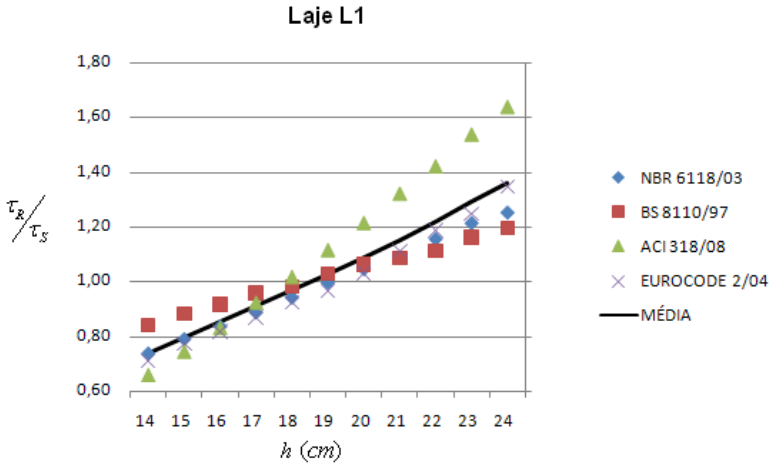
**Figura 5.1 – Diagrama  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L1**

A relação  $\frac{\tau_R}{\tau_S}$  na laje L1 de espessura igual a 21 cm apresenta a interseção das curvas representando a BS 8110/97, a NBR 6118/03 e o EUROCODE 2/04. As excentricidades das cargas concentradas referentes aos momentos transferidos ao pilar na laje L1 nas direções x e y são apresentadas na tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Excentricidades das cargas concentradas na laje L1

Espessura da laje (cm)	NBR 6118/03		ACI 318/08		EC 2/04	
	$e_x$	$e_y$	$e_x$	$e_y$	$e_x$	$e_y$
	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)
24	3.4	6.2	3.4	6.2	3.6	6.4
23	3.6	6.7	3.5	6.7	3.7	6.9
22	3.7	7.2	3.6	7.3	3.8	7.5
21	3.8	7.8	3.7	7.9	3.8	8.1
20	3.8	8.4	3.7	8.5	3.9	8.8
19	3.9	9.0	3.8	9.2	3.9	9.4
18	3.8	9.7	3.8	9.9	3.9	10.2
17	3.8	10.5	3.8	10.6	3.9	10.9
16	3.8	11.3	3.7	11.3	3.8	11.6
15	3.7	12.1	3.7	12.1	3.8	12.5
14	3.6	13.0	3.6	12.9	3.6	13.3

Na Norma Americana a tensão resistente ficou sempre limitada à raiz quadrada da resistência específica do concreto, cuja tensão resistente nas condições apresentadas é igual a 1,51 MPa. O diagrama dos valores médios de  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L1 é apresentado na figura 5.2.



**Figura 5.2 – Diagrama dos valores médios de  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L1**

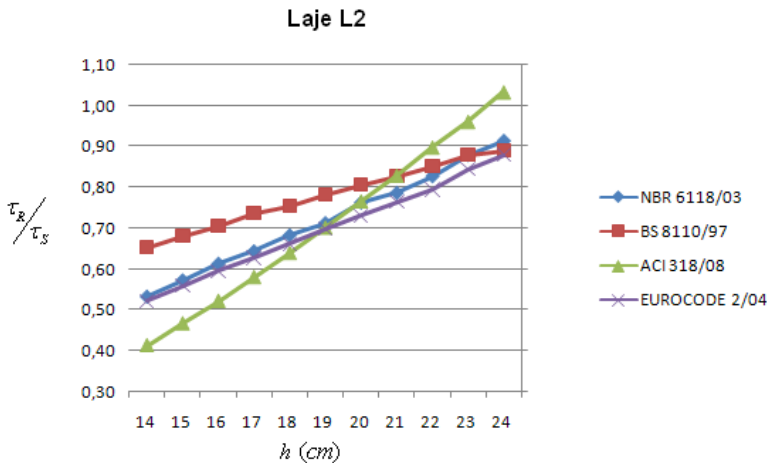
Considerando a laje L1 com espessura de 24 cm, o ACI 318/08 obteve uma resistência 20,5% maior em relação à média. Em contrapartida, na mesma configuração de laje, mas com espessura de 14 cm, a Norma Americana forneceu os resultados mais conservadores, com uma resistência 10,8% menor em relação à média.

Pode-se observar pela figura 5.2 que segundo o ACI 318/08, a laje, nas condições apresentadas, tem uma resistência em média 15,7% maior que a média calculada em espessuras maiores que 19 cm. A BS 8110/97 tende a admitir uma resistência maior que a calculada pelas demais normas apresentadas na figura 5.2 na laje L1 com espessuras inferiores a 17 cm, com uma resistência em torno de 7,8% maior em relação à média para espessuras inferiores a esta. As quatro normas forneceram valores resistentes bastante próximos da média para espessuras inferiores a 19 cm.

## Laje L2

Na laje L2, as excentricidades das cargas concentradas são um pouco maiores em relação aos obtidos na laje L1, o que já provoca uma maior disparidade das resistências calculadas pela Norma Inglesa em relação às Normas Brasileira e Européia. A figura 5.3 mostra o diagrama

$\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L2.



**Figura 5.3 – Diagrama  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L2**

A relação  $\frac{\tau_R}{\tau_S}$  na laje L2 com espessura igual a 24 cm apresenta valores resistentes similares entre a BS 8110/97, a NBR 6118/03 e o EUROCODE 2/04. As excentricidades das cargas concentradas referentes aos momentos transferidos ao pilar na laje L2 nas direções x e y são apresentadas na tabela 5.2.

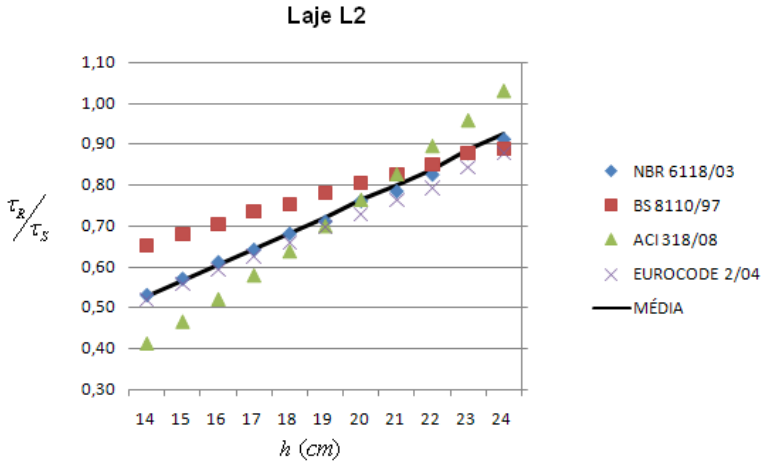


Tabela 5.2 – Excentricidades das cargas concentradas na laje L2

Espessura da laje (cm)	NBR 6118/03		ACI 318/08		EC 2/04	
	$e_x$	$e_y$	$e_x$	$e_y$	$e_x$	$e_y$
	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)
24	4.2	7.3	4.3	6.2	4.2	7.3
23	4.4	7.9	4.4	6.8	4.4	7.9
22	4.5	8.5	4.6	7.3	4.5	8.5
21	4.6	9.1	4.7	7.9	4.6	9.1
20	4.7	9.8	4.7	8.5	4.7	9.8
19	4.8	10.5	4.8	9.2	4.8	10.5
18	4.8	11.3	4.8	9.9	4.8	11.2
17	4.9	12.1	4.8	10.7	4.8	12.0
16	4.8	12.9	4.8	11.4	4.8	12.8
15	4.8	13.8	4.7	12.3	4.7	13.7
14	4.6	14.8	4.6	13.1	4.6	14.6

Também na laje L2 a tensão resistente máxima da Norma Americana foi 1,51 MPa. Isso se deve ao fato de nesse estudo não haver variações das dimensões dos pilares e da resistência do concreto.

A NBR 6118/03 e o EUROCODE 2/04 apresentaram valores de  $\frac{\tau_R}{\tau_S}$  muito próximos da média calculada pelas quatro normas. A maior variação destas normas ocorreu na laje com espessura de 24 cm, onde foram 2% mais conservadora pela Norma Brasileira e 6% mais conservadores pela Européia. O diagrama dos valores médios das resistências obtidas no cálculo das normas é apresentado na figura 5.4.



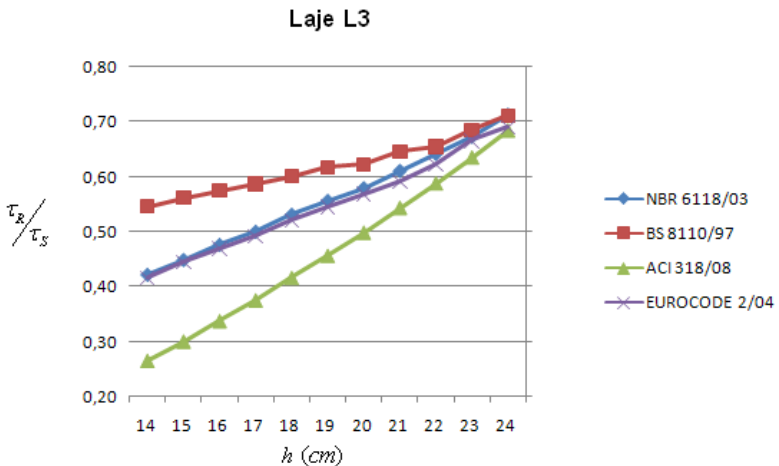
**Figura 5.4 – Diagrama dos valores médios de  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L2**

Considerando a laje L2 com espessura de 24 cm, o ACI 318/08 obteve um valor 10% mais resistente em relação à média. Já na laje com espessura de 14 cm, a Norma Americana forneceu os resultados mais conservadores dessa configuração de laje, com uma resistência 28% menor em relação à média. A Norma Britânica foi a menos conservadora entre as espessuras de 19 e 14 cm, com uma resistência 28% maior em relação à média fornecida pelas quatro normas.

No diagrama da figura 5.4 pode-se observar que as resistências calculadas pelas Normas Brasileira e Européia forneceram valores similares, enquanto que BS 8110/97 tende a admitir uma resistência maior que a calculada pelas demais normas apresentadas, nas lajes L2 com espessuras inferiores a 20 cm. O ACI 318/08 apresentou resistências inferiores às calculadas pelas demais normas para espessuras da laje L2 inferiores a 18 cm.

### Laje L3

A laje L3 é a que proporciona as maiores excentricidades nas cargas concentradas. Nessa configuração já é possível ver a influência do efeito dos momentos fletores nos procedimentos de cálculo propostos nas normas estudadas. A figura 5.5 apresenta o diagrama  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L3.



**Figura 5.5 – Diagrama  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L3**

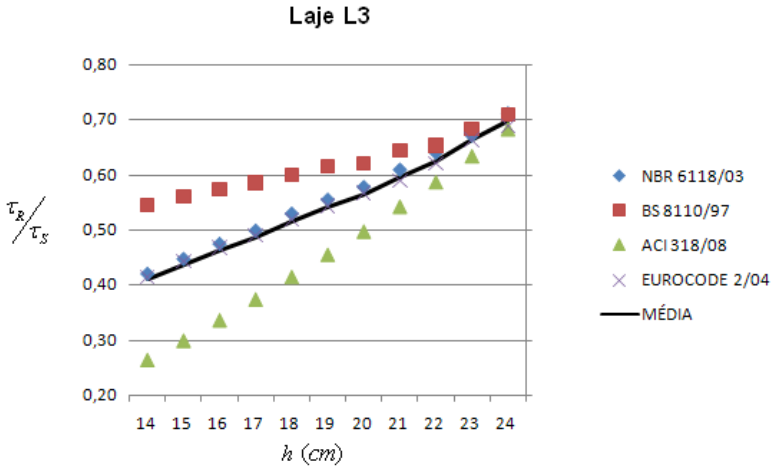
Na figura 5.5 pode-se observar uma tendência da Norma Britânica a ter uma maior resistência conforme há o aumento das excentricidades das cargas concentradas. Nas espessuras da laje onde as excentricidades são maiores, a Norma Americana fornece valores mais conservadores, enquanto que as Normas Brasileira e Européia apresentam resistências bastante parecidas.

