UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Alvaro Altair Ferreira da Silva

CONDIÇÕES DE EQUIVALÊNCIA ENTRE OS PRINCÍPIOS DA INDUÇÃO FRACA, DA INDUÇÃO COMPLETA E DA BOA ORDEM

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação.

Prof. Dr. Arthur Ronald de Vallauris Buchsbaum
Orientador

Florianópolis, maio de 2010

Catalogação na fonte pela Biblioteca Universitária
da
Universidade Federal de Santa Catarina

S586c Silva, Álvaro Altair Ferreira da
Condições de equivalência entre os princípios da indução fraca, da indução completa e da boa ordem [dissertação] / Álvaro Altair Ferreira da Silva ; orientador, Arthur Ronald de Vallauris Buchsbaum. - Florianópolis, SC, 2010.
63 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação.

Inclui referências

1. Ciência da computação. 2. Indução (Lógica). I. Buchsbaum, Arthur Ronald de Vallauris. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação. III. Título.

CDU 681

CONDIÇÕES DE EQUIVALÊNCIA ENTRE OS PRINCÍPIOS DA INDUÇÃO FRACA, DA INDUÇÃO COMPLETA E DA BOA ORDEM

Alvaro Altair Ferreira da Silva

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação, na área de concentração Sistemas de Conhecimento, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação.

Prof. Dr. Mário Antônio Ribeiro Dantas
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

Banca Examinadora

Prof. Dr. Arthur Ronald de Vallauris Buchsbaum
Orientador

Prof. Dr. Carlos Becker Westphall
INE/UFSC

Prof. Dr. João Bosco Mangueira Sobral
INE/UFSC

Profª. Dra. Ana Teresa de Castro Martins
UFC

Nas questões matemáticas não se compreende a incerteza
nem a dúvida, assim como tampouco se podem estabelecer distinções
entre verdades médias e verdades de grau superior.
(David Hilbert)

À minha família.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Arthur Buchsbaum, pela paciência, dedicação e compromisso com o ensino público de qualidade, em especial pelos ensinamentos transmitidos sempre com uma visão muito além da convencional.

Aos membros e ex-membros do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da UFSC, especialmente àqueles que buscam constantemente o melhoramento da qualidade deste curso.

Ao Prof. Mauro Roisenberg, por ter me acolhido inicialmente no programa.

Ao Prof. Ricardo Felipe Custódio, por ter me orientado em um período de dificuldade, proporcionando minha continuidade neste programa de mestrado.

À Sra. Vera Lúcia Sodré, sempre prestativa, atenciosa e precisa, pelo apoio e orientação em momentos críticos.

Às colegas de curso Andressa e Aracele, pela ajuda e dicas de editoração em LaTeX.

À minha querida sogra Marlene e ao meu sogro Viana, pelo constante apoio.

À minha família, pelo sacrifício neste período de necessidades.

E a todas as demais pessoas que me incentivaram no decorrer deste percurso, meu cordial agradecimento a todos vocês que fizeram a diferença.

Sumário

Lista de Símbolos

$\rightleftharpoons$	–	Definição
$\square$	–	Final de prova
$\neg$	–	Conectivo da negação
$\rightarrow$	–	Conectivo da implicação
$\wedge$	–	Conectivo da conjunção
$\vee$	–	Conectivo da disjunção
$\overline{\vee}$	–	Conectivo da disjunção exclusiva
$\leftrightarrow$	–	Conectivo da equivalência
$\forall$	–	Quantificador universal, significando “para todo"
$\exists$	–	Quantificador existencial, significando “existe pelo menos um"
$\overline{\exists}$	–	Quantificador numérico, significando “existe um máximo”
$\exists!$	–	Quantificador numérico, significando “existe um único”
$=$	–	Igualdade
$\neq$	–	Diferença
$<$	–	Relação de ordem estrita estândar entre números reais, lê-se "menor"
$\leq$	–	Relação de ordem reflexiva estândar entre números reais, lê-se "menor ou igual"
$\prec$	–	Relação de ordem estrita no núcleo de um sistema quase transfinito
$\preceq$	–	Relação de ordem reflexiva no núcleo de um sistema quase transfinito
$\succ$	–	Relação inversa da ordem estrita no núcleo de um sistema quase transfinito
$\succeq$	–	Relação inversa da ordem reflexiva no núcleo de um sistema quase transfinito
$\in$	–	Relação de pertinência
$\notin$	–	Negação da relação da pertinência
$\subseteq$	–	Relação de inclusão entre conjuntos
$\supseteq$	–	Relação inversa da inclusão
$\varnothing$	–	Conjunto vazio

$\mathbb{N}$	–	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	–	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	–	Conjunto dos números reais
$\cup$	–	Operação de união de conjuntos
$\cap$	–	Operação de interseção de conjuntos
$\{x_1, .., x_n\}$	–	Conjunto cujos elementos são $x_1, \ldots, x_n$
$\min(A)$	–	Elemento mínimo de um conjunto A
$\max(A)$	–	Elemento máximo de um conjunto A
$\langle a, b\rangle$	–	Par ordenado cujo primeira coordenada é a e a segunda é b
$\langle d_1, \ldots, d_n\rangle$	–	n-tupla; sequência finita cujos termos são $d_1, \ldots, d_n$
$\mathcal{D}(R)$	–	Domínio de uma relação R
$\mathcal{I}(R)$	–	Imagem de uma relação R
I_A	–	Identidade em A
$C(R)$	–	Campo de uma relação R
$\mathcal{P}(A)$	–	Conjunto-potência de uma coleção A
$f(x)$	–	Valor de uma função f em x
o	–	Composição de relações
$\{x/P(x)\}$	–	Conjunto dos objetos x que satisfazem uma fórmula P
Δ	–	Conjunto não vazio / Propriedade a ser provada por indução
$\Delta(n)$	–	Propriedade para elementos n de um dado conjunto
$f : A \to B$	–	Função de A em B
$f : A \rightarrowtail B$	–	Função parcial de A em B.

Lista de Siglas

NBG	–	Teoria dos Conjuntos de Von Neumann-Bernays-Gödel
EPI	–	Estrutura pré-indutiva
HI	–	Hipótese de Indução
IA	–	Inteligência Artificial
KM	–	Teoria dos Conjuntos de Kelley-Morse
PBO	–	Princípio da Boa Ordem
PIC	–	Princípio da Indução Completa
PIF	–	Princípio da Indução Fraca
SP	–	Sistema de Peano
SQT	–	Sistema Quase Transfinito
ST	–	Sistema Transfinito
ZF	–	Teoria dos Conjuntos Zermelo-Fraenkel

Lista de Notações

Adotaremos as seguintes referências para as listas de letras abaixo, seguidas ou não de plicas ou subíndices:

- m, n, p – variáveis para elementos do conjunto ambiente das estruturas algébricas citadas neste trabalho;
- A, B, C – conjuntos;
- R, S, I – relações;
- θ – elemento minimal de um sistema quase transfinito ou de um sistema transfinito;
- s – função sucessora do núcleo de um sistema quase transfinito ou de um sistema transfinito;
- $\mathcal{O}$ – conjunto ambiente de um sistema quase transfinito ou de um sistema transfinito;
- $\mathcal{Q}$ – sistema quase transfinito;
- $\mathcal{P}$ – estrutura pré-indutiva;
- $\mathcal{W}$ – coleção de todos os ordinais;
- $\mathcal{T}$ – conjunto ambiente de um sistema transfinito;
- N – conjunto ambiente de um sistema de Peano;
- α, β, γ – números ordinais;
- ω – coleção de todos os números naturais ou ordinais finitos;
- N – conjunto ambiente de um sistema de Peano.

Resumo

Sabe-se que, em alguns ambientes, tais como os números naturais e os números ordinais, os princípios da indução fraca, da indução completa e da boa ordem são todos verdadeiros. Com base em certas condições, cada um destes três princípios implica nos outros dois, porém não está claro nas referências consultadas quais são estas condições. Neste trabalho é fornecido um ambiente com requisitos mínimos em que estes três princípios são equivalentes, no sentido de que todos são válidos, ou todos são não válidos. São apresentadas em detalhes algumas estruturas algébricas, da mais geral às mais particulares, nas quais estes três princípios são válidos. Para algumas destas estruturas é provada a validade das leis de indução dupla, nas versões fraca e completa. Nos ditos sistemas quase transfinitos há um conjunto mínimo de condições para que esta equivalência ocorra.

Abstract

In some environments, such as natural numbers and ordinal numbers, the principles of weak induction, complete induction and well ordering are all true. Based on certain conditions, it is shown that each one of these three principles implies the other two, but it is not clear in the consulted references what are these conditions. In this work, it is provided an environment with minimum requirements under which these three principles are equivalent in the sense that all are valid, or all are not valid. Some algebraic structures are presented, from the more general one to the more specific ones, in which these three principles are valid. The validity of the laws of double induction for some of these structures is proved. In the so called quasi transfinite systems there is a minimum set of conditions in which this equivalence occurs.

Capítulo 1

Introdução

A indução matemática, nas formas do princípio da indução fraca (PIF) e da indução completa (PIC), juntamente com o princípio da boa ordem (PBO), é muito importante para realizar diversos tipos de provas, incluindo vários dos resultados mais básicos da Lógica. Estas leis nem sempre são válidas, pois poderão lidar com estruturas distintas de conjuntos como, por exemplo, os números naturais e os ordinais. Em teoria dos conjuntos costuma-se modelar alguns ambientes em que todos estes três princípios são verdadeiros. Acontece, porém, que isso não é contextualizado de forma elementar, utilizando apenas fórmulas de primeira ordem, em que um ou todos esses princípios são provados. Em [Machover 1996] é mostrado que, no contexto dos números naturais, cada um destes princípios implica nos outros dois, ou seja, eles são equivalentes. A mesma situação ocorre dentro da classe dos ordinais. Todavia, esta equivalência é, em certo sentido, trivial, porque todos estes três princípios são válidos em relação aos números naturais e ordinais. Este trabalho pretende fornecer algumas condições mínimas nas quais estes três princípios são equivalentes em um sentido não trivial, isto é, nos quais todos eles são válidos ou todos eles não são válidos. É mostrado que, nos sistemas quase transfinitos definidos adiante, estes três princípios são equivalentes de forma não trivial. No capítulo 4 são definidos sistemas transfinitos, onde é mostrado que os mesmos são exatamente sistemas quase transfinitos em que um destes três princípios é válido, o que resulta na validade dos três princípios em qualquer sistema transfinito. Estas três leis são válidas para números naturais, para números ordinais, e, de modo geral, para quaisquer conjuntos bem ordenados.

§1. Problema de pesquisa e justificativa

Nas referências consultadas não está claro como os princípios da indução fraca (PIF), da indução completa (PIC) e da boa ordem (PBO) são equivalentes de modo não trivial, isto é, quando todos são válidos ou todos não são válidos.

Os princípios da indução fraca, da indução completa e da boa ordem são indispensáveis para provar boa parte dos resultados mais fundamentais da Lógica, bem como diversos resultados teóricos em Ciência da Computação e da Matemática em geral. Em várias construções matemáticas obtém-se espontaneamente um destes três princípios, e daí surge a questão da possibilidade de provar-se os outros dois. Um conhecimento detalhado das condições de equivalência destes três princípios dá condições gerais para provas mais imediatas da validade dos três a partir de um deles. Um outro benefício resultante do conhecimento de tais condições de equivalência diz respeito a um melhor entendimento das leis de primeira ordem destes ambientes, isto é, das leis em que a quantificação é feita apenas sobre objetos do ambiente estudado, e não sobre conjuntos destes objetos.

§2. Objetivos da pesquisa e estrutura do trabalho

São definidas neste trabalho estruturas algébricas onde os princípios da indução fraca, da indução completa e da boa ordem são equivalentes de forma não trivial.

As estruturas matemáticas definidas neste trabalho, chamadas adiante de sistemas quase transfinitos e sistemas transfinitos, foram concebidas visando uma exposição a mais simples possível, atendo-se apenas aos componentes estritamente necessários, de alguns aspectos ligados aos princípios da indução fraca, da indução completa e da boa ordem, o que atende aos ditames de economia expressos em uma máxima conhecida como "Navalha de Ockham", a qual pode ser formulada em português da seguinte forma: "As entidades não devem multiplicar-se sem necessidade [Branquinho, Murcho e Gomes 2006]". O leitor pode encontrar diversas referências em Teoria dos Conjuntos, como por exemplo em [Suppes 1972], [Machover 1996] e [Enderton 1977], e constatar daí o não cumprimento deste preceito, quanto às definições de número natural, número ordinal e dos três princípios já citados.

Este trabalho está estruturado em capítulos, da seguinte forma:

- O Capítulo 2 apresenta noções básicas de teoria dos conjuntos, as quais são fundamentais para especificar com precisão todas as ideias dos capítulos seguintes.
- No Capítulo 3 são apresentados sistemas quase transfinitos, os quais dão condições mínimas para a equivalência não trivial dos três princípios já citados.
- O Capítulo 4 apresenta sistemas transfinitos, os quais são as estruturas mais elementares onde os três princípios são válidos.
- No Capítulo 5 são definidos sistemas de Peano, segmentos discretos e sistemas tranfinitos não maximizados, os quais são, a grosso modo, sistemas transfinitos dotados de algumas condições adicionais, e daí permitem formulações simplificadas dos princípios indução fraca e da lei da indução dupla fraca.
- No Capítulo 6 temos a conclusão e uma exposição de uma futura linha de pesquisa.

Capítulo 2

Noções Básicas de Teoria dos Conjuntos

§1. Introdução

Segundo [Branquinho, Murcho e Gomes 2006] a teoria dos conjuntos é obra do matemático Georg Cantor e nasceu da tentativa de solucionar um problema técnico de matemática. Essa tentativa levou Cantor a introduzir a noção de ordinal e, mais tarde, a de cardinal. O desenvolvimento da noção de conjunto veio a revelar-se de tal maleabilidade e eficácia que acomodou as construções matemáticas então conhecidas e possibilitou novas construções. Tais feitos vieram naturalmente ao encontro de uma clarificação conceitual da matemática já em curso. As duas primeiras tentativas sistemáticas bem sucedidas de axiomatização[1] da teoria dos conjuntos devem-se a Bertrand Russell[2] e a Ernst Zermelo. A teoria de Zermelo formula-se na linguagem do cálculo de predicados com igualdade munida de um símbolo relacional binário ($\in$)[3], cuja interpretação intuitiva é "ser elemento de". Esta teoria tem sido amplamente aceita pela comunidade matemática. Posteriormente esta teoria foi aperfeiçoada por Abraham Fraenkel, e passou a ser chamada de teoria dos

[1] Axiomatizar uma teoria é escolher um conjunto de proposições que devem desempenhar o papel de hipóteses do raciocínio nessa teoria, mas que não são elas próprias resultados do raciocínio no interior da teoria [Branquinho, Murcho e Gomes 2006].

[2] A qual acabou não sendo bem aceita pela comunidade matemática devido à sua complexidade.

