

**LUIZ PAULO GOMES RIBEIRO**

**MODELAGEM CINEMÁTICA DE  
SISTEMAS ROBÓTICOS COOPERATIVOS:  
PROPOSTA DE UM JACOBIANO DE COOPERAÇÃO**

**FLORIANÓPOLIS  
2010**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELAGEM CINEMÁTICA DE**  
**SISTEMAS ROBÓTICOS COOPERATIVOS:**  
**PROPOSTA DE UM JACOBIANO DE COOPERAÇÃO**

Tese submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica.

**LUIZ PAULO GOMES RIBEIRO**

Florianópolis, 13 de agosto de 2010.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**MODELAGEM CINEMÁTICA DE  
SISTEMAS ROBÓTICOS COOPERATIVOS:  
PROPOSTA DE UM JACOBIANO DE COOPERAÇÃO**

LUIZ PAULO GOMES RIBEIRO

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de **Doutor em Engenharia**, especialidade **Engenharia Mecânica**, sendo aprovada em sua forma final.

---

Prof. Daniel Martins, Dr. Eng. - Orientador

---

Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr. - Co-orientador

---

Prof. Eduardo Alberto Fancello, D. Sc.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**BANCA EXAMINADORA:**

---

Prof. Daniel Martins, Dr. Eng. - Presidente

---

Prof. Fernando Cesar Lizarralde, D.Sc. - Relator

---

Prof. Tarcisio Antonio Hess Coelho, D.Sc.

---

Prof. Altamir Dias, D.Sc.

---

Prof. Henrique Simas, Dr.Eng.



“Senhor, sejam para o vosso coração misericordioso,  
todas as nossas alegrias, esperanças e aspirações!  
Ensina-nos a executar vossos propósitos desconhecidos.  
Abre-nos as portas de ouro das oportunidades do serviço.  
Ajuda-nos a compreender a vossa vontade!  
Seja o nosso trabalho a oficina sagrada de bênçãos infinitas.  
Converte-nos as dificuldades em estímulos santos.  
Transforma os obstáculos da senda em renovadas lições.”

Ao Prof. Raul Guenther (*in memoriam*),  
a minha saudade, gratidão e respeito.



## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar eu agradeço a DEUS, “a inteligência suprema, causa primária de todas as coisas”, manancial de amor, bondade, justiça, misericórdia e perfeição. Pai Amado, mesmo muitas vezes não compreendendo teus desígnios divinos, já sou sabedor que sempre existem propósitos para todos os acontecimentos, mesmo que eu os desconheça.

Agradeço a JESUS o amigo maior de toda a humanidade, médico das almas e modelo de conduta moral. Aos mentores e aos bons amigos espirituais que tanto me inspiraram e auxiliaram nesta jornada na busca do conhecimento, tão conturbada e que se configurou uma prova difícil para testar a minha fé.

Ao Prof. Raul Guenther (*in memoriam*) meu orientador, aquele quem apontou o caminho com segurança, coerência, confiança e lógica. Por tudo, aprendi a lhe admirar e respeitar. Seguramente, sua ausência foi meu maior desafio.

Ao Prof. Daniel Martins por levar adiante a função de me orientar e pela conduta no restante do caminho.

Ao Prof. Fernando Lizarralde por ter aceito ser o relator desta tese, e pela minuciosa revisão que engrandeceu este trabalho.

Aos professores Altamir Dias, Edson De Piere e Tarcisio Hess Coelho pelo tempo dispensado no exame deste material e pela disponibilidade demonstrada para viabilizarmos essa defesa em tempo.

Aos amigos do Laboratório de Robótica (LAR) pelo companheirismo e em especial ao André Oliveira pela parceria complementar, saudável e necessária.

Ao Exército Brasileiro pelos valores semeados na minha formação e pelo patrocínio.

Aos professores do IME e da UFSC que foram fundamentais para a formação de graduação e pós-graduação.

À minha família, seu amor me alimenta, me sustenta e é muito importante para mim.

E finalmente, muito obrigado a todo um elenco de pessoas que atuaram nos bastidores me apoiando.

Que DEUS transforme a minha gratidão para com todos, em dádivas sagradas e que retornem em forma de paz, saúde, prosperidade e amor para esses benfeitores.



# Lista de Figuras

1	Relação entre entradas e saídas com o modelo da cinemática diferencial . . . . .	7
2	Linhas de Pesquisa em Sistemas Multirroboés encontradas na literatura . . . . .	11
3	Classificação segundo NOF (NOF, 1999) . . . . .	12
4	Classificação segundo Tzafestas et al. (TZAFESTAS; PROKOPIOU; TZAFESTAS, 1998) . . . . .	14
5	Classificação segundo Zivanovic e Vukobratovic (ZIVANOVIC; VUKOBRATOVIC, 2005) . . . . .	15
6	Classificação expandida dos Sistemas Multirroboés . . . . .	16
7	Vantagens dos SRC . . . . .	19
8	Desvantagens dos SRC . . . . .	20
9	DA20 - <i>Dual-Arm Robot</i> (KOCHAN, 2006) . . . . .	20
10	DA20 - Cooperação em Montagem (KOCHAN, 2006) . . . . .	20
11	Cooperação para dobramento de chapas grandes (STARMATIK, 2007) . . . . .	21
12	Cooperação em posicionamento e soldagem (YASKAWA, 2007) . . . . .	22
13	Cadeia Cinemática do Sistema Cooperativo com 2 Manipuladores . . . . .	26
14	Designação das juntas no SRC . . . . .	32
15	Inclusão da cadeia virtual de Assur PPPS entre $p - t_2$ . . . . .	37
16	Grafo do Sistema Cooperativo com Cadeia Virtual de Assur entre $p$ e $t_2$ . . . . .	38
17	Localização dos pontos extremos das ferramentas dos robôs operadores . . . . .	44
18	Cadeia cinemática do Sistema Multirroboé Cooperativo . . . . .	45

---

19	Designação das Juntas no SRC . . . . .	49
20	Inclusão de CVA entre: $p - t_2, p - t_3, \dots e p - t_n$ . . . . .	53
21	Grafo do Sistema Cooperativo com $n - 1$ Cadeias Virtuais de Assur . . . . .	54
22	Metodologia de auxílio ao projeto e simulação de SRC . . . . .	64
23	Diagrama de blocos da resolução da cinemática inversa para SRC genérico . . . . .	66
24	Peça sobre a qual serão realizadas tarefas . . . . .	67
25	Robôs componentes do SRC . . . . .	70
26	Robô posicionador com a peça fixada no efetuador final . . . . .	70
27	Robôs envolvidos na tarefa 1-2 . . . . .	71
28	Robôs envolvidos na tarefa 1-3 . . . . .	72
29	Robôs envolvidos na tarefa 1-4 . . . . .	73
30	Arranjo físico inicialmente escolhido, posição relativa entre os robôs . . . . .	73
31	Diagrama de blocos da resolução da cinemática inversa para o SRC com 4 robôs . . . . .	75
32	Posições das juntas do KUKA, arranjo inicial . . . . .	76
33	Posições das juntas do STAUBLI, arranjo inicial . . . . .	76
34	Posições das juntas do KUKA com escala automática, arranjo inicial . . . . .	77
35	Realidade virtual mostrando ocorrência de colisão REIS/solo . . . . .	77
36	Arranjo final para o SRC, posição relativa entre os robôs . . . . .	78
37	Erro total de posição da tarefa 1-2 com cooperação simultânea . . . . .	79
38	Erro total de posição da tarefa 1-3 com cooperação simultânea . . . . .	80
39	Erro total de posição da tarefa 1-4 com cooperação simultânea . . . . .	80
40	Escala automática nos gráficos de erros de posição e orientação na tarefa 1-2 com cooperação simultânea . . . . .	81
41	Escala automática nos gráficos de erros de posição e orientação na tarefa 1-3 com cooperação simultânea . . . . .	81
42	Escala automática nos gráficos de erros de posição e orientação na tarefa 1-4 com cooperação simultânea . . . . .	82
43	Posições das juntas do REIS manipulando a peça na cooperação simultânea . . . . .	82

---

44	Velocidades das juntas do REIS manipulando a peça na cooperação simultânea	83
45	Posições das juntas do KUKA nas tarefa 1-2 com cooperação simultânea . . . . .	84
46	Velocidades das juntas do KUKA na tarefa 1-2 com cooperação simultânea . . .	85
47	Posições das juntas do ABB nas tarefa 1-3 com cooperação simultânea . . . . .	86
48	Velocidades das juntas do ABB na tarefa 1-3 com cooperação simultânea . . . . .	86
49	Posições das juntas do STAUBLI nas tarefa 1-4 com cooperação simultânea . . .	87
50	Velocidades das juntas do STAUBLI na tarefa 1-4 com cooperação simultânea . .	88
51	Erro total de posição da tarefa 1-2 com cooperação isolada . . . . .	89
52	Erro total de posição da tarefa 1-3 com cooperação isolada . . . . .	89
53	Erro total de posição da tarefa 1-4 com cooperação isolada . . . . .	90
54	Escala automática nos gráficos de erros de posição e orientação na tarefa 1-2 com cooperação isolada . . . . .	91
55	Posições das juntas do REIS manipulando a peça na cooperação isolada . . . . .	91
56	Velocidades das juntas do REIS manipulando a peça na cooperação isolada . . .	92
57	Posições das juntas do KUKA nas tarefa 1-2 com cooperação isolada . . . . .	93
58	Velocidades das juntas do KUKA na tarefa 1-2 com cooperação isolada . . . . .	94
59	Escala automática dos erros nos gráficos de erros de posição e orientação na tarefa 1-3 com cooperação isolada . . . . .	94
60	Posições das juntas do REIS manipulando a peça na cooperação isolada . . . . .	95
61	Velocidades das juntas do REIS manipulando a peça na cooperação isolada . . .	96
62	Posições das juntas do ABB nas tarefa 1-3 com cooperação isolada . . . . .	96
63	Velocidades das juntas do ABB na tarefa 1-3 com cooperação isolada . . . . .	97
64	Escala automática dos erros nos gráficos de erros de posição e orientação na tarefa 1-4 com cooperação isolada . . . . .	98
65	Posições das juntas do REIS manipulando a peça na cooperação isolada . . . . .	98
66	Velocidades das juntas do REIS manipulando a peça na cooperação isolada . . .	99
67	Posições das juntas do STAUBLI nas tarefa 1-4 com cooperação isolada . . . . .	100
68	Velocidades das juntas do STAUBLI na tarefa 1-4 com cooperação isolada . . . .	100

---

69	Erro total de posição da tarefa 1-2 com a peça parada . . . . .	101
70	Erro total de posição da tarefa 1-3 com a peça parada . . . . .	102
71	Erro total de posição da tarefa 1-4 com a peça parada . . . . .	102
72	Posições das juntas do KUKA nas tarefa 1-2 com a peça parada . . . . .	103
73	Velocidades das juntas do KUKA na tarefa 1-2 com a peça parada . . . . .	104
74	Posições das juntas do ABB nas tarefa 1-3 com a peça parada . . . . .	105
75	Velocidades das juntas do ABB na tarefa 1-3 com a peça parada . . . . .	106
76	Posições das juntas do STAUBLI nas tarefa 1-4 com a peça parada . . . . .	107
77	Velocidades das juntas do STAUBLI na tarefa 1-4 com a peça parada . . . . .	107
78	Referenciais Absoluto e Móvel . . . . .	118
79	Rotação ou movimento esférico . . . . .	119
80	Transformações de coordenadas em cadeia cinemática aberta . . . . .	123
81	Determinação dos centros dos sistemas coordenados $O_{i-1}$ e $O_i$ . . . . .	124
82	Determinação dos parâmetros cinemáticos de Denavit-Hartenberg . . . . .	125
83	Rotação do referencial móvel sobre o referencial absoluto . . . . .	129
84	Rotação e translação do referencial móvel sobre o referencial absoluto . . . . .	131
85	Contribuição da junta $i$ na velocidade da ferramenta . . . . .	134
86	Rotação em torno do eixo do helicóide . . . . .	141
87	Projeção de $S_P P_2^r$ sobre $S_P P_1$ . . . . .	142
88	Rotação e translação em torno de um único eixo . . . . .	147
89	Deslocamento de um corpo por 2 helicóides sucessivos . . . . .	151
90	Deslocamento de um corpo por $n$ helicóides sucessivos . . . . .	153
91	Espaços das velocidades de juntas e o das velocidades da ferramenta . . . . .	157
92	Helicóide escrito em diferentes sistemas de coordenadas . . . . .	158
93	Esquema da PPR . . . . .	162
94	CVA - PPS . . . . .	163
95	Arestas e Vértices de um Grafo . . . . .	164

---

96	Grafo Orientado . . . . .	165
97	Manipulador serial plano de três elos com PPR . . . . .	166
98	Grafo das juntas do manipulador serial plano de três elos com PPR . . . . .	166
99	Grafo de movimento do manipulador serial plano de três elos com PPR . . . . .	167
100	Robô planar de três elos com três juntas de rotação com erro de posição . . . . .	172
101	Diagrama de blocos do algoritmo de cinemática inversa utilizado . . . . .	173
102	Tela de resultados da simulação do efetuador . . . . .	174
103	Visualização da saída gráfica do efetuador . . . . .	174
104	Existência do Núcleo que resulta em velocidades nulas do efetuador final . . . . .	175
105	Inclusão da cadeia virtual de Assur . . . . .	184
106	Grafo da cooperação . . . . .	184
107	Erro na cooperação entre robôs posicionador & operador . . . . .	188
108	Posição das juntas do robô operador . . . . .	189
109	Posição das juntas do robô posicionador . . . . .	189
110	Gráficos de erros de posição e orientação . . . . .	189
111	Saída gráfica da cooperação entre os robôs operador & posicionador . . . . .	190



# Lista de Tabelas

1	Utilização Jacobiano de Cooperação de diferentes modos . . . . .	7
2	Significado de cada tipo de cooperação de tarefa (NOF, 1999) . . . . .	13
3	Tipos de tarefas e respectivos robôs envolvidos . . . . .	69
4	Especificações do Fabricante do REIS RV20-16 (REIS-RV20-16, 2008) . . . . .	70
5	Especificações do Fabricante do KUKA KR6 (KUKA-KR6, 2008) . . . . .	71
6	Especificações do Fabricante do ABB IRB 1600X120 (ABB-IRB-1600X120, 2008) . . . . .	72
7	Especificações do Fabricante do STAUBLI RX90L (STAUBLI-RX90L, 2008) . . . . .	72



# Lista de Símbolos e Abreviações

$0$	Referencial inercial, fixo à terra
$B$	Matriz de circuitos
$b_1$	Referencial solidário à base do robô posicionador (manipulador 1)
$b_2$	Referencial solidário à base do robô operador (manipulador 2)
$J_C$	Jacobiano de Cooperação
$J_{C_{1,2,3,4}}$	Jacobiano de Cooperação para um SMC composto por quatro robôs
$J_{CH}$	Jacobiano de Cooperação Baseado em Helicoides
$J_R$	Jacobiano Relativo
$J_{RH}$	Jacobiano Relativo Baseado em Helicoides
${}^1J_w$	Parcela da velocidade angular do Jacobiano do manipulador 1 (robô posicionador)
${}^2J_w$	Parcela da velocidade angular do Jacobiano do manipulador 2 (robô operador 2)
$J_{R12}$	Jacobiano Relativo representativo da cooperação entre os manipuladores 1 e 2
JIT	<i>Just-in-time</i> - produção de bens e/ou serviços no momento em que são necessários
$O_i$	Origem do $i$ -ésimo referencial
$p$	Referencial solidário à peça
$\dot{P}_x$	Velocidades lineares relativas aos deslocamentos das juntas virtuais prismáticas na direção $x$

---

$\dot{P}_y$	Velocidades lineares relativas aos deslocamentos das juntas virtuais prismáticas na direção $y$
$\dot{P}_z$	Velocidades lineares relativas aos deslocamentos das juntas virtuais prismáticas na direção $z$
POO	Programação Orientada a Objetos
${}^1\dot{q}$	Vetor composto pelas velocidades das juntas do robô posicionador
${}^2\dot{q}$	Vetor composto pelas velocidades das juntas do robô operador
${}^{12}\dot{q}$	Vetor composto pelas velocidades das juntas dos dois manipuladores
${}^{1,2,3,4}\dot{q}$	Vetor representativo do espaço das velocidades das juntas, composto pelos vetores representativos dos espaços das velocidades das juntas de cada robô, ou seja, ${}^1\dot{q}$ , ${}^2\dot{q}$ , ${}^3\dot{q}$ e ${}^4\dot{q}$ .
$\dot{q}_i$	Magnitude do heligiros.
${}^i\dot{q}$	Vetor representativos dos espaços das velocidades das juntas do $i$ -ésimo robô.
$r_{i,j}^k$	Vetor posição do $i$ -ésimo referencial para o $j$ -ésimo referencial, medido no $k$ -ésimo referencial
$\dot{r}_0^p$	Velocidade linear de um ponto do corpo instantaneamente na origem ( $O_p$ ) do referencial $p$ .
$r_{p,t_2}^p(t)$	Vetor posição da ferramenta em relação à peça definidos pela tarefa
$\dot{r}_{p,t_2}^p$	Vetor velocidade linear do ponto $t_2$ no referencial $p$
$R_j^i$	Matriz de rotação do $j$ -ésimo referencial medida no $i$ -ésimo referencial
$\dot{R}_x$	Velocidades angulares das juntas rotativas em torno do eixo na direção $x$
$\dot{R}_y$	Velocidades angulares das juntas rotativas em torno do eixo na direção $y$
$\dot{R}_z$	Velocidades angulares das juntas rotativas em torno do eixo na direção $z$
RIA	<i>Robot Institute of America</i>
RV	Realidade Virtual
$s$	Vetor representando o eixo (instantâneo) de cada junta
$s_{ref}$	Vetor representando o eixo (inicial) de cada junta
$s_0$	Vetor posição (instantânea) em relação ao referencial absoluto
$s_{0_{ref}}$	Vetor posição (inicial) em relação ao referencial absoluto

---

SRC	Sistema Robótico Cooperativo
$t_2$	Ponto extremo da ferramenta do robô operador 2
$T_i$	Matriz de transformação homogênea resultante dos deslocamentos de helicoides sucessivos
$\dot{x}_{p,t_2}$	Vetor velocidade do extremo da ferramenta (ponto $t_2$ ) em relação à peça
$\dot{x}_{p,t_2,3,4}$	O vetor corresponde ao espaço das tarefas desejadas, composto pelas tarefas 1-2, 1-3 e 1-4.
$w^p$	Velocidade angular do corpo medida no referencial $p$
$w_{p,t_2}^p$	Vetor velocidade angular da ferramenta medido no referencial $p$
$\hat{\$}_i$	Helicoide normalizado para para a $i$ -ésima junta
$\hat{\$}_i^p$	Helicoide normalizado da $i$ -ésima junta medida no referencial $p$
$\Omega(r_{i,j}^i)$	Matriz anti-simétrica do vetor $r_{i,j}^i$



# Resumo

Face às exigências de mercado, as empresas estão reconhecendo a necessidade de ganhar ou manter vantagem competitiva, e para isso fatores como cumprimento de datas de entrega, redução dos prazos de atendimento, aumento da flexibilidade devem ser priorizados, sem perda dos padrões de qualidade e custo. A utilização de sistemas compostos por múltiplos robôs trabalhando de forma cooperativa proporciona às empresas as vantagens supracitadas, entretanto a programação, a sincronização e o controle ganham em complexidade.

Focalizando a programação de Sistemas Robóticos Cooperativos (SRC), existe o problema da determinação da localização, da velocidade e da aceleração das juntas de cada robô na base do tempo, de modo que venham a cumprir adequadamente as tarefas estabelecidas. Este problema é complexo pois existem relações de dependência entre os robôs além de aparecer o fenômeno da redundância cinemática, o que em termos gerais significa que o sistema como um todo tem inúmeras possibilidades de configurações capazes de executar as tarefas.

Esta tese apresenta o conceito de Jacobiano de Cooperação ( $J_C$ ), para modelagem da cinemática diferencial de SRC, e propõe três metodologias de obtenção do  $J_C$ : (1) utilizando o conceito de Jacobiano Relativo, que por sua vez, utiliza a convenção de Denavit-Hartenberg; (2) empregando a Teoria dos Helicoides; e (3) através do Método de Davies.

O Jacobiano de Cooperação é uma transformação linear do espaço vetorial das velocidades das juntas dos robôs envolvidos no espaço vetorial das velocidades das tarefas a serem executadas. Isso permite que a resolução da cinemática diferencial inversa de cada manipulador seja feita de forma otimizada e simultânea, primando pela simplicidade no estabelecimento das relações de dependência entre os robôs envolvidos, em função das tarefas que cada robô deve executar sobre a peça em comum, fixada rigidamente por um ou mais robôs que a manipulam.

**Palavras-chave:** Sistema Robótico Cooperativo, Jacobiano de Cooperação, Teoria dos Helicoides, Método de Davies



# Abstract

The globalization has led many markets to becoming very competitive, and the manufactured products undergo intense competition, which may increase their vulnerability. The product's vulnerability begins to show when a competitor's similar product performs the same functions, and has a lower price. This situation gets worse if this product has a better quality, reliability, meets the need of the customer, and embeds innovations in each new launched version, and a shorter delivery time. The use of systems composed by multiple robots working in a cooperative way provides such advantages, however the programming, the synchronization and the control become more complex.

In the Robotic Cooperative Systems (SRC), the determination of the location, of the speed and of the acceleration of each robot's joints is complex, because dependence relationships exist among the robots besides the phenomenon of the cinematic redundancy, which means in general terms appearing that the system as a whole has countless possibilities of configurations capable to execute the tasks.

The objective of this thesis consists of presenting the Jacobian of Cooperation ( $J_C$ ), for modelling of the differential kinematics of SRC, and it proposes three methodologies of obtaining of  $J_C$ : (1) using the concept of Relative Jacobian, that uses the Denavit and Hartenberg Convention; (2) using the Screw Theory; and (3) through the Davies Method, that associates the Graph Theory with virtual Assur chains.

Jacobian of Cooperation is a linear transformation of the vector space of the speeds of the robots' joints involved in the vector space of the speeds of the tasks to be executed. That allows the resolution of each manipulator's inverse differential kinematics to be made in an optimized way and simultaneous, excelling for the simplicity in the establishment of the dependence relationships among the involved robots, in function of the tasks that each robot should execute on the workpiece, fastened by one or more robots.

**Keywords:** Robotic Cooperative System, Jacobian of Cooperation, Screw Theory



# Sumário

<b>Aprovação</b>	<b>i</b>
<b>Dedicatória</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Símbolos e Abreviações</b>	<b>xv</b>
<b>Resumo</b>	<b>xix</b>
<b>Abstract</b>	<b>xxi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	2
1.2 Formulação do Problema . . . . .	4
1.3 Objetivos da Tese . . . . .	5
1.4 Simulação do Jacobiano de Cooperação ( $J_C$ ) . . . . .	6
1.5 Organização da Tese . . . . .	9
<b>2 Sistemas Robóticos Cooperativos</b>	<b>11</b>

---

2.1	Sistema Multirrobo . . . . .	11
2.1.1	Classificação Expandida dos Sistemas Multirrobo . . . . .	15
2.2	Sistemas Robóticos Cooperativos - SRC . . . . .	17
2.2.1	Vantagens dos SRC . . . . .	18
2.2.2	Desvantagens dos SRC . . . . .	19
2.3	Aplicações Industriais de SRC . . . . .	19
2.3.1	Cooperação em Montagem . . . . .	19
2.3.2	Cooperação para Dobramento de Chapas Grandes . . . . .	21
2.3.3	Cooperação em Soldagem Sem Gabarito ( <i>jigless welding</i> ) . . . . .	21
2.4	Considerações Finais . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Jacobiano Relativo</b>	<b>23</b>
3.1	Introdução . . . . .	23
3.2	O Conceito de Jacobiano Relativo . . . . .	25
3.3	Jacobiano Relativo Baseado em Helicoides . . . . .	32
3.4	Jacobiano Relativo Baseado em Helicoides Empregando o Método de Davies . . . . .	36
3.5	Contribuições Contidas neste Capítulo . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Jacobiano de Cooperação</b>	<b>43</b>
4.1	Jacobiano de Cooperação: O Conceito . . . . .	43
4.2	Jacobiano de Cooperação - Convenção de Denavit-Hartenberg . . . . .	45
4.3	Jacobiano de Cooperação - Teoria dos Helicoides . . . . .	49
4.4	Jacobiano de Cooperação - Método de Davies . . . . .	53
4.5	Contribuições Científicas Contidas neste Capítulo . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Estudo de Caso</b>	<b>61</b>
5.1	Metodologia de Auxílio ao Projeto e Simulação de SRC . . . . .	62
5.2	Definição do Problema . . . . .	67
5.3	SRC com 4 Robôs e 3 Tarefas Simultâneas - MODO 1 . . . . .	68

---

5.3.1	Simulação e Análise - Solução Inicial . . . . .	75
5.3.2	Simulação e Análise - Solução Final . . . . .	78
5.3.2.1	Análise do erro total de posição . . . . .	79
5.3.2.2	Cinemática inversa do robô REIS . . . . .	79
5.3.2.3	Cinemática diferencial inversa do robô REIS . . . . .	83
5.3.2.4	Cinemática inversa do robô KUKA . . . . .	83
5.3.2.5	Cinemática diferencial inversa do robô KUKA . . . . .	84
5.3.2.6	Cinemática inversa do robô ABB . . . . .	85
5.3.2.7	Cinemática diferencial inversa do robô ABB . . . . .	85
5.3.2.8	Cinemática inversa do robô STAUBLI . . . . .	87
5.3.2.9	Cinemática diferencial inversa do robô STAUBLI . . . . .	87
5.4	SRC com 2 Robôs e 1 Tarefa por vez - MODO 2 . . . . .	88
5.4.1	Tarefa 1-2 - Circunferência - REIS e KUKA . . . . .	90
5.4.1.1	Cinemática inversa do robô REIS . . . . .	90
5.4.1.2	Cinemática diferencial inversa do robô REIS . . . . .	92
5.4.1.3	Cinemática inversa do robô KUKA . . . . .	92
5.4.1.4	Cinemática diferencial inversa do robô KUKA . . . . .	93
5.4.2	Tarefa 1-3 - Losango - REIS e ABB . . . . .	93
5.4.2.1	Cinemática inversa do robô REIS . . . . .	95
5.4.2.2	Cinemática diferencial inversa do robô REIS . . . . .	95
5.4.2.3	Cinemática inversa do robô ABB . . . . .	95
5.4.2.4	Cinemática diferencial inversa do robô ABB . . . . .	97
5.4.3	Tarefa 1-4 - Retângulo - REIS e STAUBLI . . . . .	97
5.4.3.1	Cinemática inversa do robô REIS . . . . .	97
5.4.3.2	Cinemática diferencial inversa do robô REIS . . . . .	99
5.4.3.3	Cinemática inversa do robô STAUBLI . . . . .	99
5.4.3.4	Cinemática diferencial inversa do robô STAUBLI . . . . .	99

5.5	Sistema com 1 Robô e 1 Tarefa por vez - MODO 3 . . . . .	101
5.5.1	Tarefa 1-2 - Circunferência - KUKA . . . . .	103
5.5.1.1	Cinemática diferencial do robô KUKA . . . . .	103
5.5.1.2	Cinemática diferencial inversa do robô KUKA . . . . .	103
5.5.2	Tarefa 1-3 - Losango - ABB . . . . .	104
5.5.2.1	Cinemática inversa do robô ABB . . . . .	104
5.5.2.2	Cinemática diferencial inversa do robô ABB . . . . .	105
5.5.3	Tarefa 1-4 - Retângulo - STAUBLI . . . . .	105
5.5.3.1	Cinemática inversa do robô STAUBLI . . . . .	105
5.5.3.2	Cinemática diferencial inversa do robô STAUBLI . . . . .	106
5.6	Comparação entre Tarefas Realizadas com e sem Cooperação . . . . .	106
5.7	Considerações Finais do Estudo de Caso . . . . .	109
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>111</b>
6.1	Recapitulação Sintetizada . . . . .	111
6.2	Contribuições Científicas . . . . .	112
6.3	Conclusão . . . . .	113
6.4	Vantagens e Limitações . . . . .	114
6.5	Perspectivas . . . . .	116
<b>Apêndices</b>		
<b>A</b>	<b>Robótica Baseada em Denavit-Hartenberg</b>	<b>117</b>
A.1	Localização de um Corpo Rígido . . . . .	117
A.1.1	Teorema de Euler - Representação da Orientação . . . . .	119
A.1.2	Teorema de Chasles – Representação da Localização . . . . .	121
A.2	Cinemática Direta de Manipuladores Seriais . . . . .	123
A.2.1	Convenção de Denavit-Hartenberg . . . . .	124
A.3	Cinemática Diferencial de um Corpo Rígido . . . . .	128

---

A.3.1	Velocidade Angular . . . . .	128
A.3.2	Velocidade Linear . . . . .	130
A.4	Análise do Jacobiano de Manipuladores Seriais . . . . .	131
<b>B</b>	<b>Robótica Baseada em Helicoides</b>	<b>137</b>
B.1	Teoria dos Helicoides . . . . .	137
B.1.1	Representação da Rotação por Meio de Eixo de Helicoide . . . . .	141
B.1.2	Deslocamento Helicoidal . . . . .	146
B.2	Método dos Deslocamentos dos Helicoides Sucessivos . . . . .	151
B.3	Eixo do Helicoide Instantâneo . . . . .	154
B.3.1	Jacobiano de um Manipulador Serial . . . . .	155
B.4	Matriz de Transformação de Coordenadas de Helicoides . . . . .	157
<b>C</b>	<b>Método de Davies</b>	<b>161</b>
C.1	Cadeias Virtuais de Assur . . . . .	161
C.1.1	Cadeias Virtuais de Assur Planas . . . . .	162
C.1.1.1	CVA-PPR . . . . .	162
C.1.2	Cadeias Virtuais de Assur Espaciais . . . . .	163
C.1.2.1	CVA-PPPS . . . . .	163
C.2	Teoria dos Grafos . . . . .	164
C.3	Método de Davies . . . . .	165
<b>D</b>	<b>Resolução da Cinemática Inversa</b>	<b>171</b>
D.1	Método de Integração . . . . .	171
D.2	Resolução da Redundância Usando a Pseudo-Inversa . . . . .	173
D.3	Redundância Cinemática . . . . .	175
D.4	Pseudo-inversa ou Inversa Generalizada . . . . .	176
D.4.1	Utilização da Pseudo-Inversa . . . . .	177
D.4.2	Inclusão de Restrição Adicional sem Pesos . . . . .	179

---

D.4.3	Inclusão de Restrição Adicional com Pesos . . . . .	182
<b>E</b>	<b>Aplicação da Modelagem Cinemática em Sistema com Dois Robôs Cooperativos</b>	<b>183</b>
E.1	Método de Davies - Aplicação . . . . .	183
E.1.1	Inclusão da cadeia virtual de Assur . . . . .	183
E.1.2	Modelagem utilizando grafos . . . . .	183
E.1.3	Lei da Circulação de Kirchhoff-Davies . . . . .	184
E.1.4	Pseudo-Inversa de $J_R$ . . . . .	187
E.1.5	Integração da Velocidade . . . . .	187
E.1.6	Convergência do Erro . . . . .	187
E.1.7	Resultados da Simulação . . . . .	188
	<b>Referências</b>	<b>191</b>

# CAPÍTULO 1

## Introdução

Esta tese apresenta contribuições à modelagem da cinemática diferencial de sistemas compostos por manipuladores industriais seriais, que devam trabalhar de modo cooperativo na execução de tarefas sobre uma peça em comum, e/ou na movimentação compartilhada desta, referenciados neste texto como Sistemas Robóticos Cooperativos (SRC), introduzindo o conceito e a metodologia de obtenção do modelo matemático, denominado: Jacobiano de Cooperação ( $J_C$ ).

A metodologia de obtenção do modelo matemático analisa o conjunto de robôs como um único sistema redundante, e o modelo obtido, o Jacobiano de Cooperação ( $J_C$ ), é uma transformação linear do espaço vetorial das velocidades juntas dos robôs envolvidos, no espaço vetorial das velocidades das tarefas a serem executadas. Este modelo permite que a resolução da cinemática diferencial inversa de cada manipulador seja obtida de forma otimizada (pela minimização do quadrado da velocidade) e simultânea, primando pela simplicidade no estabelecimento das relações de dependência entre os robôs envolvidos, em função das tarefas que cada robô deve executar sobre a peça em comum, fixada rigidamente por um ou mais robôs que a manipulam.

Divide-se este capítulo em seções, iniciando com a motivação na seção 1.1, onde é apresentada uma contextualização abrangente que considera como cenário, a empresa imersa em mercados globalizados, o que imprime necessidades contínuas na busca de novas soluções que tornem seus sistemas de produção cada vez mais inovadores, robustos e econômicos. Para tal, a automação industrial é apresentada como opção tecnológica e estratégica, e a utilização de robôs industriais, como um componente importante. Entretanto a utilização de robôs não traz somente vantagens e na seção 1.2 são apresentados alguns problemas e limitações encontrados na utilização de um ou mais robôs nos sistemas de produção.

A seção 1.3 apresenta os objetivos gerais e específicos desta tese, que resultam em

contribuições científicas na área de modelagem da cinemática diferencial e na resolução das cinemáticas inversa e diferencial inversa, valendo-se da simulação computacional dos Sistemas Robóticos Cooperativos (SRC). Finalmente a seção 1.5 apresenta a organização e estrutura dos capítulos e apêndices da tese.

## 1.1 Motivação

Com o advento das comunicações e dos transportes em âmbito mundial, locais isolados e de povos tecnologicamente carentes passam a receber informações e a desejar usufruir dos atrativos da modernidade. Há uma ânsia generalizada em aperfeiçoar e tornar mais fácil o trabalho, aumentar o padrão de vida e propiciar entretenimento. O resultado é uma nova realidade comercial, com uma emergência de mercados globais em grande escala (LEVITT, 1991).

Uma consequência da globalização e da internacionalização da economia mundial é um substancial aumento da concorrência entre as empresas. Os produtos fabricados sofrem uma competição mais intensa, o que pode torná-los vulneráveis. A vulnerabilidade de um produto começa a despontar quando um produto similar de uma empresa concorrente, desempenha a mesma função e possui um preço de mercado menor (SLACK et al., 2002). Esta situação agrava-se bastante quando este produto concorrente também possui melhor qualidade e confiabilidade, menor tempo de entrega, melhor adequação às necessidades do cliente, ou ainda, proporciona ao cliente inovações a cada versão produzida.

Quanto maior a concorrência, maior a necessidade em aperfeiçoar os sistemas de produção, de modo a ganhar ou manter vantagens competitivas. Uma solução muito utilizada é a automação industrial.

A automação na indústria denota uma tecnologia que objetiva substituir as tarefas realizadas por seres humanos por máquinas em um processo de fabricação, na execução das operações físicas e no processamento inteligente da informação dos estados dos processos. De acordo com Siciliano *et al.*, existem três níveis de automação: a rígida, a programável e a flexível (SICILIANO et al., 2008).

A automação rígida é a automação feita em fábricas cujo contexto está orientado para a fabricação em massa de um mesmo tipo de produto, com alta produtividade utilizando sequências de operações fixas executadas por máquinas dedicadas.

A automação programável é utilizada no contexto de fabricação de produtos de diferentes tipos, permitindo a mudança das sequências de operações a serem executadas conforme a variação do tipo de peça a ser fabricado, valendo-se de máquinas mais versáteis. Atualmente

a maioria dos produtos disponíveis no mercado são fabricados por sistemas automáticos programáveis.

A automação flexível é a evolução das anteriores e objetiva a fabricação de lotes variados de diferentes produtos primando pela minimização do tempo de *setup*, ou seja, o tempo necessário para reprogramar a sequência de operações e de máquinas.

Segundo a *RIA (Robot Institute of America)*, um robô industrial é um manipulador multifuncional reprogramável projetado para mover materiais, peças, ferramentas ou dispositivos especializados através de movimentos variáveis programados para executar adequadamente uma variedade de tarefas. Assim sendo, é um componente típico dos Sistemas Automáticos Programáveis em virtude da sua capacidade de ser reprogramável; entretanto, os robôs são passíveis de serem utilizados também nos Sistemas Automáticos Rígidos e nos Flexíveis (SICILIANO et al., 2008).

Os robôs manipuladores são componentes estratégicos, pois proporcionam:

- redução do custo de fabricação;
- aumento da produtividade;
- melhoria e padronização da qualidade dos produtos;
- eliminação de postos de trabalhos humanos em tarefas insalubres, perigosas e repetitivas;
- e,
- relegam ao ser humano tarefas mais nobres.

Ratificando o supracitado, Nof (NOF, 1999) apresenta as Leis da Aplicabilidade dos Robôs, ou seja, afirma que os robôs devem substituir os humanos em:

- **atividades perigosas**, ou seja, onde existam: níveis excessivos de ruído, temperatura, pressão ou radiação; em locais com atmosferas tóxicas; onde haja radiação; e sempre que riscos físicos e outras periculosidades estejam presentes;
- **atividades indesejáveis ou impossíveis**, ou seja, em atividades repetitivas ou complexas e em trabalho em escalas nano, micro ou macrométricas; e,
- **atividades onde são mais produtivos e econômicos**, pois os robôs padronizam o nível de qualidade do produto, trabalham noite e dia sem serem afetados por desgastes emocionais e problemas familiares, embora sejam passíveis de desgaste mecânico.

Entretanto, cabe ressaltar que não existem somente vantagens, ou seja, problemas e limitações estão presentes na utilização de robôs industriais como descritos a seguir.

## 1.2 Formulação do Problema

A utilização do robô manipulador em sistemas de produção traz inúmeras vantagens como foi apresentado na seção anterior, entretanto para que todas as tarefas ocorram em conformidade com o desejado, se faz necessário programar, calibrar e sincronizar adequadamente os robôs.

A programação consiste em informar em linguagem apropriada ao robô, as magnitudes das variáveis das juntas na base do tempo, de modo que a composição dos movimentos das juntas venha a resultar na trajetória adequada para o efetuador final, responsável pela realização da tarefa desejada. Assim sendo, surge o problema da determinação da localização, da velocidade e da aceleração das juntas do manipulador na base do tempo. Este problema cresce em complexidade (BROGARDH, 2007) quando se deseja que mais de um robô venha a trabalhar de modo cooperativo, em prol da realização de uma ou mais tarefas, pois aparece o fenômeno da redundância cinemática, o que em termos gerais significa que o sistema como um todo tem inúmeras possibilidades de combinações de posições de juntas que permitem que as tarefas sejam cumpridas.

É importante ressaltar que a utilização de múltiplos robôs manipuladores trabalhando de maneira cooperativa viabiliza diversas tarefas que um único robô seria incapaz de realizar sozinho (KURFESS, 2005), e/ou diminui o tempo necessário para a execução das tarefas.

Outra característica importante é que o espaço de trabalho de dois robôs é maior que o de um deles visto isoladamente, entretanto a programação e o controle crescem em complexidade, além de exigir que haja sincronização entre eles. Assim sendo, a utilização de robôs ou de múltiplos robôs cooperativos traz vantagens, pois diminuem a limitação de utilização dos robôs em sistemas produtivos, entretanto existem problemas que demandam soluções.

Diversos autores identificam como problemas específicos que demandam pesquisas o planejamento de trajetória com evitamento de colisões, mais especificamente na geração da trajetória no espaço das juntas, incluindo aspectos de redundância nos sistemas com múltiplos robôs (ZILOUCHIAN, 1994) (ZIELINSKI; WARSZAWSKA, 1995) (OWEN; CROFT; BENHABIB, 2008) (LEWIS, 1996) (TZAFESTAS; PROKOPIOU; TZAFESTAS, 1998) (NOF, 1999) (CHOI et al., 1999) (ZIVANOVIC; VUKOBRATOVIC, 2005) (OWEN; CROFT; BENHABIB, 2008) (SICILIANO; KHATIB, 2008).

O problema em foco que esta tese pretende contribuir em nível de solução é:

**“ Como determinar todas as variáveis de juntas dos múltiplos robôs em cada instante de tempo, de modo otimizado, factível, simultâneo e correto, tal que, os robôs possam atuar de modo cooperativo, em prol da realização de uma ou mais tarefas?”**

Em suma, é possível resumir o problema em como encontrar todas as relações de dependências entre os robôs envolvidos como função das tarefas a serem executadas. Essas relações necessitam ser claras e adequadamente arranjadas em uma forma que contemple todas as juntas.

A formulação única é de fundamental importância na resolução simultânea da cinemática inversa dos robôs, além de permitir explorar a potencialidade de utilização do espaço nulo, por meio da aplicação de um critério de otimização simultâneo.

Esta tese intitulada: “Modelagem Cinemática de Sistemas Robóticos Cooperativos: Proposta de um Jacobiano de Cooperação”, se enquadra na linha de pesquisa vigente no Laboratório de Robótica da UFSC, mais especificamente à cinemática de robôs cooperativos, onde uma dissertação de mestrado foi defendida em 2005 (DOURADO, 2005). O grupo vem desenvolvendo pesquisas utilizando a Teoria dos helicoides para a modelagem cinemática de robôs. Utiliza também uma metodologia sistematizada, denominada Método de Davies, valendo-se da Teoria dos Grafos e cadeias virtuais de Assur que foram enunciadas por Campos (CAMPOS, 2004) em tese de doutorado defendida em 2004. As cadeias virtuais de Assur são utilizadas de modo a fechar as cadeias originalmente abertas dos manipuladores seriais. Com tal fechamento é possível utilizar a Lei da Circulação de Kirchhoff-Davies (DAVIES, 1981) (DAVIES, 2006), permitindo a resolução da cinemática diferencial dos robôs seriais.

Atualmente existe uma aluna em nível de doutorado em fase de tese (TONETTO, 2009) envolvida em pesquisas sobre robôs cooperativos, em metodologias que permitam padronizar cadeias cinemáticas de modo a simplificar e automatizar a programação.

Aspectos de sincronização e controle de sistemas com múltiplos robôs fogem ao escopo desta tese, entretanto subsídios teóricos podem ser encontrados em (CACCAVALE et al., 2005) (LIPPIELLO; VILLANI; SICILIANO, 2007).

## 1.3 **Objetivos da Tese**

Amparado na contextualização e nos problemas e limitações descritos, esta tese tem como objetivos gerais:

1. apresentar o conceito denominado Jacobiano de Cooperação ( $J_C$ ), um modelo matemático que permite a modelagem cinemática diferencial de Sistemas Robóticos Cooperativos (SRC);
2. apresentar um modelo matemático alternativo que simplifique a modelagem de SRC, ou seja, o Jacobiano de Cooperação Baseado em Helicoides ( $J_{CH}$ ); e,
3. resolver as cinemáticas inversa e diferencial inversa dos robôs componentes do SRC,

de forma simultânea e otimizada, valendo-se de simulação computacional do modelo proposto matemático, o Jacobiano de Cooperação.

Tem-se como objetivos específicos:

1. mostrar como o Jacobiano de Cooperação ( $J_C$ ) pode ser obtido segundo uma metodologia que utiliza o conceito de Jacobiano Relativo (LEWIS; MACIEJEWSKI, 1990), que por sua vez, utiliza a convenção de Denavit-Hartenberg e o Jacobiano geométrico de cada robô envolvido; e,
2. apresentar duas metodologias de obtenção do Jacobiano de Cooperação Baseado em Helicoides ( $J_{CH}$ ), a primeira utilizando a Teoria dos Helicoides e o Jacobiano Baseado em Helicoides de cada robô; e, a segunda valendo-se de uma sistematização amparada no Método de Davies.

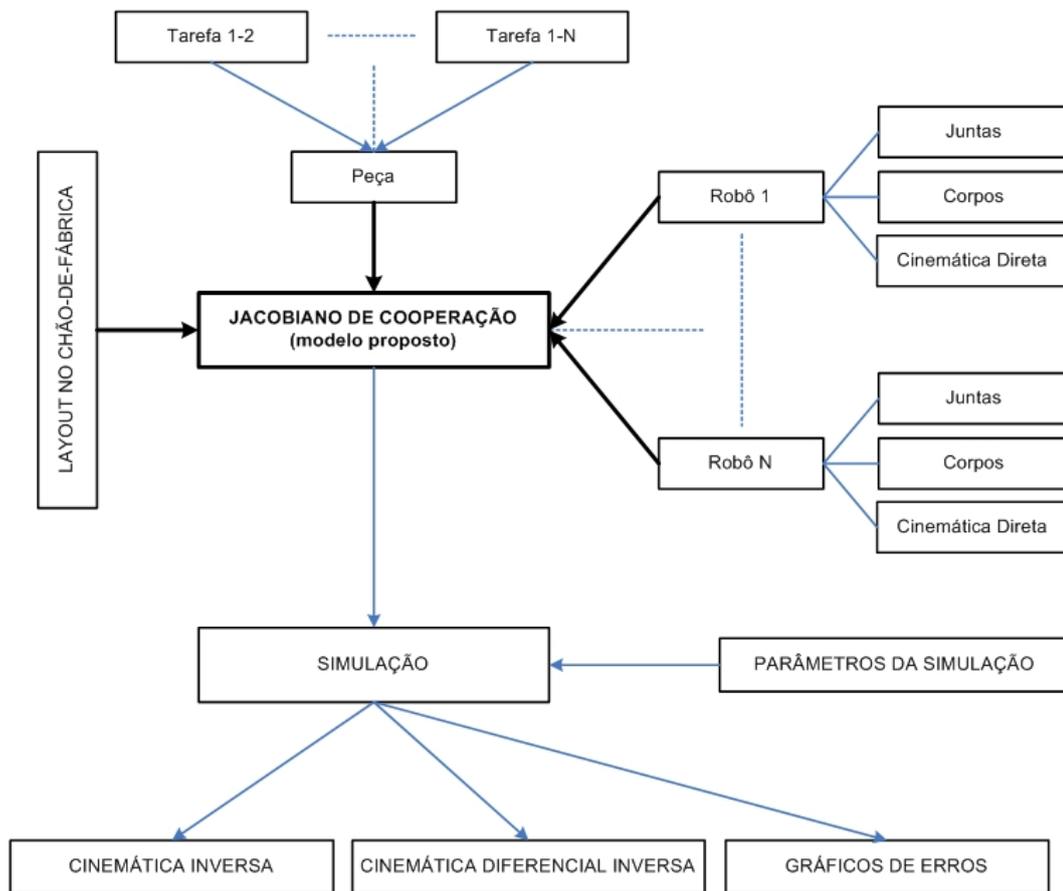
De modo a facilitar o entendimento e a visualização do fluxo de dados em torno do modelo matemático proposto ( $J_C$ ), é apresentado na Fig. 1 um esquema de relacionamento de dados de entrada e resultados obtidos utilizando o modelo do Jacobiano de Cooperação ( $J_C$ ). Observe que é possível identificar três grandes tipos referentes aos dados de entrada no modelo, ou seja: (1) as distâncias relativas entre as bases de cada robô, que é função do layout no chão-de-fábrica; (2) as tarefas que a serem executadas sobre a peça; e (3) os atributos de cada robô envolvido.

A Fig. 1 mostra ainda que modelo pode ser simulado, após definição dos parâmetros de simulação (passo de integração e tempo total de simulação), permitindo que sejam obtidos os seguintes resultados: (1) as cinemáticas inversa e (2) diferencial inversa de cada robô, bem como (3) os erros associados a cada tarefa desejada.

O processo de simulação permite uma ampla abordagem ligadas à previsão, à investigação e à comparação de cenários, e o item a seguir apresenta objetivamente quais perguntas podem ser respondidas valendo-se da correta simulação do modelo matemático.

## 1.4 Simulação do Jacobiano de Cooperação ( $J_C$ )

Nos últimos anos, o uso da simulação de sistemas tem sido beneficiado pelo progresso da tecnologia de computadores, porém ainda existe carência de especialistas e metodologias capazes de gerar modelos do contexto real (KELTON; SADOWSKI; STURROCK, 2003). Atualmente a simulação é vista como um importante método de auxílio à tomada de decisão e uma das principais etapas de um estudo de simulação consiste na criação de um modelo lógico (FREITAS, 2008).



**Figura 1:** Relação entre entradas e saídas com o modelo da cinemática diferencial

O Jacobiano de Cooperação ( $J_C$ ) é o modelo matemático da cinemática diferencial dos robôs componentes do SRC, que permite conhecer o comportamento do sistema e/ou avaliar estratégias para sua operação, ou seja, é possível utilizar o modelo voltado à: previsão, investigação, e comparação. A Tab. 1 apresenta de modo sumário cada uma dessas formas de utilização.

**Tabela 1:** Utilização Jacobiano de Cooperação de diferentes modos

Modelo voltado à:	Jacobiano de Cooperação pode ser usado para:
Previsão	prever o estado das juntas e dos erros obtidos, em qualquer ponto da simulação
Investigação	buscar informações e desenvolver hipóteses sobre o comportamento do sistema, caso altere-se número e/ou tipo de robôs e/ou tarefas, sendo que os experimentos sobre as reações do modelo a estímulos normais e/ou anormais
Comparação	avaliar o efeito de mudanças nas variáveis, como por exemplo, no tempo de processamento das tarefas ou arranjos físicos distintos, permitindo compará-las em função dos resultados obtidos

A utilização do modelo voltado à **previsão** numa simulação de um SRC, objetiva responder perguntas tais como:

- Quais os erros associados à realização de cada tarefa?

- Os robôs tem capacidade física para realizar as tarefas? Entende-se como capacidade física, se os robôs irão trabalhar dentro dos limites de projeto das juntas em nível de posição, velocidade e aceleração.
- Em quanto tempo a(s) tarefa(s) pode(m) ser realizada(s)? Determinação do tempo de processamento mínimo das tarefa, de modo a manter o sistema capaz de operar dentro dos limites de cada robô.
- Qual o nível de exigência e a parcela de contribuição de cada junta na execução das tarefas? Se estão balanceadas em nível de exigência.
- Qual o efeito de aplicar pesos diferenciados às juntas a fim de diminuir a sobrecarga sob determinadas juntas? Se existe alguma influência de modo a balancear o nível de solicitação das juntas.

Quando o modelo for utilizado para fins de **investigação** numa simulação de um SRC, tem-se como objetivo buscar respostas para as seguintes perguntas:

- Qual o efeito da inclusão de cada robô no SRC? Se a inclusão irá afetar significativamente a produtividade do processo.
- Qual o efeito da inclusão de uma tarefa, sobre as demais? Se houve influência significativa no erro das demais tarefas, bem como no nível de exigência das juntas dos robôs ou no tempo mínimo de processamento.
- Qual o efeito de associar uma tarefa a um robô? De modo a escolher qual o robô é mais adequado a realizar determinada tarefa, em função do tipo e das características de projeto.
- Qual o efeito de diversos agendamentos? Se é melhor fazer simultaneamente as tarefas, ou em uma determinada sequência de tarefas estabelecidas.
- Quantas tarefas podem ser feitas simultaneamente?

Finalmente o modelo pode ser utilizado para a **comparação**, ou seja, objetivando responder basicamente as seguintes perguntas:

- Qual a capacidade de produção do SRC? Em caso de demanda aquecida, é importante saber qual a capacidade produção máxima que se pode obter do SRC, que não viole os limites das juntas nem os erros admissíveis por tarefa.
- Qual o efeito da escolha de determinados arranjos físicos? Se a posição de cada robô no chão-de-fabrica afeta significativamente na capacidade de produção.

- Como determinar a condição ótima de produção em função da demanda instantânea? O tempo de processamento das tarefas passa a ser devidamente definido como função da demanda instantânea, evitando desperdícios ou faltas de produtos e economizando energia e recursos.

Pretende-se demonstrar que o modelo em tese contribui no sentido de permitir o desenvolvimento de ferramentas de análise de simulações com o auxílio do computador, que são capazes de projetar e adequar a produção de um SRC ao conceito *just-in-time* (JIT), conceito este que visa atender à demanda instantaneamente, com qualidade e sem desperdícios (SLACK et al., 2002).

## 1.5 Organização da Tese

O capítulo 2 apresenta uma análise sobre como a literatura especializada trata o problema de modelagem cinemática de sistemas compostos por múltiplos robôs e Sistemas Robóticos Cooperativos (SRC), além de defini-los, classificá-los e exemplificá-los.

O capítulo 3 reproduz o conceito encontrado na literatura utilizado na modelagem de dois robôs cooperando na execução de uma única tarefa, ou seja, o conceito de Jacobiano Relativo (LEWIS; MACIEJEWSKI, 1990), que por sua vez utiliza a convenção de Denavit-Hartenberg e o Jacobiano geométrico de cada manipulador. São apresentadas duas metodologias, que fazem parte das contribuições científicas desta tese, ou seja metodologias de obtenção do Jacobiano Relativo Baseado em Helicoides, empregando a Teoria dos Helicoides (RIBEIRO; GUENTHER; MARTINS, 2007) (RIBEIRO; GUENTHER; MARTINS, 2008) e valendo-se do Método de Davies (RIBEIRO; MARTINS, 2009).

O capítulo 4 introduz o conceito de Jacobiano de Cooperação na modelagem de SRC, caracterizando-se como contribuição científica principal contida nesta tese. É apresentado também: (1) a metodologia de obtenção do Jacobiano de Cooperação, que utiliza o conceito de Jacobiano Relativo (LEWIS; MACIEJEWSKI, 1990) baseado na convenção de Denavit-Hartenberg; (2) a metodologia de obtenção do Jacobiano de Cooperação Baseado em Helicoides amparada na Teoria dos Helicoides; e (3) amparada no método de Davies, que sistematiza e generaliza a anterior.

Já o capítulo 5 apresenta um estudo de caso de implementação de um SRC, que utiliza o Jacobiano de Cooperação Baseado em Helicoides na modelagem cinemática de quatro robôs e três tarefas distintas. São obtidos indicadores de desempenho que permitem prever, investigar e comparar as opções de SRC propostas, objetivando uma diminuição do tempo de processamento e um consequente aumento da produtividade, validando os conceitos apresentados além de

resolver a cinemática inversa de cada robô, valendo-se de um sistema computacional que permite a simulação e que foi desenvolvido em linguagem orientada a objetos, além de herdar recursos de realidade virtual.

Por fim, o capítulo 6 apresenta uma síntese das discussões e as conclusões, vantagens e limitações, ressaltando as contribuições e inovações deste trabalho. Consta também sugestões para trabalhos futuros.

Foram incluídos ainda, seis apêndices contendo os fundamentos teóricos necessários ao desenvolvimento das metodologias de obtenção do Jacobiano Relativo e do Jacobiano de Cooperação, sendo que o último deles é dedicado aos resultados de simulações do estudo de caso. O conteúdo de cada apêndice encontra-se descrito a seguir.

O apêndice A contém os Fundamentos Teóricos da Robótica, no que tange ao cálculo da cinemática direta e da cinemática diferencial, valendo-se da convenção de Denavit-Hartenberg.

O apêndice B apresenta a Teoria dos Helicoides aplicada à Robótica, apresentando o método do deslocamentos dos helicoides sucessivos na determinação da cinemática direta de manipuladores seriais e o cálculo do Jacobiano baseado em helicoides.

O apêndice C apresenta o Método de Davies, que utiliza as cadeias virtuais de Assur e a Teoria dos Grafos na determinação do Jacobiano de manipuladores seriais.

O apêndice D mostra um Método de Integração das velocidades, utilizado na resolução da cinemática inversa valendo-se do Jacobiano geométrico de cada robô, na determinação das variáveis de junta, além de um estudo sobre resolução da redundância cinemática, valendo-se do conceito da pseudo-inversa.

O apêndice E apresenta a modelagem cinemática de um SRC constituído por dois robôs planos de três elos com três juntas de rotação sendo utilizado o Método de Davies na determinação do Jacobiano Relativo Baseado em Helicoides.

## CAPÍTULO 2

# Sistemas Robóticos Cooperativos

Este capítulo apresenta na seção 2.1 a revisão da literatura em torno de sistemas compostos por múltiplos robôs. Uma classe em especial é abordada na seção 2.2, quando tais sistemas são compostos por manipuladores industriais e atuam de forma cooperativa, os denominados Sistemas Robóticos Cooperativos (SRC). Na seção 2.3 são apresentadas algumas aplicações industriais de SRC e na seção 2.4, as considerações finais.

### 2.1 Sistema Multirrobô

No contexto desta tese tem-se que:

**Definição 2.1.1** – *Sistema Multirrobô é todo o sistema que possua mais de um robô.*

A literatura especializada é rica em se tratando de analisar os sistemas multirrobôs, que podem ser divididos como mostrado na Fig. 2, em quatro grandes linhas de pesquisa: Robôs Móveis (LIU; WU, 2001), Múltiplos Manipuladores, Mãos Robóticas (HIGASHIMORI et al., 2005) e Veículos sobre Pernas (BEKEY, 2005).

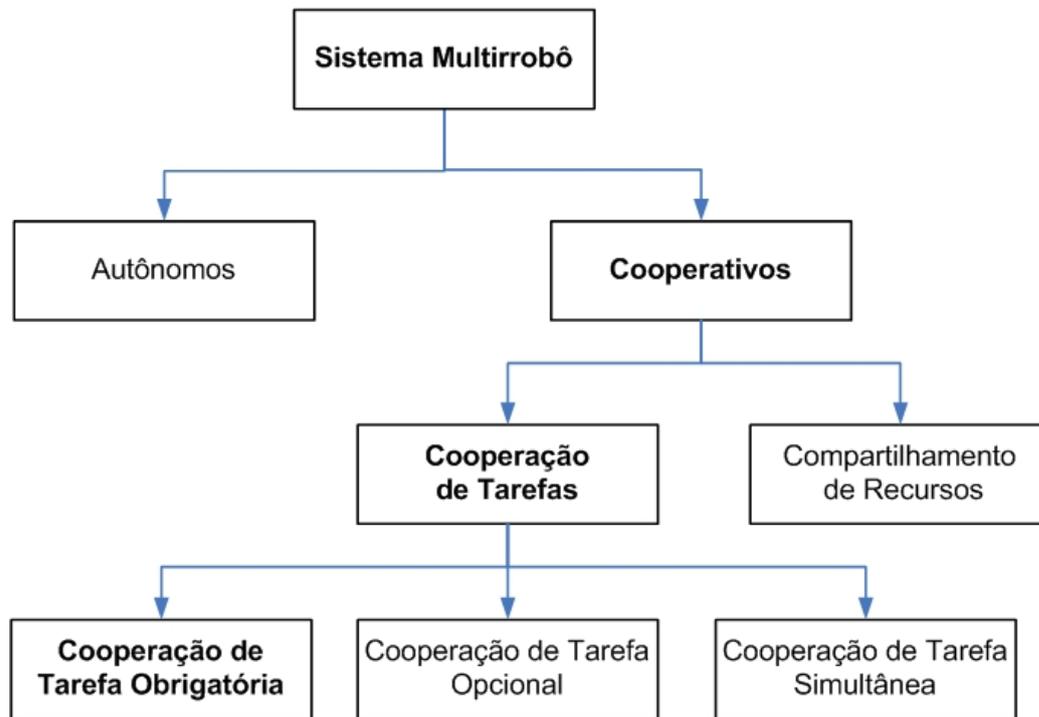


**Figura 2:** *Linhas de Pesquisa em Sistemas Multirrobôs encontradas na literatura*

O foco desta tese é a pesquisa com múltiplos manipuladores industriais, ou seja, são robôs de base fixa em ambiente industrial. A literatura especializada apresenta classifica-

ções diferenciadas segundo alguns autores (NOF, 1999) (TZAFESTAS; PROKOPIOU; TZAFESTAS, 1998) (ZIVANOVIC; VUKOBRATOVIC, 2005), que encontram-se expostas a seguir.

Nof (NOF, 1999) estuda sistemas multirrobo compostos por múltiplos manipuladores em células de manufatura. A Fig. 3 resume toda a classificação estabelecida segundo Nof (NOF, 1999), ou seja, os sistemas multirrobo são classificados em dois grupos: autônomos e cooperativos.



**Figura 3:** *Classificação segundo NOF (NOF, 1999)*

Em um **sistema multirrobo autônomo**, os robôs que compõem o sistema realizam suas tarefas de maneira independente das demais, ou seja, não existe interação com qualquer outro robô pertencente ao sistema. Esse tipo de sistema é bastante encontrado em linhas de fabricação em massa de um mesmo tipo de produto, onde existem uma sequência de operações fixas.

Um **sistema multirrobo cooperativo** explora tanto a capacidade de cada robô atuar independentemente dos demais, quanto a sua utilização em conjunto, ou seja, atuando em cooperação. Isto ocasiona um aumento da flexibilidade quando comparado a sistemas que possuem somente um robô, visto que as tarefas poderão ser executadas combinando a capacidade de mais de um robô. Tais sistemas podem ser utilizados em sistemas flexíveis, onde o contexto está orientado à produção de lotes variáveis de uma família de produtos, objetivando a minimização do tempo de *set-up*, na passagem de um lote para outro. Outro fator que é beneficiado é a confiabilidade de execução das tarefas, visto que no caso que um robô venha a falhar, existe outros na célula com capacidade de executar a tarefa.

Nof (NOF, 1999) afirma que a cooperação entre robôs pode se dar de dois modos: (1) por cooperação de tarefa; ou (2) por compartilhamento de recursos. Por sua vez, a cooperação de tarefa pode ser de três tipos: (1) obrigatória; (2) opcional; ou (3) simultânea, como explicitado na Tab. 2.

**Tabela 2:** Significado de cada tipo de cooperação de tarefa (NOF, 1999)

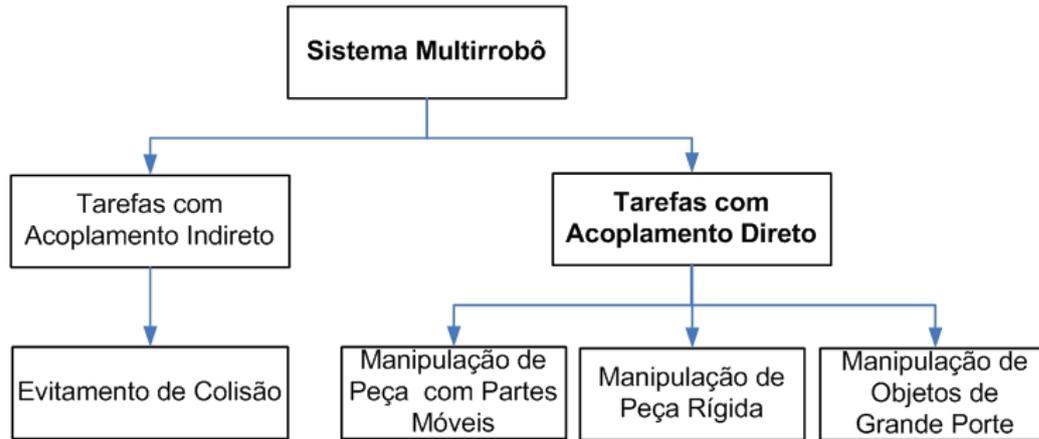
Tipo	Significado
Obrigatória	modo que no qual a tarefa deve ser executada simultaneamente por dois ou mais robôs. Proporciona um aumento da capacidade de realizar tarefas complexas, entretanto todos os robôs encontram-se comprometidos com a execução da tarefa.
Opcional	modo no qual existem mais de um robô que é capaz de realizar a referida tarefa. Aumenta a confiabilidade de execução da tarefa por parte da célula de manufatura, visto que os robôs são capazes de substituir um que venha a falhar, bem como aumenta a produtividade, pela capacidade de compartilhar a execução de uma série de tarefas, assim que ficam disponíveis.
Simultânea	modo no qual vários robôs podem executar simultaneamente, em paralelo, várias tarefas, o que ocasiona um aumento da produtividade da célula.

Outros modos de cooperação podem existir mediante uma sequência de combinações entre os três modos supracitados, o que ocasiona um aumento do nível de complexidade de programação dos movimentos coordenados entre os robôs, pelo fato do surgimento de relações de dependências variáveis e momentâneas.

Quanto ao compartilhamento de recurso, em uma célula que possua mais de um robôs, um ou mais robôs podem compartilhar os recursos disponíveis na célula. Por exemplo, seja uma célula com 4 robôs, tendo 3 tipos de recursos disponíveis, ou seja: (a) 4 bancadas de trabalho, sendo cada robô possui a sua exclusiva; (b) duas furadeiras do mesmo tipo, uma utilizada tanto pelo robô 1 como pelo robô 2, e a segunda utilizada tanto pelo robô 3 quanto pelo robô 4; e (c) um dispositivo auxiliar que pode ser utilizado por qualquer um dos quatro robôs (NOF, 1999).

A próxima classificação a ser abordada é feita por Tzafestas et al. (TZAFESTAS; PROKOPIOU; TZAFESTAS, 1998) e encontra-se resumida na Fig. 4, onde os sistemas multirrobôs podem ser enquadrados em duas classes, em que: (1) cada robô executa sua própria tarefa de maneira independente em um espaço de trabalho comum a outros robôs, e (2) todos os robôs cooperam na execução da tarefa. O principal problema encontrado na primeira classe é que as tarefas devem ser planejadas atentando para o evitamento de colisão, visto que compartilham o espaço de trabalho, existindo um acoplamento indireto entre as tarefas. Já o problema encontrado na segunda classe é que as tarefas são fortemente acopladas, ou seja, existem relações de dependências presentes entre os robôs para execução da tarefa, assim sendo um acoplamento

direto.



**Figura 4:** *Classificação segundo Tzafestas et al. (TZAFESTAS; PROKOPIOU; TZAFESTAS, 1998)*

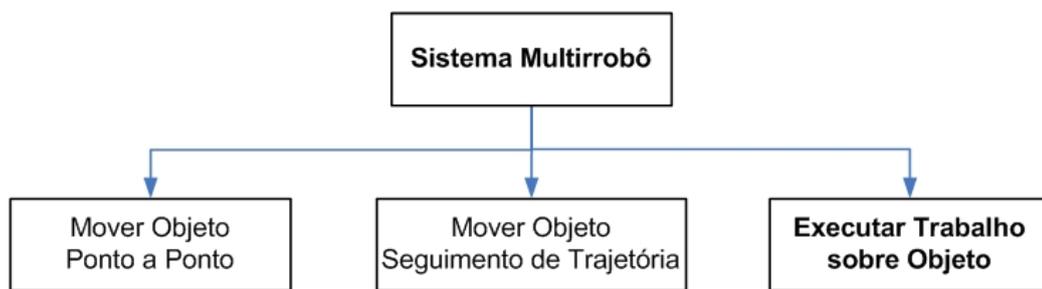
Note que Tzafestas et al. (TZAFESTAS; PROKOPIOU; TZAFESTAS, 1998) classificam as tarefas, que basicamente podem ser divididas em três categorias, em que: (1) não existe movimento relativo entre o objeto e as garras dos robôs, ou seja a peça está presa de maneira rígida pelos efetuadores e ela parte de uma posição inicial para um posição final; (2) tarefas em que os robôs manipulam uma peça que possui partes móveis; e finalmente (3) tarefas que movimentam objetos de grande porte, onde não existe possibilidade de fixação por meio de garra, ou seja, a movimentação do objeto se faz por envelopamento, onde os robôs aplicam forças em faces opostas, fazendo surgir forças de contato nas faces, permitindo a movimentação de uma posição inicial para outra posição desejada.

Tzafestas et al. (TZAFESTAS; PROKOPIOU; TZAFESTAS, 1998) afirmam que a maioria dos estudos feitos em sistemas multirrobo envolvem somente dois robôs e apresentam metodologia de planejamento de trajetória sobre movimentação de uma peça de grande dimensão utilizando um sistema composto por três robôs, seguindo a estratégia de um líder e dois seguidores, impondo simetria de movimentos entre os seguidores em relação ao líder, de modo a mover a peça de uma posição inicial até uma desejada. A faixa de erro de posição dos efetuadores finais dos robôs apresentada fica na faixa de 1 mm enquanto o de orientação fica em torno de 0,1 rd, para 1000 iterações do método proposto pelos autores. Por fim, afirmam que mãos robóticas são outra classe de sistemas multirrobo que podem ser estudadas com técnicas semelhantes.

A próxima classificação abordada é de Zivanovic e Vukobratovic (ZIVANOVIC; VUKOBRA-TOVIC, 2005) que consideram que o “trabalho cooperativo”, em seu sentido amplo, significa a realização de ações coordenadas exercidas por vários participantes (cooperadores) engajados na realização de uma tarefa específica. Assim sendo, concluem que o “trabalho cooperativo” é realizado por um sistema constituído por cooperadores e por um objeto de trabalho, de modo que os cooperadores trabalham juntos mediante ações coordenadas e simultâneas, em prol da

realização de uma tarefa sob ação do ambiente e do contato mútuo exercido pelos cooperadores, tanto direta como indiretamente via objeto de trabalho. No caso da robótica, consideram que o termo sistema cooperativo é sinônimo de sistema de manipulação, e que tanto os robôs como a peça podem ser tratados como corpos rígidos ou elásticos.

A Fig. 5 resume a classificação feita por Zivanovic e Vukobratovic (ZIVANOVIC; VUKOBRATOVIC, 2005). O autores consideram que o principal objetivo de um sistema cooperativo em robótica é manipular um objeto, e que a manipulação é realizada objetivando: (1) modificar a localização de um objeto no espaço de trabalho, transferindo o objeto de um local pra outro; (2) fazer com que o objeto siga uma trajetória especificada obedecendo uma orientação estipulada ao longo desta trajetória; e, (3) realizar algum trabalho em um objeto que pode estar parado ou em movimento.



**Figura 5:** Classificação segundo Zivanovic e Vukobratovic (ZIVANOVIC; VUKOBRATOVIC, 2005)

O foco do trabalho de Zivanovic e Vukobratovic (ZIVANOVIC; VUKOBRATOVIC, 2005) é a manipulação de um objeto rígido por robôs rígidos, entretanto consideram a existência de um meio elástico entre o objeto e os efetadores dos robôs, o que irá influenciar na diminuição das incertezas cinemáticas no controle do movimento.

### 2.1.1 Classificação Expandida dos Sistemas Multirrobo

Analisando todas as classificações encontradas na literatura, buscou-se pontos comuns e complementares e foi possível montar uma classificação mais ampla e geral contemplando os diversos autores, expandindo o ponto de vista de cada autor com as visões dos demais. O resultado encontra-se representado na Fig. 6, na forma de uma classificação expandida dos sistemas multirrobo. Na mesma figura existem blocos com texto em **negrito** representando o escopo de trabalho desta tese.