A relação  $\frac{\tau_R}{\tau_S}$  na laje L3 com espessura igual a 24 cm apresenta valores resistentes similares entre as quatro normas estudadas. As excentricidades das cargas concentradas referentes aos momentos transferidos ao pilar na laje L3 são apresentadas na tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Excentricidades das cargas concentradas na laje L3

Espessura da laje (cm)	NBR 6118/03		ACI 318/08		EC 2/04	
	$e_x$	$e_y$	$e_x$	$e_y$	$e_x$	$e_y$
	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)
24	5.1	8.1	5.1	8.2	5.1	8.2
23	5.2	8.8	5.3	8.9	5.3	8.8
22	5.4	9.5	5.4	9.6	5.4	9.5
21	5.5	10.2	5.5	10.3	5.6	10.2
20	5.6	11.0	5.6	11.0	5.7	11.0
19	5.7	11.8	5.7	11.8	5.8	11.7
18	5.8	12.6	5.8	12.6	5.8	12.5
17	5.8	13.4	5.8	13.4	5.8	13.4
16	5.8	14.3	5.8	14.3	5.8	14.2
15	5.8	15.2	5.8	15.2	5.8	15.2
14	5.7	16.1	5.7	16.1	5.7	16.1

Novamente a NBR 6118/03 e o EUROCODE 2/04 apresentaram valores de  $\frac{\tau_R}{\tau_S}$  muito próximos da média calculada pelas quatro normas. A Norma Brasileira apresentou uma resistência 2% maior em todas as espessuras e a Européia não teve variações maiores do que 1%. A figura 5.6 mostra o diagrama valores médios de  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L3.



**Figura 5.6 – Diagrama dos valores médios de  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L3**

Considerando a laje L3 com espessura de 14 cm, a BS 8110/97 obteve um valor 24% mais resistente em relação à média. O ACI 318/08, nessa mesma espessura de laje, forneceu os resultados mais conservadores na laje L3, com uma resistência 55% menor em relação à média. No geral, a Norma Britânica foi a que obteve os resultados mais econômicos, com uma resistência 11,3% maior em relação à média obtida pelas quatro normas. A Norma Americana foi a mais conservadora, com valores de  $\frac{\tau_R}{\tau_S}$  19,6% menores em relação à média obtida pelas quatro normas.

Na figura 5.6 pode-se observar que as resistências calculadas pelas Normas Brasileira e Européia novamente forneceram valores similares, enquanto que BS 8110/97 tende a admitir uma resistência maior que a calculada pelas demais normas apresentadas e o ACI 318/08 resistências inferiores às calculadas pelas demais normas. Percebe-se que conforme há um aumento das excentricidades das cargas concentradas, a Norma Britânica tende a fornecer resultados mais

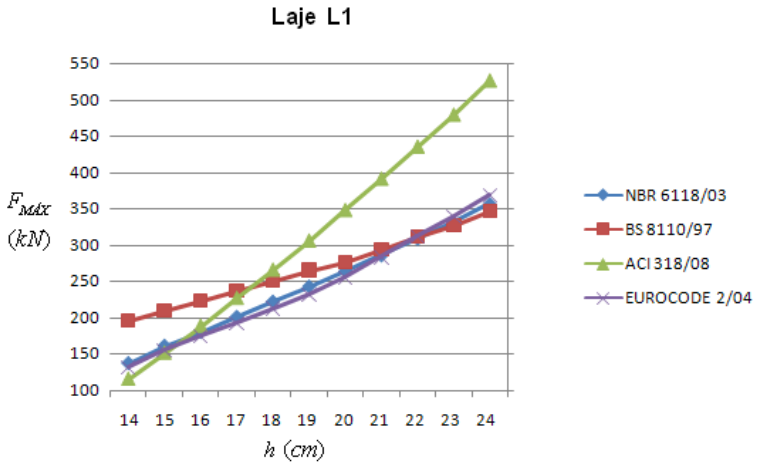
econômicos, ao passo que a Norma Americana tende a ser mais conservadora.

### *5.1.2 Diagramas dos valores de cargas concentradas máximas resistidas pelas lajes em função da altura ( $F_{MÁX} \times h$ )*

Na comparação dos valores de cargas concentradas máximas resistidas pelas lajes sem o uso de armadura transversal de punção, em função das espessuras das lajes, foram mantidas as taxas de armadura longitudinal de flexão e os momentos fletores calculados originalmente no capítulo 3, variando, portanto, somente as excentricidades das cargas. Dessa maneira pretende-se estimar a reação máxima do pilar suportada pela laje sem modificar as demais variáveis.

#### *Laje L1*

As Normas Americana e Britânica suportam um carregamento maior que as Normas Brasileira e Européia. Essas apresentam valores de cargas concentradas máximas variando em média 2% entre si. A figura 5.7 apresenta o diagrama das reações máximas dos pilares nas lajes nas condições expostas.



**Figura 5.7 – Diagrama  $F_{MAX} \times h$  da laje L1**

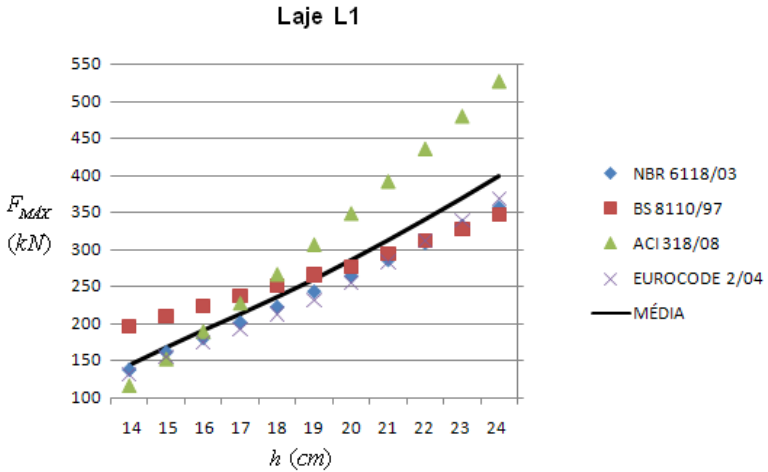
Todas as normas, com exceção da Americana, suportaram a mesma carga concentrada na laje com espessura de 22 cm, onde a excentricidade foi aproximadamente 4,6 cm nas duas direções. As excentricidades para as cargas máximas concentradas são apresentadas na tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Excentricidades das cargas máximas concentradas em L1

Espessura da laje (cm)	NBR 6118/03		ACI 318/08		EC 2/04	
	$e_x$ (cm)	$e_y$ (cm)	$e_x$ (cm)	$e_y$ (cm)	$e_x$ (cm)	$e_y$ (cm)
24	2.7	4.7	1.9	3.5	2.6	4.6
23	2.9	5.4	2.1	4.1	2.8	5.3
22	3.1	6.1	2.4	4.7	3.1	6.2
21	3.4	7.0	2.6	5.6	3.4	7.2
20	3.6	8.0	2.9	6.6	3.7	8.4
19	3.9	9.1	3.3	8.0	4.1	9.8
18	4.1	10.5	3.7	9.6	4.3	11.2
17	4.5	12.2	4.3	11.8	4.7	13.0
16	4.8	14.3	4.9	14.8	4.9	14.9
15	5.1	16.7	5.8	19.3	5.3	17.6
14	5.7	20.5	7.3	26.2	5.9	21.6

As Normas Britânica, Brasileira e Européia suportaram cargas bastante similares para lajes com mais de 22 cm de espessura. A figura 5.8 apresenta o diagrama de valores médios de  $F_{MÁX} \times h$  da laje L1.





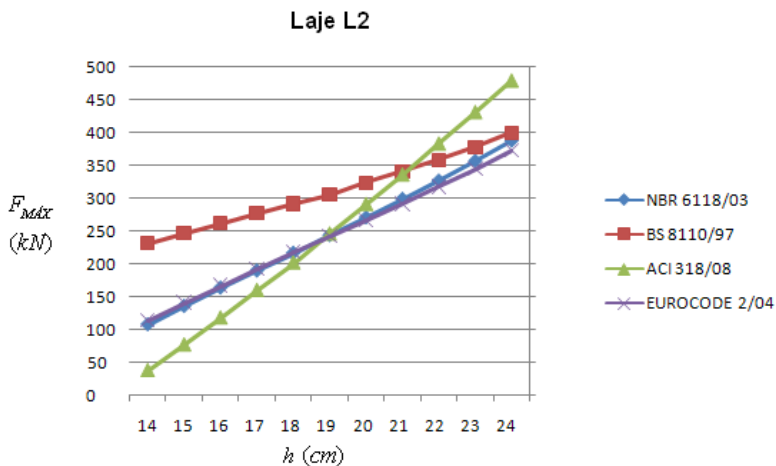
**Figura 5.8 – Diagrama de valores médios de  $F_{MÁX}$  x  $h$  da laje L1**

O ACI 318/08 suportou uma carga 25% maior em relação à média calculada para uma laje com espessura de 24 cm. No geral, a Norma Americana suportou cargas 14,7% maiores em relação à média das normas. As demais normas tiveram resultados menos distantes da média.

### *LAJE L2*

As cargas concentradas máximas suportadas pela laje L2 tiveram valores bem distintos, como se pode observar na figura 5.9. A Norma Britânica permite valores bem superiores aos obtidos pelas demais normas, principalmente nas lajes com espessuras inferiores a 20 cm.

As Normas Brasileira e Européia resultaram em cargas concentradas máximas variando apenas em 1,4% entre si, o que mostra a semelhança de resultados obtidos por essas duas normas.



**Figura 5.9 – Diagrama  $F_{MÁX}$  x  $h$  da laje L2**

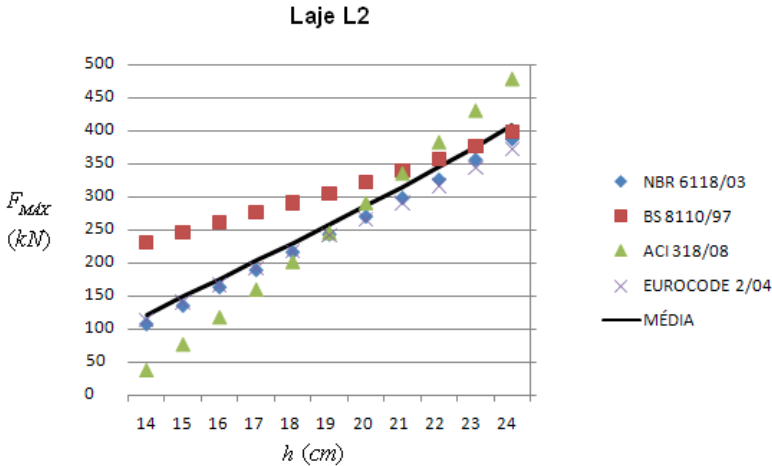
A carga concentrada máxima  $F_{MÁX}$  na laje L2 com espessura igual a 24 cm apresenta valores similares entre a BS 8110/97, a NBR 6118/03 e o EUROCODE 2/04. A excentricidade das cargas nessas condições é aproximadamente 6,5 cm nas direções x e y. As excentricidades das cargas concentradas na laje L2 nas direções x e y são apresentadas na tabela 5.5.

Percebe-se que conforme há um aumento das excentricidades, a Norma Britânica permite cargas concentradas mais altas, ao passo que a Norma Americana fornece valores mais conservadores.

Tabela 5.5 – Excentricidades das cargas máximas concentradas em L2

Espessura da laje (cm)	NBR 6118/03		ACI 318/08		EC 2/04	
	$e_x$ (cm)	$e_y$ (cm)	$e_x$ (cm)	$e_y$ (cm)	$e_x$ (cm)	$e_y$ (cm)
24	4.7	8.1	4.2	6.0	4.9	8.4
23	5.2	9.3	4.7	7.1	5.4	9.7
22	5.7	10.7	5.3	8.5	5.9	11.0
21	6.3	12.3	6.0	10.2	6.4	12.7
20	6.9	14.3	6.9	12.5	7.0	14.5
19	7.6	16.6	8.1	15.6	7.6	16.8
18	8.4	19.6	9.7	20.0	8.3	19.5
17	9.4	23.4	11.9	26.5	9.3	23.1
16	10.5	28.2	15.8	37.6	10.3	27.7
15	12.2	35.4	23.4	60.5	11.8	34.2
14	14.6	46.5	45.3	128.2	13.9	44.0

A NBR 6118/03 e o EUROCODE 2/04 apresentaram valores de  $F_{MÁX}$  mais próximos da média calculada pelas quatro normas dentre as espessuras de laje analisadas. A variação ficou em torno de 6,5% mais conservadora pela Norma Brasileira e 8,3% mais conservadores pela Européia. O diagrama dos valores médios das reações concentradas máximas é apresentado na figura 5.10.