[3] Símbolo para a relação de pertinência.

conjuntos de Zermelo-Fraenkel ou simplesmente ZF. Alem desta, há algumas outras teorias de conjuntos, tais como a Teoria dos Tipos (devida a Bertrand Russell), NBG (von Neumann-Bernays-Gödel), KM (Kelley-Morse) e NF (New Foundations, devida a W. V. Quine). Segundo [Suppes 1972], entre os diversos ramos da matemática, a teoria dos conjuntos ocupa uma posição fundamental. Com poucas exceções, o que é estudado e analisado em matemática pode ser considerado como certos grupos ou classes particulares de conjuntos, o que significa que os vários ramos da matemática podem ser formalmente definidos na teoria dos conjuntos. Como consequência, questões fundamentais da matemática podem ser reduzidas à teoria dos conjuntos; seus conceitos e resultados são praticamente todo o discurso matemático, não somente na matemática pura, mas também na matemática aplicada e, consequentemente, todas as ciências dedutivas baseadas na matemática, como a Ciência da Computação [Machover 1996]. Neste trabalho, em prol da simplicidade na apresentação de ideias, não faremos distinções entre conjuntos e classes, daí chamaremos todas as coleções de conjuntos, ou seja, não trataremos aqui de conceitos que são mais relacionados a questões de fundamentos da matemática. Em algumas teorias de conjuntos, há uma distinção entre conjuntos e classes, nas quais as classes que não são conjuntos, ditas classes próprias, são coleções que não podem ser elementos.

§2. Conceitos Básicos

2.1 Sinais Lógicos Básicos

Abaixo são listados alguns sinais lógicos utilizados nas seções seguintes deste trabalho:
- $\neg$ – “não é o caso que”;
- $\rightarrow$ – “se...,então”;
- $\wedge$ – “e”;
- $\vee$ – “ou”;
- $\overline{\vee}$ – “ou...,ou”;
- $\leftrightarrow$ – “se, e somente se,”;
- $\forall$ – “para todo”;
- $\exists$ – “existe pelo menos um”;
- $\overline{\exists}$ – “existe no máximo”;
- $\exists!$ – “existe um único”.

Vamos definir a seguir disjunção exclusiva de n fórmulas $P_1, ..., P_n$. $\overline{\vee}(P_1, ..., P_n)$ significa que *exatamente uma das fórmulas* $P_1, ..., P_n$ *é verdadeira*, e pode ser lida como "ou P_1,..., ou P_n".

2.1 Definição. (Disjunção Exclusiva)

$$\overline{\vee}(P_1, ..., P_n) \rightleftharpoons (P_1 \vee ... \vee P_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{\substack{j \in \{1,...,n\} \\ j > i}} \neg(P_i \wedge P_j).$$

2.2 Notação. Quando $n = 2$, notamos $\overline{\vee}(P_1, P_2)$ por $P_1 \overline{\vee} P_2$; neste caso, lê-se "ou P_1, ou P_2".

2.3 Escólio. Para a disjunção exclusiva envolvendo duas ou três fórmulas, a definição dada aplica-se conforme as cláusulas abaixo:

- $P \overline{\vee} Q \rightleftharpoons (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$.
- $\overline{\vee}(P, Q, R) \rightleftharpoons (P \vee Q \vee R) \wedge \neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge R) \wedge \neg(Q \wedge R)$.

2.2 Quantificadores Típicos

2.4 Definição.

Sejam $\begin{cases} P(x) \text{ uma propriedade sobre objetos } x; \\ R \text{ um sinal denotando uma relação entre dois objetos}; \\ t \text{ uma expressão denotando um objeto qualquer}. \end{cases}$

Então consideramos as seguintes abreviaturas:

- $\forall x\, Rt\, P(x) \rightleftharpoons \forall x\, (xRt \rightarrow P(x))$;
- $\exists x\, Rt\, P(x) \rightleftharpoons \exists x\, (xRt \wedge P(x))$;
- $\overline{\exists} x\, Rt\, P(x) \rightleftharpoons \overline{\exists} x\, (xRt \wedge P(x))$;
- $\exists! x\, Rt\, P(x) \rightleftharpoons \exists! x\, (xRt \wedge P(x))$.

Maiores detalhes sobre Lógica em geral podem ser vistos em [Bell e Machover 1977], [Machover 1996], [Enderton 1972], [Buchsbaum 2006] e [Garcia].

2.3 Conjuntos

Um conjunto é uma coleção de diferentes objetos, geralmente caracterizado por enumeração ou por uma propriedade que seus elementos possuem, gozam, ou satisfazem [Carvalho e Oliveira 1998], ou ainda, um conjunto seria intuitivamente uma forma de agrupamento de objetos, ao acaso, ou talvez seguindo algum critério [Hegenberg e Silva 2005].

Os objetos que constituem um conjunto A são membros ou elementos do conjunto. Ainda segundo [Carvalho e Oliveira 1998], com respeito à notação, devemos estabelecer que:
• Se a é um elemento de A, dizemos que a pertence a A ou $a \in A$; abreviadamente, se alguns elementos, digamos, a, b e c são elementos de um conjunto A, podemos notar isto por $a, b, c \in A$.
• Se um conjunto A tem como únicos elementos a, b e c, podemos representá-lo por $A = \{a, b, c\}$.
• Uma propriedade que certos elementos x gozam é representada por $P(x)$. Assim, o conjunto cujos elementos satisfazem uma propriedade $P(x)$ é representado por $A = \{x \mid P(x)\}$. Conjuntos especificados desta forma são lidos como "A é o conjunto dos elementos x tais que $P(x)$".
• Se os elementos de um conjunto são indexados, por exemplo pelos números naturais de 1 a n, usamos a notação $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Há conjuntos que possuem um grande número de elementos, por exemplo o conjunto de todos os jornais de todas as cidades do mundo que foram publicados desde o início da imprensa até o dia de hoje.

2.5 Exemplos. Damos abaixo exemplos de conjuntos nos quais o número de seus elementos não é conhecido, mas que podem ser definidos por propriedades que só os seus elementos possuem:
• O conjunto dos grãos de areia da praia da Joaquina é notado por $\{x \mid x$ é grão de areia da praia da Joaquina$\}$.
• O conjunto das maçãs verdes é notado por $\{x \mid x$ é maçã e $\wedge\ x$ é verde$\}$.

2.6 Notação. Consideraremos, ao longo deste trabalho, alguns conjuntos numéricos:
• $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$;
• $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$;
• $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$;
• $\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$;
• $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$;
• $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}^*$;
• $\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$;
• $\mathbb{Z}^- = \{..., -3, -2, -1\}$.

2.7 Definição. (**Conjunto Vazio**)
O conjunto que não tem elementos é chamado de *conjunto vazio*, e é notado por "$\varnothing$".

O conjunto vazio pode também ser especificado por uma propriedade que não é satisfeita por nenhum elemento. Por exemplo, $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$.

2.8 Notação. Em todo este trabalho, a menos que algo seja dito em contrário, consideramos as seguintes notações:
• A,B,C - conjuntos;
• R,S,T - relações.

2.9 Definição. (**Subconjunto, Superconjunto, Subconjunto Próprio**)
• Dizemos que A é um *subconjunto de* B (ou que A *está contido em* B) se $\forall x\, (x \in A \to x \in B)$, e notamos isto por $A \subseteq B$. Neste caso dizemos também que B é um *superconjunto de* A, e notamos isto por $B \supseteq A$.
• Dizemos que A é um *subconjunto próprio de* B se A é um subconjunto de B, mas A não é igual a B; notamos isto por $A \subset B$.

2.10 Proposição. $A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$, (ou seja dois conjuntos são iguais sss um está contido no outro).

2.11 Definição. (**Par ordenado**)
Um *par ordenado* é uma lista ordenada de dois elementos a e b. Notamos um par ordenado de dois elementos a e b por $\langle a, b\rangle$, onde a é dito a *primeira coordenada* ou *abscissa*, e b é dito a *segunda coordenada* ou *ordenada* do par.

Uma generalização do conceito de par ordenado é dado pela ideia de n-*tupla*.

2.12 Definição. (**n-tupla, tupla**)
Seja n um número natural. Uma *n-tupla* é uma lista ordenada de n objetos $x_1, \ldots, x_n$. Notamos a mesma por $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, dizemos que x_i é o i-ésimo termo da tupla $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, ou a sua i-ésima coordenada. Uma *tupla* é uma n-tupla, para algum número natural n.

2.13 Proposição. (**Igualdade de n-tuplas**)
Se n é um número natural, então
$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle \leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n$.

2.14 Definição. (**Tripla, Quádrupla e Quíntupla**)
3-*tuplas,* 4-*tuplas e* 5-*tuplas* são também chamadas de triplas, quádruplas e quíntuplas (ordenadas).

2.15 Definição. (**Produto Cartesiano**)
Dados dois conjuntos A e B, o *produto cartesiano de* A *e* B, notado por $A \times B$, é definido por $A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

2.16 Definição. (**Conjunto Potência**)
Dado um conjunto A, o *conjunto potência de* A, notado por $\mathcal{P}(A)$, é a coleção de todos os subconjuntos de A.

2.17 Definição. (União)
A *união* de A e B, $A \cup B$, é o conjunto dos elementos que estão em A ou em B, ou seja, $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

2.18 Definição. (Interseção)
A *interseção* de A e B, $A \cap B$, é o conjunto dos elementos que estão em A e em B, ou seja, $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

2.19 Definição. (Diferença)
A *diferença* entre A e B, A-B, é o conjunto dos elementos que estão em A e não estão em B, ou seja, $A\text{-}B=\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

2.20 Definição. (Relação)
Um conjunto é dito uma *relação* se todos os seus elementos forem pares ordenados.

2.21 Definição. Se R é relação, dizemos que *x está relacionado com y em R* se $\langle x, y\rangle \in R$; notamos isto, abreviadamente, por xRy.

2.22 Leituras. (Leituras alternativas para xRy**)**
- *x minora y em R*,
- *x R-minora y*,
- x é um *minorante de y em R*,
- x é um *R-minorante de y*,
- *y majora x em R*,
- *y R-majora x*,
- y é um *majorante de x em R*,
- y é um *R-majorante de x*.

2.23 Proposição. x é *R-minorante* de $y \leftrightarrow y$ é R-majorante de x.

2.24 Definição. (Domínio de uma Relação)
O *domínio de R* é o conjunto de todos os elementos x tais que, para algum y, xRy, isto é, $\mathcal{D}(R) \;=\; \{x \mid \exists y\, (xRy)\}$.

2.25 Definição. (Imagem de uma Relação)
A *imagem de R* é o conjunto de todos os elementos y tais que, para algum x, xRy, isto é, $\mathcal{I}(R) \;=\; \{y \mid \exists x\, (xRy)\}$.

2.26 Definição. (Campo de uma Relação)
O *Campo de R* é a união dos conjuntos $\mathcal{D}(R)$ e $\mathcal{I}(R)$,
isto é, $C(R) = \mathcal{D}(A) \;\cup\; \mathcal{I}(A)$.

2.27 Definição. R é dito uma *relação em A* se $R \subseteq A{\times}A$.

2.28 Definição. R é dito uma *relação de A em B* se $R \subseteq A{\times}B$.

2.29 Definição. (**Relação inversa**)
Seja R uma relação. Notamos sua *relação inversa* por $R^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid xRy\}$.

2.30 Definição. (**Relação identidade de um dado conjunto**)
I_A é a relação $\{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$. Dado um conjunto A, a *identidade em A* é a relação $\{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$.

2.31 Definição. Seja R uma relação.
A *restrição de R a A*, notada por R/A, é uma nova relação, dada pela coleção $\{\langle x, y\rangle \mid xRy \wedge x \in A \wedge y \in A\}$.

2.32 Definição. (**Composição**)
A *composição* de S e R destas é uma relação definida por
$S \circ R = \{ \langle x, z\rangle \mid \exists y\ (xRy \wedge ySz) \}$.

2.33 Proposição. A composição de relações é uma operação associativa, isto é, $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

2.34 Definição.
Dada uma relação R, definimos R^n, para cada $n \in \mathbb{N}$,
pelas seguintes cláusulas:
- $R^0 = \mathrm{I}_{C(R)}$;
- para cada $n \in \mathbb{N}, R^{n+1} = R \circ R^n$.

2.35 Proposição. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, então $R^m \circ R^n = R^n \circ R^m$.

2.36 Definição. (**Elementos R-mínimos e R-máximos de um conjunto A**)
- x é dito um *R-mínimo de A* se $x \in A$ e $\forall y\ (y \in A \wedge x \neq y \to xRy)$.
- x é dito *um R-máximo de A* se $x \in A$ e $\forall y\ (y \in A \wedge x \neq y \to yRx)$.

2.37 Definição. (**Elementos R-mínimos e R-máximos**)
x é dito um *R-mínimo* se x é *R-mínimo de* $C(R)$.
x é dito um *R-máximo* se x é *R-máximo de* $C(R)$.

2.38 Definição. (**Elementos R-minimais e R-maximais de um conjunto A**)
- x é dito um *R-minimal de A* se $x \in A$ e $\forall y\ (y \in A \wedge x \neq y \to \neg(yRx))$.
- x é dito um *R-maximal de A* se $x \in A$ e $\forall y\ (y \in A \wedge x \neq y \to \neg(xRy))$.

2.39 Definição. (**Elementos R-minimais e R-maximais**)
x é dito um *R-minimal* se x é *R-minimal de* $C(R)$.
x é dito um *R-maximal* se x é *R-maximal de* $C(R)$.

2.40 Definição. (**Relações notáveis em um conjunto A**)
Sejam R uma relação e A um conjunto.
- R é *reflexiva em A* se $\forall x\ (x \in A \to xRx)$;
- R é *irreflexiva em A* se $\forall x\ (x \in A \to \neg(xRx))$;

• R é *simétrica em* A se $\forall x \forall y\ (x, y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$;
• R é *assimétrica em* A se $\forall x \forall y\ (x, y \in A \wedge xRy \rightarrow \neg(yRx))$;
• R é *antissimétrica em* A se $\forall x \forall y\ (x, y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$;
• R é *transitiva em* A se $\forall x \forall y \forall z\ (x, y, z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$;
• R é *minimante em* A se $\forall B\ (B \subseteq A \wedge B \neq \varnothing \rightarrow B$ *possui* R*-mínimo em* $A)$;
• R é *tricotômica em* A se $\forall x \forall y\ (x, y \in A \rightarrow xRy\ \vee\ yRx\ \vee\ x = y)$;
• R é *tricotômica forte em* A se $\forall x \forall y\ (x, y \in A \rightarrow \overline{\vee}(xRy, yRx, x = y))$.

2.41 Definição. (**Relações notáveis**)
• R é *reflexiva* se R é reflexiva em $\mathcal{C}(R)$;
• R é *irreflexiva* se R é irreflexiva em $\mathcal{C}(R)$;
• R é *simétrica* se R é simétrica em $\mathcal{C}(R)$;
• R é *assimétrica* se R é assimétrica em $\mathcal{C}(R)$;
• R é *antissimétrica* se R é antissimétrica em $\mathcal{C}(R)$;
• R é *transitiva* se R é transitiva em $\mathcal{C}(R)$;
• R é *minimante* se R é minimante em $\mathcal{C}(R)$;
• R é *tricotômica* se R é tricotômica em $\mathcal{C}(R)$;
• R é *tricotômica forte* se R é tricotômica forte em $\mathcal{C}(R)$;

2.42 Proposição.

(i) Se $\begin{cases} x \text{ é } R\text{-mínimo de } A, \\ R \text{ é antissimétrica,} \end{cases}$ então x é R-minimal de A.

(ii) Se $\begin{cases} x \text{ é } R\text{-máximo de } A, \\ R \text{ é antissimétrica,} \end{cases}$ então x é R-maximal de A.