Analisando as classificações dos autores citados, é possível constatar alguns aspectos de similaridade e outros complementares. Porém quando se analisa o comportamento de um robô frente ao grupo de robôs, é possível considerar que existem três modos básicos de relacionamento: (1) de coordenação; (2) de cooperação; e (3) de competição, explicados a

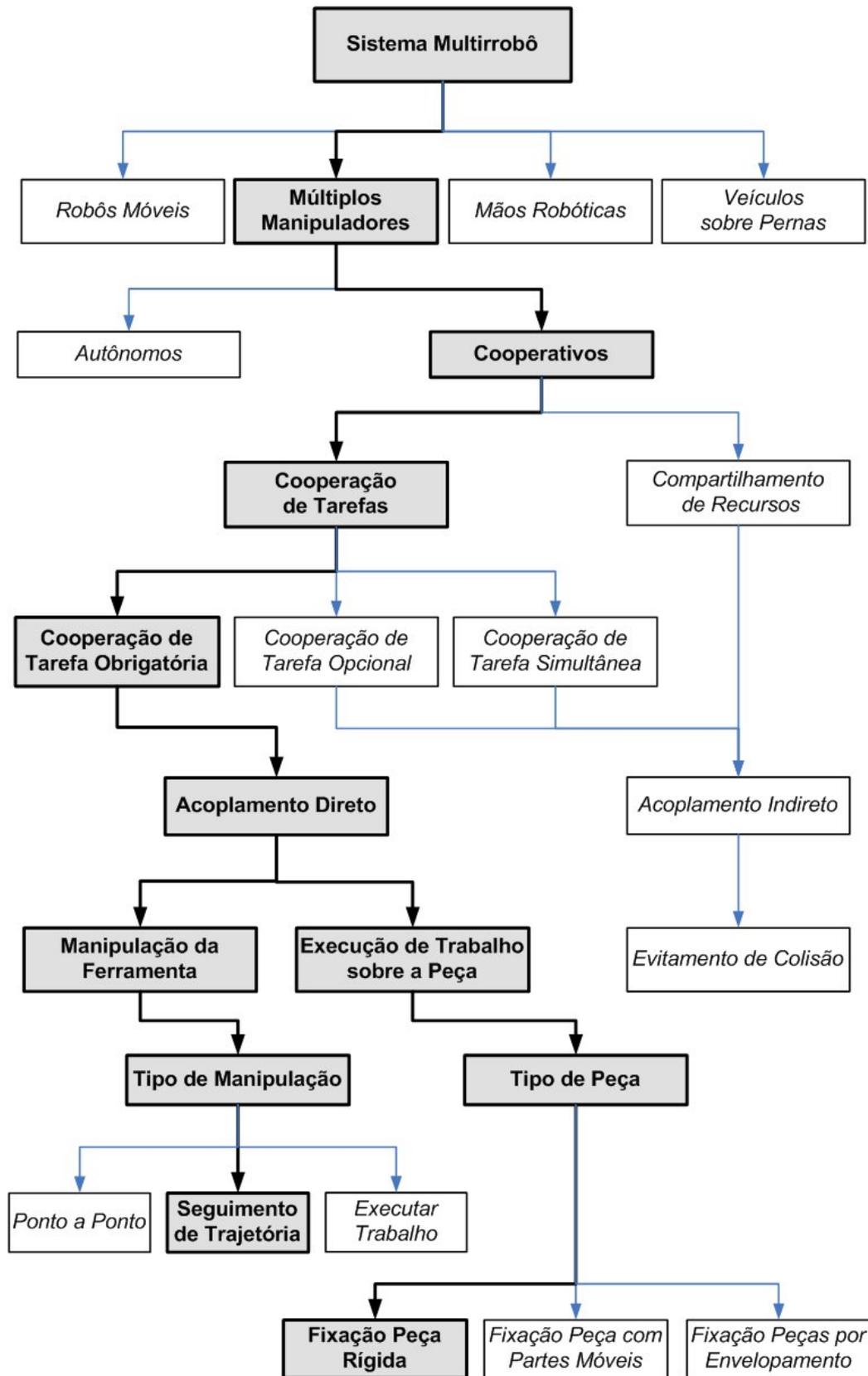


Figura 6: Classificação expandida dos Sistemas Multirrobo

seguir:

1. O relacionamento de **coordenação** acontece quando os robôs realizam suas próprias tarefas sem a preocupação com as tarefas dos outros robôs, sendo que não existe conflito algum entre cada tarefa com as demais. Pode-se dizer que na coordenação não existe qualquer relação de dependência entre as tarefas, ou seja, não existe acoplamento.
2. O relacionamento de **cooperação** acontece quando existe a capacidade de vários robôs atuarem em prol da realização de um objetivo coletivo, ou seja, quando atuam objetivando a realização de múltiplas tarefas simultaneamente, com a peculiaridade que as tarefas guardam relação de dependência entre si, caracterizando a existência de acoplamento.
3. O relacionamento de **competição**, por sua vez, ocorre quando deixa de existir cooperação, seja pela limitação de recursos ou pela existência de interesses conflitantes, onde apenas um ou alguns robôs possam realizar suas tarefas simultaneamente. Estas situações podem ser encontradas por exemplo, quando existem interseções no espaço de trabalho dos robôs e com isso, surge a possibilidade de colisão entre os manipuladores, fazendo com que uma ou algumas tarefas não sejam realizadas de modo a permitir que outras sejam.

Analisando o modo de relacionamento cooperativo, é possível nominar estes sistemas multirrobôs como Sistemas Robóticos Cooperativos (SRC), que é onde esta tese busca contribuir apresentando a proposta de um Jacobiano de Cooperação.

## 2.2 Sistemas Robóticos Cooperativos - SRC

No contexto desta tese, quando se analisa o comportamento de um robô frente ao grupo de robôs e contata-se a existência de um relacionamento cooperativo, é possível definir que:

**Definição 2.2.1** – *Sistemas Robóticos Cooperativos (SRC) é todo sistema composto por múltiplos manipuladores industriais, onde estes estejam atuando de modo cooperativo em prol da realização de múltiplas tarefas simultaneamente e que guardem algum tipo de relação de dependência entre si.*

Iniciando uma análise de um Sistema Robótico Cooperativo (SRC), a primeira pergunta que naturalmente surge é: “por que a utilização de mais de um manipulador cooperando na realização de uma certa tarefa é melhor que o uso de somente um manipulador”?

Zapata *et al.* (ZAPATA et al., 1987) responderam propondo a seguinte analogia: “porque o ser humano normalmente executa tarefas com maior habilidade utilizando as duas mãos, ao invés de somente uma”.

Respondendo de forma mais criteriosa, o fato é que a utilização de um sistema composto por múltiplos robôs manipuladores trabalhando de maneira cooperativa realiza tarefas que um único robô seria incapaz de realizar sozinho (KURFESS, 2005). Conforme o nível de complexidade da tarefa vai aumentando pode chegar a um ponto que somente um robô não tenha capacidade física de realizá-la, seja por limitações de espaço de trabalho ou mesmo por alcançar o limite físico de velocidade ou aceleração em alguma de suas juntas. Já em um SRC espaço de trabalho total do conjunto de robôs é sempre maior que o de um deles visto isoladamente, e as exigências de níveis de velocidades e acelerações das juntas podem ser compartilhadas de modo a não extrapolar as especificações técnicas nem os limites de posição, velocidade e aceleração de qualquer junta vista isoladamente.

Entretanto cabe ressaltar que a programação cresce em complexidade, face o surgimento de relações de dependência entres os robôs, além de surgir a necessidade de sincronização entre os robôs envolvidos.

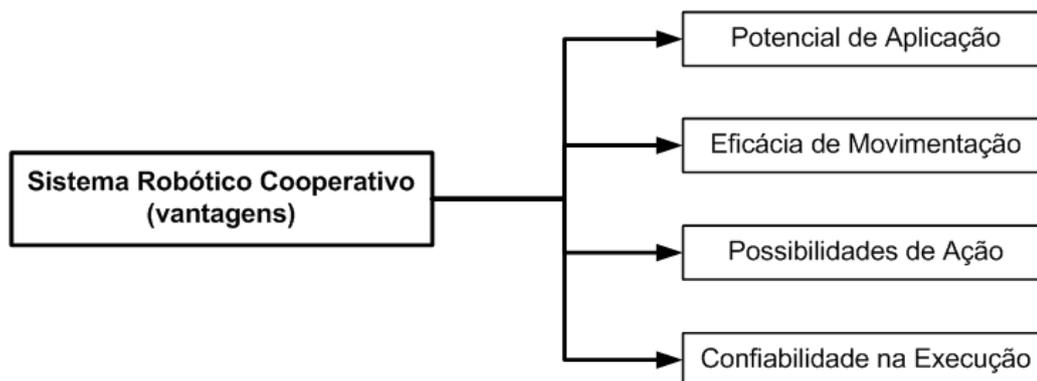
Um ponto interessante a ser ressaltado é que um SRC geralmente ocorre redundância cinemática, ou seja, a dimensão do espaço das juntas é maior que a dimensão do espaço operacional (CONKUR; BUCKINGHAM, 1997). A presença da redundância cinemática proporciona vantagens e desvantagens. A viabilidade de utilização de um SRC é tanto maior, quando mais as vantagens se sobreponham às desvantagens. Assim sendo, se faz necessário analisar vantagens e desvantagens, que encontram-se citadas a seguir.

### **2.2.1 Vantagens dos SRC**

A Fig. 7 apresenta esquematicamente as vantagens do uso dos SRC, onde é possível citar, o aumento:

1. da versatilidade e do potencial de aplicação, pelo fato que a redundância permite uma maior eficácia no intuito de evitar as singularidades, os obstáculos e as restrições estruturais, como por exemplo, evitando que os limites de juntas sejam alcançados, permitindo executar tarefas complexas (NENCHEV, 1989) mesmo em ambientes confinados;
2. da eficácia da movimentação das juntas, pois é possível movimentá-las com baixo consumo de energia, ou equilibrar as velocidades das diversas juntas, evitando sobrecarga de alguma em particular, ou permitir que haja um balanceamento das forças entre as juntas (YOSHIKAWA, 1990);
3. das possibilidades de ação sobre o objeto, pelo fato de poder atuar de maneiras diversas, acessando o objeto por variadas configurações; e,

- da confiabilidade na execução da tarefa (YOSHIKAWA, 1990), pois mesmo quando uma de suas juntas possa falhar, a tarefa pode ser executada, valendo-se das demais, sendo bastante útil no caso de operações realizadas em ambientes radioativos ou no espaço sideral, pois em ambientes como estes não há como acessar o robô a fim de fazer manutenção em caso de falha ou é de difícil acesso.



**Figura 7:** Vantagens dos SRC

### 2.2.2 Desvantagens dos SRC

A Fig. 8 apresenta esquematicamente as desvantagens do uso dos SRC, onde é possível citar, o aumento:

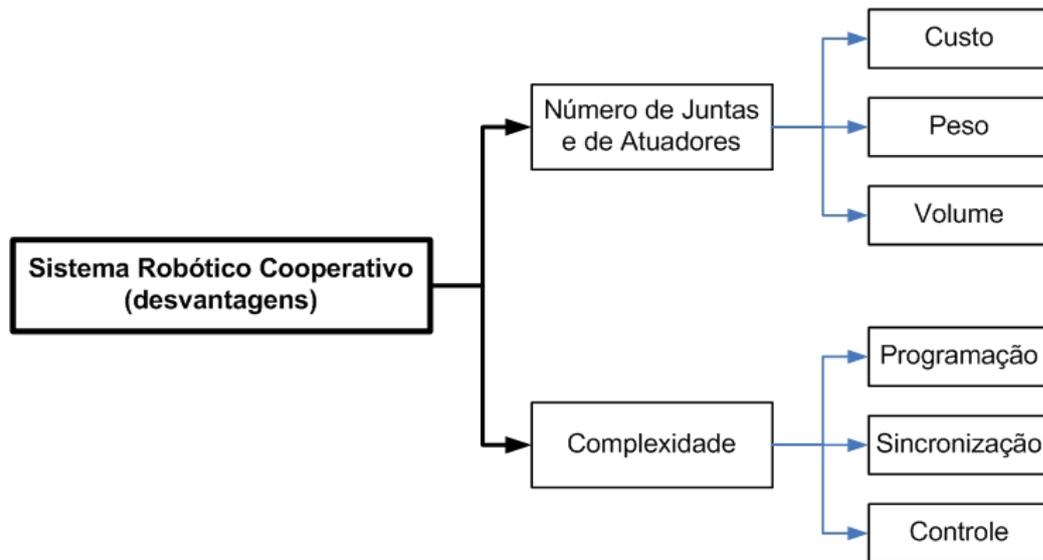
- do número de juntas e atuadores, o que aumenta o custo, o peso, o volume da estrutura (YOSHIKAWA, 1990); e,
- da complexidade de programação, sincronização e controle, exigindo algoritmos mais complexos e um maior esforço computacional, pelo aumento das operações matemáticas envolvidas, além dos inconvenientes decorrentes da redundância cinemática.

## 2.3 Aplicações Industriais de SRC

Existem diversas aplicações industriais que utilizam Sistemas Robóticos Cooperativos. A seguir encontram-se apresentados três exemplos de aplicações nas áreas de montagem, de dobramento de chapas e da soldagem.

### 2.3.1 Cooperação em Montagem

A empresa MOTOMAN oferece ao mercado um sistema de alta flexibilidade de movimentos denominado DA20 - *Dual-Arm Robot*, sendo constituído por dois braços manipuladores



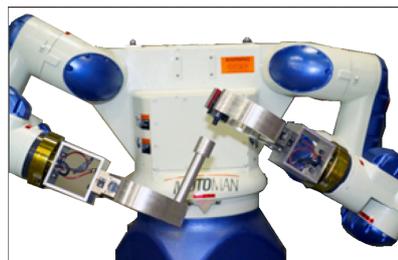
**Figura 8:** Desvantagens dos SRC

como mostra a Fig. 9.



**Figura 9:** DA20 - Dual-Arm Robot (KOCHAN, 2006)

O DA20 possui um total de 13 graus de liberdade, sendo um rotativo na base e seis graus de liberdade em cada braço (KOCHAN, 2006). Sua capacidade de manipulação de carga por braço é de 20 kg, sendo que podem chegar a manipular até 40 kg em operações com compartilhamento de carga onde ambos os braços estão envolvidos.



**Figura 10:** DA20 - Cooperação em Montagem (KOCHAN, 2006)

Os braços manipuladores podem cooperar na realização de tarefas de montagens, de em-

pacotamento, de transferência de peças, de alimentação de máquinas e tarefas de manipulação. A Fig. 10 apresenta uma operação de montagem onde um braço fixa a peça, enquanto o segundo executa uma tarefa de montagem.

### 2.3.2 Cooperação para Dobramento de Chapas Grandes

A Fig. 11 mostra dois robôs manipuladores KUKA KR 500 cooperando no compartilhamento de carga na fixação, manipulação e execução de tarefa de dobramento de uma chapa de grande dimensão com 5 mm de espessura, 7 m de comprimento por 2 m de largura, pesando 500 kg (STARMATIK, 2007).



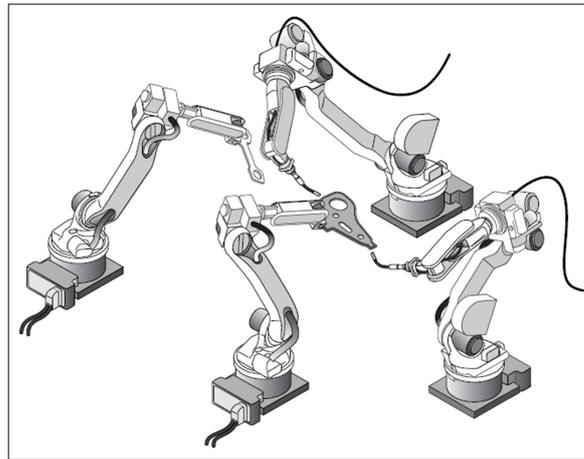
**Figura 11:** *Cooperação para dobramento de chapas grandes (STARMATIK, 2007)*

### 2.3.3 Cooperação em Soldagem Sem Gabarito (*jigless welding*)

Em alguns processos de união de peças por soldagem são utilizadas armações devidamente calibradas, ou seja, gabaritos onde as peças são montadas e fixadas na posição relativa desejada. Após a montagem das peças nestes dispositivos, executa-se a soldagem. Esses gabaritos agilizam a fixação relativa e garantem a qualidade do produto final, entretanto são caros e só são viáveis para lotes grandes.

A Fig. 12 mostra uma solução apresentada pela YASKAWA (YASKAWA, 2007) com 4 manipuladores operando de modo cooperativo, onde dois manipuladores posicionam as peças a serem soldadas por outros dois, sem que haja a necessidade da utilização de gabaritos.

A capacidade de manipulação de dois robôs posicionadores permite que as peças sejam alinhadas na posição relativa correta, enquanto dois outros robôs executam a soldagem das peças nas condições mais adequadas.



**Figura 12:** *Cooperação em posicionamento e soldagem (YASKAWA, 2007)*

## 2.4 Considerações Finais

A utilização de SRC torna-se adequada quando existirem condições que impeçam a utilização de um único robô, ou quando se deseja aumentar a produtividade, realizando simultaneamente várias tarefas. Assim em tarefas onde não seria possível utilizar um robô por consequência direta das suas limitações, como por exemplo, singularidades; faixas limitadas de operação das juntas (HOLLERBACH; SUH, 1987); e da não disponibilidade de velocidade, aceleração e torque, o uso de SRC pode ser uma solução.

A presença de obstáculos diminui espaço de trabalho de um único manipulador e pode até inviabilizar a utilização do mesmo na realização da tarefa. O uso de um SRC pode ser estudado de modo a compor uma solução, por permitir múltiplas possibilidades de ação.

Em objetos pesados que excederiam a capacidade de carga de um único manipulador, o uso de um SRC pode vir a compor uma solução, pois a carga pode ser distribuída entre os manipuladores. Cabe ressaltar que o compartilhamento de carga foge ao escopo dessa tese, porém fica sugerido como trabalhos futuros.

O aumento da complexidade de programação dos manipuladores quando compõem um SRC, pode inviabilizar sua utilização, e no sentido de resolver esse problema esta tese apresenta um modelo matemático, onde é possível resolver as cinemáticas inversa e inversa diferencial de todos os manipuladores simultaneamente em função das tarefas desejadas. Outro fator que impõe restrição de uso dos SRC é a operação em ambientes com espaço físico limitado.

## CAPÍTULO 3

# Jacobiano Relativo

Este capítulo apresenta na seção 3.1 uma revisão da literatura de modo a identificar os trabalhos que utilizam o conceito de Jacobiano Relativo (LEWIS; MACIEJEWSKI, 1990), que é a metodologia encontrada na literatura para modelagem cinemática de dois manipuladores cooperando na execução de uma tarefa, valendo-se de redundância cinemática. Na seção 3.2 é mostrado como se obtém o Jacobiano Relativo valendo-se dos conceitos utilizados na Robótica baseada na convenção de Denavit-Hartenberg (apêndice A), que não é a única, mas é uma das mais utilizadas por reduzir o número de parâmetros.

É apresentado na seção 3.3, a primeira contribuição científica desta tese, ou seja, uma metodologia alternativa de obtenção do Jacobiano Relativo empregando os conceitos da Robótica Baseada em Helicóides (apêndice B), aqui denominada de Jacobiano Relativo Baseado em Helicóides (RIBEIRO; GUENTHER; MARTINS, 2007) (RIBEIRO; GUENTHER; MARTINS, 2008).

A segunda contribuição científica desta tese é a metodologia de obtenção do Jacobiano Relativo Baseado em Helicóides (RIBEIRO; MARTINS, 2009) utilizando o Método de Davies (apêndice C), apresentada na seção 3.4.

Cabe ressaltar que as figuras apresentadas neste capítulo referem-se a manipuladores genéricos, sem qualquer particularização, de modo que a metodologia de obtenção do Jacobiano Relativo seja formalizada de maneira literal e genérica, sendo passível de aplicação direta para quaisquer tipos de manipuladores.

### 3.1 Introdução

As pesquisas em torno de sistemas multirrobo tiveram início nos anos 70, pois começaram a surgir aplicações onde um único robô manipulador não era capaz de ser aplicado, em função de suas limitações técnicas. Assim sendo a utilização de mais de um robô de forma cooperativa

surge como uma solução possível, principalmente em aplicações que incluem transporte de cargas pesadas e/ou volumosas, montagem de múltiplos componentes sem a necessidade de dispositivos de fixação, manipulação de materiais flexíveis ou que possuam algum grau de liberdade interno (SICILIANO; KHATIB, 2008).

Alguns autores utilizam técnicas de posicionamento utilizando simetria, resolvendo somente para um manipulador e espelhando os resultados das variáveis de juntas para o outro (HEMAMI, 1986) (TZAFESTAS; PROKOPIOU; TZAFESTAS, 1998) (SICILIANO; KHATIB, 2008). Um exemplo de resolução por espelhamento encontra-se apresentado na seção 2.3.2, Fig. 11 que mostra dois robôs manipuladores KUKA KR 500 cooperando no compartilhamento de carga na fixação, manipulação e execução de tarefa de dobramento de uma chapa de grande dimensão com 5 mm de espessura, 7 m de comprimento por 2 m de largura, pesando 500 kg (STARMATIK, 2007).

As pesquisas encontradas na literatura no que tange à cooperação entre manipuladores industriais estão praticamente focadas em cooperação de dois robôs. Dentre os que não utilizam o recurso da simetria dos movimentos tem-se que a determinação da cinemática diferencial de dois robôs cooperando na execução de uma tarefa, pode ser dividida basicamente em duas classes (LEWIS; MACIEJEWSKI, 1990), a saber:

1. A primeira classe é caracterizada pela abordagem baseada na resolução da cinemática diferencial de cada robô individualmente, ou seja inicialmente o conjunto de equações da cinemática de um robô, denominado mestre, é resolvido em função da tarefa a ser executada. Em seguida passa-se a resolução do conjunto de equações da cinemática do segundo robô, denominado escravo, de modo a satisfazer as equações de restrições impostas para manter a cadeia fechada (SICILIANO; KHATIB, 2008).
2. A segunda classe utiliza uma abordagem que considera o sistema como um todo, ou seja, um sistema único é analisado sendo composto pelos dois robôs e a peça. Com isso surge um sistema redundante, caracterizado pela existência de múltiplas soluções. Como vantagem da redundância cinemática é possível citar a possibilidade de otimizar o movimento das juntas dos robôs, como função de algum critério, como por exemplo, o índice de manipulabilidade, ou evitar limites das juntas.

Em 1990, Lewis e Maciejewski publicam o conceito de Jacobiano Relativo (LEWIS; MACIEJEWSKI, 1990), que relaciona as velocidades no espaço da tarefa, com as velocidades das juntas dos dois robôs. O sistema composto pelos dois robôs é visto como um único sistema redundante, que utiliza o método da pseudo-inversa na solução da cinemática inversa, ou seja na determinação do correto movimento das juntas, de modo a garantir a distância relativa entre

os efetuadores, mais especificamente entra a peça fixada rigidamente ao efetuator de um robô e o outro efetuator que atua sobre a referida peça. Em 1996, Lewis apresenta metodologia de geração de trajetórias, utilizando o espaço nulo do Jacobiano Relativo de modo a otimizar um critério secundário, tal como, o evitamento de colisão ou de limite de juntas ou mesmo de obedecer restrições de orientação (LEWIS, 1996). Hwang et al. utilizam a geração de trajetórias metodologia apresentada por Lewis (1996) na solução da cinemática inversa dos dois braços de um sistema robótico humanóide (HWANG et al., 1998).

Abordagens similares de obtenção do Jacobiano Relativo foram apresentadas por Mohri, Yamamoto e Hirano utilizando o conceito em operações de usinagem (MOHRI; YAMAMOTO; HIRANO, 1996); e por Choi et al. aplicando em tarefas de montagem (CHOI et al., 1999).

Owen, Croft e Benhabib utilizam o conceito de Jacobiano Relativo na geração de trajetórias na usinagem robótica (OWEN; CROFT; BENHABIB, 2003); na geração de trajetórias em tempo real (OWEN; CROFT; BENHABIB, 2004); na redução da aceleração das juntas nas proximidades da saturação do torque, valendo-se da pseudo-inversa com pesos do Jacobiano Relativo (OWEN; CROFT; BENHABIB, 2005); e na determinação de trajetória otimizada utilizando o espaço nulo, de modo a reduzir a demanda de torque nos manipuladores (OWEN; CROFT; BENHABIB, 2008), com o objetivo de obter melhor performance na realização das tarefas.

## 3.2 O Conceito de Jacobiano Relativo

Qualquer tipo de tarefa pode ser bem definida por um conjunto de seis variáveis independentes, denominadas variáveis da tarefa, ou seja, o movimento relativo entre a ferramenta, solidária ao efetuator final de um dos manipuladores, aqui denominado robô operador, e a peça que se encontra solidária ao efetuator final do outro manipulador, aqui denominado robô posicionador, é determinado pelos movimentos das juntas dos dois manipuladores através do Jacobiano Relativo.

A seguir é apresentada a metodologia encontrada na literatura para a obtenção do Jacobiano Relativo para dois manipuladores. Todo o raciocínio está amparado em somatórios vetoriais (Fig. 13).

É importante estabelecer que as notações para os referenciais, os vetores e as matrizes de rotação utilizadas neste texto seguem as encontradas em Siciliano et al. (SICILIANO et al., 2008). Assim sendo, tem-se que:  $O_i$  é a origem do  $i$ -ésimo referencial;  $r_{i,j}^k$  é o vetor posição do  $i$ -ésimo referencial em relação ao  $j$ -ésimo referencial, medido no  $k$ -ésimo referencial; e  $R_j^i$  representa a matriz de rotação do  $j$ -ésimo referencial medida no  $i$ -ésimo referencial.

Observe a Fig. 13 onde o ponto  $t_2$  corresponde ao extremo da ferramenta do robô operador.

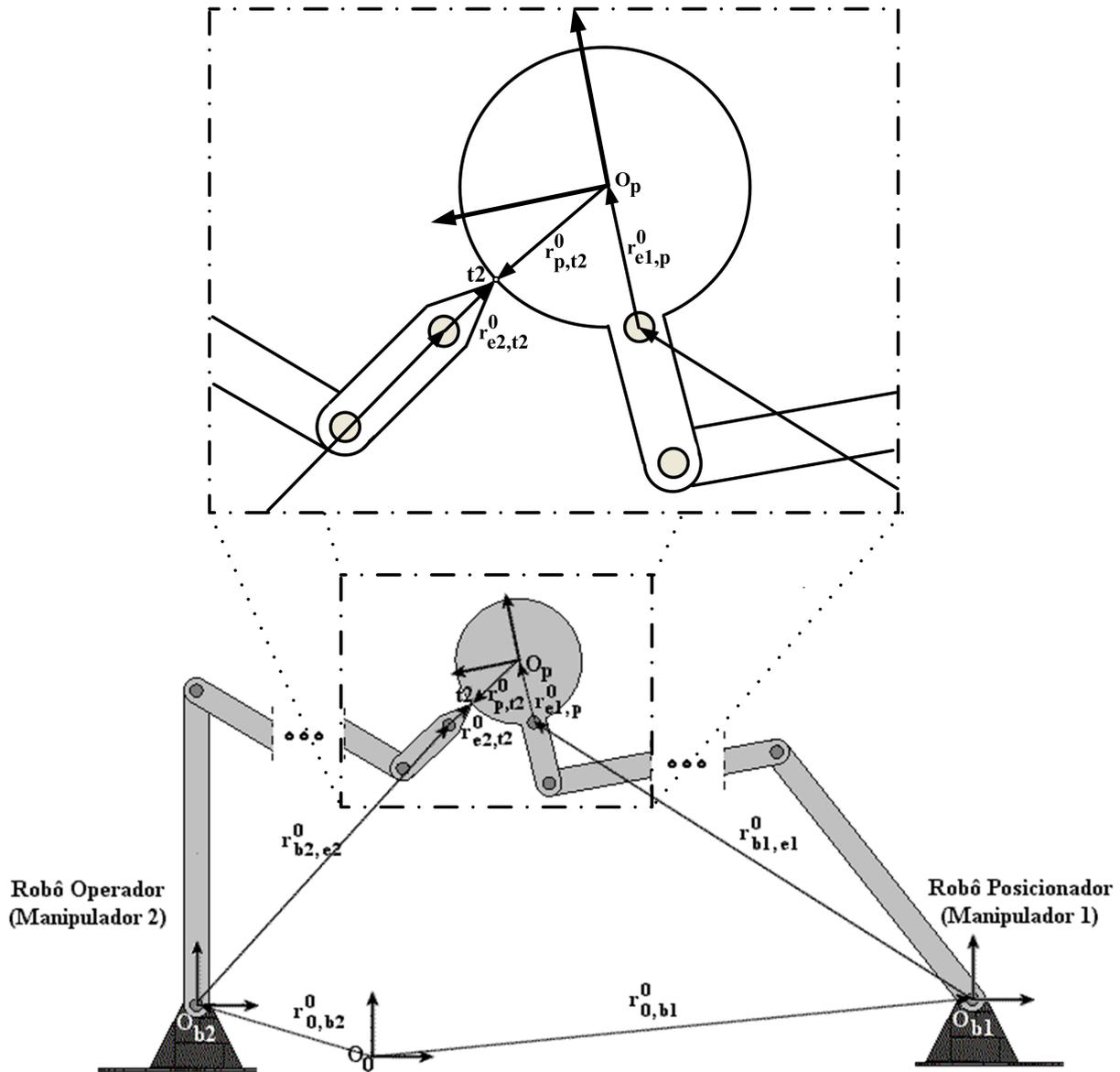


Figura 13: Cadeia Cinemática do Sistema Cooperativo com 2 Manipuladores

Seja  $\dot{x}_{p,t_2}$  o vetor velocidade do extremo da ferramenta (ponto  $t_2$ ) em relação à peça, composto pelos vetores velocidades lineares e angulares medidos no sistema de referência  $p$  solidário à peça, ou seja:

$$\dot{x}_{p,t_2} = \begin{bmatrix} \dot{r}_{p,t_2}^p \\ \dot{w}_{p,t_2}^p \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

onde:

$\dot{r}_{p,t_2}^p$  - é o vetor velocidade linear do ponto  $t_2$  no referencial  $p$ ; e,

$\dot{w}_{p,t_2}^p$  - é o vetor velocidade angular da ferramenta medido no referencial  $p$ .

Assumindo que:

$$\dot{x}_{p,t_2} = J_R^{12} \dot{q} \quad (3.2)$$

onde:

$J_R$  - é o Jacobiano Relativo;

${}^{12}\dot{q}$  - é o vetor composto pelas velocidades das juntas dos dois manipuladores, ou seja:

$${}^{12}\dot{q} = \begin{bmatrix} {}^1\dot{q} \\ {}^2\dot{q} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

${}^1\dot{q}$  - é o vetor composto pelas velocidades das juntas do robô posicionador; e,

${}^2\dot{q}$  - é o vetor composto pelas velocidades das juntas do robô operador.

Novamente observando a Fig. 13, encontram-se representados quatro referenciais denominados como:

$b_1$  - solidário à base do robô posicionador (manipulador 1);

$b_2$  - solidário à base do robô operador (manipulador 2);

$p$  - solidário à peça; e,

0 - referencial inercial, fixo à terra.

Considerando ainda as seguintes hipóteses:

1. a tarefa desejada é definida pelos vetores velocidade linear e angular medidos no referencial  $p$  da peça, ou seja, por  $\dot{r}_{p,t_2}^p$  e  $w_{p,t_2}^p$ ;
2. o robô posicionador prende a peça rigidamente, ou seja, não existe movimento relativo entre a peça e a garra do posicionador;
3. o robô operador executa a tarefa desejada sobre a peça com uma ferramenta fixada rigidamente em seu respectivo efetuator final, mais especificamente em sua extremidade (ponto  $t_2$ ); e,
4. as posições e orientações das bases dos robôs com respeito ao referencial fixo não variam com o tempo.

Observando os vetores posição representados na Fig. 13, é possível escrever a seguinte equação:

$$r_{0,b_1}^0 + r_{b_1,e_1}^0 + r_{e_1,p}^0 + r_{p,t_2}^0 = r_{0,b_2}^0 + r_{b_2,e_2}^0 + r_{e_2,t_2}^0 \quad (3.4)$$

Assim sendo, o vetor posição  $r_{p,t_2}^0$  escrito no referencial inercial é dado por:

$$r_{p,t_2}^0 = r_{0,b_2}^0 + r_{b_2,e_2}^0 + r_{e_2,t_2}^0 - r_{0,b_1}^0 - r_{b_1,e_1}^0 - r_{e_1,p}^0 \quad (3.5)$$

É possível expressar cada termo em relação ao referencial local da seguinte forma:

$$r_{i,j}^0 = R_i^0 r_{i,j}^i \quad (3.6)$$

onde  $r_{i,j}^i$  é o vetor posição do  $i$ -ésimo referencial para o  $j$ -ésimo referencial, medido no  $i$ -ésimo referencial.

Assim sendo, tem-se:

$$R_p^0 r_{p,t_2}^p = r_{0,b_2}^0 + R_{b_2}^0 r_{b_2,e_2}^{b_2} + r_{e_2,t_2}^0 - r_{0,b_1}^0 - R_{b_1}^0 r_{b_1,e_1}^{b_1} - r_{e_1,p}^0 \quad (3.7)$$

Pré-multiplicando a Eq. 3.7 por  $(R_p^0)^{-1}$ , e como  $(R_p^0)^{-1} = (R_p^0)^T = R_0^p$ , resulta que:

$$r_{p,t_2}^p = R_0^p r_{0,b_2}^0 + R_0^p R_{b_2}^0 r_{b_2,e_2}^{b_2} + R_0^p r_{e_2,t_2}^0 - R_0^p r_{0,b_1}^0 - R_0^p R_{b_1}^0 r_{b_1,e_1}^{b_1} - R_0^p r_{e_1,p}^0 \quad (3.8)$$

Considerando a composição de matrizes de rotação (SICILIANO et al., 2008), tem-se:

$$R_0^p R_{b_1}^0 = R_{b_1}^p \quad (3.9)$$

$$R_0^p R_{b_2}^0 = R_{b_2}^p \quad (3.10)$$

Assim sendo:

$$r_{p,t_2}^p = R_0^p r_{0,b_2}^0 + R_{b_2}^p r_{b_2,e_2}^{b_2} + R_0^p r_{e_2,t_2}^0 - R_0^p r_{0,b_1}^0 - R_{b_1}^p r_{b_1,e_1}^{b_1} - R_0^p r_{e_1,p}^0 \quad (3.11)$$

Derivando  $r_{p,t_2}^p$  em relação ao tempo, resulta:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{p,t_2}^p &= \dot{R}_0^p r_{0,b_2}^0 + R_0^p \dot{r}_{0,b_2}^0 + \dot{R}_{b_2}^p r_{b_2,e_2}^{b_2} + R_{b_2}^p \dot{r}_{b_2,e_2}^{b_2} \\ &+ \dot{R}_0^p r_{e_2,t_2}^0 + R_0^p \dot{r}_{e_2,t_2}^0 - \dot{R}_0^p r_{0,b_1}^0 - R_0^p \dot{r}_{0,b_1}^0 \\ &- \dot{R}_{b_1}^p r_{b_1,e_1}^{b_1} - R_{b_1}^p \dot{r}_{b_1,e_1}^{b_1} - \dot{R}_0^p r_{e_1,p}^0 - R_0^p \dot{r}_{e_1,p}^0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Observando que os vetores  $r_{0,b_2}^0$  e  $r_{0,b_1}^0$  são invariantes com o tempo, ou seja,  $\dot{r}_{0,b_2}^0 = \dot{r}_{0,b_1}^0 = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{p,t_2}^p &= \dot{R}_0^p r_{0,b_2}^0 + \dot{R}_{b_2}^p r_{b_2,e_2}^{b_2} + R_{b_2}^p \dot{r}_{b_2,e_2}^{b_2} \\ &+ \dot{R}_0^p r_{e_2,t_2}^0 + R_0^p \dot{r}_{e_2,t_2}^0 - \dot{R}_0^p r_{0,b_1}^0 \\ &- \dot{R}_{b_1}^p r_{b_1,e_1}^{b_1} - R_{b_1}^p \dot{r}_{b_1,e_1}^{b_1} - \dot{R}_0^p r_{e_1,p}^0 - R_0^p \dot{r}_{e_1,p}^0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

A velocidade linear  $\dot{r}_{b_2,e_2}^{b_2}$  é obtida pela multiplicação da parcela da velocidade linear do

Jacobiano do manipulador 2 (robô operador),  ${}^2J_v$ , pelo vetor das velocidades das juntas, ou seja,  $\dot{r}_{b2,e2}^{b2} = {}^2J_v {}^2\dot{q}$  (Eq. A.63, do apêndice A), e  $\dot{r}_{b1,e1}^{b1} = {}^1J_v {}^1\dot{q}$ , sendo  ${}^1J_v$  a mesma parcela para o manipulador 1 (robô posicionador), resulta que:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{p,t2}^p = & \dot{R}_0^p (r_{0,b2}^0 + r_{e2,t2}^0) + \dot{R}_{b2}^p r_{b2,e2}^{b2} + R_{b2}^p {}^2J_v {}^2\dot{q} + R_0^p \dot{r}_{e2,t2}^0 \\ & - \dot{R}_0^p (r_{0,b1}^0 + r_{e1,p}^0) - R_{b1}^p {}^1J_v {}^1\dot{q} - \dot{R}_{b1}^p r_{b1,e1}^{b1} - R_0^p \dot{r}_{e1,p}^0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Agrupando os termos relativos a cada robô tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{p,t2}^p = & -R_{b1}^p {}^1J_v {}^1\dot{q} - \dot{R}_0^p (r_{0,b1}^0 + r_{e1,p}^0) - \dot{R}_{b1}^p r_{b1,e1}^{b1} - R_0^p \dot{r}_{e1,p}^0 \\ & + R_{b2}^p {}^2J_v {}^2\dot{q} + \dot{R}_0^p (r_{0,b2}^0 + r_{e2,t2}^0) + \dot{R}_{b2}^p r_{b2,e2}^{b2} + R_0^p \dot{r}_{e2,t2}^0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

O termo  $\dot{R}_i^j r_{i,j}^i$  pode ser substituído por  $\dot{R}_i^j r_{i,j}^i = -R_j^i \Omega(r_{i,j}^i) R_i^j w_{i,j}^i$  (Eq. A.55, do apêndice A), onde  $\Omega(r_{i,j}^i)$  é uma matriz anti-simétrica dada por:

$$\Omega(r_{i,j}^i) = \begin{bmatrix} 0 & -r_{i,j,z}^i & r_{i,j,y}^i \\ r_{i,j,z}^i & 0 & -r_{i,j,x}^i \\ -r_{i,j,y}^i & r_{i,j,x}^i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Observando que  $w_{b2,e2}^{b2} = {}^2J_w {}^2\dot{q}$  (Eq. A.64, do apêndice A), onde  ${}^2J_w$  é a parcela da velocidade angular do Jacobiano do manipulador 2 (robô operador) e que  $w_{b1,e1}^{b1} = {}^1J_w {}^1\dot{q}$ , sendo  ${}^1J_w$  a mesma parcela para o manipulador 1 (robô posicionador), resulta finalmente a expressão para a velocidade linear obtida pela diferenciação do vetor posição:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{p,t2}^p = & -R_{b1}^p {}^1J_v {}^1\dot{q} + R_p^p \Omega(r_{p,t2}^p) R_{b1}^p {}^1J_w {}^1\dot{q} + R_{e1}^p \Omega(r_{e1,p}^{e1}) R_{b1}^{e1} {}^1J_w {}^1\dot{q} \\ & + R_{b2}^p {}^2J_v {}^2\dot{q} - R_{e2}^p \Omega(r_{e2,t2}^{e2}) R_{b2}^{e2} {}^2J_w {}^2\dot{q} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Resta entretanto, calcular as velocidades angulares. Observa-se na Fig. 13 que instantaneamente é possível representá-las da seguinte forma:

$$w_{0,b2}^0 + w_{b2,e2}^0 + w_{e2,t2}^0 - w_{0,b1}^0 - w_{b1,e1}^0 - w_{e1,p}^0 - w_{p,t2}^0 = 0 \quad (3.18)$$

ou seja,

$$w_{p,t2}^0 = w_{0,b2}^0 + w_{b2,e2}^0 + w_{e2,t2}^0 - w_{0,b1}^0 - w_{b1,e1}^0 - w_{e1,p}^0 \quad (3.19)$$

Como não existe movimento relativo entre a base de cada manipulador e o referencial fixo:

$$w_{0,b2}^0 = w_{0,b1}^0 = 0 \quad (3.20)$$

Como a peça é fixada rigidamente:

$$w_{e1,p}^0 = 0 \quad (3.21)$$

Como o ponto  $t_2$  permanece invariante em relação ao efetuador final do robô efetuador:

$$w_{e2,t_2}^0 = w_{e1,p}^0 = 0 \quad (3.22)$$

Assim sendo, a Eq. 3.19 passa a ser expressa por:

$$w_{p,t_2}^0 = -w_{b1,e1}^0 + w_{b2,e2}^0 \quad (3.23)$$

Expressando cada termo em relação ao referencial local (SICILIANO et al., 2008) na forma,

$w_{i,j}^0 = R_i^0 w_{i,j}^i$  tem-se:

$$R_p^0 w_{p,t_2}^p = -R_{b1}^0 w_{b1,e1}^{b1} + R_{b2}^0 w_{b2,e2}^{b2} \quad (3.24)$$

Pré-multiplicando cada termo por  $R_0^p$  e lembrando que  $w_{b2,e2}^{b2} = {}^2J_w {}^2\dot{q}$  e que  $w_{b1,e1}^{b1} = {}^1J_w {}^1\dot{q}$ , tem-se:

$$w_{p,t_2}^p = -R_0^p R_{b1}^0 {}^1J_w {}^1\dot{q} + R_0^p R_{b2}^0 {}^2J_w {}^2\dot{q} \quad (3.25)$$

Considerando a composição de matrizes de rotação  $R_0^p R_{b2}^0 = R_{b2}^p$  e  $R_0^p R_{b1}^0 = R_{b1}^p$ , finalmente, tem-se que o vetor velocidade angular pode ser expresso por:

$$w_{p,t_2}^p = -R_{b1}^p {}^1J_w {}^1\dot{q} + R_{b2}^p {}^2J_w {}^2\dot{q} \quad (3.26)$$

Substituindo as expressões de  $\dot{r}_{p,t_2}^p$  (Eq. 3.17) e  $w_{p,t_2}^p$  (Eq. 3.26) na Eq. 3.1, tem-se:

$$\dot{x}_{p,t_2} = \begin{bmatrix} -R_{b1}^p {}^1J_v + \Omega(r_{p,t_2}^p) R_{b1}^p {}^1J_w + R_{e1}^p \Omega(r_{e1,p}^{e1}) R_{b1}^{e1} {}^1J_w & R_{b2}^p {}^2J_v - R_{e2}^p \Omega(r_{e2,t_2}^{e2}) R_{b2}^{e2} {}^2J_w \\ -R_{b1}^p {}^1J_w & R_{b2}^p {}^2J_w \end{bmatrix} {}^{12}\dot{q} \quad (3.27)$$

Comparando a Eq. 3.27 com a Eq. 3.2, finalmente tem-se a seguinte expressão para o Jacobiano Relativo ( $J_R$ ):

$$J_R = \begin{bmatrix} -R_{b1}^p {}^1J_v + \Omega(r_{p,t_2}^p) R_{b1}^p {}^1J_w + R_{e1}^p \Omega(r_{e1,p}^{e1}) R_{b1}^{e1} {}^1J_w & R_{b2}^p {}^2J_v - R_{e2}^p \Omega(r_{e2,t_2}^{e2}) R_{b2}^{e2} {}^2J_w \\ -R_{b1}^p {}^1J_w & R_{b2}^p {}^2J_w \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Da Eq. 3.28 verifica-se que o Jacobiano Relativo ( $J_R$ ) é calculado combinando: os

Jacobianos convencionais de cada um dos robôs  ${}^k J$ , sendo  $k = 1, 2$ ; as matrizes de rotação  $R_j^i$  que dependem dos movimentos entre os sistemas de referência  $i$  e  $j$ ; e as matrizes anti-simétricas  $\Omega(r_{i,j}^k)$ , que dependem dos vetores posição  $r_{i,j}^k$ . Os fundamentos necessários à obtenção desses termos encontram-se no apresentado no apêndice A.

Esta análise indica que o Jacobiano Relativo (Eq. 3.28) é calculado:

1. a partir dos Jacobianos convencionais  ${}^k J({}^k q)$  de cada manipulador, sendo necessário conhecer:
  - (a) os parâmetros de Denavit-Hartenberg de cada manipulador;
  - (b) as posições iniciais das juntas dos manipuladores; e,
  - (c) as posições instantâneas das juntas dos manipuladores.
2. empregando matrizes de rotação constantes que definem a orientação da peça em relação ao efetuador do manipulador 1, e a orientação da ferramenta em relação ao efetuador do manipulador 2;
3. empregando matrizes de rotação que definem a orientação instantânea do efetuador de cada manipulador em relação à respectiva base;
4. utilizando a posição fixa da peça em relação ao efetuador do manipulador 1 e a posição fixa da ferramenta em relação ao manipulador 2; e,
5. a partir da matriz de rotação da ferramenta em relação à peça  $R_{t_2}^p(t)$  e do vetor posição da ferramenta em relação à peça  $r_{p,t_2}^p(t)$ , ambos definidos pela tarefa.

Toda a formulação pressupõe uma modelagem de cada robô adotando a convenção de Denavit-Hartenberg, na formação das matrizes de transformação homogêneas para o cálculo da cinemática direta, que é aproveitada na obtenção das orientações relativas entre os referenciais, e para o cálculo do Jacobiano de cada robô em relação à sua respectiva base, como apresentado no apêndice A.

Para permitir a utilização racional deste conceito é conveniente que o Jacobiano Relativo seja escrito com um subíndice representativo quanto à cooperação entre os manipuladores 1 e 2, ou seja, a representação  $J_R$  apresentada passa para  $J_{R12}$ . Assim sendo, a Eq. 3.2 pode ser reescrita como:

$$\dot{x}_{p,t_2} = J_{R12} {}^{12}\dot{q} \quad (3.29)$$

e  $J_{R12}$  expresso por:

$$J_{R12} = \begin{bmatrix} [J_{R12}]_{(11)} & [J_{R12}]_{(12)} \\ [J_{R12}]_{(21)} & [J_{R12}]_{(22)} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

onde:

$$[J_{R12}]_{(11)} = [-R_{b1}^p {}^1 J_v + \Omega(r_{p,t_2}^p) R_{b1}^p {}^1 J_w + R_{e1}^p \Omega(r_{e1,p}^{e1}) R_{b1}^{e1} {}^1 J_w] \quad (3.31)$$

$$[J_{R12}]_{(12)} = [R_{b2}^p {}^2 J_v - R_{e2}^p \Omega(r_{e2,t_2}^{e2}) R_{b2}^{e2} {}^2 J_w] \quad (3.32)$$

$$[J_{R12}]_{(21)} = [-R_{b1}^p {}^1 J_w] \quad (3.33)$$

$$[J_{R12}]_{(22)} = [R_{b2}^p {}^2 J_w] \quad (3.34)$$

### 3.3 Jacobiano Relativo Baseado em Helicoides

Neste item é apresentada metodologia de obtenção do Jacobiano Relativo utilizando a Teoria dos Helicoides (DAVIDSON; HUNT, 2004), e o método dos deslocamentos dos helicoides sucessivos (TSAI, 1999) na obtenção da cinemática direta. O Jacobiano Relativo passa a ser representado por helicoides e assim, passa a ser denominado Jacobiano Relativo baseado em helicoides (*Screw-Based Relative Jacobian*) (RIBEIRO; GUENTHER; MARTINS, 2007) (RIBEIRO; GUENTHER; MARTINS, 2008).

Deseja-se determinar a velocidade do ponto  $t_2$  em relação à peça. Para tanto, associa-se um referencial  $p$ , solidário à peça, mais especificamente no ponto  $p$ , como mostra a Fig. 14. A peça é fixada rigidamente pelo efetuador final do robô posicionador (manipulador 1), e o ponto  $t_2$  é localizado na extremidade do efetuador final do robô operador (manipulador 2).

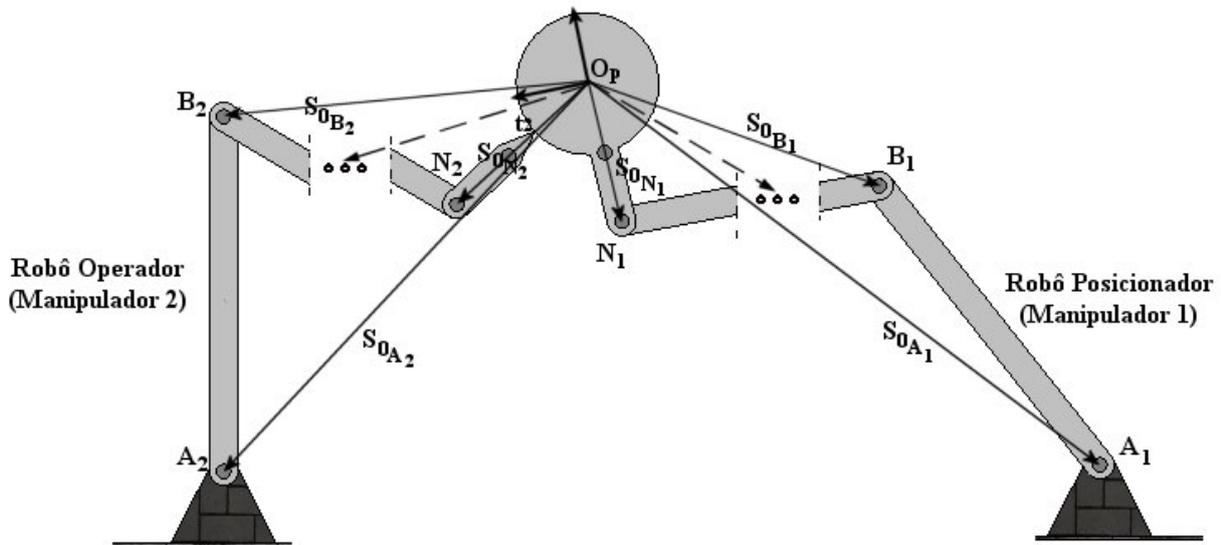


Figura 14: Designação das juntas no SRC

A velocidade do último corpo do manipulador 2, no referencial  $p$  localizado na peça solidária ao último corpo do manipulador 1, pode ser dada pelo heligiro (DAVIDSON; HUNT, 2004):

$$\dot{x}^p = \begin{bmatrix} w^p \\ \dot{r}_0^p \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

onde  $w^p$  é a velocidade angular do corpo medida no referencial  $p$  e  $\dot{r}_0^p$  é a velocidade linear de um ponto do corpo instantaneamente na origem ( $O_p$ ) do referencial  $p$ .

A velocidade do último corpo do manipulador 2 no referencial  $p$  depende das velocidades das juntas dos manipuladores,  $\dot{q}_i$ , para  $i = N_1, \dots, B_1, A_1, A_2, B_2, \dots, N_2$ , onde  $n_1$  e  $n_2$  correspondem ao número de juntas dos manipuladores 1 e 2, respectivamente. Assim sendo, a velocidade do último corpo do manipulador 2 no referencial  $p$  pode ser expressa por (TSAI, 1999):

$$\dot{x}^p = \begin{bmatrix} w^p \\ \dot{r}_0^p \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \hat{\mathcal{S}}_i^p \dot{q}_i \quad (3.36)$$

onde  $\hat{\mathcal{S}}_i^p$  é o helicóide normalizado da  $i$ -ésima junta medida no referencial  $p$  e  $\dot{q}_i$  corresponde à magnitude do heligiço.

A Eq. 3.36 pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\dot{x}^p = \begin{bmatrix} {}^1 J^p & {}^2 J^p \end{bmatrix} {}^{12} \dot{q} \quad (3.37)$$

onde:

$${}^1 J^p = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{S}}_{A_1}^p & \dots & \hat{\mathcal{S}}_{N_1}^p \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$${}^2 J^p = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{S}}_{A_2}^p & \dots & \hat{\mathcal{S}}_{N_2}^p \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$${}^{12} \dot{q} = \begin{bmatrix} {}^1 \dot{q} \\ {}^2 \dot{q} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

onde:

$${}^1 \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{A_1} \\ \vdots \\ \dot{q}_{N_1} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$${}^2 \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{A_2} \\ \vdots \\ \dot{q}_{N_2} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

O helicóide normalizado  $\hat{\mathcal{S}}_i$  para para a  $i$ -ésima junta, assume a forma da Eq. B.15 (apên-

dice B) para uma junta de rotação, ou seja:

$$\hat{\$}_i = \begin{bmatrix} s_i \\ s_{0_i} \times s_i \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Caso existam juntas primárias, o helicóide normalizado  $\hat{\$}_i$  para a  $i$ -ésima junta prismática, assume a forma da Eq. B.16 (apêndice B), ou seja:

$$\hat{\$}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ s_i \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Os vetores  $s_i$  e  $s_{0_i}$  podem ser calculados utilizando o mesmo princípio desenvolvido no Método do Deslocamento dos Helicoides Sucessivos (apêndice B).

Considere os seguintes vetores na forma homogênea  $\hat{s}_i$  e  $\hat{s}_{0_i}$  definidos por::

$$\hat{s}_i = \begin{bmatrix} s_{i_x} & s_{i_y} & s_{i_z} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.45)$$

$$\hat{s}_{0_i} = \begin{bmatrix} s_{0_{i_x}} & s_{0_{i_y}} & s_{0_{i_z}} & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.46)$$

Sejam  $\hat{s}_i$  e  $\hat{s}_{0_i}$ , com índice *ref*, os vetores  $\hat{s}_{i_{ref}}$  e  $\hat{s}_{0_{i_{ref}}}$  na posição de referência, isto é, a posição onde  $\theta_i$  e  $t_i$  são identicamente nulos.

O vetor  $\hat{s}_{0_i}$  traz as coordenadas cartesianas de um ponto específico, coordenadas da  $i$ -ésima junta, representadas no referencial absoluto após sofrer as influências dos deslocamentos dos helicoides sucessivos.

Assim tem-se :

$$\hat{s}_i = T_i \hat{s}_{i_{ref}} \quad (3.47)$$

$$\hat{s}_{0_i} = T_i \hat{s}_{0_{i_{ref}}} \quad (3.48)$$

A matriz  $T_i$  é a matriz de transformação homogênea resultante dos deslocamentos de helicoides sucessivos representado por sua respectiva matriz de transformação homogênea, na seguinte ordem: parte do referencial  $p$ , segue pelas juntas  $N_1, \dots, A_1$  do manipulador 1, passa pelas juntas  $A_2, \dots, N_2$ , chegando ao ponto  $t_2$ , ou seja,  $A_{N_1}, \dots, A_{A_1}, A_{A_2}, \dots, A_{N_2}$ . Seja o helicóide de uma junta qualquer  $i$ , sua matriz  $T_i$  é dada por:

$$T_i = A_{N_1} \dots A_{i-1} = \prod_{j=1}^{i-1} A_j \quad (3.49)$$

para  $i > 1$ , visto que quando  $i = 1$ , os vetores  $s$  e  $s_0$  não se alteram, pois não existe

helicóide anterior para influenciá-los. Entretanto é importante notar que todas as variáveis de junta relativas ao manipulador 1 são medidas de modo oposto ao convencional, ou seja, a medição se ocorre do elo posterior ao anterior, o que implica que tenham sinais opostos aos convencionalmente adotados, pois normalmente tal medição é feita do elo anterior para o posterior.

Cada helicóide tem associado uma matriz de transformação homogênea  $A_j$  como encontra-se mostrado na Eq. B.73 (apêndice B).

Assim sendo, é possível determinar os vetores  $s_i$  e  $s_{0_i}$ , o que possibilita determinar cada helicóide unitário  $\hat{\mathcal{S}}_i$  correspondente a  $i$ -ésima junta de cada manipulador, o que finalmente permite montar as matrizes  ${}^1J^p$  e  ${}^2J^p$ .

Voltando à Fig. 14, a velocidade do ponto  $t_2$  em relação ao referencial  $p$ , dada na Eq. 3.2 pode ser calculada observando as componentes angulares e lineares dadas por (TSAI, 1999):

$$w_{p,t_2}^p = w^p \quad (3.50)$$

$$\dot{r}_{p,t_2}^p = \dot{r}_0^p + w^p \times r_{p,t_2}^p \quad (3.51)$$

onde  $r_{p,t_2}^p$  é o vetor medido no referencial, que liga a origem deste referencial até o ponto  $t_2$ .

Considerando que  $w^p \times r_{p,t_2}^p = -\Omega(r_{p,t_2}^p)w^p$  (Eq. A.47), a Eq. 3.51 pode ser reescrita como:

$$\dot{r}_{p,t_2}^p = \dot{r}_0^p - \Omega(r_{p,t_2}^p)w^p \quad (3.52)$$

onde  $\Omega(r_{p,t_2}^p)$  é a matriz anti-simétrica dada por:

$$\Omega(r_{p,t_2}^p) = \begin{bmatrix} 0 & -r_{p,t_2,z}^p & r_{p,t_2,y}^p \\ r_{p,t_2,z}^p & 0 & -r_{p,t_2,x}^p \\ -r_{p,t_2,y}^p & r_{p,t_2,x}^p & 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Dispondo as Eq. 3.50 e 3.52 na forma matricial é possível obter a seguinte equação para o vetor  $\dot{x}_{p,t}$ :

$$\dot{x}_{p,t_2} = \begin{bmatrix} \dot{r}_{p,t_2}^p \\ w_{p,t_2}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^p \\ \dot{r}_0^p \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Substituindo Eq. 3.37 na Eq. 3.54, o vetor  $\dot{x}_{p,t}$  passa a ser dado por:

$$\dot{x}_{p,t_2} = \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} [{}^1J^p \quad {}^2J^p] {}^{12}\dot{q} \quad (3.55)$$

Comparando a Eq. 3.55 com a Eq. 3.2, tem-se que o Jacobiano Relativo pode ser obtido empregando a Teoria dos Helicoides da seguinte forma:

$$J_{R12} = \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} [{}^1J^p \quad {}^2J^p] \quad (3.56)$$

Analisando as componentes da matriz do Jacobiano Relativo empregando helicoides, é possível constatar que os dados de entrada necessários à obtenção do Jacobiano Relativo são:

1. os Jacobianos baseados em helicoides  ${}^k J^p({}^k q)$  de cada manipulador, empregando as Eqs. 3.38 e 3.39, que envolvem o uso das Eqs. 3.47, 3.48 e 3.49. Para tanto, é necessário conhecer:
  - (a) as posições iniciais das juntas dos manipuladores (os vetores  $s_{ref}$  representando o eixo de cada junta e  $s_{0_{ref}}$  a posição em relação ao referencial absoluto); e,
  - (b) as posições instantâneas das juntas dos manipuladores (os vetores  $s$  representando o eixo de cada junta e  $s_0$  a posição em relação ao referencial absoluto).
2. o vetor posição da ferramenta em relação à peça  $r_{p,t_2}^p(t)$ , ambos definidos pela tarefa.

Comparando as duas metodologias, ou seja, a primeira que utiliza a convenção de Denavit-Hartenberg, com a segunda que utiliza o método dos deslocamentos dos helicoides sucessivos, tem-se que a primeira necessita que em cada elo seja fixado um referencial local e que sejam levantados os quatro parâmetros de Denavit-Hartenberg, enquanto que na segunda só existem dois referenciais e para cada junta existem dois parâmetros, ou seja, os vetores  $s$  representando o eixo de cada junta e  $s_0$  a posição em relação ao referencial absoluto.

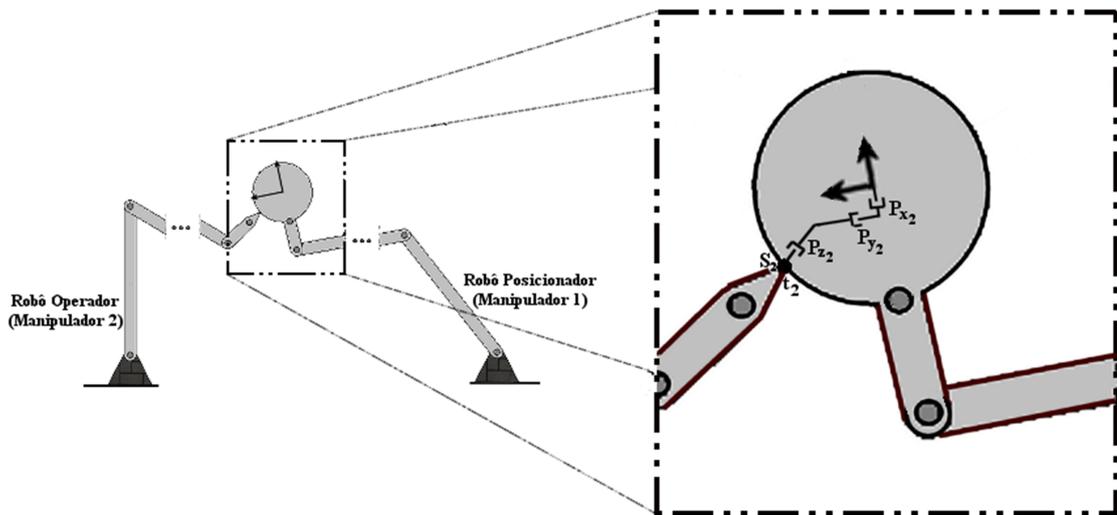
### 3.4 Jacobiano Relativo Baseado em Helicoides Empregando o Método de Davies

A metodologia proposta nesta seção para a obtenção do Jacobiano Relativo Baseado em helicoides emprega o Método de Davies (apêndice C).

O Método de Davies estabelece que seja: (1) incorporada uma cadeia virtual de Assur, de modo a fechar a cadeia cinemática aberta; (2) montado o grafo representativo; e (3) utilizada a Lei da Circulação de Kirchhoff-Davies.

O Método de Davies é um procedimento sistematizado para obtenção de equações linearmente independentes suficientes para resolver o sistema de equações, visto que o número destas equações é depende do número de vértices e do número de cordas do grafo.

Analisando o movimento relativo entre o ponto  $t_2$ , fixado na extremidade do manipulador 2 (robô operador) e o sistema  $p$  solidário à peça fixada na garra do manipulador 1 (robô posicionador), mostrado na Fig. 15, onde é adicionada uma cadeia virtual de Assur.



**Figura 15:** Inclusão da cadeia virtual de Assur PPPS entre  $p - t_2$

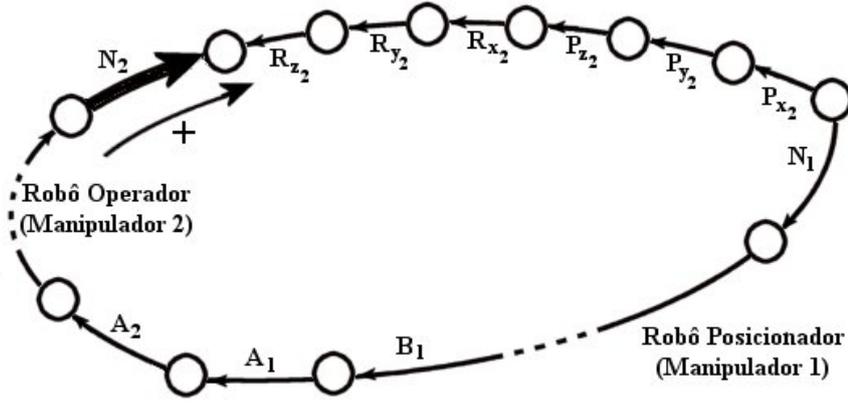
Qualquer tarefa pode ser bem definida por um conjunto de seis variáveis independentes, denominadas variáveis da tarefa e podem ser representadas por uma cadeia virtual de Assur, por exemplo, a cadeia PPPS. A Fig. 15 mostra a inclusão da cadeia virtual de Assur PPPS, de modo a representar o movimento do ponto  $t_2$  em relação ao referencial  $p$ , que pode ser dado pela soma dos helicoides, vistos no referencial  $p$ :

$$x^p = \$_{P_x}^p + \$_{P_y}^p + \$_{P_z}^p + \$_{R_x}^p + \$_{R_y}^p + \$_{R_z}^p \quad (3.57)$$

A próxima etapa é representar a cadeia cinemática resultante em forma de grafo. A Fig. 16 mostra o grafo relativo ao sistema em análise. Note que existem vértices e arestas representativos de cada robô manipulador e da cadeia virtual de Assur PPPS representativa da tarefa.

Tendo o grafo é possível utilizar a sistematização da Teoria dos Grafos, que consiste em determinar uma árvore deste grafo. Escolhe-se uma aresta, que será denominada de corda, que quando retirada do grafo, interrompe o circuito. Não havendo mais circuito, fica determinado uma árvore (GROSS; YELLEN, 2003).

Note que sentidos são arbitrados às arestas do grafo, que partem do vértice que contém o referencial  $p$ , em direção ao vértice que contém o ponto  $t_2$ . É possível montar a matriz  $B$ , denominada matriz de circuitos, que possui o número de linhas igual ao número de cordas necessárias a interromper todos os circuitos existentes. O número de colunas é igual ao número de arestas do grafo.



**Figura 16:** Grafo do Sistema Cooperativo com Cadeia Virtual de Assur entre  $p$  e  $t_2$

O procedimento de montagem da matriz  $B$ , consiste em recolocar a corda na árvore formando o circuito e atribuir o mesmo sentido da corrente ao circuito formado. Assim sendo, toda a aresta que tiver o mesmo sentido do circuito recebe  $+1$ , as com sentido contrário  $-1$  e finalmente as que não fazem parte do circuito recebem  $0$ .

Escolhendo como corda a aresta do robô operador que se liga ao corpo que contém o ponto  $t_2$  (efetuador final), tem-se a seguinte matriz  $B$ :

$$B = \begin{bmatrix} -1_{Rz} & -1_{Ry} & -1_{Rx} & -1_{Pz} & -1_{Py} & -1_{Px} & 1_{N_1} & \dots & 1_{A_1} & 1_{N_2} & \dots & 1_{A_2} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Com a matriz  $B$  determinada e assumindo as hipóteses da Lei Circulação de Kirchhoff-Davies, tem-se:

$$-\$_{Rz}^p - \$_{Ry}^p - \$_{Rx}^p - \$_{Pz}^p - \$_{Py}^p - \$_{Px}^p + \$_{N_1}^p + \dots + \$_{A_1}^p + \$_{N_2}^p + \dots + \$_{A_2}^p = 0 \quad (3.59)$$

Separando a parcela primária da secundária, tem-se:

$$\$_{Px}^p + \$_{Py}^p + \$_{Pz}^p + \$_{Rx}^p + \$_{Ry}^p + \$_{Rz}^p = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \hat{\$}_i \dot{q}_i \quad (3.60)$$

Substituindo a Eq. 3.57 na Eq. 3.60, tem-se que:

$$x^p = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \hat{\$}_i \dot{q}_i \quad (3.61)$$

Note que as Eqs. 3.61 e 3.36 são idênticas. Assim sendo, seguindo o mesmo raciocínio anterior, expressos nas Eqs. 3.37 - 3.55, resulta que o Jacobiano Relativo Baseado em helicoides utilizando o Método de Davies é o mesmo ao apresentado na Eq. 3.56.

O Jacobiano Relativo Baseado em helicoides também pode ser obtido observando o conceito das cadeias virtuais de Assur, pela substituição dos helicoides normalizados repre-

sentativos das juntas virtuais. Assim sendo, voltando o foco à Eq. 3.60, e reescrevendo-a de modo a colocar os helicoides representativos das juntas virtuais de rotação seguidos das de translação, tem-se que:

$$\mathbb{S}_{Rx}^p + \mathbb{S}_{Ry}^p + \mathbb{S}_{Rz}^p + \mathbb{S}_{Px}^p + \mathbb{S}_{Py}^p + \mathbb{S}_{Pz}^p = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \hat{\mathbb{S}}_i \dot{q}_i \quad (3.62)$$

Isolando os helicoides normalizados das magnitudes e colocando-os na seguinte forma matricial, resulta que:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbb{S}}_{Rx}^p & \hat{\mathbb{S}}_{Ry}^p & \hat{\mathbb{S}}_{Rz}^p & \hat{\mathbb{S}}_{Px}^p & \hat{\mathbb{S}}_{Py}^p & \hat{\mathbb{S}}_{Pz}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_x \\ \dot{R}_y \\ \dot{R}_z \\ \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1J^p & {}^2J^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\dot{q} \\ {}^2\dot{q} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

onde  $\dot{P}_x$ ,  $\dot{P}_y$  e  $\dot{P}_z$  são as velocidades lineares relativas aos deslocamentos das juntas virtuais prismáticas, respectivamente nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e  $\dot{R}_x$ ,  $\dot{R}_y$  e  $\dot{R}_z$  são as velocidades angulares das juntas rotativas respectivamente em torno dos eixos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Os helicoides normalizados representativos das juntas virtuais de Assur podem ser escrito como se segue:

$$\hat{\mathbb{S}}_{Rx}^p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_{p,tz}^p \\ -r_{p,ty}^p \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbb{S}}_{Ry}^p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -r_{p,tz}^p \\ 0 \\ r_{p,tx}^p \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbb{S}}_{Rz}^p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ r_{p,ty}^p \\ -r_{p,tx}^p \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbb{S}}_{Px}^p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbb{S}}_{Py}^p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbb{S}}_{Pz}^p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Substituindo os helicoides normalizados para cada junta virtual componentes da cadeia virtual de Assur, que são dados como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{p,t2z}^p & r_{p,t2y}^p & 1 & 0 & 0 \\ r_{p,t2z}^p & 0 & -r_{p,t2x}^p & 0 & 1 & 0 \\ -r_{p,t2y}^p & r_{p,t2x}^p & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_x \\ \dot{R}_y \\ \dot{R}_z \\ \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1J^p & {}^2J^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\dot{q} \\ {}^2\dot{q} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Observe que a matriz que pré-multiplica as magnitudes das juntas virtuais de Assur pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{p,t_2z}^p & r_{p,t_2y}^p & 1 & 0 & 0 \\ r_{p,t_2z}^p & 0 & -r_{p,t_2x}^p & 0 & 1 & 0 \\ -r_{p,t_2y}^p & r_{p,t_2x}^p & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Omega(r_{p,t_2}^p) & I \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Isolando o vetor das velocidades das juntas da Eq. 3.65 e efetuando a inversa da matriz dada na Eq. 3.66, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \dot{R}_x \\ \dot{R}_y \\ \dot{R}_z \\ \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1 J^p & {}^2 J^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1 \dot{q} \\ {}^2 \dot{q} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Substituindo os termos encontrados nas Eqs. 3.38 e 3.40 na Eq. 3.67 tem-se que a mesma passa a ser expressa como:

$$\begin{bmatrix} \dot{R}_x \\ \dot{R}_y \\ \dot{R}_z \\ \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1 J^p & {}^2 J^p \end{bmatrix} {}^{12} \dot{q} \quad (3.68)$$

De modo a determinar o vetor  $\dot{x}_{p,t_2}$ , tem-se que:

$$\dot{x}_{p,t_2} = \begin{bmatrix} \dot{r}_{p,t_2x}^p \\ \dot{r}_{p,t_2y}^p \\ \dot{r}_{p,t_2z}^p \\ w_{t_2x}^p \\ w_{t_2y}^p \\ w_{t_2z}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_x \\ \dot{R}_y \\ \dot{R}_z \\ \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Substituindo a Eq. 3.68 na Eq. 3.69 encontra-se a expressão para o vetor  $\dot{x}_{p,t}$ :

$$\dot{x}_{p,t_2} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1J^p & {}^2J^p \end{bmatrix} \dot{q} \quad (3.70)$$

$$\dot{x}_{p,t_2} = \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1J^p & {}^2J^p \end{bmatrix} \dot{q} \quad (3.71)$$

Note que a Eq. 3.71 é idêntica à Eq. 3.55 e comparando-as com a Eq. 3.2, novamente obtém-se que o Jacobiano Relativo é expresso por:

$$J_R = \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1J^p & {}^2J^p \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Quanto aos dados de entrada, é possível constatar que são necessários à obtenção do Jacobiano Relativo Baseado em Helicoides:

1. a posição do ponto  $t_2$  com respeito ao referencial  $p$  (da peça);
2. a posição das juntas dos 2 manipuladores;
3. a configuração inicial de cada manipulador, ou seja, as direções e orientações dos eixos das juntas de cada manipulador na posição de referência; e,
4. utilização do Método dos Deslocamentos dos Helicoides Sucessivos para determinação dos helicoides das juntas dos manipuladores.

Cabe ressaltar, que foi só possível obter o Jacobianos Relativos Baseado em Helicoides utilizando o Método de Davies, devido à escolha proposital da corda, associando-a à aresta correspondente à junta anterior ao corpo que contém o efetuador final do robô operador.

O uso desta metodologia pode trazer algumas vantagens em determinados casos, face à sistematização agregada, principalmente na solução de problema onde haja necessidade de impor ou monitorar determinada junta, tal como operação com limitação de espaço, como por exemplo, em ambientes confinados, ou mesmo a monitoração para evitamento de colisão entre elos e no evitamento de singularidades.

Baseados nos argumentos supracitados é possível afirmar que a metodologia que emprega o Método de Davies generaliza a metodologia empregando a Teoria dos Helicoides.

Assim sendo, incorpora-se as mesmas conclusões tiradas para o Jacobiano Relativo Baseado em Helicoides, valendo-se da Teoria dos Helicoides, no que tange a sua representação por um produto de duas matrizes, uma em função das posição do ponto  $t_2$ , e a segunda somente em função dos helicoides representativos das juntas dos 2 manipuladores, arranjados de modo a guardar o acoplamento que existem entre os mesmos. Também é possível obter as variáveis de junta simultaneamente, quando estabelecidas as variáveis das tarefas.

O Apêndice E apresenta um estudo de caso utilizando o Método de Davies na obtenção do Jacobiano Relativo, na modelagem cinemática de dois robôs cooperativos.