**Figura 5.10 – Diagrama dos valores médios de  $F_{MÁX}$  x  $h$  da laje L2**

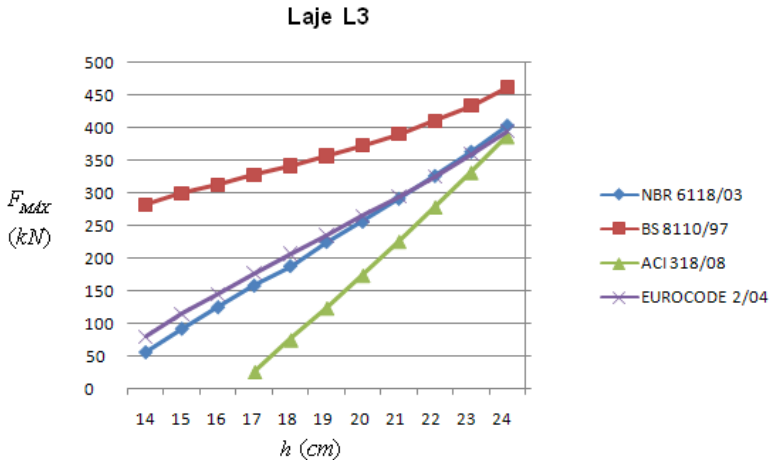
Considerando a laje L2 com espessura de 24 cm, o ACI 318/08 obteve um valor 14,4% mais econômico em relação à média. Já na laje com espessura de 14 cm, a Norma Americana forneceu os resultados mais conservadores dessa configuração de laje, com uma resistência 13,9% menor em relação à média. No geral, a Norma Britânica foi a que obteve os resultados mais econômicos, com uma resistência 15,8% maior em relação à média fornecida pelas quatro normas.

No diagrama da figura 5.10 pode-se observar que as resistências calculadas pelas Normas Brasileira e Européia forneceram valores similares, enquanto que BS 8110/97 tende a admitir uma resistência maior que a calculada pelas demais normas apresentadas. O ACI 318/08 apresentou resistências inferiores às calculadas pelas demais normas para espessuras da laje L2 inferiores a 18 cm.

### LAJE L3

Na laje L3 é possível perceber três tendências distintas quanto aos resultados de cargas concentradas máximas suportadas pela laje. A BS 8110/97 permite cargas muito superiores às calculadas pelas demais

normas. O ACI 318/08 é o método mais conservativo, permitindo cargas concentradas inferiores às calculadas pelas outras normas, principalmente nas lajes com espessuras inferiores a 22 cm. A figura 5.11 apresenta o diagrama  $F_{MÁX} \times h$  da laje L3.



**Figura 5.11 – Diagrama  $F_{MÁX} \times h$  da laje L3**

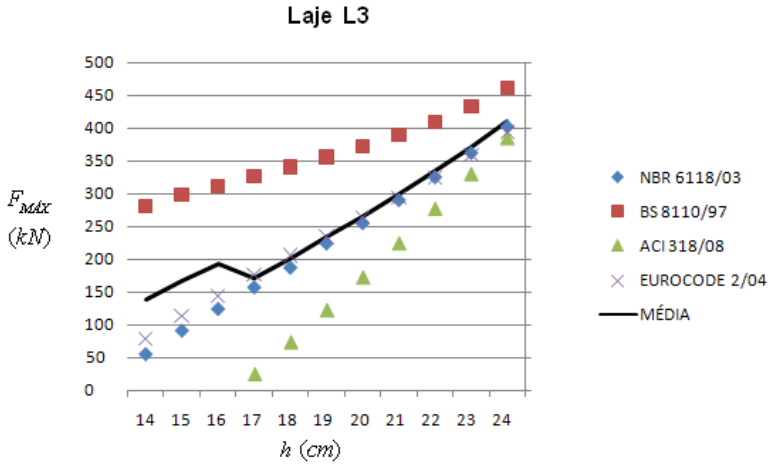
Na figura 5.11 pode-se observar uma tendência da Norma Britânica a ter uma maior resistência conforme há o aumento das excentricidades das cargas concentradas. Nas espessuras da laje onde as excentricidades são maiores, a Norma Americana fornece valores mais conservadores, enquanto que as Normas Brasileira e Européia têm resistências bastante parecidas. As excentricidades são apresentadas na tabela 5.6.

A figura 5.11 apresenta valores de reação concentrada máxima de cálculo pelo ACI 318/08 apenas para laje com espessuras superiores a 17 cm, pois a partir dessa espessura a carga deveria ser negativa para compensar os efeitos dos momentos.

Tabela 5.6 – Excentricidades das cargas máximas concentradas em L3

Espessura da laje (cm)	NBR 6118/03		ACI 318/08		EC 2/04	
	$e_x$ (cm)	$e_y$ (cm)	$e_x$ (cm)	$e_y$ (cm)	$e_x$ (cm)	$e_y$ (cm)
24	5.1	8.1	5.1	8.2	5.1	8.2
23	5.2	8.8	5.3	8.9	5.3	8.8
22	5.4	9.5	5.4	9.6	5.4	9.5
21	5.5	10.2	5.5	10.3	5.6	10.2
20	5.6	11.0	5.6	11.0	5.7	11.0
19	5.7	11.8	5.7	11.8	5.8	11.7
18	5.8	12.6	5.8	12.6	5.8	12.5
17	5.8	13.4	5.8	13.4	5.8	13.4
16	5.8	14.3	5.8	14.3	5.8	14.2
15	5.8	15.2	5.8	15.2	5.8	15.2
14	5.7	16.1	5.7	16.1	5.7	16.1

A NBR 6118/03 e o EUROCODE 2/04 apresentaram valores de  $F_{MÁX}$  muito próximos da média calculada pelas quatro normas em lajes com espessuras superiores a 16 cm. A figura 5.12 mostra o diagrama valores médios de  $F_{MÁX} \times h$  da laje L3.



**Figura 5.12 – Diagrama dos valores médios de  $F_{MÁX}$  x  $h$  da laje L3**

Considerando a laje L3 com espessura de 14 cm, a BS 8110/97 permitiu uma reação concentrada 50,5% maior em relação à média. O ACI 318/08 forneceu resultados mais conservadores na laje L3, com uma resistência 25,6% menor em relação à média. No geral, a Norma Britânica foi a que obteve os resultados mais econômicos, resistindo a cargas 30,7% maiores em relação à média obtida pelas quatro normas.

Na figura 5.12 pode-se observar que as cargas concentradas máximas calculadas pelas Normas Brasileira e Européia novamente forneceram valores similares, enquanto que BS 8110/97 tende a admitir cargas concentradas maiores que a calculada pelas demais normas e o ACI 318/08 cargas concentradas inferiores às calculadas pelas demais normas. Percebe-se que conforme há um aumento das excentricidades das cargas concentradas, a Norma Britânica tende a fornecer resultados mais econômicos, ao passo que a Norma Americana tende a ser mais conservadora.

5.1.3 *Diagramas das relações entre as tensões solicitantes referentes aos efeitos da carga de reação mais o efeito dos momentos e as tensões solicitantes referentes apenas aos efeitos da carga de reação em função*

*das espessuras das lajes*  $\left( \frac{\sigma_{Solicitante(F+M)}}{\sigma_{Solicitante(F)}} \times h \right)$

A relação entre às tensões solicitantes referentes aos efeitos da carga de reação mais o efeito dos momentos e às tensões solicitantes referentes apenas aos efeitos da carga de reação tem como finalidade demonstrar o efeito dos momentos transferidos ao pilar no cálculo da punção. A Norma Britânica considera que em pilares internos o efeito dos momentos representa 15% da carga de reação do pilar. Os

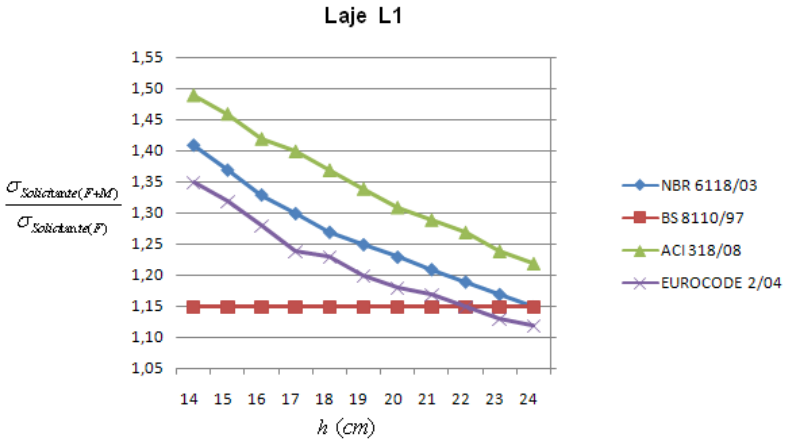
diagramas  $\frac{\sigma_{Solicitante(F+M)}}{\sigma_{Solicitante(F)}} \times h$  representam qual a porcentagem de

aumento no valor de uma carga concentrada de reação dos pilares supostamente simétrica.

#### *Laje L1*

Na laje L1, onde há excentricidades menores das cargas, obviamente os momentos representam um pequeno acréscimo em uma carga supostamente simétrica, como pode ser observado na figura 5.13.





**Figura 5.13 – Diagrama  $\frac{\sigma_{Solicitante(F+M)}}{\sigma_{Solicitante(F)}} \times h$  da laje L1**

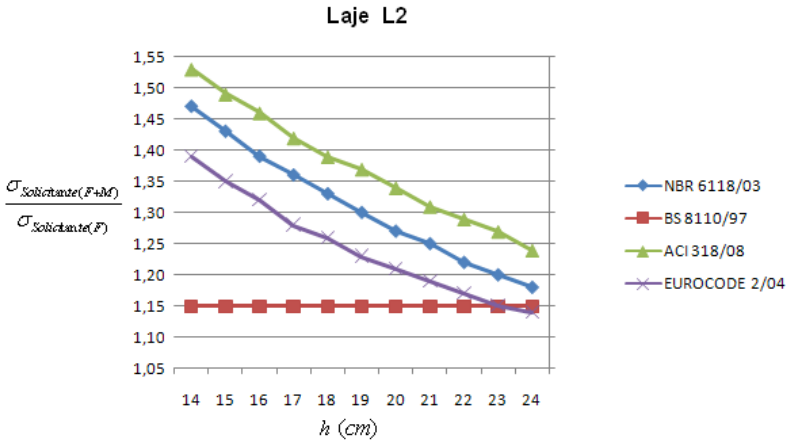
Embora o efeito dos momentos tenha uma representatividade maior nas normas em relação à BS 8110/97, o que se observa é que isso não influencia diretamente na resistência calculada no item 5.1.1.1.

Supondo uma espessura da laje L1 em que os valores de  $\frac{\tau_R}{\tau_S}$  sejam igual a 1 em todas as normas, o efeito dos momentos em relação à carga concentrada seria igual a 15% pela Norma Britânica, 27% pela Norma Brasileira, 33,5% pela Norma Européia e 38,5% pela Norma Americana.

Na laje L1 a mediana do efeito dos momentos foi 1,25 para a NBR 6118/03, 1,34 para o ACI 318/08 e 1,20 para o EUROCODE 2/04.

### Laje L2

O diagrama  $\frac{\sigma_{Solicitante(F+M)}}{\sigma_{Solicitante(F)}} \times h$  da laje L2 é apresentado na figura 5.14.



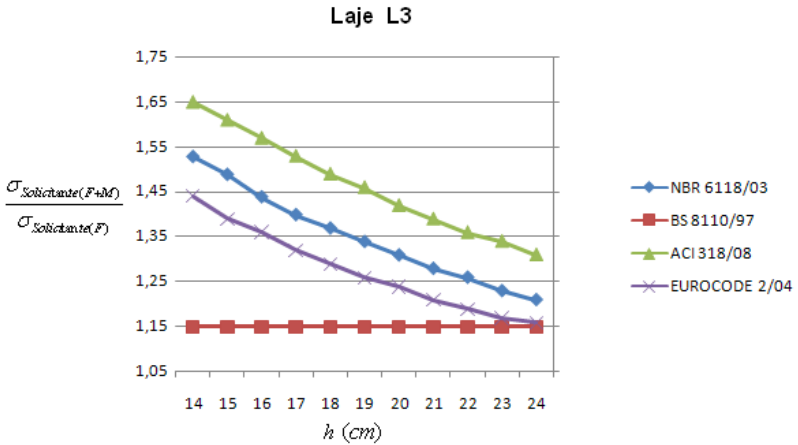
**Figura 5.14 – Diagrama  $\frac{\sigma_{Solicitante(F+M)}}{\sigma_{Solicitante(F)}} \times h$  da laje L2**

Para a laje L2, supondo uma espessura em que os valores de  $\frac{\tau_R}{\tau_S}$  sejam iguais a 0,80 em todas as normas, o efeito dos momentos em relação à carga concentrada seria igual a 15% pela Norma Britânica, 24% pela Norma Brasileira, 17% pela Norma Européia e 32,5% pela Norma Americana.

Na laje L2 a mediana do efeito dos momentos foi 1,30 para a NBR 6118/03, 1,37 para o ACI 318/08 e 1,23 para o EUROCODE 2/04.

### Laje L3

O diagrama  $\frac{\sigma_{Solicitante(F+M)}}{\sigma_{Solicitante(F)}} \times h$  da laje L3 é apresentado na figura 5.15.