2.43 Definição. R é o *Fecho Transitivo* de S se as seguintes condições forem satisfeitas:
(i) R é relação transitiva;
(ii) $S \subseteq R$;
(iii) $\forall R'(R'$ é relação transitiva $\wedge\ S \subseteq R' \rightarrow R \subseteq R')$.

Dizemos também aqui que R é a menor relação transitiva que contém S.

2.44 Proposição.
Sendo R uma relação, $R^t = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} R^i$.

2.45 Proposição.
Se $\begin{cases} R \text{ é o fecho transitivo de } S, \\ xRy, \end{cases}$ então $x \in \mathcal{D}(S)$ e $y \in \mathcal{I}(S)$.

2.46 Proposição.
Se $\begin{cases} s \text{ é função,} \\ R \text{ é o fecho transitivo de } s, \end{cases}$ então mRn sss $\exists p \in \mathbb{N}^*\ (n = s^p(m))$.

2.47 Definição. (**R-sucessor de um dado elemento x em A**)
Seja R uma relação e A um conjunto. Dizemos que y é *R-sucessor de x em A* se as seguintes condições forem satisfeitas:
• $x \in A$;
• $y \in A$;
• $x \neq y$;
• xRy;
• $\forall z\, (x \neq z \wedge y \neq z \rightarrow \neg(xRz \wedge zRy))$.

2.48 Definição. (**R-sucessor de um dado x**)
Seja R uma relação. y é dito um *R-sucessor de x* se y é R-sucessor de x em $C(R)$.

2.49 Proposição. Se R é relação em A, então b é R-sucessor de x sss, b é R-sucessor de x em A.

2.50 Definição. Seja R uma relação.
Chamamos a relação $\{ \langle x, y \rangle \mid y$ é R-sucessor de $x \}$ de *sucessão definida por R*, e notamos a mesma por R^s.

2.51 Definição. **(Função)**
f é dito ser uma *função* se as seguintes condições forem satisfeitas:
• f é relação;
• $\forall x\, \forall y_1\, \forall y_2\, (xfy_1 \wedge xfy_2 \rightarrow y_1 = y_2)$.

2.52 Definição. (**Argumento e valor de uma função**)
Seja f uma função. Um elemento x de $\mathcal{D}(f)$ é dito ser um *argumento de f*. Um elemento y de $\mathcal{I}(f)$ é dito ser um *valor de f*. Se x é um argumento de f e xfy, então y também é dito ser o *valor de f correspondente a x*.

2.53 Definição. (**Aplicação de uma função a um argumento**)
Se f é função e x é um argumento de f, notamos por $f(x)$ o valor de f correspondente a x; chamamos $f(x)$ também de *aplicação de f a x*.

2.54 Proposição.
Seja f uma função. Então $x \in \mathcal{D}(f)$ implica que $y = f(x) \leftrightarrow xfy$.

2.55 Definição. **(Função de A em B)**
f é dito ser uma *função de A em B*, e notamos isto por $f{:}A \rightarrow B$,
se as seguintes condições forem satisfeitas:
• f é uma função;
• $\mathcal{D}(f) = A$;
• $\mathcal{I}(f) \subseteq B$.
Dizemos também, neste contexto, que B é o *contradomínio de f*.

2.56 Definição. (**Função Parcial de** A **em** B)
f é dito ser uma *função parcial de A em B*, e notamos isto por $f{:}A \rightarrowtail B$, se f é uma função $\wedge\, A \supseteq \mathcal{D}(f) \;\wedge\; \mathcal{I}(f) \subseteq B$.

2.57 Definição. (**Função Injetiva**)
f é *função injetiva* $\leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2\ (x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f) \wedge f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2)$.

2.58 Proposição.
f é função injetiva se $\forall x_1\ \forall x_2\ (x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f) \wedge x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$.

2.59 Definição. (**Função Injetiva de** A **em** B)
Dizemos que f é uma *função injetiva de A em B*, e notamos isto por $f : A \xrightarrow{inj} B$, se as seguintes condições forem satisfeitas:
(i) $f : A \to B$;
(ii) f é função injetiva.

2.60 Proposição. As seguintes condições são equivalentes:
- $f : A \xrightarrow{inj} B$;
- $f : A \to B \wedge \forall x_1 \forall x_2 (x_1, x_2 \in A \wedge f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2)$.

2.61 Definição. (**Função Sobrejetiva de** A **em** B)
Dizemos que f é uma *função sobrejetiva de A em B*, e notamos isto por $f : A \xrightarrow{sobre} B$, se as seguintes condições forem satisfeitas:
(i) $f : A \to B$;
(ii) $\forall y \in B\, \exists x \in A\ y = f(x)$.

2.62 Proposição. As seguintes condições são equivalentes:
(i) $f : A \xrightarrow{sobre} B$;
(ii) $f : A \to B \wedge \mathcal{I}(f) = B$.

2.63 Definição. (**Função Bijetiva de** A **em** B)
Dizemos que f é uma *função bijetiva de A em B*, e notamos isto por $f : A \xrightarrow{bij} B$, se $f : A \xrightarrow{inj} B$ e $f : A \xrightarrow{sobre} B$. Dizemos também, neste caso, que f é uma *correspondência biunívoca entre A e B*.

2.64 Proposição. As seguintes condições são equivalentes:
- $f : A \xrightarrow{bij} B$;
- $f : A \to B \wedge \forall y \in B\ \exists! x \in A\ (y = f(x))$.

2.65 Definição. Seja R uma relação. R é dito ser *ordem em A* se R é antissimétrica em A e R é transitiva em A.

2.66 Proposição. Se *R é ordem em A*, então existe no máximo um *R-mínimo de A* e existe no máximo um *R-máximo de A*.

2.67 Definição. Se *R é ordem em A*, notamos o *R-mínimo de A*, se este existir, por $min_R(A)$; se a relação de ordem estiver implícita, notamos este elemento por *min(A)*.

2.68 Definição. *R é ordem estrita em A* se é ordem em *A* e é irreflexiva em *A*.

2.69 Notação.
• Se *R* é ordem estrita em algum conjunto *A*, notamos *R* também por '$<$'.
• Se *R* é ordem reflexiva em algum conjunto *A*, notamos *R* também por '$\leq$'.

2.70 Definição. *R* é *ordem reflexiva* em *A* se *R* é ordem em *A* e *R* é reflexiva em *A*.

2.71 Definição. *R* é *ordem linear em A* se *R* é ordem em *A* e é tricotômica em *A*.

2.72 Definição. *R* é dito ser uma *ordem linear estrita em A* se *R* é ordem linear em *A* e *R* é irreflexiva em *A*.

2.73 Definição. *R* é *boa ordem em A* se *R é ordem em A* e *R é minimante em A*.

2.74 Proposição. As seguintes condições são equivalentes:
• *R* é boa ordem em *A*;
• *R* é antissimétrica em $A \wedge R$ é minimante em *A*.

2.75 Proposição. Se *R* é boa ordem em *A*, então *R* é tricotômica em *A*.

2.76 Corolário. *Se R* é boa ordem em *A*, então *R* é ordem linear em *A*.

2.77 Definição. (**Boa Ordem Estrita**)
R é *boa ordem estrita em A* se *R* é boa ordem em *A* e *R* é irreflexiva em *A*.

2.78 Proposição. As seguintes condições são equivalentes:
• *R* é boa ordem estrita em *A*;
• *R* é assimétrica em $A \wedge R$ é minimante em *A*.

2.79 Proposição. Se *R* é boa ordem estrita em *A*, então *R* é tricotômica forte em *A*.

2.80 Corolário. Se *R* é boa ordem estrita em *A*, então *R* é ordem linear estrita em *A*.

2.81 Definição. (**Conjunto Bem Ordenado**)
$\langle O, R \rangle$ é um *conjunto bem ordenado* se *O* é um conjunto e *R* é uma boa ordem em *O*.

2.82 Definição. (**Conjunto Estritamente Bem Ordenado**)
$\langle\, \mathcal{O}, \prec \,\rangle$ é um *conjunto estritamente bem ordenado* se $\mathcal{O}$ é um conjunto e $\prec$ é uma boa ordem estrita em $\mathcal{O}$.

2.83 Proposição. Se R é boa ordem, então R^s é uma função.

2.84 Proposição. Se R é boa ordem em A e R é relação em A, então $R^s\colon A \rightarrowtail A$.

2.85 Proposição. Seja $\prec$ uma boa ordem tal que $\prec\, \subseteq \mathcal{O} \times \mathcal{O}$.
s é a sucessão definida por $\prec$ se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:
(i) $s : \mathcal{O} \rightarrowtail \mathcal{O}$;
(ii) $\forall m\, (m \in \mathcal{D}(s) \leftrightarrow \exists n\, (m \prec n))$;
(iii) $\forall m \in \mathcal{D}(s) \forall n\, (m \prec n \leftrightarrow s(m) \leq n)$.

Os números, em suas diversas formas, são medidas de coleções em geral ou de certas características de objetos de diversas naturezas.

Os números ordinais, ou simplesmente ordinais, foram concebidos para dar as seguintes informações:

- a posição de um objeto em um dado conjunto de objetos, dotado de uma boa ordem;
- o tipo de boa ordem associado a um dado conjunto bem ordenado.

2.86 Exemplo.
Considerando o número 4 na coleção $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, dotada da ordem estândar nos naturais, temos que 4 é associado ao ordinal 2, por ser 4 o segundo elemento do conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, se começarmos a contagem por 0; podemos também associar 4 ao ordinal 3, por ser 4 o terceiro elemento nesta contagem, se iniciarmos a contagem por 1.

2.87 Exemplos.
- A boa ordem dada pela lista a_1, a_2, a_3, é dada pelo ordinal 3.
- A boa ordem dada pela lista "-3,-2,-1,0,1,2,3,..." é dada pelo ordinal ω.
- A boa ordem definida pela lista "$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., \omega, \omega + 1$" é dada pelo ordinal $\omega + 2$.

A sequência dos primeiros ordinais é dada abaixo pelas seguintes listas de ordinais, onde um dado ordinal α é dito ser menor que um outro ordinal β se α precede β em alguma destas listas ou se α estiver em uma lista anterior à lista de β.

Os ordinais finitos são os números naturais, e o primeiro ordinal infinito é notado por ω:

$0, 1, 2, 3, 4, ..., \omega$;
$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, ..., \omega + \omega\ (\omega.2)$;
$\omega.2, \omega.2 + 1, \omega.2 + 2, \omega.2 + 3, ..., \omega.2 + \omega\ (\omega.3)$;
$\omega, ..., \omega.2, ..., \omega.3, ..., \omega.\omega\ (\omega^2)$;
$\omega, ..., \omega^2, ..., \omega^3, ..., \omega^\omega$.

Damos a seguir uma definição mais rigorosa de ordinal, seguindo as ideias de John von Neumann.

2.88 Definição.
Um conjunto α é dito um *ordinal* se:
- $\forall x\ (x \in \alpha \to x \subseteq \alpha)$;
- A relação $\{\langle x, y\rangle |\ x \in \alpha \wedge y \in \alpha \wedge x \in y\}$ é uma boa ordem em α.

Existem outras formas de definir números ordinais que também atendem às formulações de medição explicadas aqui há pouco.

Maiores detalhes estão em bons livros de Teoria dos Conjuntos, tais como [Suppes 1972], [Machover 1996], [Enderton 1977] ou [Holmes 2005].

Capítulo 3

Sistemas Quase Transfinitos

Os sistemas quase transfinitos, definidos adiante neste capítulo, são as estruturas algébricas aqui propostas nas quais os três princípios da indução fraca, da indução completa e da boa ordem são equivalentes, mas não necessariamente verdadeiros.

§1. Estruturas Pré-Indutivas

As estruturas pré-indutivas, definidas nesta seção, são quádruplas, que podem em particular, ser sistemas quase transfinitos ou sistemas transfinitos, nas quais são consideradas a eventual validade dos princípios da indução fraca, indução completa e da boa ordem.

1.1 Notação. $\mathcal{O}$ é um conjunto.

1.2 Notação. Quando, em um dado contexto, notarmos por '$\prec$' uma dada relação, notaremos algumas relações obtidas desta por '$\preceq$', '$\succ$' e '$\succeq$', segundo as seguintes cláusulas:
- $\preceq\, = \{\langle x, y\rangle |\ x \prec y \lor x = y\}$;
- $\succ\, = \prec^{-1}$;
- $\succeq\, = \{\langle x, y\rangle |\ x \succ y \lor x = y\}$.

1.3 Definição. $\mathcal{P} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ é uma *estrutura pré-indutiva (EPI)* se:
- $\theta \in \mathcal{O}$;
- $s : \mathcal{O} \rightarrowtail \mathcal{O}$ (s é uma função parcial de $\mathcal{O}$ em $\mathcal{O}$);
- $\prec\, \subseteq \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ ($\prec$ é uma relação em $\mathcal{O}$).

1.4 Definição. Seja $\mathcal{P} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ uma *estrutura pré-indutiva*.
• Um elemento $n \in \mathcal{O}$ é dito *nuclear em* $\mathcal{P}$ se $n \geq \theta$.
• O conjunto $\{ n \in \mathcal{O} \mid n \geq \theta \}$ é dito o *núcleo de* $\mathcal{P}$.
• $\mathcal{P}$ é dito nuclear se *todo elemento de* $\mathcal{O}$ *é nuclear em* $\mathcal{P}$.

1.5 Definição. Seja $\mathcal{P} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ uma estrutura pré-indutiva.
Dizemos que $\mathcal{P}$ *respeita o princípio da indução fraca* (ou $\mathcal{P}$ *respeita* PIF) se, dada uma propriedade $\Delta(n)$ para elementos $n \in \mathcal{O}$, a proposição $\forall n \in \mathcal{O}\ \Delta(n)$ é implicada pelas três condições seguintes:

(i) $\Delta(\theta)$,
(ii) $\forall n \in \mathcal{D}(s)\ (\Delta(n) \to \Delta(s(n)))$,
(iii) $\forall n \in \mathcal{O}\ (n \neq \theta \wedge n \notin \mathcal{I}(s) \wedge (\forall m \prec n\ \Delta(m)) \to \Delta(n))$.

1.6 Definição. Seja $\mathcal{P} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ uma estrutura pré-indutiva.
Dizemos que $\mathcal{P}$ *respeita o princípio da indução completa* (ou $\mathcal{P}$ *respeita* PIC) se, dada uma propriedade $\Delta(n)$ para elementos $n \in \mathcal{O}$, a seguinte condição for cumprida:
• $\forall n \in \mathcal{O}\ ((\forall m \prec n\ \Delta(m)) \to \Delta(n))$ implica em $\forall n \in \mathcal{O}\ \Delta(n)$.

1.7 Definição. Seja $\mathcal{P} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ uma estrutura pré-indutiva.
Dizemos que $\mathcal{P}$ *respeita o princípio da boa ordem* (ou $\mathcal{P}$ *respeita* PBO) se $\forall S\,(S \subseteq \mathcal{O} \wedge S \neq \varnothing \to S$ possui $\prec$-mínimo).

1.8 Escólio. Seja $\mathcal{P} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ uma estrutura pré-indutiva.
Se $\mathcal{P}$ respeita PBO, então $\prec$ é uma boa ordem em $\mathcal{O}$.