### 3.5 Contribuições Contidas neste Capítulo

Partindo da metodologia clássica de obtenção do Jacobiano Relativo entre dois manipuladores genéricos, apresentou-se as duas primeiras contribuições, em termos de duas metodologias de obtenção do Jacobiano relativo baseado em helicoides, ou seja, (1) empregando a Teoria dos Helicoides e (2) empregando o Método de Davies.

Enquanto a metodologia clássica pressupõe uma modelagem de cada robô adotando a convenção de Denavit-Hartenberg para o cálculo da cinemática direta, na obtenção das orientações relativas entre os referenciais, e para o cálculo do Jacobiano de cada robô; as duas metodologias propostas utilizam o Método dos Deslocamentos dos Helicoides Sucessivos, bastando informar os vetores representativos das direções em torno do qual, ou sobre o qual as juntas rotacionam-se ou transladam-se respectivamente.

Quando se compara a modelagem da cinemática direta utilizando a notação de Denavit-Hartenberg com o Método dos Deslocamentos dos Helicoides Sucessivos, conclui-se que o processo de modelagem do primeiro ganha em complexidade conforme a estrutura do robô, exigindo  $n_1 + n_2 + 2$  sistemas de coordenadas locais, sendo  $n_1$  e  $n_2$  o número de juntas dos manipuladores 1 e 2 respectivamente, e a determinação dos parâmetros de Denavit-Hartenberg, num total de  $4 * (n_1 + n_2)$ , o que pode ser uma tarefa demorada, tediosa e sujeita a erros.

Já pelo Método dos Deslocamentos dos Helicoides Sucessivos, existem 2 sistemas coordenados, sendo um deles o referencial absoluto e o outro na ponta da ferramenta do robô operador.

O método clássico mostra-se extremamente acoplado, enquanto que os propostos permitem que haja um desacoplamento, caso necessário, o que traz a vantagem de poder impor determinado comportamento à uma determinada junta, passando a mesma para o outro lado da equação, ou seja tornando-a variável primária.

## CAPÍTULO 4

# Jacobiano de Cooperação

Este capítulo apresenta a principal contribuição científica desta tese, o conceito intitulado como Jacobiano de Cooperação, que permite a modelagem cinemática de um SRC genérico composto por  $n$  manipuladores. Inicia-se com formalização de algumas definições necessárias e passa-se à dedução do Jacobiano de Cooperação, de maneira literal e genérica, valendo-se dos fundamentos teóricos contidos em três metodologias: (1) a convenção de Denavit-Hartenberg; (2) a Teoria dos Helicóides; e (3) o Método de Davies. Na literatura especializada não foi encontrada qualquer formalização de metodologia tão genérica e abrangente, que permita modelar compartilhamento de carga e realização de tarefas cooperativas para qualquer quantidade de robôs, simultaneamente e de forma otimizada.

Cabe ressaltar que as figuras apresentadas neste capítulo referem-se a manipuladores genéricos, sem qualquer particularização.

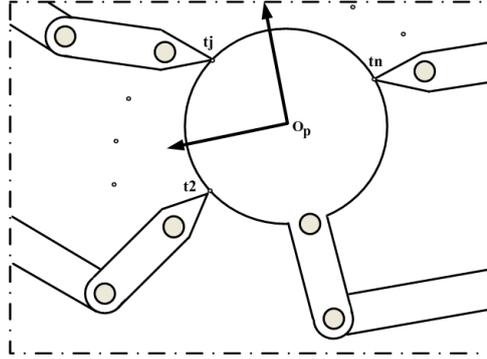
### 4.1 Jacobiano de Cooperação: O Conceito

Preliminarmente é necessário criar dois vetores: (1) o vetor velocidade das tarefas; e (2) o vetor velocidade das juntas. A Fig. 17 apresenta os pontos extremos das ferramentas dos robôs operadores, onde efetivamente ocorre a tarefa. Os vetores estão definidos nos seguintes termos:

**Definição 4.1.1** – *O vetor velocidade das tarefas,  $\dot{x}_{p,t_2,\dots,n}$  é definido como o espaço vetorial composto pelos vetores velocidades linear e angular do ponto extremo ( $t_j$ ) da ferramenta do robô operador (manipulador  $j$ ), para  $j = 2, \dots, n$ , da ferramenta do robô operador (manipulador  $j$ ), todos em relação à peça fixada pelo robô posicionador (manipulador 1), medido no*

sistema de referência solidário à peça  $O_p$ , tal que:

$$\dot{x}_{p,t_2,\dots,n} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{x}_{p,t_2} \\ \dot{x}_{p,t_3} \\ \vdots \\ \dot{x}_{p,t_n} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$



**Figura 17:** Localização dos pontos extremos das ferramentas dos robôs operadores

**Definição 4.1.2** – O vetor velocidade das juntas,  ${}^{1,2,\dots,n}\dot{q}$  é definido como o espaço vetorial composto pelos vetores das velocidades das juntas de cada manipulador, ou seja, do robô posicionador ( ${}^1\dot{q}$ ) e dos robôs operadores ( ${}^2\dot{q} \dots {}^n\dot{q}$ ), tal que:

$${}^{1,2,\dots,n}\dot{q} \triangleq \begin{bmatrix} {}^1\dot{q} \\ {}^2\dot{q} \\ {}^3\dot{q} \\ \vdots \\ {}^n\dot{q} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

**Definição 4.1.3** – O Jacobiano de Cooperação,  $J_{C_{1,2,\dots,n}}$  é definido como a transformação linear entre o espaço das juntas de todos os robôs e o espaço das velocidades das tarefas a serem realizadas, tal que:

$$\dot{x}_{p,t_2,\dots,n} \triangleq J_{C_{1,2,\dots,n}} {}^{1,2,\dots,n}\dot{q} \quad (4.3)$$

A forma genérica do  $J_{C_{1,2,\dots,n}}$  é deduzida nas três seções seguintes, utilizando os fundamentos teóricos contidos em três metodologias: (1) a convenção de Denavit-Hartenberg; (2) a Teoria dos Helicóides; e (3) o Método de Davies.



O Jacobiano Relativo entre os manipuladores 1 e  $j$ , para  $j = 2, \dots, n$ ,  $J_{R1j}$  é calculado de forma análoga ao procedimento que resultou na Eq. 3.30. Assim sendo,  $J_{R1j}$  pode ser escrito na seguinte forma:

$$J_{R1j} = \begin{bmatrix} [J_{R1j}]_{(11)} & [J_{R1j}]_{(12)} \\ [J_{R1j}]_{(21)} & [J_{R1j}]_{(22)} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

onde:

$$[J_{R1j}]_{(11)} = \left[ -R_{b1}^p \text{}^1 J_v + \Omega(r_{p,t_j}^p) R_{b1}^p \text{}^1 J_w + R_{e1}^p \Omega(r_{e1,p}^{e1}) R_{b1}^{e1} \text{}^1 J_w \right] \quad (4.7)$$

$$[J_{R1j}]_{(12)} = \left[ R_{bj}^p \text{}^j J_v - R_{ej}^p \Omega(r_{ej,t_j}^{ej}) R_{bj}^{ej} \text{}^j J_w \right] \quad (4.8)$$

$$[J_{R1j}]_{(21)} = \left[ -R_{b1}^p \text{}^1 J_w \right] \quad (4.9)$$

$$[J_{R1j}]_{(22)} = \left[ R_{bj}^p \text{}^j J_w \right] \quad (4.10)$$

De modo a determinar o  $J_{C_{1,2,\dots,n}}$ , substitui-se a Eq. 4.4, para  $j = 2, \dots, n$  na Eq. 4.1 como mostrado a seguir:

$$\dot{x}_{p,t_2,\dots,t_n} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{x}_{p,t_2} \\ \dot{x}_{p,t_3} \\ \vdots \\ \dot{x}_{p,t_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{R12} \text{}^{12} \dot{q} \\ J_{R13} \text{}^{13} \dot{q} \\ \vdots \\ J_{R1n} \text{}^{1n} \dot{q} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Fazendo com que  $j$  assuma os valores  $2, \dots, n$ , substituindo os termos dos  $J_{R1j}$ , que constam nas Eqs. 4.7 a 4.10, e os termos de  $\text{}^j \dot{q}$ , que constam na Eq. 4.5, tem-se que a Eq. 4.11 pode ser escrita como:

$$\dot{x}_{p,t_2,\dots,t_n} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [J_{R12}]_{(11)} & [J_{R12}]_{(12)} \\ [J_{R12}]_{(21)} & [J_{R12}]_{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{}^1 \dot{q} \\ \text{}^2 \dot{q} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} [J_{R13}]_{(11)} & [J_{R13}]_{(12)} \\ [J_{R13}]_{(21)} & [J_{R13}]_{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{}^1 \dot{q} \\ \text{}^3 \dot{q} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} [J_{R1n}]_{(11)} & [J_{R1n}]_{(12)} \\ [J_{R1n}]_{(21)} & [J_{R1n}]_{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{}^1 \dot{q} \\ \text{}^n \dot{q} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Efetuada a multiplicação matricial tem-se que:

$$\dot{x}_{p,t_2,\dots,n} = \begin{bmatrix} [J_{R12}]_{(11)} {}^1\dot{q} + [J_{R12}]_{(12)} {}^2\dot{q} \\ [J_{R12}]_{(21)} {}^1\dot{q} + [J_{R12}]_{(22)} {}^2\dot{q} \\ [J_{R13}]_{(11)} {}^1\dot{q} + [J_{R13}]_{(12)} {}^3\dot{q} \\ [J_{R13}]_{(21)} {}^1\dot{q} + [J_{R13}]_{(22)} {}^3\dot{q} \\ \vdots \\ \vdots \\ [J_{R1n}]_{(11)} {}^1\dot{q} + [J_{R1n}]_{(12)} {}^n\dot{q} \\ [J_{R1n}]_{(21)} {}^1\dot{q} + [J_{R1n}]_{(22)} {}^n\dot{q} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Formulando em termos de  ${}^1\dot{q}$ ,  ${}^2\dot{q}$ ,  ${}^3\dot{q}$ , ... e  ${}^n\dot{q}$ , tem-se:

$$\dot{x}_{p,t_2,\dots,n} = \begin{bmatrix} [J_{R12}]_{(11)} {}^1\dot{q} + [J_{R12}]_{(12)} {}^2\dot{q} + 0 {}^3\dot{q} + \dots + 0 {}^n\dot{q} \\ [J_{R12}]_{(21)} {}^1\dot{q} + [J_{R12}]_{(22)} {}^2\dot{q} + 0 {}^3\dot{q} + \dots + 0 {}^n\dot{q} \\ [J_{R13}]_{(11)} {}^1\dot{q} + 0 {}^2\dot{q} + [J_{R13}]_{(12)} {}^3\dot{q} + \dots + 0 {}^n\dot{q} \\ [J_{R13}]_{(21)} {}^1\dot{q} + 0 {}^2\dot{q} + [J_{R13}]_{(22)} {}^3\dot{q} + \dots + 0 {}^n\dot{q} \\ \vdots \\ \vdots \\ [J_{R13}]_{(11)} {}^1\dot{q} + 0 {}^2\dot{q} + 0 {}^3\dot{q} + \dots + [J_{R1n}]_{(12)} {}^n\dot{q} \\ [J_{R13}]_{(21)} {}^1\dot{q} + 0 {}^2\dot{q} + 0 {}^3\dot{q} + \dots + [J_{R1n}]_{(22)} {}^n\dot{q} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Isolando o vetor  ${}^{1,2,\dots,n}\dot{q}$  e colocando nos termos da Eq. 4.3, tem-se que:

$$\dot{x}_{p,t_2,\dots,n} = \begin{bmatrix} [J_{R12}]_{(11)} & [J_{R12}]_{(12)} & 0 & \dots & 0 \\ [J_{R12}]_{(21)} & [J_{R12}]_{(22)} & 0 & \dots & 0 \\ [J_{R13}]_{(11)} & 0 & [J_{R13}]_{(12)} & \dots & 0 \\ [J_{R13}]_{(21)} & 0 & [J_{R13}]_{(22)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [J_{R1n}]_{(11)} & 0 & 0 & \dots & [J_{R1n}]_{(12)} \\ [J_{R1n}]_{(21)} & 0 & 0 & \dots & [J_{R1n}]_{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\dot{q} \\ {}^2\dot{q} \\ {}^3\dot{q} \\ \vdots \\ {}^n\dot{q} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

ou seja:

$$J_{C_{1,2,\dots,n}} \triangleq \begin{bmatrix} [J_{R12}]_{(11)} & [J_{R12}]_{(12)} & 0 & \dots & 0 \\ [J_{R12}]_{(21)} & [J_{R12}]_{(22)} & 0 & \dots & 0 \\ [J_{R13}]_{(11)} & 0 & [J_{R13}]_{(12)} & \dots & 0 \\ [J_{R13}]_{(21)} & 0 & [J_{R13}]_{(22)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [J_{R1n}]_{(11)} & 0 & 0 & \dots & [J_{R1n}]_{(12)} \\ [J_{R1n}]_{(21)} & 0 & 0 & \dots & [J_{R1n}]_{(22)} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

É possível concluir que o Jacobiano de Cooperação é a transformação linear contendo as relações de dependência entre todas as juntas dos  $n$  manipuladores, e as  $n - 1$  tarefas a serem executadas pelos robôs operadores sobre a peça fixada pelo robô posicionador, de forma condensada em uma única matriz (Eq. 4.16), permitindo que as variáveis de junta possam ser obtidas simultaneamente, quando estabelecidas as variáveis das tarefas, ou seja, permite o cálculo da cinemática inversa de forma simultânea e passível de ser otimizada.

Analisando as componentes do Jacobiano de Cooperação, e assumindo que  $j = 2, \dots, n$ , e que  $k = 1, \dots, n$ , onde  $n$  é o número total de manipuladores, é possível constatar que os seguintes dados de entrada são necessários:

1. os Jacobianos geométricos  ${}^k J^{(kq)}$  de cada manipulador, onde é necessário conhecer:
  - (a) os parâmetros de Denavit-Hartenberg de cada manipulador;
  - (b) as posições iniciais das juntas dos manipuladores; e,
  - (c) as posições instantâneas das juntas dos manipuladores.
2. as matrizes de rotação constantes que definem a orientação da peça em relação ao efetuador do manipulador 1, e a orientação da ferramenta em relação ao efetuador do manipulador  $j$ ;
3. as matrizes de rotação que definem a orientação instantânea do efetuador de cada manipulador em relação à respectiva base;
4. a posição fixa da peça em relação ao efetuador do manipulador 1 e a posição fixa da ferramenta em relação ao manipulador  $j$ ; e,
5. a matriz de rotação da ferramenta em relação à peça  $R_{tj}^p(t)$  e do vetor posição da ferramenta em relação à peça  $r_{p,tj}^p(t)$ , ambos definidos pela tarefa.

O Jacobiano de Cooperação foi obtido segundo uma metodologia que utiliza o Jacobiano Relativo, que por sua vez utiliza a modelagem de cada robô adotando a convenção de Denavit-Hartenberg para o cálculo da cinemática direta, que é aproveitada na obtenção das orientações relativas entre os referenciais, e para o cálculo do Jacobiano de cada robô em relação à sua respectiva base.

### 4.3 Jacobiano de Cooperação - Teoria dos Helicoides

Neste item é apresentada metodologia de obtenção do Jacobiano de Cooperação utilizando a Teoria dos Helicoides (DAVIDSON; HUNT, 2004), e o método dos deslocamentos dos helicoides sucessivos ( TSAI, 1999) na obtenção da cinemática direta. O Jacobiano de Cooperação passa a ser representado por helicoides e assim, passa a ser denominado Jacobiano de Cooperação empregando helicoides.

Seja um SRC composto por um robô posicionador (manipulador 1) e  $n - 1$  robôs operadores (manipuladores 2, ...,  $n$ ) como mostra a Fig. 19, sob a ótica da Teoria dos Helicoides.

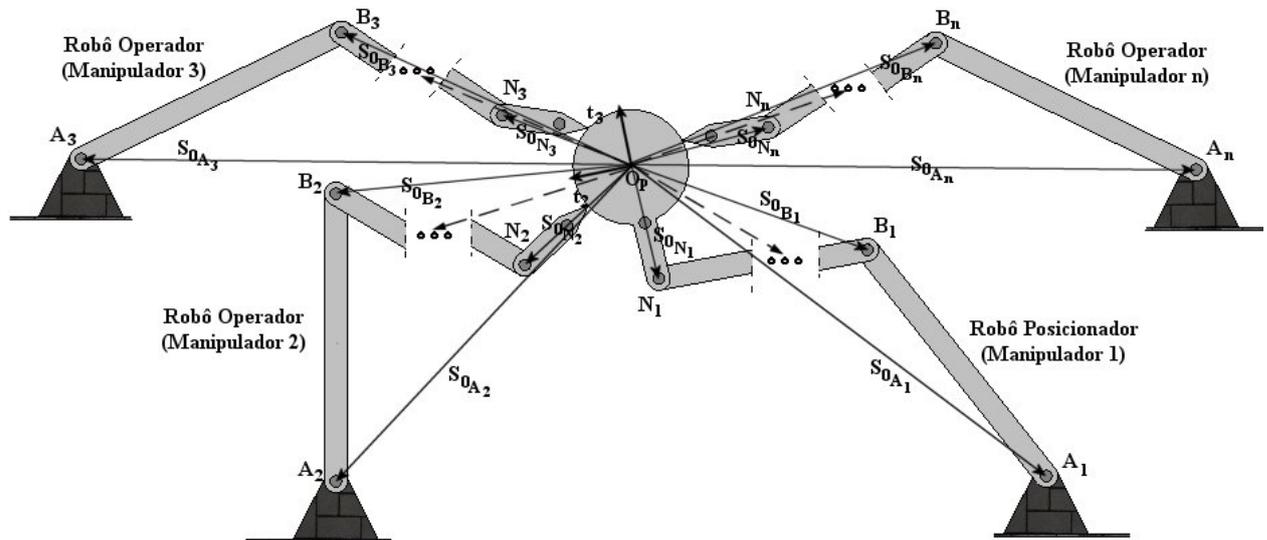


Figura 19: Designação das Juntas no SRC

Seja  $\dot{x}_{p,t_j}$  a velocidade do ponto  $t_j$  localizado na extremidade do último corpo do manipulador  $j$ , para  $j = 2, \dots, n$  em relação ao referencial  $p$  localizado na peça solidária ao último corpo do manipulador 1, visto instantaneamente neste referencial. Assim sendo,  $\dot{x}_{p,t_j}$  pode ser expressa utilizando o Jacobiano Relativo empregando helicoides, generalizando as Eq. 3.55 e Eq. 3.56, ou seja:

$$\dot{x}_{p,t_j} = J_{R1j} {}^1\dot{q} \quad (4.17)$$

onde  ${}^1\dot{q}$  é o vetor composto pelas magnitudes das juntas dos manipuladores 1 e  $j$ , e  $J_{R1j}$  é

dado por:

$$J_{R1j} = \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_j}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} [{}^1J^p \quad jJ^p] \quad (4.18)$$

onde  ${}^1J^p$  representa a matriz dos helicoides normalizados das juntas do manipulador 1, assim como  ${}^jJ^p$ , se refere ao manipulador  $j$ .

Seja  $\dot{x}_{p,t_2,\dots,t_n}$  o vetor composto pelos vetores velocidades do ponto extremo ( $t_2$ ) da ferramenta do robô operador (manipulador 2) até o do ponto extremo ( $t_n$ ) da ferramenta do robô operador (manipulador  $n$ ), ambos em relação à peça fixada pelo robô posicionador (manipulador 1), medido no sistema de referência solidário à peça, expresso nos termos da Eq. 4.1.

De modo a determinar o Jacobiano de Cooperação empregando helicoides, faz-se  $j$  assumir os valores de 2 até  $n$  na Eq. 4.17, substituindo-os na Eq. 4.1, como mostrado a seguir:

$$\dot{x}_{p,t_2,\dots,t_n} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{x}_{p,t_2} \\ \dot{x}_{p,t_3} \\ \vdots \\ \dot{x}_{p,t_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{R12} {}^{12}\dot{q} \\ J_{R13} {}^{13}\dot{q} \\ \vdots \\ J_{R1n} {}^{1n}\dot{q} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Fazendo  $j$  assumir os valores de 2 até  $n$  na Eq. 4.18, substituindo as expressões do Jacobiano Relativo empregando helicoides na Eq. 4.19, tem-se:

$$\dot{x}_{p,t_2,\dots,t_n} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} [{}^1J^p \quad {}^2J^p] {}^{12}\dot{q} \\ \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_3}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} [{}^1J^p \quad {}^3J^p] {}^{13}\dot{q} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_n}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} [{}^1J^p \quad {}^nJ^p] {}^{1n}\dot{q} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

É possível isolar a primeira matriz de cada linha da matriz composta expressa na Eq. 4.20, de modo a compor uma nova matriz diagonal que pré-multiplica a expressão, como mostrado a

seguir:

$$\dot{x}_{p,t_2,\dots,n} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_3}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_n}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [{}^1J^p \quad {}^2J^p] \quad {}^{12}\dot{q} \\ [{}^1J^p \quad {}^3J^p] \quad {}^{13}\dot{q} \\ \vdots \\ [{}^1J^p \quad {}^nJ^p] \quad {}^{1n}\dot{q} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Efetuada a multiplicação da matriz composta pelos Jacobianos baseados em helicoides pelo vetor composto pelas velocidades das juntas expressos na Eq. 4.21, tem-se:

$$\dot{x}_{p,t_2,\dots,n} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_3}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_n}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1J^p \quad {}^1\dot{q} + {}^2J^p \quad {}^2\dot{q} \\ {}^1J^p \quad {}^1\dot{q} + {}^3J^p \quad {}^3\dot{q} \\ \vdots \\ {}^1J^p \quad {}^1\dot{q} + {}^nJ^p \quad {}^n\dot{q} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Formulando em termos de  ${}^1\dot{q}$ ,  ${}^2\dot{q}$ ,  ${}^3\dot{q}$ , ... e  ${}^n\dot{q}$ , tem-se:

$$\dot{x}_{p,t_2,\dots,n} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_3}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_n}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1J^p \quad {}^1\dot{q} + {}^2J^p \quad {}^2\dot{q} + 0 \quad {}^3\dot{q} + \dots + 0 \quad {}^n\dot{q} \\ {}^1J^p \quad {}^1\dot{q} + 0 \quad {}^2\dot{q} + {}^3J^p \quad {}^3\dot{q} + \dots + 0 \quad {}^n\dot{q} \\ \vdots \\ {}^1J^p \quad {}^1\dot{q} + 0 \quad {}^2\dot{q} + 0 \quad {}^3\dot{q} + \dots + {}^nJ^p \quad {}^n\dot{q} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Isolando o vetor  ${}^{1,2,\dots,n}\dot{q}$  e colocando nos termos da Eq. 4.3, tem-se que:

$$\dot{x}_{p,t_2,\dots,n} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_3}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_n}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1J^p & {}^2J^p & 0 & \dots & 0 \\ {}^1J^p & 0 & {}^3J^p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^1J^p & 0 & 0 & \dots & {}^nJ^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\dot{q} \\ {}^2\dot{q} \\ {}^3\dot{q} \\ \vdots \\ {}^n\dot{q} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Seja o vetor  ${}^{1,2,\dots,n}\dot{q}$  é o vetor composto pelas velocidades das juntas dos manipuladores, ou seja, do robô posicionador ( ${}^1\dot{q}$ ) e dos robôs operadores ( ${}^2\dot{q}$  até  ${}^n\dot{q}$ ), como consta na Eq. 4.2.

Como expresso na Eq. 4.3, é possível definir o Jacobiano de Cooperação baseado em helicoides para um SRC genérico, como:

$$J_{C_{1,2,\dots,n}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_3}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_n}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1J^p & {}^2J^p & 0 & \dots & 0 \\ {}^1J^p & 0 & {}^3J^p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^1J^p & 0 & 0 & \dots & {}^nJ^p \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Conclui-se que o Jacobiano de Cooperação obtido pela Teoria dos Helicoides é representado por um produto de duas matrizes, onde a primeira é função das posições dos pontos  $t_2, \dots, t_n$ ; e a segunda, função dos helicoides representativos das juntas dos  $n$  manipuladores, arranjados de modo a guardar o acoplamento existente entre os mesmos. Também é possível obter as variáveis de junta simultaneamente, quando estabelecidas as variáveis das tarefas.

Analisando as componentes do Jacobiano de Cooperação obtido pela Teoria dos Helicoides, é possível constatar que os dados de entrada necessários são:

1. os Jacobianos baseados em helicoides  ${}^k J^p({}^k q)$  de cada manipulador, empregando as Eqs. 3.38 e 3.39, que envolvem o uso das Eqs. 3.47, 3.48 e 3.49. Para tanto, é necessário conhecer:

(a) as posições iniciais das juntas dos manipuladores (os vetores  $s_{ref}$  representando o

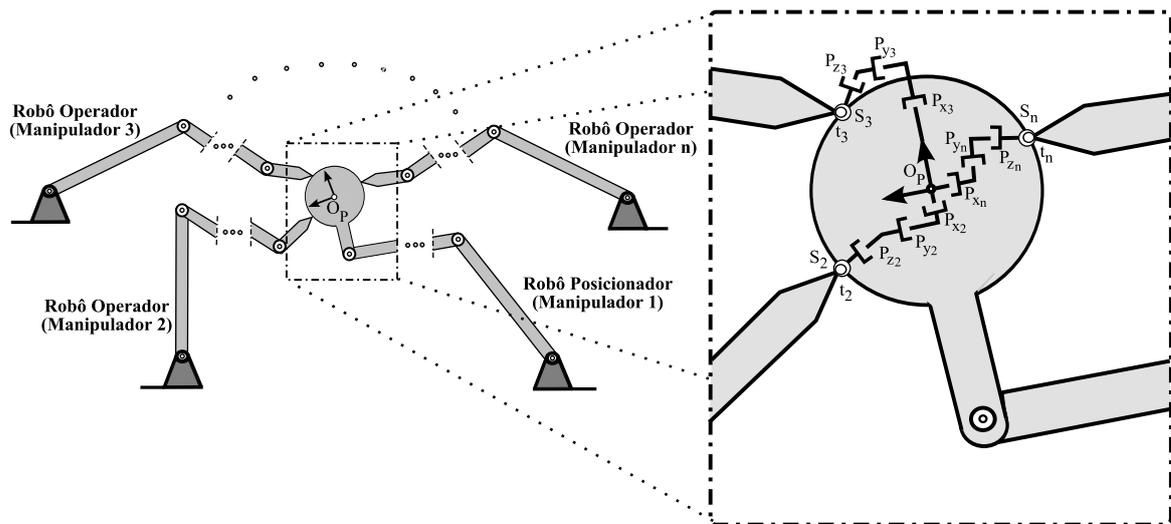
- eixo de cada junta e  $s_{0_{ref}}$  a posição em relação ao referencial absoluto); e,
- (b) as posições instantâneas das juntas dos manipuladores (os vetores  $s$  representando o eixo de cada junta e  $s_0$  a posição em relação ao referencial absoluto).
2. o vetor posição da ferramenta em relação à peça  $r_{p,t_j}^p(t)$ , para cada tarefa.

Comparando as duas metodologias, ou seja, a primeira que utiliza a convenção de Denavit-Hartenberg, com a segunda que utiliza o método dos deslocamentos dos helicoides sucessivos, tem-se que a primeira necessita que em cada elo seja fixado um referencial local e que sejam levantados os quatro parâmetros de Denavit-Hartenberg, enquanto que na segunda só existem dois referenciais e para cada junta existem dois parâmetros, ou seja, os vetores  $s$  representando o eixo de cada junta e  $s_0$  a posição em relação ao referencial absoluto.

## 4.4 Jacobiano de Cooperação - Método de Davies

De modo a manter a continuidade da apresentação das metodologias de obtenção do Jacobiano de Cooperação, a fundamentação teórica do Método de Davies encontra-se apresentada no Apêndice C.

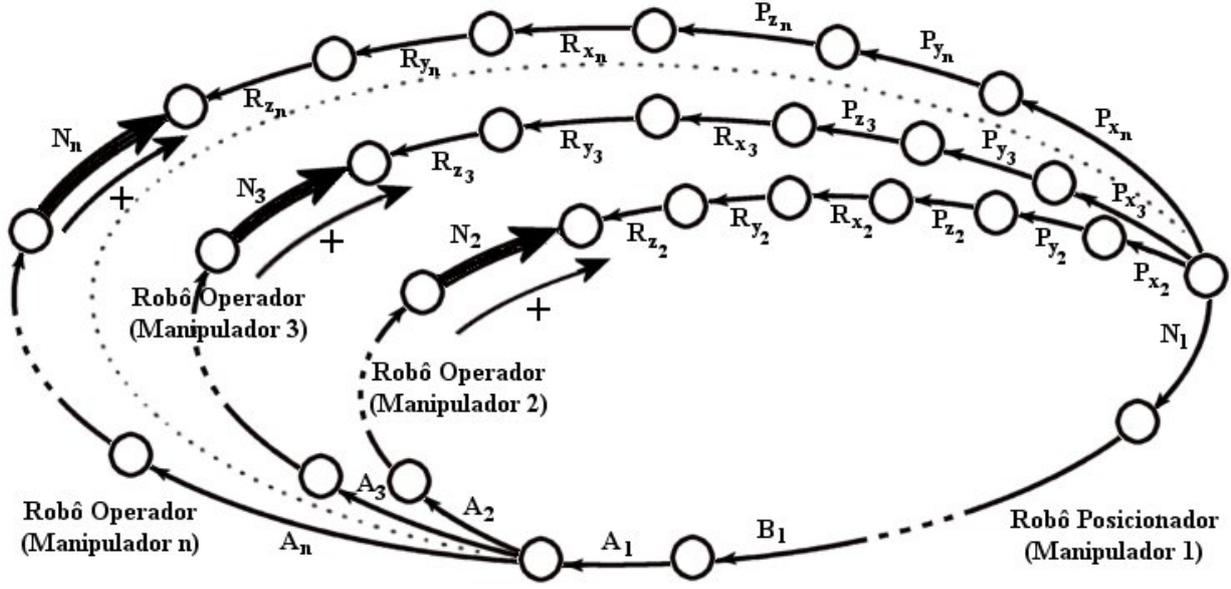
Seja o movimento relativo entre o ponto  $t_j$ , fixado na extremidade do manipulador  $j$  (robô operador), tal que  $j = 2, \dots, n$ , todos relativos ao sistema  $p$  solidário à peça fixada na garra do manipulador 1 (robô posicionador), mostrado na Fig. 20, onde ocorrem  $n - 1$  inclusões de Cadeias Virtuais de Assur (CVA), representando a localização dos pontos  $t_2$  até  $t_n$ , todos em relação ao referencial  $p$ .



**Figura 20:** Inclusão de CVA entre:  $p - t_2$ ,  $p - t_3, \dots$  e  $p - t_n$

A próxima etapa é representar a cadeia cinemática resultante em forma de grafo. A Fig. 21 mostra o grafo relativo ao sistema em análise. Note que existem vértices e arestas

representativos de cada robô manipulador e de cada cadeia virtual de Assur do tipo *PPPS* representativa de cada tarefa.



**Figura 21:** Grafo do Sistema Cooperativo com  $n - 1$  Cadeias Virtuais de Assur

Note que sentidos são arbitrados às arestas do grafo, que partem do vértice que contém o referencial  $p$ , em direção aos vértices que contém os pontos  $t_2$  até  $t_n$ . É possível montar a matriz  $B$ , denominada matriz do circuito, que possui  $n - 1$  linhas e o número de colunas igual ao número total de arestas do grafo.

Escolhendo como cordas as arestas correspondentes às juntas que ligam-se a cada efetuador final de cada robô operador, ou seja que liga aos corpos que contenham os pontos de  $t_2$  até  $t_n$ , tem-se a seguinte matriz  $B$ :

$$B = \begin{bmatrix} -1_{Rz_2} \dots -1_{Px_2} & 0_{Rz_3} \dots 0_{Px_3} & \dots & 0_{Rz_n} \dots 0_{Px_n} & 1_{N_1} \dots 1_{A_1} & 1_{N_2} \dots 1_{A_2} & 0_{N_3} \dots 0_{A_3} & \dots & 0_{N_n} \dots 0_{A_n} \\ 0_{Rz_2} \dots 0_{Px_2} & -1_{Rz_3} \dots -1_{Px_3} & \dots & 0_{Rz_n} \dots 0_{Px_n} & 1_{N_1} \dots 1_{A_1} & 0_{N_2} \dots 0_{A_2} & 1_{N_3} \dots 1_{A_3} & \dots & 0_{N_n} \dots 0_{A_n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0_{Rz_2} \dots 0_{Px_2} & 0_{Rz_3} \dots 0_{Px_3} & \dots & -1_{Rz_n} \dots -1_{Px_n} & 1_{N_1} \dots 1_{A_1} & 0_{N_2} \dots 0_{A_2} & 0_{N_3} \dots 0_{A_3} & \dots & 1_{N_n} \dots 1_{A_n} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Com a matriz  $B$  determinada a assumindo as hipóteses da Lei das Correntes de Kirchoff-Davies, tem-se:

$$\begin{bmatrix} -\$_{Rz_2} \dots -\$_{Px_2} + 0_{Rz_3} \dots + 0_{Px_3} + \dots + 0_{Rz_n} \dots + 0_{Px_n} + \$_{N_1} \dots + \$_{A_1} + \$_{N_2} \dots + \$_{A_2} + 0_{N_3} \dots + 0_{A_3} + \dots + 0_{N_n} \dots + 0_{A_n} \\ 0_{Rz_2} \dots + 0_{Px_2} - \$_{Rz_3} \dots - \$_{Px_3} + \dots + 0_{Rz_n} \dots + 0_{Px_n} + \$_{N_1} \dots + \$_{A_1} + 0_{N_2} \dots + 0_{A_2} + \$_{N_3} \dots + \$_{A_3} + \dots + 0_{N_n} \dots + 0_{A_n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0_{Rz_2} \dots + 0_{Px_2} + 0_{Rz_3} \dots + 0_{Px_3} + \dots - \$_{Rz_n} \dots - \$_{Px_n} + \$_{N_1} \dots + \$_{A_1} + 0_{N_2} \dots + 0_{A_2} + 0_{N_3} \dots + 0_{A_3} + \dots + \$_{N_n} \dots + \$_{A_n} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.27)$$



expressa na Eq. 3.66, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Omega(r_{p,t_2}^p) & I \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Omega(r_{p,t_3}^p) & I \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Omega(r_{p,t_n}^p) & I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_{x_2} \\ \vdots \\ \dot{P}_{z_2} \\ \dot{R}_{x_3} \\ \vdots \\ \dot{P}_{z_3} \\ \vdots \\ \dot{R}_{x_n} \\ \vdots \\ \dot{P}_{z_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1J^p & {}^2J^p & 0 & \dots & 0 \\ {}^1J^p & 0 & {}^3J^p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ {}^1J^p & 0 & 0 & \dots & {}^nJ^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\dot{q} \\ {}^2\dot{q} \\ {}^3\dot{q} \\ \vdots \\ {}^n\dot{q} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Isolando o vetor das magnitudes, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{R}_{x_2} \\ \vdots \\ \dot{P}_{z_2} \\ \dot{R}_{x_3} \\ \vdots \\ \dot{P}_{z_3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{R}_{x_n} \\ \vdots \\ \dot{P}_{z_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Omega(r_{p,t_3}^p) & I \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Omega(r_{p,t_n}^p) & I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1J^p & {}^2J^p & 0 & \dots & 0 \\ {}^1J^p & 0 & {}^3J^p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ {}^1J^p & 0 & 0 & \dots & {}^nJ^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\dot{q} \\ {}^2\dot{q} \\ {}^3\dot{q} \\ \vdots \\ {}^n\dot{q} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

O relacionamento entre o vetor das magnitudes com o vetor  $\dot{x}_{p,t_2,\dots,n}$  encontra-se expresso

na Eq. 3.69, assim sendo, tem-se:

$$\dot{x}_{p,t_2,\dots,t_n} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_3}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_n}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1J^p & {}^2J^p & 0 & \dots & 0 \\ {}^1J^p & 0 & {}^3J^p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ {}^1J^p & 0 & 0 & \dots & {}^nJ^p \end{bmatrix} {}^{1,2,\dots,n}\dot{q} \quad (4.32)$$

onde o vetor  ${}^{1,2,\dots,n}\dot{q}$  é o vetor composto pelas velocidades das juntas dos manipuladores, ou seja, do robô posicionador ( ${}^1\dot{q}$ ) e dos robôs operadores ( ${}^2\dot{q}$  até  ${}^n\dot{q}$ ), como consta na Eq. 4.2.

Como expresso na Eq. 4.3, é possível obter o Jacobiano de Cooperação empregando o Método de Davies de um SRC genérico, como:

$$J_{C_{1,2,\dots,n}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_3}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_n}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1J^p & {}^2J^p & 0 & \dots & 0 \\ {}^1J^p & 0 & {}^3J^p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ {}^1J^p & 0 & 0 & \dots & {}^nJ^p \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

É possível concluir que o Jacobiano de Cooperação obtido pelo Método de Davies apresenta a mesma forma do Jacobiano de Cooperação baseado em helicoides, entretanto a metodologia de obtenção é distinta. Cabe ressaltar, que esse fato só acontece, devido à escolha das cordas terem sido feitas propositalmente escolhendo-se a junta anterior ao corpo que contém o efetuator final de cada robô operador.

É importante ter as duas opções pois em determinados problemas, a segunda pode trazer algumas vantagens, face à sistematização agregada, principalmente na solução de problema onde haja necessidade de impor ou monitorar determinada junta, tal como operação com limitação de espaço, como por exemplo, em ambientes confinados, ou mesmo a monitoração para evitamento de colisão entre elos e de singularidades.

Baseados nos argumentos supracitados, o Jacobiano de Cooperação baseado em helicoides empregando o Método de Davies generaliza o Jacobiano de Cooperação baseado em helicóide.

Assim sendo, incorpora-se as mesmas conclusões tiradas para o Jacobiano empregando

helicoides, no que tange à sua representação por um produto de duas matrizes, uma em função das posições dos pontos  $t_2, \dots, t_n$ , e a segunda somente em função dos helicoides representativos das juntas dos  $n$  manipuladores, arranjados de modo à guardar o acoplamento que existem entre os mesmos. Também é possível obter as variáveis de junta obtidas simultaneamente, quando estabelecidas as variáveis das tarefas.

Analisando as componentes do Jacobiano de Cooperação obtido pelo Método de Davies, é possível constatar que os dados de entrada necessários são:

1. os Jacobianos baseados em helicoides  ${}^k J^p({}^k q)$  de cada manipulador, empregando as Eqs. 3.38 e 3.39, que envolvem o uso das Eqs. 3.47, 3.48 e 3.49. Para tanto, é necessário conhecer:
  - (a) as posições iniciais das juntas dos manipuladores (os vetores  $s_{ref}$  representando o eixo de cada junta e  $s_{0_{ref}}$  a posição em relação ao referencial absoluto); e,
  - (b) as posições instantâneas das juntas dos manipuladores (os vetores  $s$  representando o eixo de cada junta e  $s_0$  a posição em relação ao referencial absoluto).
2. o vetor posição da ferramenta em relação à peça  $r_{p,t_j}^p(t)$ , para cada tarefa.

## 4.5 Contribuições Científicas Contidas neste Capítulo

Este capítulo apresentou a principal contribuição científica desta tese, que permite a modelagem cinemática de múltiplos robôs cooperando em prol da realização de tarefas, utilizando o conceito inovador de Jacobiano de Cooperação, que é a transformação linear contendo as relações de dependência entre todas as juntas dos  $n$  manipuladores, e as  $n - 1$  tarefas a serem executadas sobre uma peça fixada por um dos robôs.

Partindo da metodologia de obtenção do Jacobiano Relativo entre dois manipuladores genéricos que utiliza a convenção de Denavit-Hartenberg, apresentou-se metodologia de obtenção do Jacobiano de Cooperação empregando a convenção de Denavit-Hartenberg, que pressupõe uma modelagem de cada robô adotando a convenção de Denavit-Hartenberg para o cálculo da cinemática direta, na obtenção das orientações relativas entre os referenciais, e para o cálculo do Jacobiano de cada robô.

Partindo da metodologia de obtenção do Jacobiano Relativo empregando helicoides entre dois manipuladores genéricos, apresentou-se metodologia de obtenção do Jacobiano de Cooperação empregando a Teoria dos Helicoides, que pressupõe uma modelagem de cada robô empregando helicoides para o cálculo da cinemática direta e para o cálculo do Jacobiano baseado em helicoides de cada robô.

A terceira metodologia de obtenção do Jacobiano de Cooperação Utiliza o Método de Davies e obteve-se o Jacobiano de Cooperação empregando helicoides por meio de um procedimento sistematizado que não necessita do conceito de Jacobiano Relativo, sendo uma generalização da forma de obtenção, pois permite incluir monitoramento e restrições adicionais.

A hipótese inicial onde só existia um único robô posicionador e os demais seriam robôs operadores, pode sofrer algumas alterações sem perda dos resultados obtidos. Supondo que exista um SRC composto por alguns manipuladores que compartilhem a carga, ou seja alguns manipuladores estão fixando a peça, o que caracteriza que existem mais de um robô posicionador. Uma análise atenta constata que no compartilhamento de carga não existe variação nas distâncias relativas entre o referencial da peça e as diversas ferramentas dos robôs posicionadores. Assim sendo basta que uma vez estabelecida a distância relativa de cada ferramenta ao referencial da peça, esta permaneça constante e como consequência sua derivada, a velocidade da ferramenta dos posicionadores em relação a peça, é identicamente nula.

Com base no supracitado é possível concluir que o Jacobiano de Cooperação permite a modelagem de um SRC onde ocorram: (1) somente compartilhamento de carga; (2) somente execução de tarefas; ou (3) o caso genérico onde existam múltiplos robôs posicionadores e operadores, onde alguns encontram-se compartilhando carga, enquanto outros executem tarefas, simultaneamente.

Cabe ressaltar, que todo o desenvolvimento ocorreu considerando o caso genérico. Assim sendo, basta utilizar os resultados obtidos, por meio de substituição direta em função da quantidade e do tipo de manipuladores envolvidos, dispensando nova dedução.



## CAPÍTULO 5

# Estudo de Caso

Este capítulo apresenta um estudo de caso idealizado com o objetivo de aplicar o modelo do Jacobiano de Cooperação ( $J_C$ ) obtido pelo Método de Davies. Inicialmente buscou-se na literatura algum Sistema Robótico Cooperativo (SRC) composto por mais de três robôs com seis graus de liberdade cada, que pudesse ser utilizado para validar o modelo em tese, o que não foi encontrado, pois a maioria dos autores apresenta aplicações entre dois robôs planares com três graus de liberdade cada.

Partiu-se para tarefa de idealizar e montar um estudo de caso com robôs espaciais distintos, com seis graus de liberdade cada, de modo a explorar todas as potencialidades do modelo. Surgiram dificuldades iniciais devido ao grande número de fatores relevantes, a ordem de prioridade em defini-los e a relação de dependência entre eles, o que resultou na necessidade de criar uma sistematização, culminado em uma Metodologia de Auxílio ao Projeto e Simulação de SRC, que encontra-se apresentada na seção 5.1.

Este capítulo apresenta simulações de modos distintos de realização de três tarefas sobre uma peça, em função do número de robôs envolvidos, se há simultaneidade ou não na realização das tarefas, o que resulta em cooperação entre os mesmos, ou em realização independente por um único robô. Para facilitar a compreensão de cada modo simulações realizadas neste capítulo e permitir o entendimento a seção 5.2 apresenta as definições dos três modos distintos de se realizar as tarefas desejadas sobre a peça, quando as tarefas são realizadas: (1) simultaneamente com cooperação por um SRC composto por quatro robôs; (2) por um SRC com dois robôs e uma tarefa por vez; e (3) sem o uso de SRC, onde são realizadas individualmente por um robô sem cooperação.

A seção 5.2 apresenta o estudo de caso no MODO 1, o mais complexo, onde é apresentado um SRC composto por quatro robôs industriais espaciais que executam três tarefas simultaneamente, e encontram-se definidos quais os manipuladores que compõem o SRC; as tarefas a

serem realizadas; e o posicionamento das bases de cada robô no chão-de-fábrica, utilizando a Metodologia de Auxílio ao Projeto e Simulação de SRC (seção 5.1). Em seguida apresenta uma primeira tentativa de atribuição de níveis aos diversos fatores relevantes seguido de uma simulação que inicialmente é feita para um tempo total de processamento das tarefas de 6s e resulta em não conformidades, que indicam colisão e violação dos limites de algumas juntas. Uma solução final é simulada e apresentada, resultado da análise de diversas alternativas de mudança de níveis dos fatores, e apresenta conformidade com os erros máximos admissíveis, bem como, com os limites de desempenho de posição e velocidade das juntas, tendo ainda o tempo total de execução da tarefa reduzido de 6s para 4s. Finalmente são apresentadas as considerações finais do estudo de caso no MODO 1.

## 5.1 Metodologia de Auxílio ao Projeto e Simulação de SRC

A primeira dificuldade em idealizar este capítulo surgiu ao constatar o fato de não ter sido localizada uma cooperação com mais de três robôs publicado na literatura, atuando em mais de duas tarefas simultâneas que pudesse ser reproduzido. A grande maioria das publicações apresentam apenas cooperação entre um par de robôs, geralmente planares, executando tarefas de seguimento de trajetória relativamente simples (LEWIS; MACIEJEWSKI, 1990) (ZILOUCHIAN, 1994) (ZIELINSKI; WARSZAWSKA, 1995) (MOHRI; YAMAMOTO; HIRANO, 1996) (LEWIS, 1996) (HWANG et al., 1998) (CHOI et al., 1999) (OWEN; CROFT; BENHABIB, 2003) (OWEN; CROFT; BENHABIB, 2004) (OWEN; CROFT; BENHABIB, 2005) (RIBEIRO; GUENTHER; MARTINS, 2007) (OWEN; CROFT; BENHABIB, 2008) (RIBEIRO; GUENTHER; MARTINS, 2008) (RIBEIRO; MARTINS, 2009), sendo que alguns utilizam-se de simetria para facilitar a resolução (HEMAMI, 1986).

Existem poucas publicações de cooperação entre três robôs, entretanto, ou estão manipulando placas valendo-se de um arranjo físico que favorece a programação por simetria (TZAFESTAS; PROKOPIOU; TZAFESTAS, 1998), ou são aplicações onde existem dois robôs manipulando as laterais de um cubo, enquanto o terceiro executa seguimento de um trajetória retilínea, tangenciando a face superior do cubo (DOURADO, 2005).

A intenção de idealizar um estudo de caso que resolva um SRC composto por robôs espaciais, em tarefas não triviais, objetiva principalmente mostrar as vantagens da modelagem proposta em todo seu potencial, ou seja a robustez, a abrangência e a generalidade.

As primeiras tentativas de elaboração esbarraram na falta de sistematização e na determinação dos diversos fatores que influenciam a resolução do SRC. A necessidade de projetar um SRC para o estudo de caso fez com que os fatores relevantes fossem: identificados, ordenados e relacionados entre si, o que naturalmente resultou em uma série de procedimentos sistematizados que servem para auxiliar o projeto de SRC. Assim sendo, surgiu naturalmente o

que se pode denominar de uma Metodologia de Projeto de SRC usando o modelo do Jacobiano de Cooperação, que encontra-se esquematizada na Fig. 22 e explicada detalhadamente nos parágrafos seguintes.

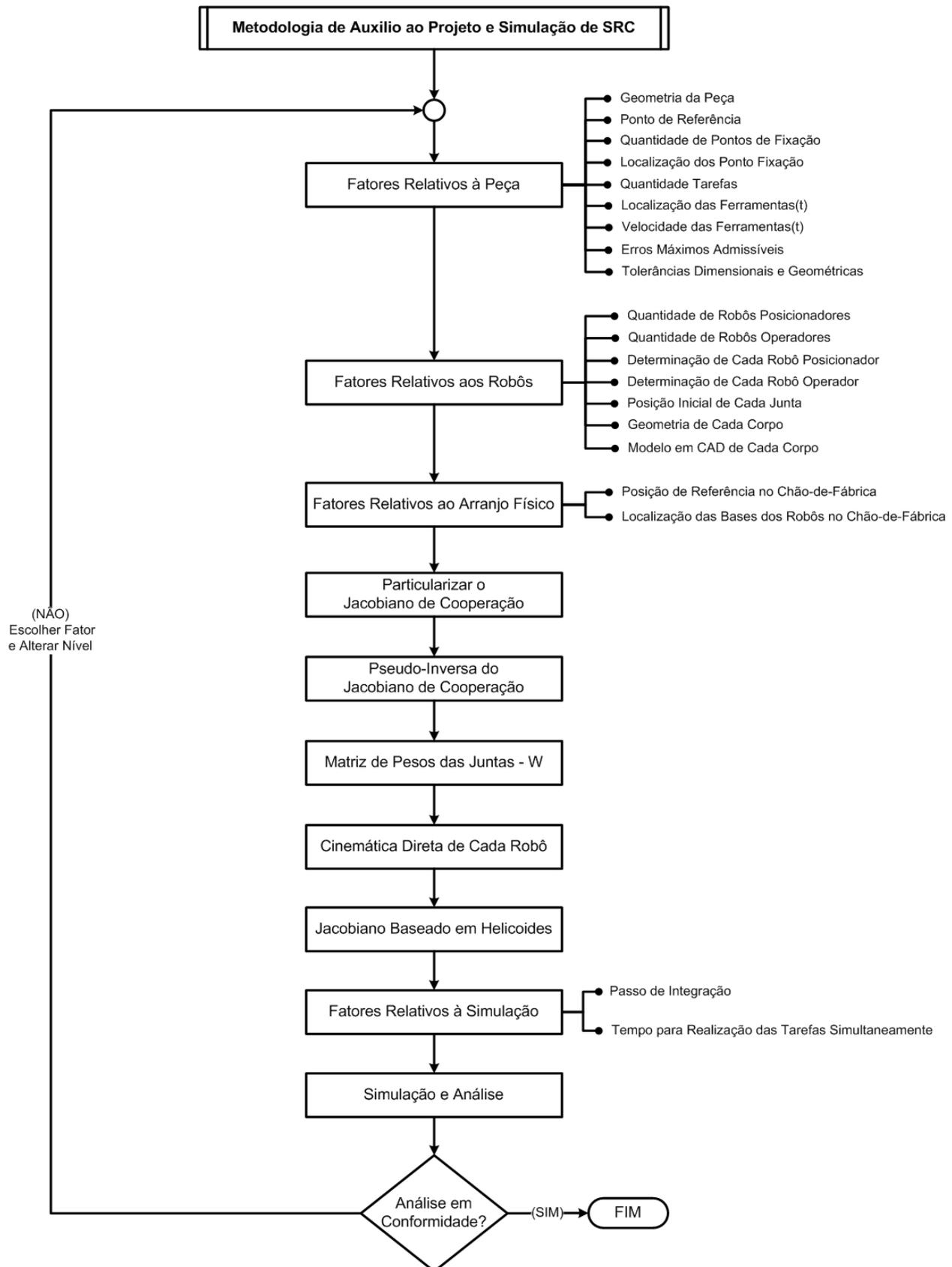
De uma maneira abrangente, o cenário que envolve um SRC é composto por robôs que estão devidamente dispostos no chão-de-fábrica e que executam tarefas sobre uma peça. Analisando sob o ponto de vista de Orientação a Objetos, tem-se que o objeto que recebe a ação de transformação é a peça, e portanto se torna o ponto de partida para o projeto do SRC, principalmente se não existe SRC previamente estabelecido na fábrica.

O fatores relevantes que dizem respeito à **peça** são:

1. a geometria da peça;
2. a determinação de um ponto de referência na peça, para o sistemas de coordenadas principal da peça;
3. a quantidade de pontos de fixação da garra do robô à peça;
4. a localização de cada um desses pontos de fixação;
5. a quantidade de tarefas simultâneas a serem executadas sobre a peça;
6. os níveis (valores) desejados da localização (posição e orientação) da ferramenta de cada robô sobre a peça na base do tempo;
7. os níveis desejados de velocidade da ferramenta de cada robô sobre a peça na base do tempo;
8. os erros dimensionais máximos admissíveis de localização de cada tarefa; e,
9. as tolerâncias dimensionais e geométricas.

Os fatores relevantes relativos ao **robô** guardam relação direta com alguns fatores relativos à peça, o que possibilitam a determinação daqueles, como segue:

1. a quantidade de **robôs operadores** componentes do SRC, que é função do número de tarefas simultâneas sobre a peça;
2. a quantidade de **robôs posicionadores**, função do número de pontos de fixação da peça;
3. a determinação de cada robô operador envolvido, que deve possuir características técnicas estabelecidas pelo fabricante capazes de atender às solicitações da respectiva tarefa sobre a peça;



**Figura 22:** Metodologia de auxílio ao projeto e simulação de SRC

4. a determinação de cada robô posicionador envolvido, devendo possuir características técnicas estabelecidas pelo fabricante capazes de suportar o peso da peça, e garra adequada para a fixação daquela; e,
5. o estabelecimento de posição inicial de cada junta de cada robô;
6. o arquivo em CAD de cada corpo componente de cada robô, que é fornecido pelo fabricante ou pode ser modelado em qualquer ferramenta computacional de CAD 3D, de modo a ser utilizado no ambiente de Realidade Virtual do simulador, além de ser a fonte onde são obtidos os níveis dos fatores ligados à geometria do corpo.

Com os fatores relativos à peça e aos robôs determinados, volta-se o foco da análise para os fatores relativos ao chão-de-fábrica, ou seja, ao arranjo físico das bases de cada robô, como listados a seguir:

1. a determinação de um ponto de referência, para o sistema de coordenadas fixado no chão-de-fábrica;
2. o estabelecimento de posição de cada base de cada robô no chão-de-fábrica;

Passa-se ao procedimento de particularização do modelo genérico, ou seja, surge um Jacobiano de Cooperação específico para o SRC projetado.

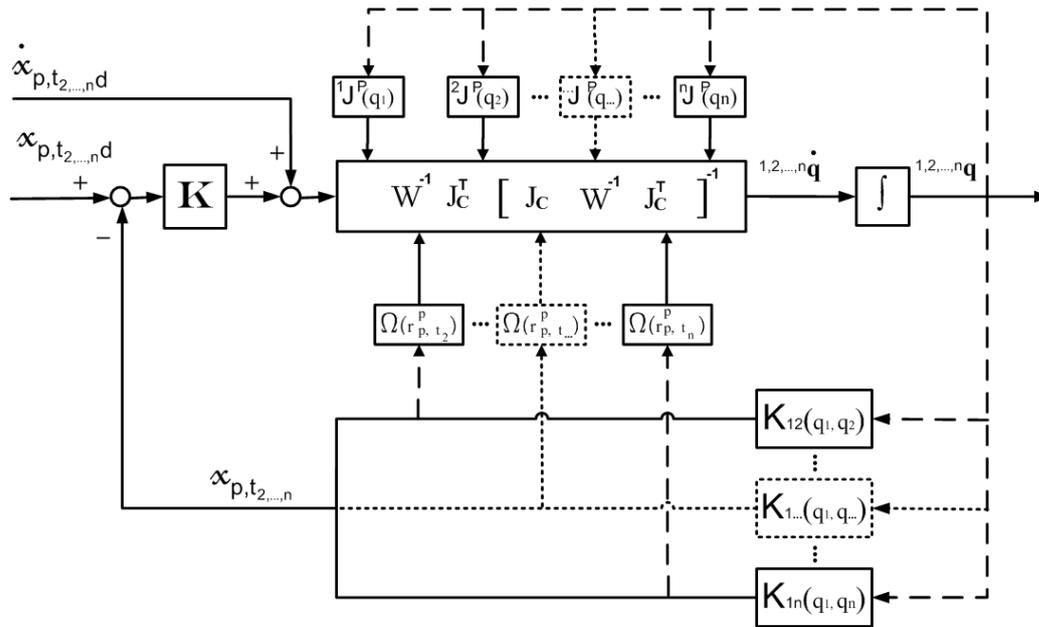
O próximo procedimento é a determinação da pseudo-inversa do  $J_{CH}$ , ou seja,  $J_{CH}^+$  que fornece a solução otimizada em função da minimização do custo quadrático das velocidades das juntas. Esta solução admite a possibilidade de uma priorização de movimentação das juntas, valendo-se de uma matriz diagonal  $\mathbb{W}$  que é a matriz de pesos das juntas.

Ainda são necessários procedimentos de obtenção da cinemática direta e de determinação do Jacobiano Baseado em Helicóides de cada robô.

Finalmente segue o estabelecimento dos fatores ligados à simulação, ou seja:

1. o passo de integração; e,
2. o tempo total de realização das tarefas simultaneamente.

Com os níveis de todos os fatores devidamente estabelecidos, aqui nominados como fatores de entrada para a simulação, e associados às matrizes supracitadas, a modelagem está completa e é possível resolver o SRC valendo-se de simulação computacional, que fornece indicadores de erros de posição de cada tarefa, e de desempenho de posição e de velocidade de cada junta de cada robô. A resolução da cinemática inversa diferencial segue o diagrama de blocos apresentado na Fig. 23.



**Figura 23:** Diagrama de blocos da resolução da cinemática inversa para SRC genérico

O procedimento final é a análise de cada gráfico obtido, de modo a verificar se houve violação do erro máximo estabelecido como aceitável, ou dos limites de posição e velocidade de cada junta. Caso ocorra alguma não conformidade, implicará na necessidade de: retornar ao início do processo para alterar o nível de algum fator anteriormente estabelecido; e repetir novamente a simulação e análise dos resultados até que estejam conformes com as limitações técnicas dos robôs e dentro do limite de erro máximo admitido.

O sistema computacional de simulação foi desenvolvido utilizando Programação Orientada a Objetos (POO) e integrado com bibliotecas livres (GLScene) de visualização em Realidade Virtual (RV), o que permite que os arquivos em CAD dos robôs disponibilizados pelos fabricantes sejam incorporados ao sistema.

O ambiente de RV assume uma importância estratégica, pois possibilita que seja feita uma análise visual da simulação durante todo o tempo de execução da tarefa, de modo a identificar se ocorre **colisão**, tanto entre robôs e/ou peça com o chão-de-fábrica, quanto entre corpos de cada robô em relação aos outros robôs. Caso seja detectado problema de colisão, novamente implicará na necessidade de alteração do nível de algum fator previamente estabelecido e de repetir a simulação e análise dos resultados até que não haja colisão alguma.

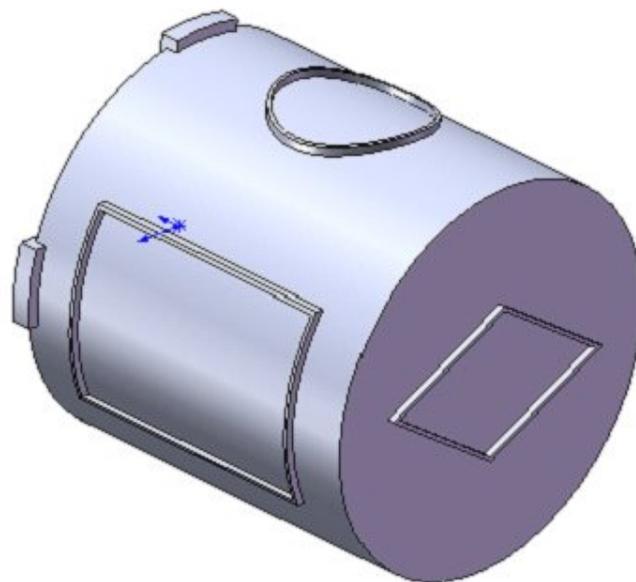
É importante concluir que: existem infinitas possibilidades de estabelecimento de níveis de alguns fatores; o sistema computacional desenvolvido é apenas um simulador, ou seja, retrata somente o cenário estabelecido conforme os níveis escolhidos; e a função de otimização cabe ao projetista, ou seja, usar simulação para otimizar os níveis dos fatores de entrada, depende da comparação dos resultados fruto das escolhas adequadas dos níveis pelo projetista.

Cada um dos procedimentos descritos encontra-se exemplificado nos itens a seguir, retratando o estudo de caso propriamente dito. Inicialmente é apresentada uma escolha de níveis de cada fator de entrada e executando-se todos os procedimentos da metodologia que conduz constatação que ocorrem não conformidades, ou seja, colisão entre um robô e o chão, e violação dos limites físicos de posição de algumas juntas. Como ação corretiva, depois de seguidas tentativas, onde foram feitas varias escolhas de níveis de diversos fatores, simulações e análises, apresenta-se a escolha final, que resulta em uma solução conforme para o SRC, onde a alteração é feita nos níveis relativos aos fatores de localização relativa (arranjo físico) das bases dos robôs.

Com base na sistematização é possível passar para a definição do problema do estudo de caso propriamente dito.

## 5.2 Definição do Problema

Esta seção apresenta a idealização de um estudo de caso, onde o modelo do Jacobiano de Cooperação é aplicado para obter a resolução da cinemática inversa e da cinemática diferencial inversa, de modo que robôs espaciais realizem três tarefas sobre uma única peça, apresentada na Fig. 24, que consiste em um cilindro oco com as bordas fechadas por tampas planas.



**Figura 24:** Peça sobre a qual serão realizadas tarefas

Foram idealizadas três tarefas distintas a serem realizadas sobre a peça, apresentadas na Fig. 24, que equivalem, quando projetadas em planos ortogonais que se interceptam no centro da peça, à projeção de uma circunferência, de um retângulo e de um losango.

Existem inúmeros modos distintos de realizar as três tarefas sobre a peça, e nesta seção encontram-se apresentados três modos distintos de realização das tarefas, com a finalidade de levantar vantagens e desvantagens de cada modo, permitindo uma comparação entre eles.

Basicamente os modos estudados variam em função da quantidade de robôs envolvidos na forma em que ocorrem a realização das três tarefas, que podem ser obtidas: (1) simultaneamente num SRC composto por quatro robôs; (2) isoladamente, uma tarefa por vez, com sistemas compostos por dois robôs cooperando entre si; ou (3) por um sistema isolado composto por um único robô sem que haja qualquer cooperação.

De forma sumária passa-se a nominar os grupos de simulação feitos nesta tese da seguinte forma:

- **MODO 1** - simulação com cooperação entre 4 robôs na realização simultânea de 3 tarefas (seção 5.3);
- **MODO 2** - simulação com cooperação entre 2 robôs na realização de 1 tarefa por vez (seção 5.4); e,
- **MODO 3** - simulação sem cooperação, onde 1 robô realiza sozinho 1 tarefa por vez (seção 5.5).

### 5.3 SRC com 4 Robôs e 3 Tarefas Simultâneas - MODO 1

Esta seção utiliza a Metodologia de Auxílio ao Projeto e Simulação de um SRC (seção 5.1), para projetar um SRC composto por quatro robôs atuando de forma cooperativa na realização das três tarefas simultaneamente.

Como ponto de partida no projeto do SRC, seguindo a metodologia passa-se a determinação dos níveis de cada fator relacionado à peça.

A geometria da peça consiste em um cilindro oco fechado, com raio externo de 250 mm e comprimento de 500 mm. Como ponto de referência foi estabelecido o centro geométrico do cilindro sobre seu eixo gerador e equidistante das faces planas. Possui apenas um ponto de fixação em uma das faces planas com coordenadas (-250, 0, 0). Deseja-se executar três tarefas simultaneamente, que encontram-se apresentadas de modo sumário na Tab. 3, onde consta a denominação e o tipo de cada tarefa.

Faz-se necessário estabelecer os erros máximos admissíveis para cada tarefa, que na prática seria imposição de projeto. Como o estudo de caso é hipotético define-se arbitrariamente que os erros máximos admissíveis não podem exceder 0,1 mm em posição linear e 0,01 grau em rotação.

Os fatores ligados aos robôs guardam relação com os da peça, ou seja, fica estabelecido que o SRC, por operar as tarefas simultaneamente, deve ser constituído por três robôs operadores, um para cada tarefa, além de um robô posicionador, função do único ponto de fixação estabelecido na peça.

A escolha de cada robô associada à respectiva tarefa a ser executada encontra-se listada na Tab. 3, bem como a figura representativa que mostram os corpos de cada robô fornecido pelo fabricante. Uma pormenorização da especificação de cada robô escolhido encontra-se descrita nos parágrafos seguintes.

**Tabela 3:** Tipos de tarefas e respectivos robôs envolvidos

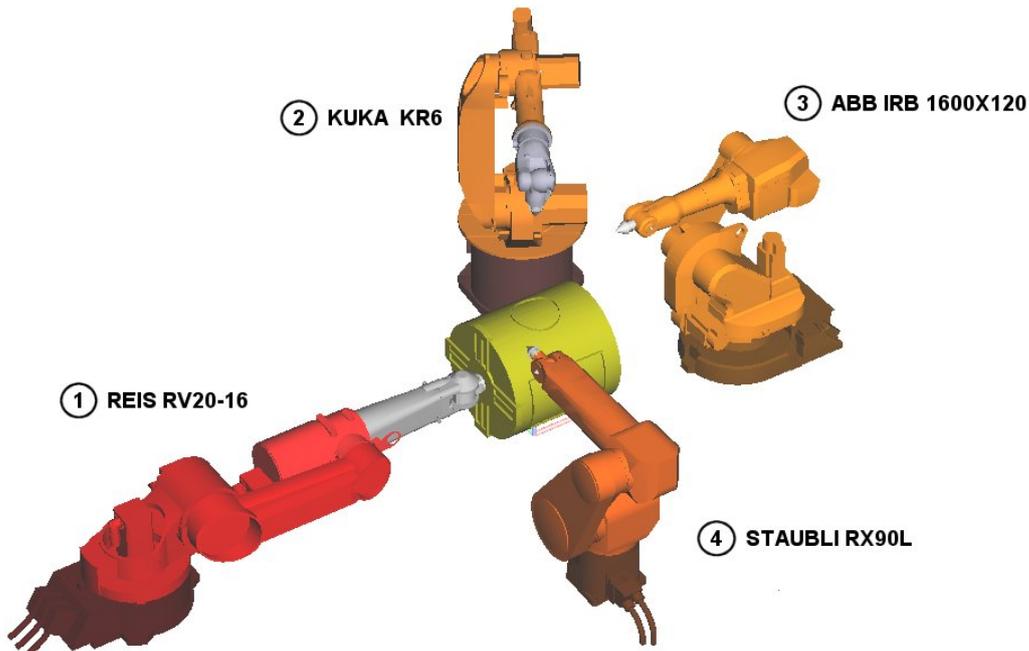
Tarefa	Tipo	Robôs	Figura
1-2	sobre a superfície cilíndrica superior da peça, uma trajetória que, quando projetada no plano XY, equivale a uma circunferência	REIS RV20-16 KUKA KR6	27
1-3	sobre a "tampa" do cilindro, ou seja, sobre a superfície plana YZ, uma trajetória que forma um losango	REIS RV20-16 ABB IRB1600X120	28
1-4	sobre a superfície cilíndrica lateral da peça, uma trajetória que, quando projetada no plano XZ, equivale a um retângulo	REIS RV20-16 STAUBLI RX90L	29

Considere o SRC apresentado na Fig. 25, composto por quatro manipuladores industriais, a saber:

1. REIS RV20-16 (REIS-RV20-16, 2008)
2. KUKA KR6 (KUKA-KR6, 2008)
3. ABB IRB1600X120 (ABB-IRB-1600X120, 2008)
4. STAUBLI RX90L (STAUBLI-RX90L, 2008)

O robô 1, cujas especificações técnicas fornecidas pelo fabricante estão apresentadas na Tab. 4, é o responsável pela fixação da peça, ou seja, o REIS RV20-16 passa a ser definido como o robô posicionador. Como já foi mencionado, a peça consiste em um cilindro oco com raio externo de 250 mm e comprimento de 500 mm, como pode ser observado na Fig. 26.

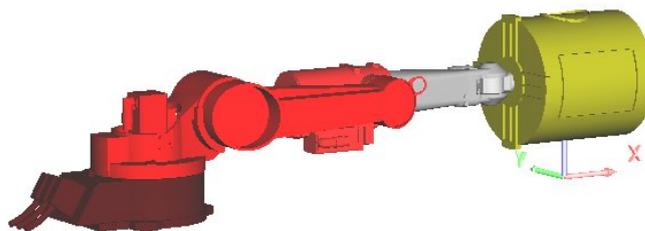
O robô 2, cujas especificações técnicas fornecidas pelo fabricante estão apresentadas na Tab. 5, é o responsável pela execução da tarefa 1-2, que consiste em percorrer uma trajetória



**Figura 25:** Robôs componentes do SRC

**Tabela 4:** Especificações do Fabricante do REIS RV20-16 (REIS-RV20-16, 2008)

REIS RV20-16				
Junta	Limites da Juntas	Velocidade	s	s <sub>0</sub>
A <sub>1</sub>	$\pm 180^0$	$200^0/s$	(0; 0; 1)	(0; 0; 400)
B <sub>1</sub>	$+70^0 / - 135^0$	$165^0/s$	(0; 1; 0)	(280; 0; 400)
C <sub>1</sub>	$+150^0 / - 120^0$	$150^0/s$	(0; 1; 0)	(920; 0; 400)
D <sub>1</sub>	$\pm 210^0$	$450^0/s$	(1; 0; 0)	(1011; 0; 400)
E <sub>1</sub>	$\pm 123^0$	$450^0/s$	(0; 1; 0)	(1500; 0; 400)
F <sub>1</sub>	$\pm 360^0$	$500^0/s$	(1; 0; 0)	(1600; 0; 400)
Repetitividade				0,05 mm
Capacidade de carga				10 kg

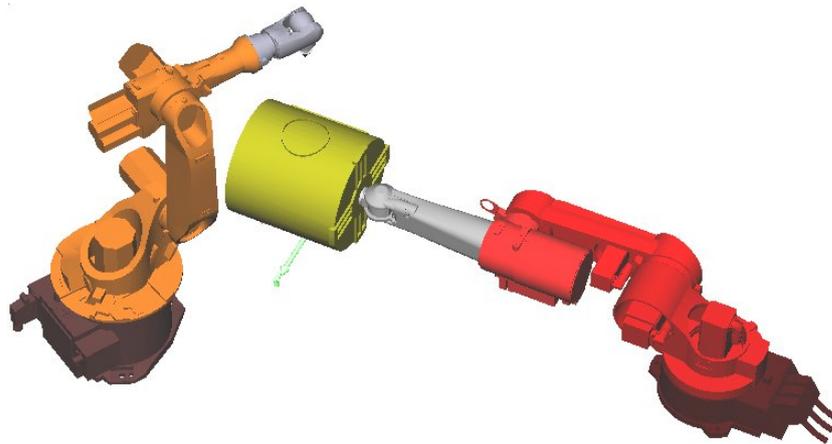


**Figura 26:** Robô posicionador com a peça fixada no efetuador final

sobre a superfície cilíndrica, ou seja, uma trajetória que equivale a uma circunferência quando projetada no plano XY (plano que passa pelo centro do cilindro), de raio igual a 100 mm, como mostra a Fig. 27. Assim sendo, ocorre uma cooperação em prol da realização da tarefa 1-2, entre o REIS e o KUKA, e este passa a ser definido como o robô operador 2.

**Tabela 5:** Especificações do Fabricante do KUKA KR6 (KUKA-KR6, 2008)

KUKA KR6				
Junta	Limites da Juntas	Velocidade	s	s <sub>0</sub>
A <sub>2</sub>	±185 <sup>0</sup>	156 <sup>0</sup> /s	(0; 0; 1)	(0; 0; 422)
B <sub>2</sub>	+35 <sup>0</sup> / - 155 <sup>0</sup>	156 <sup>0</sup> /s	(0; 1; 0)	(260; 0; 675)
C <sub>2</sub>	+154 <sup>0</sup> / - 130 <sup>0</sup>	156 <sup>0</sup> /s	(0; 1; 0)	(260; 0; 1355)
D <sub>2</sub>	±350 <sup>0</sup>	343 <sup>0</sup> /s	(1; 0; 0)	(662; 0; 1320)
E <sub>2</sub>	±130 <sup>0</sup>	362 <sup>0</sup> /s	(0; 1; 0)	(930; 0; 1320)
F <sub>2</sub>	±350 <sup>0</sup>	659 <sup>0</sup> /s	(1; 0; 0)	(1045; 0; 1320)
Repetitividade				0,1 mm
Capacidade de carga				6 kg



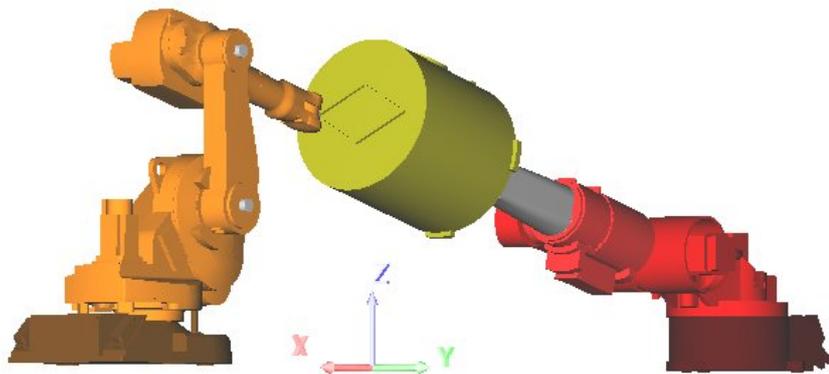
**Figura 27:** Robôs envolvidos na tarefa 1-2

O robô 3, cujas especificações técnicas fornecidas pelo fabricante estão apresentadas na Tab. 6, é um ABB IRB1600X120, que está envolvido na execução da tarefa 1-3, apresentada na Fig. 28. Esta tarefa consiste em percorrer sobre a "tampa" do cilindro, ou seja, sobre a superfície plana YZ, uma trajetória que forma um losango de comprimento das diagonais maior e menor igual a 350 mm e 200 mm, respectivamente.