**Figura 5.15 – Diagrama  $\frac{\sigma_{Solicitante(F+M)}}{\sigma_{Solicitante(F)}} \times h$  da laje L3**

Para a laje L3, supondo uma espessura em que os valores de  $\frac{\tau_R}{\tau_S}$  sejam iguais a 0,60 em todas as normas, o efeito dos momentos em relação à carga concentrada seria igual a 15% pela Norma Britânica, 29,5% pela Norma Brasileira, 24% pela Norma Européia e 42% pela Norma Americana.

Na laje L3 a mediana do efeito dos momentos foi 1,34 para a NBR 6118/03, 1,46 para o ACI 318/08 e 1,26 para o EUROCODE 2/04.

### 5.1.4 Excentricidades e coeficiente de majoração das cargas concentradas para equivalência do efeito dos momentos

Nesse item foram calculadas cargas concentradas máximas para cada espessura de laje segundo a BS 8110/97 para uma taxa de armadura longitudinal de flexão fixada em 0,38% nos sentidos x e y,  $f_{ck}$  igual a 30 MPa e dimensões do pilar P2. Aplicando essas cargas na verificação da punção pelas demais normas, calcularam-se as excentricidades suportadas em cada espessura de laje, sempre nos sentidos x e y, mantendo a mesma taxa de armadura longitudinal de flexão. Essa taxa de armadura de flexão foi estipulada a partir da média calculada no item 3. As excentricidades suportadas são apresentadas na figura 5.16.

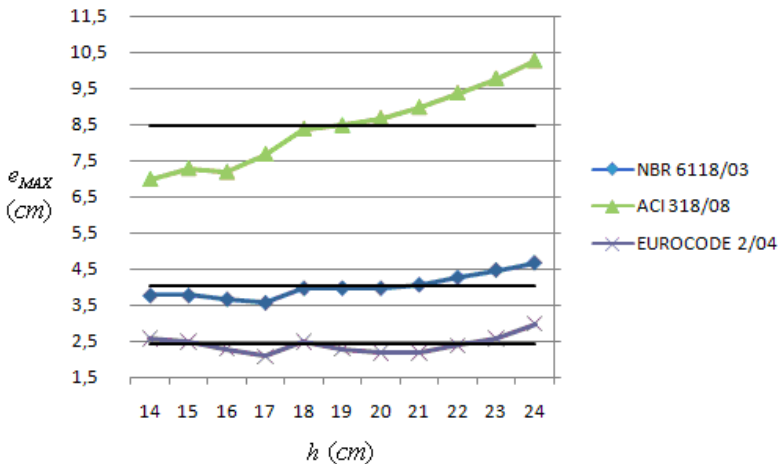
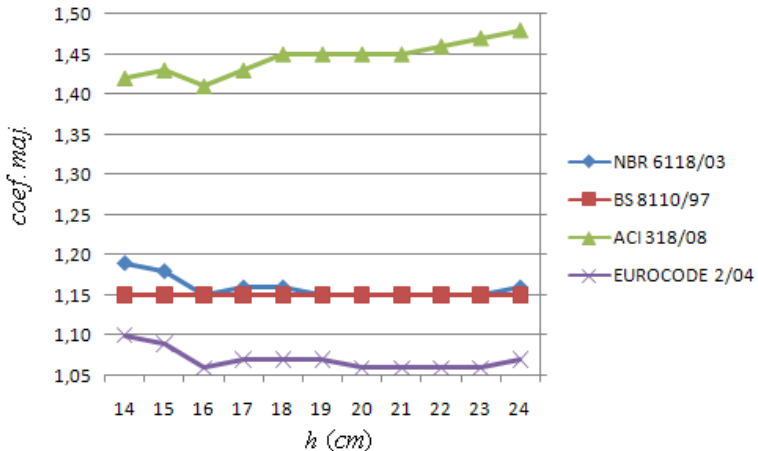


Figura 5.16 – Diagrama  $e_{MAX} \times h$

Para que haja uma equivalência no cálculo da punção para uma mesma carga concentrada e mesma taxa de armadura de flexão, a excentricidade média suportada pela Norma Brasileira é de 4 cm, na Norma Européia é de 2,5 cm e na Americana, 8,5 cm. A NBR 6118/03 e

o EUROCODE 2/04 não tiveram valores muito distantes da média, variando no máximo em 7 mm e 5 mm respectivamente. A Norma Americana teve as maiores diferenças se comparada às outras normas, variando desde -15 mm até +18 mm em relação à média.

Nestas condições, supondo que as cargas concentradas de reação dos pilares sejam simétricas, calcularam-se coeficientes de majoração dessas cargas com o intuito de simular o efeito que os momentos provocam no cálculo da punção. Essa análise é inspirada nos critérios normativos de cálculo da punção da BS 8110/97, que tem esse valor fixado em 1,15 para pilares internos. Os coeficientes de majoração das cargas concentradas para equivalência do efeito dos momentos é apresentada na figura 5.17.



**Figura 5.17 – Diagrama *coef. maj. x h***

Para ligações laje-pilar internos, com taxa de armadura de flexão igual a 0,38% em cada um dos sentidos, com as excentricidades apresentadas na figura 5.16, é possível simular uma carga concentrada simétrica, desde que seu valor seja multiplicado pelos coeficientes apresentados na figura 5.17.

A Norma Brasileira teve um coeficiente médio bastante próximo do recomendado pela Norma Britânica (1,16), com um aumento nas

espessuras menores que 16 cm, chegando a 1,19. No EUROCODE 2/04, as excentricidades máximas foram inferiores às suportadas pela NBR 6118/03, e os coeficientes de majoração de uma carga simétrica tiveram um valor médio de 1,07. O ACI 318/08, que suportaria as maiores excentricidades dentre as três normas analisadas, teve um coeficiente médio de majoração das cargas simétricas igual a 1,45.

## 5.2 Análise com uso de armadura de punção

Nessa análise são apresentados resultados em que é necessário o uso de armadura transversal. Para a análise dos resultados estipularam-se dois objetos principais apresentados no formato de diagramas em função da espessura da laje, que são:

1. relação entre a tensão resistente e a tensão solicitante no perímetro crítico de cada norma, com a colaboração da armadura transversal de punção calculada;
- área de armadura transversal de punção calculada;

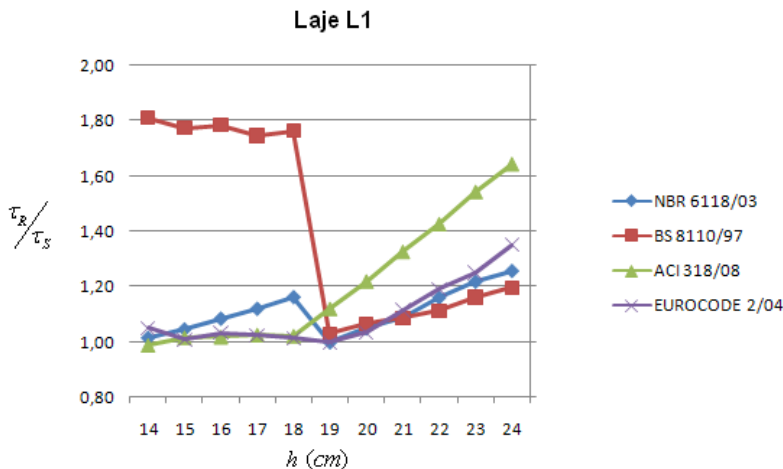
### 5.2.1 Diagramas das relações entre as tensões resistentes e tensões solicitantes em função da espessura das lajes ( $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$ )

Nos diagramas entre as relações entre as tensões resistentes e tensões solicitantes nos perímetros críticos de cada norma e as espessuras da laje, entende-se que valores de  $\frac{\tau_R}{\tau_S}$  acima de 1,00 representam espessuras cujos esforços dispensam o uso da armadura de punção; valores abaixo de 1,00, espessuras em que deve-se usar armadura de punção ou encontrar outra solução estrutural.

#### Laje L1

A figura 5.18 apresenta o diagrama  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L1 com o uso de armadura de punção. O espaçamento máximo recomendado pela BS 8110/97 entre pinos ou estribos dentro de um mesmo perímetro é 1,5d. Nas outras normas esse espaçamento é 2d, o que faz com que a área de armadura transversal necessária para atender aos limites de espaçamento seja sempre maior que a necessária para atender às tensões

solicitantes, como pode-se perceber na figura 5.18 nas espessuras da laje L1 inferiores a 19 cm. O mesmo acontece, em menor escala, pelo EUROCODE 2/04, na laje com espessura de 18 cm.



**Figura 5.18 – Diagrama  $\tau_R/\tau_S \times h$  da laje L1**

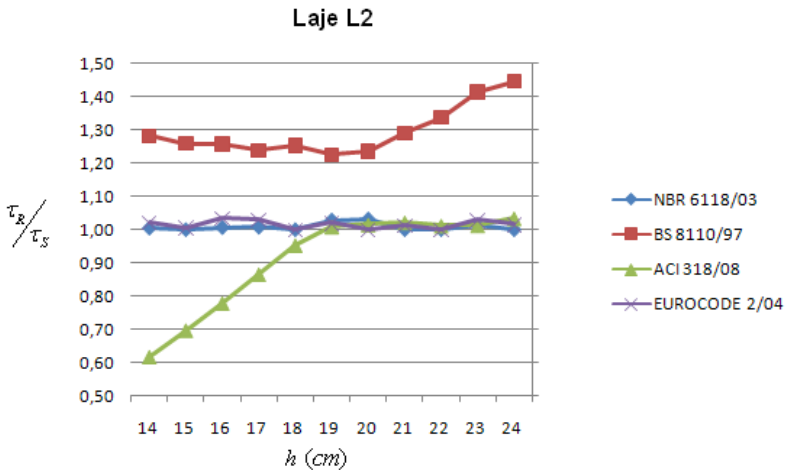
Apesar de a NBR 6118/03 recomendar um número mínimo de perímetros de armadura de punção igual a três, a ligação é dimensionada com uma área mínima de armadura transversal para resistir às tensões solicitantes.

As Normas Brasileira e Européia reduzem a resistência do concreto quando há necessidade do uso de armadura de punção em 23% e 25% respectivamente. As Normas Britânica e Americana não adotam um fator de redução na resistência do concreto quando há necessidade do uso de armadura de punção, simplesmente somam a tensão resistente da armadura transversal à tensão resistente calculada do concreto.



## Laje L2

A figura 5.19 apresenta o diagrama  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L2 com o uso de armadura de punção. Nesse diagrama pode-se notar que nas lajes L2 com espessuras inferiores a 19 cm, não é possível dimensionar a armadura transversal pelo ACI 318/08, pelo fato de sua tensão resistente estar limitada à metade da raiz quadrada da tensão específica do concreto, sendo nesse caso necessário aumentar a resistência do concreto ou mudar as dimensões do pilar.



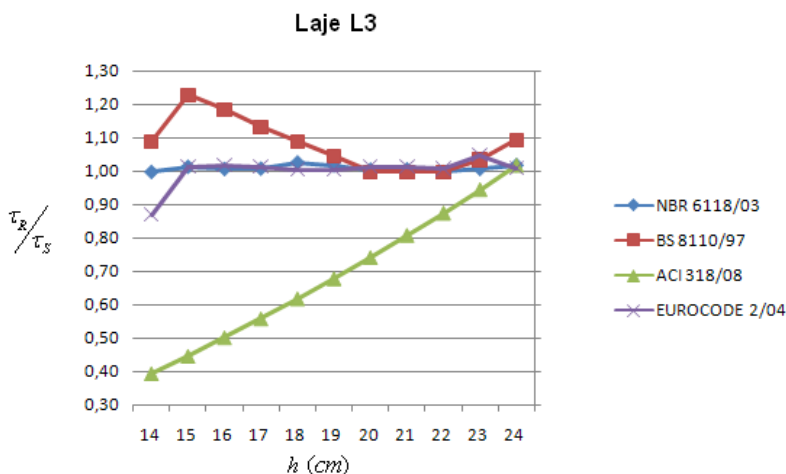
**Figura 5.19 – Diagrama  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L2**

Na laje L2 as Normas Brasileira e Européia foram as que tiveram um maior aproveitamento da armadura transversal de punção, com valores de tensão resistente e solicitante bem próximos de 1. A Norma Inglesa apresentou uma relação  $\frac{\tau_R}{\tau_S}$  sempre maior que 1,20 o que pode significar um dimensionamento maior que o necessário para

resistir às tensões, ou uma superestimativa da capacidade resistente da armadura transversal de punção.

### Laje L3

A figura 5.20 apresenta o diagrama  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L3 com o uso de armadura de punção. Assim como na laje L2, o ACI 318/08 impossibilita o dimensionamento da armadura transversal de punção pela limitação da tensão resistente do concreto, sendo necessário aumentar a resistência do concreto ou mudar as dimensões do pilar em espessuras de laje inferiores a 24 cm na configuração da laje L3.