§2. Sistemas Quase Transfinitos e Resultados Elementares Correspondentes

Definimos abaixo uma estrutura algébrica que foi concebida para estudar as condições de equivalência entre os princípios de indução fraca, da indução completa e da boa ordem. A mesma possui quatro componentes: um conjunto ambiente, um elemento inicial, uma função sucessão e uma relação. Das doze condições que definem sistemas quase transfinitos, temos que as três primeiras dão a natureza dos seus quatro componentes, as duas condições seguintes (iv e v) são globais, pois falam a respeito do que todos os elementos do conjunto ambiente devem atender, as outras duas seguintes (vi e vii) são semiglobais, no sentido de como a função sucessora e a relação de tal estrutura devem lidar com elementos nucleares de seus domínios, e as demais condições são locais, pois dizem respeito apenas a propriedades que os elementos nucleares desta estrutura devem respeitar.

2.1 Definição. (**Sistema Quase Transfinito (SQT)**)
$\mathcal{Q} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ é dito um *sistema quase transfinito* (ou SQT) se:

(i) $\theta \in \mathcal{O}$;

(ii) $s : \mathcal{O} \rightarrowtail \mathcal{O}$
(s é uma função parcial de $\mathcal{O}$ em $\mathcal{O}$; dado $n \in \mathcal{O}$ tal que $n \in \mathcal{D}(s)$, $s(n)$ é dito *o sucessor de n em* $\mathcal{Q}$);

(iii) $\prec \subseteq \mathcal{O} \times \mathcal{O}$
($\prec$ é *uma relação de* $\mathcal{O}$ *em* $\mathcal{O}$);

(iv) $\forall n\, \neg(n \prec \theta)$
(θ é um $\prec$*-minimal de* $\mathcal{O}$);

(v) $\forall n \in \mathcal{O}\, (\forall m\, \neg(m \prec n)) \to n = \theta)$
(todo $\prec$-minimal de $\mathcal{O}$ é igual a θ);

(vi) $\forall n \in \mathcal{D}(s)(n \succeq \theta \to s(n) \succ \theta)$
(o *sucessor de um elemento nuclear* é um *majorante de* θ);

(vii) $\forall m \succeq \theta\, \forall n \succ m(n \succ \theta)$
(todo majorante de um elemento nuclear é um majorante de θ);

(viii) $\forall m \succeq \theta\, (m \in \mathcal{D}(s) \leftrightarrow \exists n \succeq \theta(m \prec n)$
(no núcleo, o domínio de s é o conjunto *dos elementos m majorados por um elemento nuclear n*);

(ix) $\forall m \succeq \theta\, \forall n \succeq \theta(m \in \mathcal{D}(s) \to (\, m \prec n \leftrightarrow s(m) \preceq n))$
(no núcleo, *o sucessor de um elemento nuclear minora ou iguala qualquer majorante deste elemento*);

(x) $\forall m \succeq \theta\, \forall n \succeq \theta\, (m \prec n \to \neg(n \prec m))$
($\prec$ é *assimétrica no núcleo*);

(xi) $\forall m \succeq \theta\, \forall n \succeq \theta\, \forall p \succeq \theta\, (m \prec n \wedge n \prec p \to m \prec p)$
($\prec$ é *transitiva no núcleo*);

(xii) $\forall m \succeq \theta\, \forall n \succeq \theta\, (m \prec n \vee n \prec m \vee m = n)$
($\prec$ é *tricotômica no núcleo*).

2.2 Escólio. Um sistema quase transfinito é uma estrutura pré-indutiva.

2.3 Notação. No restante deste capítulo, consideramos que $\mathcal{Q} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ é um sistema quase transfinito.

Para os exemplos abaixo considere os seguintes conjuntos e relações:

- $\mathbb{Z}' = \{..., -3', -2', -1', 0', 1', 2', 3', ...\}$, que é uma cópia de $\mathbb{Z}$, onde $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}' = \varnothing$[1].

[1]Podemos obter cópias de $\mathbb{Z}$ por uma infinidade de maneiras. Por exemplo, $\mathbb{Z}'$ pode ser definido como sendo a coleção $\{..., \{-3\}, \{-2\}, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, ...\}$.

- $\mathbb{Z}'_- = \{..., -3', -2', -1', 0'\}$.
- $<_{\mathbb{N}} = \{\langle m, n\rangle \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge m < n\}$, onde $<$ é a ordem estrita padrão dos naturais.
- $suc_{\mathbb{N}}$ é a sucessão padrão dos naturais.
- $suc_{\mathbb{Z}'}$ é uma função de $\mathbb{Z}'$ em $\mathbb{Z}'$, cuja sucessão é dada pela lista $..., -3', -2', -1', 0', 1', 2', 3', ...,$ de modo que, dado um n desta lista, $suc_{\mathbb{Z}'}(n)$ é o elemento seguindo n nesta lista.
- $suc_{\mathbb{Z}'_-}$ é a restrição de $suc_{\mathbb{Z}'}$ a $\mathbb{Z}'_-$.
- $\prec_{\mathbb{Z}'}$ é uma relação de $\mathbb{Z}'$ em $\mathbb{Z}'$, cuja ordem é dada pela lista $..., -3', -2', -1', 0', 1', 2', 3', ...,$ de modo que, dados m e n desta lista, $m \prec_{\mathbb{Z}'} n$ sss m precede n nesta lista.
- $\prec_{\mathbb{Z}'_-}$ é a restrição de $\prec_{\mathbb{Z}'}$ a $\mathbb{Z}'_-$.

2.4 Exemplo. ($\prec$ não é necessariamente ordem em O)

$$\text{Sejam} \begin{cases} O = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^+_-, \\ \theta = 0, \\ \text{suc é a sucessão padrão nos naturais,} \\ \prec \,=\, <_{\mathbb{N}} \cup\, suc_{\mathbb{Z}'_-}. \end{cases}$$

Temos que $\langle O, \theta, suc, \prec\rangle$ é um SQT, mas $\prec$ não é ordem em O.

2.5 Exemplo. ($\prec$ pode ser ordem em O mas não é necessariamente ordem linear em O)

Sejam O, θ, e suc tal como no exemplo anterior, e $\prec \,=\, <_{\mathbb{N}} \cup \prec_{\mathbb{Z}'_-}$.
Temos que $\langle O, \theta, suc, \prec\rangle$ é um SQT, e $\prec$ é ordem em O, mas $\prec$ não é ordem linear em O.

2.6 Exemplo. ($\prec$ pode ser ordem linear em O mas não é necessariamente boa ordem em O)

Seja $C = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}'$, e seja $\prec_C$ a relação de ordem em C dada pela lista $0, ..., -3', -2', -1', 0', 1', 2', 3', ..., 1, 2, 3, ...,$ ou seja, 0 seguido da lista de elementos de $\mathbb{Z}'$, seguido por 1,2,3,..., ou seja,
dados $m, n \in C, m \prec_C n$ sss m precede n nesta lista.

$$\text{Sejam} \begin{cases} O = C, \\ \theta = 0, \\ s = suc_{\mathbb{N}}, \\ \prec \,=\, \prec_C . \end{cases}$$

Temos que $Q = \langle O, \theta, suc, \prec\rangle$ é um SQT nuclear e $\prec$ é uma ordem linear em O, mas $\prec$ não é uma boa ordem em O, pois $\mathbb{Z}' \subseteq O, \mathbb{Z}' \neq \varnothing$ e $\mathbb{Z}'$ não possui um $\prec$-elemento mínimo.

Dado $n \in \mathcal{O}$, se $\Delta(n)$ é "$n = 0$", temos que $\mathcal{Q}$ respeita a condição de PIC para Δ, mas não respeita a conclusão de PIC para Δ,
logo $\mathcal{Q}$ não respeita PIC.

Observe também que $\mathcal{Q}$ é um SQT nuclear, logo nem todo SQT nuclear respeita PIC.
É fácil verificar também que SQT não respeita PIF.
Obviamente, como $\prec$ não é, neste exemplo, uma boa ordem, temos que $\mathcal{Q}$ também não respeita PBO.

2.7 Exemplo. (**$\prec$ é uma boa ordem em $\mathcal{O}$**)

$$\text{Sejam} \begin{cases} \mathcal{O} = \mathbb{N}, \\ \theta = 0, \\ s = suc_{\mathbb{N}}, \\ \prec = <_{\mathbb{N}} . \end{cases}$$

Temos que $\langle \mathcal{O}, \theta, suc, \prec \rangle$ é um SQT, e $\prec$ é uma boa ordem em $\mathcal{O}$.
O núcleo aqui coincide com $\mathcal{O}$.

A seguir são dados alguns resultados básicos sobre sistemas quase transfinitos, a fim de melhorar o entendimento desta estrutura algébrica, e para ajudar a demonstrar os principais resultados deste trabalho.

No núcleo, $\prec$ é irreflexiva.

2.8 Lema. $\forall n \in \mathcal{O}\ (n \neq \theta \to \exists m (m \prec n))$.

Prova:
Suponha que $n \in \mathcal{O}$ e $n \neq \theta$.
Supondo por absurdo que $\neg\exists m\ (m \prec n)$, temos que $\forall m\ \neg(m \prec n)$, daí,
por def. 2.1-v, $n = \theta$, o que é absurdo, logo $\exists m\ (m \prec n)$. □

2.9 Lema. $\forall n \succeq \theta\ \neg(n \prec n)$ (irreflexividade de $\prec$ no núcleo).

Prova:
Suponha que $n \succeq \theta$. Se $n \prec n$, então, da assimetria de $\prec$ no núcleo (def. 2.1-x), temos que $\neg(n \prec n)$, o que é absurdo, daí $\neg(n \prec n)$. □

2.10 Lema. $\forall m \succeq \theta\ \forall n \succeq \theta\ (m \prec n \leftrightarrow \neg(m \succeq n))$.

Prova:
Suponha que $m \succeq \theta$ e $n \succeq \theta$.
Se $m \prec n$, então pelo lema 2.9 (irreflexividade de $\prec$ no núcleo),
$\neg(m = n)$, logo $\neg(m \succeq n)$.
Se $\neg(m \succeq n)$, então, pela tricotomia de $\prec$ no núcleo (def. 2.1-xii), $m \prec n$. □

2.11 Lema. $\forall m \geq \theta\, \forall n \geq \theta\ \overline{\vee}(m \prec n,\ n \prec m,\ m = n)$
(tricotomia forte de $\prec$ no núcleo).

Prova:
É imediato dos lemas 2.9, 2.10 e tricotomia de $\prec$ no núcleo (def. 2.1-xii). □

O lema seguinte expressa uma forma correspondente à cláusula (ix) da definição 2.1.

2.12 Lema. $\forall m \geq \theta\, \forall n \geq \theta\, (n \in \mathcal{D}(s) \rightarrow (m \prec s(n) \leftrightarrow m \leq n))$.

Prova:
Suponha que $m \geq \theta$, $n \geq \theta$ e $n \in \mathcal{D}(s)$.
Temos que m $\prec$ s(n) sss por lema 2.10 e def. 2.1-vi, $\neg(s(n) \leq m)$ sss por def. 2.1-ix, $\neg(n \prec m)$ sss por lema 2.10, $m \leq n$. □

O seguinte lema expressa uma outra forma correspondente à cláusula (ix) da definição 2.1.

2.13 Lema. $\forall m \geq \theta\, (m \in \mathcal{D}(s) \rightarrow \neg\exists n \geq \theta\, (m \prec n \prec s(m)))$.

Prova:
Suponha que $m \geq \theta$ e $m \in \mathcal{D}(s)$.
Supondo por absurdo que $\exists n \geq \theta\, (m \prec n \prec s(m))$,
temos que, por def. 2.1-ix, $s(m) \leq n \prec s(m)$.
Por def. 2.1-vi, $s(m) \geq \theta$, e daí, por def. 2.1-xi, $s(m) \prec s(m)$,
o que, segundo o lema 2.9, é absurdo, logo $\neg\exists n \geq \theta\, (m \prec n \prec s(m))$. □

O próximo lema expressa ainda uma outra forma correspondente à cláusula (ix) da definição 2.1.

2.14 Lema. $\forall m \geq \theta\, \forall n \geq \theta\, (m \in \mathcal{D}(s) \rightarrow n \leq m \vee s(m) \leq n)$.

Prova:
Suponha que $m \geq \theta, n \geq \theta$ e $m \in \mathcal{D}(s)$.
Pelo lema 2.13, temos que $\neg\exists n \geq \theta\, (m \prec n \prec s(m))$,
daí $\forall n \geq \theta\, \neg(m \prec n \prec s(m))$,
donde $\neg(m \prec n) \vee \neg(n \prec s(m))$, e daí, pelo lema 2.10 e def. 2.1-vi,
temos que $n \leq m \vee s(m) \leq n$. □

Abaixo é dito que o sucessor de um elemento nuclear é maior que este elemento nuclear.

2.15 Lema. $\forall n \geq \theta\, (n \in \mathcal{D}(s) \rightarrow n \prec s(n))$.

Prova:
Suponha que $n \geq \theta$ e $n \in \mathcal{D}(s)$.
Por def. 2.1-vi, $s(n) \succ \theta$. Se $s(n) \prec n$, então $s(n) \preceq n$, daí, por def. 2.1-ix, $n \prec n$, o que é absurdo, conforme lema 2.9, logo $\neg(s(n) \prec n)$. Se $s(n) = n$, então $s(n) \preceq n$, daí, conforme já vimos anteriormente, temos que $n \prec n$, logo $\neg(s(n) = n)$. Daí, conforme def. 2.1-xii, e levando em conta que $s(n) \succ \theta$, temos que $n \prec s(n)$. □

No seguinte lema é dito que a função sucessora preserva a ordem entre os elementos nucleares.

2.16 Lema. $\forall m \geq \theta\, \forall n \geq \theta\, (m, n \in \mathcal{D}(s) \to (m \prec n \leftrightarrow s(m) \prec s(n)))$.

Prova:
Suponha que $m \geq \theta$, $n \geq \theta$ e $m, n \in \mathcal{D}(s)$.
Por def. 2.1-vi, temos que $s(m) \succ \theta$ e $s(n) \succ \theta$.
• Se $m \prec n$, então, por def. 2.1-ix, $s(m) \preceq n$.
Por lema 2.15, $n \prec s(n)$, e daí, por def. 2.1-xi, $s(m) \prec s(n)$.
• Se $s(m) \prec s(n)$, levado em conta que $m \prec s(m)$, pelo lema 2.15, temos daí por def. 2.1-xi, que $m \prec s(n)$, donde, pelo lema 2.12, $m \preceq n$. Se $m = n$, então $s(m) = s(n)$, o que, pelo lema 2.9, é absurdo, logo $\neg(m = n)$,
portanto $m \prec n$. □

O lema abaixo diz que a função sucessora é injetiva no núcleo.

2.17 Lema. $\forall m \geq \theta\, \forall n \geq \theta\, (m, n \in \mathcal{D}(s) \wedge s(m) = s(n) \to m = n)$.

Prova:

Suponha que $\begin{cases} m \geq \theta, \\ n \geq \theta, \\ m, n \in \mathcal{D}(s), \\ s(m) = s(n). \end{cases}$

Se $m \prec n$, então, pelo lema anterior, $s(m) \prec s(n)$,
o que, pelo lema 2.9, é absurdo, logo $\neg(m \prec n)$.
Se $n \prec m$, então o raciocínio é análogo, logo $\neg(n \prec m)$, daí,
por def. 2.1-xii, $m = n$. □

§3. Sistemas Quase Transfinitos Nucleares

Os três lemas seguintes estabelecem que, se um sistema quase transfinito respeita um dos três princípios PIF, PIC ou PBO, então temos que o mesmo é nuclear.