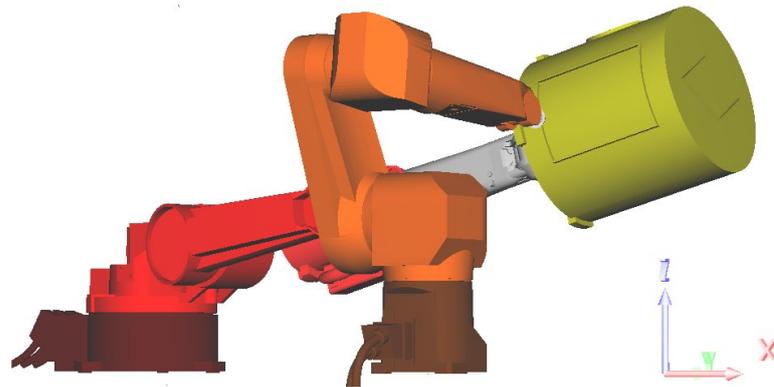
Finalmente o robô 4, cujas especificações técnicas fornecidas pelo fabricante estão apresentadas na Tab. 7, é parte integrante da execução da tarefa 1-4, que consiste em percorrer sobre a superfície cilíndrica, uma trajetória equivalente a um retângulo quando projetada no plano XZ, de comprimento igual a 350 mm e largura projetada igual a 250 mm, como mostrado na Fig. 29.

**Tabela 6:** Especificações do Fabricante do ABB IRB 1600X120 (ABB-IRB-1600X120, 2008)

ABB IRB 1600X120				
Junta	Limites da Juntas	Velocidade	s	s <sub>0</sub>
A <sub>3</sub>	$\pm 180^0$	$180^0/s$	(0; 0; 1)	(0; 0; 124,5)
B <sub>3</sub>	$+136^0 / - 63^0$	$180^0/s$	(0; 1; 0)	(150; -252,5; 486,5)
C <sub>3</sub>	$+55^0 / - 235^0$	$180^0/s$	(0; 1; 0)	(150; -214,5; 961,5)
D <sub>3</sub>	$\pm 200^0$	$320^0/s$	(1; 0; 0)	(464; 0; 961,5)
E <sub>3</sub>	$\pm 115^0$	$400^0/s$	(0; 1; 0)	(750; 0; 961,5)
F <sub>3</sub>	$\pm 400^0$	$460^0/s$	(1; 0; 0)	(815; 0; 961,5)
Repetitividade				0,025 mm
Capacidade de carga				6 kg

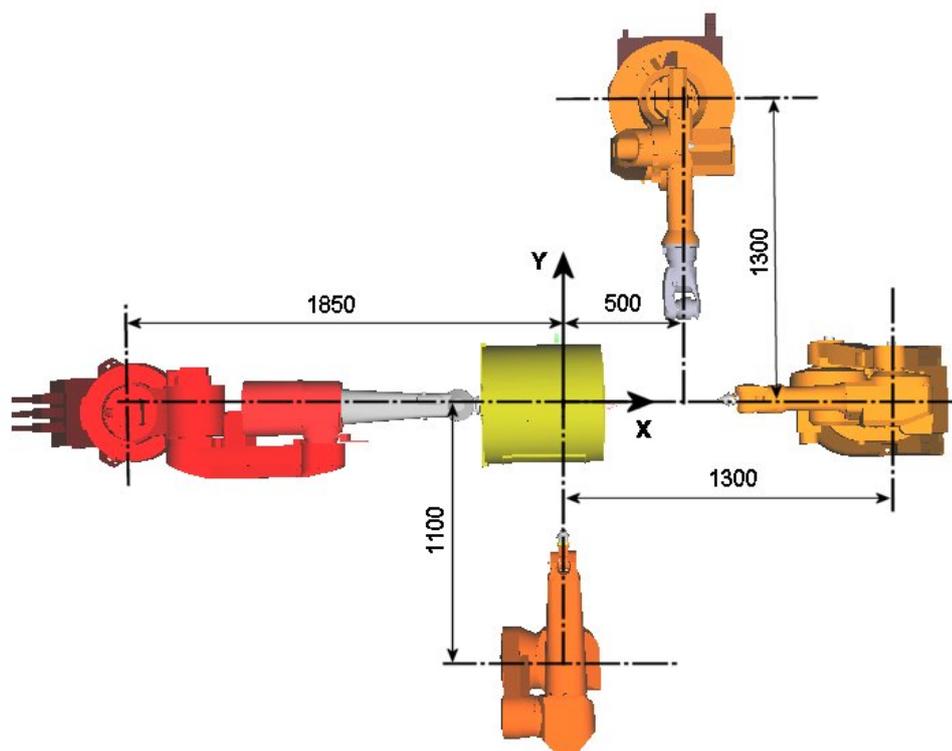
**Figura 28:** Robôs envolvidos na tarefa 1-3**Tabela 7:** Especificações do Fabricante do STAUBLI RX90L (STAUBLI-RX90L, 2008)

STAUBLI RX90L				
Junta	Limites da Juntas	Velocidade	s	s <sub>0</sub>
A <sub>4</sub>	$\pm 160^0$	$180^0/s$	(0; 0; 1)	(0; 0; 249)
B <sub>4</sub>	$\pm 137,5^0$	$180^0/s$	(0; 1; 0)	(0; 0; 420)
C <sub>4</sub>	$\pm 150^0$	$180^0/s$	(0; 1; 0)	(0; 0; 870)
D <sub>4</sub>	$\pm 270^0$	$320^0/s$	(1; 0; 0)	(0; 0; 1068)
E <sub>4</sub>	$+115^0 / - 105^0$	$400^0/s$	(0; 1; 0)	(0; 0; 1520)
F <sub>4</sub>	$\pm 270^0$	$460^0/s$	(1; 0; 0)	(0; 0; 1605)
Repetitividade				0,05 mm
Capacidade de carga				7 kg



**Figura 29:** Robôs envolvidos na tarefa 1-4

Analisando os fatores relativos ao arranjo físico da operação produtiva, que se preocupa com o posicionamento relativo dos recursos de transformação, observa-se a disposição inicialmente escolhida dos quatro robôs em relação ao referencial fixado na terra apresentada na Fig. 30.



**Figura 30:** Arranjo físico inicialmente escolhido, posição relativa entre os robôs

Projetar o arranjo físico corretamente é uma atividade importante, visto que a mudança é frequentemente uma atividade difícil, cara, de longa duração e que interrompe a produção (SLACK et al., 2002). Um arranjo físico errado pode levar a tempos de processamento longos, aumento do custo e no caso de robôs pode conduzir a condições desfavoráveis, sobrecarregando alguma junta ou mesmo fazendo com que trabalhe próximo a seus limites, o que pode ocasionar

uma diminuição do tempo médio entre falhas. Stopper ressalta a importância da utilização de técnicas de simulação em células robóticas na análise e otimização de tempos de operação de cada robô, bem como, na modelagem e projeto do *layout* destas células (STOPPER, 2005).

Segue o procedimento de particularização do Jacobiano de Cooperação, ou seja, tendo sido inicialmente definido o SRC, com os quatro robôs e as três tarefas desejadas, é possível obter um modelo da cinemática diferencial do SRC utilizando o Jacobiano de Cooperação baseado em helicoides, formulando-o nos termos da Eq. 4.33. Assim sendo, tem-se:

$$J_{C_{1,2,3,4}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_2}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_3}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} -\Omega(r_{p,t_4}^p) & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1J^p & {}^2J^p & 0 & 0 \\ {}^1J^p & 0 & {}^3J^p & 0 \\ {}^1J^p & 0 & 0 & {}^4J^p \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

O vetor representativo do espaço das velocidades das juntas  ${}^{1,2,3,4}\dot{q}$  é composto pelos vetores representativos dos espaços das velocidades das juntas de cada robô, ou seja,  ${}^1\dot{q}$ ,  ${}^2\dot{q}$ ,  ${}^3\dot{q}$  e  ${}^4\dot{q}$ .

O vetor  $\dot{x}_{p,t_2,3,4}$  corresponde ao espaço das tarefas desejadas, sendo composto pelos vetores representativos de cada espaço da tarefa desejada, ou seja,  $\dot{x}_{p,t_2}$ ,  $\dot{x}_{p,t_3}$  e  $\dot{x}_{p,t_4}$ . Assim sendo, é possível colocar nos termos da Eq. 4.33, ou seja:

$$\dot{x}_{p,t_2,3,4} = J_{C_{1,2,3,4}} {}^{1,2,3,4}\dot{q} \quad (5.2)$$

Segue o procedimento de determinação da pseudo-inversa do Jacobiano de Cooperação, ou seja, a solução otimizada em função da minimização do custo quadrático das velocidades das juntas é representada por:

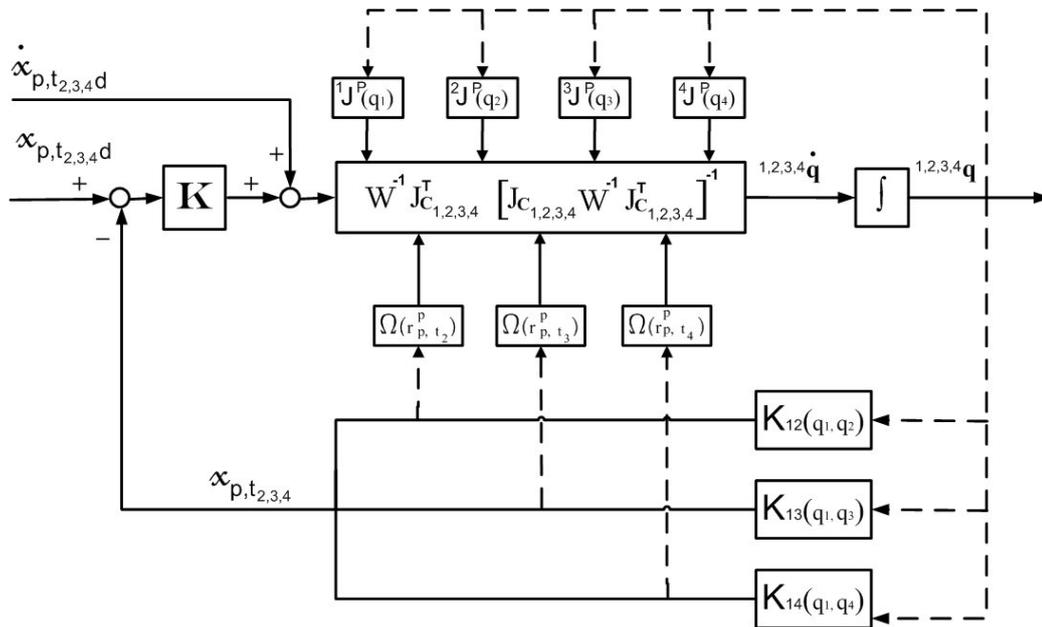
$${}^{1,2,3,4}\dot{q} = J_{C_{1,2,3,4}}^+ \dot{x}_{p,t_2,3,4} \quad (5.3)$$

onde  $J_{C_{1,2,3,4}}^+$  é pseudo-inversa do Jacobiano de Cooperação, representada por:

$$J_{C_{1,2,3,4}}^+ = \mathbb{W}^{-1} J_{C_{1,2,3,4}}^T \left[ J_{C_{1,2,3,4}} \mathbb{W}^{-1} J_{C_{1,2,3,4}}^T \right]^{-1} \quad (5.4)$$

onde  $\mathbb{W}$  é a matriz de pesos das juntas, onde neste estudo de caso é ajustada como uma identidade associando o valor unitário a cada termo da diagonal principal, o que faz com que todas tenham a mesma prioridade de movimentação.

A resolução da cinemática inversa diferencial segue o diagrama de blocos apresentado na Fig. 31.



**Figura 31:** Diagrama de blocos da resolução da cinemática inversa para o SRC com 4 robôs

### 5.3.1 Simulação e Análise - Solução Inicial

Conhecido o modelo do SRC do estudo de caso, segue a simulação voltado à previsão, de modo a levantar os indicadores de desempenho do sistema, o que permite uma análise de modo a verificar se os erros associados à realização das três tarefas simultaneamente estão dentro de limites aceitáveis, bem como, se as juntas dos robôs tem capacidade física de realizar as tarefas no tempo total de processamento

Deseja-se verifica se o sistema é capaz de realizar as tarefas em um tempo total de processamento de 6 s (fator relativo à simulação), e verificar ainda se é robusto o suficiente para diminuir ainda mais este tempo para 4 s, prevendo uma eventual possibilidade de aumento de demanda do produto.

O último fator a receber nível é o passo de integração (fator relativo à simulação) que assume o valor de 0,001 s.

Segue a análise da simulação feita para um tempo de 6 s, obtendo-se a solução da cinemática inversa para o KUKA e o STAUBLI, apresentadas respectivamente nas Fig. 32 e 33. Observe que existem duas não conformidades, ou seja, as posições obtidas por simulação ultrapassam os limites de juntas, no KUKA, mais especificamente na junta B2 (Fig. 32) e no STAUBLI, na junta C4 (Fig. 33).

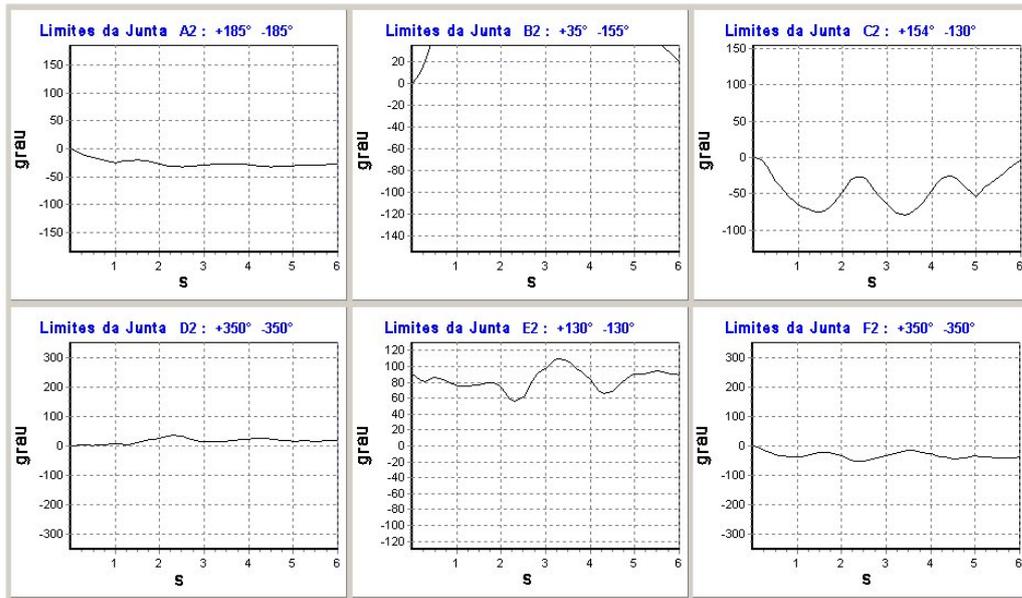


Figura 32: Posições das juntas do KUKA, arranjo inicial

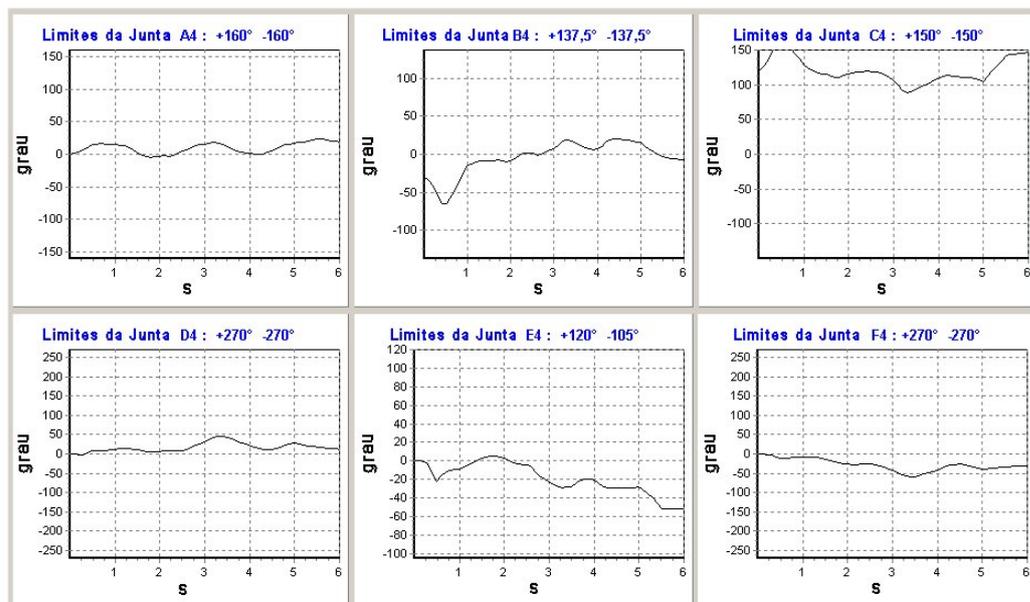
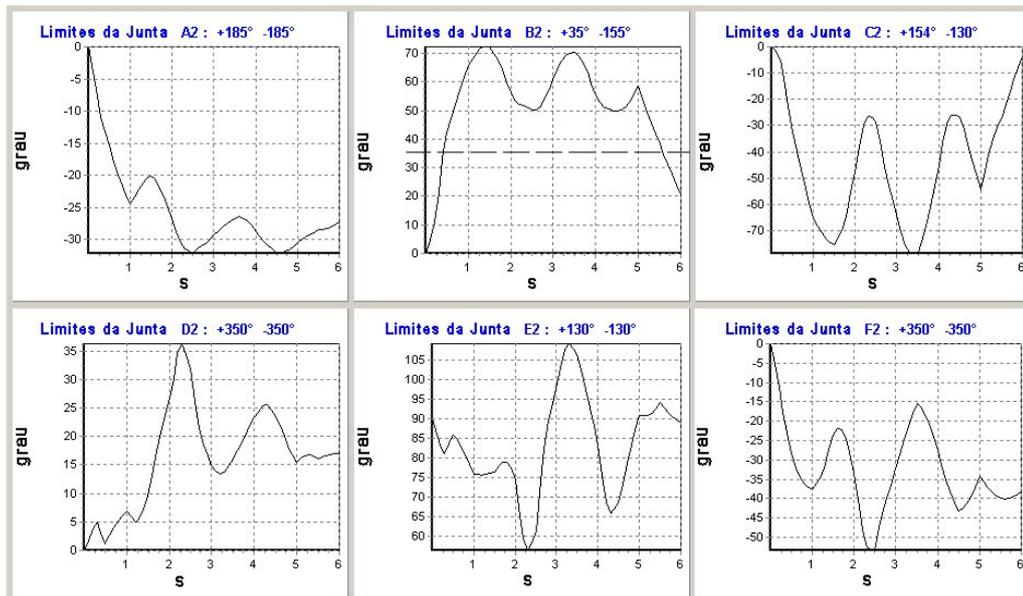


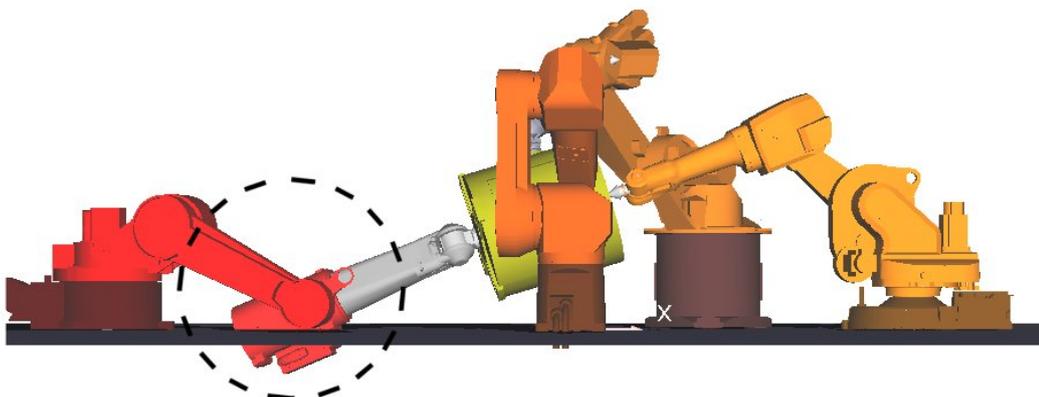
Figura 33: Posições das juntas do STAUBLI, arranjo inicial

A Fig. 34 mostra os gráficos com escala de eixos variando conforme posição obtida por simulação para o KUKA, sendo possível constatar no gráfico referente à junta B2, o quanto as posições obtidas ultrapassam o limite de junta de  $35^{\circ}$ , chegando a um valor máximo de  $73^{\circ}$  em torno do tempo de simulação de 1,3 s.



**Figura 34:** Posições das juntas do KUKA com escala automática, arranjo inicial

Outro ponto que cabe ser destacado é que, mesmo não havendo metodologia de previsão de colisão incorporada ao modelo fundamentada por modelos matemáticos, a ferramenta de análise de simulação auxiliada por computador, valendo-se de recursos de Realidade Virtual (RV), permite monitorar por observação a existência de colisão, ou seja, por inspeção da animação em RV. Note que a Fig. 35 mostra um instante em que ocorre colisão entre partes do REIS com o solo. A literatura apresenta estudos e algoritmos sobre detecção de colisão que fogem ao escopo desta tese, entretanto cabe como sugestão em estudos futuros a fim de serem analisados em conjunto e/ou sob a ótica do  $J_C$ .

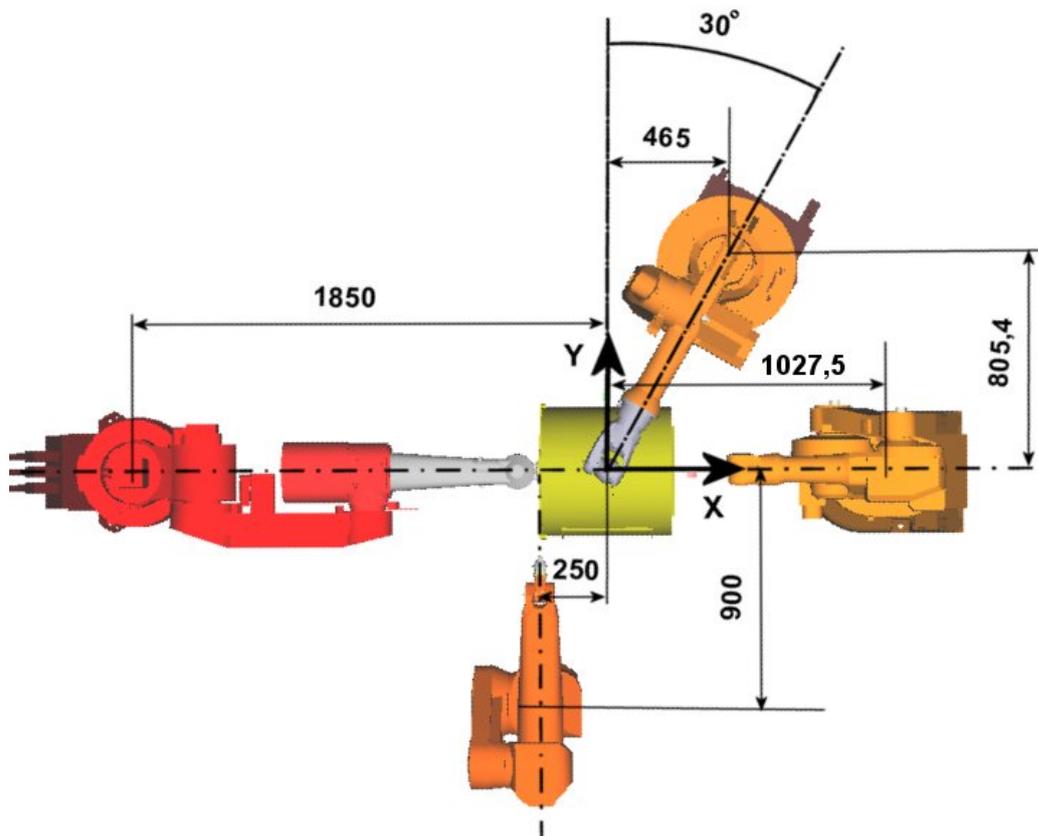


**Figura 35:** Realidade virtual mostrando ocorrência de colisão REIS/solo

Como os indicadores de desempenho obtidos por uma simulação do modelo em foco mostram que a solução obtida não está em conformidade com os limites físicos de posição das juntas. Como conclusão fica demonstrado que a solução inicial apresentada nesta seção não é capaz de executar as três tarefas simultaneamente. Em caso de alguma não conformidade, a postura recomendada na metodologia proposta nesta tese é voltar à fase inicial, escolher um ou mais fatores de entrada, alterar o nível estabelecido e fazer nova simulação e análise, o que é apresentada na seção seguinte.

### 5.3.2 Simulação e Análise - Solução Final

Antes de obter a solução final apresentada nesta seção, diversas tentativas foram feitas de modo a encontrar um projeto de SRC que fosse capaz de atender às condições de contornos impostas. Foi constatado que, no caso em questão, alterações nos níveis dos fatores de localização das bases dos robôs no chão-de-fábrica, ou seja, relativos ao arranjo físico, resultam em uma maior efetividade no sentido de não violar os limites de juntas, além de eliminar o problema de colisão. Assim sendo, chegou-se ao seguinte arranjo físico do SRC, cujos níveis relativos à localização das bases de cada robô estão apresentados na Fig. 36.

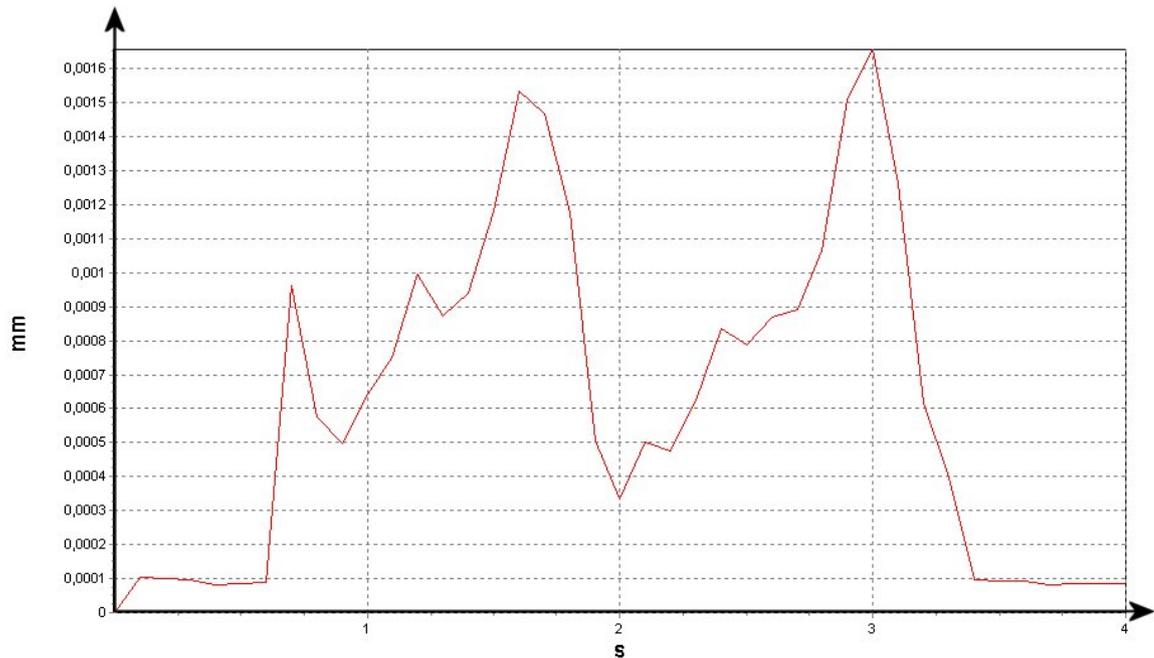


**Figura 36:** Arranjo final para o SRC, posição relativa entre os robôs

Assim sendo, foi realizada nova simulação e as análises são apresentadas a seguir.

### 5.3.2.1 Análise do erro total de posição

A Fig. 37 apresenta a saída gráfica do erro total de posição em relação à tarefa 1-2. O erro total é a composição do erro em cada coordenada de posição, ou seja, é raiz quadrada da soma dos quadrados dos erros de posição nas direções x, y e z. Note que o erro total máximo obtido é da ordem de 0,0016 mm.



**Figura 37:** Erro total de posição da tarefa 1-2 com cooperação simultânea

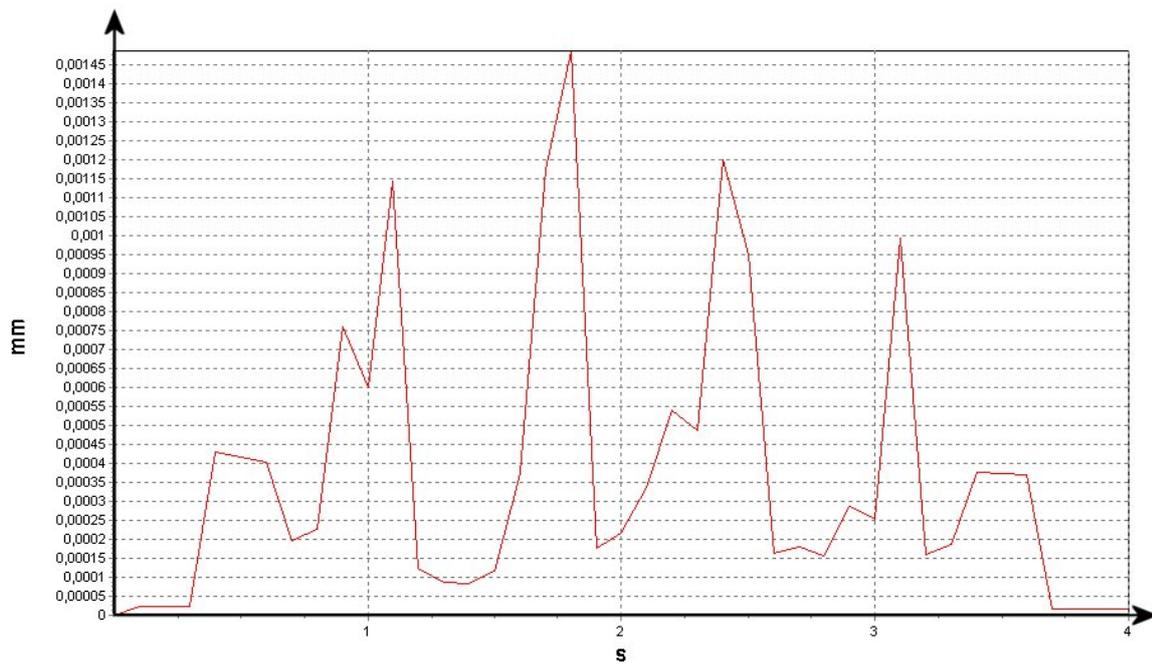
A Fig. 38 apresenta o erro total de posição entre o ponto desejado e o obtido, durante a realização da tarefa 1-3, o losango. Note que o erro máximo é de 0,0015 mm.

Finalmente segue a análise da tarefa 1-4, ou seja, o retângulo sobre a superfície cilíndrica lateral, a ser executada em cooperação entre o robô posicionador da peça e o robô posicionador 4, o robô STAUBLI RX90. A Fig. 39 apresenta o gráfico do erro total ao longo do tempo de simulação de 4 s, que apresenta valor máximo de 0,0015 mm.

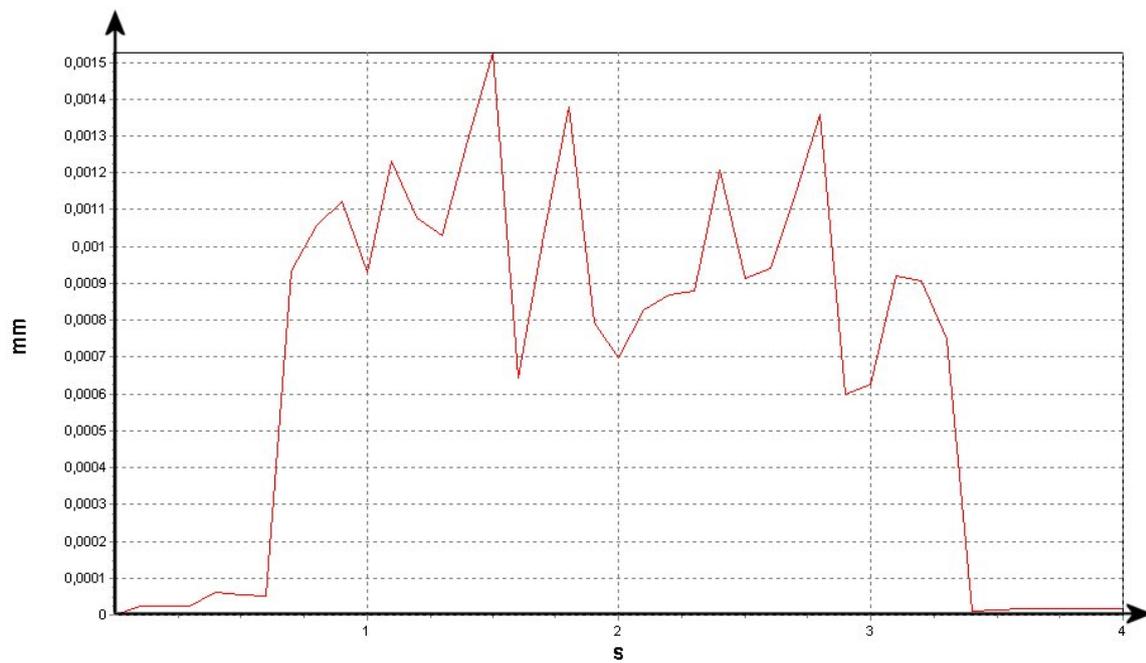
A seguir encontram-se apresentados os gráficos de erros de posição e orientação numa escala automática tendo como limites, os valores máximos e mínimos obtidos na simulação, ou seja, a Fig. 40 apresenta os erros associados à tarefa 1-2, enquanto as Fig. 41 e 42 estão associadas às tarefas 1-3 e 1-4, respectivamente.

### 5.3.2.2 Cinemática inversa do robô REIS

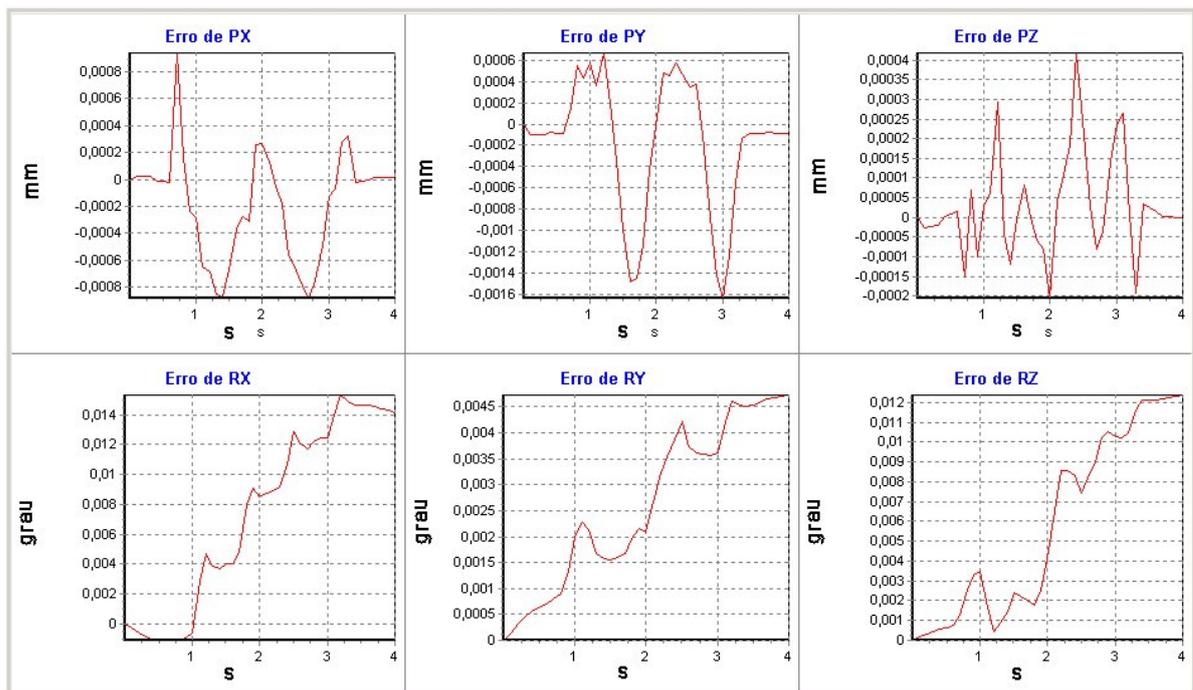
A Fig. 43 apresenta os gráficos das posições de cada uma das seis juntas do robô posicionador da peça, que consiste na resolução da cinemática inversa do robô REIS RV20-16.



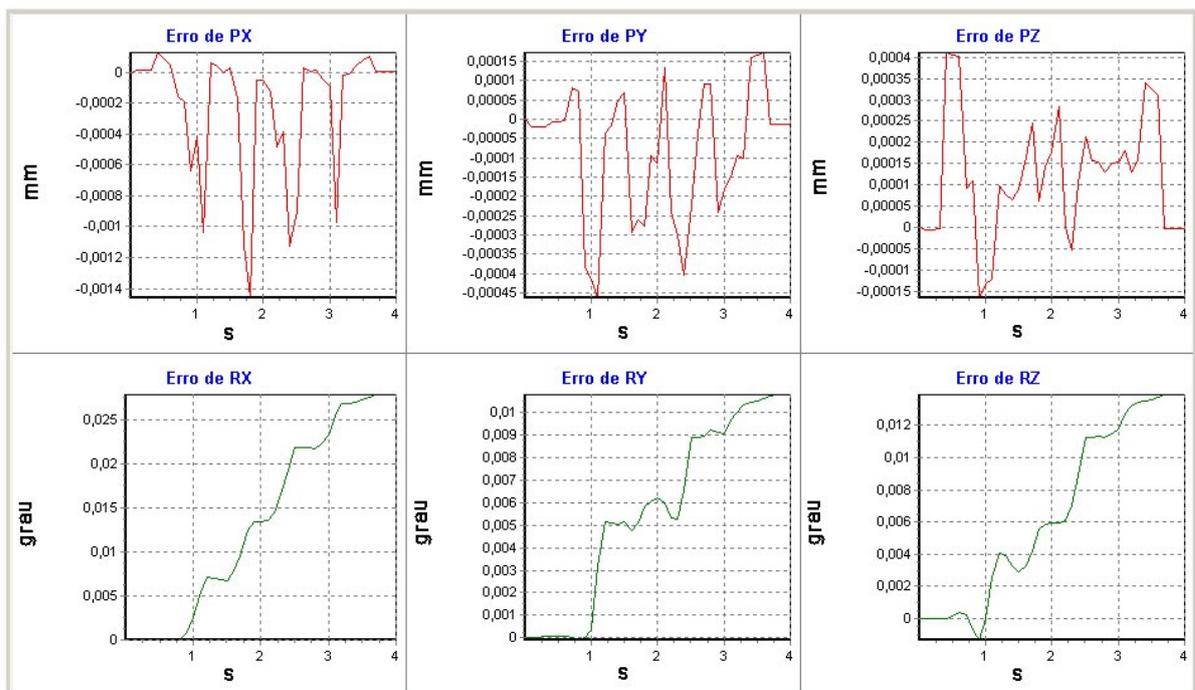
**Figura 38:** Erro total de posição da tarefa 1-3 com cooperação simultânea



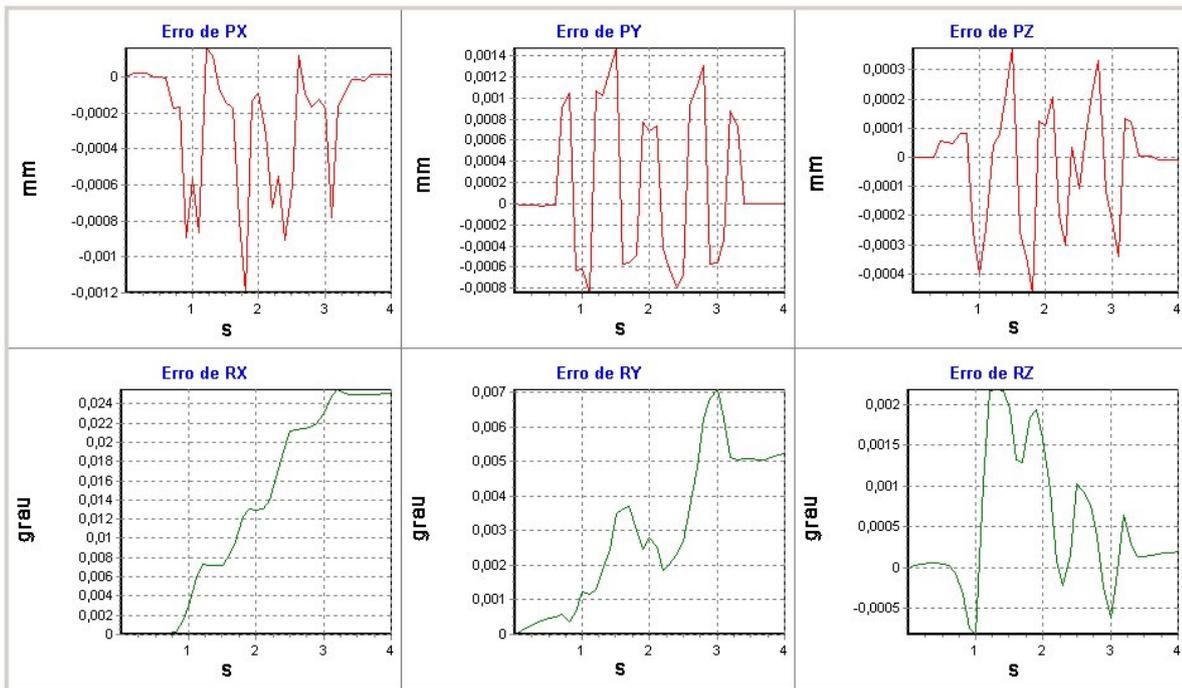
**Figura 39:** Erro total de posição da tarefa 1-4 com cooperação simultânea



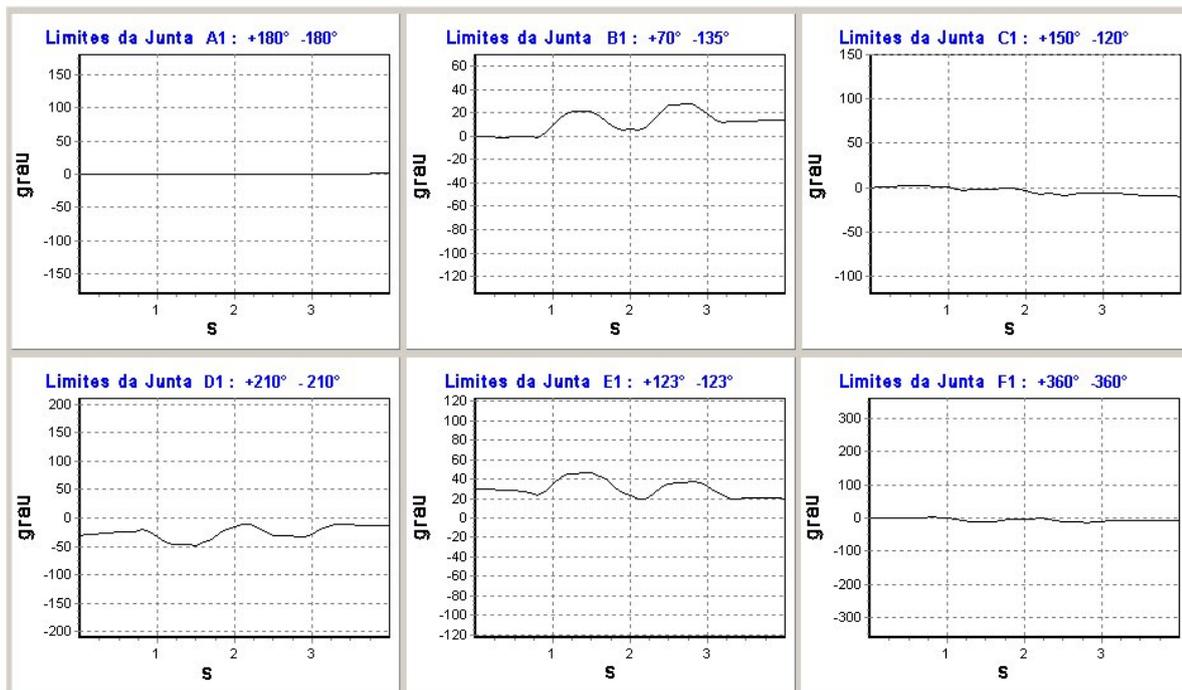
**Figura 40:** Escala automática nos gráficos de erros de posição e orientação na tarefa 1-2 com cooperação simultânea



**Figura 41:** Escala automática nos gráficos de erros de posição e orientação na tarefa 1-3 com cooperação simultânea



**Figura 42:** Escala automática nos gráficos de erros de posição e orientação na tarefa 1-4 com cooperação simultânea

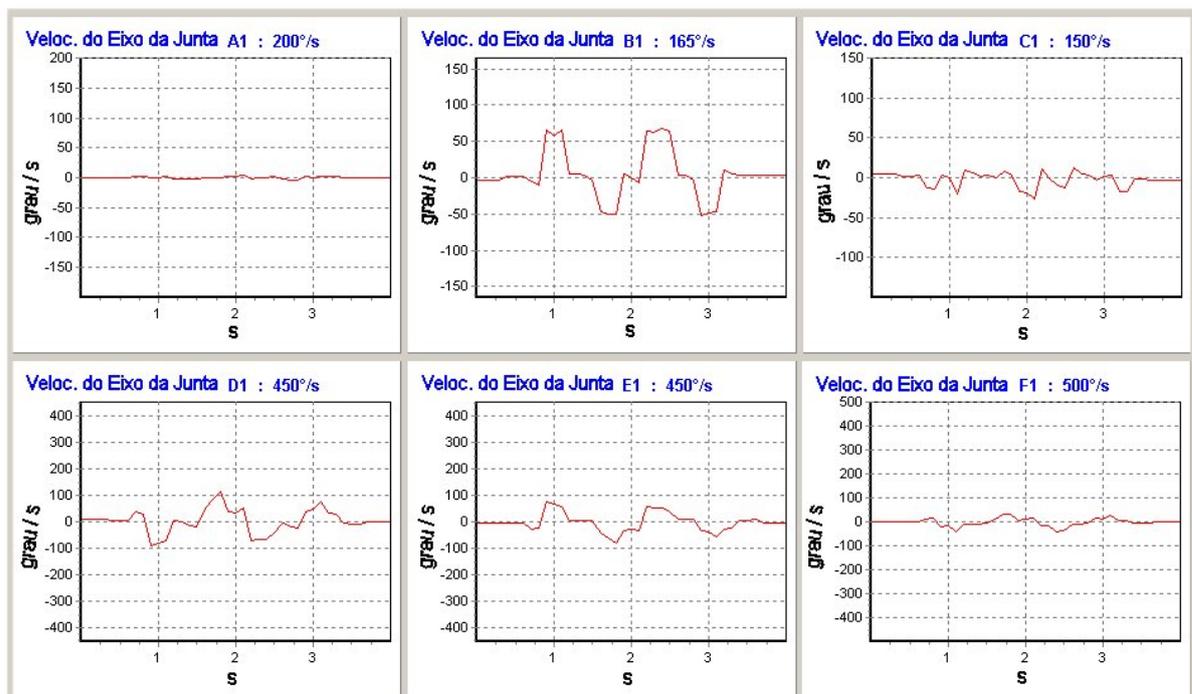


**Figura 43:** Posições das juntas do REIS manipulando a peça na cooperação simultânea

Note que a escala de cada gráfico está fixada com os respectivos limites superior e inferior de cada junta, para permitir a análise do quão próximo a posição de cada está dos seus respectivos limites, além de mostrar que a tarefa pode ser cumprida em função de não extrapolar os limites de juntas.

### 5.3.2.3 Cinemática diferencial inversa do robô REIS

A Fig. 44 apresenta o gráfico das velocidades das juntas do robô posicionador da peça. Note que as escalas são distintas em algumas juntas, pois cada escala é função do limite de velocidade correspondente a cada junta do manipulador estabelecida pelo fabricante (REIS-RV20-16, 2008), que se encontram expostos na parte superior de cada gráfico.



**Figura 44:** Velocidades das juntas do REIS manipulando a peça na cooperação simultânea

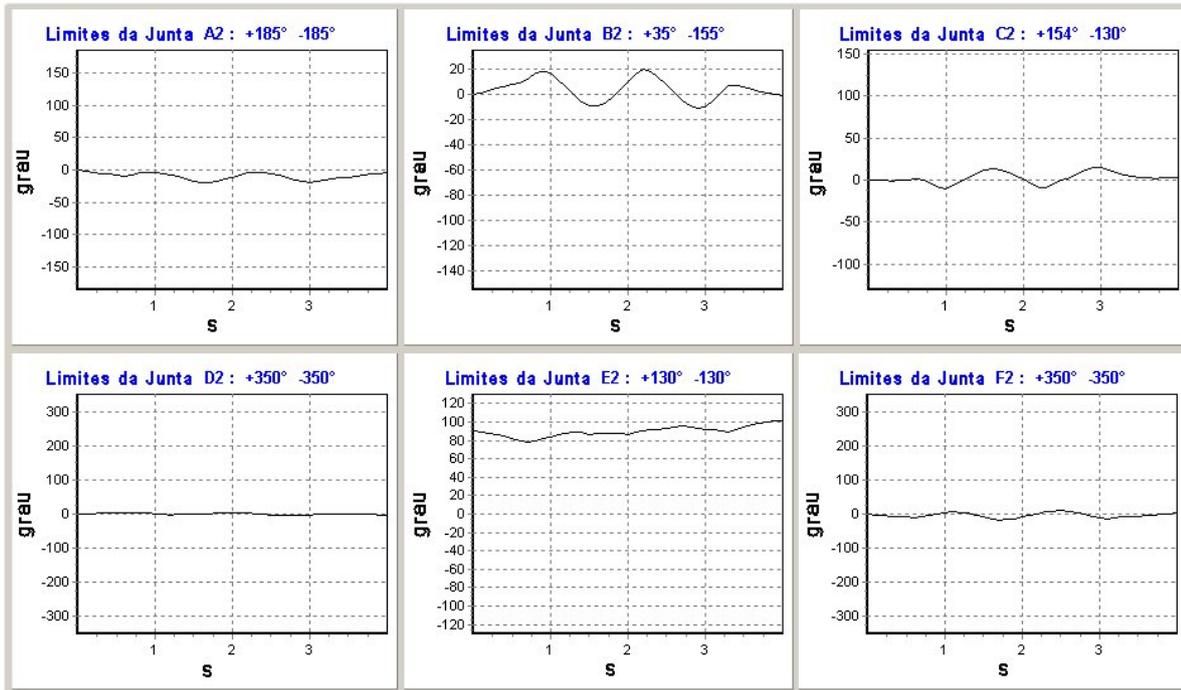
Cabe uma observação da intencionalidade de provocar variações acentuadas de velocidades, visto que reduziu-se propositalmente o tempo total de simulação (4 s), supondo um aumento de demanda hipotético em que precise de maior produtividade do SRC

### 5.3.2.4 Cinemática inversa do robô KUKA

Segue a apresentação dos resultados da simulação para o robô operador 2, ou seja a resolução da cinemática inversa para o KUKA KR6.

A Fig. 45 apresenta os gráficos das posição das juntas na base do tempo do robô operador 2

com escala fixada em função dos limites de cada junta estabelecidos pelo fabricante (KUKA-KR6, 2008).



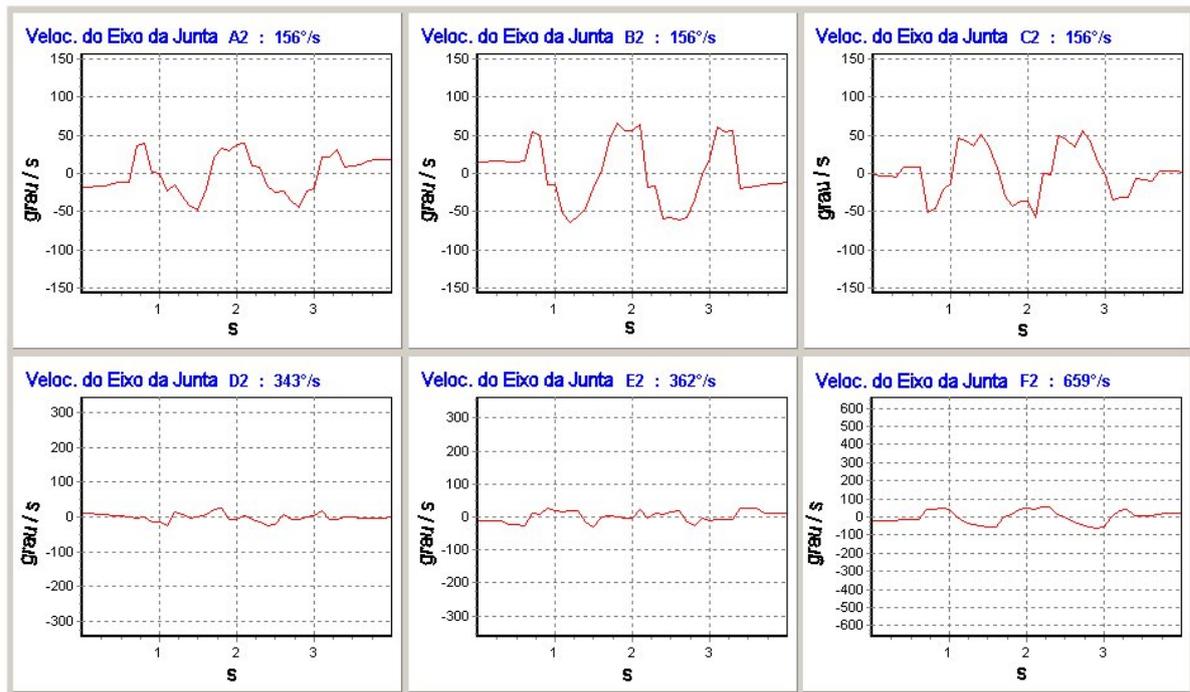
**Figura 45:** Posições das juntas do KUKA nas tarefa 1-2 com cooperação simultânea

A ferramenta de simulação permite observar diversos fatores em função dos gráficos obtidos. Voltando o foco da atenção à Fig. 45, mais especificamente nos gráficos das juntas *B2* e *E2* é possível observar, que estão operando próximos aos respectivos limites de junta, entretanto isto acontece pelas condições iniciais adotadas pelo projetista do *layout*, na montagem do arranjo físico dos robôs na célula robótica, ou seja os resultados obtidos podem servir como indicadores da qualidade do arranjo físico estabelecido, podendo mostrar a necessidade de se alterar a posição no chão-de-fábrica do KUKA, de modo que cause um efeito de afastar a faixa de trabalho, dos limites de junta. Assim sendo a simulação do modelo proposto pode ser uma ferramenta útil no projeto do arranjo físico da célula de fabricação robotizada.

### 5.3.2.5 Cinemática diferencial inversa do robô KUKA

A Fig. 46 apresenta o perfil de velocidade que cada junta do KUKA deve seguir, de modo que a tarefa seja cumprida. A escala dos gráficos é estabelecida pela velocidade máxima de cada junta fornecida pelo fabricante (KUKA-KR6, 2008).

A seguir são apresentados os gráficos relativos à tarefa 1-3, o losango sobre a face plana YZ. Como o robô posicionador o REIS já foi apresentado pelas Figs. 43 e 44, segue a apresentação da resolução da cinemática e da cinemática diferencial inversas do robô operador 3.



**Figura 46:** Velocidades das juntas do KUKA na tarefa 1-2 com cooperação simultânea

### 5.3.2.6 Cinemática inversa do robô ABB

A Fig. 47 apresenta os gráficos representativos das posições das juntas na base do tempo, tendo como escala os valores máximos e mínimos obtidos correspondente a cada junta. Note que novamente surge um indicador que mostra ao projetista do *layout* que poderia procurar um arranjo físico no chão-de-fábrica mais adequado para o ABB IRB1600X120 que favorecesse as juntas *B3* e *C3*. Poderia também experimentar mudar a posição inicial das juntas em questão de modo a aproximá-las das faixa central em torno de  $40^\circ$  e  $90^\circ$ , respectivamente.

### 5.3.2.7 Cinemática diferencial inversa do robô ABB

Feita a análise dos resultados em torno da posição, seguem os resultados na forma gráfica do perfil de velocidade de cada junta do ABB na base do tempo.

A Fig. 48 apresenta as velocidades com escala automática em função dos limites de velocidades de cada junta do robô ABB. Note que os perfis de velocidade das juntas *B3* e *C3* apresentam variações bruscas de valores em tempo reduzido, o que exigirá bastante dos motores das juntas, bem como dos controladores dos motores para que esses perfis sejam seguidos.

Finalmente segue a análise da tarefa 1-4, ou seja, o retângulo sobre a superfície cilíndrica lateral, a ser executada em cooperação entre o robô posicionador da peça e o robô posicionador 4, o robô STAUBLI RX90.

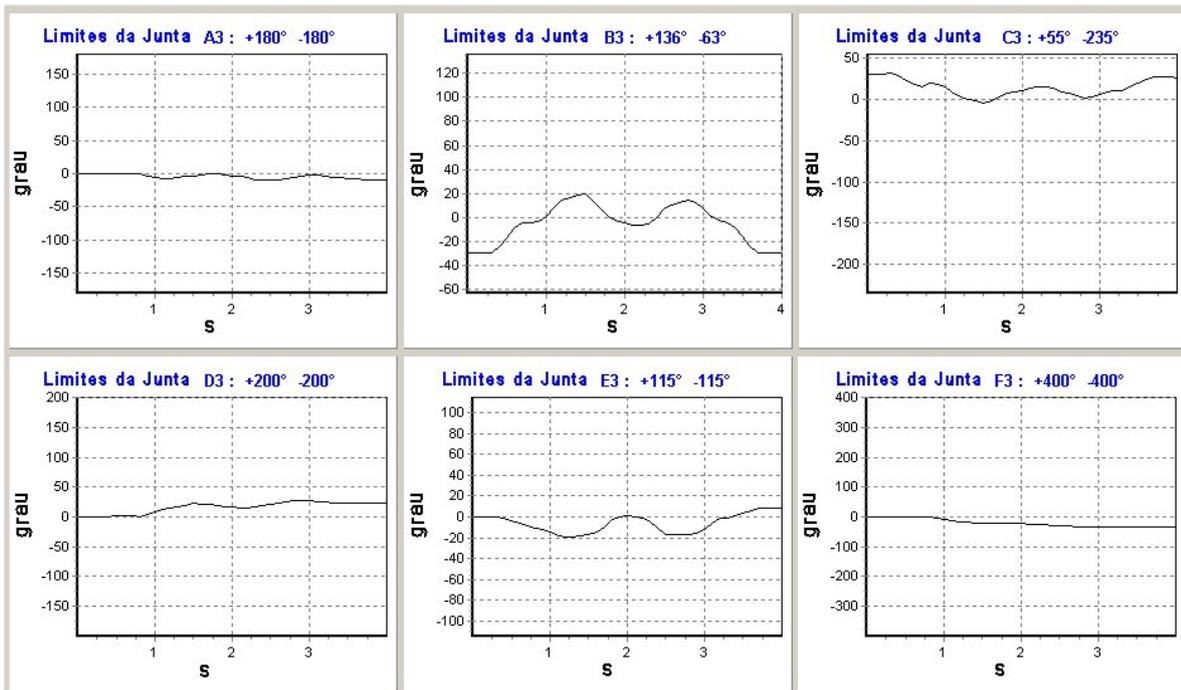


Figura 47: Posições das juntas do ABB nas tarefa 1-3 com cooperação simultânea

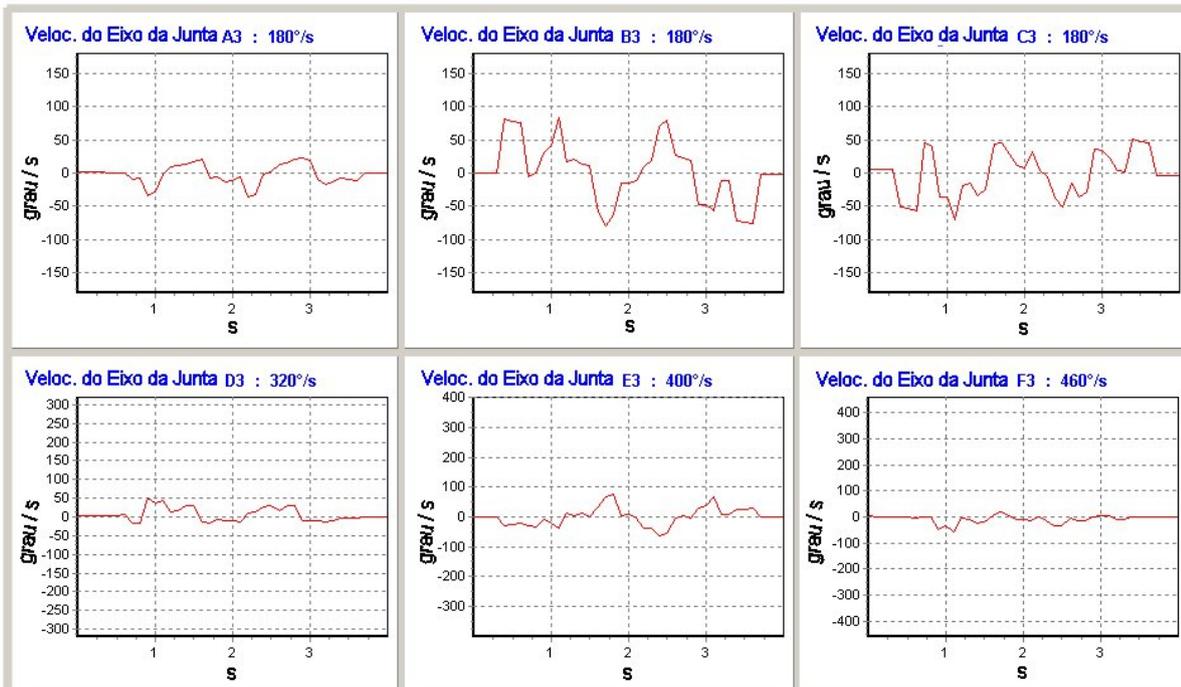
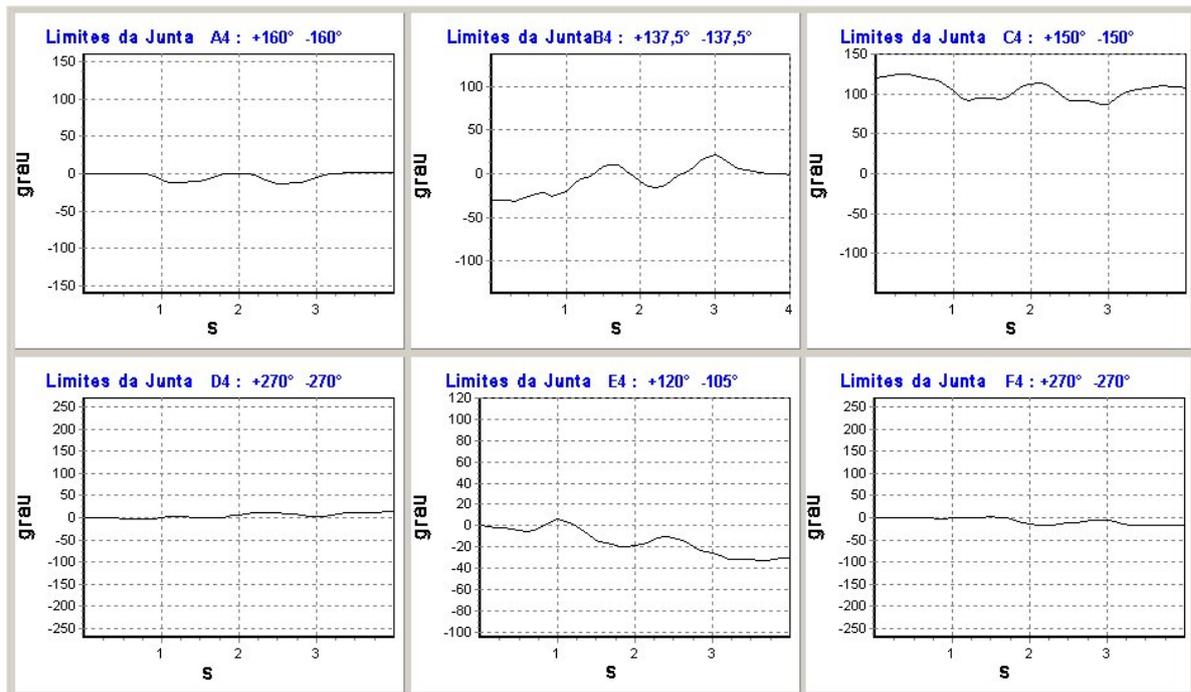


Figura 48: Velocidades das juntas do ABB na tarefa 1-3 com cooperação simultânea

### 5.3.2.8 Cinemática inversa do robô STAUBLI

A Fig. 49 apresenta os gráficos das posições de cada junta do robô STAUBLI ao longo do tempo. Note que a junta *C4* é a que trabalha mais próxima do limite superior da junta, o que poderia motivar uma análise de possível ajuste no arranjo físico do STAUBLI no chão-de-fábrica, ou na posição inicial de suas juntas.

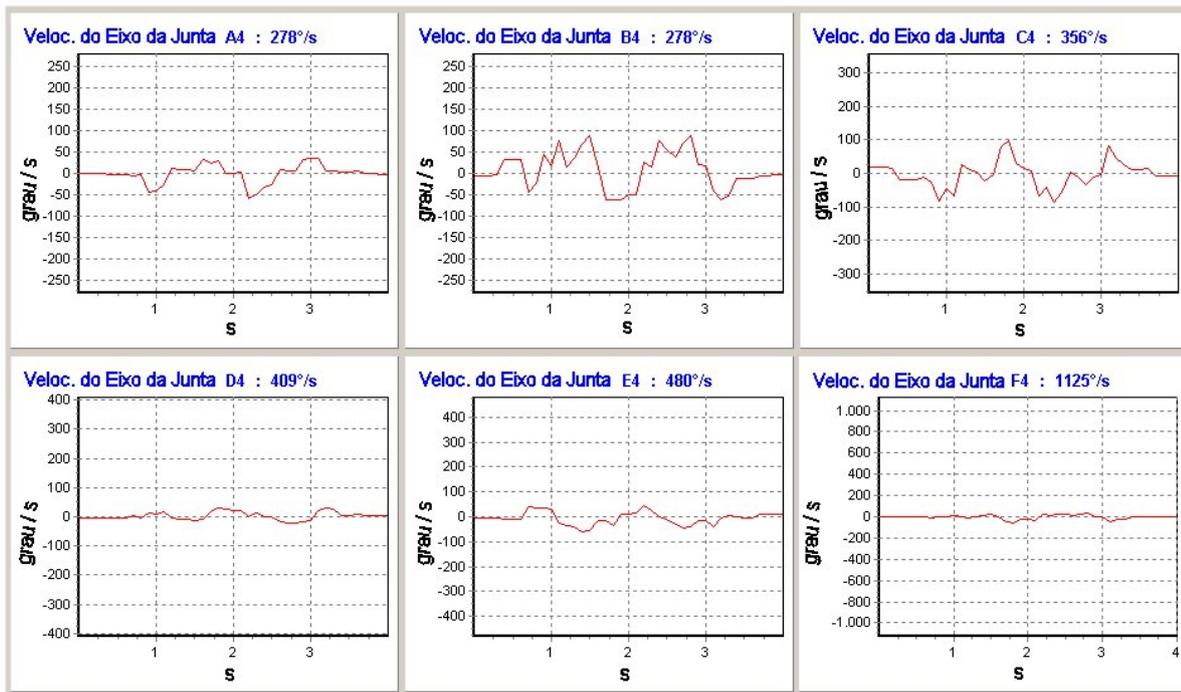


**Figura 49:** Posições das juntas do STAUBLI nas tarefa 1-4 com cooperação simultânea

### 5.3.2.9 Cinemática diferencial inversa do robô STAUBLI

Feita a análise dos resultados em torno da posição, seguem os resultados na forma gráfica do perfil de velocidade de cada junta do robô STAUBLI na base do tempo. Novamente cabe ressaltar, que o tempo de simulação está propositalmente reduzido, para fim de comparação futura.

A Fig. 50 apresenta as velocidades tendo como escala, o limite de velocidade de cada junta do robô STAUBLI fornecida pelo fabricante (STAUBLI-RX90L, 2008). Note que os perfis de velocidade das juntas *B4* e *C4* apresentam variações bruscas de valores em tempo reduzido, o que exigirá bastante dos motores das juntas, bem como dos controladores dos motores para que esses perfis sejam seguidos.



**Figura 50:** Velocidades das juntas do STAUBLI na tarefa 1-4 com cooperação simultânea

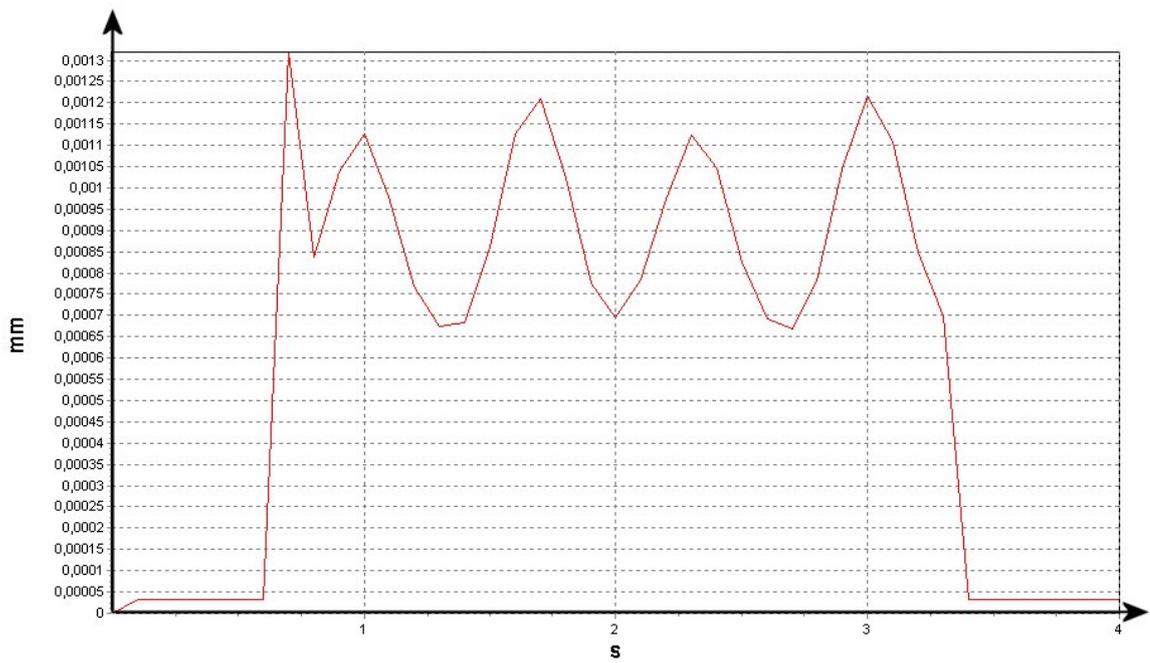
## 5.4 SRC com 2 Robôs e 1 Tarefa por vez - MODO 2

Segue um conjunto resultados de simulações onde cada tarefa é realizada separadamente das demais. Assim sendo, o robô posicionador da peça, o REIS passa a colaborar para a execução de apenas uma tarefa por vez, juntamente com o robô operador responsável pela tarefa em análise. Encontram-se apresentados gráficos do erro total em cada tarefa executada pelos robôs REIS e KUKA; REIS e ABB; e REIS e STAUBLI.