**Figura 5.20 – Diagrama  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  da laje L3**

As Normas Brasileira e Européia tiveram um maior aproveitamento da armadura transversal de punção, com valores de tensão resistente e solicitante bem próximos de 1. O EUROCODE 2/04 apresenta um valor de resistência abaixo de 1 em uma laje L3 com

---

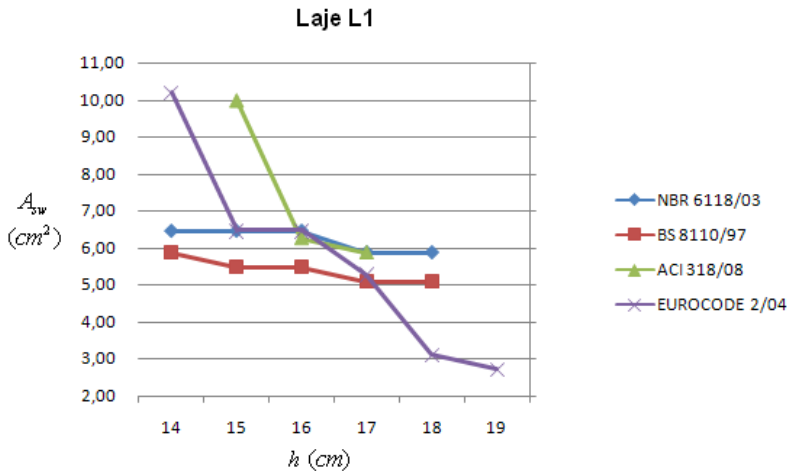
espessura de 14 cm, onde houve uma tensão solicitante maior que a resistente na face do pilar. A Norma Inglesa teve um bom aproveitamento da armadura de punção em lajes com espessuras entre 19 cm e 23 cm, onde a necessidade de armadura transversal foi superior à necessária para atender aos requisitos de espaçamento em um mesmo perímetro. Ainda pela Norma Inglesa, foi impossível dimensionar a armadura transversal em uma laje com 14 cm de espessura, onde o valor da tensão solicitante foi superior a duas vezes o valor da tensão resistente e, nesses casos, a norma recomenda que se adote outra solução estrutural.

### *5.2.2 Diagramas das áreas de armadura transversal de punção calculadas em função da espessura das lajes ( $A_{sw} \times h$ )*

Nesse item fez-se um estudo comparando a área de armadura transversal de punção calculada segundo os critérios de cada norma nas três configurações de lajes L1, L2 e L3. Para o cálculo da área total da armadura de punção foram considerados não só a armadura para resistir aos esforços como também a armadura necessária para atender espaçamentos máximos e número mínimo de perímetros.

#### *Laje L1*

Na laje L1, a necessidade do uso de armadura transversal de punção só ocorreu em espessuras inferiores a 19 cm. O ACI 318/08 não fornece a armadura de punção na laje com espessura de 14 cm, pelo fato da tensão solicitante ser superior a máxima resistida pelo concreto. A relação entre a área de armadura de punção calculada e as espessuras das lajes é apresentada na figura 5.21.



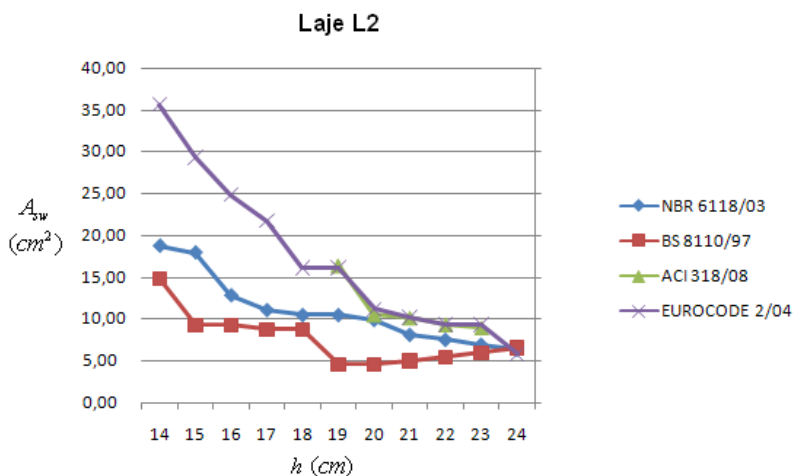
**Figura 5.21 – Diagrama  $A_{sw} \times h$  da laje L1**

As Normas Brasileira e Britânica apresentaram pouca variação na área de armadura transversal necessária, tendo a BS 8110/97, em média, um consumo 12,8% menor em relação à NBR 6118/03. A área calculada pelo EUROCODE 2/04 teve algumas variações mais acentuadas nas lajes com 17 cm e 14 cm, pois nessas espessuras há necessidade da adoção de um perímetro de armadura transversal a mais. A Norma Européia teve também um consumo menor em relação às Normas Brasileira e Britânica na laje de 18 cm e a mais conservadora na laje de 14 cm.

### *Laje L2*

A laje L2 permite uma melhor comparação do consumo de armadura transversal de punção necessário para atender aos critérios normativos estudados. Nessa configuração da laje, o ACI 318/08 fornece a área de armadura transversal necessária para resistir à punção apenas para espessuras superiores a 18 cm, novamente pelo fato da tensão

solicitante ser superior a máxima resistida pelo concreto. O diagrama  $A_{sw} \times h$  da laje L2 é apresentado na figura 5.22.



**Figura 5.22 – Diagrama  $A_{sw} \times h$  da laje L2**

As áreas calculadas pelas Normas Européia e Americana tiveram valores bastante aproximados, sendo o consumo pelo ACI 318, em média 1,41% menor em relação ao EUROCODE 2. A Norma Britânica forneceu áreas de armadura de punção 35,1% menores em relação à média e 29% menores em relação à Norma Brasileira. A Norma Européia forneceu resultados mais conservadores. Considerando somente a área de armadura transversal necessária em lajes com espessuras maiores que 17 cm, o consumo pelo EUROCODE 2 foi 20,8% maior em relação à média. Nas lajes com espessuras iguais ou inferiores a 17 cm foi necessário aumentar o número de perímetros de armadura de punção a cada verificação pela Norma Européia, o que elevou o consumo de armadura de punção para aproximadamente 33,6% a mais em relação à média. A NBR 6118/03 teve áreas de armaduras de punção mais próximas da média, tendo uma diferença de aproximadamente de 8,1%.

### Laje L3

Na laje L3 as áreas de armadura de punção calculadas em cada norma são bastante distintas. Nessa configuração da laje, o ACI 318/08 fornece a área de armadura transversal necessária para resistir à punção apenas para a espessura de 24 cm, em função de a tensão solicitante ser superior a máxima resistida pelo concreto. O diagrama  $A_{sw} \times h$  da laje L3 é apresentado na figura 5.23.

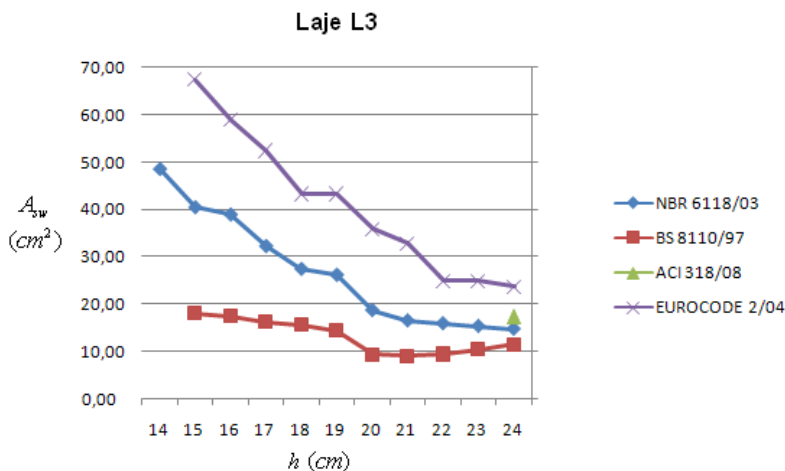


Figura 5.23 – Diagrama  $A_{sw} \times h$  da laje L3

A BS 8110/97 forneceu as menores áreas de armadura transversal de punção, sendo em média 43,3% menor em relação à NBR 6118 e 65,8% menor em relação ao EUROCODE 2. A Norma Brasileira teve resultados mais próximos da média, variando em aproximadamente 5,3% os valores das áreas das armaduras de punção calculadas. A NBR forneceu áreas de armadura transversal de punção em média 39,8% menores às calculadas pela Norma Européia.







## 6 ANÁLISE DAS NORMAS

A análise das normas é baseada na “aplicabilidade” e “acessibilidade” das normas, sem levar em conta a análise dos resultados. Entende-se por aplicabilidade situações em que há vantagens em adotar um ou outro critério normativo. Acessibilidade diz respeito à facilidade de compreensão e uso dos métodos. É importante entender que esta análise é bastante subjetiva e, portanto pode variar de acordo com a interpretação de cada engenheiro.

No que diz respeito à “aplicabilidade”, existem situações específicas em que há vantagens em fazer uso das Normas Britânica ou Americana. Em casos onde a estrutura já foi analisada e dimensionada, porém só se tem acesso aos desenhos das formas e armaduras, é possível verificar ligações laje-pilar pelo método da BS 8110/97; não há necessidade de entrar com os valores dos momentos, tem-se a taxa de armadura longitudinal de flexão e as medidas da laje e do pilar, e pode-se obter a reação concentrada pelo método da área de influência. Em casos em que foi feita a análise da estrutura, mas esta ainda não foi dimensionada, é possível fazer a verificação de ligações laje-pilar pelo método do ACI 318/08; não é necessário entrar com valores de armadura longitudinal de flexão, têm-se acesso às dimensões da laje e do pilar e aos esforços. Porém nesse caso é necessário estipular o valor da resistência específica do concreto que será usado na estrutura. Sabe-se, no entanto, que ensaios experimentais têm mostrado que fatores como a relação das dimensões de pilares retangulares, o efeito dos momentos fletores e a taxa de armadura de flexão influenciam na resistência da ligação laje-pilar. Em casos comuns, onde se têm acesso aos esforços e ao dimensionamento da estrutura, os critérios da NBR 6118/03 e do EUROCODE 2/04 permitem que se incluam estes dados na verificação da punção.

No geral, é necessário um mesmo grau de instrução para compreender e aplicar os métodos de cálculo da punção propostos em cada norma. Os dados de entrada de todas as fórmulas são simples e obtidos com precisão. Em verificações onde não há necessidade do uso de armadura de punção, a BS 8110/97 acaba sendo um pouco mais simples que as demais normas devido a alguns aspectos, como a adoção do perímetro de controle retangular, a desconsideração dos efeitos da “retangularidade” dos pilares e dos momentos fletores.



## CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Com a finalidade de se compararem os critérios normativos para o cálculo da punção em lajes de concreto armado, bem como os diversos parâmetros inerentes a eles, analisou-se 714 resultados obtidos na verificação de ligações laje-pilar para pilares internos em três lajes com dimensões distintas, variando suas espessuras. Os resultados foram calculados segundo recomendações de quatro normas: ACI 318/08, BS 8110/97, EUROCODE 2/04 e NBR 6118/03.

Dividiu-se a análise dos resultados em situações sem uso de armadura de punção e com uso da armadura transversal de punção. A análise comparativa avaliou resistências e economia. A comparação entre os resultados obtidos e suas respectivas médias, bem como a comparação entre os resultados de cada norma formam a base do estudo comparativo.

Na análise das lajes sem o uso de armadura de punção, pode-se concluir que as resistências obtidas pelas Normas Britânica e Americana variam em relação à média conforme se mudam as excentricidades das cargas concentradas. Para excentricidades menores, a BS 8110/97 apresentou valores próximos à média ao passo que o ACI 318/08 forneceu resistências maiores. Em casos onde as excentricidades das cargas concentradas foram maiores, a Norma Britânica resistiu a cargas mais altas e a Norma Americana foi mais conservadora em relação às outras normas. A NBR 6118/03 e o EUROCODE 2/04 forneceram valores sempre muito próximos da média. A representatividade dos efeitos dos momentos em relação à tensão solicitante nas lajes estudadas mostrou que conforme se diminuem as espessuras das lajes e aumentam-se as excentricidades das cargas concentradas, o coeficiente de majoração destas reações proposto pela Norma Britânica se afasta da média.

Na análise das lajes com uso de armadura de punção, pode-se concluir que as resistências obtidas na verificação da punção pelas Normas Brasileira e Européia tiveram uma relação tensão resistente e solicitante sempre próxima a 1, o que pode significar um melhor aproveitamento da armadura transversal. A Norma Britânica apresentou tensões resistentes por vezes maiores que as solicitantes, pelo fato dos critérios de distribuição e espaçamento entre pinos ou estribos dessa norma ocasionarem em uma necessidade de área de armadura maior que a necessária para resistir apenas aos esforços. Com relação ao consumo

médio de armadura transversal de punção, a BS 8110/97 foi a que forneceu as menores áreas, seguida pela NBR 6118/03. O ACI 318/08 foi bastante limitado, não permitindo o dimensionamento da armadura de punção em mais da metade das situações analisadas. No geral, o EUROCODE 2/04 apresentou os resultados mais conservadores, tendo áreas de armadura transversal bastante próximas às obtidas pela norma Americana na laje L2.