3.1 Lema. Se um SQT respeita PIF, então ele é nuclear.
Prova:
Para cada $n \in \mathcal{O}$, seja $\Delta(n)$ a propriedade $n \succeq \theta$.
Como $\theta \succeq \theta$, temos que vale $\Delta(\theta)$, logo vale a condição (i) da def. 1.5.
Suponha agora que $\begin{cases} n \in \mathcal{D}(s), \\ \Delta(n). \end{cases}$
Daí $n \succeq \theta$, donde, por def. 2.1-vi, $s(n) \succ \theta$, logo $s(n) \succeq \theta$, ou seja,
vale $\Delta(s(n))$, logo vale a condição (ii) da def. 1.5.
Suponha agora que $\begin{cases} n \in \mathcal{O}, \\ n \neq \theta, \\ n \notin \mathcal{I}(s), \\ \forall m \prec n\ \Delta(m). \end{cases}$
Pelo lema 2.8, temos que, para algum $m \in \mathcal{O}, m \prec n$; e daí vale $\Delta(m)$,
ou seja, $m \succeq \theta$, e daí, por def. 2.1-vii, $n \succ \theta$, daí $n \succeq \theta$, logo vale $\Delta(n)$,
assim verificamos a condição (iii) da def. 1.5.
Se este SQT respeita PIF, temos então que $\forall n \in \mathcal{O}\ \Delta(n)$,
ou seja, $\forall n \in \mathcal{O}\ n \succeq \theta$, portanto este SQT é nuclear. □

3.2 Lema. Se um SQT respeita PIC, então ele é nuclear.
Prova:
Seja $\mathcal{Q} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ um SQT que respeita PIC.
Considere $\Delta(n)$ a propriedade $n \succeq \theta$, para cada $n \in \mathcal{O}$.
Supondo, por HI, que $\forall m \prec n, m \succeq \theta$, temos que $\exists m\ (m \prec n) \vee \neg\exists m\ (m \prec n)$.
Se $\exists m\ (m \prec n)$, então $m \succeq \theta$, e daí por def. 2.1-vii, $n \succ \theta$, logo $n \succeq \theta$.
Se $\neg\exists m\ (m \prec n)$, então, por def. 2.1-v, $n = \theta$, daí $n \succeq \theta$.
Em qualquer caso, $n \succeq \theta$, daí,
mostramos que $\forall n \in \mathcal{O}\ ((\forall m \prec n\ \Delta(m)) \rightarrow \Delta(n))$.
Portanto, como $\mathcal{Q}$ respeita PIC, $\forall n \in \mathcal{O}, n \succeq \theta$,
ou seja, $\mathcal{Q}$ é nuclear. □

3.3 Lema. Se um SQT respeita PBO, então ele é nuclear.
Prova:
Seja $\mathcal{Q} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ um SQT que respeita PBO.
Temos que $\prec$ é uma boa ordem em $\mathcal{O}$, daí, conforme proposição 2.2.75,

temos que $\prec$ é tricotômica em $\mathcal{O}$. (1)
Suponha que $n \in \mathcal{O}$. Se $\neg(n \geq \theta)$, então de (1), temos que $n \prec \theta$,
o que é absurdo, conforme def. 2.1-iv, logo $n \geq \theta$, ou seja, $\forall n \in \mathcal{O}\ n \geq \theta$,
portanto $\mathcal{Q}$ é nuclear. □

§4. Sistemas Quase Transfinitos que respeitam PIF, PIC ou PBO

4.1 Teorema. Se um SQT respeita PIF, então ele respeita PIC.

Prova:
Seja $\langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ um SQT no qual vale PIF.
Seja $\Delta(n)$ uma propriedade para elementos $n \in \mathcal{O}$.
Suponha que $\forall n \in \mathcal{O}\ ((\forall m \prec n\ \Delta(m)) \to \Delta(n))$.
Seja $\Lambda(n)$ a propriedade $\forall m \prec n\ \Delta(m)$.
Temos que $\forall n \in \mathcal{O}\ (\ \Lambda(n) \to \Delta(n))$.
Por def. 2.1-iv, temos que $\neg(m \prec \theta)$, logo $m \prec \theta \to \Delta(m)$,
donde $\forall m \prec \theta\ \Delta(m)$,
ou seja, vale $\Lambda(\theta)$, que é a condição (i) de PIF para $\Lambda(n)$.

Suponha, por HI, que $\begin{cases} n \in \mathcal{D}(s), \\ \Lambda(n). \end{cases}$

De $\Lambda(n)$ temos $\Delta(n)$.

Supondo que $m \prec s(n)$, por lema 3.1, $\begin{cases} m \geq \theta, \\ n \geq \theta, \end{cases}$ e daí, por lema 2.12, $m \leq n$.

Se $m \prec n$, vale $\Delta(m)$, por valer aqui $\Lambda(n)$.
Se $m = n$, vale $\Delta(m)$, por valer aqui $\Delta(n)$.
Logo, em qualquer caso, vale aqui $\Delta(m)$, ou seja, $\forall m \prec s(n)\ \Delta(m)$, daí vale $\Lambda(s(n))$, ou seja, mostramos que $\forall n \in \mathcal{D}(s)(\Lambda(n) \to \Lambda(s(n)))$,
que é a (ii) condição de PIF para $\Lambda(n)$.

Suponha agora, por HI, que $\begin{cases} n \in \mathcal{O}, \\ n \neq \theta, \\ n \notin \mathcal{I}(s), \\ \forall m \prec n\ \Lambda(m). \end{cases}$

Daí, $\forall m \prec n\ \Delta(m)$, ou seja, vale $\Lambda(n)$.
Mostramos daí que $\forall n \in \mathcal{O}\ (n \neq \theta \wedge n \notin \mathcal{I}(s) \wedge \forall m \prec n, \Lambda(m) \to \Lambda(n))$,
que é a (iii) condição de PIF para $\Lambda(n)$.
Portanto, como $\mathcal{Q}$ respeita PIF,

temos que $\forall n \in \mathcal{O}, \Lambda(n)$, portanto $\forall n \in \mathcal{O}\ \Delta(n)$.
Ou seja, acabamos de provar que
$\forall n \in \mathcal{O}\ (\forall m \prec n\ \Delta(m)) \rightarrow \Delta(n)$ implica em $\forall n \in \mathcal{O}\ \Delta(n)$.
Portanto $\mathcal{Q}$ respeita PIC. $\square$

4.2 Teorema. Se um SQT respeita PIC, então ele respeita PBO.

Prova:
Seja $\mathcal{Q} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ um SQT que respeita PIC.
Considere que $S \subseteq \mathcal{O}$ tal que S não possui $\prec$-mínimo.
Seja $\Delta(n)$ a propriedade "$n \notin S$".
Por HI, suponha que $\begin{cases} n \in \mathcal{O}, \\ \forall m \prec n\ \Delta(m). \end{cases}$
Dado $m \in S$, supondo por absurdo que $m \prec n$, temos que vale $\Delta(m)$,
ou seja, $m \notin S$, o que é absurdo, logo $\neg(m \prec n)$.
Pelo lema 3.2, temos que SQT é nuclear, daí $m \geq \theta$ e $n \geq \theta$, e daí,
pela def. 2.1-xii, temos que $n \leq m$.
Ou seja, $\forall m \in S, n \leq m$, donde, se $n \in S$,
então n seria o $\prec$-mínimo de S, o que é absurdo,
portanto $n \notin S$, ou seja, vale $\Delta(n)$.
Acabamos de provar que $\forall n \in \mathcal{O}\ ((\forall m \prec n\ \Delta(m)) \rightarrow \Delta(n))$, que é a condição de PIC para $\Delta(n)$, donde, como $\mathcal{Q}$ respeita PIC, temos que $\forall n \in \mathcal{O}, \Delta(n)$, ou seja, $\forall n \in \mathcal{O}\ n \notin S$, logo $S = \varnothing$.
Acabamos de mostrar que $S \subseteq \mathcal{O} \wedge S$ não possui $\prec$-mínimo $\rightarrow S = \varnothing$,
o que equivale a dizer que $S \subseteq \mathcal{O} \wedge S \neq \varnothing \rightarrow S$ possui $\prec$-mínimo, ou seja,
$\forall S (S \subseteq \mathcal{O} \wedge S \neq \varnothing \rightarrow S$ possui $\prec$-mínimo$)$,
portanto $\mathcal{Q}$ respeita PBO. $\square$

4.3 Teorema. Se um SQT respeita PBO, então ele respeita PIF.

Prova:
Seja $\mathcal{Q} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ um SQT que respeita PBO.
Seja $\Delta(n)$ uma propriedade para elementos $n \in \mathcal{O}$.
Suponha que $\begin{cases} \Delta(\theta), \\ \forall n \in \mathcal{D}(s)\ (\Delta(n) \rightarrow \Delta(s(n))), \\ \forall n \in \mathcal{O}\ (n \neq \theta \wedge n \notin \mathcal{I}(s) \wedge \forall m \prec n\ \Delta(m) \rightarrow \Delta(n)). \end{cases}$
Seja $S = \{ n \mid n \in \mathcal{O} \wedge \neg\Delta(n) \}$.
Suponha por absurdo que $S \neq \varnothing$.
Então, como $\mathcal{Q}$ respeita PBO, temos que S possui um $\prec$-mínimo, o qual chamamos aqui de n_0.
Em particular, temos que $n_o \in S$, e daí $\neg\Delta(n_0)$, donde $n_0 \neq \theta$. (1)
Pelo lema 3.3, temos que $n_0 \geq \theta$.

Se $n_0 \in \mathcal{I}(s)$, então $n_0 = s(m)$, para algum $m \in \mathcal{D}(s)$.
Pelo lema 3.3, temos que $m \geq \theta$.
Pelo lema 2.15, temos que $m \prec s(m)$, daí $m \prec n_0$, e,
em particular, pelo lema 2.9, $m \neq n_0$.
Supondo por absurdo que $m \in S$, temos que $n_0 \prec m$,
o que é absurdo, em virtude da def. 2.1-x, logo $m \notin S$,
portanto vale $\Delta(m)$,
donde também vale $\Delta(s(m))$, ou seja, vale $\Delta(n_0)$,
e daí $n_0 \notin S$, o que é absurdo, logo $n_0 \notin \mathcal{I}(S)$. (2)
Dado $m \prec n_o$, suponha por absurdo que $m \in S$.
Pelo lema 3.3, temos que $m \geq \theta$, daí, em virtude do lema 2.9,
temos que $m \neq n_0$, donde $n_0 \prec m$, o que é absurdo, conforme def. 2.1-x,
logo $m \notin S$, ou seja, vale $\Delta(m)$, daí provamos aqui que $\forall m \prec n_0\ \Delta(m)$. (3)
De (1), (2), (3) e pela condição (iii) de PIF para $\Delta(n)$, temos que vale $\Delta(n_0)$,
o que é absurdo,
portanto $S = \emptyset$, ou seja, $\forall n \in \mathcal{O}\ \Delta(n)$.
Acabamos de provar que $\mathcal{Q}$ respeita PIF. □

4.4 Corolário. Se um SQT respeita PIF, ou respeita PIC, ou respeita PBO, então ele respeita PIF,PIC e PBO.
Prova: imediato, conforme os teoremas 4.1, 4.2 e 4.3. □

Capítulo 4

Sistemas Transfinitos

Neste capítulo falaremos de estruturas algébricas com as condições mínimas necessárias para que os três princípios da indução fraca, da indução completa e da boa ordem sejam verdadeiros. Chamaremos tais estruturas de *sistemas transfinitos*, pois nos mesmos valem duas formas de indução matemática, que são a indução fraca e a indução completa, as quais se aplicam para coleções tanto finitas como infinitas. Mostraremos também que sistemas transfinitos são exatamente sistemas quase transfinitos dotados de um dos princípios da indução fraca, da indução completa e da boa ordem, o que também equivale a sistemas transfinitos nos quais valem todos estes três princípios.

§1. Sistemas Transfinitos e Condições de Ascensão para Sistemas Quase Transfinitos

1.1 Definição. $\mathcal{T} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ é dito ser um *sistema transfinito (ST)* se:

(i) θ é um $\prec$-*mínimo* de $\mathcal{O}$;
(ii) $\prec \subseteq \mathcal{O} \times \mathcal{O}$;
(iii) $\prec$ é *boa ordem estrita* em $\mathcal{O}$;
(iv) s é a *função sucessora* definida por $\prec$.

1.2 Notação. No restante deste capítulo, consideramos que $\mathcal{T} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ é um sistema transfinito.

Os exemplos usuais de sistemas transfinitos são baseados em coleções não vazias de ordinais (ou em cópias dos mesmos, que são coleções bem ordenadas)

1.3 Exemplo.
$\langle \mathcal{W}, 0, s, < \rangle$ é um ST, onde:
- $\mathcal{W}$ é a coleção de todos os ordinais;
- $0 = \varnothing$;
- $s : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$
  $\alpha \mapsto \alpha \cup \{ \alpha \}$;
- $< = \{\langle \alpha, \beta \rangle \mid \alpha, \beta \in \mathcal{W} \wedge \alpha \in \beta \}$.

1.4 Exemplo.
$\langle \omega, 0, s, < \rangle$ é um ST, onde:
- $\omega = \{0, 1, 2, 3, ...\}$;
- $0 = \varnothing$;
- $s : \omega \to \omega$
  $n \mapsto n \cup \{ n \}$;
- $\prec = \{\langle m, n \rangle \mid m, n \in \omega \wedge m \in n \}$.

1.5 Exemplo.
$\langle \{2, 3, 4, 5\}, 2, s, < \rangle$ é um ST, onde:
- $s : \{2, 3, 4, 5\} \rightarrowtail \{2, 3, 4, 5\}$
  $n \mapsto n + 1$;
- $\prec = \{ \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 5 \rangle \}$.

1.6 Exemplo.
$\{\langle \omega \cup \{\omega, \omega + 1\}, 0, s, \prec \rangle\}$ é um ST, onde:
- $s : \omega \cup \{\omega, \omega + 1\} \rightarrowtail \omega \cup \{\omega, \omega + 1\}$;
  $\alpha \mapsto \alpha \cup \{ \alpha \}$;
- $<$ é a restrição da ordem estândar dos ordinais para $\omega \cup \{\omega, \omega + 1\}$.