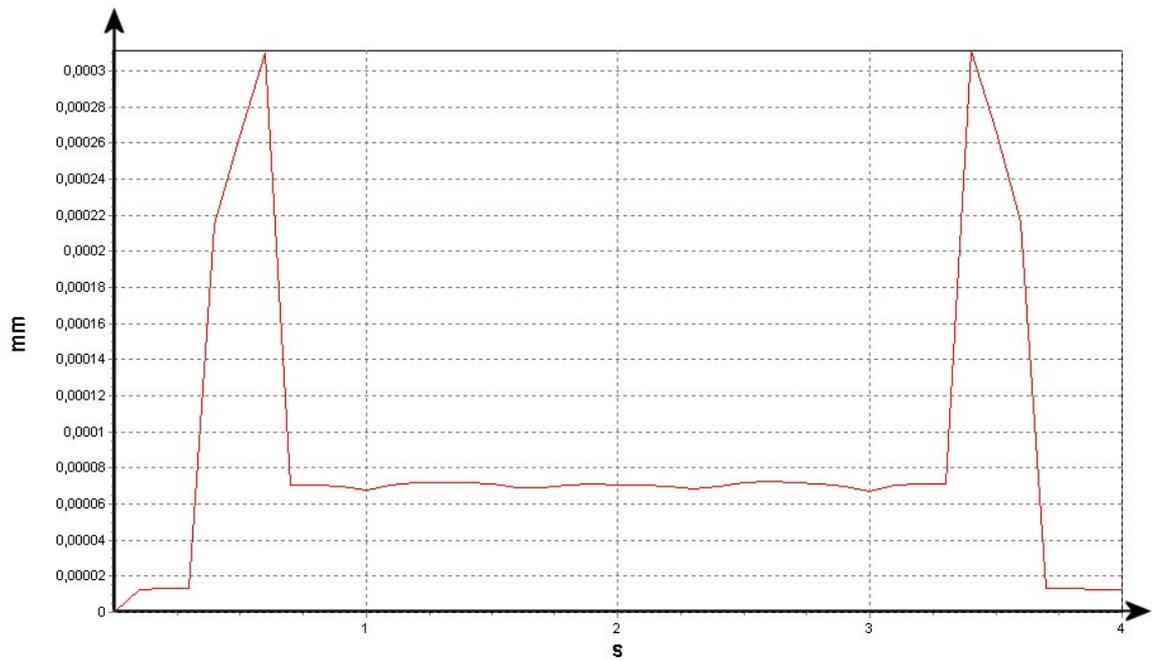
A Fig. 51 apresenta o erro total de posição da execução da circunferência. Note que o erro máximo obtido é da ordem de 0,0013 mm. Comparando com o valor obtido de 0,0016 mm apresentado na Fig. 37, pode-se concluir que apesar de haver uma pequena diminuição do erro, não se configura como um fator que sustente a não utilização das três tarefas simultaneamente, ou seja, neste caso, as outras duas tarefas não influencia significativamente no erro total da tarefa analisada.

A Fig. 52 apresenta o gráfico do erro total de posição que tem seu valor máximo em 0,0003 mm. Comparando com o valor apresentado na Fig. 38 que é próximo à 0,0015 mm, conclui-se que houve diminuição do erro, entretanto como nos casos anteriores, a ordem de grandeza do erro é pequena o suficiente para torná-lo irrelevante.

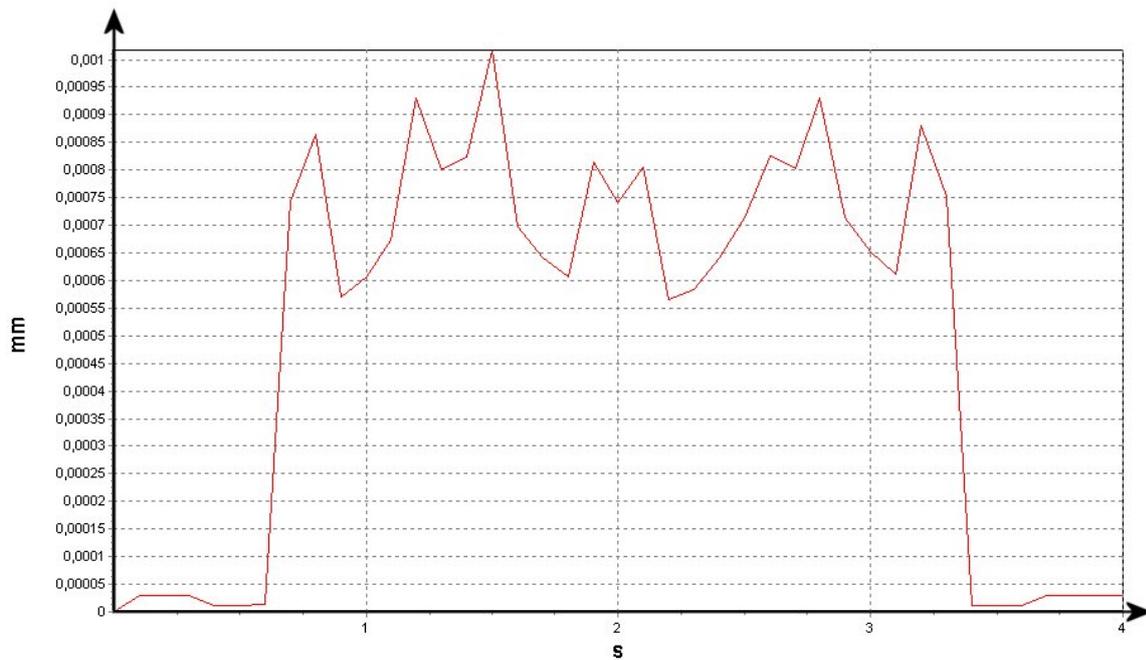
A Fig. 53 apresenta o erro total de posição que tem seu máximo em 0,001 mm, enquanto o erro máximo apresentado na Fig. 39 com cooperação simultânea entre as três tarefas é de 0,0015 mm.



**Figura 51:** Erro total de posição da tarefa 1-2 com cooperação isolada



**Figura 52:** Erro total de posição da tarefa 1-3 com cooperação isolada



**Figura 53:** Erro total de posição da tarefa 1-4 com cooperação isolada

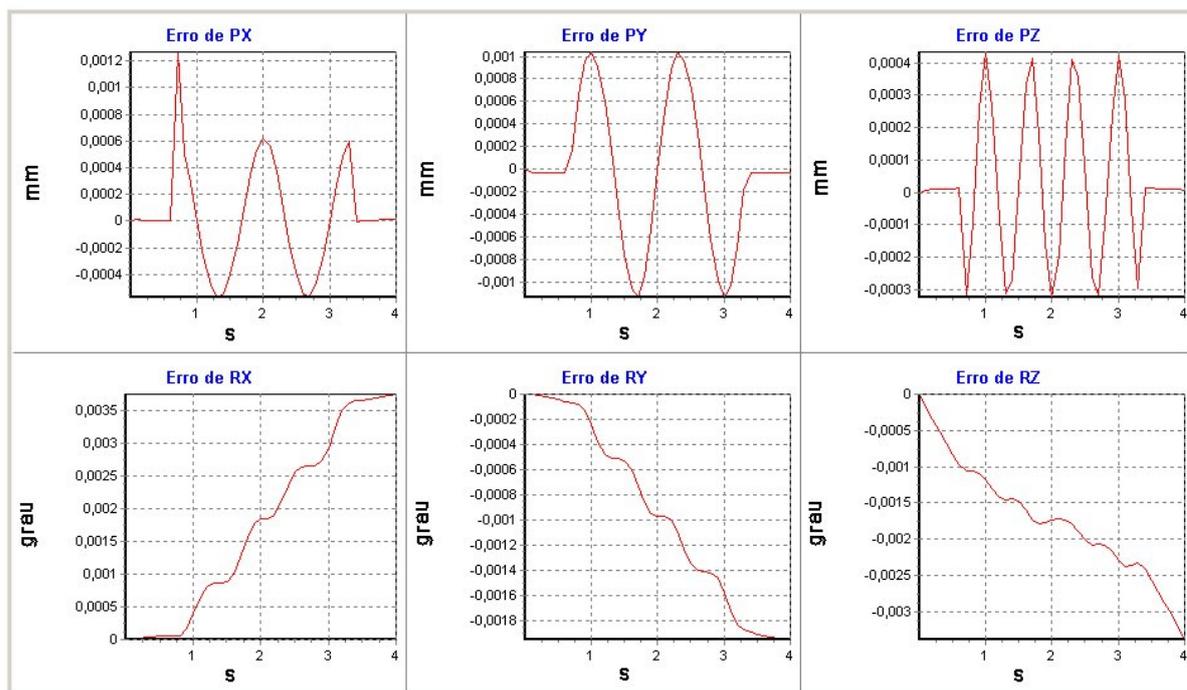
Segue um conjunto resultados de simulações onde são apresentados gráficos de erros em cada tarefa dos robôs REIS e KUKA (tarefa 1-2); REIS e ABB (tarefa 1-3); e REIS e STAUBLI (tarefa 1-4). Com isso é possível comparar resultados apresentados no Estudo de Caso, na simulação da cooperação simultânea entre os quatro robôs.

#### 5.4.1 Tarefa 1-2 - Circunferência - REIS e KUKA

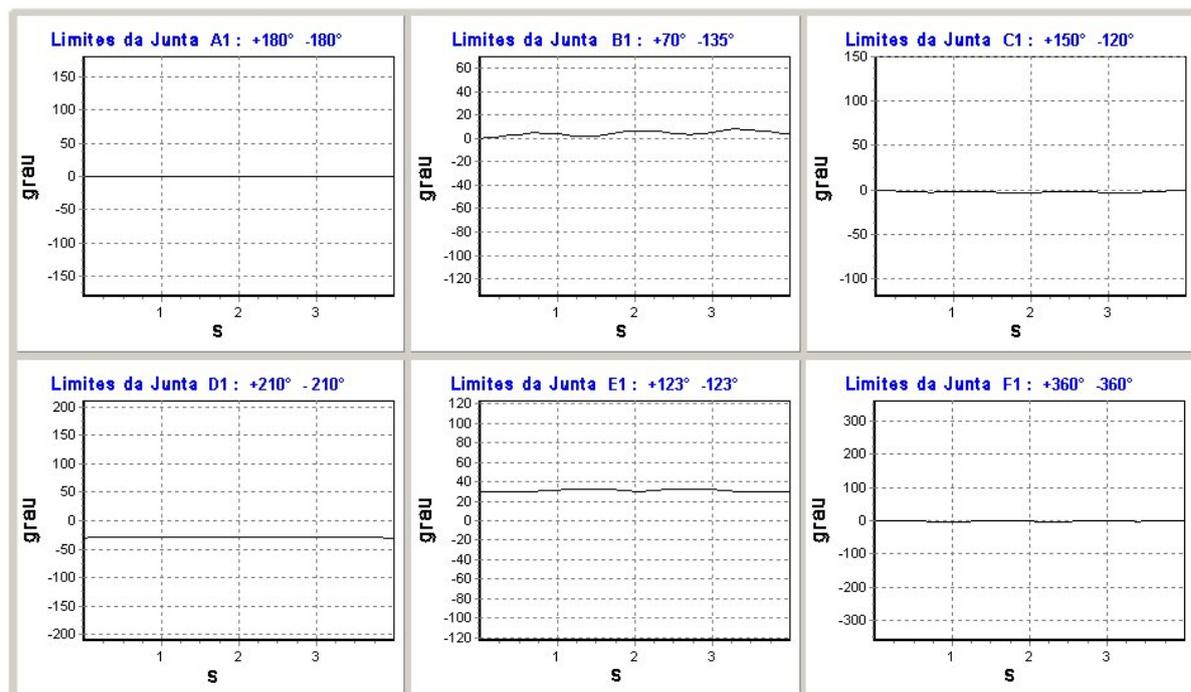
A Fig. 54 apresenta os erros de posição e orientação com escala de representação em função dos valores máximos e mínimos obtidos na simulação.

##### 5.4.1.1 Cinemática inversa do robô REIS

A Fig. 55 apresenta os gráficos correspondente à resolução da cinemática inversa de cada junta do robô posicionador da peça, o REIS, que nesta simulação é dedicado a posicionar a peça objetivando somente à realização da tarefa 1-2 em conjunto com o KUKA. É possível comparar estes resultados com os apresentados na Fig. 43, onde o REIS coopera simultaneamente em prol da realização de três tarefas. Observe as juntas  $B1$ ,  $D1$  e  $E1$  nas Fig. 43, note que existe um efeito acumulado das três tarefas, o que exige maior participação de movimento por conta destas três juntas em questão do REIS. Observe as mesmas juntas  $B1$ ,  $D1$  e  $E1$  na Fig. 55 onde o REIS é bem menos exigido, pois somente está cooperando com um único robô, o KUKA. Neste ponto aparece uma vantagem relevante em executar a tarefa em separado das demais, mas em contrapartida é óbvio que o tempo multiplicar-se-ia por três.



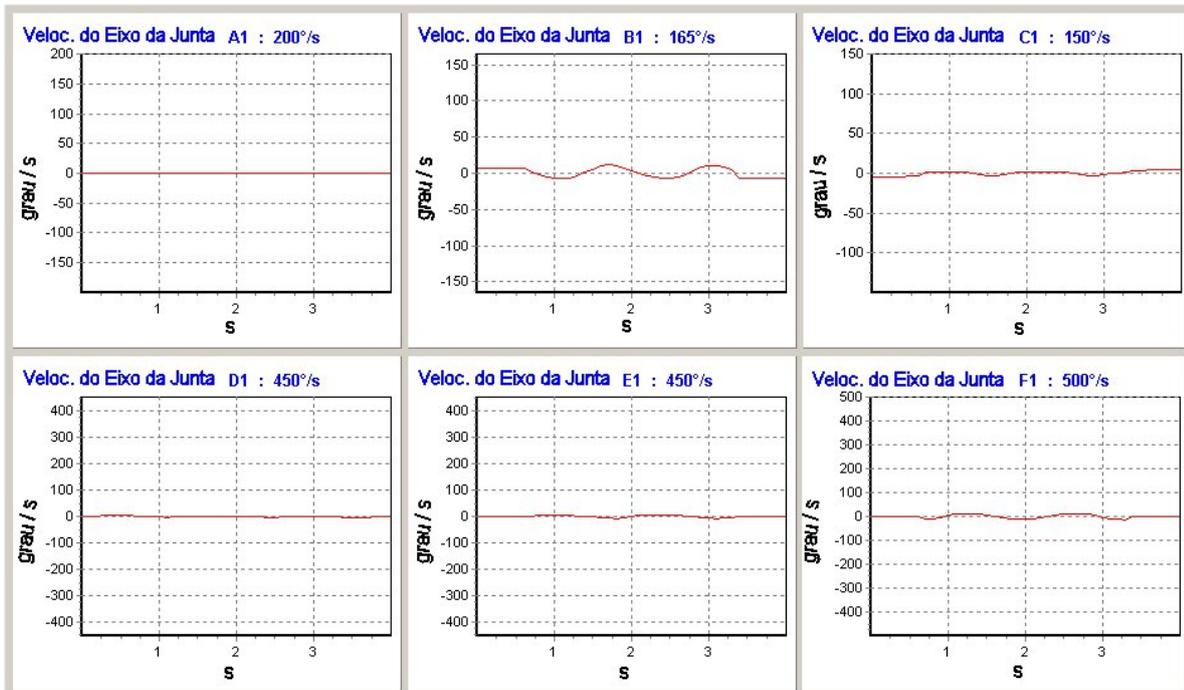
**Figura 54:** Escala automática nos gráficos de erros de posição e orientação na tarefa 1-2 com cooperação isolada



**Figura 55:** Posições das juntas do REIS manipulando a peça na cooperação isolada

### 5.4.1.2 Cinemática diferencial inversa do robô REIS

Feita a análise da posição das juntas do REIS, segue a resolução da cinemática diferencial inversa do robô posicionador. A Fig. 56 mostra o perfil de velocidades das juntas que o REIS deve seguir para executar a tarefa 1-2.



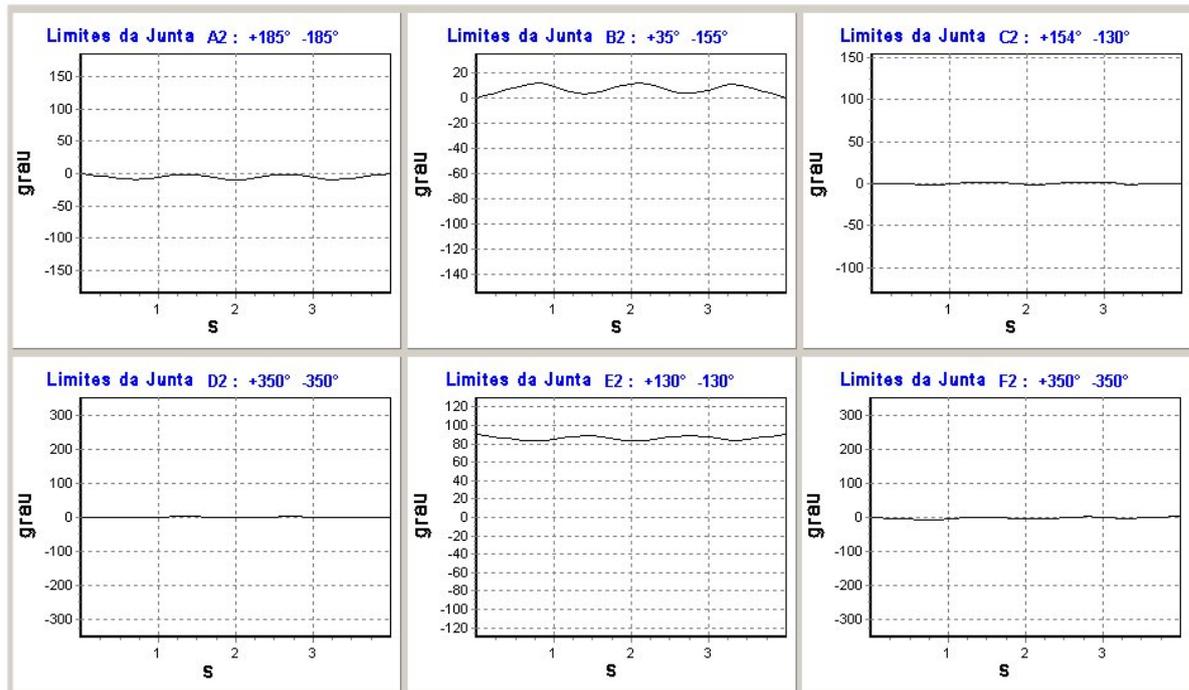
**Figura 56:** Velocidades das juntas do REIS manipulando a peça na cooperação isolada

É possível fazer comparação entre os resultados apresentados nas Fig. 56 e Fig. 44. Note que o perfil de velocidades que o controlador de cada junta deverá seguir é bem mais suave na Fig. 56, e mais acentuado na Fig. 44, o que exigirá mais dos controladores e dos motores das juntas a fim de manter o perfil obtido na simulação. É possível concluir neste caso, que é mais vantajoso fazer todas as três tarefas simultaneamente quando se considera o tempo, entretanto os gráficos mostram que as três tarefas simultaneamente exigem mais dos controladores dos motores e dos motores das juntas do robô posicionador da peça, o REIS.

### 5.4.1.3 Cinemática inversa do robô KUKA

A Fig. 57 apresenta os gráficos correspondente à resolução da cinemática inversa por junta do robô operador 2, o KUKA, que nesta simulação é dedicado a realizar a tarefa 1-2 em conjunto com o REIS. Compare os resultados das juntas B2 e C2 apresentados na Fig. 57 com os resultados das mesmas juntas apresentados na Fig. 45. Nesta é possível notar que apresentam comportamento bem mais acentuado devido ao acoplamento existente da tarefa 1-2 com as demais tarefas pela simultaneidade de execução, e no caso da junta B2 o efeito combinado das

tarefas faz com que a junta trabalhe mais próxima do seu limite superior de junta estabelecido pelo fabricante. Como conclusão, é preciso quantizar o efeito simultaneidade.



**Figura 57:** Posições das juntas do KUKA nas tarefa 1-2 com cooperação isolada

#### 5.4.1.4 Cinemática diferencial inversa do robô KUKA

Feita a análise da posição das juntas do KUKA, segue a resolução da cinemática diferencial inversa do robô operador 2. A Fig. 58 mostra o perfil de velocidades das juntas que o KUKA deve seguir para executar a tarefa 1-2. Compare estes resultados com os apresentados na Fig. 46 e observe que houve mudança acentuada no perfil das velocidades devido ao acoplamento entre as três tarefas na cooperação simultânea, ou seja, o perfil de velocidade apresentado na Fig. 58 para o KUKA é bem mais suave o que facilita a função do controlador e dos motores das juntas.

#### 5.4.2 Tarefa 1-3 - Losango - REIS e ABB

Encontram-se apresentados os resultados da simulação da cooperação entre o REIS e o ABB, atuando de modo a realizar somente a tarefa 1-3, que consiste no seguimento de uma trajetória na forma de um losango sobre a face plana YZ do cilindro.

A Fig. 59 apresenta os erros de posição e orientação com escala automática em função dos valores máximos e mínimos obtidos na simulação.

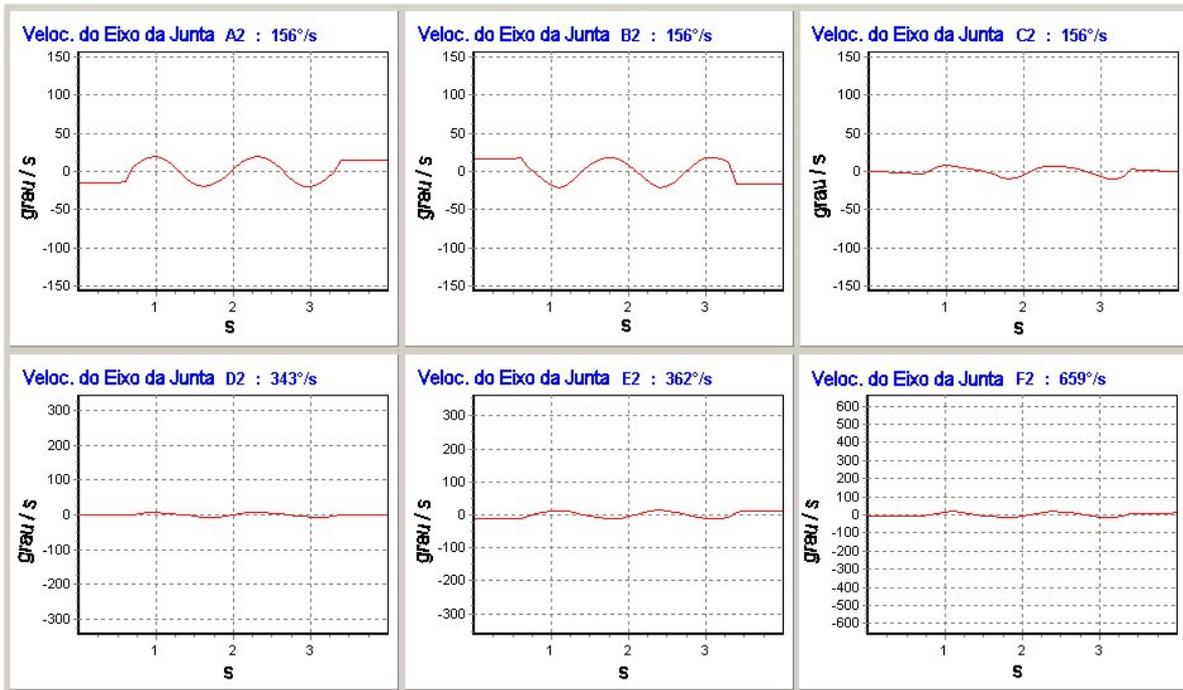


Figura 58: Velocidades das juntas do KUKA na tarefa 1-2 com cooperação isolada

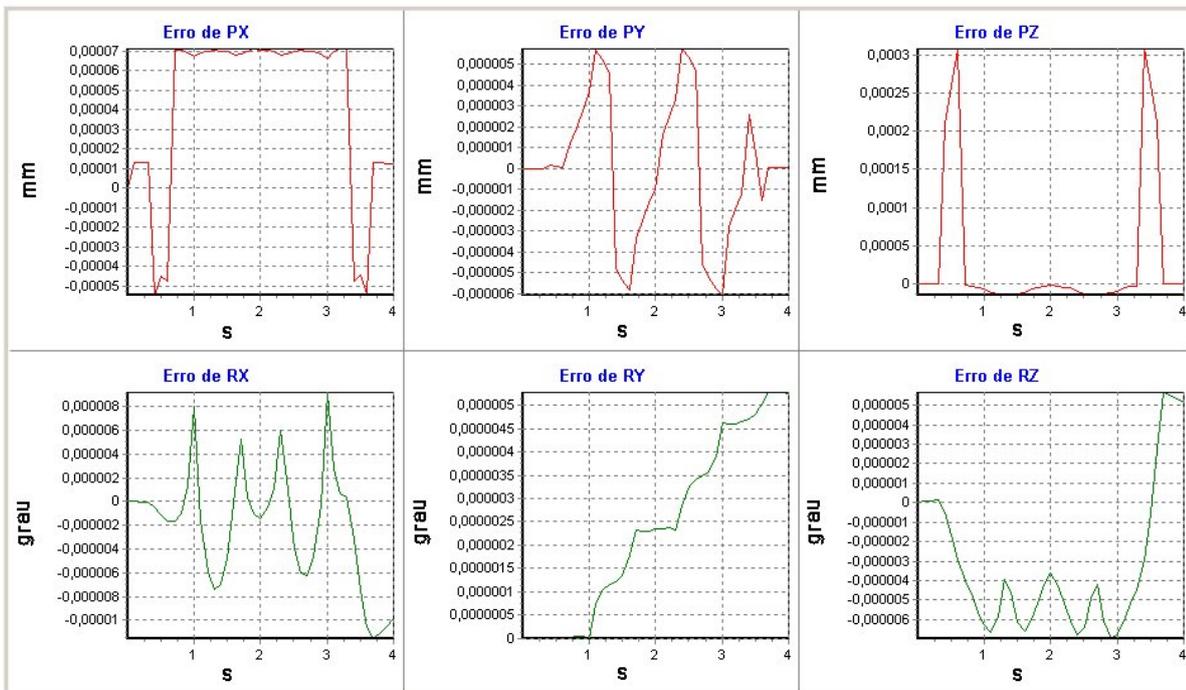
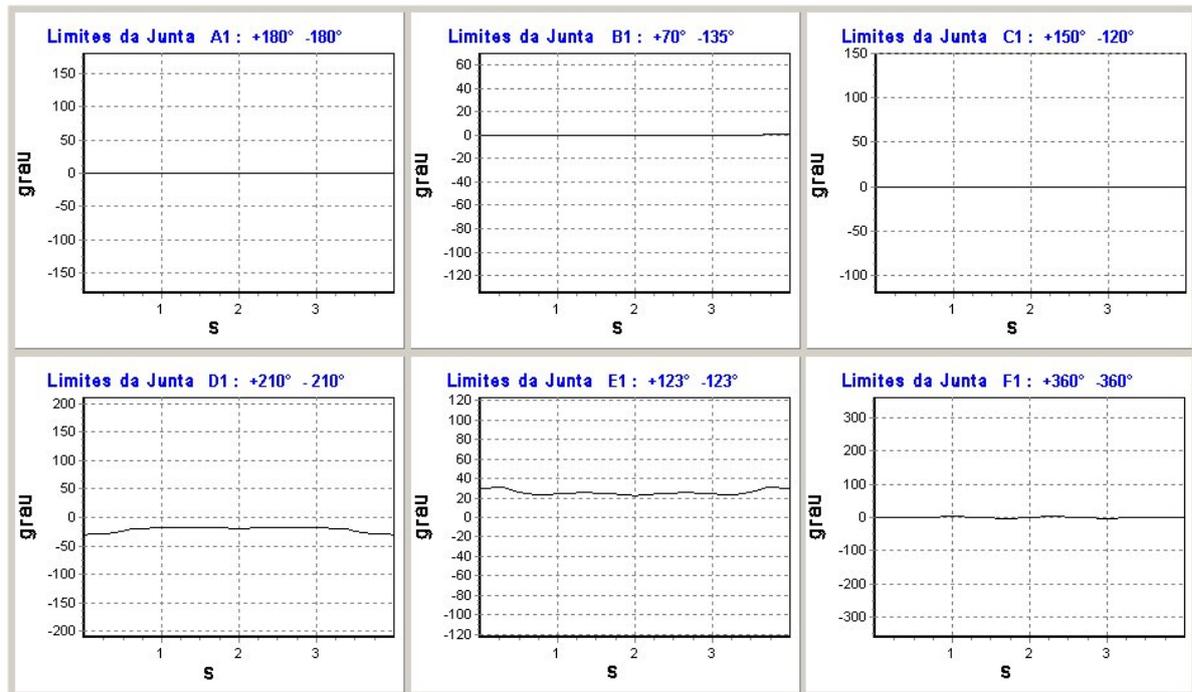


Figura 59: Escala automática dos erros nos gráficos de erros de posição e orientação na tarefa 1-3 com cooperação isolada

### 5.4.2.1 Cinemática inversa do robô REIS

A Fig. 60 apresenta os gráficos correspondentes à resolução da cinemática inversa por junta do robô posicionador da peça, o REIS, que nesta simulação é dedicado a posicionar a peça objetivando somente à realização da tarefa 1-3 em conjunto com o KUKA. Note que, neste caso, o REIS contribui com o movimento de praticamente duas juntas ( $D1$  e  $E1$ ).



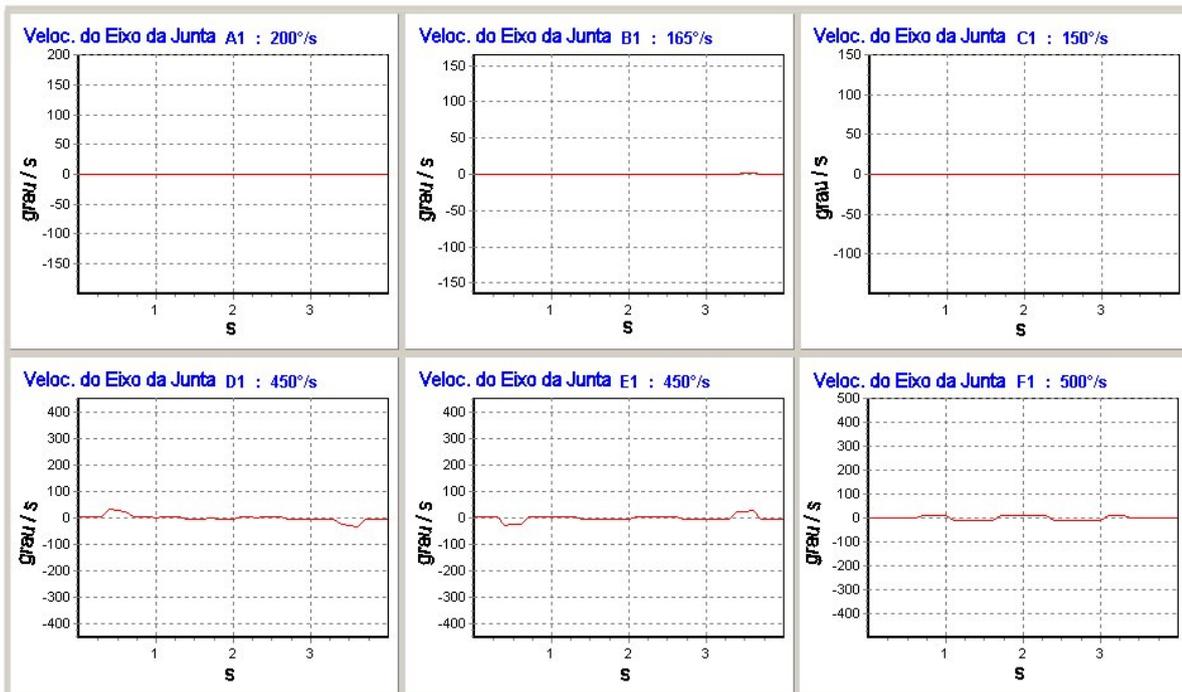
**Figura 60:** Posições das juntas do REIS manipulando a peça na cooperação isolada

### 5.4.2.2 Cinemática diferencial inversa do robô REIS

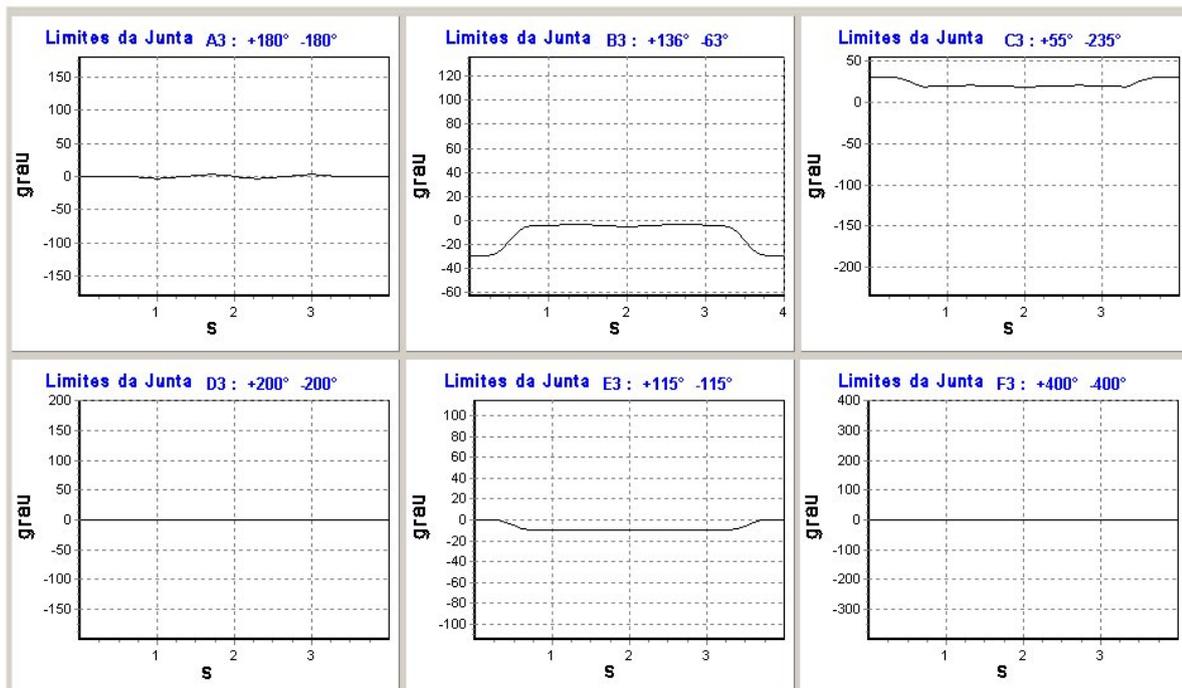
Feita a análise da posição das juntas do REIS, segue a resolução da cinemática diferencial inversa do robô posicionador. A Fig. 61 mostra o perfil de velocidades das juntas que o REIS deve seguir para executar a tarefa 1-3. Note que, neste caso, a exigência sobre o REIS é bem menor que a apresentada na Fig. 44, que se mostra bem mais acentuada por conta das três tarefas sendo executadas simultaneamente.

### 5.4.2.3 Cinemática inversa do robô ABB

A Fig. 62 apresenta os gráficos correspondente à resolução da cinemática inversa por junta do robô operador 3, o ABB, que nesta simulação é dedicado a realizar a tarefa 1-3, em conjunto com o REIS. Seguindo a tendência lógica, o ABB é menos exigido quando comparado aos resultados apresentados em cooperação com as três tarefas simultaneamente (Fig. 47).



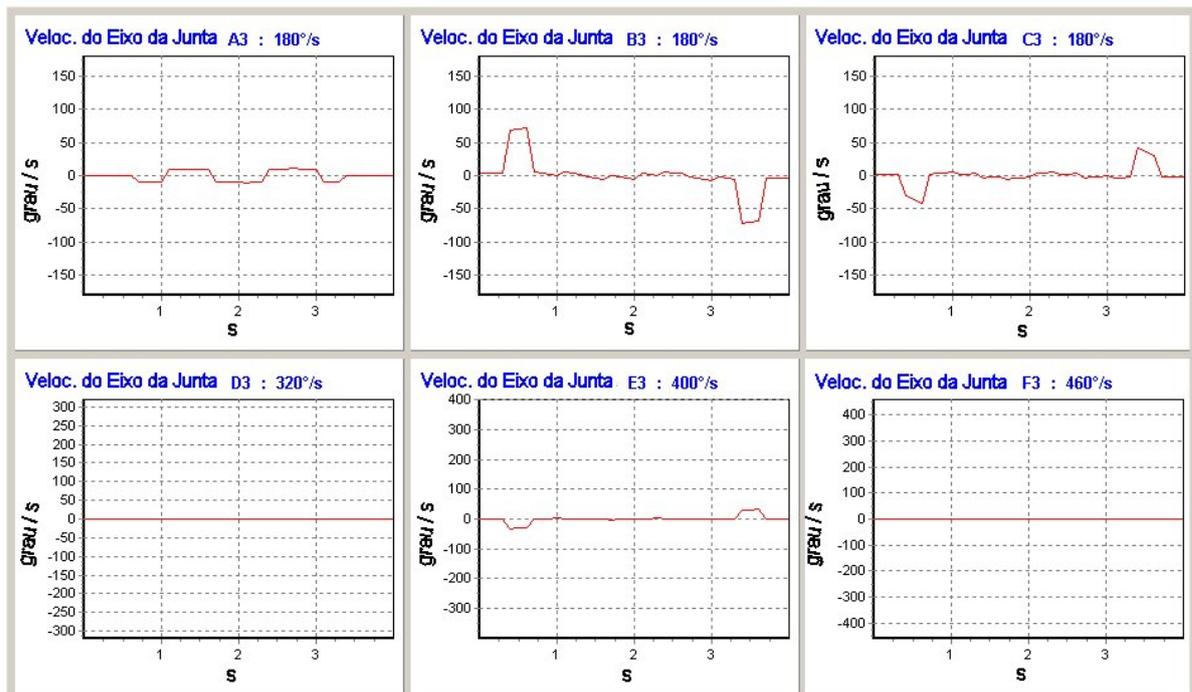
**Figura 61:** Velocidades das juntas do REIS manipulando a peça na cooperação isolada



**Figura 62:** Posições das juntas do ABB nas tarefa 1-3 com cooperação isolada

#### 5.4.2.4 Cinemática diferencial inversa do robô ABB

Feita a análise da posição das juntas do ABB, segue a resolução da cinemática diferencial inversa do robô operador 3. A Fig. 63 mostra o perfil de velocidades das juntas que o ABB deve seguir para executar a tarefa 1-3. Comparando os resultados apresentados nas Fig. 63 com os da Fig. 48, a lógica aparece novamente, ou seja, perfil de velocidade mais suave para execução de tarefa isoladamente das demais, que no caso de simultaneidade.



**Figura 63:** Velocidades das juntas do ABB na tarefa 1-3 com cooperação isolada

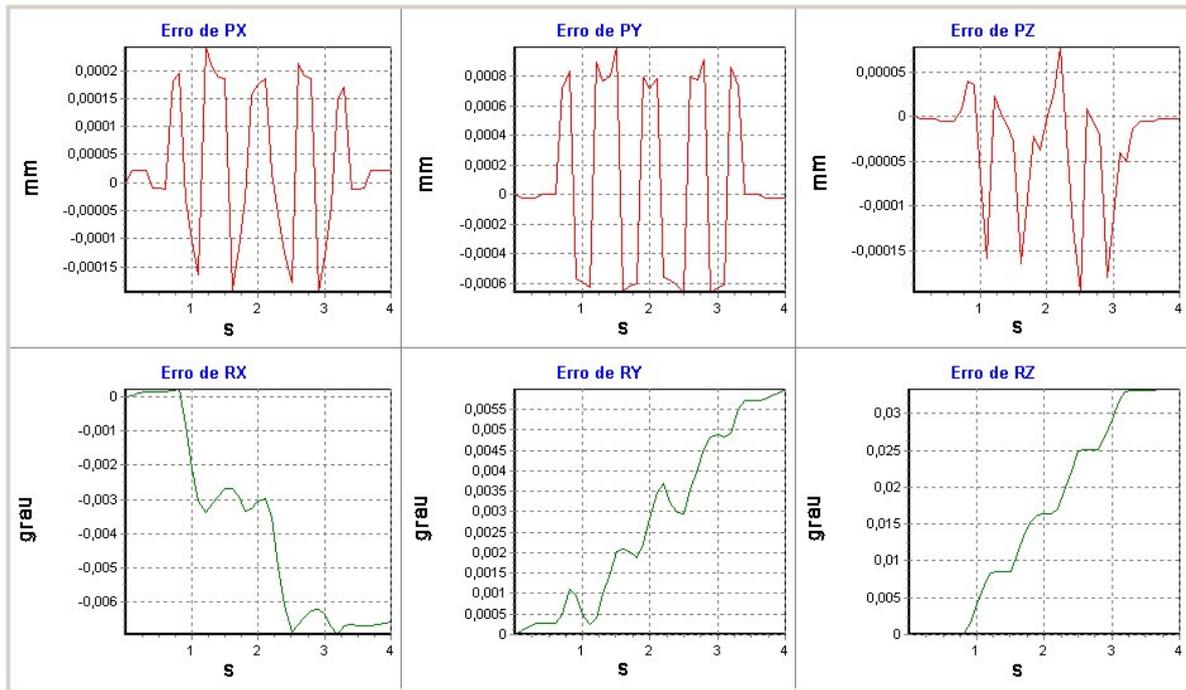
#### 5.4.3 Tarefa 1-4 - Retângulo - REIS e STAUBLI

Segue a apresentação dos resultados da última tarefa simulada isoladamente com dedicação exclusiva entre o REIS e o STAUBLI. A tarefa 1-4 consiste no seguimento de uma trajetória de seção reta retangular sobre a superfície lateral do cilindro.

A Fig. 64 apresenta os erros de posição e orientação em função dos valores máximos e mínimos obtidos na simulação.

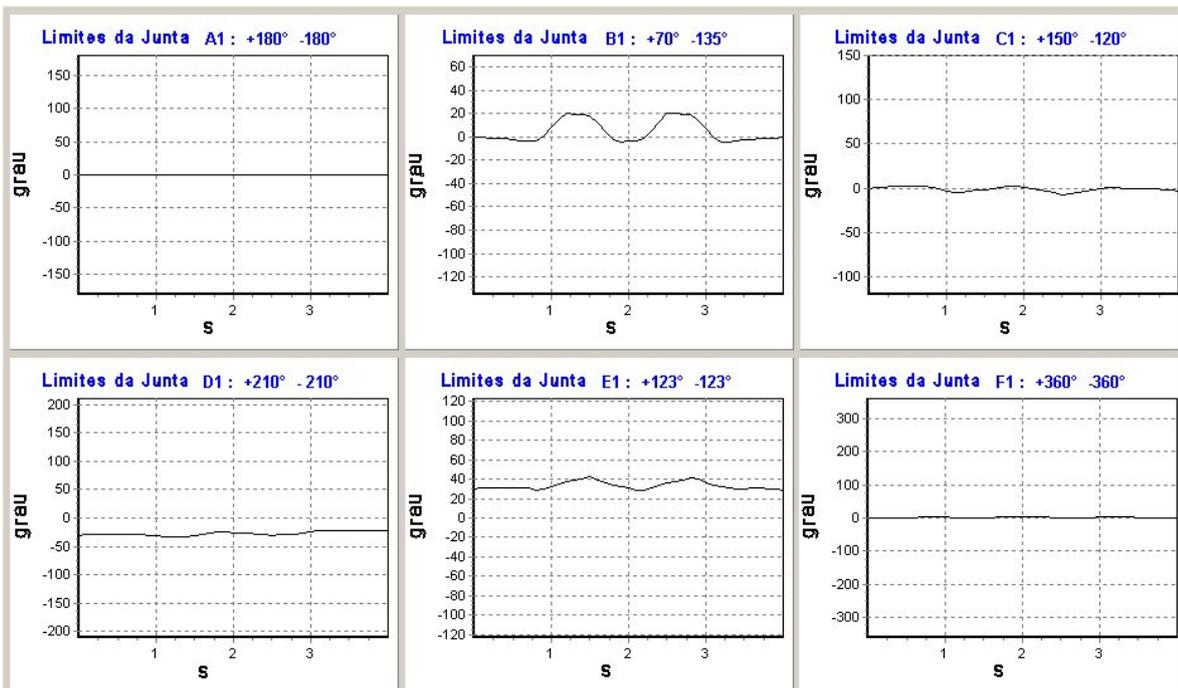
##### 5.4.3.1 Cinemática inversa do robô REIS

A Fig. 65 apresenta os gráficos correspondentes à resolução da cinemática inversa por junta do robô posicionador da peça, o REIS, que nesta simulação é dedicado a posicionar a peça objetivando somente à realização da tarefa 1-4 em conjunto com o STAUBLI. Seguindo



**Figura 64:** Escala automática dos erros nos gráficos de erros de posição e orientação na tarefa 1-4 com cooperação isolada

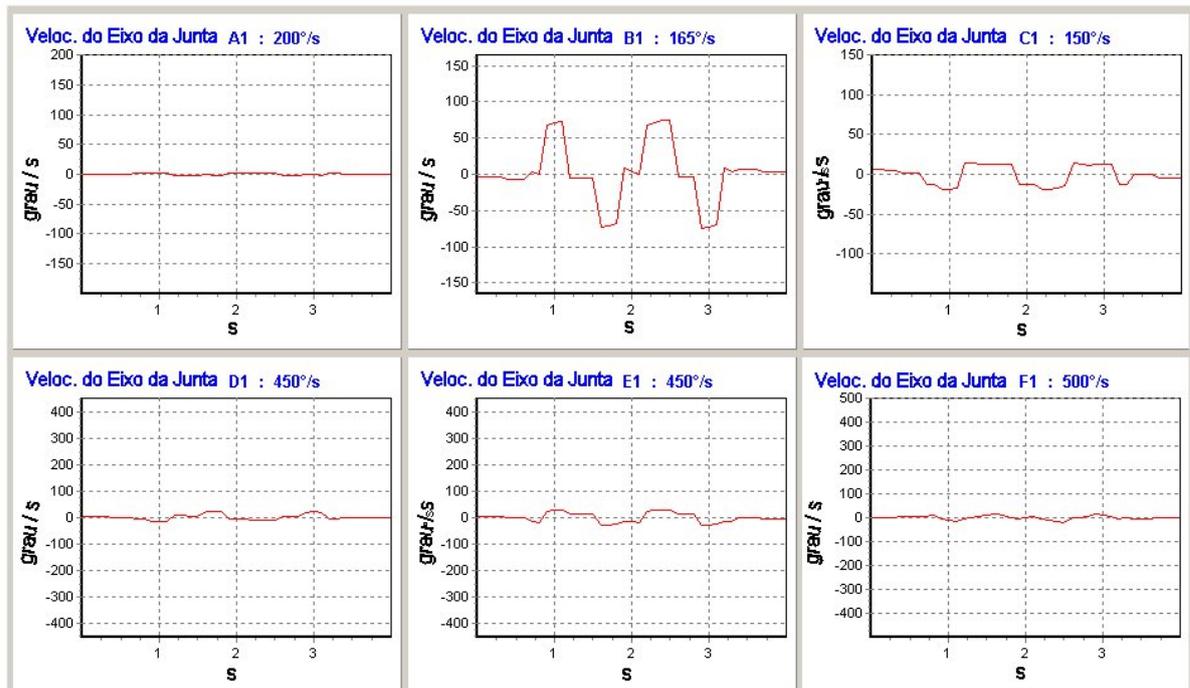
a mesma tendência das simulações com cooperação em torno de uma única tarefa, o REIS é bem menos exigido para realização de uma única tarefa, quando em cooperação em prol da realização das três tarefas simultaneamente como apresentado na Fig. 43.



**Figura 65:** Posições das juntas do REIS manipulando a peça na cooperação isolada

### 5.4.3.2 Cinemática diferencial inversa do robô REIS

Feita a análise da posição das juntas do REIS, segue a resolução da cinemática diferencial inversa do robô posicionador. A Fig. 66 mostra o perfil de velocidades das juntas que o REIS deve seguir para executar a tarefa 1-4. Note que a participação é bem menos acentuada quando comparado com o comportamento do REIS na simulação da cooperação das três tarefas simultaneamente (Fig. 44).



**Figura 66:** Velocidades das juntas do REIS manipulando a peça na cooperação isolada

### 5.4.3.3 Cinemática inversa do robô STAUBLI

A Fig. 67 apresenta os gráficos correspondente à resolução da cinemática inversa por junta do robô operador 4, o STAUBLI, que nesta simulação é dedicado a realizar a tarefa 1-4, em conjunto com o REIS.

### 5.4.3.4 Cinemática diferencial inversa do robô STAUBLI

Feita a análise da posição das juntas do STAUBLI, segue a resolução da cinemática diferencial inversa do robô operador 4. A Fig. 68 mostra o perfil de velocidades das juntas que o STAUBLI deve seguir para executar a tarefa 1-4.

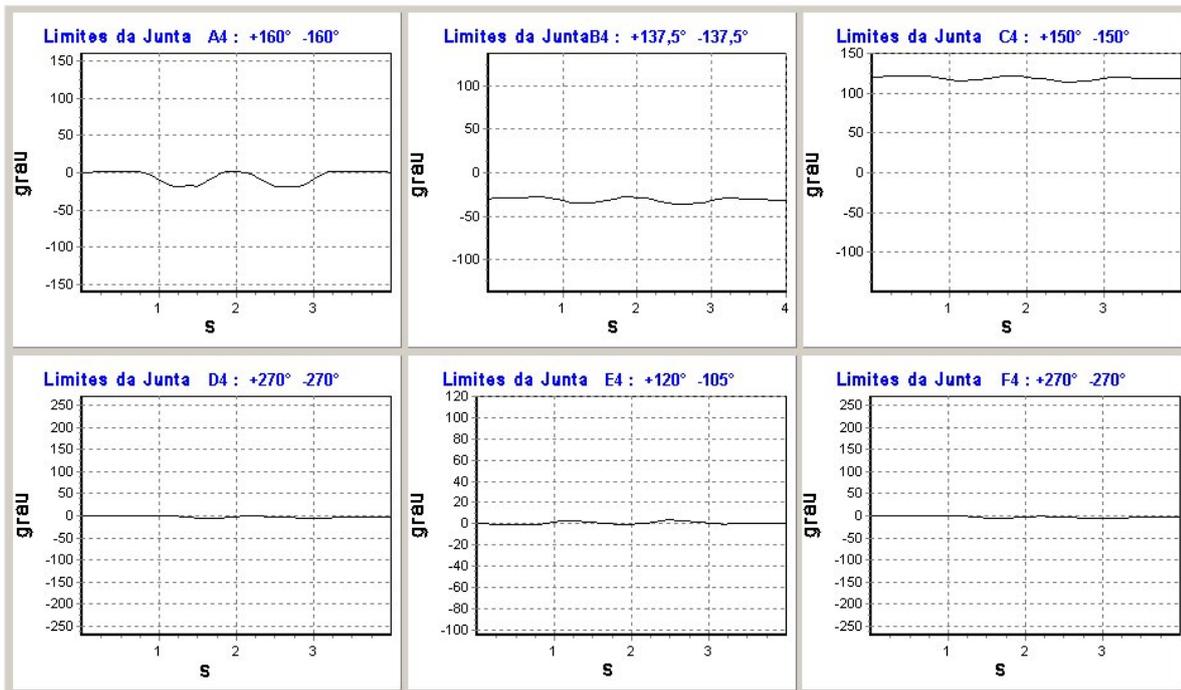


Figura 67: Posições das juntas do STAUBLI nas tarefa 1-4 com cooperação isolada

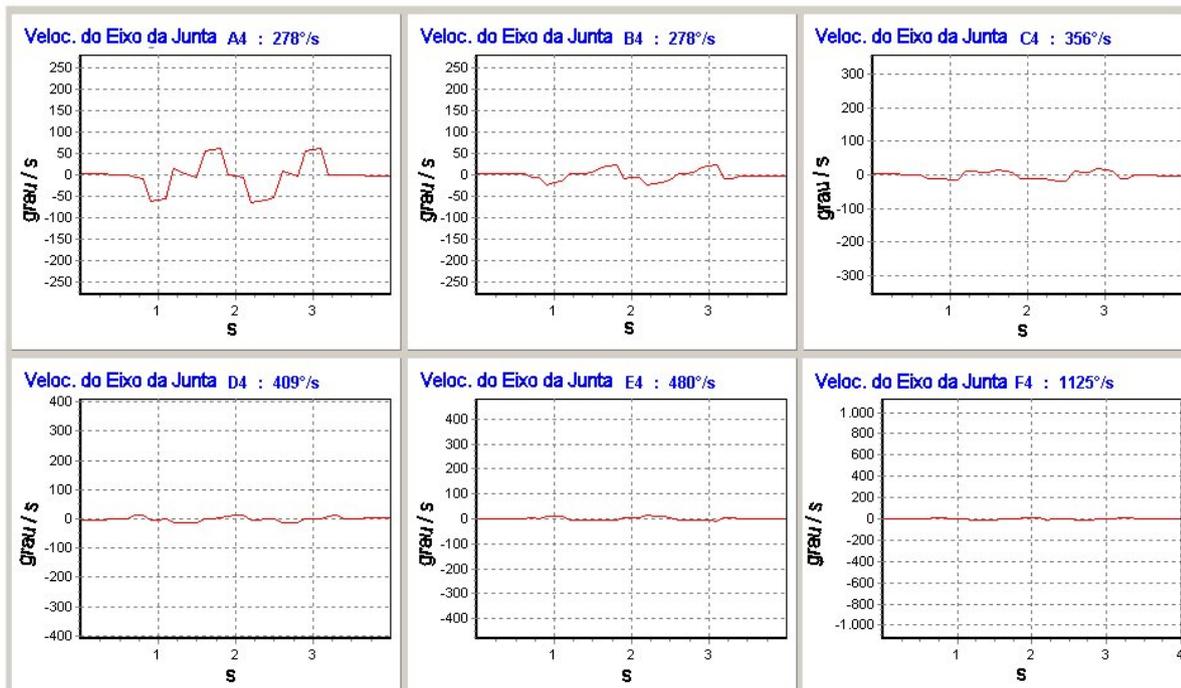
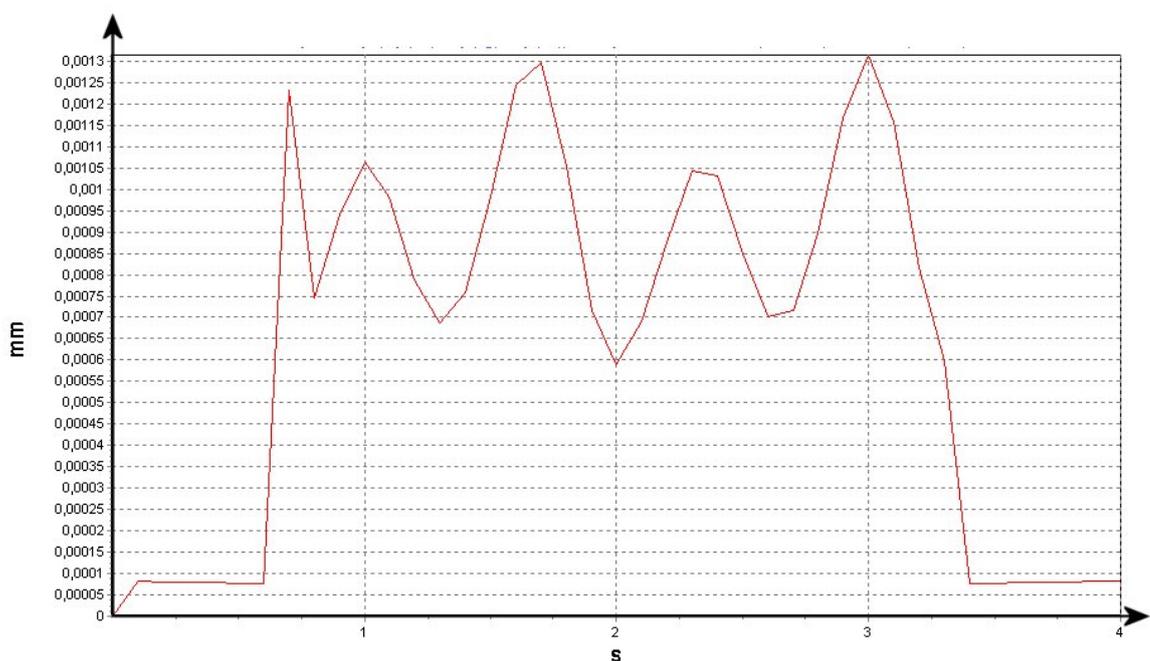


Figura 68: Velocidades das juntas do STAUBLI na tarefa 1-4 com cooperação isolada

## 5.5 Sistema com 1 Robô e 1 Tarefa por vez - MODO 3

Segue uma série de simulações onde não existe qualquer cooperação por parte do robô posicionador, ou seja, o robô REIS permanece parado. Assim sendo, o robô operador é o único responsável pela execução da tarefa.

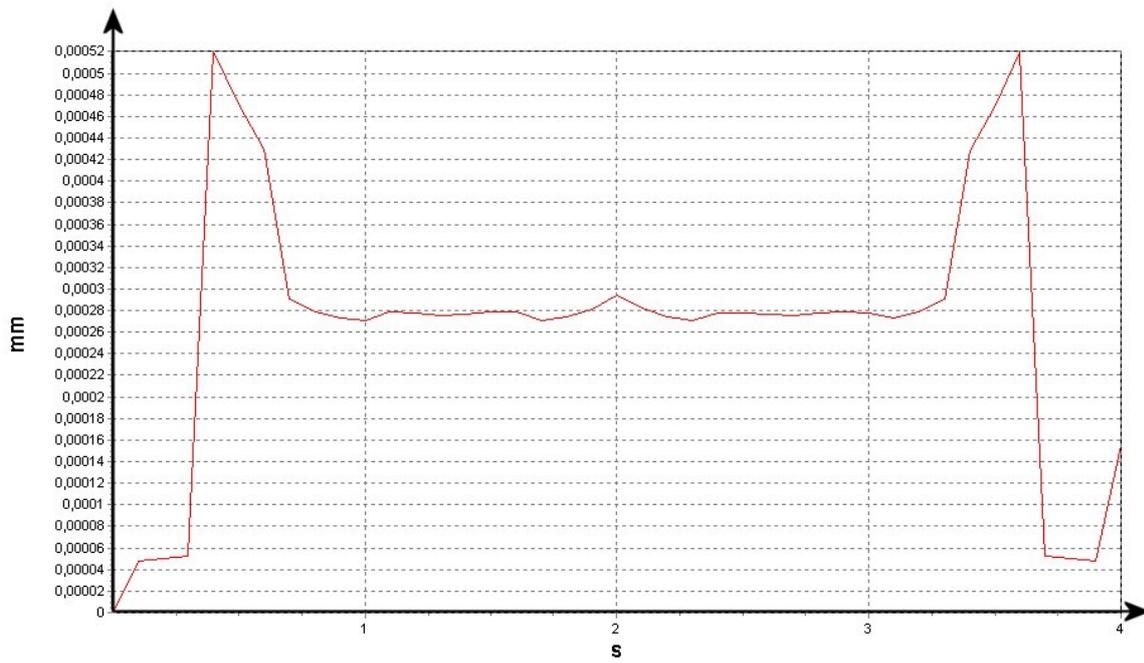
Iniciando pela tarefa 1-2, a circunferência sobre a superfície cilíndrica, que nesta simulação é feita exclusivamente pelo KUKA, mantendo o REIS parado. A Fig. 69 apresenta o erro total máximo obtido de 0,0013 mm, que está na mesma ordem de grandeza dos obtidos com cooperação entre dois (0,0013 mm - Fig. 51) e com cooperação entre os quatro robôs simultaneamente (0,0016 mm - Fig. 37).



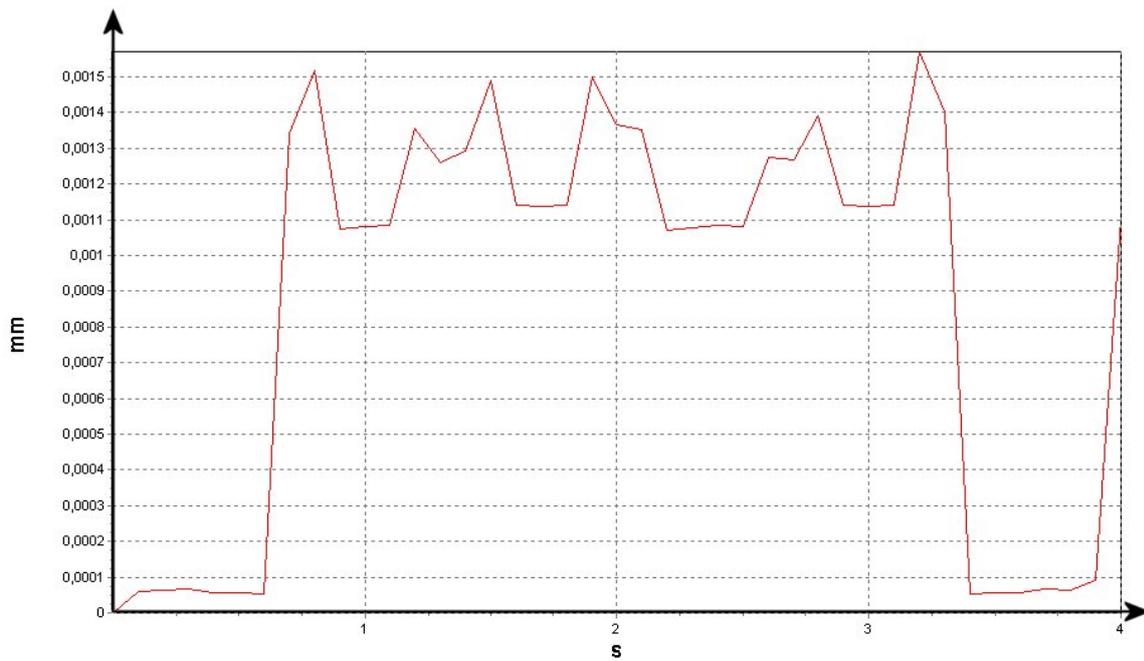
**Figura 69:** Erro total de posição da tarefa 1-2 com a peça parada

Analisando a tarefa 1-3, o losango sobre a superfície plana, que nesta simulação é feita exclusivamente pelo ABB, mantendo o REIS parado. A Fig. 70 apresenta o erro total máximo obtido de 0,00052 mm, que está na mesma ordem de grandeza dos obtidos com cooperação entre dois (0,0003 mm - Fig. 52), enquanto o erro total com cooperação entre os quatro robôs simultaneamente é de 0,0015 mm (Fig. 38).

Analisando a tarefa 1-4, o retângulo sobre a superfície cilíndrica, que nesta simulação é feita exclusivamente pelo STAUBLI, mantendo o REIS parado. A Fig. 71 apresenta o erro total máximo obtido de 0,0016 mm, que está na mesma ordem de grandeza dos obtidos com cooperação entre dois (0,0010 mm - Fig. 53) e com cooperação entre os quatro robôs simultaneamente (0,0015 mm - Fig. 39).



**Figura 70:** Erro total de posição da tarefa 1-3 com a peça parada



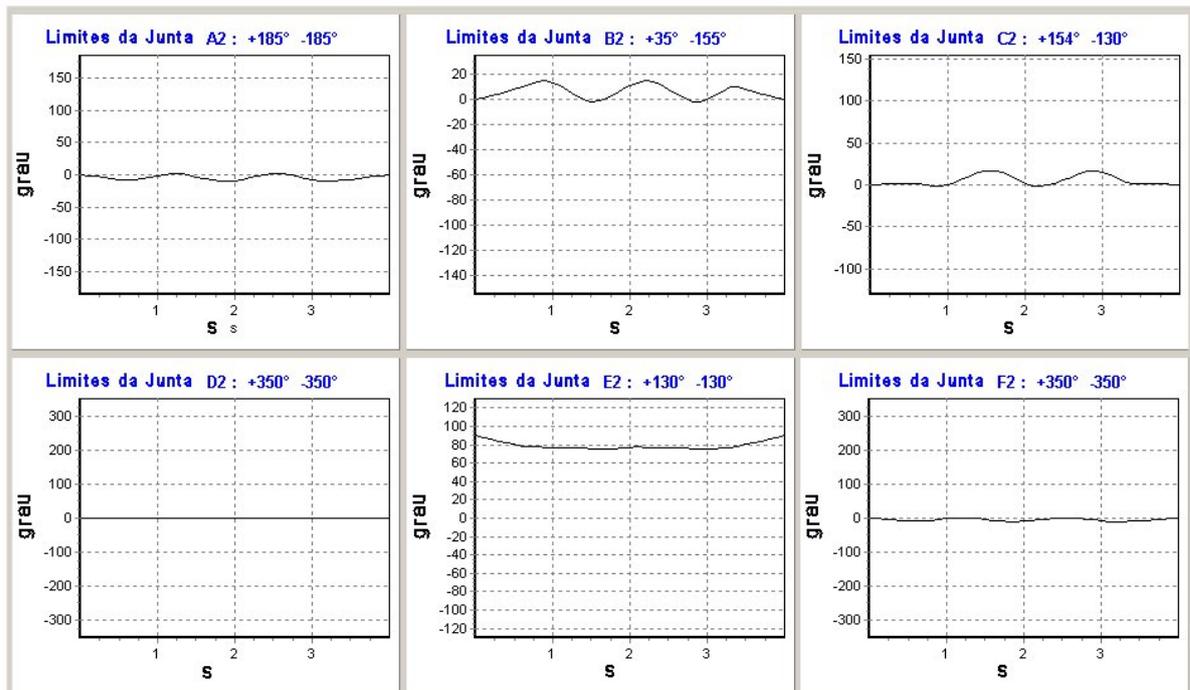
**Figura 71:** Erro total de posição da tarefa 1-4 com a peça parada

### 5.5.1 Tarefa 1-2 - Circunferência - KUKA

Iniciando pela tarefa 1-2, a circunferência sobre a superfície cilíndrica, que nesta simulação é feita exclusivamente pelo KUKA, mantendo o REIS parado.

#### 5.5.1.1 Cinemática diferencial do robô KUKA

A Fig. 72 apresenta os gráficos das posições das juntas do KUKA, sendo o único responsável pela realização da tarefa 1-2. É possível comparar os resultados apresentados nas Fig. 72, Fig. 57 e Fig. 45, ou seja, respectivamente os resultados obtidos da simulação sem cooperação, com cooperação de uma única tarefa e com cooperação das três tarefas simultaneamente. Note que os gráficos apresentados na Fig. 57 são bem menos acentuados que os das Fig. 72 e Fig. 45.



**Figura 72:** Posições das juntas do KUKA nas tarefa 1-2 com a peça parada

Note que praticamente todas as juntas do KUKA apresentam amplitudes de juntas maiores na cooperação simultânea das três tarefas que na sem cooperação.

#### 5.5.1.2 Cinemática diferencial inversa do robô KUKA

A Fig. 73 apresenta a resolução da cinemática diferencial do robô KUKA, em forma de perfis gráficos de velocidade ao longo do tempo.

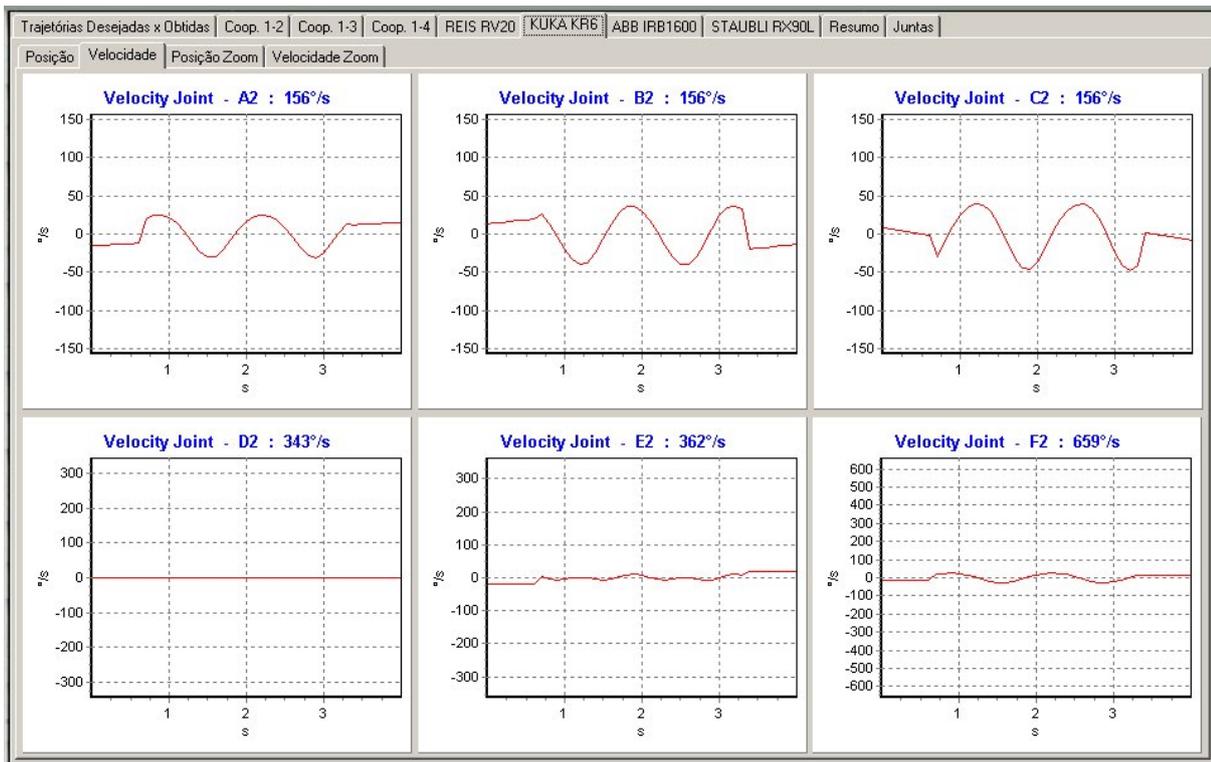


Figura 73: Velocidades das juntas do KUKA na tarefa 1-2 com a peça parada

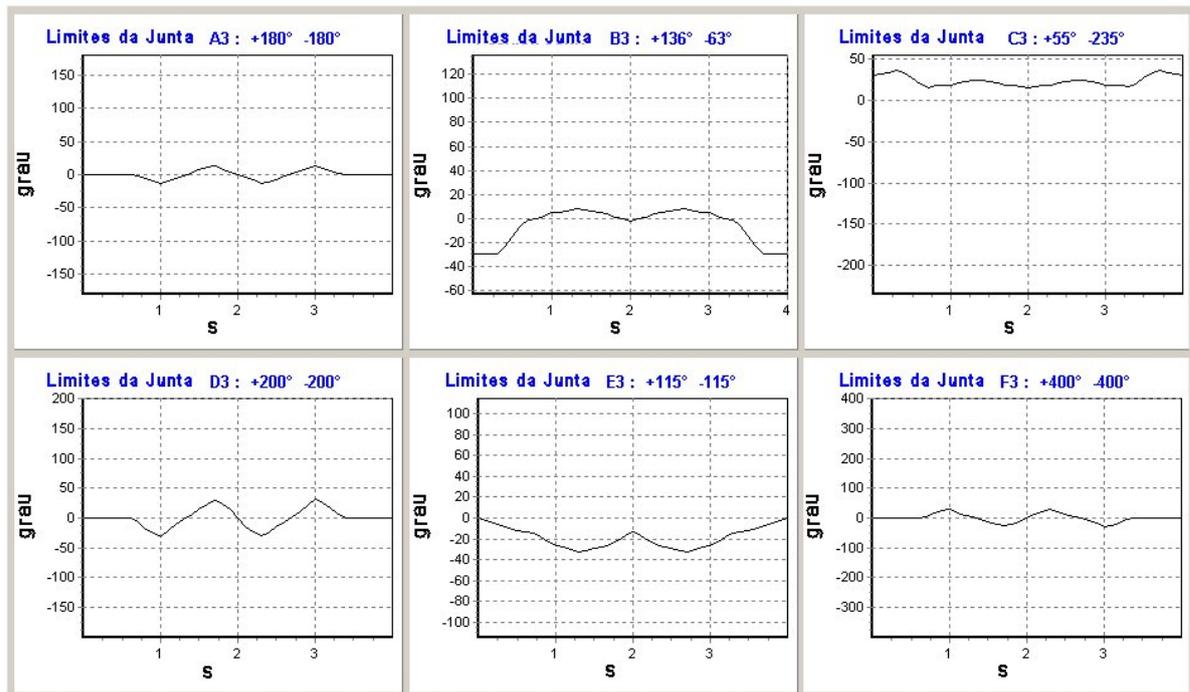
## 5.5.2 Tarefa 1-3 - Losango - ABB

Analisando a tarefa 1-3, o losango sobre a superfície plana, onde a simulação é feita exclusivamente pelo ABB, mantendo o REIS parado.