Para complementação das análises feitas sobre a punção em ligações laje-pilar e com base nos estudos realizados no presente trabalho, sugere-se:

- Realização de estudos dos critérios normativos para o cálculo da punção em ligações laje-pilar com efeito de momentos e comparação com resultados obtidos em ensaios;
- Realização de análises semelhantes ao presente estudo em lajes protendidas;

Estudos de verificação da punção em pilares de canto e de borda em lajes de concreto armado e protendido;

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

ALANDER, C. **Punching Prevention in Flat RC Slabs**. Im: INTERNATIONAL WORKSHOP ON PUNCHING SHEAR CAPACITY OF RC SLABS. p.145 – 154. Sweden, 2000.

ALEXANDER, S.D.B.; SIMMONDS, S.H. ACI Structural Journal, v.89, n.4, July/August. 1992.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. (ACI 318-08). - **Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary**. Michigan: Farmington Hills, 2002.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR6118: Projeto de Estruturas de Concreto Armado**. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS **NBR6118: Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado**. Rio de Janeiro, 1978.

BRITISH STANDARD. **BS 8110:1997: Structural use of concrete**. Sheffield, 2002.

BRITISH STANDARDS INSTITUTION DRAFT FOR DEVELOPMENT. DD ENV 206:1992. Concrete. Performance, production, placing and compliance criteria. London.

BEEBY, A. W. and NARAYANAN, R. S. "**Designers' handbook to Eurocode 2**". Thomas Telford, 1995.

CAPRANI. C.. **Punching Shear. 3rd Architecture**. Disponível em: <<http://www.colincaprani.com/files/notes/Punching%20shear.pdf>>  
Acesso em: maio de 2009

CARVALHO, A.L. **Análise Teórica da Resistência à Punção em Lajes Cogumelo com Armadura de Cisalhamento**. 2000, 190p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia Civil / Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2000.

CARVALHO, A. L., **Resistência ao Puncionamento de Lajes Cogumelo Protendidas com Armadura de Cisalhamento – Comparação com Recomendações da NBI**, Anais do 46º Congresso Brasileiro do Concreto, 2004, 12p.

CARVALHO, C.B. **Análise crítica dos critérios normativos de dimensionamento à punção em lajes lisas**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia / Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2008.

CARVALHO, R.C., PINHEIRO, L.M. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado**. São Paulo: PINI, 2009. v.2.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON, CEB - FIP. **CEB – FIP Model Code Design Code 1990: Final Draft**. Bulletin d'Information, CEB, Lousanne, July 1991.

CORDOVIL, F.A.B.. **Lajes de Concreto Armado – Punção**. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, 1997. 221p.

CORLEY, W.G., HAWKINS, N.M. **Shearhead reinforcement for slabs**. ACI Journal, v.65, n.10, p.811-824. 1968.

DECON Studrail approvals. <http://www.deconusa.com/>. Julho, 2009

ELGABRY, A.A., GHALI, A.. **Moment transfer by shear in slab-column connections**. ACI Journal, v.93, n.2, p.187-196. Mar, 1996.

ELSTNER, R.C., HOGNESTAD, E. **Shearing strength of reinforced concrete slabs**. ACI Journal, v.28, n.1, p.29-57. July, 1956.

EMERICK, A. A. **Projeto e Execução de Lajes Protendidas**. Brasília: Interciência Ltda., 2003.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION, **EUROCODE 2: Design of Concrete Structures – Part 1: General Rules and Rules for Building**, Bruxelas, 2004, 226p.

FIGUEIREDO, A.D.. **Concreto com fibras de aço**. BT/PCC/206. Escola. Politécnica, Universidade de São Paulo. 70 p. São Paulo, 2000.

FIGUEIREDO, A.D.. **Concreto com fibras de aço**. BT/PCC/206. Escola. Politécnica, Universidade de São Paulo. 70 p. São Paulo, 2000.

FIGUEIREDO FILHO, J.R.. **Sistemas estruturais de lajes sem vigas: subsídios para o projeto e execução**. São Carlos, 1989, 272p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1989.

FUSCO, P.B. **Investigação experimental sobre o cisalhamento em lajes de concreto armado**. Boletim técnico, BT/PEF 8505), EPUSP. São Paulo, 1985.

GASPARINI, D.A. Contributions of C. A. P. Turner to Development of Reinforced Concrete Flat Slabs 1905–1909. **Journal of Structural Engineering**, Reston, v.128, n. 10, p. 1243-1252, Oct. 2002.

GHALI, A.; MEGALLY, S. **Design for Punching Shear Strenght with ACI 318-95**. ACI Sructural Journal. v.96, n.42, p.3439-3461.1999.

GOMES, R.B. **Punching resistance of reinforced concrete flat slabs with shear reinforcement**. PhD Thesis. The Polytechnic of Central London. London, 1991.

HALFEN. Halfen - **Punching shear reinforcement**. Disponível em: <<http://www.halfen.co.uk/CategoryDetail.aspx?catID=11>> Acesso em: agosto 2009.

HOGNESTAD, E.. **Shearing strength of reinforced column footings**. ACI Journal, v.50, n.3, p. 189-208. 1953.

INSTITUTO BRASILEIRO DO CONCRETO. **Comentários Técnicos e Exemplos de Aplicação da NB-1. NBR 6118:2003 - Projeto de estruturas de concreto – procedimento**. São Paulo: IBRACON, 2006.

LEONHARDT, F.; MÖNIG, E.. **Construções de concreto: casos especiais de dimensionamento de estruturas de concreto armado**. Interciência, v.2. Rio de Janeiro, 1978.

LIBÓRIO, J.B.L. **Estudo experimental da ruína de ligações laje-pilar em bordas com pilares de seção retangular.**São Carlos, 1985. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1985.

LIMA, Juliana Soares. **Verificações da punção e da estabilidade global em edifícios de concreto: desenvolvimento e aplicação de recomendações normativas.** Dissertação de mestrado. EESC-USP: São Carlos, 2001.

MACGREGOR, J.G.. **Reinforced Concrete – Mechanics and Design.** 3.ed. New Jersey:Prentice-Hall Inc.,1997.

MELGES, J.L.P. **Punção em lajes: exemplos de cálculo e análise teórico-experimental.** São Carlos, 1995, 252 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1995.

MELGES, J.L.P. **Análise experimental da punção em lajes de concreto armado e protendido.**São Carlos, 2001, 414 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2001.

MELGES, J.L.; PINHEIRO, L. Punção em Lajes Lisas: a NBR 6118:2003 e sua Versão Anterior. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 46, 2004, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: Instituto Brasileiro do Concreto – IBRACON, 2004.

MELO, G.S.S.A. **Proposição de item da norma com referência ao cálculo de armadura contra colapso progressivo em lajes cogumelo.** REIBRAC, 36., Anais. V.2, p.725-734. Porto Alegre, 1994.

MUSSE, T.H. **Punção em Lajes Cogumelo: Fibras de Aço e Armadura de Cisalhamento.** 2004, 189p. Dissertação (Mestrado)– Escola de Engenharia Civil / Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2004.

OLIVEIRA, D.R.C. **Análise experimental de lajes cogumelo de concreto armado com armadura de cisalhamento ao**



**puncionamento.** Dissertação (mestrado. Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília. Brasília, 1998.

PILAKOUTAS, K.; IOANNOU, C.. **Verification of a Novel Punching Shear Reinforcement system for Flat slabs** Im: INTERNATIONAL WORKSHOP ON PUNCHING SHEAR CAPACITY OF RC SLABS. p.135 – 143.. Sweden, 2000.

PILAKOUTAS, K.; LI, X. **Shear band: novel punching shear reinforcement for flat slabs.** Im: The Mouchel Centenary on Innovation on Civil and Structural Engineering. p.35-45. England, 1997.

PINTO, R.C.A.. **Punção assimétrica de lajes.** Dissertação. COPPE,UFRJ. Rio de Janeiro, 1993.

PORTAL DO CONCRETO. **Concreto com Adição de Fibras.** Disponível em: <  
<http://www.portaldoconcreto.com.br/index.php?lingua=1&pagina=fibra>  
>. Acesso em: 12 agosto 2009.

REGAN, P.E. **Punching Tests of Concrete Slabs with Riss Star Shear Reinforcement for Riss AG.** School of Architecture & Engineering, University of Westminster, London, 1993.

REGAN, P.E.. **Shear combs, reinforcement against punching.** The Structural Engineer. London, 1985.

REGAN, P.E.. The Shear Specialists. **Shear Reinforcement PSR-2.** University of Westminster, London, 1998.

REGAN, P.E.. **Structural Concrete.** Fib Manual, v.3. Lausanne, Switzerland. December, 2000.

RICHART, F.E.. **Reinforced concrete wall and column footings.** ACI Journal, v.45, n.3, p.97-127. 1948.

SHEHATA, I.A.E.M.. **Punção em Lajes,** 6o. Colóquio sobre Estruturas de Concreto Armado e Protendido, 1990, Rio de Janeiro , Brasil.

SHEHATA, I.A.E.M. **Simplified model for estimating the punching resistance of reinforced concrete slabs.** Material and Structures, n.23, p.364-371, 1990.

SHEHATA, I.A.E.M. **Theory of punching in concrete slabs.** PhD Thesis. The Polytechnic of Central London. London, 1985.

SHERIF, A.G.; DILGER, W.H. **Analysis and Deflections of Reinforced Concrete Flat Slabs.** Canadian Journal Civil Engineering, 1998. v. 25, p.451 – 46

SOUZA, R.A.; BITTENCOURT, T.N.. **Definição de expressões visando relacionar  $f_c'$  e  $f_{ck}$ .** *IV Encontro Tecnológico da Engenharia Civil e Arquitetura*, Maringá, Paraná, Novembro, Vol.1, pp.282-290, 2003.

SOUZA, R.M.; MELO, G.S.S.A.; GOMES, R.B.. **Punção em lajes lisas de concreto armado com furos adjacentes ao pilar.** In: 51o. Congresso Brasileiro do Concreto - IBRACON 2009, 2009, Curitiba. Anais do 51o. Cong Brasil do Concreto - Instituto Brasileiro do Concreto -, 2009. p. 1-15

SOUZA, R.M.; MELO, G.S.S.A.; GOMES, R.B.. **Punção em lajes lisas de concreto armado com furos adjacentes ao pilar e transferência de momento.** In: 51o. Congresso Brasileiro do Concreto - IBRACON 2009, 2009, Curitiba. Anais do 51o. Cong Brasil do Concreto - Instituto Brasileiro do Concreto -, 2009. p. 1-15.

TAKEYA, T. **Estudo experimental da ruína de ligações laje-pilar em bordas de laje - cogumelo.** 1981, 202p. Dissertação – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1981.

TALBOT, A.N. **Reinforced Concrete Wall Footings and Column Footings,** Engineering Experiment Station, University of Illinois, Bulletin 67, USA, 1925.

TRAUTWEIN, L.M. **Punção em lajes cogumelo de concreto armado: análise experimental e numérica.** 2006, 277 f. Tese (Doutorado em

Engenharia de Estruturas) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2006.

WALRAVEN, J.C. **Thinking About Codes**. FIB journal, v.5, n.3, p.93-100. September, 2004.

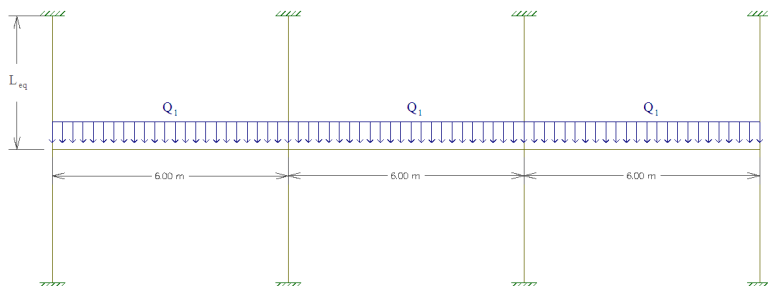
ZAMBRANA VARGAS, E. N. **Punção em Lajes-Cogumelo de Concreto de Alta Resistência Reforçado com Fibras de Aço**. 1997, 200p. Dissertação – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1997



**ANEXO A**

**CARREGAMENTOS E PÓRTICOS PARA O  
CÁLCULO DOS MOMENTOS FLETORES**

## 1. LAJE L1 – FAIXA 1



**Figura A.1 – Pórtico da Faixa 1 da laje L1**

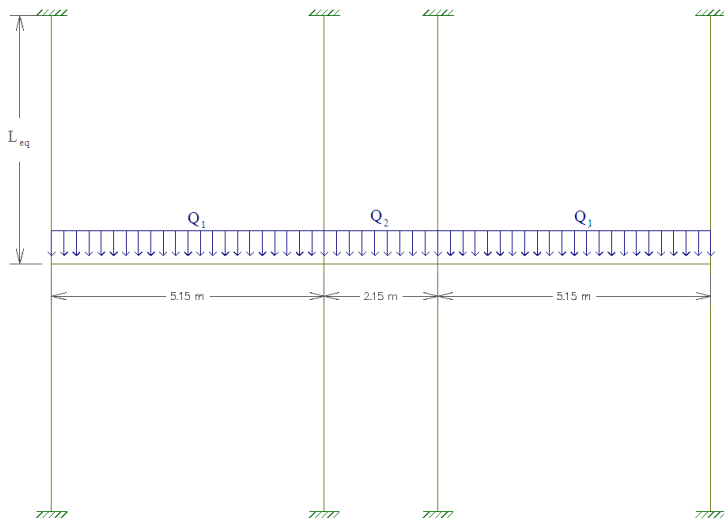
Dados:

- $Q_1$  – Carregamento total de cálculo distribuído;
- $L_{eq}$  – Altura equivalente calculada em função da espessura da laje;
- $b$  (largura da laje) – 365 cm.