1.7 Lema. Cada sistema transfinito é um sistema quase transfinito.

Prova:
Suponha que $\mathcal{T} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ é um sistema transfinito.
De def. 1.1-i, $\theta \in \mathcal{O}$. (1)
De def. 1.1-ii, def. 1.1-iii e def. 1.1-iv, $s : \mathcal{O} \rightarrowtail \mathcal{O}$. (2)
De def. 1.1-ii, $\prec \mathcal{O} \times \mathcal{O}$. (3)

De def. 1.1-i e def. 1.1-iii, θ é $\prec$-minimal de $\mathcal{O}$. (4)
De def. 1.1-i e def. 1.1-iii, todo $\prec$-minimal de $\mathcal{O}$ é igual a θ. (5)
De (2), def. 1.1-i, def. 1.1-iii e def. 1.1-iv, o sucessor de um elemento nuclear é um majorante de θ. (6)
De (1), (3) e def. 1.1-iii, todo majorante de um elemento nuclear é um majorante de θ. (7)
De (3), def. 1.1-iii e def. 1.1-iv, no núcleo, o domínio de s é o conjunto dos elementos m majorados por um elemento nuclear n. (8)
Também de (3), def. 1.1-iii e def. 1.1-iv, no núcleo, o sucessor de um elemento nuclear minora ou iguala qualquer majorante deste elemento. (9)
De (1), (3) e def. 1.1-iii, $\prec$ é assimétrica no núcleo de $\mathcal{O}$. (10)
De (1), (3) e def. 1.1-iii, temos também que
$\prec$ é transitiva no núcleo de $\mathcal{O}$. (11)
De def. 1.1-iii, e considerando a proposição 2.2.75, temos que $\prec$ é tricotômica no núcleo de $\mathcal{O}$. (12)
Finalmente de (1) a (12), e pela def. 3.2.1, temos que $\mathcal{T}$ é um SQT. □

1.8 Lema. Cada ST é um SQT que respeita PIF, PIC e PBO.
Prova:
Suponha que $\mathcal{T}$ é um SQT.
Do lema anterior, temos que $\mathcal{T}$ é um SQT. (1)
De def. 1.1-iii, $\mathcal{T}$ respeita PBO. (2)
De (1), (2) e conforme o corolário 3.4.4,
temos que $\mathcal{T}$ respeita PIF, PIC e PBO. □

1.9 Lema. Cada SQT que respeita PIF, PIC ou PBO é um ST.
Prova:
Suponha que $\mathcal{T}$ é um SQT que respeita PIF, PIC ou PBO.
Pelo corolário 3.4.4, temos que $\mathcal{T}$ é um SQT que respeita PBO. (1)
De (1) e lema 3.3.3, temos que θ é $\prec$-mínimo de $\mathcal{O}$. (2)
De def. 3.2.1-iii, temos que $\prec$ é uma relação de $\mathcal{O}$ *em* $\mathcal{O}$. (3)
Do lema 3.3.3 e def. 3.2.1-x, temos que $\prec$ é assimétrica em $\mathcal{O}$. (4)
De (1), temos que $\prec$ é minimante em $\mathcal{O}$. (5)
De (4), (5) e proposição 2.2.78, temos que $\prec$ é boa ordem estrita em $\mathcal{O}$. (6)
De def. 3.2.1-ii, temos que $s : \mathcal{O} \rightarrowtail \mathcal{O}$. (7)
De (7), lema 3.3.3 e def. 3.2.1-viii, temos que
$\forall m\, (m \in \mathcal{D}(s) \leftrightarrow \exists n(m \prec n))$. (8)
De (3), (7), lema 3.3.3 e def. 3.2.1-ix, temos que
$\forall m \in \mathcal{D}(s)\ \forall n(m \prec n \leftrightarrow s(m) \leq n)$. (9)
De (7), (8), (9) e proposição 2.2.85, temos que s é a sucessão definida por $\prec$, donde, de (7), segue-se que s é a função sucessora definida por $\prec$. (10)
Portanto, de (2),(3),(6) e (10), concluímos que $\mathcal{T}$ é um sistema transfinito. □

Do lema 1.8, obtemos também os dois teoremas seguintes, e da def. 1.1-iii, obtemos o terceiro teorema.

1.10. Princípio de Indução Fraca:
Um ST respeita PIF, isto é, dada uma propriedade $\Delta(n)$ para elementos $n \in \mathcal{O}$,

$$\text{Se} \begin{cases} \text{(i)} \quad \Delta(\theta), \\ \text{(ii)} \ \ \forall n \in \mathcal{D}(s)\ (\Delta(n) \to \Delta(s(n))), \\ \text{(iii)} \ \forall n \in \mathcal{O}\ (n \neq \theta \wedge n \notin \mathcal{I}(s) \wedge \forall m \prec n(\Delta(m)) \to \Delta(n)), \end{cases}$$

então $\forall n \in \mathcal{O}\ \Delta(n)$.

1.11. Princípio de Indução Completa:
Um ST respeita PIC, isto é, dada uma propriedade $\Delta(n)$ para elementos $n \in \mathcal{O}, \forall n \in \mathcal{O}\ ((\forall m \prec n\ \Delta(m)) \to \Delta(n))$ implica em $\forall n \in \mathcal{O}\Delta(n)$.

1.12. Princípio da Boa Ordem:
Um ST respeita PBO, isto é, $\forall S (S \subseteq \mathcal{O} \wedge S \neq \theta \to S)$ possui $\prec$-mínimo.

Em provas posteriores, iremos nos referir, respectivamente, aos teoremas 1.10, 1.11 e 1.12 simplesmente por PIF, PIC e PBO.

1.13 Teorema. As seguintes proposições são equivalentes:
- $\mathcal{T}$ é um ST;
- $\mathcal{T}$ é um SQT que respeita PIF;
- $\mathcal{T}$ é um SQT que respeita PIC;
- $\mathcal{T}$ é um SQT que respeita PBO;
- $\mathcal{T}$ é um ST que respeita PIF, PIC e PBO.

Prova: É imediato, dos lemas 1.8 e 1.9. □

1.14 Escólio. Nem todo sistema quase transfinito nuclear é um sistema transfinito.

Prova:
O sistema quase transfinito nuclear dado no exemplo 4.2.6 não respeita PIC, logo, conforme o teorema 1.13, o mesmo não é um sistema transfinito. □

§2. Indução Dupla em Sistemas Transfinitos

Apresentaremos nesta seção uma outra forma de indução matemática, valida em quaisquer sistemas transfinitos. A mesma trabalha com duas variáveis percorrendo todo o conjunto ambiente, ao invés de apenas uma variável, como é feito nas formas de indução matemática já apresentadas. A vantagem de tal nova forma reside na possível diminuição do tamanho de provas com formas de indução utilizando uma variável de cada vez, pois, havendo duas variáveis referindo-se a elementos do conjunto ambiente, uma prova sem indução dupla iria requerer um aninhamento de provas por indução simples. Outra exposição das leis da indução dupla está em [Fitting 1996].

2.1. Lei da Indução Dupla Fraca:

Seja $\Delta(m,n)$ uma propriedade para elementos $m,n \in \mathcal{O}$.

$$\text{Se}\begin{cases}\text{(i)}\ \ \forall m \in \mathcal{O}\ \Delta(m,\theta),\\ \text{(ii)}\ \ \forall m \forall n\ (m,n \in \mathcal{O} \wedge n \in \mathcal{D}(s) \wedge \Delta(m,n) \wedge \Delta(n,m) \rightarrow \Delta(m,s(n))),\\ \text{(iii)}\ \forall m \forall n\ (m,n \in \mathcal{O} \wedge n \neq \theta \wedge n \notin \mathcal{I}(s)\\ \qquad\qquad\qquad \wedge \forall p \prec n(\Delta(m,p) \wedge \Delta(p,m)) \rightarrow \Delta(m,n)),\end{cases}$$

então $\forall m \forall n\ (m,n \in \mathcal{O} \rightarrow \Delta(m,n))$.

Prova:

Assuma a hipótese.

Para cada $n \in \mathcal{O}$, considere as seguintes definições:

- n é normal à direita se $\forall m \in \mathcal{O}\ \Delta(m,n)$;
- n é normal à esquerda se $\forall m \in \mathcal{O}\ \Delta(n,m)$.

Passo 1: Vamos mostrar a seguir que
$\forall n \in \mathcal{O}$ (n é normal à direita $\rightarrow$ n é normal à esquerda).
Dado $n \in \mathcal{O}$, suponha que n é normal à direita.
Da condição (i) da hipótese, temos que $\Delta(n,\theta)$. (1)
Se $m \in \mathcal{D}(s)$ e $\Delta(n,m)$, como vale também que $\Delta(m,n)$,
daí, pela condição (ii) da hipótese, segue-se que $\Delta(n,s(m))$,
ou seja, mostramos que $\forall m \in \mathcal{D}(s)\ (\Delta(n,m) \rightarrow \Delta(n,s(m)))$. (2)
Se $m \in \mathcal{O}, m \neq \theta, m \notin \mathcal{I}(s)$ e $\forall p \prec m\ \Delta(n,p)$,
como vale também que $\forall p \prec n\ \Delta(p,n)$,
temos daí que $\forall p \prec m\ (\Delta(n,p) \wedge \Delta(p,n))$,
donde, pela condição (iii) da hipótese, vale $\Delta(n,m)$, ou seja, mostramos que
$\forall m \in \mathcal{O}\ (m \neq \theta \wedge m \notin \mathcal{I}(s) \wedge \forall p \prec m\ \Delta(n,p) \rightarrow \Delta(m,n))$. (3)
De (1), (2), (3) e PIF, segue-se que $\forall m \in \mathcal{O}\ \Delta(n,m)$,
ou seja, n é normal à esquerda.
Logo $\forall n \in \mathcal{O}$ (n é normal à direita $\rightarrow$ n é normal à esquerda).

Passo 2: Vamos mostrar a seguir que $\forall n \in \mathcal{O}$ (n é normal à direita).
Da condição (i) da hipótese, temos que θ é normal à direita. (4)
Se $n \in \mathcal{D}(s)$ e n é normal à direita, daí, da conclusão do passo 1, temos que n é normal à esquerda, donde $\forall m \in \mathcal{O}\ \Delta(m,n) \ \wedge \ \Delta(n,m))$, e daí, da condição (ii) da hipótese, segue-se que $\forall m \in \mathcal{O}\ \Delta(m, s(n))$, ou seja, $s(n)$ é normal à direita, logo $\forall n \in \mathcal{D}(s)$ (n é normal à direita $\rightarrow$ $s(n)$ é normal à direita. (5)
Se $n \in \mathcal{O}, m \neq \theta, m \notin \mathcal{I}(s) \wedge \forall p \prec n$ (p é normal à direita),
temos também, da conclusão do passo 1, que $\forall p \prec n$ (p é normal à esquerda), donde $\forall m \in \mathcal{O}\ \forall p \prec n\ (\Delta(m,p) \ \wedge \ \Delta(p,m))$, e daí, pela condição (iii) da hipótese, segue-se que $\forall m \in \mathcal{O}\ \Delta(m,n)$,
ou seja, n é normal à direita, daí mostramos que $\forall n \in \mathcal{O}$
($n \neq \theta \wedge m \notin \mathcal{I}(s) \wedge \forall p \prec n$ (p é normal à direita) $\rightarrow$ n é normal à direita). (6)
De (4), (5), (6) e PIF, segue-se que $\forall n \in \mathcal{O}$ (n é normal à direita).

Passo 3: Aqui finalizamos esta prova.
Da conclusão do passo 2, temos que $\forall n \in \mathcal{O}\ \forall m \in \mathcal{O}\ \Delta(m,n)$,
ou seja, $\forall m \forall n\ (m, n \in \mathcal{O} \rightarrow \Delta(m,n))$. □

2.2. Lei da Indução Dupla Completa:
Seja $\Delta(m,n)$ uma propriedade para elementos $m, n \in \mathcal{O}$.
Se $\forall m \forall n\ (m, n \in \mathcal{O} \ \wedge \ \forall p \prec n\ (\Delta(m,p) \ \wedge \ \Delta(p,m) \rightarrow \Delta(m,n))$,
então $\forall m \forall n\ (m, n \in \mathcal{O} \rightarrow \Delta(m,n))$.

Prova:
Assuma a hipótese.
Da mesma forma que fizemos na prova anterior, considere as seguintes definições, para cada $n \in \mathcal{O}$:
• n é normal à direita se $\forall m \in \mathcal{O}\ \Delta(m,n)$;
• n é normal à esquerda se $\forall m \in \mathcal{O}\ \Delta(n,m)$.

Passo 1: Vamos mostrar a seguir que $\forall n \in \mathcal{O}$ (n é normal à direita $\rightarrow$ n é normal à esquerda).
Dado $n \in \mathcal{O}$, suponha que n é normal à direita.

Suponha que $\begin{cases} m \in \mathcal{O}, \\ \forall p \prec n\ \Delta(n,p). \end{cases}$

Temos de imediato que $\forall p \prec n\ \Delta(p,n)$, e daí, pela hipótese, segue-se que $\Delta(n,m)$, logo mostramos que $\forall m \in \mathcal{O}\ (\forall p \prec m\ \Delta(n,p) \rightarrow \Delta(n,m))$,
donde por PIC, temos que $\forall m \in \mathcal{O}\ \Delta(n,m)$, ou seja, n é normal à esquerda.
Portanto $\forall n \in \mathcal{O}$ (n é normal à direita $\rightarrow$ n é normal à esquerda).

Passo 2: Vamos mostrar a seguir que $\forall n \in \mathcal{O}$ (n é normal à direita).
Dado $n \in \mathcal{O}$, suponha que $\forall p \prec n$ (p é normal à direita).
Pela conclusão da Passo 1,

segue-se que $\forall p \prec n$ (p é normal à esquerda),
daí temos que $\forall m \in \mathcal{O}\ \forall p \prec n\ (\Delta(m, p)\ \wedge\ \Delta(p, m))$, donde da hipótese,
$\forall m \in \mathcal{O}\ \Delta(m, n)$, ou seja, n é normal à direita,
logo mostramos que
$\forall n \in \mathcal{O}$ ($\forall p \prec n$ (p é normal à direita) $\rightarrow$ n é normal à direita),
logo, por PIC, $\forall n \in \mathcal{O}$ (n é normal à direita).

Passo 3: Aqui finalizamos a prova.
Da conclusão do passo 2, $\forall n \in \mathcal{O}\ \forall m \in \mathcal{O}\ \Delta(m, n)$,
ou seja, $\forall m \forall n\ (m, n \in \mathcal{O} \rightarrow \Delta(m, n))$. $\square$

Capítulo 5

Sistemas Transfinitos Especiais

Neste capítulo estudaremos alguns sistemas possuindo certas condições adicionais que serão dadas a seguir. Levando em conta tais condições adicionais, o princípio da indução fraca e a lei da indução dupla fraca possuem formulações mais simples.

§1. Introdução

Os sistemas transfinitos podem possuir ou não certos elementos notáveis, os quais serão caracterizados a seguir.

1.1 Notação. Consideramos nesta seção, que $\mathcal{T} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ é um sistema transfinito.

1.2 Definição. Dizemos que *m é um elemento máximo em $\mathcal{T}$* se m é $\prec$-máximo de $\mathcal{O}$.

1.3 Definição. (**Sucessor de um elemento em um sistema transfinito**)

(i) *n é sucessor de m* em $\mathcal{T}$ se $m \in \mathcal{D}(s) \wedge s(m) = n$.
(ii) n é *sucessor em $\mathcal{T}$* se existe m tal que n é sucessor de m em $\mathcal{T}$.
(iii) *m possui sucessor em $\mathcal{T}$* se $m \in \mathcal{D}(s)$.

1.4 Proposição. As seguintes condições são equivalentes:

(i) m possui sucessor em $\mathcal{T}$;
(ii) $m \in \mathcal{D}(s)$;
(iii) m não é elemento máximo em $\mathcal{T}$.

1.5 Proposição. As seguintes condições são equivalentes:
(i) n é sucessor em $\mathcal{T}$;
(ii) $n \in \mathcal{I}(s)$.

1.6 Proposição. As seguintes condições são equivalentes:
(i) $\mathcal{T}$ não possui elemento máximo;
(ii) $\mathcal{D}(s) = \mathcal{O}$;
(iii) $s : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ (s é função total de $\mathcal{O}$ em $\mathcal{O}$).