### 5.5.2.1 Cinemática inversa do robô ABB

A Fig. 74 apresenta os gráficos das posições das juntas do ABB, sendo o único responsável pela realização da tarefa 1-3. É possível comparar os resultados apresentados nas Fig. 74, Fig. 62 e Fig. 47, ou seja, respectivamente os resultados obtidos da simulação sem cooperação, com cooperação de uma única tarefa e com cooperação das três tarefas simultaneamente. Note que os gráficos apresentados na Fig. 62 são bem mais suaves que os das Fig. 74 e Fig. 47.

Note que praticamente somente a junta B3 do ABB apresenta amplitude de junta maior na cooperação simultânea das três tarefas que na sem cooperação. As juntas A3 e D3 invertem a tendência anterior, ou seja, apresentam amplitudes de juntas menores na cooperação simultânea das três tarefas que na sem cooperação. Finalmente as juntas C3, E3 e F3 apresentam um comportamento intermediário em que somente o limite superior ou inferior apresenta amplitude mais acentuada na cooperação simultânea das três tarefas que na sem cooperação.



**Figura 74:** Posições das juntas do ABB nas tarefa 1-3 com a peça parada

### 5.5.2.2 Cinemática diferencial inversa do robô ABB

A Fig. 75 apresenta a resolução da cinemática inversa do robô ABB. É possível comparar os resultados apresentados nas Fig. 75, Fig. 63 e Fig. 48, ou seja, respectivamente os resultados obtidos da simulação sem cooperação, com cooperação de uma única tarefa e com cooperação das três tarefas simultaneamente. Note que o perfil de velocidade apresentada da simulação sem cooperação (Fig. 75) é bem mais acentuado que o relativo à cooperação de uma única tarefa (Fig. 63).

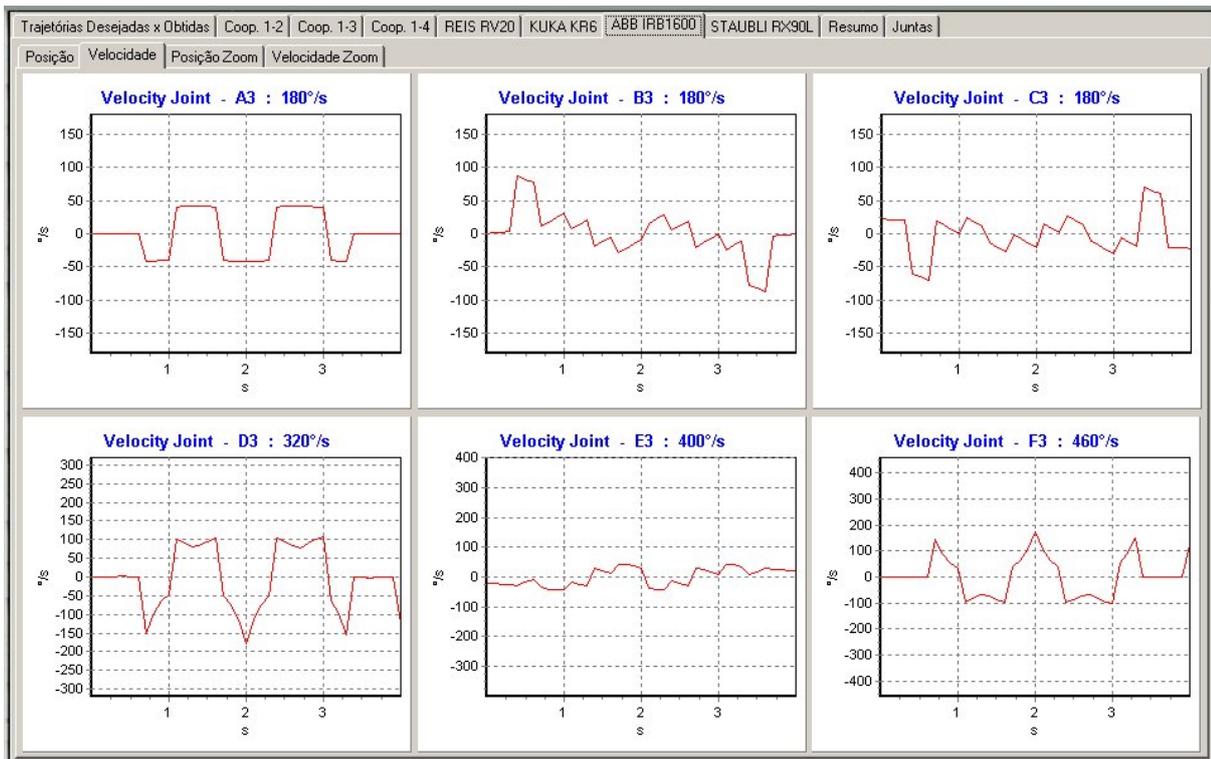
Note que as todas amplitudes, com exceção da junta *E4*, apresentam valores maiores na simulação sem cooperação (Fig. 75), que na com cooperação das três tarefas simultaneamente (Fig. 48).

### 5.5.3 Tarefa 1-4 - Retângulo - STAUBLI

Analisando a tarefa 1-4, o retângulo sobre a superfície cilíndrica, que nesta simulação é feita exclusivamente pelo STAUBLI, mantendo o REIS parado.

#### 5.5.3.1 Cinemática inversa do robô STAUBLI

A Fig. 76 apresenta os gráficos das posições das juntas do STAUBLI, sendo o único responsável pela realização da tarefa 1-4. É possível comparar os resultados apresentados



**Figura 75:** Velocidades das juntas do ABB na tarefa 1-3 com a peça parada

nas Fig. 76, Fig. 67 e Fig. 49, ou seja, respectivamente os resultados obtidos da simulação sem cooperação, com cooperação de uma única tarefa e com cooperação das três tarefas simultaneamente. Note que os gráficos apresentados na Fig. 67 são bem mais suaves que os das Fig. 76 e Fig. 49.

Analisando especificamente o comportamento dos gráficos das juntas  $D4$  e  $F4$  apresentados na Fig. 76, é possível observar que ultrapassam os limites de juntas superior e inferior, respectivamente. Conclui-se que neste arranjo físico no layout e/ou com a valores iniciais das juntas do STAUBLI adotados, não é possível realizar a tarefa com a peça parada.

### 5.5.3.2 Cinemática diferencial inversa do robô STAUBLI

A Fig. 77 apresenta os gráficos relativos às velocidades de juntas do robô STAUBLI. Note que o perfil de velocidade tanto junta  $D4$  quanto da junta  $F4$  excedem os limites máximos de velocidade que os motores dessas juntas podem desenvolver.

## 5.6 Comparação entre Tarefas Realizadas com e sem Cooperação

O objetivo da realização dessas simulações é permitir a comparação do desempenho entre os três possíveis modos de realizar as tarefas, utilizando a simulação voltada à investigação, ou seja, para determinar como se comportam os indicadores de desempenho em função do modo

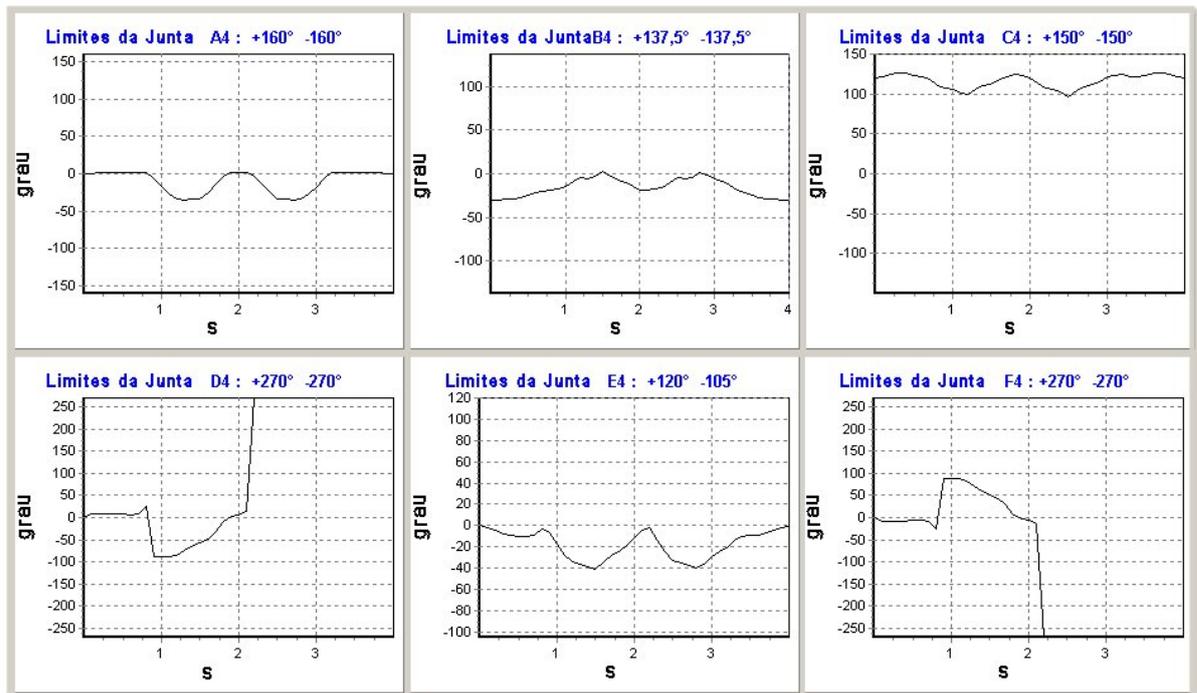


Figura 76: Posições das juntas do STAUBLI nas tarefa 1-4 com a peça parada

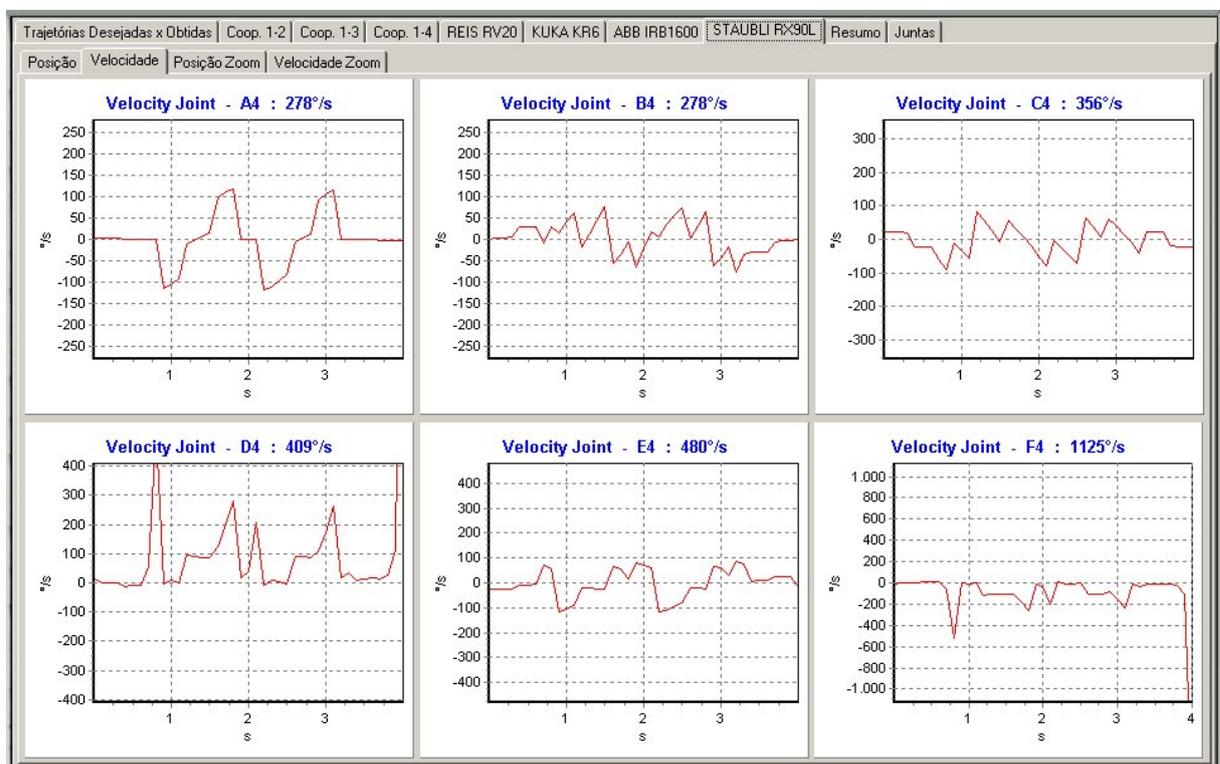


Figura 77: Velocidades das juntas do STAUBLI na tarefa 1-4 com a peça parada

escolhido.

É possível analisar e comparar os resultados obtidos nas simulações entre os três modos. No que tange ao erro total obtido em cada simulação, é possível concluir que em todos os três modos, esses erros são de pequena magnitude, girando em torno do centésimo do mm, independente se há ou não cooperação. Assim conclui-se que a metodologia de resolução da cinemática inversa utilizada é bastante robusta, desde que os ganhos, que são numéricos, sejam corretamente ajustados. Logo, a comparação entre o erro total obtido em cada modo não se configura como indicador capaz de determinar se a tarefa será executada com ou sem cooperação, nem se a cooperação será feita independente por tarefa ou com simultaneidade de tarefas.

Ratificando o supracitado, analisando a tarefa 1-3, o losango sobre a superfície plana, cujo robô operador é o ABB, tem-se que o erro total para o MODO 1, com cooperação entre os quatro robôs simultaneamente, é de 0,0015 mm (Fig. 38), enquanto que para o MODO 2, com cooperação entre dois robôs, o erro total é de 0,0003 mm (Fig. 52), e finalmente para o MODO 3, onde a tarefa é realizada exclusivamente pelo ABB, o erro total máximo obtido é de 0,00052 mm (Fig. 70).

Uma tendência lógica e esperada pode ser constatada analisando os resultados das simulações dos MODOS 1 e 2, ou seja, é possível concluir que quanto maior o número de tarefas sendo executadas simultaneamente, maior a exigência sobre todas as juntas dos robôs envolvidos, pois o robô posicionador da peça funciona como cadeia cinemática de acoplamento entre os demais, que deixam de ser independentes quando as tarefas são executadas simultaneamente. Isto é observado nos gráficos obtidos nas simulações, ou seja, ocorre que cada robô operador deixa de somente sofrer influência da respectiva tarefa de envolvimento direto, passando a sofrer influências de tarefas que não tenham participação direta.

Novamente observando a tarefa 1-3, é possível analisar e comparar os gráficos relacionados à resolução da cinemática inversa do robô ABB, ou seja os resultados apresentados nas Fig. 75, Fig. 63 e Fig. 48, respectivamente os MODOS 3, 2 e 1. Note que o perfil de velocidade apresentada da simulação do MODO 3, sem cooperação (Fig. 75), é bem mais acentuado que o relativo ao MODO 2, cooperação de uma única tarefa (Fig. 63). Analisando cada perfil de velocidades, note que as todas amplitudes, com exceção da junta  $E4$ , apresentam valores maiores na simulação do MODO 3, sem cooperação (Fig. 75), que na com cooperação das três tarefas simultaneamente, MODO 1 (Fig. 48).

Uma comparação entre gráficos resultantes dos MODOS 2 e 3 mostra claramente a vantagem da cooperação entre dois robôs realizando uma tarefa sobre a opção de não usar cooperação. Conclui-se, como era de se esperar, que a cooperação distribui o esforço necessário para realização da tarefa entre dois robôs, ao passo que trabalhando isoladamente, os controla-

dores dos motores e os motores que acionam as juntas do robô operador são bem mais exigidos.

Finalmente é possível concluir que é mais vantajoso fazer todas as três tarefas simultaneamente (MODO 1) quando se considera o fator tempo, entretanto os gráficos mostram que as três tarefas simultaneamente exigem mais dos controladores dos motores e dos motores das juntas do robô posicionador da peça e dos demais robôs, devido as relações de dependência que funcionam como um acoplamento, tendo a peça como corpo comum que recebe simultaneamente as três tarefas.

## 5.7 Considerações Finais do Estudo de Caso

Inicialmente buscou-se na literatura algum SRC espacial composto por mais de três robôs que pudesse ser utilizado para validar o modelo em tese, o que não foi encontrado. Assim sendo, partiu-se para idealizar e montar um estudo de caso, onde surgiram dificuldades devido ao número de fatores relevantes e a relação de dependência entre eles, o que resultou na necessidade de criar uma sistematização, culminado em uma metodologia de auxílio ao projeto e simulação de SRC.

Foi elaborado um estudo de caso de um SRC seguindo os procedimentos sistematizados para um SRC composto por quatro robôs manipuladores espaciais que executam três tarefas simultâneas. A simulação inicial foi feita para um tempo total de processamento de 6 s e resultou em não conformidades que indicavam colisão e violação dos limites de algumas juntas.

Diversas alternativas de mudança de níveis dos fatores foram feitas e resultou numa solução final que apresenta conformidade com os erros máximos admissíveis, bem como, com os limites de desempenho de posição e velocidade das juntas, em simulação com um tempo total de execução das tarefas simultaneamente que foi reduzido de 6 s para 4 s, demonstrando que o modelo proposto pode adequar a produção de um SRC ao conceito *just-in-time* (JIT), conceito este que visa atender à demanda instantaneamente, com qualidade e sem desperdícios.

É possível concluir que a resolução das cinemáticas inversa e diferencial inversa dos robôs apresentadas nos gráficos desde capítulo, resultam da aplicação em conformidade do Jacobiano de Cooperação em um SRC com robôs manipuladores espaciais e distintos, realizando tarefas nada simétricas. Assim sendo, buscou-se uma situação nada específica, que demonstra a robustez, a generalidade e a abrangência da metodologia, bem como, a resolução simultânea associada a um critério de otimização, possibilitando resolver a cinemática inversa de um SRC, na cooperação em seguimento de trajetória, **cqd ■**.



## CAPÍTULO 6

# Conclusões e Perspectivas

Este capítulo apresenta formalmente as conclusões, iniciando com a seção 6.1 que apresenta um resumo dos capítulos anteriores, de modo a ressaltar os argumentos e hipóteses consideradas, seguido da seção 6.2 que resume as contribuições científicas desta tese, da seção 6.4 apresentando as vantagens e limitações, e finalizando com a seção 6.5 que apresenta as perspectivas para trabalhos futuros

### 6.1 Recapitulação Sintetizada

De modo a fundamentar a escolha da área de concentração da pesquisa, no Cap. 1 apresentou-se a contextualização na qual esta tese está imersa, que resultou na caracterização do problema que consiste em como programar os robôs componentes de um Sistema Robótico Cooperativo (SRC), a fim de realizarem múltiplas tarefas estabelecidas pelo usuário.

Vencida a etapa de caracterização do problema, passou-se no Cap. 2 à revisão bibliográfica. Fez-se um estudo sobre os sistemas multirrobôs e formalizou-se a definição de Sistema Robótico Cooperativo SRC, ressaltando as tipificações e classificações das tarefas, além de apresentar exemplos de aplicação de SRC na indústria.

O Cap. 3 tratou sobre modelagem clássica de dois robôs cooperativos, onde foi apresentado como os pesquisadores atualmente procedem tal modelagem, que é feita utilizando o conceito de Jacobiano Relativo (LEWIS; MACIEJEWSKI, 1990) e como este é obtido utilizando a convenção de Denavit-Hartenberg. Foi apresentado o conceito de Jacobiano Relativo Baseado em Helicoides sendo obtido por duas metodologias: a primeira utilizando a Teoria dos Helicoides, e a segunda usando o Método de Davies.

O Cap. 4 apresentou a contribuição principal, o conceito de Jacobiano de Cooperação, definido como uma transformação linear do espaço vetorial das velocidades juntas dos robôs

envolvidos, no espaço vetorial das velocidades das tarefas a serem executadas, o que permite que a resolução da cinemática diferencial inversa de cada manipulador seja feita de forma otimizada e simultânea, primando pela simplicidade no estabelecimento das relações de dependência entre os robôs envolvidos, em função das tarefas que cada robô deve executar sobre a peça em comum, fixada rigidamente por um ou mais robôs que a manipulam. Foi mostrado como o Jacobiano de Cooperação pode ser obtido utilizando a metodologia baseada no Jacobiano Relativo (LEWIS; MACIEJEWSKI, 1990), que por sua vez, utiliza os conceitos da Robótica baseada na convenção de Denavit-Hartenberg. Outras duas metodologias foram utilizadas o que resultou no Jacobiano de Cooperação Baseado em Helicoides (RIBEIRO; GUENTHER; MARTINS, 2007) (RIBEIRO; GUENTHER; MARTINS, 2008) (RIBEIRO; MARTINS, 2009).

O Cap. 5 apresentou a validação da modelagem cinemática usando o Jacobiano de Cooperação Baseado em Helicoides, simulando um SRC composto por quatro robôs executando três tarefas distintas simultaneamente sobre uma peça em comum.

## 6.2 Contribuições Científicas

A tese proposta apresenta contribuições em nível de modelagem cinemática diferencial de Sistema Robótico Cooperativo (SRC), onde é possível “ensinar”, ou seja, fornecer subsídios que permita a programação *off-line* dos robôs manipuladores de modo otimizado, a fim de executarem as tarefas num contexto de cooperação, valendo-se da resolução da cinemática inversa, primando pela rapidez e simplicidade. As seguintes contribuições foram apresentadas:

1. o conceito de Jacobiano de Cooperação ( $J_C$ );
2. metodologia clássica de obtenção do  $J_C$  utilizando conceitos da Robótica baseada na convenção de Denavit-Hartenberg;
3. o conceito de Jacobiano de Cooperação Baseado em Helicoides ( $J_{CH}$ );
4. metodologia por Helicoides de obtenção do  $J_{CH}$  utilizando a Teoria dos Helicoides;
5. metodologia por Davies de obtenção do  $J_{CH}$  utilizando o Método de Davies; e,
6. resolução da cinemática inversa dos robôs de SRC genéricos, tanto em cooperação em nível de compartilhamento de carga, quanto em execução de tarefas, ou ambas simultaneamente.

Cabe ainda ressaltar o surgimento de algumas contribuições secundárias, tais como:

1. o Jacobiano Relativo Baseado em Helicoides ( $J_{RH}$ );

2. metodologia de obtenção do  $J_{RH}$  entre dois manipuladores genéricos empregando a Teoria dos Helicoides (RIBEIRO; GUENTHER; MARTINS, 2007) (RIBEIRO; GUENTHER; MARTINS, 2008);
3. metodologia de obtenção do  $J_{RH}$  entre dois manipuladores genéricos empregando o Método de Davies (RIBEIRO; MARTINS, 2009);

## 6.3 Conclusão

De modo a validar a metodologia em torno do modelo em tese foi elaborado um estudo de caso (Capítulo 5) para resolução da cinemática inversa de um SRC composto por 4 robôs que executam simultaneamente 3 tarefas distintas. É importante ressaltar os níveis associados aos fatores relativos ao arranjo físico, ou seja, o posicionamento escolhido dos robôs no chão-de-fábrica, objetivou que:

1. não fosse contemplado qualquer aspecto de simetria que permitisse o cálculo da cinemática inversa por espelhamento, com o objetivo de explorar a robustez da metodologia;
2. o SRC fosse composto por manipuladores distintos, demonstrando a generalidade da metodologia; e,
3. que as tarefas executadas fossem diferentes, de modo a explorar a abrangência da metodologia.

Com isso, buscou-se uma situação nada específica, que demonstra a robustez, a generalidade e a abrangência da metodologia, bem como, a resolução simultânea associada a um critério de otimização, possibilitando resolver a cinemática inversa de um SRC totalmente genérico, na cooperação em seguimento de trajetória.

É possível concluir a simulação do modelo de SRC permite que sejam obtidos dois grupos de indicadores de desempenho:

1. de erros associados a execução de cada tarefas; e,
2. de mapeamento de estados das juntas.

Tais indicadores sofrem variação em função dos parâmetros de entrada:

1. do número de tarefas;
2. do tipo de tarefa desejada;

3. do número de robôs envolvidos;
4. do tipo de robô pertencente ao SRC;
5. do arranjo físico do robôs no chão-de-fábrica;
6. das condições iniciais das juntas dos robôs;
7. do nível de prioridade relativo de movimento estabelecido para as juntas; e,
8. do tempo de processamento de cada tarefa.

Tendo como objetivo que os indicadores de desempenho obtidos respeitem os limites de projeto estabelecidos pelos fabricantes, é possível promover diversas simulações variando o nível de algum parâmetro de entrada, de modo a obter soluções específicas, em resposta a uma demanda que apresente características instável e errática. Esse perfil de demanda exige uma produção flexível orientada ao cliente.

Finalmente, o modelo proposto contribui no sentido de permitir o desenvolvimento de ferramentas de análise de simulações com o auxílio do computador, que são capazes de projetar e adequar a produção de um SRC ao conceito *just-in-time* (JIT), conceito este que visa atender à demanda instantaneamente, com qualidade e sem desperdícios.

## 6.4 Vantagens e Limitações

Todo o desenvolvimento ocorreu considerando o aspecto genérico que conduziu a uma formulação literal. Logo, basta utilizar os resultados obtidos em torno do Jacobiano de Cooperação com as devidas adaptações, função do número e do tipo de manipuladores envolvidos, dispensando nova dedução, ou seja, os resultados obtidos para os  $J_C$  e  $J_{C_H}$  são passíveis de aplicação direta função apenas da quantidade de robôs, do tipo de robô, das tarefas, das posições iniciais, dos Jacobianos convencionais e da cinemática direta de cada robô sem a necessidade de novas deduções para obter o modelo cinemático do SRC.

Assim sendo, é passível de ser aplicado a situações genéricas em função de arranjo físico, de quantidade de robôs, de posição inicial das juntas, e assim mostra a robustez, a generalidade e a abrangência da metodologia, bem como, a resolução simultânea associada a um critério de otimização, explorando a facilidade em resolver a cinemática inversa de um SRC totalmente genérico, na cooperação em seguimento de trajetória e/ou compartilhamento de carga.

Devido a sistematização incorporada à metodologia generalizada, diminui-se o tempo da fase de modelagem cinemática e a simplicidade faz com que não haja a necessidade de pessoal especializado, mantendo porém, a necessidade de treinamento do usuário, no que

tange à adaptação à sistemática apresentada e ao fornecimento dos dados de entrada. Isto permite eliminar algumas desvantagens que são normalmente encontradas na resolução da cinemática inversa, quanto à necessidade de ter treinamento especial de pessoal para elaboração de modelos; à dificuldade de interpretar resultados; e ao alto tempo dispensado a esta fase.

Uma vez obtido o modelo, inúmeras avaliações de diferentes cenários podem ser analisados, o que permite identificar as juntas mais solicitadas no sistema a fim de atuar sobre os níveis dos fatores de modo a obter uma melhor distribuição e uniformidade.

O modelo do Jacobiano de Cooperação permite analisar o comportamento de sistemas complexos com múltiplas condições de contorno com o propósito de conhecer o comportamento do sistema e/ou avaliar estratégias para sua operação, além de poder ser integrado com outros programas de simulação mais amplos de desempenho global da fabricação (RIBEIRO, 1999), pois fornece o tempo total de fabricação da peça na célula robótica.

Otimização utilizando simulação é muito comum em problemas pouco estruturados. Existem vários fatores a serem observados no cenário de otimização utilizando a simulação do modelo do Jacobiano de Cooperação, a saber: (1) tempo de execução da tarefa; (2) o arranjo físico dos robôs no chão-de-fábrica; e (3) as posições iniciais das juntas. Partindo do estabelecimento de um tempo de fabricação e possível ir diminuindo este tempo progressivamente, monitorando os erros totais por tarefa e o comportamento do perfil de posição e velocidade de cada junta, que deve sempre ser confrontado com a faixa útil de trabalho nunca violando os limites de junta, e as velocidades máximas por junta fornecida pelo fabricante.

Como desvantagem, é possível destacar que quando se aumenta muito o número de tarefas a serem realizadas simultaneamente, a exigência sobre os robôs componentes do SRC aumenta bastante, em compensação as tarefas são feitas em menos tempo, ou seja, todas juntas.

Em última análise, voltando o foco específico da tese para a contextualização mais ampla de vantagem competitiva, o modelo do SRC utilizando o Jacobiano de Cooperação permite a criação de células robóticas virtuais que podem conduzir a benefícios operacionais, técnicos e econômicos. Este modelo permite o uso de ferramentas de simulação, para ganhar flexibilidade na tomada de decisão, pois é possível alternar o tempo de fabricação em função da demanda de mercado, reduzindo em demanda aquecida e aumentando em períodos recessivos (RIBEIRO, 1999). Com esse aumento poupa-se os recursos mas perde-se em tempo, o que não é primordial em tempos de pouca demanda. Com um modelo adequado é possível avaliar os efeitos de mudar qualquer operação de alguma forma, alterando o fazer, o como fazer, ou o quando fazer, mediante uma decisão estratégica (RIBEIRO; FERREIRA; MOURA, 2001).

## 6.5 Perspectivas

O foco desta tese é a modelagem cinemática de múltiplos manipuladores industriais, entretanto além desta linha de pesquisa, cabe ressaltar que a modelagem cinemática pelo Jacobiano de Cooperação é potencialmente aplicável nas outras três áreas de pesquisa, com devidas adaptações, ou seja, a Robôs Móveis, Mãos Robóticas e Veículos sobre Pernas. Assim estudos futuros poderiam validar a aplicação deste, nestas áreas.

Outra possibilidade é explorar aspectos de montagem de peças, ou seja, incorporar a possibilidade do cenário simulado contemplar mais de uma peça ou subconjuntos, o que irá gerar um Jacobiano de Cooperação para múltiplas peças e tarefas.

Um estudo focalizado em singularidades, como evitá-las valendo-se do espaço nulo e a utilização desta para evitar colisões são temas que resultariam em melhoramentos ao modelo proposto nesta tese.

Outro ponto com potencial para ser explorado é a utilização estratégias para variar a matriz de pesos das juntas conforme aumentasse o nível de exigência das juntas, resultando em uma matriz com pesos variáveis.

É desejável explorar a dualidade cinemática estática e desenvolver modelo de forças em função do torques nas juntas dos robôs na base do tempo. O Jacobiano de Cooperação também é passível de ser utilizado para compor um modelo da dinâmica da cooperação, permitindo o controle no espaço da juntas.

Estudos e algoritmos sobre detecção de colisão fogem ao escopo desta tese, entretanto cabem como sugestões em estudos futuros a fim de serem analisados em conjunto e/ou sob a ótica do  $J_C$ . Aplicações em geração de trajetórias prevendo falhas em juntas podem se valer do modelo proposto com alguma adaptação, em que seja permitido alterar, em determinado tempo de simulação, o peso relativo à junta sujeita à falha na matriz  $W$ , sendo que resultaria no efeito de uma falha tipo junta bloqueada (JAMISOLA; MACIEJEWSKI; ROBERTS, 2006).

Como parágrafo final desta tese, cabe deixar registrado que o trabalho realizado foi apenas um início. Espera-se que este tenha sido um bom início.

## APÊNDICE A

# Robótica Baseada em Denavit-Hartenberg

Neste apêndice faz-se uma revisão bibliográfica da modelagem da cinemática direta e da cinemática diferencial de robôs manipuladores seriais utilizando a convenção de Denavit-Hartenberg, que é a mais difundida entre os pesquisadores. Inicialmente é apresentado o modelo matemático de representação da localização de um corpo rígido no espaço. Por fim é feita uma análise do Jacobiano de manipuladores seriais.

### A.1 Localização de um Corpo Rígido

Esta seção trata da localização de um corpo rígido no espaço tridimensional, entretanto, antes de começar efetivamente a tratar da localização é conveniente definir corpo rígido.

**Definição A.1.1** – *Corpo Rígido* – denomina-se corpo rígido a um sistema contínuo tal que a distância entre dois pontos quaisquer pertencentes a este corpo é invariante com o tempo. Assim sendo, o corpo rígido é um modelo da mecânica que constitui uma abstração, podendo ser considerado como rígido um corpo tal que suas deformações, ou seja, os deslocamentos relativos possam ser desprezados frente a seu movimento global (TENENBAUM, 1997).

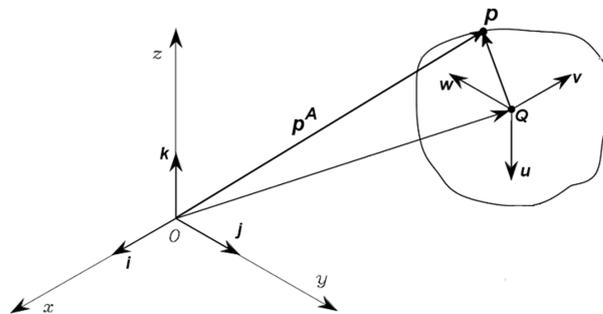
A localização de um corpo rígido é dita determinada com respeito ao sistema de eixos coordenados de referência, quando a posição de todos os pontos deste corpo for conhecida no espaço tridimensional. Para isso, é necessário e suficiente que seis parâmetros independentes sejam determinados (TSAI, 1999). Tais parâmetros são medidos em função de um referencial. Assim as seguintes definições devem ser observadas.

**Definição A.1.2** – *Referencial* – um referencial é definido como um conjunto de pontos não colineares, guardando entre si distâncias invariantes com o tempo e que se possa associar um sistema de eixos cartesianos (TENENBAUM, 1997).

**Definição A.1.3** – *Referencial Absoluto* – um referencial absoluto é definido como um sistema fixo de eixos coordenados de referência estabelecido para permitir a localização de um corpo rígido no espaço tridimensional (TENENBAUM, 1997).

**Definição A.1.4** – *Referencial Relativo ou Móvel* – é definido como um sistema de eixos coordenados que se movimenta relativamente ao referencial fixo ou relativamente a outro referencial móvel, sendo útil na determinação da localização de sistemas com múltiplos corpos ligados por juntas. Estes sistemas coordenados são normalmente solidários a elos, ou seja, se movem solidários aos elos.

A Fig. 78 mostra o sistema de eixos coordenados  $(x, y, z)$  assumido como referencial absoluto ( $A$ ) e o sistema  $(u, v, w)$  como referencial móvel ( $B$ ).



**Figura 78:** Referenciais Absoluto e Móvel

As posições de todos os pontos pertencentes ao corpo rígido podem ser determinadas quando se conhece a localização do referencial móvel, com respeito ao referencial absoluto. Esta localização relativa pode ser considerada como a composição da **posição** do ponto  $Q$  que é a origem do referencial móvel, com a **orientação** deste referencial em relação ao referencial absoluto.

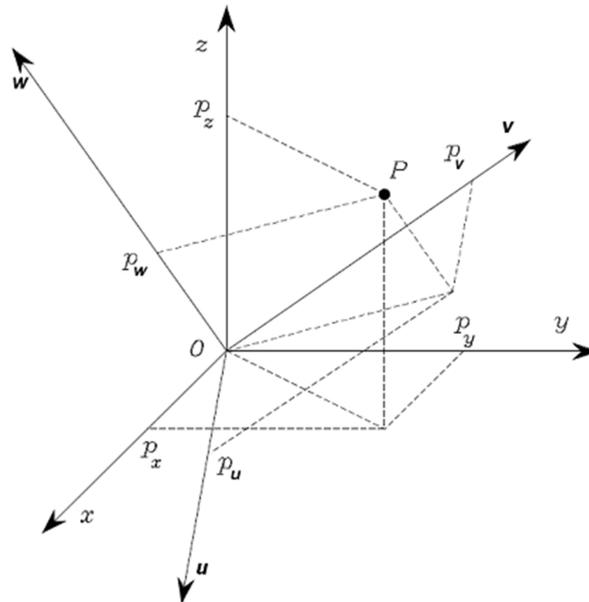
Para facilitação da análise, em um primeiro momento, considere que os dois referenciais tenham origens coincidentes, o que implica que a posição de ambos é a mesma. Analisando a Fig. 79, note que posição do ponto  $P$  com respeito ao referencial absoluto pode ser descrita por um vetor  $(3 \times 1)$ , na seguinte forma:

$$p^A = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

**Notação A.1.1** – A representação com um super-índice  $A$  significa que o vetor  $p$  tem coordenadas do ponto  $P$  relativas ao referencial  $A$ .

### A.1.1 Teorema de Euler - Representação da Orientação

Passando a analisar a orientação de um corpo rígido, associa-se um referencial ao corpo rígido que acompanha os movimentos deste corpo, ou seja o referencial é solidário ao corpo e esse referencial, como já foi dito, é denominado referencial móvel. Na representação da orientação de um corpo rígido, considera-se que a movimentação entre o referencial móvel e o absoluto se dá com um ponto em comum, ou seja, a origem em comum. Isto é conhecido como rotação ou movimento esférico, sendo mostrado na Fig. 79.



**Figura 79:** Rotação ou movimento esférico

A orientação pode ser representada de diversas maneiras, dentre elas é possível citar as seguintes representações (TSAI, 1999): por co-senos diretores, por eixos de helicóides ou por ângulos de Euler.

Assumindo que o referencial absoluto ( $A$ ) tenha vetores unitários  $(i, j, k)$  e o móvel ( $B$ ), os vetores unitários  $(u, v, w)$ , é possível representar  $(u, v, w)$  em função de  $(i, j, k)$  da seguinte forma:

$$u^A = u_x i + u_y j + u_z k \quad (\text{A.2})$$

$$v^A = v_x i + v_y j + v_z k \quad (\text{A.3})$$

$$w^A = w_x i + w_y j + w_z k \quad (\text{A.4})$$

É possível representar o ponto  $P$  em ambos os referenciais:

$$p^A = p_x i + p_y j + p_z k \quad (\text{A.5})$$

$$p^B = p_u u + p_v v + p_w w \quad (\text{A.6})$$

Substituindo os vetores unitários  $(u, v, w)$  em função das suas projeções no referencial fixo  $(i, j, k)$ , passa-se a ter o valor do vetor  $p$  neste último referencial, ou seja:

$$p^A = p_u(u_x i + u_y j + u_z k) + p_v(v_x i + v_y j + v_z k) + p_w(w_x i + w_y j + w_z k) \quad (\text{A.7})$$

$$p^A = (p_u u_x + p_v v_x + p_w w_x)i + (p_u u_y + p_v v_y + p_w w_y)j + (p_u u_z + p_w w_z + p_v v_z)k \quad (\text{A.8})$$

Assim sendo, comparando as Eqs. A.6 e A.8, é possível escrever:

$$p_x = p_u u_x + p_v v_x + p_w w_x \quad (\text{A.9})$$

$$p_y = p_u u_y + p_v v_y + p_w w_y \quad (\text{A.10})$$

$$p_z = p_u u_z + p_v v_z + p_w w_z \quad (\text{A.11})$$

Agrupando na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Assim sendo, todo deslocamento de um corpo rígido sobre um ponto fixo pode ser representado como uma rotação em torno de um único eixo e pode ser determinado através de uma transformação ortogonal que é a própria matriz de rotação, o que é conhecido como Teorema de Euler.

$$p^A = R_B^A p^B \quad (\text{A.13})$$

onde,

$$R_B^A = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

A matriz  $R_B^A$  é denominada matriz de rotação que move o referencial  $B$  em relação ao referencial  $A$ , representando completamente a orientação de  $B$  em relação a  $A$ , sendo formada por 3 vetores coluna unitários ortogonais, o que faz com que a mesma seja ortonormal, onde

vale as seguintes condições:

$$u^2 = u^T u = 1 \quad (\text{A.15})$$

$$v^2 = v^T v = 1 \quad (\text{A.16})$$

$$w^2 = w^T w = 1 \quad (\text{A.17})$$

$$u^T v = v^T w = w^T u = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$u \times v = w = -(v \times u) \quad (\text{A.19})$$

$$v \times w = u = -(w \times v) \quad (\text{A.20})$$

$$w \times u = v = -(u \times w) \quad (\text{A.21})$$

$$\det(R_B^A) = 1 \quad (\text{A.22})$$

$$R_B^A = \begin{bmatrix} u^A & v^A & w^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^{B^T} \\ j^{B^T} \\ k^{B^T} \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$R_A^B = R_B^{A^{-1}} = R_B^{A^T} \quad (\text{A.24})$$

### A.1.2 Teorema de Chasles – Representação da Localização

O Teorema de Chasles afirma que todo deslocamento espacial de um corpo rígido pode ser representado pela soma vetorial das parcelas: (1) uma rotação sobre o eixo do helicóide e (2) uma translação.

$$p^A = R_B^A p^B + q^A \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{bmatrix} p_x^A \\ p_y^A \\ p_z^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x^B \\ p_y^B \\ p_z^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x^A \\ q_y^A \\ q_z^A \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

A matriz de transformação homogênea (4x4) funciona como uma forma compacta de representação do Teorema de Chasles.

$$T_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & q_x^A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & q_y^A \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & q_z^A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_B^A & q^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

O vetor  $p^A = [p_x^A \ p_y^A \ p_z^A]^T$  ganha uma dimensão e fica representado na forma homogênea  $\tilde{p}^A = [p_x^A \ p_y^A \ p_z^A \ 1]^T$ .

Assim sendo, tem-se:

$$\tilde{p}^A = T_B^A \tilde{p}^B \quad (\text{A.28})$$

A matriz de transformação homogênea possui inversa, embora não seja ortogonal, ou seja:

$$[T_B^A]^{-1} \neq [T_B^A]^T \quad (\text{A.29})$$

A determinação de  $T_B^A$  pode ser feita pré-multiplicando a Eq. A.25 pela inversa da matriz de rotação, como segue:

$$[R_B^A]^{-1} p^A = [R_B^A]^{-1} R_B^A p^B + [R_B^A]^{-1} q^A \quad (\text{A.30})$$

Como a matriz de rotação é ortogonal, sua inversa é igual a sua transposta (Eq. A.24), assim a Eq. A.30 pode ser reescrita isolando  $p^B$  como:

$$p^B = [R_B^A]^T p^A - [R_B^A]^T q^A \quad (\text{A.31})$$

Adotando a forma homogênea  $\tilde{p}$  do vetor  $p$ , a Eq. A.31 pode ser reescrita como:

$$\tilde{p}^B = T_B^{A^{-1}} \tilde{p}^A \quad (\text{A.32})$$

onde,

$$[T_B^A]^{-1} = \begin{bmatrix} [R_B^A]^T & -[R_B^A]^T q^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & -a_{11}q_x^A - a_{21}q_y^A - a_{31}q_z^A \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & -a_{12}q_x^A - a_{22}q_y^A - a_{32}q_z^A \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -a_{13}q_x^A - a_{23}q_y^A - a_{33}q_z^A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

## A.2 Cinemática Direta de Manipuladores Seriais

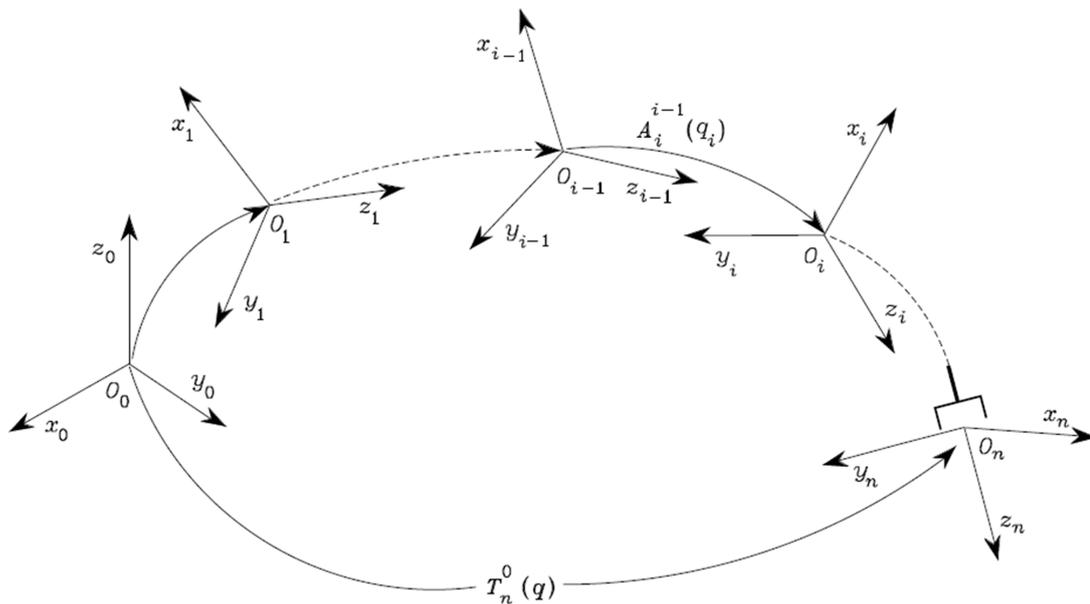
Do ponto de vista topológico, um manipulador serial consiste uma estrutura composta por uma única seqüência de juntas e corpos formando uma cadeia cinemática aberta, onde uma extremidade é considerada base e na outra tem-se um efetuador, permitindo a manipulação de objetos no espaço.

A cinemática direta objetiva calcular a posição e orientação do efetuador em função das variáveis de juntas, e para isso utiliza matrizes de transformação homogêneas, se prestam para representar a localização de corpos rígidos no espaço.

Seja um manipulador de cadeia aberta constituído por  $n + 1$  elos e  $n$  juntas, onde o elo 0 (zero) é associado à terra.

Considere que cada junta contribua com somente um grau de mobilidade.

Assuma que em cada elo exista um referencial solidário ao elo como representado na Fig. 80, e que exista uma matriz de transformação homogênea  $A_i^{i-1}$  representando a localização de um sistema de eixos coordenados localizado na junta  $i$  medido num referencial localizado na junta  $i - 1$ , para  $i = 1, \dots, n$ .



**Figura 80:** Transformações de coordenadas em cadeia cinemática aberta

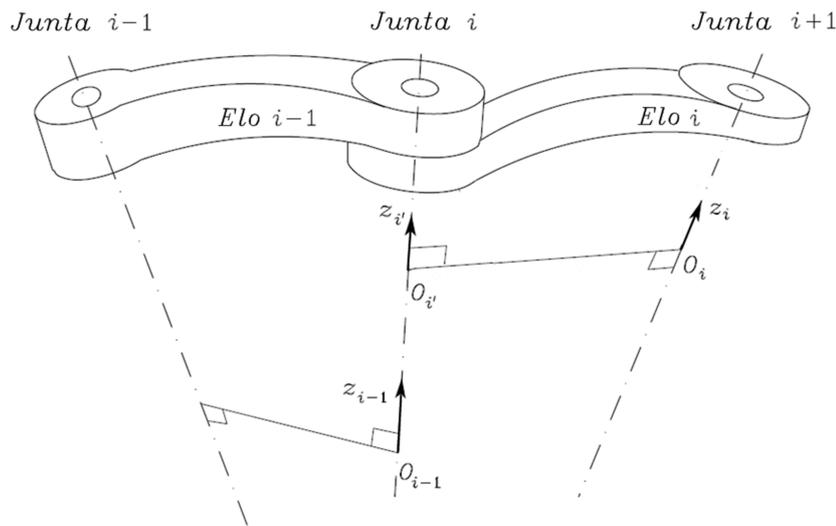
É possível relacionar o referencial da base com o da ferramenta, obtendo a localização (posição e orientação) da ferramenta no referencial da base, pela seguinte composição de matrizes de transformação homogêneas, da seguinte forma:

$$T_n^0(q) = A_1^0(q_1) A_2^1(q_2) \dots A_i^{i-1}(q_i) \dots A_n^{n-1}(q_n) \quad (\text{A.34})$$

Entretanto, a associação de um referencial à uma junta pode se dar de inúmeras maneiras. A literatura adota a convenção de Denavit-Hartenberg (SICILIANO et al., 2008), de modo a sistematizar a solidarização do referencial ao elo, e encontra-se apresentada na próxima seção.

### A.2.1 Convenção de Denavit-Hartenberg

Observe a Fig. 81 que mostra dois elos intermediários de um manipulador. Como ponto de partida, nomina-se os elos e as juntas, no caso tem-se os elos  $i - 1$  e  $i$ , e as juntas  $i - 1$ ,  $i$  e  $i + 1$ .



**Figura 81:** Determinação dos centros dos sistemas coordenados  $O_{i-1}$  e  $O_i$

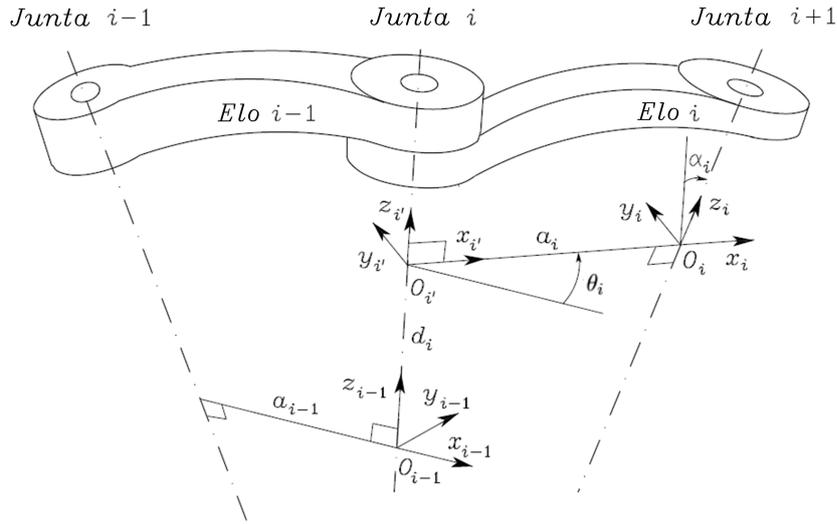
Segue a determinação dos eixos das juntas a associar a cada eixo, um eixo  $z$  de um sistema de eixos coordenados. Assim sendo, o eixo da junta  $i$  terá associado o eixo coordenado  $z_{i-1}$ , e sobre o eixo da junta  $i + 1$ , associa-se outro eixo coordenado  $z_i$ , como mostra a Fig. 81.

Assumindo que só existam juntas de rotação e/ou prismáticas, é possível determinar o eixo sobre o qual a junta rotaciona, ou o eixo ao longo do qual ocorrerá a translação.

Na seqüência, é preciso determinar a normal comum entre os eixos de duas juntas sucessivas. O encontro da normal com o eixo coordenado  $z$ , determinará a origem do sistema de coordenadas, ou seja,  $O_{i-1}$  sobre  $z_{i-1}$  e  $O_i$  sobre  $z_i$ , como mostrado na Fig 81. Neste ponto surge um sistema de eixos coordenado auxiliar com a denominação  $x_{i'}y_{i'}z_{i'}$ , onde  $z_{i-1} \equiv z_{i'}$ .

Determina-se os eixos coordenados  $x_{i-1}$ ,  $x_{i'}$  e  $x_i$  sobre a normal comum, no sentido da junta anterior para a seguinte, ou seja, o sentido de  $x_{i-1}$  da junta  $i - 1$  para  $i$  e o de  $x_i$  da junta  $i$  para  $i + 1$ , como mostrado na Fig. 82. O sentido de  $x_{i'}$  acompanha o de  $x_i$ .

Determina-se o eixo coordenado  $y_i$ , ortogonais a  $x_i$  e a  $z_i$ , bem como os eixos  $y_{i-1}$  e  $y_{i'}$ , obedecendo a regra da mão-direita, como mostrado na Fig 82.



**Figura 82:** Determinação dos parâmetros cinemáticos de Denavit-Hartenberg

A Fig. 82 mostra como é possível determinar os parâmetros cinemáticos de Denavit-Hartenberg, ou seja:

$a_i$  - distância entre  $O_i$  e  $O_{i'}$ ;

$d_i$  - coordenada de  $O_{i'}$  sobre o eixo  $z_{i-1}$ ;

$\alpha_i$  - ângulo entre os eixos  $z_{i-1}$  e  $z_i$  em torno do eixo  $x_i$ ; e,

$\theta_i$  - ângulo entre os eixos  $x_{i-1}$  e  $x_i$  em torno do eixo  $z_{i-1}$ .

Usando a propriedade da matriz de transformação homogênea para projetar um sistema de eixos coordenados sobre outro, tem-se que:

1. o sistema  $i'$  inicialmente era coincidente com o sistema  $i - 1$ , entretanto sofreu uma translação de  $d_i$  ao longo do eixo  $z_i$  e uma rotação  $\theta_i$  em torno do mesmo eixo  $z_i$ , podendo ser representada pela matriz de transformação homogênea  $A_{i'}^{i-1}$ , ou seja:

$$A_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

2. o sistema  $i$  inicialmente era coincidente com o sistema  $i'$ , entretanto sofreu uma translação de  $a_i$  ao longo do eixo  $x_{i'}$  e uma rotação de  $\alpha_i$  em torno do mesmo eixo  $x_{i'}$ , podendo ser

representada pela matriz de transformação homogênea  $A_i^{i'}$ , ou seja:

$$A_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

A projeção do sistema  $i$  no sistema  $i - 1$  é representada pela matriz de transformação  $A_i^{i-1}$ , ou seja:

$$A_i^{i-1}(q_i) = A_i^{i'} A_{i'}^{i-1} \quad (\text{A.37})$$

$$(\text{A.38})$$

Substituindo as Eq. A.35 e A.36 em A.38, tem-se:

$$A_i^{i-1}(q_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

Cabe ressaltar que a matriz de transformação homogênea do sistema  $i - 1$  medida no sistema  $i$  é função somente do parâmetro relativo à variável de junta  $q_i$ , ou seja, para uma junta de rotação o único parâmetro variável é  $\theta_i$ , e para uma junta prismática é  $d_i$ . Os demais parâmetros, uma vez estabelecidos, permanecem constantes.

A convenção de Denavit-Hartenberg permite determinar a cinemática direta por meio do estabelecimento de cada matriz de transformação homogênea (Eq. A.39) sendo função do parâmetro que representa a variável de cada junta, e aplicando a composição de matrizes de transformação homogêneas apresentada na Eq. A.34.

É possível estabelecer um procedimento de modo a operacionalizar a determinação da cinemática direta de manipuladores seriais, com  $n$  elos e  $n - 1$  juntas, como enumerado a seguir:

1. numere os elos ( $i=1, \dots, n$ ) e as juntas ( $i=1, \dots, n-1$ ), escolhendo o eixo  $z_i$  sobre o eixo da junta  $i + 1$ ;
2. determine o sistema de coordenadas absoluto 0;
  - (a) escolha  $z_0$  sobre a direção do eixo da junta 1;
  - (b) escolha  $x_0$  e  $y_0$  seguindo a regra da mão-direita;

Os passos 3 a 5 devem ser repetidos para  $i = 1, \dots, n - 1$ .

3. localize as origens dos sistemas coordenados  $O_i$  na interseção do eixo  $z_i$  com a normal comum aos eixos  $z_{i-1}$  e  $z_i$ , observando:

se  $z_i \parallel z_{i+1} \wedge$  junta  $i$  for de rotação  $\Rightarrow$  escolher  $O_i / d_i = 0$ ;

se  $z_i \parallel z_{i+1} \wedge$  junta  $i$  for prismática  $\Rightarrow$  escolher  $O_i$  no limite da junta (no zero da junta);

4. escolher o eixo  $x_i$  sobre a normal comum aos eixos  $z_{i-1}$  e  $z_i$ , com sentido que vai da junta  $i$  para a junta  $i + 1$ ;

5. escolher o eixo  $y_i$  obedecendo a regra da mão-direita;

6. determinar o sistema  $n$ , da seguinte forma:

- (a) determinar eixo  $z_n$ , observando se a junta  $n - 1$  for:

de rotação  $\Rightarrow$  alinhar  $z_n$  com  $z_{n-1}$ ;

prismática  $\Rightarrow$  escolher  $z_n$  arbitrariamente;

- (b) determinar  $x_n$  conforme o passo 4; e,

- (c) determinar  $y_n$  conforme o passo 5;

7. determinar os parâmetros de Denavit-Hartenberg para  $i = 1, \dots, n$ , onde:

$a_i$  - distância entre  $O_i$  e  $O_{i'}$

$d_i$  - coordenada de  $O_{i'}$  sobre o eixo  $z_{i-1}$

$\alpha_i$  - ângulo entre os eixos  $z_{i-1}$  e  $z_i$  em torno do eixo  $x_i$

$\theta_i$  - ângulo entre os eixos  $x_{i-1}$  e  $x_i$  em torno do eixo  $z_{i-1}$

8. determine a matrizes de transformação homogêneas para  $i = 1, \dots, n$ , ou seja:

$$A_i^{i-1}(q_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

9. determine a composição mas matrizes de transformação homogêneas, ou seja:

$$T_n^0(q) = A_1^0(q_1) A_2^1(q_2) \dots A_i^{i-1}(q_i) \dots A_n^{n-1}(q_n) \quad (\text{A.41})$$

10. determine as matrizes de transformação homogêneas  $T_0^b$  entre o referencial absoluto e a base escolhida; e  $T_e^n$  entre a ferramenta e último. Geralmente são matrizes identidade, pois na hora da escolha, costuma-se assumir 0 à base e  $n$  à ferramenta. Assim sendo:

$$T_e^b(q) = T_0^b T_n^0 T_e^n \quad (\text{A.42})$$

A matriz  $T_e^b(q)$  fornece a cinemática direta do manipulador serial, transformando a posição e orientação do sistema de coordenadas da ferramenta para o sistema de coordenadas da base, em função dos valores estabelecidos para as variáveis das  $n - 1$  juntas do manipulador serial.

### A.3 Cinemática Diferencial de um Corpo Rígido

As equações diferenciais que governam o movimento de um corpo rígido envolvem sempre derivadas temporais de funções vetoriais. Analisando as propriedades cinemáticas de um ponto  $p$  pertencente a um corpo rígido, que possui um vetor posição  $p$  escrito com respeito a um referencial e que pode variar em função do tempo. Geralmente são necessários dois sistemas de coordenadas para descrever a natureza do vetor: um permitindo que a mudança do vetor no tempo seja medida, e outro para que se possa expressar o vetor. Ou seja,  $p^B$  significa a posição do vetor do ponto  $P$  com respeito ao referencial  $B$  e  $(p^B)^A$  significa que  $p^B$  é expresso no referencial  $A$ . Analogamente a velocidade de  $p$  é definida tomando a derivada de  $p^B$  na base do tempo, ou seja:

$$v_p^B = \frac{d p^B}{dt} \quad (\text{A.43})$$

Entretanto o vetor pode ser expresso em qualquer outro referencial, ou seja, a derivação é feita com respeito ao referencial  $B$  e o resultado pode ser expresso no referencial  $A$ .

$$(v_p^B)^A = \left( \frac{d p^B}{dt} \right)^A \quad (\text{A.44})$$

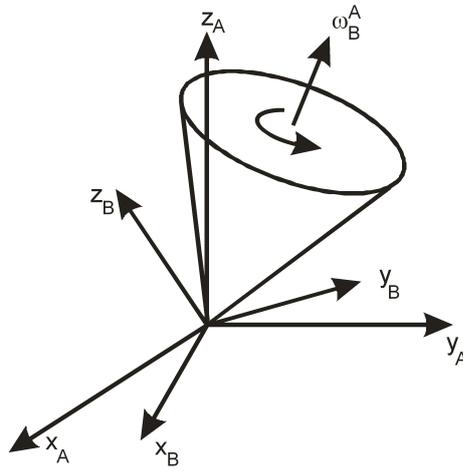
Quando os dois índices super-escritos forem os mesmos, o mais interno pode ser omitido, ou seja:

$$(p^B)^A = R_B^A (p^B)^B \quad \Rightarrow \quad p^A = R_B^A p^B \quad (\text{A.45})$$

#### A.3.1 Velocidade Angular

**Definição A.3.1** – O vetor  $w_B^A$  é denominado vetor velocidade angular e descreve a taxa de variação da orientação do corpo rígido.

A orientação de um corpo rígido pode ser representado pela matriz de rotação  $R_B^A$ , ou seja, a orientação de um referencial  $B$  solidário ao corpo rígido é medida em relação ao referencial  $A$ , sendo que ambos os referenciais possuem a origem em comum, como representado a Fig. 83.



**Figura 83:** Rotação do referencial móvel sobre o referencial absoluto

A velocidade tangencial de um ponto  $p$  pertencente ao corpo rígido quando este corpo encontra-se sob efeito de um vetor velocidade angular  $w_B^A$  é dada por:

$$v_p^A = w_B^A \times p^A \quad (\text{A.46})$$

onde  $w_B^A = [w_x \ w_y \ w_z]^T$ , sendo  $w_x$ ,  $w_y$  e  $w_z$  parâmetros independentes representando as componentes em  $x$ ,  $y$ ,  $z$  em relação ao referencial  $A$ , da velocidade angular do referencial  $B$ , ou seja, da velocidade angular do corpo rígido.

O produto vetorial pode ser escrito na forma de determinante, logo tem-se que:

$$\begin{aligned} w_B^A \times p^A &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ w_x & w_y & w_z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} (p_z w_y - p_y w_z)i \\ (p_x w_z - p_z w_x)j \\ (p_y w_x - p_x w_y)k \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

A Eq. A.47 pode ser escrita da seguinte forma:

$$w_B^A \times p^A = \Omega(w_B^A) p^A \quad (\text{A.48})$$

onde,

$$\Omega(w_B^A) = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.49})$$

Assim a Eq. A.46 pode ser reescrita na forma de multiplicação de uma matriz (3x3) por

um vetor (3x1), como segue:

$$v_p^A = \Omega(w_B^A) p^A \quad (\text{A.50})$$

Pelo teorema de Euler (Eq. A.13), em que  $p^A = R_B^A p^B$ , a Eq. A.46 ainda pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d(p^A)}{dt} = \Omega(w_B^A) R_B^A p^B \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{d(R_B^A p^B)}{dt} = \Omega(w_B^A) R_B^A p^B \quad (\text{A.52})$$

$$\dot{R}_B^A p^B + R_B^A \dot{p}^B = \Omega(w_B^A) R_B^A p^B \quad (\text{A.53})$$

Como o referencial  $B$  se move solidário ao corpo, então  ${}^B\dot{p} = 0$ . Assim a Eq.A.53 pode ser escrita como:

$$\dot{R}_B^A p^B = \Omega(w_B^A) R_B^A p^B \quad (\text{A.54})$$

Logo, é possível chegar a uma relação para  $\dot{R}_B^A$ , ou seja:

$$\dot{R}_B^A = \Omega(w_B^A) R_B^A \quad (\text{A.55})$$

Assim das Eq. A.47 e A.55 tem-se que a matriz  $\Omega(w_B^A)$  é dada por:

$$\Omega(w_B^A) = \dot{R}_B^A [R_B^A]^{-1} \quad (\text{A.56})$$

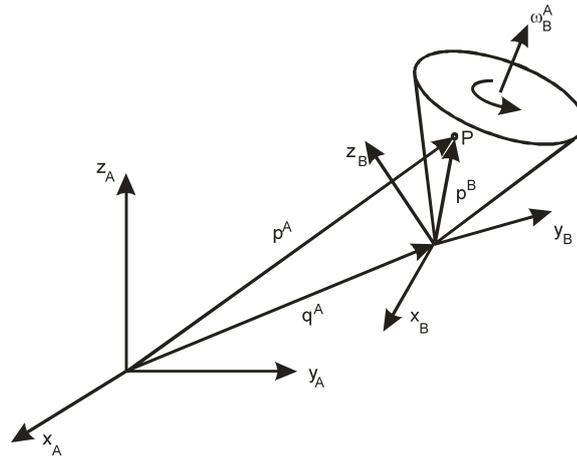
### A.3.2 Velocidade Linear

Deslocando a origem do referencial móvel da coincidência com o referencial absoluto, tem-se que o vetor posição do ponto  $P$  em relação ao referencial absoluto ( $A$ ), como mostrado na Fig. 84, é dado pela Eq. A.25. Derivando, tem-se:

$$p^A = q^A + R_B^A p^B \Rightarrow v_p^A = v_q^A + \frac{d}{dt}(R_B^A p^B) \quad (\text{A.57})$$

Valendo-se da relação da derivada da matriz de rotação Eq. A.55, do Teorema de Euler (Eq. A.13), e da Eq. A.50 tem-se:

$$v_p^A = v_q^A + \dot{R}_B^A p^B + R_B^A v_p^B \quad (\text{A.58})$$



**Figura 84:** Rotação e translação do referencial móvel sobre o referencial absoluto

Como  $\dot{R}_B^A = \Omega(w_B^A) R_B^A$ , tem-se:

$$v_p^A = v_q^A + \Omega(w_B^A) R_B^A p^B + R_B^A v_p^B \quad (\text{A.59})$$

Como  $p^A = q^A + R_B^A p^B$ , tem-se:

$$v_p^A = v_q^A + \Omega(w_B^A) (p^A - q^A) + R_B^A v_p^B \quad (\text{A.60})$$

Como  $\Omega(w_B^A) p^A = w_B^A \times p^A$ , tem-se:

$$v_p^A = v_q^A + w_B^A \times (p^A - q^A) + R_B^A v_p^B \quad (\text{A.61})$$

Supondo que o ponto  $P$  seja invariante no tempo relativamente ao referencial  $B$ , assim a Eq. A.61 fica reduzida a dois termos, pois a velocidade do ponto  $P$  em relação ao referencial  $B$  é identicamente nula.

$$v_p^A = v_q^A + w_B^A \times (p^A - q^A) \quad (\text{A.62})$$

## A.4 Análise do Jacobiano de Manipuladores Seriais

A cinemática desempenha um papel fundamental no estudo da mecânica, pois trata justamente do movimento dos sistemas mecânicos. Convém definir sistemas mecânicos.

**Definição A.4.1** – *Sistemas Mecânicos* – quando um conjunto de partículas ou de corpos rígidos se move em relação a um dado referencial, de tal modo que haja uma parcial ou total interdependência entre seus movimentos, tem-se um sistema mecânico (TENENBAUM, 1997). A determinação da configuração do sistema se faz por meio de um conjunto de funções escalares no tempo,  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ , denominadas coordenadas generalizadas, ou simplesmente,

*coordenadas do sistema.*

Para obter as equações de movimento de um sistema mecânico é necessário expressar velocidades e acelerações de seus elementos como funções das coordenadas que descrevem a configuração do sistema (TENENBAUM, 1997). Uma vez que todo o movimento é relativo, tem-se que o movimento traz consigo a necessidade do conceito de referencial, pois será descrito em relação a um observador que estará em um dado referencial, podendo por conveniência mudar para outros referenciais.

Em algumas aplicações específicas, como no caso de manipuladores seriais, se faz necessário mover o efetuador final do manipulador ou ferramenta sobre trajetórias com uma velocidade determinada, o que implica que o movimento de cada junta deve ser criteriosamente coordenado (TSAI, 1999). Existem dois tipos de problemas a serem analisados no que tange à velocidade: os de cinemática diferencial direta e de cinemática diferencial inversa. No problema de cinemática diferencial direta, as juntas se movimentam na base do tempo e em função desta movimentação das juntas, o estado da ferramenta é determinado. Já no problema de cinemática diferencial inversa, o estado da ferramenta é conhecido, e em função de cada posição da ferramenta na base do tempo, determina-se a posição de cada junta na base do tempo, ou seja deseja-se determinar o movimento de cada junta, de modo a atender o estado desejado para a ferramenta.

O espaço vetorial medido nas variáveis de junta é conhecido como espaço das juntas. Já o espaço vetorial medido no efetuador final do manipulador ou ferramenta é conhecido como espaço da ferramenta.

**Definição A.4.2** – *Jacobiano é definido como a transformação linear entre os espaço composto pelo movimento das juntas na base do tempo no espaço das juntas, para o espaço de velocidades do efetuador final.*

O Jacobiano é fundamental na geração de trajetórias de geometrias estabelecidas no espaço do efetuador final. Existem diferentes métodos de formulação do Jacobiano encontrados na literatura (TSAI, 1999). Dentre eles, é possível citar o Jacobiano convencional e o Jacobiano baseado em helicoides.

Outra importante utilidade do Jacobiano é na determinação de configurações ditas singulares, ou seja, em configurações onde um ou mais graus de liberdade são perdidos em manipuladores seriais. Nas configurações singulares a matriz do Jacobiano perde o posto completo.

Assim sendo, pode-se resumir que o objetivo da cinemática diferencial é determinar as velocidades lineares e angulares do efetuador final em função das velocidades das juntas do

manipulador, ou seja:

$$\dot{p} = J_v(q) \dot{q} \quad (\text{A.63})$$

$$w = J_w(q) \dot{q} \quad (\text{A.64})$$

onde  $J_v(q)$  é uma matriz (3xn) que aplicada às velocidades das juntas, retorna o vetor velocidade linear do efetuador final, e  $J_w(q)$  é outra matriz (3xn) que aplicada às velocidades das juntas, retorna o vetor angular do efetuador final.

O vetor velocidade generalizada composto pelos vetores velocidades linear e angular, pode ser expresso na seguinte forma, conhecida como equação da cinemática diferencial do manipulador:

$$v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ w \end{bmatrix} = J(q) \dot{q} \quad (\text{A.65})$$

A matriz  $J$ , com dimensão (6xn), é conhecida como Jacobiano geométrico, ou simplesmente Jacobiano, dado por:

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_v(q) \\ J_w(q) \end{bmatrix} \quad (\text{A.66})$$

O Jacobiano pode ser escrito em função das juntas do manipulador da seguinte forma:

$$J = \begin{bmatrix} J_{v_1} & \cdots & J_{v_i} & \cdots & J_{v_n} \\ J_{w_1} & \cdots & J_{w_i} & \cdots & J_{w_n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.67})$$

onde:

$J_{v_i} \dot{q}$  - representa a contribuição da junta  $i$  na velocidade linear do efetuador; e,

$J_{w_i} \dot{q}$  - representa a contribuição da junta  $i$  na velocidade angular do efetuador.

Para juntas prismáticas tem-se que:

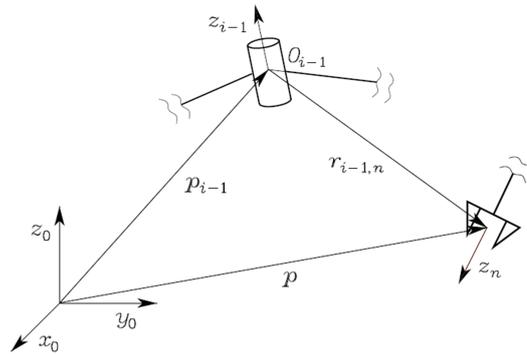
$$\begin{bmatrix} J_{v_i} \\ J_{w_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.68})$$

onde  $z_{i-1}$  é o vetor  $z$  do sistema de coordenadas  $(i - 1)$  em relação à base.

Para juntas rotativas tem-se que:

$$\begin{bmatrix} J_{v_i} \\ J_{w_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.69})$$

onde  $p$  é o vetor posição do efetuador em relação à base, e  $p_{i-1}$  é o vetor posição do sistema  $i - 1$  em relação à base, como mostrado na Fig. 85.