Tabela A.1 – Carregamento distribuído  $Q_1$  (kN/m) para a Faixa 1 da laje L1

h (cm)	NBR 6118/03 kN	BS 8110/97	EUROCODE 2/04	ACI 318/08
24	45,99	48,18	45,99	49,28
23	44,97	47,16	45,00	48,25
22	43,95	46,14	44,02	47,23
21	42,92	45,11	43,03	46,21
20	41,90	44,09	42,05	45,19
19	40,88	43,07	41,06	44,17
18	39,86	42,05	40,08	43,14
17	38,84	41,03	39,09	42,12
16	37,81	40,00	38,11	41,10
15	36,79	38,98	37,12	40,08
14	35,77	37,96	36,14	39,06

## 2. LAJE L1 – FAIXA 2



**Figura A.2 – Pórtico da Faixa 2 da laje L1**

Dados:

- $Q_1$  – Carregamento total de cálculo distribuído na região das treliças;
- $Q_2$  – Carregamento total de cálculo distribuído na região maciça;
- $Leq$  – Altura equivalente calculada em função da espessura da laje;
- $b$  (largura da laje) – 600 cm.

Tabela A.2 – Carregamento distribuído  $Q_1$  (kN/m) para a Faixa 2 da laje L1

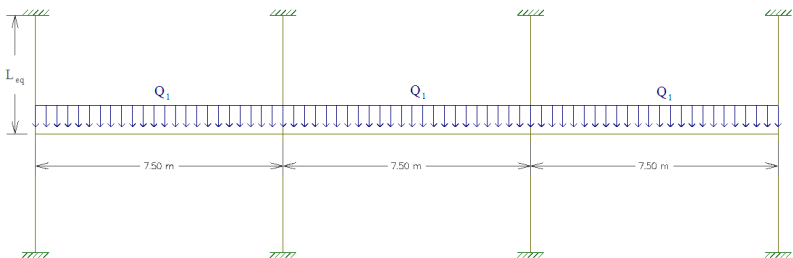
h (cm)	NBR 6118/03 kN	BS 8110/97	EUROCODE 2/04	ACI 318/08
24	75,60	79,20	75,60	81,00
23	73,92	77,52	73,98	79,32
22	72,24	75,84	72,36	77,64
21	70,56	74,16	70,74	75,96
20	68,88	72,48	69,12	74,28
19	67,20	70,80	67,50	72,60
18	65,52	69,12	65,88	70,92
17	63,84	67,44	64,26	69,24
16	62,16	65,76	62,64	67,56
15	60,48	64,08	61,02	65,88
14	58,80	62,40	59,40	64,20



Tabela A.3 – Carregamento distribuído  $Q_2$  (kN/m) para a Faixa 2 da laje L1

h (cm)	NBR 6118/03 kN	BS 8110/97	EUROCODE 2/04	ACI 318/08
24	85,68	89,28	85,32	91,08
23	83,58	87,18	83,30	88,98
22	81,48	85,08	81,27	86,88
21	79,38	82,98	79,25	84,78
20	77,28	80,88	77,22	82,68
19	75,18	78,78	75,20	80,58
18	73,08	76,68	73,17	78,48
17	70,98	74,58	71,15	76,38
16	68,88	72,48	69,12	74,28
15	66,78	70,38	67,10	72,18
14	64,68	68,28	65,07	70,08

### 3. LAJE L2 – FAIXA 1



**Figura A.3 – Pórtico da Faixa 1 da laje L2**

Dados:

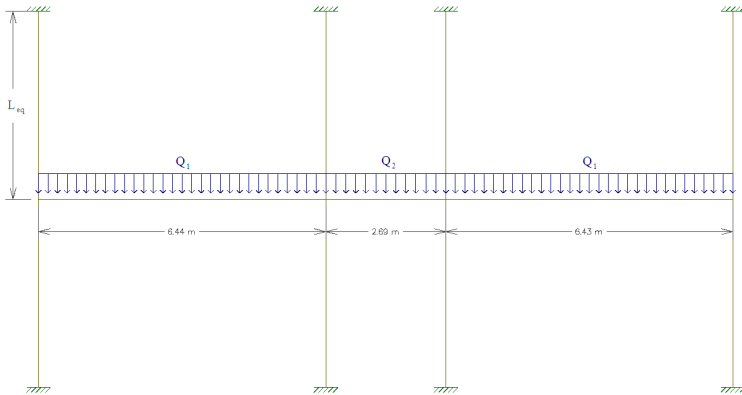
- $Q_1$  – Carregamento total de cálculo distribuído;

- $Leq$  – Altura equivalente calculada em função da espessura da laje;
- $b$  (largura da laje) – 456 cm.

Tabela A.4 – Carregamento distribuído  $Q1$  (kN/m) para a Faixa 1 da laje L2

h (cm)	NBR 6118/03 kN	BS 8110/97	EUROCODE 2/04	ACI 318/08
24	57,49	60,23	57,49	61,59
23	56,21	58,95	56,26	60,32
22	54,93	57,67	55,02	59,04
21	53,66	56,39	53,79	57,76
20	52,38	55,12	52,56	56,48
19	51,10	53,84	51,33	55,21
18	49,82	52,56	50,10	53,93
17	48,55	51,28	48,86	52,65
16	47,27	50,01	47,63	51,37
15	45,99	48,73	46,40	50,10
14	44,71	47,45	45,17	48,82

#### 4. LAJE L2 – FAIXA 2



**Figura A.4 – Pórtico da Faixa 2 da laje L2**

Dados:

- $Q_1$  – Carregamento total de cálculo distribuído região das treliças;
- $Q_2$  – Carregamento total de cálculo distribuído região maciça;
- $L_{eq}$  – Altura equivalente calculada em função da espessura da laje;
- $b$  (largura da laje) – 750 cm.

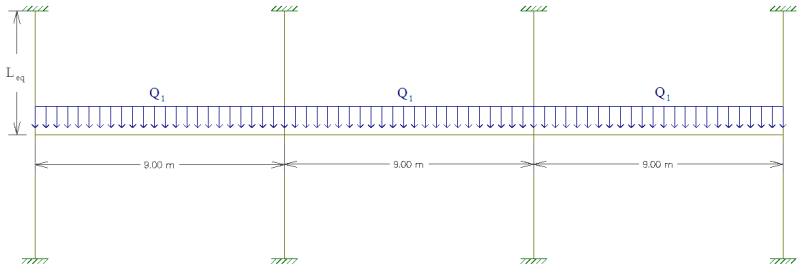
Tabela A.5 – Carregamento distribuído Q1 (kN/m) para a Faixa 2 da laje L2

h (cm)	NBR 6118/03 kN	BS 8110/97	EUROCODE 2/04	ACI 318/08
24	81,90	86,40	82,35	88,65
23	80,33	84,83	80,83	87,08
22	78,75	83,25	79,31	85,50
21	77,18	81,68	77,79	83,93
20	75,60	80,10	76,28	82,35
19	74,03	78,53	74,76	80,78
18	72,45	76,95	73,24	79,20
17	70,88	75,38	71,72	77,63
16	69,30	73,80	70,20	76,05
15	67,73	72,23	68,68	74,48
14	66,15	70,65	67,16	72,90

Tabela A.6 – Carregamento distribuído Q2 (kN/m) para a Faixa 2 da laje L2

h (cm)	NBR 6118/03 kN	BS 8110/97	EUROCODE 2/04	ACI 318/08
24	107,10	111,60	106,65	113,85
23	104,48	108,98	104,12	111,23
22	101,85	106,35	101,59	108,60
21	99,23	103,73	99,06	105,98
20	96,60	101,10	96,53	103,35
19	93,98	98,48	93,99	100,73
18	91,35	95,85	91,46	98,10
17	88,73	93,23	88,93	95,48
16	86,10	90,60	86,40	92,85
15	83,48	87,98	83,87	90,23
14	80,85	85,35	81,34	87,60

## 5. LAJE L3 – FAIXA 1



**Figura A.5 – Pórtico da Faixa 1 da laje L3**

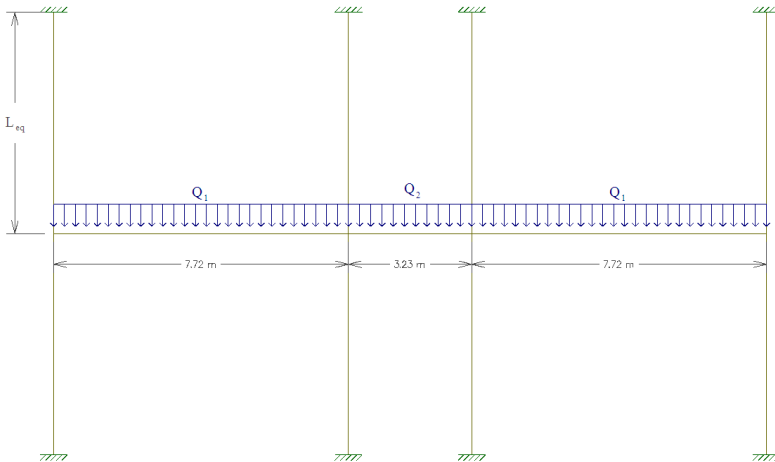
Dados:

- $Q_1$  – Carregamento total de cálculo distribuído;
- $L_{eq}$  – Altura equivalente calculada em função da espessura da laje;
- $b$  (largura da laje) – 547,5 cm.

Tabela A.7 – Carregamento distribuído  $Q_1$  (kN/m) para a Faixa 1 da laje L3

h (cm)	NBR 6118/03 kN	BS 8110/97	EUROCODE 2/04	ACI 318/08
24	68,99	72,27	68,99	73,91
23	67,45	70,74	67,51	72,38
22	65,92	69,20	66,03	70,85
21	64,39	67,67	64,55	69,31
20	62,85	66,14	63,07	67,78
19	61,32	64,61	61,59	66,25
18	59,79	63,07	60,12	64,71
17	58,25	61,54	58,64	63,18
16	56,72	60,01	57,16	61,65
15	55,19	58,47	55,68	60,12
14	53,66	56,94	54,20	58,58

## 6. LAJE L3 – FAIXA 2



**Figura A.6 – Pórtico da Faixa 2 da laje L3**

Dados:

- Q<sub>1</sub> – Carregamento total de cálculo distribuído região das treliças;
- Q<sub>2</sub> – Carregamento total de cálculo distribuído região maciça;
- L<sub>eq</sub> – Altura equivalente calculada em função da espessura da laje;
- b (largura da laje) – 900 cm.