1.7 Definição. (Elemento limite em um Sistema Transfinito)
Dizemos que n é um elemento limite em $\mathcal{T}$ se $n \neq \theta \wedge n \notin \mathcal{I}(s)$.

1.8 Proposição. As seguintes condições são equivalentes:
(i) n é um elemento limite em $\mathcal{T}$;
(ii) $n \neq \theta \wedge n$ não é sucessor em $\mathcal{T}$.

1.9 Proposição. Dado $n \in \mathcal{O}$,
exatamente uma seguintes condições é satisfeita:
(i) $n = \theta$;
(ii) n é sucessor em $\mathcal{T}$;
(iii) n é um elemento limite em $\mathcal{T}$.

§2. Sistemas de Peano

2.1 Definição. $\langle N, \theta, s\rangle$ é dito um *sistema de Peano* se as seguintes condições forem satisfeitas:
(i) $\theta \in N$;
(ii) $s : N \to N$;
(iii) $\forall n\, (n \in N \to s(n) \neq \theta)$;
(iv) $\forall m \forall n\, (m, n \in N \wedge s(m) = s(n) \to m = n)$;
(v) Se $\Delta(n)$ é uma propriedade para elementos $n \in N$,

então $\begin{cases} \Delta(\theta), \\ \forall n \in N\, (\Delta(n) \to \Delta(s(n))), \end{cases}$ implicam que $\forall n \in N\ \Delta(n)$.

2.2 Notação. Consideramos, nesta seção e na seguinte,
que $\prec$ é o fecho transitivo de s.

2.3 Exemplo.
$\langle\, \mathbb{N}, 0, s \,\rangle$ é um sistema de Peano, onde:
- $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  $n \mapsto n + 1.$

2.4 Exemplo.
$\langle\, \mathbb{N}^*, 1, s \,\rangle$ é um sistema de Peano, onde:
- $s : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$
  $n \mapsto n + 1.$

2.5 Exemplo.
$\langle\, \mathbb{N}_2, 2, s \,\rangle$ é um sistema de Peano, onde:
- s é a restrição da função sucessora dos naturais para $\mathbb{N}_2$,
- $\mathbb{N}_2 = \{2, 3, 4, 5, ...\}$.

2.6 Exemplo.
$\langle\, \mathbb{N}_4, 4, s \,\rangle$ é um sistema de Peano, onde:
- $\mathbb{N}_4 = \{4, 5, 6, 7, ...\}$,
- $s : \mathbb{N}_4 \to \mathbb{N}_4$
  $n \mapsto n + 2.$

2.7 Exemplo.
$\langle\, Z_6^{\leq}, 6, s \,\rangle$ é um sistema de Peano, onde:
- $\mathbb{Z}_6^{\leq} = \{n \mid n \in \mathbb{Z} \wedge n \leq 6\,\}$,
- $s : \mathbb{Z}_6^{\leq} \to \mathbb{Z}_6^{\leq}$
  $n \mapsto n - 1.$

2.8 Exemplo.
$\langle\, \{3, 1, -1, -3, -5, ...\}, 3, s \,\rangle$ é um sistema de Peano, onde:
- $s : \{3, 1, -1, -3, -5, ...\} \to \{3, 1, -1, -3, -5, ...\}$
  $n \mapsto n - 2.$

2.9 Notação. Nesta seção, consideramos que $\langle N, \theta, s \,\rangle$
é um sistema de Peano.

2.10 Lema. Se $\begin{cases} p \in \mathbb{N}^*, \\ n \in N, \end{cases}$ então $s^p(n) \neq n.$

Prova:
Considere p fixo tal que $p \in \mathbb{N}^*$.
Dado $n \in N$, seja $\Delta(n)$ a propriedade "$s^p(n) \neq n$".
Seja m o natural tal que $p = m + 1$. Se $s^p(\theta) = \theta$, então $(s \circ s^m)(\theta) = \theta$, ou seja, $s(s^m(\theta)) = \theta$, o que contraria a condição (iii) da def. 2.1, logo $s^p(\theta) \neq \theta$,

donde vale $\Delta(\theta)$. (1)

Suponha que $\begin{cases} n \in N, \\ \Delta(n). \end{cases}$

Se $s^p(s(n)) = s(n)$, então, da proposição 2.2.35 $s(s^p(n)) = s(n)$, donde, da condição (iv) da def. 2.1, segue-se que $s^p(n) = n$, o que é absurdo, daí $s^p(s(n)) \neq s(n)$, donde vale $\Delta(s(n))$.

Mostramos então que $\forall n \in N\ (\Delta(n) \to \Delta s(n))$. (2)

De (1), (2) e pela condição (v) da def. 2.1, temos que $\forall n \in N\ \Delta(n)$, ou seja, $\forall n \in N\ (s^p(n) \neq n)$. □

2.11 Lema. $\prec\ \subseteq N \times N$.

Prova: É imediato, considerando que $\prec$ é o fecho transitivo de s e $s \subseteq N \times N$. □

2.12 Lema. $\prec$ é transitiva em N.

Prova:

Considerando que $\prec$ é o fecho transitivo de s, temos que $\prec$ é transitiva, e daí, pelo lema 2.11, segue-se que $\prec$ é transitiva em N. □

2.13 Lema. $\prec$ é assimétrica em N.

Prova:

Suponha que $\begin{cases} m, n \in N, \\ m \prec n. \end{cases}$

Se $n \prec m$, temos que pela proposição 2.2.46,

que $\begin{cases} n = s^p(m), \text{para algum } p \in \mathbb{N}^*, \\ m = s^q(n), \text{para algum } q \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Sendo $r = p + q$, temos então que

$n = s^p(s^q(n))$, ou seja, $n = s^r(n)$, onde $r \in \mathbb{N}^*$, o que é absurdo, conforme o lema 2.10, donde $\neg(m \prec n)$.

Mostramos daí que $\forall m\ \forall n\ (m, n \in N \wedge m \prec n \to \neg(n \prec m))$, ou seja, $\prec$ é assimétrica em N. □

2.14 Lema. $\forall n \in N\ \exists p \in \mathbb{N}\ (n = s^p(\theta))$.

Prova:

Seja $\Delta(n)$ a propriedade "$\exists p \in \mathbb{N}\ (n = s^p(\theta))$".

$\theta = s^0(\theta)$, daí vale $\Delta(\theta)$. (1)

Se $n \in N$ e $\Delta(n)$, temos que $n = s^p(\theta)$, para algum $p \in \mathbb{N}$, daí $s(n) = s(s^p(\theta))$, ou seja, $s(n) = s^{p+1}(\theta)$, donde vale $\Delta(s(n))$.

Mostramos daí que $\forall n \in N\ (\Delta(n) \to \Delta(s(n)))$. (2)

De (1), (2) e condição (v) da def. 2.1,

concluímos que $\forall n \in N\ \Delta(n)$, ou seja, $\forall n \in N\ \exists p \in \mathbb{N}\ (n = s^p(\theta))$. □

2.15 Lema. $\forall n \in N\ (n \neq \theta \to \exists p \in \mathbb{N}^*\ (n = s^p(\theta)))$.

Prova: é imediata, dos lemas 2.14 e 2.10. □

2.16 Lema. $\prec$ é tricotômica em N.

Prova:
Suponha que $m, n \in N$.
Pelo lema 2.14, $\begin{cases} m = s^p(\theta), \text{para algum } p \in \mathbb{N}, \\ n = s^q(\theta), \text{para algum } q \in \mathbb{N}. \end{cases}$
Caso $p = q$, então $m = n$.
Caso $p \prec q$, seja r o natural não nulo tal que $q = p + r$.
$n = s^q(\theta) = (s^p \circ s^r)(\theta) = (s^r \circ s^p)(\theta) = s^r(s^p(\theta)) = s^r(m)$,
donde, pela proposição 2.2.46, $m \prec n$.
Caso $q \prec p$, por raciocínio análogo ao feito no caso anterior, temos que $n \prec m$.
Ou seja, em qualquer caso, $m \prec n\ \vee n \prec m\ \vee m = n$.
Mostramos então que $\forall m\, \forall n(m, n \in N \to m \prec n\ \vee n \prec m\ \vee m = n)$.
Portanto $\prec$ é tricotômica em N. □

2.17 Corolário. $\prec$ é ordem linear estrita em N.

Prova: É imediato, dos lemas 2.12, 2.13 e 2.16. □

2.18 Lema. $\forall n \in N\ (n \neq \theta \to \theta \prec n)$.

Prova:
Se $n \in N$ e $n \neq \theta$, segue-se, do lema 2.15, que,
para algum $p \in \mathbb{N}^*, n = s^p(\theta)$,
donde, pela proposição 2.2.46, $\theta \prec n$. □

2.19 Lema. θ é $\prec$-minimal de N.

Prova:
Se $n \prec \theta$, então, pelo lema 2.13, $n \neq \theta$, donde, pelo lema 2.18,
$\theta \prec n$, o que é absurdo, conforme o lema 2.13,
portanto $\forall n\ \neg(n \prec \theta)$, ou seja, θ é $\prec$-minimal de N. □

2.20 Lema. θ é o único $\prec$-minimal de N.

Prova:
Suponha que n é um $\prec$-minimal de θ.
Se $n \neq \theta$, então, pelo lema 2.19, $\neg(\theta \prec n)$, daí, pelo lema 2.16,
segue-se que $\theta \prec n$, o que é absurdo, logo $n = \theta$.
Mostramos daí que $\forall n\ (n$ é $\prec$-minimal de $\theta \to n = \theta)$, ou seja,
levando também em conta o lema 2.19, θ é o único $\prec$-minimal de N. □

2.21 Lema. Todo sucessor é um majorante de θ.

Prova:

Dado $n \in N$, por $\prec$ ser fecho transitivo de s, temos que $n \prec s(n)$.
Se $n = \theta$, então, obviamente, $s(n) \succ \theta$.
Se $n \neq \theta$, então, pelo lema 2.18, $\theta \prec n$, donde, pelo lema 2.12, segue-se que $s(n) \succ \theta$.
Em qualquer caso, temos que $s(n) \succ \theta$, ou seja, $\forall n \in N\ (s(n) \succ \theta)$. □

2.22 Lema. Todo majorante de algum elemento de N é um majorante de θ.

Prova:

Suponha que $m \geq \theta$ e $n \succ m$.
Se $m \succ \theta$, então, do lema 2.12, temos que $n \succ \theta$.
Se $m = \theta$, então, obviamente, segue-se que $n \succ \theta$.
Em qualquer caso, então, temos que $n \succ \theta$.
Mostramos daí que $\forall m \geq \theta\ \forall n \succ m\ (n \succ \theta)$. □

2.23 Lema. O sucessor de um dado elemento de N minora ou iguala qualquer majorante deste elemento.

Prova:

Suponha que $m, n \in N$.
Se $m \prec n$, como $\prec$ é o fecho transitivo de s,
segue-se da proposição 2.2.46, que existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $n = s^p(m)$.
Considerando que $q = p - 1$, temos que $n = s \circ s^q(m)$, e daí $n = s^q \circ s(m)$, ou seja, $n = s^q(s(m))$.
Caso $q = 0$, então $n = s(m)$.
Caso $q \neq 0$, temos que $n \succ s(m)$.
Em qualquer caso temos que $s(m) \leq n$.
Se $s(m) \leq n$, como $\prec$ é o fecho transitivo de s, segue-se que $m \prec s(m)$.
Caso $s(m) \prec n$, segue-se do lema 2.12 que $m \prec n$.
Caso $s(m) = n$, temos, obviamente, que $m \prec n$.
Ou seja, em qualquer caso temos que $m \prec n$.
Mostramos então que $\forall m\ \forall n\ (m, n \in N \to (m \prec n \leftrightarrow s(m) \leq n))$. □

2.24 Teorema. Se $\begin{cases} \text{(i)}\ \ \langle N, \theta, s\ \rangle \text{ é um sistema de Peano,} \\ \text{(ii)}\ \ \prec\ \ \text{ é o fecho transitivo de s,} \end{cases}$

então $\langle N, \theta, s, \prec\ \rangle$ é um sistema quase transfinito.

Prova:

Da condição (i) da def. 2.1, temos que $\theta \in N$. (1)
Da condição (ii) da def. 2.1, temos que $s : N \rightarrowtail N$. (2)
Do lema 2.11, $\prec$ é uma relação de N em N. (3)
Do lema 2.19, θ é um $\prec$-minimal de N. (4)

Do lema 2.20, θ é o único $\prec$-minimal de N. (5)
Do lema 2.21, todo sucessor é um majorante de θ. (6)
Do lema 2.22, todo majorante de um elemento de N é um majorante de θ. (7)
Dado $m \in N$, como, da condição (ii) da def. 2.1, temos que $\mathcal{D}(s) = N$, segue-se que $m \in \mathcal{D}(s)$. Como $\prec$ é fecho transitivo de s, temos que $m \prec s(m)$, daí $\exists n \in N(m \prec n)$.
Logo, obviamente, temos que $m \in \mathcal{D}(s) \leftrightarrow \exists n \in N(m \prec n)$.
Portanto $\forall m \in N(m \in \mathcal{D}(s) \leftrightarrow \exists n \in N(m \prec n))$. (8)
Do lema 2.23, temos que o sucessor de um dado elemento de N minora ou iguala qualquer majorante deste elemento. (9)
Do lema 2.13, temos que $\prec$ é assimétrica em N. (10)
Do lema 2.12, temos que $\prec$ é transitiva em N. (11)
Do lema 2.16, segue-se que $\prec$ é tricotômica em N. (12)
De (1) a (12), e levando em consideração o lema 2.18,
temos que a quádrupla $\langle N, \theta, s, \prec\rangle$ preenche as doze condições da def. 3.2.1, portanto $\langle N, \theta, s, \prec\rangle$ é um sistema quase transfinito. □

2.25 Lema. As seguintes condições são equivalentes:

- $\langle N, \theta, s, \prec\rangle$ respeita PIF;
- Se $\Delta(n)$ é uma propriedade para elementos $n \in N$,
  então $\forall n \in N\ \Delta(n)$ é implicada pelas seguintes cláusulas:
  - ⋄ $\Delta(\theta)$;
  - ⋄ $\forall n \in N\ \Delta(n) \to \Delta(s(n))$.

Prova:
Basta observar que, sendo $\langle N, \theta, s\ \rangle$ um sistema de Peano,

então $\begin{cases} \mathcal{D}(s) = N, \\ \text{não existe } n \neq \theta \text{ tal que } n \notin \mathcal{I}(s). \end{cases}$

□

2.26 Corolário. $\langle N, \theta, s, \prec\rangle$ respeita PIF.

Prova:
Sendo $\langle N, \theta, s, \prec\rangle$ um sistema de Peano, temos, pela condição (v) da def. 2.1 e pelo lema 2.25, que $\langle N, \theta, s, \prec\rangle$ respeita PIF. □

2.27 Teorema. Se $\begin{cases} \langle N, \theta, s, \prec\rangle \text{ é um sistema de Peano,} \\ \prec \text{ é o fecho transitivo de } s, \end{cases}$

então valem as seguites proposições:

- $\langle N, \theta, s, \prec\rangle$ é um sistema transfinito;
- $\langle N, \theta, s, \prec\rangle$ respeita PIF, PIC e PBO.