**Figura 85:** Contribuição da junta  $i$  na velocidade da ferramenta

Os vetores  $z_{i-1}$ ,  $p$  e  $p_{i-1}$  são calculados empregando a matriz de transformação homogênea  $T_i^{i-1}$ , que estabelece a relação cinemática entre os sistemas  $i$  e  $i - 1$  empregando os parâmetros de Denavit-Hartenberg, isto é:

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} R_i^{i-1} & r_{i,i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.70})$$

onde:

$a_i$  - distância entre  $O_i$  e  $O_{i'}$ ;

$d_i$  - coordenada de  $O_{i'}$  sobre o eixo  $z_{i-1}$ ;

$\alpha_i$  - ângulo entre os eixos  $z_{i-1}$  e  $z_i$  em torno do eixo  $x_i$ ; e,

$\theta_i$  - ângulo entre os eixos  $x_{i-1}$  e  $x_i$  em torno do eixo  $z_{i-1}$ .

O vetor  $z_{i-1}$  é dado pela terceira coluna da matriz de rotação  $R_{i-1}^0$ , isto é:

$$z_{i-1} = R_1^0(q_1) \dots R_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) z_0 \quad (\text{A.71})$$

onde  $z_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$ , que seleciona a terceira coluna, ficando sub-entendido que as matrizes de rotação são as correspondentes ao manipulador  $k$  e, portanto, são calculadas empregando os parâmetros de Denavit-Hartenberg do  $k$ -ésimo manipulador.

O vetor  $p$  é dado pelos primeiros três elementos da quarta coluna da matriz de transformação homogênea  $T_N^0$ , ou seja, expressando  $p$  na forma homogênea (4x1)  $\tilde{p} = [p^T \ 1]^T$ , este vetor é dado por:

$$\tilde{p} = T_1^0(q_1) \dots T_N^{N-1}(q_N) \tilde{r}_0 \quad (\text{A.72})$$

onde  $\tilde{r}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ , que seleciona a quarta coluna.

O vetor  $p_{i-1}$  é obtido de maneira análoga ao cálculo de  $p$ , sendo que  $\tilde{p}_{i-1} = [p_{i-1}^T \ 1]^T$  é dado por:

$$\tilde{p}_{i-1} = T_1^0(q_1) \dots T_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})\tilde{r}_0 \quad (\text{A.73})$$



## APÊNDICE B

# Robótica Baseada em Helicoides

Neste apêndice faz-se uma revisão bibliográfica da modelagem da cinemática direta e da cinemática diferencial de robôs seriais baseado em Helicoides. Inicialmente é apresentada a Teoria dos Helicoides focando a representação das juntas prismática e de rotação. Passa-se à representação da rotação em torno de um ponto fixo por meio de eixo de helicoides seguido do deslocamento helicoidal. Descreve-se o método dos deslocamentos dos helicoides sucessivos para determinação da cinemática direta do manipuladores seriais. Por fim, é feita a determinação do eixo do helicoides para um movimento instantâneo genérico, o que permite analisar o Jacobiano baseado em helicoides.

### B.1 Teoria dos Helicoides

Um helicoides é um ente geométrico definido por: (1) uma reta no espaço, que representa a direção do eixo do helicoides; (2) um vetor ligando a origem do sistemas de coordenadas cartesianas do referencial absoluto a um ponto da pertencente a reta que define o eixo do helicoides; (3) um ângulo caracterizando o movimento rotacional em torno do eixo do helicoides; e (4) um comprimento representando a translação sobre o eixo do helicoides.

Um helicoides  $\$$  fica completamente determinado quando uma amplitude ou intensidade é multiplicada pelo respectivo helicoides unitário  $\hat{\$}$ . Assim sendo:

$$\$ = \dot{q} \hat{\$} \tag{B.1}$$

Para a junta de rotação  $\dot{q} = \dot{\theta}$  e para a prismática  $\dot{q} = \dot{d}$ .

O Helicoides unitário é convenientemente representado por um par de vetores, da seguinte

forma:

$$\hat{\$} = \begin{bmatrix} s \\ s_0 \times s + h s \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

O passo ( $h$ ) é a razão da translação ao longo do eixo de Helicoide pela rotação em torno do mesmo eixo. Também é resultado da razão entre as velocidades de translação e de rotação vistos instantaneamente, ou seja:

$$h = \frac{d}{\theta} \quad \Leftarrow \quad \text{para deslocamento finito} \quad (\text{B.3})$$

$$h = \frac{\dot{d}}{\dot{\theta}} \quad \Leftarrow \quad \text{para deslocamento infinitesimal} \quad (\text{B.4})$$

Como existem retas envolvidas é importante buscar uma forma de representação que permita localizá-la no espaço tridimensional.

Em 1865, Julius Plücker mostrou que uma reta poderia ser representada como um elemento geométrico e que possui coordenadas próprias (DAVIDSON; HUNT, 2004). Assim sendo, a reta no espaço geométrico de três dimensões pode ser representada por um par de vetores onde o primeiro vetor, com três coordenadas representa a direção da reta e o segundo com a direção de outra reta ortogonal à que está sendo representada e que passe pela origem do eixos coordenados. Logo as denominadas coordenadas normalizadas de Plücker para uma reta no espaço tridimensional são:

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \\ P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Esta reta pode ser representada em termos de um único vetor não unitário, e quando isso acontece as coordenadas recebem a simbologia de tipo caligráfico, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{P} \\ \mathcal{Q} \\ \mathcal{R} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Como os dois vetores componentes são ortogonais, o produto escalar entre eles é identicamente nulo, o que significa que somente cinco das seis componentes são independentes. Assim sendo, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{P} \\ \mathcal{Q} \\ \mathcal{R} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.7})$$

Logo surge a seguinte expressão conhecida como identidade quadrática (DAVIDSON; HUNT, 2004).

$$\mathcal{L} \mathcal{P} + \mathcal{M} \mathcal{Q} + \mathcal{N} \mathcal{R} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Buscando uma ligação desta forma de representação do helicóide com as coordenadas de Plücker para a reta, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} s \\ s_0 \times s + h s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ (s_{0y}s_z - s_{0z}s_y) + h s_x \\ (s_{0z}s_x - s_{0x}s_z) + h s_y \\ (s_{0x}s_y - s_{0y}s_x) + h s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{P} \\ \mathcal{Q} \\ \mathcal{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h \mathcal{L} \\ h \mathcal{M} \\ h \mathcal{N} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

De modo a representar esta soma vetorial em um único vetor dual, assumamos que:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{P}^* \\ \mathcal{Q}^* \\ \mathcal{R}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{P} \\ \mathcal{Q} \\ \mathcal{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h \mathcal{L} \\ h \mathcal{M} \\ h \mathcal{N} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Isolando o vetor representativo da reta, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{P} \\ \mathcal{Q} \\ \mathcal{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{P}^* \\ \mathcal{Q}^* \\ \mathcal{R}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h \mathcal{L} \\ h \mathcal{M} \\ h \mathcal{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{P}^* - h \mathcal{L} \\ \mathcal{Q}^* - h \mathcal{M} \\ \mathcal{R}^* - h \mathcal{N} \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Substituindo os termos do vetor da reta na igualdade quadrática, representada na Eq. B.8, tem-se que o passo do helicóide é dado pela Eq. B.14, como segue:

$$\mathcal{L} (\mathcal{P}^* - h\mathcal{L}) + \mathcal{M} (\mathcal{Q}^* - h\mathcal{M}) + \mathcal{N} (\mathcal{R}^* - h\mathcal{N}) = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{L} \mathcal{P}^* + \mathcal{M} \mathcal{Q}^* + \mathcal{N} \mathcal{R}^* - h(\mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2) = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$h = \frac{\mathcal{L} \mathcal{P}^* + \mathcal{M} \mathcal{Q}^* + \mathcal{N} \mathcal{R}^*}{\mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2} \quad (\text{B.14})$$

Para a junta de rotação, tem-se que a translação é identicamente nula, ou seja,  $d = 0$  o que implica que o passo é nulo,  $h = 0$ . Logo o helicóide unitário para uma junta de rotação é dado por:

$$\hat{\$} = \begin{bmatrix} s \\ s_0 \times s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \\ P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Com passo identicamente nulo, passa a ser representado exatamente como uma reta segundo as coordenadas de Plücker. O vetor  $(s_0 \times s)$  define o momento do eixo do Helicóide em torno da origem, e como o vetor  $s$  é ortogonal a  $(s_0 \times s)$ , logo o produto escalar entre eles é identicamente nulo, ou seja, somente cinco das seis componentes são independentes.

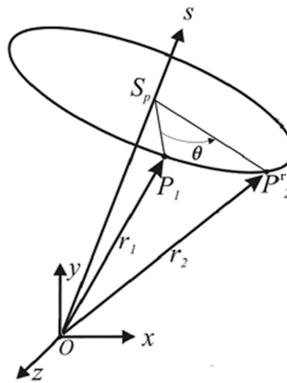
Para a junta prismática, tem-se somente translação, ou seja, a rotação é nula,  $\theta = 0$  o que resulta em um passo infinito. Assim o Helicóide unitário é dado por:

$$\hat{\$} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

### B.1.1 Representação da Rotação por Meio de Eixo de Helicoide

Como foi visto anteriormente, um corpo submetido à rotação em torno de um ponto fixo possui um eixo de rotação conhecido como eixo do Helicoide. Foi visto também que um ponto sobre este eixo não sofre mudanças de coordenadas  $(x,y,z)$ , além de dada a matriz de rotação entre duas posições distintas é possível determinar o ângulo  $\theta$  em torno do eixo do Helicoide, correspondente ao giro do corpo rígido.

A seguir serão determinadas as direções do eixo do Helicoide  $s$ , ou seja,  $(s_x, s_y, s_z)$  em função das componentes  $a_{ij}$  da matriz de rotação. Para isso, considere a Fig. 86, onde encontram-se duas posições sucessivas  $P_1$  e  $P_2^r$ , correspondente à rotação em torno do eixo do Helicoide  $S$ .



**Figura 86:** Rotação em torno do eixo do helicoide

Admita o vetor unitário  $s = [s_x, s_y, s_z]^T$  e que o sistema  $(x,y,z)$  seja o referencial fixo

Seja  $P_1$  a posição inicial de um ponto  $P$  pertencente ao corpo rígido e  $P_2^r$  corresponda à posição final do ponto  $P$  entre dois deslocamentos sucessivos. Assim sendo note que ocorre uma rotação em torno do eixo do helicoide  $S$  da posição  $P_1$  para  $P_2^r$ . Seja  $S_P$  um ponto sobre o eixo do helicoide pertencente ao plano perpendicular e que contenha os pontos  $P_1$  e  $P_2^r$ . Assim, analisando a geometria da Fig.86, as seguintes expressões vetoriais podem ser escritas:

$$OP_1 = OS_P + S_PP_1 \quad (\text{B.17})$$

$$OP_1 = P_1 \quad (\text{B.18})$$

$$OS_P = S_P = (P_1 \cdot s)s \quad (\text{B.19})$$

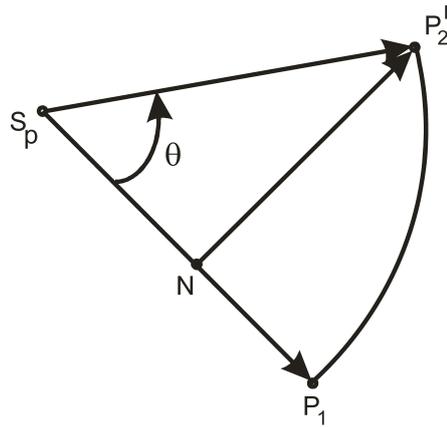
Assim sendo, tem-se que:

$$S_PP_1 = P_1 - (P_1 \cdot s)s \quad (\text{B.20})$$

Analogamente:

$$S_P P_2^r = P_2^r - (P_2^r \cdot s)s \quad (\text{B.21})$$

Considere agora a interseção do plano perpendicular à  $S$  passando pelos pontos  $P_1$  e  $P_2^r$ , determinando o ponto  $S_p$ . Seja  $N$  a projeção de  $S_P P_2^r$  sobre  $S_P P_1$ , como mostrado na Fig. 87. Logo  $NP_2^r \perp S_P P_1$  e  $S_P N = S_P P_2^r \cos \theta$ . Entretanto  $S_P P_2^r = S_P P_1$ , pois equivale a uma rotação de  $\theta$  em torno de  $S_P$ . Logo  $S_P N = S_P P_1 \cos \theta$ .



**Figura 87:** Projeção de  $S_P P_2^r$  sobre  $S_P P_1$

Sabendo ainda que:

$$\begin{aligned} s \times S_P P_2^r &= S \times [P_1 - (P_1 \cdot s)s] = \\ &= s \times P_1 - s \times (P_1 \cdot s)s = \\ &= s \times P_1 - (P_1 \cdot s)(s \times s) = \\ &= s \times P_1 \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

pois,  $(s \times s) = 0$ .

Deseja-se escrever a seguinte soma vetorial:

$$S_P P_2^r = S_P N + NP_2^r \quad (\text{B.23})$$

Para isso, tem-se que

$$NP_2^r = |NP_2^r| \left[ s \times \frac{S_P P_1}{|S_P P_1|} \right] \quad (\text{B.24})$$

Como:

$$|NP_2^r| = |S_P P_2^r| \sin \theta = |S_P P_1| \sin \theta \quad (\text{B.25})$$

Assim:

$$NP_2^r = (s \times S_P P_1) \sin \theta \quad (\text{B.26})$$

Os outros dois termos são:

$$S_P N = S_P P_1 \cos \theta \quad (\text{B.27})$$

$$S_P P_2^r = P_2^r - (P_2^r \cdot s)s \quad (\text{B.28})$$

Logo a soma vetorial desejada fica:

$$S_P P_2^r = S_P N + NP_2^r \quad (\text{B.29})$$

$$P_2^r - (P_2^r \cdot S)s = S_P P_1 \cos \theta + (s \times S_P P_1) \sin \theta \quad (\text{B.30})$$

Como:

$$S_P P_1 = P_1 - (P_1 \cdot s)s \quad (\text{B.31})$$

$$P_1 \cdot s = P_2^r \cdot s \quad (\text{B.32})$$

Tem-se que:

$$P_2^r - (P_1 \cdot s)s = (P_1 - (P_1 \cdot s)s) \cos \theta + (s \times (P_1 - (P_1 \cdot s)s)) \sin \theta \quad (\text{B.33})$$

Isolando  $P_2^r$ , tem-se:

$$P_2^r = (P_1 \cdot s)s - (P_1 \cdot s)s \cos \theta + P_1 \cos \theta + (s \times P_1 - (P_1 \cdot s)(s \times s)) \sin \theta \quad (\text{B.34})$$

$$P_2^r = P_1 \cos \theta + (1 - \cos \theta)(P_1 \cdot s)s + (s \times P_1) \sin \theta \quad (\text{B.35})$$

A Eq. B.35 é conhecida como fórmula de Rodrigues para o deslocamento esférico.

É possível colocar na forma do teorema de Euler ( $p^A = R_B^A p^B$ ), de modo a determinar as componentes da matriz de rotação, fazendo  $P_1 = p^B$  e  $P_2^r = p^A$ .

$$p^A = p^B \cos \theta + (1 - \cos \theta)(p^B \cdot s)s + (s \times p^B) \sin \theta \quad (\text{B.36})$$

$$\begin{bmatrix} p_x^A \\ p_y^A \\ p_z^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x^B \\ p_y^B \\ p_z^B \end{bmatrix} \cos \theta + (1 - \cos \theta) \left( \begin{bmatrix} p_x^B \\ p_y^B \\ p_z^B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_x^B \\ p_y^B \\ p_z^B \end{bmatrix} \right) \sin \theta =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} p_x^B \\ p_y^B \\ p_z^B \end{bmatrix} \cos \theta + (1 - \cos \theta) (p_x^B s_x + p_y^B s_y + p_z^B s_z) \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ s_x & s_y & s_z \\ p_x^B & p_y^B & p_z^B \end{vmatrix} \sin \theta = \\
&= \begin{bmatrix} p_x^B \\ p_y^B \\ p_z^B \end{bmatrix} \cos \theta + (1 - \cos \theta) (p_x^B s_x s_x + p_y^B s_y s_x + p_z^B s_z s_x) i + \\
&\quad + (1 - \cos \theta) (p_x^B s_x s_y + p_y^B s_y s_y + p_z^B s_z s_y) j + \\
&\quad + (1 - \cos \theta) (p_x^B s_x s_z + p_y^B s_y s_z + p_z^B s_z s_z) k + \\
&\quad + ((s_y p_z^B - s_z p_y^B) i + (s_z p_x^B - s_x p_z^B) j + (s_x p_y^B - s_y p_x^B) k) \sin \theta = \\
&= \begin{bmatrix} p_x^B \\ p_y^B \\ p_z^B \end{bmatrix} \cos \theta + (1 - \cos \theta) \begin{bmatrix} p_x^B s_x^2 + p_y^B s_y s_x + p_z^B s_z s_x \\ p_x^B s_x s_y + p_y^B s_y^2 + p_z^B s_z s_y \\ p_x^B s_x s_z + p_y^B s_y s_z + p_z^B s_z^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_y p_z^B - s_z p_y^B \\ s_z p_x^B - s_x p_z^B \\ s_x p_y^B - s_y p_x^B \end{bmatrix} \sin \theta = \\
&= \begin{bmatrix} p_x^B \cos \theta + p_x^B s_x^2 (1 - \cos \theta) + p_y^B s_y s_x (1 - \cos \theta) + \dots \\ p_y^B \cos \theta + p_x^B s_x s_y (1 - \cos \theta) + p_y^B s_y^2 (1 - \cos \theta) + \dots \\ p_z^B \cos \theta + p_x^B s_x s_z (1 - \cos \theta) + p_y^B s_y s_z (1 - \cos \theta) + \dots \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} \dots + p_z^B s_z s_x (1 - \cos \theta) + s_y p_z^B \sin \theta - s_z p_y^B \sin \theta \\ \dots + p_z^B s_z s_y (1 - \cos \theta) + s_z p_x^B \sin \theta - s_x p_z^B \sin \theta \\ \dots + p_z^B s_z^2 (1 - \cos \theta) + s_x p_y^B \sin \theta - s_y p_x^B \sin \theta \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} p_x^B (\cos \theta + s_x^2 (1 - \cos \theta)) + p_y^B (s_y s_x (1 - \cos \theta) - s_z \sin \theta) + \dots \\ p_x^B (s_x s_y (1 - \cos \theta) + s_z \sin \theta) + p_y^B (\cos \theta + s_y^2 (1 - \cos \theta)) + \dots \\ p_x^B (s_x s_z (1 - \cos \theta) - s_y \sin \theta) + p_y^B (s_y s_z (1 - \cos \theta) + s_x \sin \theta) + \dots \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} \dots + p_z^B (s_z s_x (1 - \cos \theta) + s_y \sin \theta) \\ \dots + p_z^B (s_z s_y (1 - \cos \theta) - s_x \sin \theta) \\ \dots + p_z^B (\cos \theta + s_z^2 (1 - \cos \theta)) \end{bmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta + s_x^2 (1 - \cos \theta) & s_y s_x (1 - \cos \theta) - s_z \sin \theta & s_z s_x (1 - \cos \theta) + s_y \sin \theta \\ s_x s_y (1 - \cos \theta) + s_z \sin \theta & \cos \theta + s_y^2 (1 - \cos \theta) & s_z s_y (1 - \cos \theta) - s_x \sin \theta \\ s_x s_z (1 - \cos \theta) - s_y \sin \theta & s_y s_z (1 - \cos \theta) + s_x \sin \theta & \cos \theta + s_z^2 (1 - \cos \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x^B \\ p_y^B \\ p_z^B \end{bmatrix}$$

Como:

$$\begin{bmatrix} p_x^A \\ p_y^A \\ p_z^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x^B \\ p_y^B \\ p_z^B \end{bmatrix} = R_B^A \begin{bmatrix} p_x^B \\ p_y^B \\ p_z^B \end{bmatrix} \quad (\text{B.37})$$

é possível determinar os termos da matriz de rotação em função da direção  $S$  do Helicoide e do ângulo  $\theta$  são:

$$a_{11} = \cos \theta + s_x^2 (1 - \cos \theta) \quad (\text{B.38})$$

$$a_{12} = s_y s_x (1 - \cos \theta) - s_z \sin \theta \quad (\text{B.39})$$

$$a_{13} = s_z s_x (1 - \cos \theta) + s_y \sin \theta \quad (\text{B.40})$$

$$a_{21} = s_x s_y (1 - \cos \theta) + s_z \sin \theta \quad (\text{B.41})$$

$$a_{22} = \cos \theta + s_y^2 (1 - \cos \theta) \quad (\text{B.42})$$

$$a_{23} = s_z s_y (1 - \cos \theta) - s_x \sin \theta \quad (\text{B.43})$$

$$a_{31} = s_x s_z (1 - \cos \theta) - s_y \sin \theta \quad (\text{B.44})$$

$$a_{32} = s_y s_z (1 - \cos \theta) + s_x \sin \theta \quad (\text{B.45})$$

$$a_{33} = \cos \theta + s_z^2 (1 - \cos \theta) \quad (\text{B.46})$$

Assim sendo, conhecendo-se o helicoide é possível determinar a matriz de rotação e vice-versa, ou seja, combinando adequadamente as componentes da matriz de rotação é possível isolar as componentes  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$ , bem como o ângulo  $\theta$ , como mostrado a seguir:

$$s_x = \frac{a_{32} - a_{23}}{2 \sin \theta}; \quad (\text{B.47})$$

$$s_y = \frac{a_{13} - a_{31}}{2 \sin \theta}; \quad (\text{B.48})$$

$$s_z = \frac{a_{21} - a_{12}}{2 \sin \theta} \quad (\text{B.49})$$

$$2 \sin \theta = \sqrt{4 - (a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1)^2} \quad (\text{B.50})$$

$$\theta = \arccos \left( \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2} \right) \quad (\text{B.51})$$

$$s_x = \frac{a_{32} - a_{23}}{\sqrt{4 - (a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1)^2}} \quad (\text{B.52})$$

$$s_y = \frac{a_{13} - a_{31}}{\sqrt{4 - (a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1)^2}} \quad (\text{B.53})$$

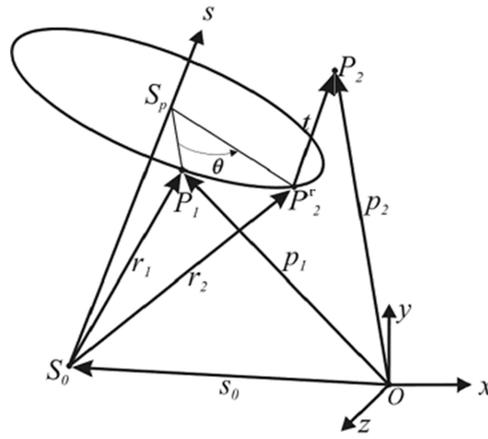
$$s_z = \frac{a_{21} - a_{12}}{\sqrt{4 - (a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1)^2}} \quad (\text{B.54})$$

A representação da orientação de uma rotação de um corpo rígido pelo eixo helicoidal é dada por quatro parâmetros, sendo um ângulo de rotação e três associados à representação do eixo do helicoides sendo que destas, somente duas são linearmente independentes pois a relação  $ss^T = 1$  deve ser atendida.

### B.1.2 Deslocamento Helicoidal

Uma forma mais completa do teorema de Chasles enuncia como o corpo rígido irá da posição inicial para a posição final, ou seja, afirma que o deslocamento pode ser feito por meio uma combinação de uma rotação e uma translação em torno de um único eixo. Tal combinação é conhecida como deslocamento helicoidal.

Tem-se o ponto  $P$  em três posições distintas:  $P_1$ ,  $P_2^r$  e  $P_2$ , conforme representado na Fig. 88. Existe uma rotação  $\theta$  entre  $P_1$  e  $P_2^r$ , e uma translação  $t$  entre  $P_2^r$  e  $P_2$ . A direção do eixo do helicoides é dada pelo vetor  $s$  e sobre esse eixo é que ocorrerá a translação e a rotação. É necessário ainda a determinação de um outro vetor, denominado  $s_0$  que aponte da origem para qualquer ponto do eixo do helicoides, de modo este eixo fique inequivocamente determinado no espaço tridimensional. Assim sendo, o deslocamento helicoidal fica perfeitamente determinado por  $s$ ,  $s_0$ ,  $\theta$  e  $t$ .



**Figura 88:** Rotação e translação em torno de um único eixo

As seguintes somas vetoriais podem ser escritas:

$$P_1 = s_0 + s_0 P_1 \quad (\text{B.55})$$

$$P_2 = s_0 P_2^r + s_0 + ts \quad (\text{B.56})$$

É possível substituir na equação de Rodrigues na forma do teorema de Chasles, de modo a determinar as componentes da matriz de rotação, fazendo  $s_0 P_1 = r_1$  e  $s_0 P_2^r = r_2$ .

$$s_0 P_2^r = s_0 P_1 \cos \theta + (1 - \cos \theta) (s_0 P_1 \cdot s) s + (s \times s_0 P_1) \sin \theta$$

$$P_2 - s_0 - ts = (P_1 - s_0) \cos \theta + (1 - \cos \theta) ((P_1 - s_0) \cdot s) s + (s \times (P_1 - s_0)) \sin \theta$$

$$P_2 = s_0 + ts + (P_1 - s_0) \cos \theta + (1 - \cos \theta) ((P_1 - s_0) \cdot s) s + (s \times (P_1 - s_0)) \sin \theta$$

$$P_2 = P_1 \cos \theta + (1 - \cos \theta) (P_1 \cdot s) s + (s \times P_1) \sin \theta + s_0 + ts - s_0 \cos \theta - (1 - \cos \theta) (s_0 \cdot s) s - (s \times s_0) \sin \theta \quad (\text{B.57})$$

Colocando na forma do teorema de Chasles, fazendo  $P_1 = p^B$  e  $P_2 = p^A$ .

$$p^A = R_B^A p^B + q^A$$

$$p^A = {}^B p \cos \theta + (1 - \cos \theta) (p^B \cdot s) s + (s \times p^B) \sin \theta + s_0 + ts - s_0 \cos \theta - (1 - \cos \theta) (s_0 \cdot s) s - (s \times s_0) \sin \theta \quad (\text{B.58})$$

O termo da rotação é idêntico ao analisado na rotação em torno de um ponto, o que implica que as componentes da matriz de rotação são as mesmas, o que não poderia deixar de ser, visto que é uma soma vetorial:

$$\begin{bmatrix} {}^A p_x \\ {}^A p_y \\ {}^A p_z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta + s_x^2 (1 - \cos \theta) & s_y s_x (1 - \cos \theta) - s_z \sin \theta & s_z s_x (1 - \cos \theta) + s_y \sin \theta \\ s_x s_y (1 - \cos \theta) + s_z \sin \theta & \cos \theta + s_y^2 (1 - \cos \theta) & s_z s_y (1 - \cos \theta) - s_x \sin \theta \\ s_x s_z (1 - \cos \theta) - s_y \sin \theta & s_y s_z (1 - \cos \theta) + s_x \sin \theta & \cos \theta + s_z^2 (1 - \cos \theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x^B \\ p_y^B \\ p_z^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A q_x \\ A q_y \\ A q_z \end{bmatrix} \quad (\text{B.59})$$

Resta entretanto associar os termos da translação.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A q_x \\ A q_y \\ A q_z \end{bmatrix} &= S_0 + tS - S_0 \cos \theta - (1 - \cos \theta) (S_0 \cdot S) S - (S \times S_0) \sin \theta = \\ &= \begin{bmatrix} s_{0x} \\ s_{0y} \\ s_{0z} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{0x} \\ s_{0y} \\ s_{0z} \end{bmatrix} \cos \theta + \\ &\quad - (1 - \cos \theta) (s_x s_{0x} + s_y s_{0y} + s_z s_{0z}) \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} - \begin{vmatrix} i & j & k \\ s_x & s_y & s_z \\ s_{0x} & s_{0y} & s_{0z} \end{vmatrix} \sin \theta = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} s_{0x}(1 + \cos \theta) + s_x (t - (1 - \cos \theta) (s_x s_{0x} + s_y s_{0y} + s_z s_{0z})) - (s_y s_{0z} - s_z s_{0y}) \sin \theta \\ s_{0y}(1 + \cos \theta) + s_y (t - (1 - \cos \theta) (s_x s_{0x} + s_y s_{0y} + s_z s_{0z})) - (s_z s_{0x} - s_x s_{0z}) \sin \theta \\ s_{0z}(1 + \cos \theta) + s_z (t - (1 - \cos \theta) (s_x s_{0x} + s_y s_{0y} + s_z s_{0z})) - (s_x s_{0y} - s_y s_{0x}) \sin \theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} t s_x + s_{0x}(1 + \cos \theta) - (1 - \cos \theta) (s_x^2 s_{0x} + s_x s_y s_{0y} + s_x s_z s_{0z}) - (s_y s_{0z} - s_z s_{0y}) \sin \theta \\ t s_y + s_{0y}(1 + \cos \theta) - (1 - \cos \theta) (s_y s_x s_{0x} + s_y^2 s_{0y} + s_y s_z s_{0z}) - (s_z s_{0x} - s_x s_{0z}) \sin \theta \\ t s_z + s_{0z}(1 + \cos \theta) - (1 - \cos \theta) (s_z s_x s_{0x} + s_z s_y s_{0y} + s_z^2 s_{0z}) - (s_x s_{0y} - s_y s_{0x}) \sin \theta \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} t s_x + s_{0x} (1 - (\cos \theta + (1 - \cos \theta) s_x^2)) \\ t s_y - s_{0x} (s_z \sin \theta + (1 - \cos \theta) s_y s_x) \\ t s_z - s_{0x} (-s_y \sin \theta + (1 - \cos \theta) s_z s_x) \end{bmatrix} + \\
&\quad + \begin{bmatrix} -s_{0y} ((1 - \cos \theta) s_x s_y - s_z \sin \theta) \\ s_{0y} (1 - (\cos \theta + (1 - \cos \theta) s_y^2)) \\ -s_{0y} ((1 - \cos \theta) s_z s_y + s_x \sin \theta) \end{bmatrix} + \\
&\quad + \begin{bmatrix} -s_{0z} ((1 - \cos \theta) s_x s_z + s_y \sin \theta) \\ -s_{0z} ((1 - \cos \theta) s_y s_z - s_x \sin \theta) \\ s_{0z} (1 - (\cos \theta + (1 - \cos \theta) s_z^2)) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} t s_x + s_{0x} (1 - a_{11}) - s_{0y} a_{12} - s_{0z} a_{13} \\ t s_y - s_{0x} a_{21} + s_{0y} (1 - a_{22}) - s_{0z} a_{23} \\ t s_z - s_{0x} a_{31} - s_{0y} a_{32} + s_{0z} (1 - a_{33}) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} t s_x + s_{0x} - s_{0x} a_{11} - s_{0y} a_{12} - s_{0z} a_{13} \\ t s_y + s_{0y} - s_{0x} a_{21} - s_{0y} a_{22} - s_{0z} a_{23} \\ t s_z + s_{0z} - s_{0x} a_{31} - s_{0y} a_{32} - s_{0z} a_{33} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} t s_x \\ t s_y \\ t s_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{0x} \\ s_{0y} \\ s_{0z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{0x} \\ s_{0y} \\ s_{0z} \end{bmatrix} = \\
&= t s + s_0 - R_B^A s_0
\end{aligned}$$

Assim:

$$q^A = t s + [I - R_B^A] s_0 \quad (\text{B.60})$$

Para calcular  $s_0$  tem-se:

$$q^A - t s = [I - R_B^A] s_0 \quad (\text{B.61})$$

$$s_0 = [I - R_B^A]^{-1} [q^A - t s] \quad (\text{B.62})$$

Assim para o deslocamento helicoidal, tem-se que a equação do teorema de Chasles pode

ser reescrita como:

$$p^A = R_B^A p^B + q^A \quad (\text{B.63})$$

$$q^A = t s + [I - R_B^A] s_0 \quad (\text{B.64})$$

$$p^A = R_B^A p^B + t s + [I - R_B^A] s_0 \quad (\text{B.65})$$

A matriz de transformação homogênea (4x4) passa a ser reescrita como:

$$\begin{aligned} T_B^A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & q_x^A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & q_y^A \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & q_z^A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} R_B^A & t s + [I - R_B^A] s_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

A forma homogênea do vetor  $p^A = [p_x^A, p_y^A, p_z^A]^T$  é representada por  $\tilde{p}^A = [p_x^A, p_y^A, p_z^A, 1]^T$ .

Assim tem-se :

$$\tilde{p}^A = T_B^A \tilde{p}^B \quad (\text{B.67})$$

A matriz de transformação homogênea possui inversa, embora não seja ortogonal, ou seja,  $[T_B^A]^{-1} \neq [T_B^A]^T$ , e pode ser calculada pré-multiplicando a fórmula do teorema de Chasles pelo inverso da matriz de rotação, como segue:

$$[R_B^A]^{-1} p^A = [R_B^A]^{-1} R_B^A p^B + [R_B^A]^{-1} q^A \quad (\text{B.68})$$

Como a matriz de rotação é ortogonal, sua inversa é igual a sua transposta:

$$[R_B^A]^{-1} = [R_B^A]^T \quad (\text{B.69})$$

$$p^B = [R_B^A]^{-1} p^A - [R_B^A]^{-1} q^A \quad (\text{B.70})$$

$$\tilde{p}^B = [T_B^A]^{-1} \tilde{p}^A \quad (\text{B.71})$$

Logo:

$$[T_B^A]^{-1} = \begin{bmatrix} [R_B^A]^T & -t[R_B^A]^T s - [[R_B^A]^T - I] s_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.72})$$

## B.2 Método dos Deslocamentos dos Helicoides Sucessivos

Seja um corpo rígido  $\sigma$  composto de dois pares cinemáticos representados por  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$ . O primeiro par cinemático conecta o “elo móvel 1” ao eixo fixo, e o segundo par cinemático conecta o “elo móvel 2” ao eixo móvel, que é solidário ao elo móvel 1, como mostra a Fig. 89.

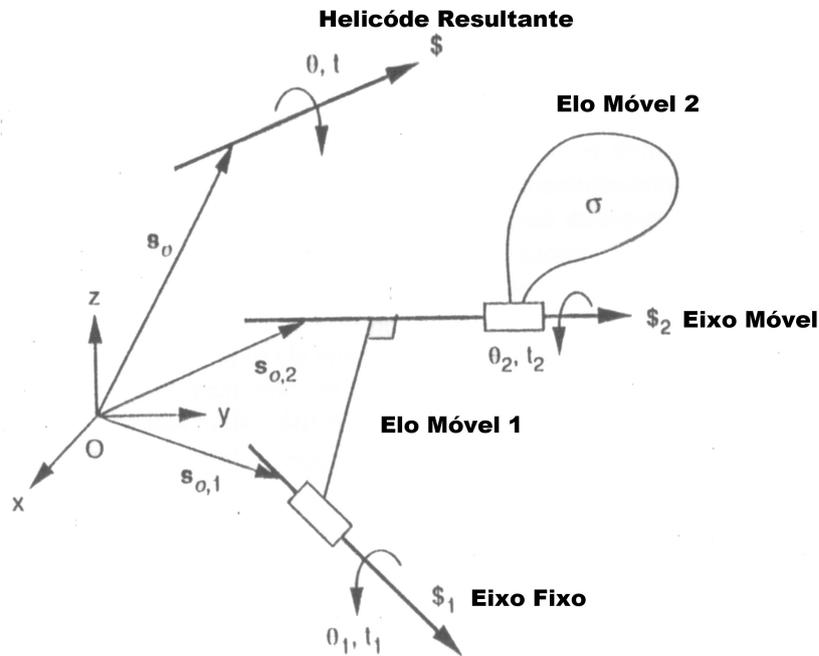


Figura 89: Deslocamento de um corpo por 2 helicoides sucessivos

Assim sendo, o corpo rígido pode se deslocar sobre dois eixos, que são completamente definidos pelos vetores  $S$  e  $S_0$  de cada um dos helicoides  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$ . O deslocamento pode ser simultâneo, ou seja, o corpo pode girar de um ângulo  $\theta_1$  e  $\theta_2$  em torno dos helicoides  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$ , bem como, pode ocorrer translação de  $d_1$  e  $d_2$  sobre cada um dos eixos de juntas, ou seja, sobre cada um dos helicoides  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$ .

O teorema de Chasles para deslocamento helicoidal (Eq. B.65) pode ser reescrito valendo-se da matriz de transformação homogênea vista na Eq. B.66. Assim sendo, o deslocamento  $(\theta_1, d_1)$  sobre o eixo ( $S$  e  $S_0$ ) do Helicoide  $\mathcal{S}_1$ , fica representado adequadamente pelo próprio Helicoide  $\mathcal{S}_1$ , ou seja, o Helicoide  $\mathcal{S}_1(S, S_0, \theta_1, d_1)$ , que terá a sua matriz de transformação homogênea dada por  $A_1$ .

$$A_1 = \begin{bmatrix} R_{1(3x3)} & d_1 S_{\mathcal{S}_1(1x3)} + (I_{(3x3)} - R_{1(3x3)})_{(3x3)} S_{0\mathcal{S}_1(1x3)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.73})$$

onde:

$$R_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 + S_x^2(1 - c\theta_1) & S_y S_x(1 - c\theta_1) - S_z s\theta_1 & S_z S_x(1 - c\theta_1) + S_y s\theta_1 \\ S_x S_y(1 - c\theta_1) + S_z s\theta_1 & c\theta_1 + S_y^2(1 - c\theta_1) & S_z S_y(1 - c\theta_1) - S_x s\theta_1 \\ S_x S_z(1 - c\theta_1) - S_y s\theta_1 & S_y S_z(1 - c\theta_1) + S_x s\theta_1 & c\theta_1 + S_z^2(1 - c\theta_1) \end{bmatrix} \quad (\text{B.74})$$

$$d_1 S_{\mathbb{S}_1(1x3)} + (I_{(3x3)} - R_{1(3x3)}) S_{0_{\mathbb{S}_1}(1x3)} = \begin{bmatrix} d_1 S_x + S_{0x}(1 - a_{11}) - S_{0y} a_{12} - S_{0z} a_{13} \\ d_1 S_y - S_{0x} a_{21} + S_{0y}(1 - a_{22}) - S_{0z} a_{23} \\ d_1 S_z - S_{0x} a_{31} - S_{0y} a_{32} + S_{0z}(1 - a_{33}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.75})$$

Partindo de uma posição inicial ocorrem deslocamentos de maneira sucessiva, ou seja, primeiro há um giro de  $\theta_2$  e uma translação de  $t_2$  sobre o helicóide  $\mathbb{S}_2$ , que tem associada a matriz de transformação homogênea  $A_2$ . Em seguida, ocorre outro giro de  $\theta_1$  e uma translação de  $t_1$  sobre o helicóide  $\mathbb{S}_1$ , que por sua vez tem associada a matriz de transformação homogênea  $A_1$ . A posição final de um ponto do corpo que sofre os dois deslocamentos sucessivos é dada pela pré-multiplicação das coordenadas homogêneas deste ponto pela matriz  $A_2$ , seguida pela pré-multiplicação pela matriz  $A_1$ .

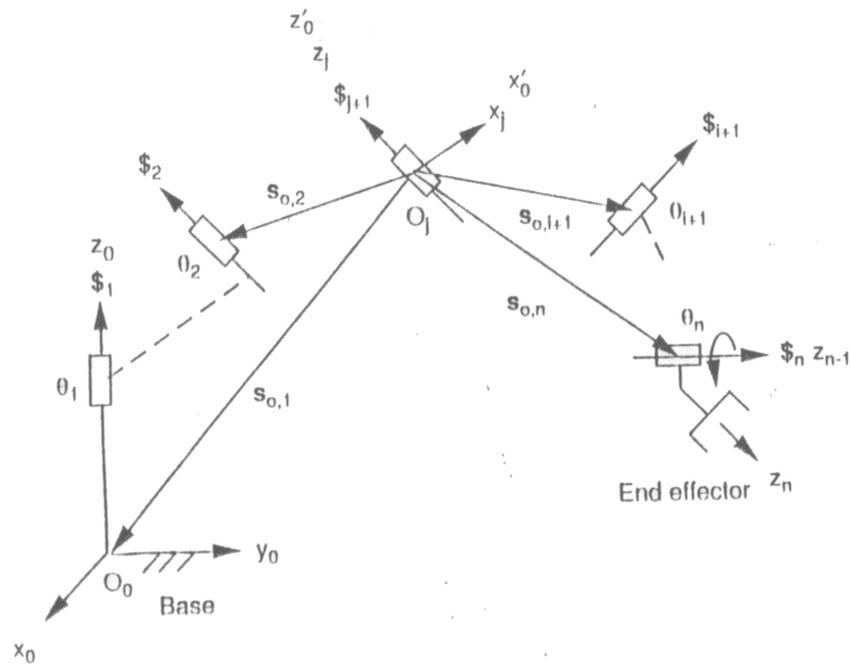
Assim sendo, existe um helicóide  $\mathbb{S}$  resultante que tem associada a matriz de transformação homogênea dada por  $A_r$ , resultado da pré-multiplicação das respectivas matrizes associadas aos deslocamentos de helicóides sucessivos respeitando a ordem em que ocorrem. No caso em foco ocorre primeiro em  $\mathbb{S}_2$ , seguido em  $\mathbb{S}_1$ , o que significa que  $A_2$  deve ser pré-multiplicada por  $A_1$ , ou seja:

$$A_r = A_1 A_2 \quad (\text{B.76})$$

Esta metodologia pode ser expandida para  $n$ -elos, sendo que a ordem do deslocamento deve ser observada, onde o primeiro deslocamento tem sua matriz de transformação homogênea pré-multiplicada pela do segundo, que por sua vez é pré-multiplicada pela do terceiro, assim sucessivamente até ser pré-multiplicada pela matriz de transformação homogênea do  $n$ -ésimo deslocamento.

Esta metodologia é adequada para determinação da cinemática direta de manipuladores seriais de mais de um elo, como mostra a Fig. 90. É usual (TSAI, 1999) numerar os helicóides em ordem crescente da base em direção à ferramenta.

Em manipulador serial de  $n$ -elos, deseja-se conhecer o efeito que a variação das variáveis das juntas causam na ferramenta, que se localiza no último elo, que por sua vez sofre a influência



**Figura 90:** Deslocamento de um corpo por  $n$  helicoides sucessivos

dos elos anteriores. Iniciando uma análise do último Helicoide em direção ao primeiro, ou seja da ferramenta em direção à base, tem-se que o Helicoide  $S_n$  é passível de sofrer influência do Helicoide anterior e assim por diante, o que implica que sua a matriz de transformação homogênea  $A_n$  deverá ser pré-multiplicada pela anterior ( $A_{n-1}$ ) e esse resultado ( $A_{n-1} A_n$ ), pela anterior ( $A_{n-2}$ ) e assim sucessivamente, até a multiplicação por  $A_1$  que corresponde ao Helicoide que tem seu eixo ligado à base, ou seja:

$$A_r = A_1 A_2 \cdots A_{n-2} A_{n-1} A_n \quad (\text{B.77})$$

Primeiramente deve ser definida a posição de referência para o manipulador, ou posição zero, que geralmente é escolhida em uma localização de fácil determinação dos vetores determinantes do eixo das juntas, ou seja os vetores  $S$  e  $S_0$  do helicoide  $S_i$ , sendo que  $i$  varia de 1 até  $n$ .

A posição desejada é geralmente chamada de posição alvo (TSAI, 1999). O manipulador irá se deslocar da posição de referência para a posição alvo, por meio de uma série de deslocamentos de helicoides finitos sucessivos sobre os eixos das juntas, ou seja a rotação do  $n$ -ésimo eixo da junta, seguido por outro sobre o  $(n - 1)$ -ésimo eixo da junta, e assim por diante. O deslocamento helicoidal resultante é obtido pela pré-multiplicação das matrizes de transformação homogênea dos diversos helicoides sucessivos conforme a Eq. B.77.

### B.3 Eixo do Helicoide Instantâneo

Nesta seção deseja-se mostrar que um movimento instantâneo genérico de um corpo rígido pode ser representado por uma rotação diferencial em torno de um único eixo e por uma translação diferencial sobre este mesmo eixo.

Seja  $\tilde{p}$  um ponto pertencente ao corpo rígido e por hipótese estacionário em relação ao referencial  $A$ . Sendo assim, a  $v_{\tilde{p}}^A$  é identicamente nula. Assim a Eq. A.62 se reduz à:

$$0 = v_q^A + w_B^A \times \tilde{p}^A \quad (\text{B.78})$$

$$-v_q^A = w_B^A \times (\tilde{p}^A - q^A) \quad (\text{B.79})$$

ou ainda:

$$-v_q^A = \Omega(w_B^A) (\tilde{p}^A - q^A) \quad (\text{B.80})$$

Como  $\Omega(w_B^A)$  é anti-simétrica, o determinante será sempre não nulo desde que existam componentes de velocidade angular em torno dos eixos, e adicionalmente supondo que o ponto não esteja sobre a origem (solução trivial) é possível afirmar que sempre existirá uma velocidade translacional do ponto  $Q$ , que representa a origem do sistemas de coordenadas do referência  $B$  solidário ao corpo. Assim sendo, não existe solução possível, ou seja: dado dois referenciais com centros distintos, se o referencial ( $B$ ) solidário ao corpo rígido tiver velocidade angular não nula, implica em dizer que não existe qualquer ponto pertencente ao corpo rígido que possua velocidade linear nula em relação ao referencial  $A$ .

Considere nova hipótese para o ponto  $\tilde{p}$ , ou seja, que possua velocidade linear na mesma direção do vetor velocidade angular do corpo. Sendo assim, a  ${}^A v_{\tilde{p}}$  é igual a um  $\lambda$  multiplicado pelo vetor velocidade angular do corpo. Assim a Eq. A.62 se reduz à:

$$\lambda w_B^A = v_q^A + w_B^A \times (\tilde{p}^A - q^A) \quad (\text{B.81})$$

que se pré-multiplicada pelo vetor  $w_B^A$ , resulta em:

$$w_B^A \cdot (\lambda w_B^A) = w_B^A \cdot v_q^A + w_B^A \cdot (w_B^A \times (\tilde{p}^A - q^A)) \quad (\text{B.82})$$

como  $w_B^A$  é perpendicular a  $(w_B^A \times (\tilde{p}^A - q^A))$ , o produto vetorial é identicamente nulo, e a equação pode ser reescrita como:

$$w_B^A \cdot (\lambda w_B^A) = w_B^A \cdot v_q^A \quad (\text{B.83})$$

permitindo isolar o  $\lambda$ , resultando em:

$$\lambda = \frac{v_q^A}{w_B^A} = \frac{\dot{d}}{\dot{\theta}} \quad (\text{B.84})$$

Assim sendo, os pontos que satisfazem que possuem esta propriedade, devem atender simultaneamente as duas equações abaixo:

$$w_B^A \times (\tilde{p}^A - q^A) = -(v_q^A - \lambda w_B^A) \quad (\text{B.85})$$

$$w_B^A \cdot (v_q^A - \lambda w_B^A) = 0 \quad (\text{B.86})$$

Tem-se que o lugar geométrico do vetor resultante da diferença vetorial entre  $(\tilde{p}^A - q^A)$  é dada por uma reta com a seguinte equação:

$$(\tilde{p}^A - q^A) = \frac{w_B^A \times (v_q^A - \lambda w_B^A)}{w_B^{A2}} + \mu w_B^A \quad (\text{B.87})$$

Assim o lugar geométrico de  $\tilde{p}^A$  é dado por uma reta com a seguinte equação:

$$\tilde{p}^A = q^A + \frac{w_B^A \times (v_q^A - \lambda w_B^A)}{w_B^{A2}} + \mu w_B^A \quad (\text{B.88})$$

Esta reta é paralela ao vetor velocidade angular e é denominada eixo do helicoide instantâneo, sendo  $\mu$  uma constante real arbitrária qualquer.

### B.3.1 Jacobiano de um Manipulador Serial

O Jacobiano de um manipulador serial é uma matriz de transformação linear entre o vetor das velocidades das juntas  $\dot{q}$  com dimensão  $n$ , que corresponde ao número de juntas do manipulador, e o vetor velocidade  $\dot{x}$  da localização de um ponto pertencente ao corpo. Ou seja, um ponto pertencente a um sistema mecânico tem velocidade angular e velocidade linear em relação a um referencial absoluto. Assim o vetor velocidade deste ponto pode ser representado por um par de vetores composto pelo vetor velocidade angular e linear, ou seja:

$$\dot{x} \equiv \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (\text{B.89})$$

Assim sendo, com seis coordenadas a cinemática de velocidade instantânea do corpo rígido fica determinada.

Cada uma dessas componentes é função de todas as variáveis de junta que influenciam o

ponto pertencente ao sistema mecânico, que no caso de um manipulador serial corresponde à ferramenta.

Cada junta do manipulador pode ser representada por um helicóide que fica completamente determinado quando uma amplitude ou intensidade é multiplicada pelo respectivo helicóide unitário. Assim sendo  $\$ = \hat{\$} \dot{q}$ .

Em cada helicóide as três primeiras coordenadas representam a velocidade angular e as três últimas, a velocidade linear de um ponto que se move solidário ao corpo rígido e instantaneamente encontra-se coincidente com a origem do referencial fixo. Trata-se de uma abstração, imaginando que uma extensão deste corpo passasse pela origem do referencial absoluto e neste ponto é medida sua velocidade linear.

Assim sendo o vetor de estado de velocidade instantâneas do efetuador final de um manipulador composto por  $n$  juntas pode ser expresso do seguinte modo:

$$\dot{x} = \$_1 + \$_2 + \dots + \$_{n-1} + \$_n \quad (\text{B.90})$$

$$\dot{x} = \hat{\$}_1 \dot{q}_1 + \hat{\$}_2 \dot{q}_2 + \dots + \hat{\$}_{n-1} \dot{q}_{n-1} + \hat{\$}_n \dot{q}_n \quad (\text{B.91})$$

$$\dot{x} \equiv \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\$}_1 & \hat{\$}_2 & \dots & \hat{\$}_{n-1} & \hat{\$}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_{n-1} \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.92})$$

Denomina-se Jacobiano baseado em helicóides (TSAI, 1999),  $J_H$  a matriz representada por:

$$J_H = \begin{bmatrix} \hat{\$}_1 & \hat{\$}_2 & \dots & \hat{\$}_{n-1} & \hat{\$}_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.93})$$

onde cada coluna da matriz é composta por um helicóide unitário representativo da respectiva junta.

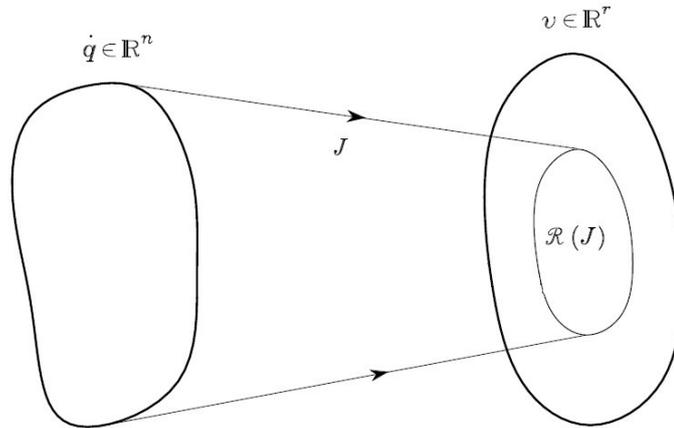
Cabe ressaltar, que os helicóides unitários para as juntas rotacional e prismática encontram-se respectivamente representados nas Eq. B.15 e B.16. Além disso, para a junta rotacional  $\dot{q} = \dot{\theta}$  e para a prismática  $\dot{q} = \dot{d}$ .

A Eq. B.92 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$v = J_H(q) \dot{q} \quad (\text{B.94})$$

onde  $v$  é o vetor das velocidades generalizadas do efetuador final com dimensão  $(r \times 1)$ , onde

$r$  é o número do espaço operacional necessário à realização de uma dada tarefa, e  $\dot{q}$  é o vetor das velocidades das juntas, com dimensão  $(n \times 1)$ , onde  $n$  é o número do grau de liberdade do manipulador, proporcionado pelas  $n$  juntas. A Fig. 91 mostra a representação do espaço  $n$  dimensional  $\mathbb{R}^n$  das variáveis de junta, que por intermédio da transformação linear instantânea representada pela matriz do jacobiano, conduz ao espaço operacional  $\mathbb{R}^r$  de dimensão  $r$ .



**Figura 91:** Espaços das velocidades de juntas e o das velocidades da ferramenta

Se  $r < n$ , o manipulador é dito com redundância cinemática e existem  $(n - r)$  graus de liberdades redundantes.

## B.4 Matriz de Transformação de Coordenadas de Helicoides

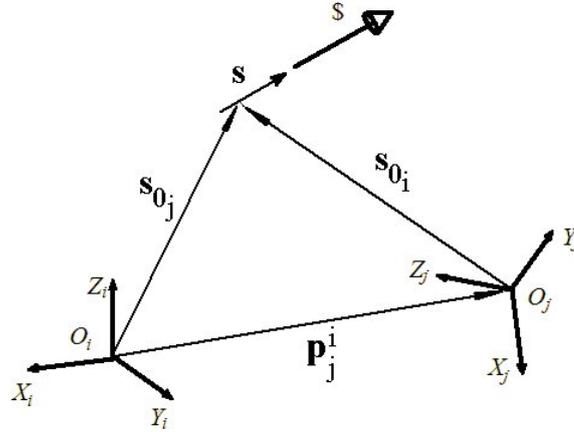
Freqüentemente é útil representar o movimento diferencial de um corpo, expresso por um helicóide, em diferentes sistemas de coordenadas. Assim sendo, considere dois sistemas coordenados: o  $i$ -ésimo  $(x_i, y_i, z_i)$  e o  $j$ -ésimo  $(x_j, y_j, z_j)$ . A posição da origem do  $j$ -ésimo sistema de coordenada em relação  $i$ -ésimo sistema, é dada pelo vetor  $p_j^i = [p_x \ p_y \ p_z]^T$  e a orientação é descrita pela matriz de rotação  $R_j^i$ , dada por:

$$R_j^i = \begin{bmatrix} x_{j_{x_i}} & y_{j_{x_i}} & z_{j_{x_i}} \\ x_{j_{y_i}} & y_{j_{y_i}} & z_{j_{y_i}} \\ x_{j_{z_i}} & y_{j_{z_i}} & z_{j_{z_i}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.95})$$

Seja o Helicóide  $\hat{\mathcal{S}}$  representado na Fig. 92, que pode ser escrito nos dois sistemas coordenados da seguinte forma:

$$\hat{\mathcal{S}}^i = \begin{bmatrix} s_i \\ s_{0_i} \times s_i + h s_i \end{bmatrix} \quad (\text{B.96})$$

$$\hat{s}^j = \begin{bmatrix} s_j \\ s_{0j} \times s_j + h s_j \end{bmatrix} \quad (\text{B.97})$$



**Figura 92:** Helicóide escrito em diferentes sistemas de coordenadas

A relação entre os vetores  $s$  e  $s_0$  escritos em sistemas de coordenadas distintos é dado por:

$$s_i = R_j^i s_j \quad (\text{B.98})$$

e

$$s_{0i} = p_j^i + R_j^i s_{0j} \quad (\text{B.99})$$

Substituindo os valores de  $s_i$  e  $s_{0i}$  em  $\hat{s}_i$ , tem-se

$$\begin{aligned} \hat{s}^i &= \begin{bmatrix} s_i \\ s_{0i} \times s_i + h s_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_j^i s_j \\ [p_j^i + R_j^i s_{0j}] \times R_j^i s_j + h R_j^i s_j \end{bmatrix} \quad (\text{B.100}) \\ &= \begin{bmatrix} R_j^i s_j \\ R_j^i s_{0j} \times R_j^i s_j + h R_j^i s_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_j^i \times R_j^i s_j \end{bmatrix} \\ &= R_j^i \begin{bmatrix} s_j \\ s_{0j} \times s_j + h s_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_j^i \times R_j^i s_j \end{bmatrix} \\ &= R_j^i \hat{s}_j + \begin{bmatrix} p_j^i \times R_j^i \\ 0 \end{bmatrix} \hat{s}_j = R_j^i \hat{s}_j + \begin{bmatrix} \Omega(p_j^i) R_j^i \\ 0 \end{bmatrix} \hat{s}_j \\ &= \begin{bmatrix} R_j^i & 0 \\ \Omega(p_j^i) R_j^i & R_j^i \end{bmatrix} \hat{s}_j \end{aligned}$$

onde  $\Omega(p_j^i)$  é a matriz anti-simétrica do vetor  $p_j^i$ , dada por:

$$\Omega(p_j^i) = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.101})$$

Assim sendo, dado um escrito no  $j$ -ésimo sistema de coordenadas, pode ser expresso no  $i$ -ésimo sistema de coordenadas aplicando a seguinte transformação  $T_j^i$ , tal que:

$$\hat{\$}^i = T_j^i \hat{\$}^j \quad (\text{B.102})$$

onde:

$$T_j^i = \begin{bmatrix} R_j^i & 0 \\ \Omega(p_j^i) R_j^i & R_j^i \end{bmatrix} \quad (\text{B.103})$$

Como  $\Omega(p_j^i)$  é anti-simétrica e  $R_j^i$  é ortogonal, a inversa da matriz de transformação é dada por:

$$T_i^j = \begin{bmatrix} R_j^{iT} & 0 \\ \Omega(p_j^i)^T R_j^{iT} & R_j^{iT} \end{bmatrix} \quad (\text{B.104})$$



## APÊNDICE C

# Método de Davies

Este apêndice apresenta o Método de Davies aplicado a manipuladores seriais, que utiliza as cadeias virtuais de Assur para fechar a cadeia cinemática originalmente aberta destes manipuladores, além da representação por meio de grafos. Assim sendo, inicia-se por uma breve exposição das cadeias virtuais de Assur, seguida da Teoria dos Grafos e finalmente é apresentado o Método de Davies.

### C.1 Cadeias Virtuais de Assur

Uma cadeia virtual de Assur pode ser definida como uma abstração física de uma cadeia cinemática real. Geralmente é empregada com o intuito de criar uma malha, garantindo o fechamento de cadeias cinemáticas reais seriais, sem interferir no grau de liberdade desta. A cadeia resultante do acoplamento da cadeia virtual de Assur à cadeia originalmente aberta, é uma cadeia fechada, o que possibilita a utilização da lei da circulação de Kirchhoff-Davies (DAVIES, 1981) (DAVIES, 1983a) (DAVIES, 1983b) (DAVIES, 1983c).

A cadeia virtual de Assur acoplada a qualquer cadeia cinemática, possibilita monitorar, impor ou restringir a localização de corpos rígidos no espaço. Originalmente proposta por Campos em sua tese de doutorado (CAMPOS, 2004) que apresenta vários tipos de cadeias virtuais de Assur, que originalmente era denominada de cadeias cinemáticas virtuais, podendo ainda serem planas ou espaciais. Posteriormente, a nomenclatura original de cadeias virtuais cinemáticas, deram lugar à denominação de cadeia virtual de Assur, visando evitar ambigüidade do termo virtual utilizado em outros contextos na literatura especializada.

Segundo Campos (CAMPOS, 2004) as cadeias virtuais de Assur apresentam as seguintes propriedades:

- toda cadeia virtual de Assur é serial e aberta, sendo composta por abstrações de elos e

juntas, denominados elos virtuais e juntas virtuais;

- os heligiros que representam o movimento das juntas virtuais são linearmente independentes, e;
- a cadeia virtual de Assur não altera o grau de liberdade da cadeia cinemática real. Como consequência, o grau de liberdade da cadeia virtual de Assur deve ser igual à ordem do sistema de helicóides ao qual pertence a cadeia cinemática real.

### C.1.1 Cadeias Virtuais de Assur Planas

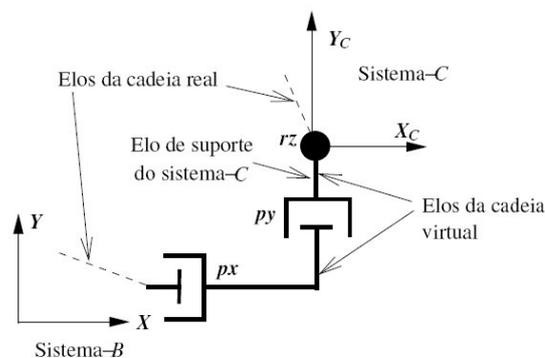
Em cadeias cinemáticas planas, a ordem do sistema de helicóides é três ( $d = 3$ ), o que implica que a cadeia virtual de Assur (CVA) deve ter três graus de liberdade. Assim sendo, surgem dois tipos de CVA com amplo campo de aplicação no plano, a saber:

1. CVA-PPR (Prismática, Prismática, Rotativa), apresentando duas juntas virtuais prismáticas (P) e uma junta virtual rotativa (R);
2. CVA-RPR (Rotativa, Prismática, Rotativa), apresentando uma junta virtual rotativa (R), uma prismática (P) e outra rotativa (R).

A seguir a CVA-PPR encontra-se pormenorizada. As demais podem ser encontradas em (CAMPOS, 2004).

#### C.1.1.1 CVA-PPR

A PPR pode ser associada a um sistema de coordenadas cartesiano, onde as duas primeiras juntas virtuais prismáticas (PP) estão dispostas guardando relação de ortogonalidade, correspondendo às coordenadas X-Y, como esquematizado na Fig. 93. Pela nomenclatura adotada



**Figura 93:** Esquema da PPR

por Campos, as juntas prismáticas são  $p_x$  e  $p_y$  e seus movimentos são descritos pelos heligiros  $\$_{p_x}$  e  $\$_{p_y}$ , e a junta rotativa é chamada  $r_z$  e seu movimento é descrito pelo heligiro  $\$_{r_z}$ .

## C.1.2 Cadeias Virtuais de Assur Espaciais

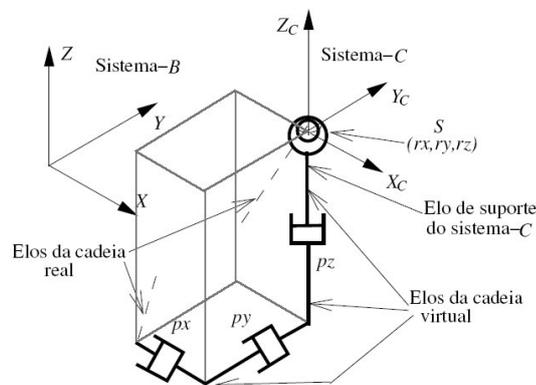
Em cadeias cinemáticas espaciais, a ordem do sistema de helicóides é seis ( $d = 6$ ), o que implica que a cadeia virtual de Assur (CVA) deve ter seis graus de liberdade. Assim sendo, surgem três CVA com amplo campo de aplicação no espaço, a saber:

1. CVA-PPPS (Prismática, Prismática, Prismática, Esférica), apresentando três juntas virtuais prismáticas (P) e uma junta virtual esférica (S);
2. CVA-RPPS (Rotativa, Prismática, Prismática, Esférica), apresentando uma junta virtual rotativa (R), duas prismática (P) e uma esférica (S).
3. CVA-RRPS (Rotativa, Rotativa, Prismática, Esférica), apresentando duas juntas virtuais rotativa (R), uma prismática (P) e uma esférica (S).

A seguir a CVA-PPPS encontra-se pormenorizada. As demais podem ser encontradas em (CAMPOS, 2004)

### C.1.2.1 CVA-PPPS

As cadeias virtuais de Assur com estrutura PPPS podem ser associadas a um sistema de coordenadas cartesiano, em que os movimentos das juntas prismáticas  $px$ ,  $py$  e  $pz$  ocorrem nas direções dos eixos ortogonais X, Y e Z, sendo representadas respectivamente pelos heligiros  $\$_{px}$ ,  $\$_{py}$  e  $\$_{pz}$ . A junta esférica S pode ser substituída instantaneamente por três juntas rotativas ortogonais  $rx$ ,  $ry$  e  $rz$ , com movimentos em torno dos eixos X, Y e Z, e representadas respectivamente pelos heligiros  $\$_{rx}$ ,  $\$_{ry}$  e  $\$_{rz}$ , como mostra a Fig. 94.



**Figura 94:** CVA - PPPS

## C.2 Teoria dos Grafos

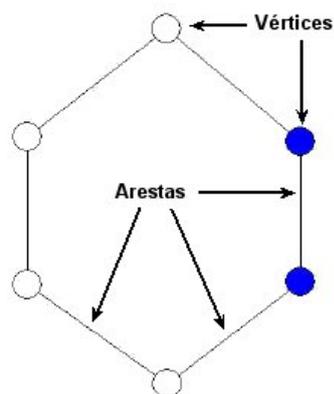
Segundo Rabuske (RABUSKE, 1992), a Teoria dos Grafos surgiu independentemente nas diversas áreas do conhecimento, mas pode ser inteiramente considerada como uma área matemática aplicada. A mais antiga menção ao assunto ocorreu no trabalho de Euler, no ano de 1736, conhecido como problema da transposição das pontes de Königsberg, onde os nós correspondiam às margens e às ilhas de um rio, e as arestas ligando esses pontos referiam-se às pontes. Ainda no século XIX, Kirchhoff e Cayley desenvolveram a teoria das árvores, sendo que Kirchhoff investigava os circuitos elétricos enquanto Cayley considerou árvores a partir da enumeração de isômeros na química orgânica.

Considere um circuito que possui  $B$  ramos e  $N$  nós. Um grafo linear, ou mais simplesmente, um grafo pode ser formado a partir do circuito, desprezando a natureza dos ramos substituindo-os apenas por linhas e representando os nós por pontos, conforme mostrado na Fig. 95.

**Definição C.2.1** Um grafo  $G$  é definido como sendo um par ordenado  $(V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto que possui elementos denominados vértices ou pontos ou nós. Já  $E$  é uma relação binária sobre  $V$ , sendo pares ordenados denominados arestas ou linhas ou arcos do grafo.

**Definição C.2.2** Uma aresta incidente a um único vértice é denominada laço.

**Definição C.2.3** Dois vértices são adjacentes se estão ligados por arestas.

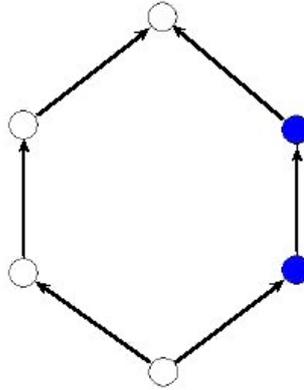


**Figura 95:** Arestas e Vértices de um Grafo

**Definição C.2.4** Um vértice é dito isolado se não existe aresta incidindo sobre ele.

**Definição C.2.5** Se um grafo possui laços e/ou arestas paralelas, então este grafo é denominado multigrafo, caso contrário é dito um grafo simples.

**Definição C.2.6** Um grafo é dito orientado ou dirigido, quando existe uma seta de orientação associada a cada ramo, que normalmente está condicionada às setas representativas de orientação de corrente e de voltagem conforme mostrado na Fig. 96. É interessante notar que as setas de tensão estão orientadas em sentido oposto às de corrente.



**Figura 96:** Grafo Orientado

**Definição C.2.7** Os grafos possuem ciclos e um ciclo é um conjunto de ramos que formam um único caminho fechado, ou seja cada nó de um ciclo tem ligado a si mesmo, dois ramos do ciclo.

**Definição C.2.8** Um grafo é composto de subgrafos denominados árvores. Uma árvore possui ramos que ligam todos os nós, entretanto uma árvore não possui ciclo algum. Assim sendo seja um grafo com  $N$  nós, quando uma árvore ligando estes  $N$  nós implica que esta árvore possui  $N - 1$  ramos.

**Definição C.2.9** Logo os ramos de um grafo podem ser divididos em dois subconjuntos: (1) os ramos das árvores e (2) os ramos de ligações, que são aqueles ramos não pertencentes às árvores, denotados por  $L$ . Assim, seja um grafo com  $B$  ramos e  $N$  nós, tem-se que  $B = (N - 1) + L$ , ou que o número de ramos de ligações de um grafo é dado por:

$$L = B - N + 1 \quad (\text{C.1})$$

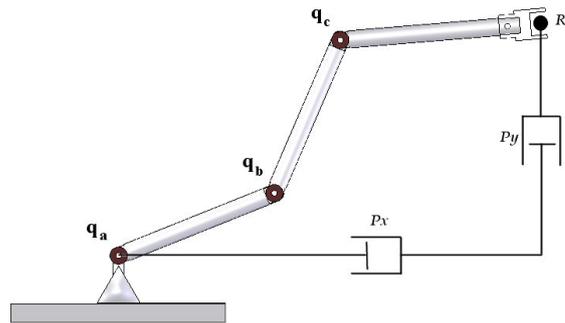
### C.3 Método de Davies

A Lei da Circulação de Kirchhoff para a diferença de potencial foi adaptada por Davies (DAVIES, 1981) (DAVIES, 2006) para aplicações em cadeias cinemáticas com múltiplos laços.

O método Davies estabelece a equação de restrição para a cadeia cinemática fechada, estabelecendo relações entre as velocidades das juntas componentes. Assim é possível expressar as magnitudes das velocidades de um determinado número de juntas, chamadas juntas secundárias, em função das magnitudes das velocidades das demais juntas, chamadas juntas primárias.

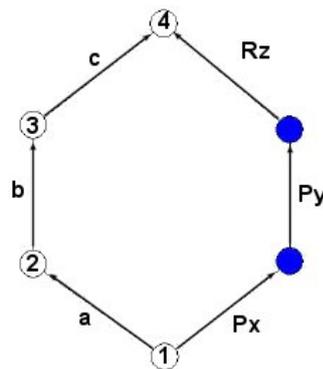
Como passo inicial as cadeias cinemáticas são transformadas em grafos, onde cada junta torna-se uma aresta e cada corpo um vértice.

De modo a exemplificar considere o manipulador serial plano de três elos, com uma cadeia virtual de Assur PPR acoplada, como representado na Fig. 97.



**Figura 97:** Manipulador serial plano de três elos com PPR

O grafo associado encontra-se representado na Fig. 98, que é denominado grafo das juntas,  $G_c$ , devido à terminologia em inglês *coupling graph* (DAVIES, 1981). Os vértices são numerados da mesma forma que os corpos que representam, bem como as arestas recebem a identificação das letras associadas às respectivas juntas.

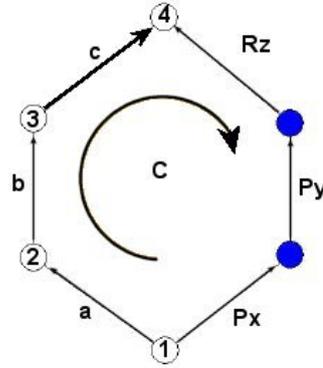


**Figura 98:** Grafo das juntas do manipulador serial plano de três elos com PPR

A orientação para o grafo neste caso, como adotado que o corpo 1 possui o sistema de eixos coordenados fixos, ou seja, é o referencial absoluto, adota-se que a orientação parta do vértice 1, culminando no vértice referente à ferramenta.

Passa-se a criação do Grafo dos Movimentos, onde será atribuído um sentido ao circuito,

escolhendo como referência o sentido de uma aresta. No exemplo em foco, o sentido do movimento foi escolhido como o mesmo da aresta C, como mostra a Fig. 99.



**Figura 99:** Grafo de movimento do manipulador serial plano de três elos com PPR

Segue a determinação da dimensão do espaço, que no exemplo em foco está trabalhando no plano, é igual a 3. Assim:

$$\lambda = 3 \quad (\text{C.2})$$

Com a dimensão do espaço determinada, é possível determinar o helicóide unitário, que para o exemplo com 3 juntas rotativas será da seguinte forma:

$$\hat{\$} = \begin{bmatrix} s \\ s_0 \times s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ (s_{0y}s_z - s_{0z}s_y) \\ (s_{0z}s_x - s_{0x}s_z) \\ (s_{0x}s_y - s_{0y}s_x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \\ P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N \\ P \\ Q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_z \\ s_{0y}s_z \\ -s_{0x}s_z \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Analogamente à Lei da Circulação de Kirchhoff para um circuito elétrico, a Lei da Circulação de Kirchhoff-Davies para uma cadeia cinemática fechada estabelece que a soma das velocidades dos pares cinemáticos ao longo da cadeia fechada é zero.