Tabela A.8 – Carregamento distribuído Q<sub>1</sub> (kN/m) para a Faixa 2 da laje L3

h (cm)	NBR 6118/03 kN	BS 8110/97	EUROCODE 2/04	ACI 318/08
24	113,40	118,80	113,40	121,50
23	110,88	116,28	110,97	118,98
22	108,36	113,76	108,54	116,46
21	105,84	111,24	106,11	113,94
20	103,32	108,72	103,68	111,42
19	100,80	106,20	101,25	108,90
18	98,28	103,68	98,82	106,38
17	95,76	101,16	96,39	103,86
16	93,24	98,64	93,96	101,34
15	90,72	96,12	91,53	98,82
14	88,20	93,60	89,10	96,30

Tabela A.9 – Carregamento distribuído Q2 (kN/m) para a Faixa 2 da laje L3

h (cm)	NBR 6118/03 kN	BS 8110/97	EUROCODE 2/04	ACI 318/08
24	128,52	133,92	127,98	136,62
23	125,37	130,77	124,94	133,47
22	122,22	127,62	121,91	130,32
21	119,07	124,47	118,87	127,17
20	115,92	121,32	115,83	124,02
19	112,77	118,17	112,79	120,87
18	109,62	115,02	109,76	117,72
17	106,47	111,87	106,72	114,57
16	103,32	108,72	103,68	111,42
15	100,17	105,57	100,64	108,27
14	97,02	102,42	97,61	105,12



**ANEXO B**

**DADOS DOS DIAGRAMAS DA ANÁLISE  
DOS RESULTADOS**

Tabela B.1 – Valores dos diagramas  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  na laje L1

h (cm)	NBR 6118/03	BS 8110/97	ACI 318/08	EUROCODE 2/04	MÉDIA
24	1,26	1,20	1,64	1,35	1,36
23	1,22	1,16	1,54	1,25	1,29
22	1,16	1,11	1,42	1,19	1,22
21	1,09	1,09	1,32	1,12	1,15
20	1,05	1,07	1,22	1,04	1,09
19	1,00	1,03	1,12	0,97	1,03
18	0,95	0,99	1,02	0,93	0,97
17	0,89	0,96	0,93	0,87	0,91
16	0,84	0,92	0,83	0,82	0,85
15	0,79	0,89	0,75	0,77	0,80
14	0,74	0,85	0,66	0,71	0,74

Tabela B.2 – Valores dos diagramas  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  na laje L2

h (cm)	NBR 6118/03	BS 8110/97	ACI 318/08	EUROCODE 2/04	MÉDIA
24	0,91	0,89	1,03	0,88	0,93
23	0,88	0,88	0,96	0,85	0,89
22	0,83	0,85	0,90	0,79	0,84
21	0,79	0,83	0,83	0,76	0,80
20	0,76	0,81	0,77	0,73	0,77
19	0,71	0,78	0,70	0,70	0,72
18	0,68	0,75	0,64	0,66	0,68
17	0,64	0,74	0,58	0,63	0,65
16	0,61	0,70	0,52	0,60	0,61
15	0,57	0,68	0,47	0,56	0,57
14	0,53	0,65	0,41	0,52	0,53

Tabela B.3 – Valores dos diagramas  $\tau_R / \tau_s \times h$  na laje L3

h (cm)	NBR 6118/03	BS 8110/97	ACI 318/08	EUROCODE 2/04	MÉDIA
24	0,71	0,71	0,68	0,69	0,70
23	0,67	0,68	0,63	0,67	0,66
22	0,64	0,66	0,59	0,62	0,63
21	0,61	0,65	0,54	0,59	0,60
20	0,58	0,62	0,50	0,57	0,57
19	0,56	0,62	0,46	0,55	0,54
18	0,53	0,60	0,42	0,52	0,52
17	0,50	0,59	0,38	0,49	0,49
16	0,48	0,58	0,34	0,47	0,46
15	0,45	0,56	0,30	0,45	0,44
14	0,42	0,55	0,27	0,42	0,41

Tabela B.4 – Valores dos diagramas  $F_{MÁX} \times h$  na laje L1

h (cm)	NBR 6118/03	BS 8110/97	ACI 318/08	EUROCODE 2/04	MÉDIA
	$F_{MÁX}$ (kN)	$F_{MÁX}$ (kN)	$F_{MÁX}$ (kN)	$F_{MÁX}$ (kN)	$F_{MÁX}$ (kN)
24	358	347	527	370	401
23	333	328	480	341	371
22	310	312	436	313	343
21	287	294	392	285	315
20	265	277	349	257	287
19	244	266	307	233	263
18	223	252	267	214	239
17	202	238	228	193	215
16	181	224	190	176	193
15	162	210	153	156	170
14	138	197	117	133	146

Tabela B.5 – Valores dos diagramas  $F_{MÁX}$  x  $h$  na laje L2

h (cm)	NBR 6118/03	BS 8110/97	ACI 318/08	EUROCODE 2/04	MÉDIA
	$F_{MÁX}$ (kN)	$F_{MÁX}$ (kN)	$F_{MÁX}$ (kN)	$F_{MÁX}$ (kN)	$F_{MÁX}$ (kN)
24	388	400	479	372	410
23	357	378	431	344	378
22	327	359	383	317	347
21	299	341	336	291	317
20	271	324	291	266	288
19	244	306	246	242	260
18	217	292	202	218	232
17	190	277	160	192	205
16	164	262	118	167	178
15	136	247	77	141	150
14	108	232	38	114	123

Tabela B.6 – Valores dos diagramas  $F_{MÁX}$  x  $h$  na laje L3

h (cm)	NBR 6118/03	BS 8110/97	ACI 318/08	EUROCODE 2/04	MÉDIA
	$F_{MÁX}$ (kN)	$F_{MÁX}$ (kN)	$F_{MÁX}$ (kN)	$F_{MÁX}$ (kN)	$F_{MÁX}$ (kN)
24	403	462	387	395	412
23	363	434	332	360	372
22	326	411	279	325	335
21	291	391	226	295	301
20	256	373	174	265	267
19	225	357	124	235	235
18	188	342	75	207	203
17	158	328	26	177	172
16	125	313	-	145	194
15	92	300	-	114	169
14	56	283	-	80	140

Tabela B.7 – Valores dos diagramas  $\frac{(F + M)}{F} \times h$  na laje L1

h (cm)	NBR 6118/03	BS 8110/97	ACI 318/08	EUROCODE 2/04
24	1,15	1,15	1,22	1,12
23	1,17	1,15	1,24	1,13
22	1,19	1,15	1,27	1,15
21	1,21	1,15	1,29	1,17
20	1,23	1,15	1,31	1,18
19	1,25	1,15	1,34	1,20
18	1,27	1,15	1,37	1,23
17	1,30	1,15	1,40	1,24
16	1,33	1,15	1,42	1,28
15	1,37	1,15	1,46	1,32
14	1,41	1,15	1,49	1,35

Tabela B.8 – Valores dos diagramas  $\frac{(F + M)}{F} \times h$  na laje L2

h (cm)	NBR 6118/03	BS 8110/97	ACI 318/08	EUROCODE 2/04
24	1,18	1,15	1,24	1,14
23	1,20	1,15	1,27	1,15
22	1,22	1,15	1,29	1,17
21	1,25	1,15	1,31	1,19
20	1,27	1,15	1,34	1,21
19	1,30	1,15	1,37	1,23
18	1,33	1,15	1,39	1,26
17	1,36	1,15	1,42	1,28
16	1,39	1,15	1,46	1,32
15	1,43	1,15	1,49	1,35
14	1,47	1,15	1,53	1,39

Tabela B.9 – Valores dos diagramas  $\frac{(F + M)}{F} x h$  na laje L3

h (cm)	NBR 6118/03	BS 8110/97	ACI 318/08	EUROCODE 2/04
24	1,21	1,15	1,31	1,16
23	1,23	1,15	1,34	1,17
22	1,26	1,15	1,36	1,19
21	1,28	1,15	1,39	1,21
20	1,31	1,15	1,42	1,24
19	1,34	1,15	1,46	1,26
18	1,37	1,15	1,49	1,29
17	1,40	1,15	1,53	1,32
16	1,44	1,15	1,57	1,36
15	1,49	1,15	1,61	1,39
14	1,53	1,15	1,65	1,44

Tabela B.10 – Valores dos diagramas  $e_{MAX} x h$

h (cm)	NBR 6118/03	ACI 318/08	EUROCODE 2/04
	$e_{MAX}$ (cm)	$e_{MAX}$ (cm)	$e_{MAX}$ (cm)
24	4,70	10,30	3,00
23	4,50	9,80	2,60
22	4,30	9,40	2,40
21	4,10	9,00	2,20
20	4,00	8,70	2,20
19	4,00	8,50	2,30
18	4,00	8,40	2,50
17	3,60	7,70	2,10
16	3,70	7,20	2,30
15	3,80	7,30	2,50
14	3,80	7,00	2,60

Tabela B.11 – Valores dos diagramas *coef. maj. x h*

h (cm)	NBR 6118/03	BS 8110/97	ACI 318/08	EUROCODE 2/04
24	1,16	1,15	1,48	1,07
23	1,15	1,15	1,47	1,06
22	1,15	1,15	1,46	1,06
21	1,15	1,15	1,45	1,06
20	1,15	1,15	1,45	1,06
19	1,15	1,15	1,45	1,07
18	1,16	1,15	1,45	1,07
17	1,16	1,15	1,43	1,07
16	1,15	1,15	1,41	1,06
15	1,18	1,15	1,43	1,09
14	1,19	1,15	1,42	1,10

Tabela B.12 – Valores dos diagramas  $\frac{\tau_R}{\tau_S} \times h$  na laje L1 com uso de armadura de punção

h (cm)	NBR 6118/03	BS 8110/97	ACI 318/08	EUROCODE 2/04	MÉDIA
24	1,26	1,20	1,64	1,35	1,36
23	1,22	1,16	1,54	1,25	1,29
22	1,16	1,11	1,42	1,19	1,22
21	1,09	1,09	1,32	1,12	1,15
20	1,05	1,07	1,22	1,04	1,09
19	1,00	1,03	1,12	1,00	1,04
18	1,16	1,76	1,02	1,01	1,24
17	1,12	1,75	1,02	1,03	1,23
16	1,09	1,78	1,02	1,03	1,23
15	1,05	1,78	1,01	1,01	1,21
14	1,02	1,81	0,99	1,05	1,22

Tabela B.13 – Valores dos diagramas  $\tau_R/\tau_S \times h$  na laje L2 com uso de armadura de punção

h (cm)	NBR 6118/03	BS 8110/97	ACI 318/08	EUROCODE 2/04	MÉDIA
24	1,00	1,44	1,03	1,02	1,12
23	1,01	1,41	1,01	1,03	1,12
22	1,00	1,34	1,01	1,00	1,09
21	1,00	1,29	1,02	1,01	1,08
20	1,03	1,24	1,02	1,00	1,07
19	1,03	1,23	1,01	1,02	1,07
18	1,00	1,25	0,95	1,00	1,05
17	1,01	1,24	0,87	1,03	1,04
16	1,01	1,26	0,78	1,03	1,02
15	1,00	1,26	0,70	1,01	0,99
14	1,00	1,28	0,62	1,02	0,98

Tabela B.14 – Valores dos diagramas  $\tau_R/\tau_S \times h$  na laje L3 com uso de armadura de punção

h (cm)	NBR 6118/03	BS 8110/97	ACI 318/08	EUROCODE 2/04	MÉDIA
24	1,02	1,10	1,02	1,01	1,04
23	1,01	1,04	0,95	1,05	1,01
22	1,00	1,00	0,88	1,01	0,97
21	1,01	1,00	0,81	1,02	0,96
20	1,01	1,00	0,74	1,01	0,94
19	1,02	1,05	0,68	1,01	0,94
18	1,03	1,09	0,62	1,01	0,94
17	1,01	1,13	0,56	1,02	0,93
16	1,01	1,19	0,50	1,02	0,93
15	1,02	1,23	0,45	1,02	0,93
14	1,00	1,09	0,40	0,87	0,84



Tabela B.15 – Valores dos diagramas  $A_{sw}$  x  $h$  na laje L1

h (cm)	NBR 6118/03	BS 8110/97	ACI 318/08	EUROCODE 2/04	MÉDIA
	$A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> )
19	-	-	-	2,75	2,75
18	5,89	5,11	-	3,14	4,71
17	5,89	5,11	5,89	5,30	5,55
16	6,48	5,50	6,28	6,48	6,19
15	6,48	5,50	10,01	6,48	7,12
14	6,48	5,89	-	10,21	7,53

Tabela B.16 – Valores dos diagramas  $A_{sw}$  x  $h$  na laje L2

h (cm)	NBR 6118/03	BS 8110/97	ACI 318/08	EUROCODE 2/04	MÉDIA
	$A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> )
24	6,48	6,68	-	5,89	6,35
23	7,07	6,09	9,03	9,42	7,90
22	7,66	5,50	9,42	9,42	8,00
21	8,25	5,11	10,21	10,29	8,47
20	10,01	4,71	10,60	11,22	9,14
19	10,60	4,71	16,49	16,21	12,00
18	10,60	8,84	-	16,21	11,88
17	11,20	8,84	-	21,82	13,95
16	12,96	9,42	-	24,94	15,77
15	18,06	9,42	-	29,45	18,98
14	18,85	14,92	-	35,74	23,17

Tabela B.17 – Valores dos diagramas  $A_{sw} \times h$  na laje L3

h (cm)	NBR 6118/03	BS 8110/97	ACI 318/08	EUROCODE 2/04	MÉDIA
	$A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> )
24	14,73	11,58	17,46	23,69	16,87
23	15,32	10,60	-	24,94	16,95
22	15,90	9,62	-	24,94	16,82
21	16,50	9,23	-	32,73	19,49
20	18,70	9,42	-	35,85	21,32
19	26,18	14,53	-	43,20	27,97
18	27,43	15,71	-	43,20	28,78
17	32,29	16,30	-	52,37	33,65
16	38,97	17,48	-	58,92	38,46
15	40,52	18,06	-	67,33	41,97
14	48,63	-	-	-	48,63