Prova:
Assumindo a hipótese, e considerando o teorema 2.24,
temos que $\langle N, \theta, s, \prec\rangle$ é um SQT. (1)
Pelo corolário 2.26, temos que $\langle N, \theta, s, \prec\rangle$ respeita PIF. (2)
De (1), (2) e teorema 4.1.13, consideramos que $\langle N, \theta, s, \prec\rangle$ é ST que respeita PIF, PIC e PBO. □

2.28 Corolário. Se $\begin{cases} \langle N, \theta, s\ \rangle \text{ é um sistema de Peano,} \\ \prec \text{ é o fecho transitivo de } s, \end{cases}$
então $\prec$ é boa ordem estrita em N.

Prova:
Assuma a hipótese.
Pelo lema 2.13, temos que $\prec$ é assimétrica em N. (1)
Pelo teorema 2.27, temos também que $\langle N, \theta, s, \prec\ \rangle$ respeita PBO,
donde $\prec$ é minimante em N. (2)
De (1), (2) e proposição 2.2.78,
concluímos que $\prec$ é boa ordem estrita em N. □

A lei da indução dupla fraca em sistemas de Peano admite uma formulação mais simples, devido a não existirem, em tais sistemas, elementos limites e o elemento máximo.

2.29. Indução Dupla Fraca em Sistemas de Peano:
Seja $\Delta(m, n)$ uma propriedade para elementos $m, n \in N$.
Se $\begin{cases} \text{(i) } \forall m \in N\ \Delta(m, \theta), \\ \text{(ii) } \forall m \forall n\ (m, n \in N\ \wedge \Delta(m, n)\ \wedge \Delta(n, m)\ \rightarrow\ \Delta(m, s(n))), \end{cases}$
então $\forall m \forall n\ (m, n \in N\ \rightarrow \Delta(m, n))$.

§3. Segmentos Discretos

Estruturas algébricas análogas aos sistemas de Peano, mas possuindo um elemento máximo, serão chamados aqui de *segmentos discretos*. Para os mesmos existem também formulações particularizadas do princípio da indução fraca e da lei da indução dupla fraca.

Nesta seção daremos, para tais estruturas, resultados análogos aos dados na seção anterior, mas sem as respectivas provas, as quais são quase idênticas às realizadas na seção precedente.

3.1 Definição. $\langle \mathcal{O}, \theta, m_o, s \ \rangle$ é dito ser um *segmento discreto* se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $\theta \in \mathcal{O}$;

(ii) $m_0 \in \mathcal{O}$;

(iii) $s : \mathcal{O} \ \rightarrowtail \ \mathcal{O}$;

(iv) $\forall n \in N \ (n \in \mathcal{D}(s) \leftrightarrow n \neq m_0$;

(v) $\forall m \ \forall n \ (m, n \in \mathcal{D}(s) \ \wedge s(m) = s(n) \rightarrow m = n)$;

(vi) se $\Delta(n)$ é uma propriedade para elementos $n \in \mathcal{O}$,

então $\begin{cases} \text{(i)} \ \ \Delta(\theta), \\ \text{(ii)} \ \forall n \neq m_0 \ (\Delta(n) \ \rightarrow \ \Delta(s(n)), \end{cases}$ implicam que $\forall n \in \mathcal{O} \ \Delta(n)$.

3.2 Exemplos.

- $\langle \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}, 2, 7, s \rangle$ é um segmento discreto,

onde $s : \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \ \rightarrowtail \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$n \mapsto n + 1$.

Observe que $\mathcal{D}(s) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

- $\langle \{2, 1, 0, -1, -2, -3\}, 2, -3, s \ \rangle$ é um segmento discreto,

onde $s : \{2, 1, 0, -1, -2, -3\} \ \rightarrowtail \{2, 1, 0, -1, -2, -3\}$

$n \mapsto n - 1$.

Note que $\mathcal{D}(s) = \{2, 1, 0, -1, -2\}$.

3.3 Notação. Nesta seção, consideramos que $\langle \mathcal{O}, \theta, m_o, s \ \rangle$ é um segmento discreto. Lembramos que continuaremos a considerar, conforme a notação 2.2 que $\prec$ é o fecho transitivo de s.

Para os componentes θ, s do segmento discreto $\langle \mathcal{O}, \theta, m_o, s \ \rangle$, bem como a relação $\prec$, valem todos os resultados dados na seção anterior, com as devidas adaptações, levando em conta que o domínio de s não é o conjunto ambiente completo, mas sim a coleção $\{n \mid n \in \mathcal{O} \ \wedge n \neq m_o\}$, conforme a condição (iv) da definição 3.1.
Daremos a seguir os resultados mais específicos ou relevantes concernentes aos sistemas discretos.

3.4 Lema. m_o é $\prec$-maximal de $\mathcal{O}$.

Prova:
Se $m_0 \prec n$, então pela proposição 2.2.45, temos que $m_0 \in \mathcal{D}(s)$, o que é absurdo, conforme a condição (iv) da definição 3.1, portanto $\forall n \ \neg(m_0 \prec n)$, ou seja, m_0 é $\prec$-maximal de $\mathcal{O}$. $\square$

3.5 Lema. m_o é $\prec$-máximo de $\mathcal{O}$.

Prova:
Pelo resultado correspondente nos segmentos discretos ao lema 2.16, temos que $\prec$ é tricotômica em $\mathcal{O}$. (1)
Dado $n \in \mathcal{O}$ tal que $n \neq m_0$, temos, por (1), que $n \prec m_0 \ \vee m_0 \prec n$,
donde, pelo lema 3.4, segue-se que $n \prec m_0$.
Mostramos daí que $\forall n \in \mathcal{O}\ (n \neq m_0 \rightarrow n \prec m_0)$, ou seja,
m_0 é $\prec$-máximo de $\mathcal{O}$. □

As provas dos resultados não específicos relativos aos segmentos discretos são quase iguais às provas feitas na seção anterior, por isso as mesmas não serão dadas aqui explicitamente, daí apresentamos aqui apenas os resultados concernentes somente aos segmentos discretos.

3.6 Lema. As seguintes condições são equivalentes:
- $\langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ respeita PIF*;*
- Dado uma propriedade $\Delta(n)$ para elementos $n \in \mathcal{O}$*,*
  a proposição $\forall n \in \mathcal{O}\ \Delta(n)$ é implicada pelas seguintes cláusulas*:*
  - ◇ $\Delta(\theta)$*;*
  - ◇ $\forall n \prec m_0\ (\Delta(n) \rightarrow \Delta(s(n))$.

3.7 Teorema. Se $\begin{cases} \langle \mathcal{O}, \theta, m_0, s \rangle \text{ é um segmento discreto,} \\ \prec \ \text{ é o fecho transitivo de } s, \end{cases}$
então $\langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ é um ST que respeita PIF, PIC e PBO.

3.8. Indução Fraca em Segmentos Discretos:
Se $\begin{cases} \langle \mathcal{O}, \theta, m_0, s \ \rangle \text{ é um sistema discreto,} \\ \prec \ \text{ é o fecho transitivo de } s, \end{cases}$
então, dada uma propriedade $\Delta(n)$ para elementos $n \in \mathcal{O}$,
a proposição $\forall n \in \mathcal{O}\ \Delta(n)$ é implicada pelas seguintes condições:
- $\Delta(\theta)$;
- $\forall n \prec m_0\ (\Delta(n) \rightarrow \Delta(s(n))$.

3.9. Indução Dupla Fraca em Sistemas Discretos:
Seja $\Delta(m, n)$ uma propriedade para elementos $m, n \in \mathcal{O}$.
Se $\begin{cases} \text{(i) } \ \forall m \in \mathcal{O}\ \Delta(m, \theta), \\ \text{(ii) } \forall m \forall n\ (m, n \in \mathcal{O} \ \wedge n \prec m_0 \ \wedge \Delta(m, n) \ \wedge \Delta(n, m) \ \rightarrow \ \Delta(m, s(n))), \end{cases}$
então $\forall m \forall n\ (m, n \in \mathcal{O} \ \rightarrow \Delta(m, n))$.

§4. Sistemas Transfinitos não Maximizados

Finalizamos este capítulo definindo ainda um outro tipo especial relevante de sistemas transfinitos, que são aqueles não dotados de um elemento máximo, o que simplifica as formulações dependentes de citações da função sucessora, relacionadas ao princípio da indução fraca e à lei da indução dupla fraca.

4.1 Definição. Seja $\mathcal{T} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$ um *sistema transfinito*.
Dizemos que $\mathcal{T}$ é um *sistema transfinito não maximizado*, ou simplesmente que $\mathcal{T}$ é *não maximizado*, se $\mathcal{O}$ não possui $\prec$-máximo.

4.2 Notação. $\mathcal{T} = \langle \mathcal{O}, \theta, s, \prec \rangle$.

4.3 Lema. Se $\mathcal{T}$ é um sistema transfinito,
então as seguintes condições são equivalentes:

$$\begin{cases} \text{(i)} \ \ \mathcal{T} \text{ é não maximizado;} \\ \text{(ii)} \ \ s : \mathcal{O} \to \mathcal{O}; \\ \text{(iii)} \ \mathcal{D}(s) = \mathcal{O}. \end{cases}$$

4.4 Notação. $\mathcal{T}$ é um sistema transfinito não maximizado.

4.5. Indução Fraca em Sistemas Transfinitos Não Maximizados:
Se $\Delta(n)$ é uma propriedade para elementos $n \in \mathcal{O}$,
então a proposição $\forall n \in \mathcal{O}\ \Delta(n)$ é implicada pelas três condições seguintes:

(i) $\Delta(\theta)$,
(ii) $\forall n \in \mathcal{O}\ (\Delta(n) \to \Delta(s(n)))$,
(iii) $\forall n \in \mathcal{O}\ (n \neq \theta\ \wedge n \notin \mathcal{I}(s)\ \wedge \forall m \prec n\ \Delta(m) \to \Delta(n))$.

4.6. Indução Dupla Fraca em Sistemas Transfinitos Não Maximizados:
Seja $\Delta(m, n)$ uma propriedade para elementos $m, n \in \mathcal{O}$.

$$\text{Se} \begin{cases} \text{(i)} \ \ \forall m \in \mathcal{O}\ \Delta(m, \theta), \\ \text{(ii)} \ \ \forall m \forall n\ (m, n \in \mathcal{O}\ \wedge \Delta(m, n)\ \wedge \Delta(n, m) \to\ \Delta(m, s(n))), \\ \text{(iii)} \ \forall m \forall n\ (m, n \in \mathcal{O}\ \wedge n \neq \theta \wedge n \notin \mathcal{I}(s) \wedge \forall p \prec n\ (\Delta(m, p)\ \wedge \Delta(p, m)) \to\ \Delta(m, n)) \end{cases}$$

então $\forall m \forall n\ (m, n \in \mathcal{O}\ \to \Delta(m, n))$.

Capítulo 6

Considerações Finais

Este trabalho é esclarecedor no sentido de detalhar bem as condições em que os princípios da indução fraca, da indução completa e da boa ordem são equivalentes, de forma puramente algébrica, sem fazer uso de construções desnecessárias, como é feito, por exemplo, em livros sobre teoria dos conjuntos, tais como [Machover 1996] e [Suppes 1972]. Aqui é dado um entendimento mais claro e detalhado sobre estes três princípios, sem a necessidade de ideias relacionadas à construção de modelos particulares. Em sistemas de Peano, por exemplo, os números naturais são caracterizados com uma visão algébrica, na qual o princípio da indução fraca é um de seus postulados. O mesmo ocorre com respeito a qualquer coleção de ordinais. Nos sistemas quase transfinitos, ao contrário, a equivalência dos princípios da indução fraca, da indução completa e da boa ordem é apresentada de uma forma não trivial. Em particular, sob certas condições, sistemas quase transfinitos são sistemas transfinitos.

Outra realização deste trabalho está em uma exposição, a mais econômica possível, dos três princípios citados, em especial dos dois primeiros, a qual atende à máxima conhecida como "Navalha de Ockham", atribuída ao filósofo medieval inglês, William de Ockham, já citado antes no capítulo de introdução desta dissertação. Todas as referências consultadas de teoria dos conjuntos não atendem a esta máxima.

§1. Trabalhos Futuros

No decorrer deste trabalho, descobrimos generalizações para sistemas quase transfinitos e sistemas transfinitos que englobam um tipo de ordem que chamamos aqui, por ora, de *fundação*, que são ordens nas quais cada cadeia não vazia possui um elemento mínimo. Para tais ordens existem formulações correspondentes aos princípios da indução fraca, da indução completa e da boa ordem, os quais parecem ser equivalentes nas generalizações de sistemas quase transfinitos que estamos imaginando, e também parecem ser todos válidos nas correspondentes generalizações de sistemas transfinitos.

Em particular, a lei da indução completa que ora concebemos parece absorver todas as formas de indução matemática por nós conhecidas.

Referências Bibliográficas

BELL, J. L.; MACHOVER, M. **A Course in Mathematical Logic**. Amsterdam: North-Holland, 1977.

BRANQUINHO, J.; MURCHO, D.; GOMES, N. G. **Enciclopédia de Termos Lógico-Filosóficos**. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

BUCHSBAUM, A. Lógica geral. Disponível em: http://wwwexe.inf.ufsc.br/~arthur/material_didatico/LogicaGeral.pdf. Acesso em 23 de janeiro de 2010. 2006.

CARVALHO, R. L. de; OLIVEIRA, C. M. G. M. de. Modelos de computação e sistemas formais. In: **11ª Escola de Computação**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1998.

ENDERTON, H. B. **A Mathematical Introduction to Logic**. San Diego, California: Academic Press, 1972.

ENDERTON, H. B. **Elements of Set Theory**. New York: Academic Press, 1977.

FILHO, C. F. **História da computação: O Caminho do Pensamento e da Tecnologia**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2007.

FITTING, R. M. S. **Set Theory and the Continuum Problem**. New York: Clarendon Press, 1996.

GARCIA, A. **Uma Apresentação dos Principais Sistemas Relacionados à Lógica Clássica**. Dissertação de Mestrado – UFSC, Florianópolis: 2010.

HEGENBERG, L.; SILVA, M. F. de Andrade e. **Novo Dicionário de Lógica**. Rio de Janeiro: Pós Moderno, 2005.

HOLMES, M. **Elementary Set Theory with a Universal Set**. Disponível em: http://math.boisestate.edu/~holmes/holmes/head.pdf. Acesso em 20 de dezembro de 2009. 2005.

HRBACEK, K.; JECH, T. **Introduction to Set Theory**. 3ª Ed. New York: M. Dekker, 1999.

MACHOVER, M. **Set Theory, Logic and Their Limitations**. New York: Cambridge University Press, 1996.

POGORZELSKI, W. A. **Notions and Theorems of Elementary Formal Logic**. Bialystok, Polônia: Warsaw University, 1994.

SPADE, P. V. **William of Ockham**. Center for the Study of Language and Information, Stanford University, 2010. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/entries/ockham/>.

SUPPES, P. **Axiomatic Set Theory**. New York: Dover, 1972.

TAVARES, A. de C. B. N. O. **Indução Matemática, Somatório e Produtório. Trabalhos didáticos**. Niterói: Instituto de Lógica, Filosofia e Teoria da Ciência, Universidade Federal Fluminense, 1984.