De modo a sistematizar, principalmente quando existe mais de um circuito, é conveniente construir a matriz dos circuitos  $B_{l,e}$ , partindo do grafo  $G_M$  que representa os circuitos existentes na cadeia cinemática. Nesta matriz,  $l$  é o número de circuitos e  $e$  é o número de arestas. Cada

elemento  $b_{i,j}$  de  $B_{l,e}$  poderá assumir os seguintes valores:

$$b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{—se o circuito } i \text{ no incida sobre a aresta } j; \\ +1 & \text{—se o sentido do circuito } i \text{ e da aresta } j \text{ forem os mesmos; } e, \\ -1 & \text{—se o sentido do circuito } i \text{ e da aresta } j \text{ forem opostos.} \end{cases}$$

Para o exemplo em foco  $l = 1$ , pois existe somente um circuito e  $e = 6$ , pois existem seis juntas. A matriz dos circuitos assume a seguinte forma:

$$B_{1,6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Com a matriz  $B$  determinada e assumindo as hipóteses da Lei Circulação de Kirchhoff-Davies, tem-se:

$$\$A + \$B + \$C - \$Rz - \$Py - \$Px = 0 \quad (\text{C.5})$$

Colocando em termos dos helicoides unitários, e assumindo  $\dot{q}_i$  como a magnitude da velocidade angular no  $i$ -ésimo par cinemático rotativo, tem-se:

$$\hat{\$}_A \dot{q}_A + \hat{\$}_B \dot{q}_B + \hat{\$}_C \dot{q}_C - \hat{\$}_{Rz} \dot{q}_{Rz} - \hat{\$}_{Py} \dot{q}_{Py} - \hat{\$}_{Px} \dot{q}_{Px} = 0 \quad (\text{C.6})$$

A forma matricial da Eq. C.6 é denominada equação de restrição, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & -\hat{\$}_{Rz} & -\hat{\$}_{Py} & -\hat{\$}_{Px} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_B \\ \dot{q}_C \\ \dot{q}_{Rz} \\ \dot{q}_{Py} \\ \dot{q}_{Px} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{C.7})$$

A velocidade das juntas secundárias do manipulador pode ser obtida pelo método de Davies, fornecendo valores às juntas primárias, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_B \\ \dot{q}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\$}_{Rz} & \hat{\$}_{Py} & \hat{\$}_{Px} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{Rz} \\ \dot{q}_{Py} \\ \dot{q}_{Px} \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

A Eq. C.8 pode ser escrita da seguinte forma:

$$N_s \dot{q}_s = N_p \dot{q}_p \quad (\text{C.9})$$

onde:

$$N_s = \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C \end{bmatrix} \quad (C.10)$$

$$\dot{q}_s = \begin{bmatrix} \dot{q}_A^T & \dot{q}_B^T & \dot{q}_C^T \end{bmatrix}^T \quad (C.11)$$

$$N_p = \begin{bmatrix} \hat{\$}_{Rz} & \hat{\$}_{Py} & \hat{\$}_{Px} \end{bmatrix} \quad (C.12)$$

$$\dot{q}_p = \begin{bmatrix} \dot{q}_{Rz}^T & \dot{q}_{Py}^T & \dot{q}_{Px}^T \end{bmatrix}^T \quad (C.13)$$

Os helicoides unitários  $\hat{\$}_A$ ,  $\hat{\$}_B$ ,  $\hat{\$}_C$  e  $\hat{\$}_{Rz}$  são de rotação pura, ou seja, podem ser representados na forma da Eq. B.15, ou seja:

$$\hat{\$}_r = \begin{bmatrix} s \\ s_0 \times s \end{bmatrix} \quad (C.14)$$

Já os helicoides  $\hat{\$}_{Py}$  e  $\hat{\$}_{Px}$  são de translação pura, ou seja, podem ser escritos na forma da Eq. B.16, ou seja:

$$\hat{\$}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} \quad (C.15)$$

No exemplo do manipulador planar de três elos com três juntas de rotação, a Eq.C.9 assume a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} s_{zA} & s_{zB} & s_{zC} \\ s_{0yA} s_{zA} & s_{0yB} s_{zB} & s_{0yC} s_{zC} \\ -s_{0xA} s_{zA} & -s_{0xB} s_{zB} & -s_{0xC} s_{zC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_B \\ \dot{q}_C \\ \dot{q}_D \\ \dot{q}_E \\ \dot{q}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\$}_{Rz} & \hat{\$}_{Py} & \hat{\$}_{Px} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{Rz} \\ \dot{q}_{Py} \\ \dot{q}_{Px} \end{bmatrix} \quad (C.16)$$

Resta entretanto, atualizar os valores de  $S$  e  $S_0$  ao longo do tempo, o que pode ser feito em relação aos valores iniciais ou de referência destes vetores, utilizando o método dos deslocamentos dos helicoides sucessivos, aqui denominados  $S_{ref}$  e  $S_{0ref}$ . Logo as componentes

da matriz  $N_s$  são:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_A \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{Aref} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} S_{0A} \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{0Aref} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} S_B \\ 0 \end{bmatrix} &= A_A^0 \begin{bmatrix} S_{Bref} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} S_{0B} \\ 1 \end{bmatrix} &= A_A^0 \begin{bmatrix} S_{0Bref} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} S_C \\ 0 \end{bmatrix} &= A_B^0 A_A^0 \begin{bmatrix} S_{Cref} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} S_{0C} \\ 1 \end{bmatrix} &= A_B^0 A_A^0 \begin{bmatrix} S_{0Cref} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (C.17)$$

De modo a obter a matriz  $N_p$ , tem-se que:

$$\begin{bmatrix} S_{Rz} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{Rzi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} s_{0Rzx} \\ s_{0Rzy} \\ s_{0Rzz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (C.18)$$

Logo as componentes da matriz  $N_p$  são:

$$N_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ p_y & 1 & 0 \\ -p_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.19)$$

Assim sendo:

$$\dot{q}_p = N_p^{-1} N_s \dot{q}_s \quad (C.20)$$

Note que o Jacobiano assume a seguinte expressão:

$$J = N_p^{-1} N_s \quad (C.21)$$

Como o sistema não é redundante, é possível inverter o Jacobiano, logo:

$$\dot{q}_s = [N_p^{-1} N_s]^{-1} \dot{q}_p \quad (C.22)$$

De modo a obter os valores das variáveis de junta  $q_s$  se faz necessário integrar a Eq. C.22 e para tal, se faz necessário utilizar um método de integração, que encontra-se exposto no apêndice D.1.

## APÊNDICE D

# Resolução da Cinemática Inversa

Este apêndice apresenta os fundamentos teóricos da resolução da cinemática inversa para um robô planar, apresentando o método de integração utilizado, além da abordagem de otimização utilizando a pseudo-inversa.

### D.1 Método de Integração

O método de Euler é um dos mais simples e antigos métodos numéricos para integração de equações diferenciais (DORN; MCCRACKEN, 1989). A solução numérica por este método se dá admitindo a propriedade da equação diferencial que representa a inclinação da curva em qualquer ponto como uma função  $x$  e  $y$ . As condições iniciais devem ser conhecidas, ou seja, a curva passa inicialmente por  $x_0$  e  $y_0$ . Partindo do ponto conhecido  $(x_0, y_0)$ , calcula-se a inclinação da curva em  $x = x_0$ , prosseguindo com uma pequena distância ao longo da tangente correspondente.

Chamando o incremento em  $x$  de  $\Delta t$  um novo ponto  $x_1 = x_0 + \Delta t$  terá um valor  $y_1$  associado à inclinação da tangente obtida pela equação diferencial. Fazendo sucessivas operações é obtida uma seqüência de pontos  $(x_0, y_0)$  que se aproximam da curva verdadeira, desde que  $\Delta t$  seja pequeno.

Utilizando o método de Euler, tem-se que:

$$q_{(t_{k+1})} = q_{(t_k)} + \dot{q}_{(t_k)}\Delta t \quad (\text{D.1})$$

ou,

$$\frac{q_{(t_{k+1})} - q_{(t_k)}}{\Delta t} = \dot{q}_{(t_k)} \quad (\text{D.2})$$

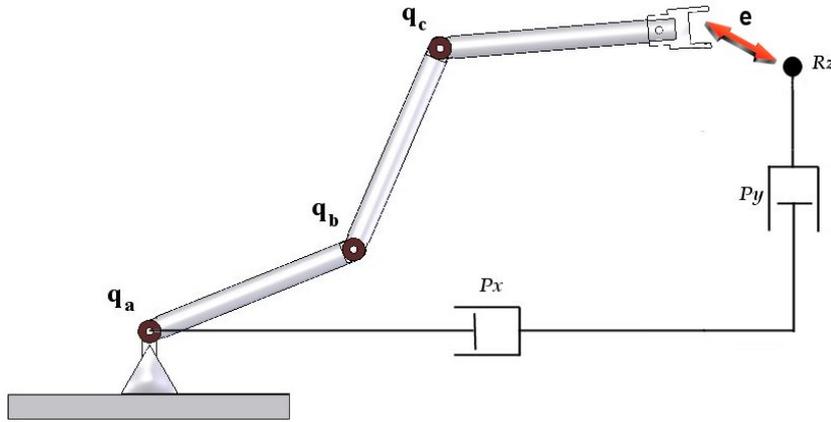
onde,

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k \quad (\text{D.3})$$

Substituindo a Eq. C.22 na Eq. D.1 e, com o pressuposto de serem conhecidas as condições iniciais, uma seqüência de variáveis de juntas secundárias podem ser determinadas utilizando a seguinte equação:

$$q_{s(t_{k+1})} = q_{s(t_k)} + [N_p^{-1}(q_{p(t_k)})N_s(q_{s(t_k)})]^{-1} \dot{q}_{p(t_k)} \Delta t \quad (D.4)$$

As variáveis das juntas secundárias que foram determinadas valendo-se do método numérico de integração de Euler, trazem um erro de integração oriundo deste método, resultando em um desvio da localização da ferramenta do manipulador, como mostra a Fig. 100.



**Figura 100:** Robô planar de três elos com três juntas de rotação com erro de posição

Assim sendo, existe um erro  $e$  entre a posição desejada  $x_d$  e a posição obtida  $x$ , ou seja:

$$e = x_d - x \quad (D.5)$$

$$\dot{e} = \dot{x}_d - \dot{x} \quad (D.6)$$

De modo a garantir a convergência deseja-se que o erro se comporte da seguinte forma:

$$\dot{e} + \mathbb{K}e = 0 \quad (D.7)$$

Substituindo as Eqs. D.5 e D.6 na Eq. D.7, e isolando  $\dot{x}$  tem-se:

$$\dot{x} = \dot{x}_d + \mathbb{K}(x_d - x) \quad (D.8)$$

A posição é obtida pela cinemática direta e a desejada é conhecida. Assim sendo, tem-se:

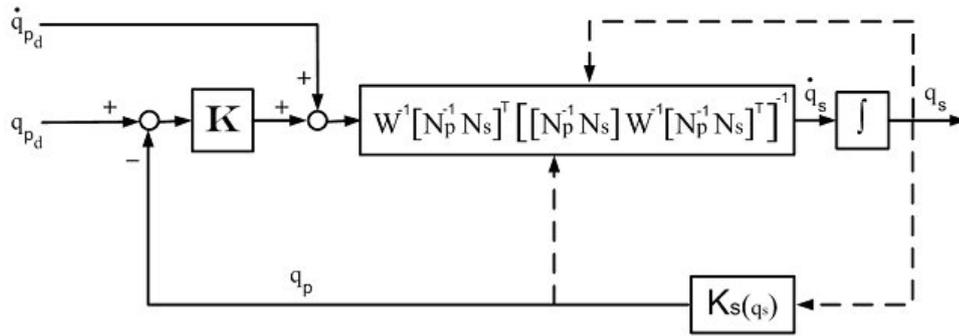
$$N_p^{-1} N_s \dot{q}_s = \dot{q}_p + \mathbb{K}(q_p - K_s(q_s)) \quad (\text{D.9})$$

$$\dot{q}_s = (N_p^{-1} N_s)^{-1} [\dot{q}_p + \mathbb{K}(q_p - K_s(q_s))] \quad (\text{D.10})$$

Aplicando o método de Euler:

$$q_{s(t_{k+1})} = q_{s(t_k)} + [N_p^{-1}(K_s(q_{s(t_k)})) N_s(q_{s(t_k)})]^{-1} [\dot{q}_{p(t_k)} + \mathbb{K}(q_{p(t_k)} - K_s(q_{s(t_k)}))] \Delta t \quad (\text{D.11})$$

A Fig. 101 apresenta o diagrama de blocos do algoritmo da cinemática inversa.



**Figura 101:** Diagrama de blocos do algoritmo de cinemática inversa utilizado

Implementando a simulação com tempo de simulação de 40s e o passo de integração de 0,001. A Fig. 102 mostra os gráficos obtidos da simulação, com o erro de posição e de orientação, bem como as condições iniciais para a matriz de ganho  $\mathbb{K}$ .

A Fig. 103 mostra a representação da saída gráfica em quatro instantes distintos.

## D.2 Resolução da Redundância Usando a Pseudo-Inversa

Neste apêndice encontram-se os fundamentos teóricos para resolução da redundância usando a pseudo-inversa. Existem outros métodos de resolução da redundância, que podem ser encontrados em Nenchev (NENCHEV, 1989). Fundamentalmente, estes métodos podem ser enquadrados em dois tipos: (1) os resolução empregando otimização e (2) resolução através de sistemas não-redundantes.

Os métodos mais comuns de resolução da redundância empregando otimização objetivam a minimização do quadrado da velocidade, da energia cinética, ou do torque nas juntas. Adotou-se a minimização do quadrado da velocidade, conhecida como pseudo-inversa ou inversa generalizada, pois é o mais encontrado na literatura especializada.

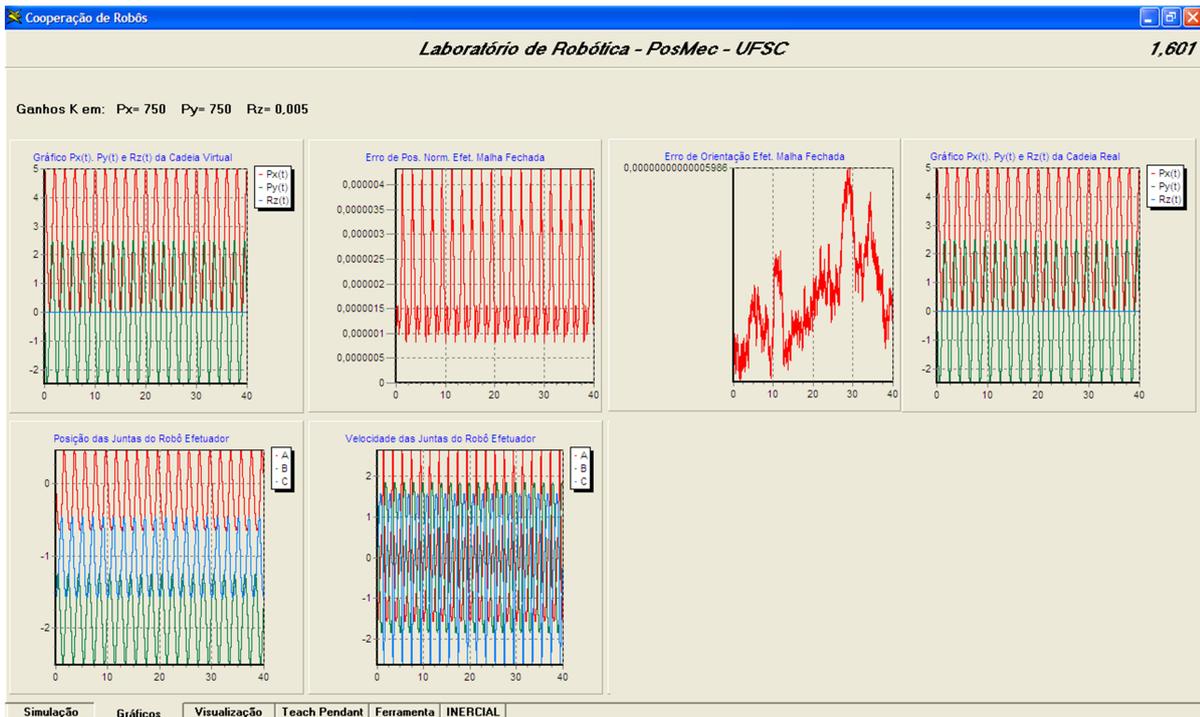


Figura 102: Tela de resultados da simulação do efetuador

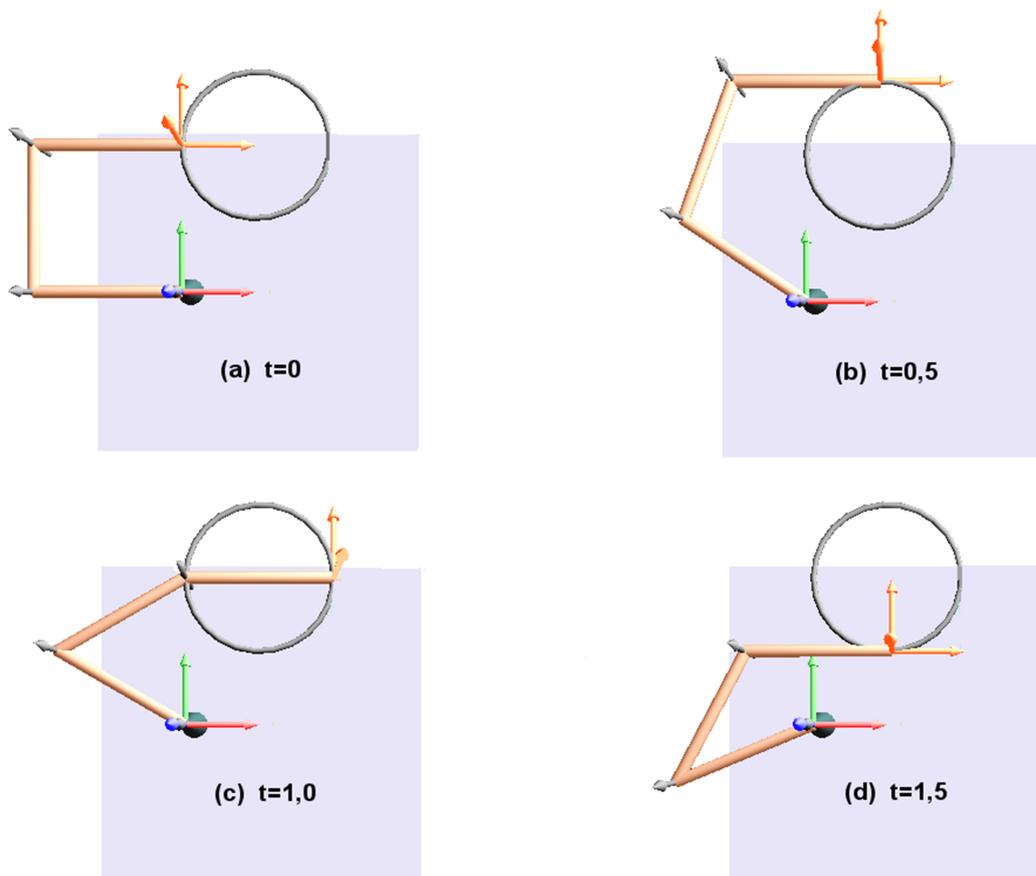
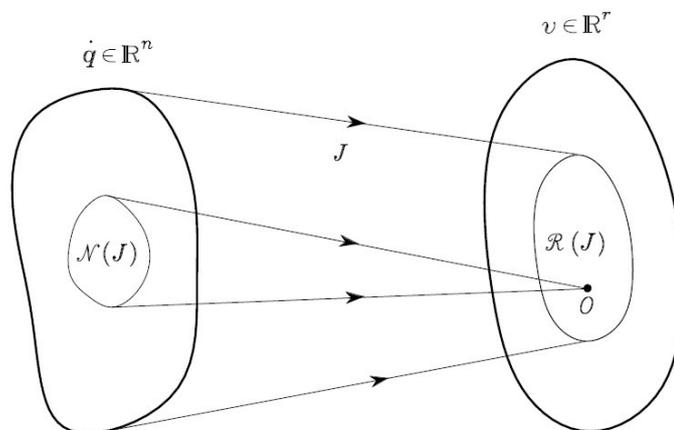


Figura 103: Visualização da saída gráfica do efetuador

### D.3 Redundância Cinemática

Qualquer movimento imposto por uma tarefa executada pela ferramenta de um robô manipulador pode ser definida por seis variáveis independentes, que equivale à dimensão do espaço. Entretanto, o movimento do último elo do manipulador, onde se encontra a ferramenta, é dependente das variáveis de junta. O Jacobiano, representado na Eq. B.94, é a matriz responsável pela transformação linear entre as velocidades no espaço das juntas, para as velocidades no espaço operacional, como esquematizado na Fig. 104. Esta transformação guarda dependência com a configuração instantânea da estrutura.

Quando existe redundância cinemática, o número de colunas do Jacobiano é maior que o número de linhas, o que impossibilita a inversão do mesmo. Com isso podem ser obtidas infinitas soluções no espaço das juntas, para uma mesma localização da ferramenta desejada. Assim sendo, existe um sub-espaço denominado núcleo  $\mathcal{N}(J)$ , ou espaço nulo, onde as velocidades das juntas não influenciam na velocidade do efetuador final, como representado na Fig. 104. A dimensão do núcleo é dada pela diferença entre o grau de liberdade da estrutura ( $n$ ) e a dimensão do espaço operacional ( $r$ ). Está diferença é denominada grau da redundância (NENCHEV, 1989).



**Figura 104:** Existência do Núcleo que resulta em velocidades nulas do efetuador final

Em um manipulador com redundância cinemática,  $n > r$ , o que garante a existência de um núcleo, ou seja, existe um sub-conjunto de juntas com velocidades específicas que geram movimentos internos na estrutura, sem produzir efeito de velocidade no efetuador final, ou seja, sem alterar a posição e a orientação do mesmo. Esta propriedade é bastante útil, pois permite posicionar a estrutura do manipulador numa condição mais favorável para a execução de uma tarefa.

Na seção seguinte encontra-se a abordagem de otimização utilizando a pseudo-inversa, como restrição primária e ainda utiliza-se a propriedade do núcleo, para impor restrições

secundárias, como por exemplo, fazer com que o manipulador trabalhe o mais próximo do valor central da faixa útil trabalho das juntas, além de permitir que a estrutura desvie de obstáculos.

## D.4 Pseudo-inversa ou Inversa Generalizada

Seja  $A$  uma matriz não-singular, então existe uma única matriz inversa,  $A^{-1}$  tal que:

$$A^{-1}A = A A^{-1} = I \quad (\text{D.12})$$

onde,  $I$  é a matriz identidade. A matriz inversa possui algumas propriedades descritas a seguir:

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (\text{D.13})$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad (\text{D.14})$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (\text{D.15})$$

A matriz  $A$  só tem inversa se e somente se for não-singular, ou seja, se as colunas (ou linhas) forem linearmente independentes e se a mesma for uma matriz quadrada. Numerosas pesquisas foram desenvolvidas no campo da matemática aplicada para descobrir algum tipo de matriz inversa parcial de uma matriz que fosse singular ou mesmo retangular. Assim surgiu a inversa generalizada de  $A$ , denotada por  $A^+$  que (i) existe para matrizes retangulares, onde o número de colunas é maior que o de linhas, (ii) possui algumas propriedades da inversa usual e (iii) reduz-se à matriz inversa usual quando  $A$  é não-singular. Alguns autores utilizam o termo **pseudo-inversa** ao invés de **inversa generalizada**.

De modo a comprovar a propriedade (iii) da pseudo-inversa, considere por definição que a inversa generalizada se comporta da seguinte forma:

$$AA^+A = A \quad (\text{D.16})$$

Se  $A$  é não-singular, então existe  $A^{-1}$ , que pode pré-multiplicar ambos os lados da equação, resultando que:

$$A^+ = A^{-1} \quad (\text{D.17})$$

Segundo Ben-Israel e Greville (BEN-ISRAEL; GREVILLE, 2002), o conceito de inversa generalizada foi mencionado por Fredholm em publicação em 1903, onde mostrou uma inversa generalizada particular de um operador integral, denominada por ele de pseudo-inversa. Assim,

a inversa generalizada de operadores integral e diferencial antecede a inversa generalizada de matrizes, cuja existência foi observada por E. H. Moore em 1920, que definiu a inversa única, chamada por ele de recíproca generalizada para qualquer matriz finita, ou seja, para matrizes quadradas ou retangulares.

Em 1951, Bjerhammar estudando a inversa de Moore, notou a existência de relação entre a inversa generalizada e a resolução de sistemas de equações lineares. Em 1955, Penrose aperfeiçoou e ampliou os resultados obtidos por Bjerhammar, mostrando unicidade da inversa de Moore, para uma dada matriz  $A$ . Os resultados obtidos foram tão significativos que muitos autores denominam a inversa generalizada como **inversa de Moore-Penrose** (BEN-ISRAEL; GREVILLE, 2002).

### D.4.1 Utilização da Pseudo-Inversa

A grande maioria dos pesquisadores no campo dos sistemas redundantes (HOLLERBACH; SUH, 1987) (BAILLIEUL, 1986) (LI et al., 2001.) (DOTY et al., 1995) (SAWO, 2005) (LEWIS; MACIEJEWSKI, 1994) (ZERGEROGLU et al., 2000) (SEEREERAM; WEN, 1993) (TATLICIOGLU et al., 2005) utiliza a solução instantânea da redundância em nível de otimização da velocidade pelo uso da pseudo-inversa  $J^+$  do Jacobiano  $J$ .

Assim sendo, é possível encontrar uma solução otimizada em função de um critério pré-estabelecido, como por exemplo, minimizar o funcional de custo quadrático das velocidades nas juntas (SICILIANO et al., 2008). Neste caso, deseja-se minimizar a função  $g$ , tal que:

$$g(\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbb{W} \dot{q} \quad (\text{D.18})$$

Seja  $\mathbb{W}$  denominada matriz de pesos, sendo simétrica positiva definida e convenientemente escolhida, geralmente como uma matriz diagonal, onde quanto maior forem os valores relativos na diagonal, maior será o peso no funcional. O problema pode ser resolvido usando o método dos multiplicadores de Lagrange (SICILIANO et al., 2008).

Considere o seguinte funcional de custo modificado:

$$g(\dot{q}, \lambda) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbb{W} \dot{q} + \lambda^T (v - J\dot{q}) \quad (\text{D.19})$$

Seja  $\lambda$  um vetor ( $r \times 1$ ) de multiplicadores desconhecidos, que permitirá incorporar a restrição ( $v = J\dot{q}$ ) ao funcional a ser minimizado. Cabe ressaltar que  $n$  corresponde ao número total de juntas que, por ser redundante é maior que  $r$  que tem valor da dimensão do espaço, ou

seja,  $r = 3$  para o plano e 6 para o caso espacial. A solução deverá necessariamente satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \dot{q}} \end{bmatrix}^T = \vec{0} \quad (\text{D.20})$$

e

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \lambda} \end{bmatrix}^T = \vec{0} \quad (\text{D.21})$$

Substituindo a Eq. D.19 nos termos da condição imposta pela Eq. D.20, e lembrando que  $\mathbb{W}$  é simétrica positiva definida, o que resulta que ela é igual a sua transposta, e garante que sempre é passível de ser invertida. Assim, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \dot{q}} \end{bmatrix}^T = \mathbb{W} \dot{q} - J^T \lambda = \vec{0} \quad (\text{D.22})$$

$$\dot{q} = \mathbb{W}^{-1} J^T \lambda \quad (\text{D.23})$$

A segunda derivada, Eq. D.24 garante que a solução expressa na Eq. D.23 realmente é um mínimo, visto que é sempre igual a  $\mathbb{W}$  que é escolhida como positiva definida.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \dot{q}^2} = \mathbb{W} \quad (\text{D.24})$$

Substituindo a Eq. D.19 nos termos da condição imposta pela Eq. D.21, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \lambda} \end{bmatrix}^T = [v - J\dot{q}]^T = [v - J\dot{q}] = \vec{0} \quad (\text{D.25})$$

$$v = J\dot{q}$$

que é a própria relação da condição de relação entre  $v$  e  $\dot{q}$ .

Combinando o resultado das Eqs. D.23 e D.25 tem-se:

$$v = J \mathbb{W}^{-1} J^T \lambda \quad (\text{D.26})$$

Como  $J$  tem dimensão  $(n \times r)$ , onde  $r$  é o número do espaço operacional necessário à realização de uma dada tarefa e  $n$  é o número do grau de liberdade do manipulador ( $n$  juntas), e  $\mathbb{W}$  tem dimensão  $(r \times r)$ , então o produto  $J \mathbb{W}^{-1} J^T$  tem dimensão  $(r \times r)$ , ou seja resulta uma matriz quadrada, admitindo a inversão, que permite calcular o valor de  $\lambda$ , ou seja:

$$\lambda = [J \mathbb{W}^{-1} J^T]^{-1} v \quad (\text{D.27})$$

Substituindo a Eq. D.27 na Eq. D.23 tem-se a seguinte solução otimizada:

$$\dot{q} = \mathbb{W}^{-1} J^T [ J \mathbb{W}^{-1} J^T ]^{-1} v \quad (\text{D.28})$$

ou,

$$\dot{q} = J_W^+ v \quad (\text{D.29})$$

onde,  $J_W^+$  é denominado matriz pseudo-inversa com pesos, sendo que:

$$J_W^+ = \mathbb{W}^{-1} J^T [ J \mathbb{W}^{-1} J^T ]^{-1} \quad (\text{D.30})$$

Uma simples verificação mostra a veracidade da solução, bastando pré-multiplicar ambos termos da Eq. D.28 por  $J$ , recaindo na equação  $v = J\dot{q}$ , como mostrado a seguir:

$$J\dot{q} = J \mathbb{W}^{-1} J^T [ J \mathbb{W}^{-1} J^T ]^{-1} v \quad (\text{D.31})$$

sendo que:

$$J \mathbb{W}^{-1} J^T [ J \mathbb{W}^{-1} J^T ]^{-1} = I \quad (\text{D.32})$$

logo:

$$v = J\dot{q} \quad (\text{D.33})$$

A solução obtida minimiza localmente a norma do vetor de velocidades. Fazendo com que a matriz de pesos  $W$  seja a matriz identidade, é possível escrever a Eq. D.28 da seguinte forma:

$$\dot{q} = J^+ v \quad (\text{D.34})$$

onde o termo  $J^+$  é conhecido como pseudo-inversa direita de  $J$  (??), ou simplesmente pseudo-inversa, sendo dado por:

$$J^+ = J^T [ J J^T ]^{-1} \quad (\text{D.35})$$

A utilização da pseudo-inversa é bastante adotada na resolução da cinemática inversa de manipuladores redundantes, pois resulta em uma matriz quadrada viabilizando a inversão.

## D.4.2 Inclusão de Restrição Adicional sem Pesos

Seja  $\dot{q}^*$  uma solução de  $v = J\dot{q}$ , então  $\dot{q}^* + P\dot{q}_0$  também é uma solução se e somente se  $P$  é um projetor no espaço nulo de  $J$ .

Logo a solução da Eq. D.19 pode ser modificada pela introdução de um termo do tipo  $P\dot{q}_0$ . Em particular  $\dot{q}_0$  pode ser especificada de modo que venha a satisfazer uma restrição adicional.

Neste caso, assumindo  $\mathbb{W}$  como a identidade, é necessário considerar uma nova função de custo na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 g(\dot{q}, \lambda) &= \frac{1}{2} (\dot{q} - \dot{q}_0)^T \mathbb{W} (\dot{q} - \dot{q}_0) + \lambda^T (v - J\dot{q}) \\
 &= \frac{1}{2} (\dot{q} - \dot{q}_0)^T (\dot{q} - \dot{q}_0) + \lambda^T (v - J\dot{q}) \\
 &= \frac{1}{2} (\dot{q}^T (\dot{q} - \dot{q}_0) - \dot{q}_0^T (\dot{q} - \dot{q}_0) + \lambda^T (v - J\dot{q})) \\
 &= \frac{1}{2} (\dot{q}^T \dot{q} - \dot{q}^T \dot{q}_0 - \dot{q}_0^T \dot{q} + \dot{q}_0^T \dot{q}_0) + \lambda^T v - \lambda^T J\dot{q}
 \end{aligned} \tag{D.36}$$

Sabendo que:

$$\dot{q}_0^T \dot{q} = \dot{q}^T \dot{q}_0 \tag{D.37}$$

$$g(\dot{q}, \lambda) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{q} - \dot{q}_0^T \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}_0^T \dot{q}_0 + \lambda^T v - \lambda^T J\dot{q} \tag{D.38}$$

A solução deverá necessariamente satisfazer as condições impostas nas Eqs. D.20 e D.21.

Assim sendo tem-se que:

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial \dot{q}} \right]^T = \dot{q} - \dot{q}_0 - J^T \lambda = \vec{0} \tag{D.39}$$

Logo:

$$\dot{q} = \dot{q}_0 + J^T \lambda \tag{D.40}$$

Como  $v = J(\dot{q})$ , determina-se  $\lambda$ , ou seja:

$$\begin{aligned}
 v &= J(\dot{q}_0 + J^T \lambda) \\
 v - J\dot{q}_0 &= JJ^T \lambda \\
 \lambda &= [JJ^T]^{-1} [v - J\dot{q}_0]
 \end{aligned} \tag{D.41}$$

Substituindo o valor de  $\lambda$  na Eq. D.40, tem-se:

$$\dot{q} = \dot{q}_0 + J^T [JJ^T]^{-1} v - J^T [JJ^T]^{-1} J\dot{q}_0 \tag{D.42}$$

Como  $J^+ = J^T [JJ^T]^{-1}$  que é a pseudo-inversa, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \dot{q} &= \dot{q}_0 + J^+ v - J^+ J\dot{q}_0 \\
 \dot{q} &= J^+ v + [I - J^+ J]\dot{q}_0
 \end{aligned} \tag{D.43}$$

onde:

- $J^+ v$  - corresponde à norma mínima das velocidades da juntas com uma matriz de pesos

igual a identidade; e,

- $[I - J^+J]\dot{q}_0$  - busca satisfazer a restrição adicional a ser especificada através de  $\dot{q}_0$ .

Cabe ressaltar que  $[I - J^+J]$  é uma matriz igual a  $P$ , que projeta o vetor  $\dot{q}_0$  no espaço nulo de  $J$  de forma a não violar a restrição  $v = J\dot{q}$ . Assim sendo, pode-se gerar movimentos internos descritos por  $[I - J^+J]\dot{q}_0$ , que reconfiguram a estrutura do manipulador sem modificar a posição e a orientação do efetuador final.

Uma escolha típica para  $\dot{q}_0$  é dada por:

$$\dot{q}_0 = K_0 \left( \frac{\partial w(q)}{\partial q} \right)^T \quad (\text{D.44})$$

onde  $K_0 > 0$  e  $w(q)$  é uma função objetivo secundária que depende das posições das juntas.

A solução move o manipulador ao longo da direção do gradiente da função objetiva  $w(q)$ , buscando maximizá-lo localmente de forma compatível com o objetivo primário, ou seja, a restrição primária  $v = J\dot{q}$ . Alguns valores típicos associados à  $w(q)$  conforme o objetivo em foco são:

- **Medida de Manipulabilidade**

$$w(q) = \sqrt{\det(J(q)J^T(q))} \quad (\text{D.45})$$

onde se anula nas configurações singulares. Assim pela maximização desta medida, a redundância é explorada por diversos autores de modo a evitar as singularidades (YOSHIKAWA, 1990) (SICILIANO et al., 2008) (LI et al., 2001.) (DOTY et al., 1995) (SAWO, 2005) (ZERGEROGLU et al., 2000) (HOLLERBACH; SUH, 1987).

- **Distância dos Limites Mecânicos das Juntas**

$$w(q) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{q_i - \bar{q}_i}{q_{i_M} - q_{i_m}} \right)^2 \quad (\text{D.46})$$

onde  $q_{i_M}$  e  $q_{i_m}$  representam os limites máximo e mínimo da junta  $i$  e  $\bar{q}_i$  o valor médio, ou seja o centro da faixa da junta. Assim pela maximização da distância, a redundância é explorada para manter as variáveis de junta tão próxima quanto o possível do centro das faixas (SICILIANO et al., 2008) (LI et al., 2001.) (HOLLERBACH; SUH, 1987).

- **Distância de Obstáculos**

$$w(q) = \min_{p,o} \|p(q) - o\| \quad (\text{D.47})$$

onde  $o$  é o vetor posição de um ponto apropriado no obstáculo, por exemplo, o centro se o obstáculo for modelado como uma esfera, e  $p$  é a posição de um ponto genérico ao longo

da estrutura do manipulador. Assim pela maximizando esta distância, a redundância é explorada por diversos autores de modo a evitar colisões entre o manipulador e o obstáculo (SICILIANO et al., 2008) (BAILLIEUL, 1986) (SAWO, 2005) (SEEREERAM; WEN, 1993) (HOLLERBACH; SUH, 1987).

Assim sendo, a pseudo-inversa possui duas grandes vantagens (HOLLERBACH; SUH, 1987): a primeira é baseada no fato de ser uma inversa generalizada que minimiza o quadrado do vetor velocidade das juntas, evitando com isso, a sub-utilização de alguma em detrimento de outras, o que resultaria na necessidade de altas velocidades por parte de algumas juntas, a fim de compensar a referida sub-utilização. Além disso, como a utilização da pseudo-inversa objetiva minimizar o quadrado da velocidade das juntas, isto implica que guarda uma relação direta com a energia cinética. A segunda vantagem da utilização da pseudo-inversa é a possibilidade de utilização do espaço nulo, que permite embutir restrições secundárias sem interferir na tarefa desejada.

### D.4.3 Inclusão de Restrição Adicional com Pesos

No sub-item anterior, a pseudo-inversa busca a minimização do quadrado das velocidades das juntas, ou seja é otimização cinemática. Uma outra maneira de se utilizar o espaço vetorial nulo é com a pseudo-inversa com pesos,  $J_W^+$ , representada na Eq. D.30, onde a matriz  $\mathbb{W}$  deixa de ser a identidade e passa a receber valores positivos distintos na sua diagonal principal, criando uma diferenciação nas características de desempenho.

## APÊNDICE E

# Aplicação da Modelagem Cinemática em Sistema com Dois Robôs Cooperativos

Este apêndice apresenta a modelagem cinemática de um Sistema Robótico Cooperativo (SRC) constituído por dois robôs planos de três elos, com três juntas de rotação, sendo utilizado o Método de Davies (apêndice C) na determinação do Jacobiano Relativo Baseado em Helicóides.

### E.1 Método de Davies - Aplicação

O Método de Davies estabelece que: (1) seja incorporada uma cadeia virtual de Assur, de modo a fechar a cadeia cinemática aberta; (2) seja montado o grafo representativo; e (3) seja utilizado a Lei da Circulação de Kirchhoff-Davies. Como resultado são obtidas equações linearmente que devidamente arranjadas formam o Jacobiano Relativo Baseado em Helicóides.

#### E.1.1 Inclusão da cadeia virtual de Assur

Neste passo é acrescentada uma cadeia virtual de Assur tipo PPR, objetivando representar a posição relativa desejada entre a ferramenta do robô operador e referencial  $p$  da peça fixada pelo robô posicionador, como mostrado na Fig. 105, o que promove o fechamento da cadeia cinemática.

#### E.1.2 Modelagem utilizando grafos

A modelagem de cada robô é feita utilizando a Teoria dos Grafos, onde a cada corpo é associado um vértice e a cada junta uma aresta. A Fig. 106 mostra o grafo resultante

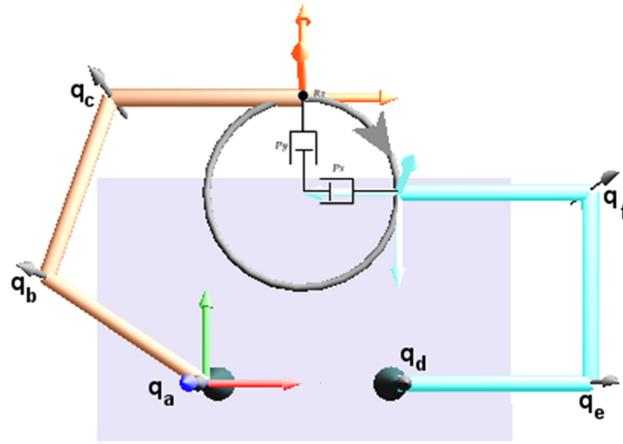


Figura 105: Inclusão da cadeia virtual de Assur

representando a cadeia virtual de Assur representativa da tarefa a ser executada, e os dois manipuladores envolvidos.

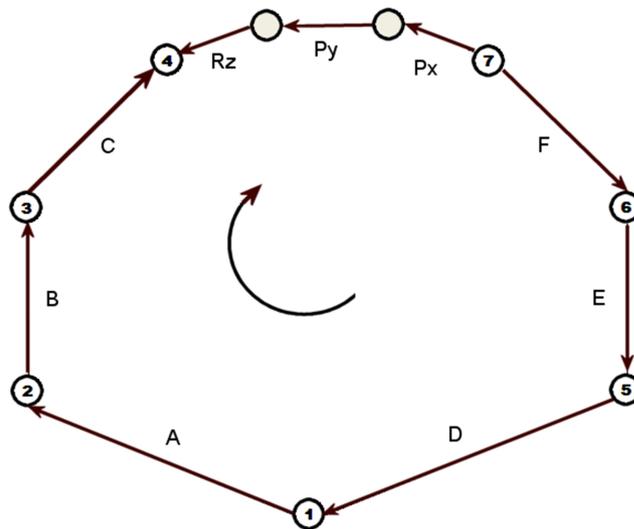


Figura 106: Grafo da cooperação

### E.1.3 Lei da Circulação de Kirchhoff-Davies

Dando seqüência ao método, obtém-se a matriz dos circuitos, que assume a seguinte forma:

$$B_{1,9} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{E.1}$$

Com a matriz  $B$  determinada e assumindo as hipóteses da Lei Circulação de Kirchhoff-Davies, tem-se:

$$\$A + \$B + \$C + \$D + \$E + \$F - \$Rz - \$Py - \$Px = 0 \tag{E.2}$$

Colocando em termos dos helicóides unitários, e assumindo  $\dot{q}_i$  como a magnitude da velocidade angular no  $i$ -ésimo par cinemático rotativo, tem-se:

$$\hat{\$}_A \dot{q}_A + \hat{\$}_B \dot{q}_B + \hat{\$}_C \dot{q}_C + \hat{\$}_D \dot{q}_D + \hat{\$}_E \dot{q}_E + \hat{\$}_F \dot{q}_F - \hat{\$}_{Rz} \dot{q}_{Rz} - \hat{\$}_{Py} \dot{q}_{Py} - \hat{\$}_{Px} \dot{q}_{Px} = 0 \quad (\text{E.3})$$

A forma matricial da Eq. E.3 é denominada equação de restrição, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D & \hat{\$}_E & \hat{\$}_F & -\hat{\$}_{Rz} & -\hat{\$}_{Py} & -\hat{\$}_{Px} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_B \\ \dot{q}_C \\ \dot{q}_D \\ \dot{q}_E \\ \dot{q}_F \\ \dot{q}_{Rz} \\ \dot{q}_{Py} \\ \dot{q}_{Px} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{E.4})$$

Isolando as velocidades relativas à tarefa das velocidades das juntas, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \hat{\$}_{Rz} & \hat{\$}_{Py} & \hat{\$}_{Px} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{Rz} \\ \dot{q}_{Py} \\ \dot{q}_{Px} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\$}_A & \hat{\$}_B & \hat{\$}_C & \hat{\$}_D & \hat{\$}_E & \hat{\$}_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_B \\ \dot{q}_C \\ \dot{q}_D \\ \dot{q}_E \\ \dot{q}_F \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

Os helicóides  $\hat{\$}_A, \hat{\$}_B, \hat{\$}_C, \hat{\$}_D, \hat{\$}_E, \hat{\$}_F$  e  $\hat{\$}_{Rz}$  são de rotação pura, ou seja, podem ser representados na forma da Eq. B.15. Já os helicóides  $\hat{\$}_{Py}$  e  $\hat{\$}_{Px}$  são de translação pura, ou seja,

podem ser escritos na forma da Eq. B.16. Substituindo os helicóides tem-se:

$$\begin{bmatrix} s_z \$R_z & 0 & 0 \\ s_{0y} \$R_z s_z \$R_z & s_x \$P_y & s_x \$P_x \\ -s_{0x} \$R_z s_z \$R_z & s_y \$P_y & s_y \$P_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{Rz} \\ \dot{q}_{Py} \\ \dot{q}_{Px} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_z \$A & s_z \$B & s_z \$C & s_z \$D & s_z \$E & s_z \$F \\ s_{0y} \$A s_z \$A & s_{0y} \$B s_z \$B & s_{0y} \$C s_z \$C & s_{0y} \$D s_z \$D & s_{0y} \$E s_z \$E & s_{0y} \$F s_z \$F \\ -s_{0x} \$A s_z \$A & -s_{0x} \$B s_z \$B & -s_{0x} \$C s_z \$C & -s_{0x} \$D s_z \$D & -s_{0x} \$E s_z \$E & -s_{0x} \$F s_z \$F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_B \\ \dot{q}_C \\ \dot{q}_D \\ \dot{q}_E \\ \dot{q}_F \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

No caso em questão, por se tratar do plano, pelo fato das juntas prismáticas não sofrerem qualquer influencia da juntas rotativas e pelo fato que as coordenadas em  $S_0$  de  $\$_{rz}$  serem as variáveis da junta prismática da cadeia virtual de Assur, a equação acima pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ P_y & 0 & 1 \\ -P_x & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{Rz} \\ \dot{q}_{Py} \\ \dot{q}_{Px} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ s_{0y} \$A & s_{0y} \$B & s_{0y} \$C & s_{0y} \$D & s_{0y} \$E & s_{0y} \$F \\ -s_{0x} \$A & -s_{0x} \$B & -s_{0x} \$C & -s_{0x} \$D & -s_{0x} \$E & -s_{0x} \$F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_B \\ \dot{q}_C \\ \dot{q}_D \\ \dot{q}_E \\ \dot{q}_F \end{bmatrix} \quad (\text{E.7})$$

onde:

$$N_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ P_y & 0 & 1 \\ -P_x & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.8})$$

$$N_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ s_{0y} \$A & s_{0y} \$B & s_{0y} \$C & s_{0y} \$D & s_{0y} \$E & s_{0y} \$F \\ -s_{0x} \$A & -s_{0x} \$B & -s_{0x} \$C & -s_{0x} \$D & -s_{0x} \$E & -s_{0x} \$F \end{bmatrix} \quad (\text{E.9})$$

Assim sendo:

$$\dot{q}_p = [N_p]^{-1} N_s \dot{q}_s \quad (\text{E.10})$$

Finalmente o Jacobiano Relativo Baseado em Helicóides pode ser expresso por:

$$J_R = [N_p]^{-1} N_s \quad (\text{E.11})$$

Como a matriz  $N_p$  tem dimensão (3x3) e  $N_s$  (3x6), resulta que  $J_R$  tem dimensão (3x6) e não admite inversa, visto que não é uma matriz de posto completo. Neste caso existem infinitas soluções para a Eq. E.10, assim sendo será utilizada a pseudo-inversa de  $J_R$ .

#### E.1.4 Pseudo-Inversa de $J_R$

É possível encontrar uma solução otimizada em função de um critério pré-estabelecido, como por exemplo, minimizar o funcional de custo quadrático das velocidades nas juntas (SICILIANO et al., 2008). Assim sendo, reproduzindo a Eq. D.28, tem-se a seguinte solução otimizada:

$$\dot{q} = \mathbb{W}^{-1} J_R^T [J_R \mathbb{W}^{-1} J_R^T]^{-1} v \quad (\text{E.12})$$

onde,

$$J_R^+ = \mathbb{W}^{-1} J_R^T [J_R \mathbb{W}^{-1} J_R^T]^{-1} \quad (\text{E.13})$$

A solução obtida minimiza localmente a norma do vetor de velocidades e o termo  $J_R^+$  é conhecido como pseudo-inversa de  $J_R$  (SICILIANO et al., 2008).

Substituindo a Eq. E.11 na Eq. E.12, tem-se:

$$\dot{q}_s = \mathbb{W}^{-1} [N_p^{-1} N_s]^T [ [N_p^{-1} N_s] \mathbb{W}^{-1} [N_p^{-1} N_s]^T ]^{-1} \dot{q}_p \quad (\text{E.14})$$

#### E.1.5 Integração da Velocidade

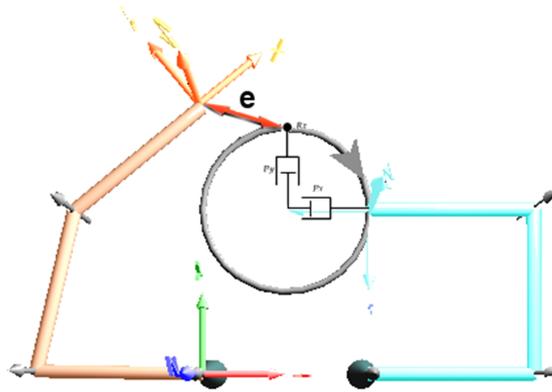
Substituindo a Eq. E.10 na Eq. D.1 e, com o pressuposto de serem conhecidas as condições iniciais, uma seqüência de variáveis de juntas secundárias podem ser determinadas utilizando a seguinte equação:

$$q_{s(t_{k+1})} = q_{s(t_k)} + \mathbb{W}^{-1} [N_p^{-1}(q_{p(t_k)}) N_s(q_{s(t_k)})]^T [ [N_p^{-1}(q_{p(t_k)}) N_s(q_{s(t_k)})] \mathbb{W}^{-1} [N_p^{-1}(q_{p(t_k)}) N_s(q_{s(t_k)})]^T ]^{-1} \dot{q}_{p(t_k)} \Delta t \quad (\text{E.15})$$

#### E.1.6 Convergência do Erro

As variáveis das juntas secundárias que foram determinadas valendo-se do método numérico de integração de Euler, e trazem um erro de integração oriundo do método de Euler,

resultando em um desvio da localização da ferramenta do manipulador. Assim sendo, existirá um erro entre a posição desejada ( $x_0$ ) e a posição obtida, como mostra a Fig. 107.



**Figura 107:** Erro na cooperação entre robôs posicionador & operador

De modo a garantir a convergência do erro conforme a Eq. D.7, a Eq. E.15 passa a ser escrita como:

$$q_{s(t_{k+1})} = q_{s(t_k)} + \mathbb{W}^{-1} [N_P^{-1}(K_s(q_{s(t_k)}))N_S(q_{s(t_k)})]^T \\ [ [N_P^{-1}(K_s(q_{s(t_k)}))N_S(q_{s(t_k)})] \mathbb{W}^{-1} [N_P^{-1}(K_s(q_{s(t_k)}))N_S(q_{s(t_k)})]^T ]^{-1} \quad (\text{E.16}) \\ [\dot{q}_{p(t_k)} + \mathbb{K}[q_{p(t_k)} - K_s(q_{s(t_k)})]]\Delta t$$

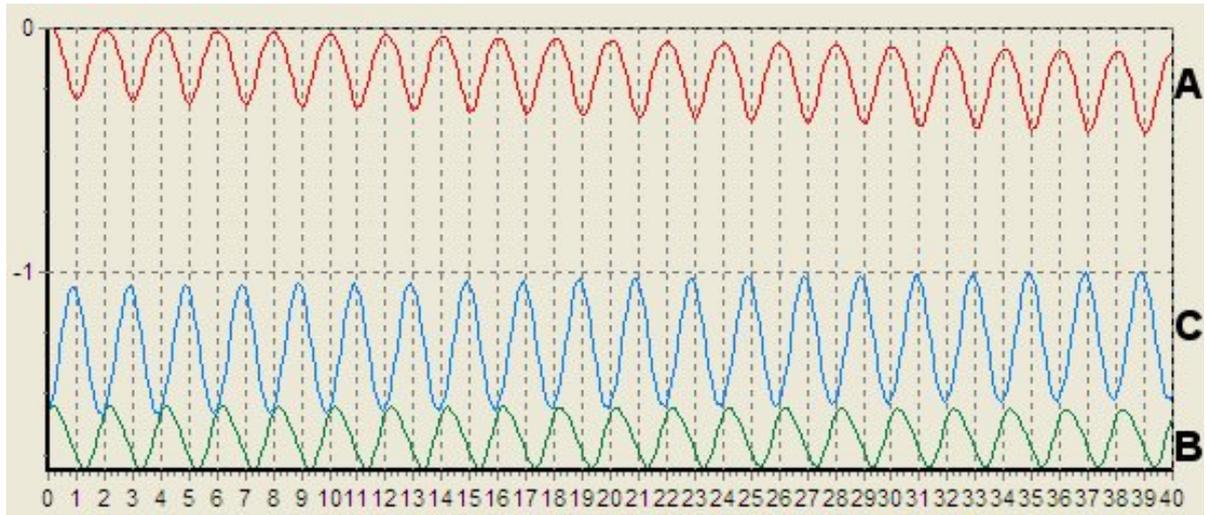
### E.1.7 Resultados da Simulação

Implementando a simulação com um passo de integração de  $1ms$  e um tempo total de simulação de  $12s$ ; para a matriz de pesos  $\mathbb{W}$  tem-se para o robô operador nas juntas A, B e C os valores 1, 1 e 1, respectivamente, bem como para o robô posicionador nas juntas D, E e F os valores 1, 1 e 1, respectivamente.

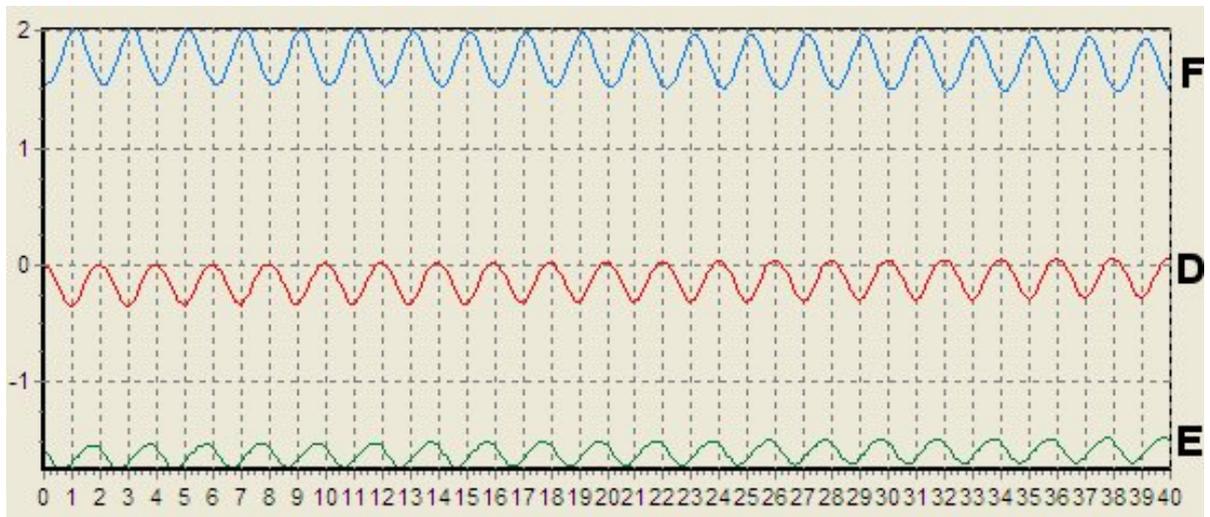
Como resultado da simulação obtem-se os valores das posições desejadas nas juntas do robô operador e do posicionador, como mostrado nas Figs. 108 e 109, respectivamente.

A Fig. 110 mostra os gráficos do erro de posição e de orientação, onde o erro máximo de posição é sempre inferior a  $0,003\text{ mm}$  e o de orientação chega em torno de  $3 \times 10^{-13}rd$ .

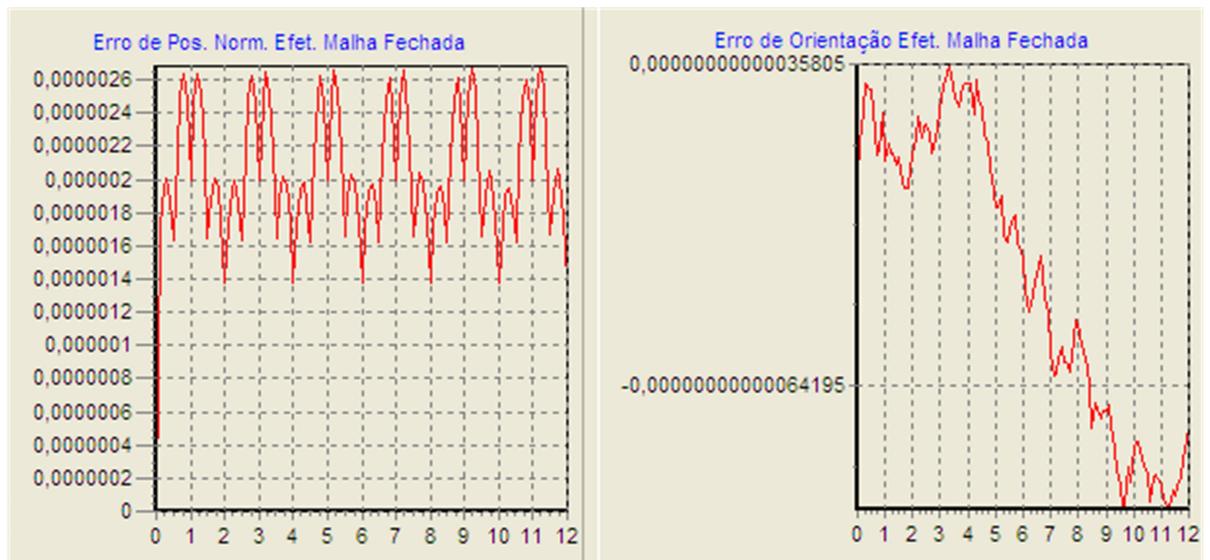
A Fig. 111 mostra a representação da saída da simulação gráfica em quatro instantes distintos.



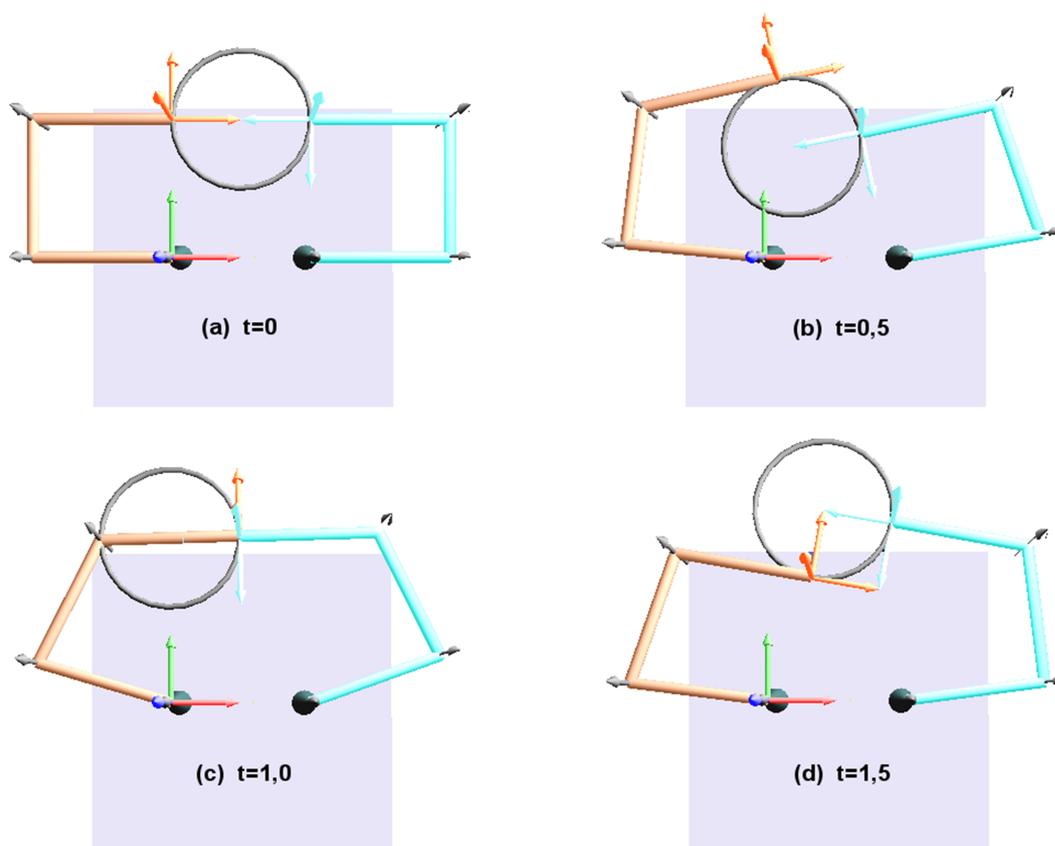
**Figura 108:** Posição das juntas do robô operador



**Figura 109:** Posição das juntas do robô posicionador



**Figura 110:** Gráficos de erros de posição e orientação



**Figura 111:** Saída gráfica da cooperação entre os robôs operador & posicionador

## Referências

- ABB-IRB-1600X120. *ABB Robotics*. <<http://www.abb.com/robots>>, 2008. Acesso em 24 Ago 2008.
- BAILLIEUL, J. Avoiding obstacles and resolving kinematic redundancy. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, v. 3, p. 1698–1704, 1986.
- BEKEY, G. *Autonomous Robots: From Biological Inspiration to Implementation and Control*. MIT Press, 2005.
- BEN-ISRAEL, A.; GREVILLE, T. N. E. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. RUTCOR, 2002.
- BROGARDH, T. Present and future robot control development—An industrial perspective. *Annual Reviews in Control*, Elsevier, v. 31, n. 1, p. 69–79, 2007.
- CACCAVALE, F. et al. RePLiCS: an environment for open real-time control of a dual-arm industrial robotic cell based on RTAI-Linux. *2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2005.(IROS 2005)*, p. 2493–2498, 2005.
- CAMPOS, A. *Cinemática Diferencial de Manipuladores Empregando Cadeias Virtuais*. Tese (Doutorado) — Engenharia Mecânica, UFSC, 2004.
- CHOI, J. et al. Two-arm cooperative assembly using force-guided control with adaptive accommodation. *Intelligent Robots and Systems, 1999. IROS '99. Proceedings. 1999 IEEE/RSJ International Conference on*, v. 2, p. 1253–1258, 1999.
- CONKUR, E.; BUCKINGHAM, R. Clarifying the definition of redundancy as used in robotics. *Robotica*, Cambridge Univ Press, v. 15, n. 05, p. 583–586, 1997.
- DAVIDSON, J.; HUNT, K. *Robots and Screw Theory*. Oxford University Press, 2004.
- DAVIES, T. Kirchhoff's Circulation Law Applied to Multi-Loop Kinematic Chains. *Mechanism and Machine Theory*, v. 16, p. 171–183, 1981.
- DAVIES, T. Mechanical networks-I: Passivity and redundancy. *Mechanism and Machine Theory*, v. 18, n. 2, p. 95–101, 1983.
- DAVIES, T. Mechanical Networks-II: Formulae for the Degrees of Mobility and Redundancy. *Mechanism and Machine Theory*, v. 18, n. 2, p. 103–106, 1983.

- DAVIES, T. Mechanical Networks-III, Wrenches on Circuit Screws. *Mechanism and Machine Theory*, v. 18, n. 2, p. 107–112, 1983.
- DAVIES, T. Freedom and Constraint in Coupling Networks. *Mechanical Engineering Science*, v. 220, Part C, p. 989–1010, 2006.
- DORN, W.; MCCRACKEN, D. Cálculo Numérico com Estudos de Casos em Fortran IV. Editora Campos, 1989.
- DOTY, K. et al. Robot manipulability. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 11, p. 462–468, 1995.
- DOURADO, A. *Cinemática de Robôs Cooperativos*. Dissertação (Mestrado) — Engenharia Mecânica, UFSC, SC, 2005.
- FREITAS, P. Introdução à Modelagem e Simulação de Sistemas com Aplicações Arena. *Visual Books*, 2008.
- GROSS, J. L.; YELLEN, J. Handbook of Graph Theory. CRC Press, 2003.
- HEMAMI, A. Kinematics of two-arm robots. *Robotics and Automation, IEEE Journal of*, v. 2, n. 4, p. 225–228, 1986.
- HIGASHIMORI, M. et al. A New Four-Fingered Robot Hand with Dual Turning Mechanism. *Robotics and Automation, 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on*, p. 2679–2684, 2005.
- HOLLERBACH, J.; SUH, K. Redundancy resolution of manipulators through torque optimization. *Robotics and Automation, IEEE Journal of*, v. 3, n. 4, p. 308–316, 1987.
- HWANG, Y. K. et al. Human Interface, Automatic Planning, and Control of a Humanoid Robot. *The International Journal of Robotics Research, Multimedia Archives*, v. 17, n. 11, p. 1131–1149, 1998.
- JAMISOLA, R.; MACIEJEWSKI, A.; ROBERTS, R. Failure-tolerant path planning for kinematically redundant manipulators anticipating locked-joint failures. *IEEE Transactions on Robotics*, Citeseer, v. 22, n. 4, p. 603–612, 2006.
- KELTON, W.; SADOWSKI, R.; STURROCK, D. Simulation with Arena. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2003.
- KOCHAN, A. Robots and operators work hand in hand. *Industrial robot, Emerald*, v. 33, n. 6, p. 422–424, 2006.
- KUKA-KR6. *KUKA Industrial Robots*. <<http://www.kuka-robotics.com/en>>, 2008. Acesso em 12 Set 2008.
- KURFESS, T. Robotics and Automation Handbook. CRC Press, 2005.
- LEVITT, T. A imaginação de marketing, trad. de Auriphebo Berrance Simões. Editora Atlas, 2a edição, São Paulo, p. 43, 1991.
- LEWIS, C. Trajectory generation for two robots cooperating to perform a task. *Robotics and Automation, 1996. Proceedings., 1996 IEEE International Conference on*, v. 2, p. 1626–1631, 1996.

- LEWIS, C.; MACIEJEWSKI, A. Trajectory generation for cooperating robots. *Systems Engineering, 1990., IEEE International Conference on*, p. 300–303, 1990.
- LEWIS, C.; MACIEJEWSKI, A. An example of failure tolerant operation of a kinematically redundant manipulator. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, v. 2, p. 1380–1387, 1994.
- LI, L. et al. Kinematic control of redundant robots and the motion optimizability measure. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, v. 31, p. 155–160, 2001.
- LIPPIELLO, V.; VILLANI, L.; SICILIANO, B. An open architecture for sensory feedback control of a dual-arm industrial robotic cell. *Industrial Robot: An International Journal*, Emerald Group Publishing Limited, v. 34, n. 1, p. 46–53, 2007.
- LIU, J.; WU, J. *Multi-Agent Robotic Systems*. CRC Press, 2001.
- MOHRI, A.; YAMAMOTO, M.; HIRANO, G. Cooperative path planning for two manipulators. *Robotics and Automation, 1996. Proceedings., 1996 IEEE International Conference on*, v. 3, p. 2853–2858, 1996.
- NENCHEV, D. Redundancy resolution through local optimization: a review. *Journal of robotic systems*, Wiley Interscience, v. 6, n. 6, p. 769–798, 1989.
- NOF, S. Y. Robot ergonomics: optimizing robot work. *Handbook of Industrial Robotics, 2nd Edn, Nof, S. Y.(ed.), John Wiley & Sons*, p. 603–644, 1999.
- OWEN, W.; CROFT, E.; BENHABIB, B. Minimally Compliant Trajectory Resolution for Robotic Machining. *IEEE International Conference on Advanced Robotics, Coimbra, Portugal*, v. 2, p. 702–707, 2003.
- OWEN, W.; CROFT, E.; BENHABIB, B. Real-time trajectory resolution for dual robot machining. *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004 IEEE International Conference on*, v. 5, p. 4332–4337, 2004.
- OWEN, W.; CROFT, E.; BENHABIB, B. Acceleration and torque redistribution for a dual-manipulator system. *Robotics, IEEE Transactions on [see also Robotics and Automation, IEEE Transactions on]*, v. 21, n. 6, p. 1226–1230, 2005.
- OWEN, W.; CROFT, E.; BENHABIB, B. A multi-arm robotic system for optimal sculpting. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, Elsevier, v. 24, n. 1, p. 92–104, 2008.
- RABUSKE, M. A. *Introdução à Teoria dos Grafos*. Editora da UFSC, 1992.
- REIS-RV20-16. *Reis Industrial Robots*. <<http://www.reisroboticsusa.com/>>, 2008. Acesso em 12 set 2008.
- RIBEIRO, L. *O uso da simulação para garantir a robustez dos sistemas de fabricação: uma abordagem integrada*. Dissertação (Mestrado) — Engenharia Mecânica, UFSC, 1999.
- RIBEIRO, L.; FERREIRA, J.; MOURA, E. O uso da simulação para estimar os custos de fabricação considerando planos de processos alternativos. *Congresso Brasileiro de Engenharia de Fabricação*, 2001.
- RIBEIRO, L.; GUENTHER, R.; MARTINS, D. Screw-based relative Jacobian for manipulators cooperating in a task. *19th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM*, 2007.

RIBEIRO, L.; GUENTHER, R.; MARTINS, D. Screw-based relative Jacobian for manipulators cooperating in a task. *ABCM Symposium Series in Mechatronics*, v. 3, p. 276–285, 2008.

RIBEIRO, L.; MARTINS, D. Screw-based relative Jacobian for manipulators cooperating in a task using Assur virtual chains. *20th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM*, 2009.

SAWO, F. *Vision-Based Control of Redundant Manipulators – Passivity Control Approach*. Tese (Doutorado) — Technical University of Ilmenau (Germany), Faculty of Computer Science and Automation, Department of Control Engineering, 2005.

SEEREERAM, S.; WEN, J. A global approach to path planning for redundant manipulators. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, v. 2, p. 283–288, 1993.

SICILIANO, B.; KHATIB, O. *Handbook of Robotics*. Springer, 2008.

SICILIANO, B. et al. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer Verlag, 2008.

SLACK, N. et al. *Administração da produção*. Atlas, 2002.

STARMATIK, A. *Primi al mondo: una pressa, due robot*. <<http://www.starmatik.com/public/1/PresentazioneStarmatik.pdf>>, 2007. Acesso em 02 Out 2007.

STAUBLI-RX90L. *STAUBLI Robotics*. <<http://www.staubli.com/en/robotics/>>, 2008. Acesso em 12 Set 2008.

STOPPER, M. Virtual Engineering for Industrial Robotic Work Cells. *Industrial Automation and Robotics, 4th Asian Conference on*, 2005.

TATLICIOGLU, E. et al. Adaptive nonlinear tracking control of kinematically redundant robot manipulators with sub-task extensions. *IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control*, p. 4373–4378, 2005.

TENENBAUM, R. A. *Dinâmica*. Editora UFRJ, 1997.

TONETTO, C. P. *Processo de generalização da cadeia cinemática de sistemas robóticos cooperativos para o compartilhamento de tarefas - qualificação de doutorado*. 2009.

TSAI, L. *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. Wiley-Interscience, 1999.

TZAFESTAS, C.; PROKOPIOU, P.; TZAFESTAS, S. Path Planning and Control of a Cooperative Three-Robot System Manipulating Large Objects. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Springer, v. 22, n. 2, p. 99–116, 1998.

YASKAWA. *Yaskawa Industrial Robot - Welding Jigless*. <<http://www.sg-motoman.com.cn/pdf/MOTOPAC-SERIES.pdf>>, 2007. Acesso 12 Jun 2007.

YOSHIKAWA, T. *Foundations of Robotics: Analysis and Control*. 1990.

ZAPATA, R. et al. True cooperation of robots in multi-arms tasks. *Robotics and Automation. Proceedings. 1987 IEEE International Conference on*, v. 4, 1987.

ZERGEROGLU, E. et al. Nonlinear tracking control of kinematically redundant robot manipulators. v. 4, p. 2513–2517, 2000.

ZIELINSKI, C.; WARSZAWSKA, P. Robot Programming Methods. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1995.

ZILOUCHIAN, A. An iterative learning control technique for a dual arm robotic system. *Robotics and Automation, 1994. Proceedings., 1994 IEEE International Conference on*, p. 1528–1533, 1994.

ZIVANOVIC, M.; VUKOBRATOVIC, M. Multi-arm Cooperating Robots: Dynamics and Control. Kluwer Academic Publishers, 2005.